



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSICIÓN DE FASE FUERA DE EQUILIBRIO EN
SISTEMAS COMPLEJOS DE COMPORTAMIENTO
COLECTIVO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

FRANCISCO JARAMILLO AGUILAR

TUTOR
DR. MARCELO DEL CATILLO MUSSOT.

2007





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos del alumno. Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno. Jaramillo Aguilar Francisco 55 66 10 50 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 096228856</p>
<p>2. Datos del tutor. Grado Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:</p>	<p>2. Datos del tutor. Dr. Marcelo del Castillo Mussot</p>
<p>3. Datos del sinodal 1. Grado Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:</p>	<p>3. Datos del sinodal 1. Dr. Gerardo Carmona Ruiz</p>
<p>4. Datos del sinodal 2. Grado Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:</p>	<p>4. Datos del sinodal 2. Dr. Neil Charles Bruce Davidson</p>
<p>5. Datos del sinodal 2. Grado Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:</p>	<p>5. Datos del sinodal 2. Dra. Susana Orozco Segovia</p>
<p>6. Datos del sinodal 2. Grado Nombre(s): Apellido paterno: Apellido materno:</p>	<p>6. Datos del sinodal 2. Dr. Denis Boyer Pierre</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito. Título Subtítulo Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del sinodal 2. Transición de fase fuera de equilibrio en sistemas complejos de comportamiento colectivo 63 p 2007</p>

Agradecimientos.

Agradezco a mi Madre por que este trabajo es producto de su sacrificio más que del mio.

Agradezco a mi tutor y amigo Dr. Marcelo del Castillo Mussot por creer en mi e impulsarme a descubrir y desarrollar aptitudes científicas.

Agradezco al excelente grupo de sinodales cuyas correcciones y sugerencias fueron invaluable para la profesionalización del trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por beneficiarme con la beca de tesis de licenciatura y por el nombramiento como Asistente de Proyecto "Propiedades Electrónicas de Heteroestructuras Semiconductoras de Baja Dimensionalidad" dirigido por el distinguido Dr. M. del Castillo Mussot.

Agradezco al Instituto de Física UNAM por permitirme ser Estudiante Asociado y por las facilidades otorgadas para la realización de la presente tesis.

Agradezco a la Facultad de Ciencias UNAM y a sus académicos quienes me formaron profesionalmente.

Agradezco especialmente al Dr. Denis Boyer investigador del departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física UNAM por su valiosa colaboración en el refinamiento del trabajo.

Dedicado a mis dos madres: Luz Ma. y la
UNAM, así como a la memoria de mi Padre.

Francisco Jaramillo Aguilar 2007

Índice general

0.1. Prefacio.	3
0.2. Introducción.	5
1. Sistemas Complejos, Autómatas Celulares y Procesos Fuera de Equilibrio Termodinámico.	6
1.1. Sistemas Complejos.	6
1.2. Autómatas Celulares.	8
1.2.1. Modos de Iteración.	12
1.3. Ejemplo (Modelado con Autómatas)	13
1.3.1. Autómata Umbral	13
1.4. Transición de Fase (Orden-Desorden).	18
1.5. Procesos Fuera de Equilibrio Termodinámico.	20
1.5.1. Dinámica Fuera de Equilibrio.	21
2. Modelos de Comportamiento Colectivo.	24
2.1. Modelo de Axelrod de Influencia Social.	24
2.1.1. Dinámica.	25
2.1.2. Resultados de la Simulación.	27
2.2. Primer Modelo Propuesto.	31
2.2.1. Dinámica y Estado Absorbente.	31
2.2.2. Resultados de la Simulación	34
2.2.3. Transición de Fase	36
2.3. Segundo Modelo Propuesto	42
2.3.1. Dinámica y Estado Absorbente.	42
2.3.2. Resultados de la Simulación	43
2.3.3. Distribuciones (Espectros Culturales).	45
2.4. Conclusiones	53
2.4.1. Primer Modelo.	53

2.4.2. Segundo Modelo. 55

0.1. Prefacio.

Un rápido y apreciable avance de las ciencias llamadas exactas se observa en la actualidad, esto se debe en parte a que la ciencia y la tecnología es una herramienta determinante en el desarrollo de los países y sus habitantes. Somos testigos de la invención de cada vez más sofisticado armamento y comunicaciones, creación de avanzada tecnología doméstica así como recientes avances y descubrimientos en el área Bio-Médica, dichas invenciones y avances conducen a cambios constantes en la dinámica de vida de las personas y de los grupos de personas aunque estos cambios en muchos de los casos no han favorecido el buen funcionamiento de las relaciones entre individuos, entre los individuos y el medio ambiente y entre las distintas sociedades, esto se puede corroborar en la magnitud de la pobreza, la violencia, el deterioro ecológico y las guerras que prevalecen actualmente.

Las técnicas matemáticas e incremento de la capacidad de los ordenadores disponibles así como el reciente enfoque de la Física contribuyen en la actualidad de manera multidisciplinaria a desarrollar técnicas de modelado cuantitativas para un profundo análisis de los sistemas sociales.

En la presente tesis, después de una breve introducción se exponen fundamentos necesarios como son la definición por algunos autores de los sistemas complejos y de los autómatas celulares utilizados para el modelado de los mismos así como algunos modos y geometrías de los autómatas. Como ejemplo se expone el autómata umbral y para mostrar una forma de modelar usando este autómata se ilustra el modelo de sinapsis neuronal de Hopfield (1982) [1]. Después se explica brevemente que es una transición de fase orden-desorden además de definir que son los procesos fuera de equilibrio en modelos estocásticos particularmente en sistemas que pretenden simular propagación de características en sociedades pero que también pueden modelar dinámicas de consenso.

Haciendo uso de los conceptos anteriormente mencionados y como principal motivación a este trabajo se expone un reciente modelo de la Socio-Física acerca de la influencia social de R. Axelrod y los resultados de su simulación numérica. Enseguida como contenido original se presentan resultados de simulaciones numéricas que generalizan el modelo de Axelrod y que pretenden modelar de forma más realista los mecanismos de diseminación de características culturales en las sociedades además de contribuir como técnicas cuantitativas que puedan servir como herramientas con enfoque de la Física para uso de los científicos sociales pretendiendo acortar la brecha

de colaboración entre estas disciplinas.

En el primero de los dos modelos que se desarrollarán también llamados modelos de agentes se obtienen curvas de interacciones efectivas (cambios en los atributos culturales de los agentes sociales) como función de un nuevo parámetro restrictivo ε . Estas curvas nos indican los valores de los parámetros en donde en general todos los elementos de los sistemas interactúan al menos una vez con sus primeros vecinos¹. Para este mismo modelo se encuentra una transición de fase orden-desorden caracterizada por los promedios de los tamaños máximos de los conjuntos o dominios culturales conexos (regiones donde los agentes comparten todos sus atributos). En la fase de orden el tamaño promedio del mayor dominio es del orden de todo el sistema es decir, todos o la mayoría de los agentes comparten los mismos atributos, estado también llamado cultura global, mientras que en la fase de desorden el sistema está altamente fragmentado lo que significa que hay muchos dominios con tamaños pequeños. Se observó además un fenómeno que consiste en la formación de conjuntos aislados es decir, grupos de agentes con iguales o diferentes atributos rodeados o contenidos dentro de otro dominio cultural esto es una especie de aislamiento cultural observado frecuentemente en las grandes capitales del mundo.

El segundo modelo propuesto prohíbe a los agentes imitar las características culturales de sus primeros vecinos limitando la dinámica a ser únicamente de acercamiento. Con esta restricción sobre la imitación de características no se predijo la formación de dominios culturales y la caracterización de los estados finales se hizo mediante una distribución de distancias culturales entre todos los pares de agentes del sistema. Se observan cambios abruptos en dichas distribuciones para los cambios en el parámetro ε lo que puede significar que a mayor nivel de sociabilidad los individuos interactúan con mayor frecuencia. Se observaron regiones del sistema en donde los agentes imitaron sus atributos a pesar de que las reglas de interacción no lo permitían, la única forma de que esto ocurra es por una especie de *influencia social indirecta* en la que un par de individuos o agentes se igualan (distancia cultural igual a cero) debido al tirón cultural que ejercen sus vecinos y no por la influencia de interacciones directas, lo que lleva concluir que los individuos pueden evolucionar hasta ser idénticos culturalmente a sus primeros vecinos sin necesariamente interactuar con ellos de manera directa.

¹Interacción de corto alcance espacial.

0.2. Introducción.

De una manera poco evidente existen similitudes entre el comportamiento de un universo poblado de galaxias siempre en evolución, una altamente interconectada red de procesadores digitales, simples autómatas ocupando un espacio bidimensional y una red neuronal cerebral, dichas similitudes radican en el hecho de que en ciertos niveles el comportamiento dinámico de estos sistemas se rige por leyes dictaminadas por la naturaleza de las interacciones entre los elementos individuales. El estudio de estas leyes de evolución es el principal objetivo del campo de la complejidad, una síntesis entre la Física, Matemáticas, Neuro-Biología, Biología Molecular y ciencias de la Computación.

A los sistemas complejos se les asocia fuertemente con los procesos fuera de equilibrio y la Física no lineal. Muchos sistemas complejos presentan las siguientes características a) son sistemas con un gran número de elementos que interactúan entre sí b) tienen un gran número de grados de libertad, c) son sistemas que se encuentran fuera del equilibrio termodinámico y d) las interacciones en un mismo sistema pueden ser diversas.

La mayor parte del conocimiento de la Termodinámica estadística se limita a procesos de equilibrio por lo tanto, para avanzar en el entendimiento de distintos sistemas fuera de equilibrio en ocasiones se recurre a modelos y simulaciones numéricas de los fenómenos. Con dichas simulaciones numéricas se obtiene información estadística sobre los diferentes mecanismos constituyentes de las dinámicas evaluadas.

Utilizando los conceptos y herramientas hasta ahora desarrollados en Física estadística, Física no lineal y Física estadística computacional, se quieren identificar mecanismos generales detrás del comportamiento de modelos colectivos de propagación de características que pueden enfocarse a fenómenos multidisciplinarios, en este caso se enfocarán en dinámicas sociales pero también podrían ser modelos de consenso. Entre las múltiples herramientas existentes para llevar a cabo este proyecto se usó principalmente la programación de autómatas celulares que requieren el uso intensivo de computadoras de alto rendimiento. Dichos autómatas simularán numéricamente la evolución de los sistemas complejos que se analizarán en el presente trabajo, es decir el objetivo de la presente tesis es modelar, analizar y exponer resultados de experimentos físico-numéricos computacionales de una generalización de un modelo social comportamiento colectivo y una segunda versión del mismo.

Capítulo 1

Sistemas Complejos, Autómatas Celulares y Procesos Fuera de Equilibrio Termodinámico.

1.1. Sistemas Complejos.

Una definición intuitiva de la complejidad la encontramos en el diccionario: “un objeto complejo es un arreglo de partes tan intrincado que es difícil entenderlo y tratar con él” [3].

Según el enfoque de G. Weisbuch un sistema complejo es aquel que está compuesto de un gran número de elementos distintos en sus características que interactúan entre sí [4].

Los sistemas complejos generalmente no entran en los campos de las disciplinas tradicionales, pero para su exitoso estudio se requiere del conocimiento y técnicas de varias disciplinas. Las ciencias de la complejidad emergieron en parte como la síntesis de algunas de las ciencias tradicionales, pero también emergen como resultado de nuevas ideas, nuevas preguntas y técnicas recientemente desarrolladas. Se incluye dentro de lo último mencionado el papel que juega el poder de las computadoras, el desarrollo de la dinámica no lineal, imagen digital y programas adaptativos.

Las propiedades más importantes de estos sistemas en cuanto a su estado, estructura y forma, se deben a su dinámica que es a menudo irreversible en

el tiempo y además muchos sistemas complejos son desordenados es decir, son formados de muchos elementos que interactúan entre sí con interacciones que varían de un elemento a otro, sorprendentemente a pesar del desorden suelen emerger comportamientos ordenados y robustos [5].

Ejemplo de sistema complejo es el cerebro humano, compuesto por aproximadamente 1×10^9 células (neuronas). Estas células interactúan por medio de señales electroquímicas a través de la sinapsis, y aunque no hay muchos tipos diferentes de neuronas, estas se diferencian por la estructura de sus conexiones. Otro claro ejemplo son los sistemas computacionales, que constan de un gran número de componentes eléctricos que evidentemente interactúan ya sea al nivel de transistores o de puertas lógicas. Los sistemas sociales y económicos se componen claramente de muchos elementos diferentes interactuando. En concreto la mayoría de sistemas naturales o artificiales pudieran ser clasificados como del tipo complejo.

Según R. Badii y A. Politi, una "teoría de la complejidad" podría ser vista como una teoría del modelado que implementa varios esquemas reduccionistas como son la eliminación (o incremento) de variables, separación de acoplamientos débiles de fuertes o promediando sobre subsistemas, evaluando eficiencia y posiblemente sugiriendo nuevas representaciones de fenómenos naturales, además deben considerarse tres puntos fundamentales [6]:

1. El proceso de entendimiento de los sistemas implica la presencia de un sujeto que tiene la encomienda de describir al objeto, usualmente por medio de predicciones con modelos. Como resultado, la complejidad es función de ambos, el sujeto y el objeto.
2. El objeto convenientemente debe ser dividido en partes que a su vez deben ser desglosadas en subelementos, creando así una jerarquía. Debe notarse que la jerarquía no necesariamente se manifiesta en el objeto, pero debe ser incluida en la elaboración del modelo. La presencia de una estructura de jerarquías no es un indicador infalible de complejidad.
3. Habiendo individualizado una estructura jerárquica, el sujeto se encara con el problema de estudiar las interacciones entre los subsistemas y de incorporarlas en el modelo. La consideración de interacciones a diferentes niveles de resolución, conduce al concepto de escalamiento. Es importante hacer notar que el escalamiento no implica necesariamente complejidad.

Como un ejemplo muy particular consideremos un objeto representado como una secuencia de números enteros que el investigador trata de reproducir exactamente detectando sus reglas internas e incorporándolas al modelo que es también una secuencia de números enteros. El procedimiento es exitoso si se obtiene una reducción de tamaño del sistema. Por ejemplo, una secuencia periódica tal como 011011011... es totalmente conocida por la celda 011 y el número de veces que se repite. Este acercamiento conduce a dos disciplinas: ciencias de la computación y lógica matemática. En lo anterior, el modelo es un programa computacional y el objeto es la secuencia de salidas (outputs) del mismo. En general el modelo consiste en un conjunto de reglas de un sistema formal por ejemplo la obtención de la raíz cuadrada, y el objeto es cualquier aserción válida del sistema (p.e. $\sqrt{4} = 2$).

Compresión significa que el conocimiento de todo el sistema formal permite la deducción de todos los teoremas automáticamente, sin información externa. En este sentido, la complejidad de una línea de símbolos es llamada algorítmica y está definida como el tamaño del mínimo programa capaz de reproducir la línea de entrada. Como consecuencia, objetos completamente aleatorios tienen máxima complejidad algorítmica por que no es posible compresión alguna en estos [6].

1.2. Autómatas Celulares.

El desarrollo de los autómatas celulares comenzó hacia 1943 cuando John Von Neumann consideró la posibilidad de generar vida artificial tratando de que un robot se copiara a si mismo. Bajo sugerencia de Stanislaw Ulam, coinventor de la bomba de Hidrógeno, Von Neumann utilizó patrones en una cuadrícula en el plano que evolucionaban según una regla de transformación fija. De esta forma, el problema de la autoreproducción quedaba reducido a la búsqueda de ciertas configuraciones que con la aplicación de la regla diera lugar a copias idénticas.

Los autómatas celulares constan de individuos o agentes distribuidos en los nodos de una latís ó arreglo periódico o no periódico, ya sea unidimensional o bidimensional en los casos más generales pero pueden ser n -dimensionales. Por ejemplo el conjunto de números enteros Z es isomorfo a una latís celular unidimensional, es decir una línea infinita de autómatas.

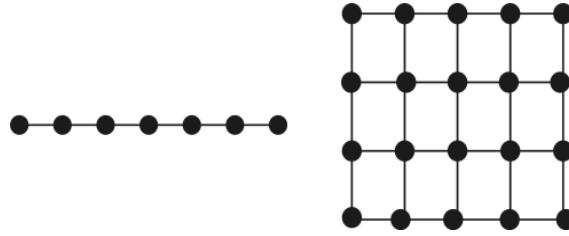


Figura 1. Autómata celular unidimensional (izq.) y bidimensional (der.) con condiciones a la frontera no periódicas.

La conectividad entre los autómatas está limitada a cierta vecindad que usualmente consiste en los primeros vecinos. La estructura de la vecindad preserva las simetrías translacional y rotacional de la latís en el caso periódico.

Teóricamente la latís es infinita pero en la práctica esta siempre tiene bordes o fronteras que deben de ser considerados cuando se programa. Se pueden usar condiciones periódicas en las fronteras del autómata, esto quiere decir que el borde derecho se úne con el izquierdo y el borde superior se une con el inferior, en otras palabras la estructura de conectividad es circular más que lineal o toroidal más que planar.

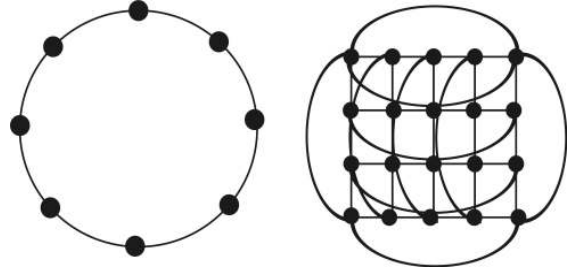


Figura 2. Autómata celular unidimensional (izq.) y bidimensional (der.) con condiciones a la frontera periódicas.

Las reglas de cambio de estado o de interacción entre los individuos autómatas son en principio las mismas para todos los elementos en la latís, aunque ciertos autores han expresado el interés en estructuras celulares con autómatas con reglas diferentes conocido como autómata celular inhomogéneo, como ejemplo puede consultarse el modelo de Kauffman de regulación genética [7].

Se ha probado que los autómatas celulares bidimensionales son herramientas muy útiles para modelar fenómenos en campos como la física del

crecimiento, la físico-química e hidrodinámica, donde es posible seguir los mecanismos de interacción entre los autómatas y observar el estado de la latís en cualquier instante dado de la iteración [8]. En estos campos las propiedades dinámicas son usualmente descritas por ecuaciones diferenciales parciales que contienen términos no lineales y que no son solubles mediante métodos analíticos como por ejemplo la ecuación de fluidos Navier- Stokes [9]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v \quad (1.1)$$

Los métodos clásicos directos son computacionalmente intensivos y requieren de sofisticadas técnicas de programación. Los autómatas celulares cuando pueden ser aplicados son invaluable debido a la rapidez de computo y muchas veces a la simplicidad de la programación requerida, además de la posibilidad de visualizar la evolución de los patrones generados por la evolución de los distintos sistemas.

En dos dimensiones la estructura de la conectividad entre los autómatas está relacionada a las simetrías de la latís. En el caso de una latís cuadrada existen entre muchas la vecindad de Von Neumann también llamada primeros vecinos y también la vecindad con primeros y segundos vecinos conocida también como vecindad de Moore.

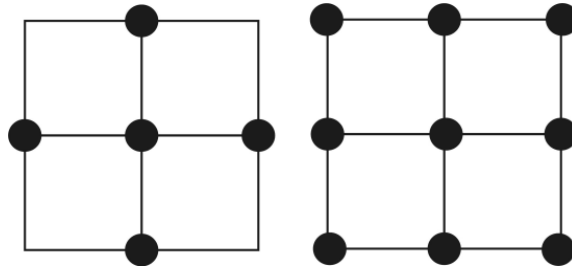


Figura 3. Vecindad de Von Neumann (izq.) y vecindad de Moore (der.)

Tenemos que abandonar las matemáticas continuas y empezaremos por el tiempo, este tendrá que ser discretizado en intervalos numerados desde 1 hasta n . Las variables representadas por el autómata serán actualizadas durante cada intervalo por lo que entonces tiene sentido representar el tiempo por $t = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Siendo rigurosos, también debe tomarse en cuenta

que los intervalos de tiempo dependen de la frecuencia de procesamiento de las unidades lógicas del ordenador.

Como se verá mas adelante dependiendo el modelo que se esté analizando se pueden elegir diferentes formas de medir el tiempo por ejemplo con el número de pasos que realiza un autómata. Una segunda operación de discretización es reemplazar las variables continuas y las ecuaciones diferenciales por autómatas de estado finito. En ciencias de la computación la definición clásica de autómata consta de tres conjuntos [10] :

1. I , el conjunto de entradas i (*inputs*),
2. S , el conjunto de estados internos s , y
3. O , el conjunto de salidas o (*outputs*).



Figura 4. Definición clásica de autómata.

También las funciones:

1. $S(i, s)$, la función de cambio de estado, que transforma a las entradas y el estado al tiempo t en un nuevo estado en el tiempo $t + 1$.
2. $O(i, s)$, la función de salida, que transforma las entradas y el estado al tiempo t en las salidas al tiempo $t + 1$.

donde i es la entrada del autómata y s es el estado interno del mismo.

En general puede haber muchas entradas, muchos estados internos y muchas salidas, por lo que S y O son funciones de los vectores \vec{i} , \vec{s} y \vec{o} . El punto importante es que estas variables tienen que ser discretas y por lo tanto puedan representarse por conjuntos de números enteros.

1.2.1. Modos de Iteración.

Iteración en Modelos Deterministas.

Se debe establecer con precisión como el autómata cambiará de estado, ya sea simultanea o secuencialmente y en que orden lo hará, esto en el caso de modelos deterministas. Por ejemplo en la iteración en paralelo todos los autómatas de la latís cambian simultáneamente su estado como función de los estados de todos los elementos en un paso anterior de tiempo. Así si $x_i(t)$ es el estado del i -ésimo autómata en la latís al tiempo t entonces:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)] \\x_2(t+1) &= f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)] \\&\vdots \\x_N(t+1) &= f_N[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde f_1, f_2, \dots, f_N son las funciones de transición del i -ésimo autómata [11].

Por otro lado, en la iteración en secuencia o iteración en serie, solo un autómata a la vez cambia su estado. Por lo tanto la iteración en secuencia está definida por el orden en el cual el autómata tiene que ser actualizado, por ejemplo:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)] \\x_2(t+2) &= f_2[x_1(t+1), x_2(t), \dots, x_N(t)] \\&\vdots \\x_N(t+N) &= f_N[x_1(t+1), x_2(t+2), \dots, x_N(t)]\end{aligned}\tag{1.3}$$

Iteración en Modelos Estocásticos.

Los autómatas que se emplearán en los modelos de comportamiento colectivo del capítulo 2 presentan interacciones binarias en secuencia aleatoria es decir, en cada paso de tiempo t un autómata i es elegido de forma aleatoria para su interacción con un autómata $j \neq i$ de tal forma que:

$$x_i(t+1) = S(x_i(t), x_j(t)) \text{ y } x_j(t+1) = x_j(t) \quad (1.4)$$

donde S es una función que describe las reglas de interacción entre los autómatas i y j . Esta forma de iteración cumple con la propiedad de Markov la cual esta definida en la teoría de la probabilidad de la siguiente manera:

Matemáticamente, si $X(t)$, $t > 0$ es un proceso de Markov entonces:

$$\begin{aligned} P[y = X(t+h) \mid x(k) = X(k), k \leq t] = \\ P[y = X(t+h) \mid x(k) = X(t), \forall h > 0] \end{aligned} \quad (1.5)$$

En pocas palabras un proceso estocástico es markoviano si la distribución de probabilidad condicional ¹ de futuros estados del sistema depende únicamente del estado actual y no de los pasados es decir (el sistema no tiene memoria) es condicionalmente independiente de los estados pasados dado el estado actual.

1.3. Ejemplo (Modelado con Autómatas)

1.3.1. Autómata Umbral

La función de cambio de estado de un autómata umbral esta definida por:

$$x(t) = Y \left[\sum_j T_j x_j(t-1) - \Theta \right] \quad (1.6)$$

¹La probabilidad condicional se define: $P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$.

donde Y es la función escalón unitario que cumple:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{sí } \sum_j T_j x_j(t-1) - \Theta \geq 0 \\ 0 & \text{sí } \sum_j T_j x_j(t-1) - \Theta < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Las entradas (inputs) se indican con el subíndice j y T_j es el peso de la entrada j -ésima. En resumen el autómata toma el valor 1 si la suma $\sum_j T_j x_j(t-1)$ es mayor o igual al umbral Θ y 0 de otra forma.

En concreto, la función de cambio de estado está determinada por la elección de los pesos T_j y por el umbral Θ .

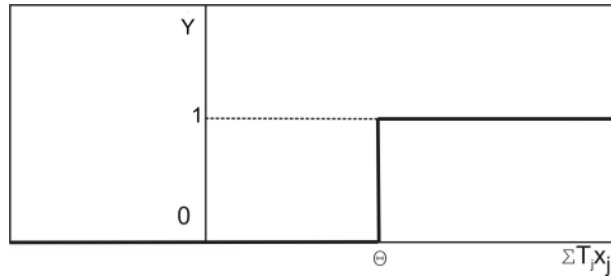


Figura 5. Función umbral.

Modelo de Hopfield

La versión mas simple de redes neuronales fué propuesta por J. Hopfield en 1982. La unidad básica del modelo es el autómata umbral. Este autómata se propuso como modelo de células nerviosas ó neuronas por McCulloch y Pitts a principios de 1943 [11]. Estas células pueden emitir trenes de impulsos eléctricos en respuesta a señales de otras neuronas conectadas entre sí.

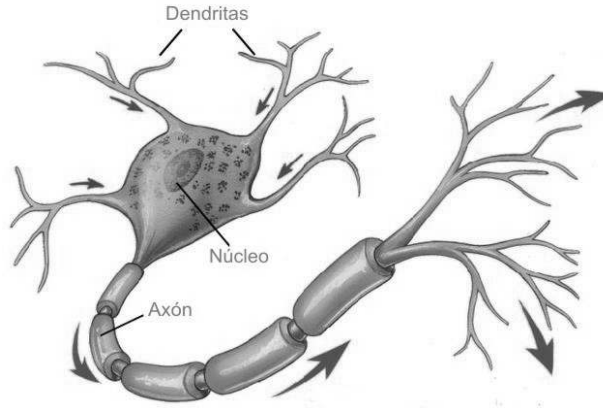


Figura 6. Neurona.

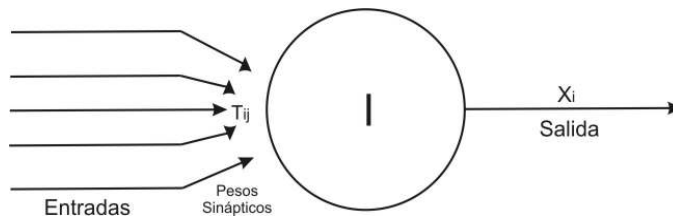


Figura 7. Representación neuronal.

Una manera muy simplificada de describir a las neuronas es considerándolas como autómatas en el estado 1 cuando estas emiten un tren de pulsos y en el estado 0 cuando se encuentran en estado de reposo y no emiten pulsos. Las entradas del autómata representan la sinapsis de la neurona es decir, las conexiones con otras neuronas que influencian el estado de disparo de una neurona particular. Esta sinapsis puede ser excitatoria, en este caso $T_j > 0$ la actividad de la neurona es reforzada si la entrada está en estado 1, o inhibitoria en el caso opuesto $T_j < 0$.

Una neurona i es entonces representada por un autómata umbral cuyo estado $x_i(t)$ es actualizado por la regla:

$$x_i(t) = Y \left[\sum_j T_{ij} x_j(t-1) - \Theta_i \right] \quad (1.8)$$

La suma es sobre todos los autómatas de entrada j . Los T_{ij} llamados en Biología pesos sinápticos representan la intensidad de la interacción entre el autómata de entrada j y el autómata i . Los pesos sinápticos positivos son interpretados como conexiones excitatorias y los negativos como conexiones inhibitorias. Θ_i es el umbral del autómata i . En otras palabras, el autómata i se encuentra en estado 1 si la suma $\sum_j T_{ij} x_j$ es mayor o igual al umbral y se encuentra en estado 0 de otra forma.

En este modelo se usa iteración secuencial aleatoria es decir, en cada intervalo de tiempo un solo autómata elegido aleatoriamente es actualizado. Este modo de iteración es usado frecuentemente en simulaciones numéricas Monte Carlo de ciertos sistemas físicos.

En [12] D. Hebb sugiere que a un nivel celular el realizar un proceso cognositivo implica un reforzamiento de la sinapsis de neuronas con actividad correlacionada. En términos de autómatas esto es el equivalente de “construir” los pesos a partir de sucesivas presentaciones de un conjunto de configuraciones de referencias. Una presentación consiste en fijar el estado de cada autómata a aquél que le corresponde en el conjunto referencia.

Centrándose en una neurona para simplificar el funcionamiento o evolución es el siguiente:

- 1.- Cada neurona recibe como entrada la salida de cada una de las otras neuronas. Estos valores de salida inicialmente coinciden con los estados iniciales de los autómatas multiplicados por los pesos de las conexiones correspondientes. La suma de todos estos valores constituirá el valor de entrada neta de la neurona a la que hay que aplicarle la función de transferencia obteniéndose el valor de salida correspondiente que será la entrada de otra neurona.
2. Este proceso continúa hasta que las salidas de las neuronas se estabilizan alcanzando la convergencia $x_i(t+1) = x_i(t) \forall t$ durante algunas iteraciones.

Con el fin de ilustrar este comportamiento se puede usar un sistema simplificado de procesamiento de imágenes. Cada uno de los $8 \times 8 = 64$ elementos

o pixeles es un autómata umbral conectado a todos los demás. El estado del pixel es representado por su color, donde el color negro representa el estado 1 y el blanco el estado -1 . En este contexto, las configuraciones de los autómatas son también llamadas patrones. Tres patrones que representan las letras X , b y K se usan de referencias. El patrón X por ejemplo corresponde a la configuración mostrada en la figura 8.

1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1

Figura 8. Configuración (patrón) que representa la referencia X .

En la Fig. 9 se presentan algunos resultados de la evolución de una red construida usando las referencias X , b y K para asignar los pesos sinápticos. Analizando los patrones pertenecientes a la referencia X Fig. 9b, se pueden observar pequeñas perturbaciones en la referencia que radican en la inversión del estado de algunos pixeles. Finalmente estas perturbaciones son corregidas por la dinámica convergente del sistema.

En la Fig. 9c se observa otro patrón invariante que es casi el opuesto al patrón K . Finalmente se observa en la Fig. 9e la aparición de un atractor² que es una combinación de b y K .

²En los sistemas dinámicos, un atractor es el conjunto al que el sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo. Para que el conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas. Geométricamente un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o incluso un conjunto complicado de estructura fractal conocido como atractor extraño.

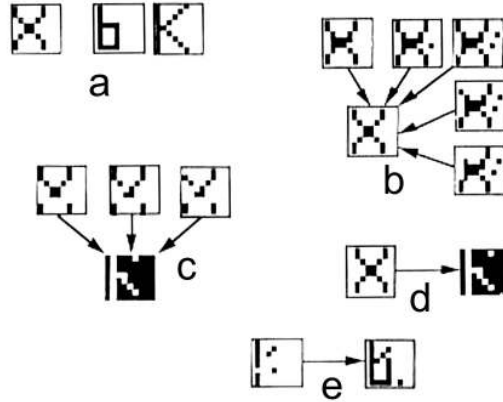


Figura 9. Patrones en imagen resultado de la simulación del modelo de Hopfield [13].

El modelo de Hopfield representa un buen ejemplo sobre el uso de autómatas para modelar de manera simple un fenómeno tan complejo entregando resultados gráficos directos que caracterizan la rica dinámica del fenómeno.

1.4. Transición de Fase (Orden-Desorden).

Consideremos por ejemplo el vapor de agua, cuando está a una alta temperatura sus moléculas se mueven libremente sin una correlación mutua. Cuando la temperatura es disminuida, una gota de líquido es formada, las moléculas ahora mantienen una distancia del orden de alcance de su potencial de interacción y por lo tanto su movimiento está altamente correlacionado. Finalmente si se continúa bajando la temperatura hasta el punto de congelamiento, el agua es transformada en cristales, ahora las moléculas están arregladas en un orden fijo. Una de las cosas más interesantes de lo anterior es que las mismas moléculas están presentes en las diferentes fases, pero las características macroscópicas del sistema en sus tres fases difieren drásticamente y con ello sus propiedades mecánicas, ópticas, eléctricas y térmicas.

Otro tipo de ordenamiento ocurre en los ferromagnetos. Cuando se calienta un ferromagneto este pierde su magnetización. Cuando la temperatura es disminuida el magneto recobra su magnetización. En un nivel microscópico (atómico) podemos ver al magneto como compuesto de muchos magnetos atómicos elementales llamados espines. En una alta temperatura los magnetos elementales apuntan en direcciones aleatorias, cada uno de los momentos

magnéticos al sumarse se cancelan unos con otros dando como resultado una nula magnetización macroscópica. Por debajo de una temperatura crítica T_c , los magnetos elementales están alineados dando lugar a una magnetización macroscópica. El cambio de una fase a otra es llamada transición de fase [14]. Una transición de fase similar se observa en los superconductores. En ciertos metales, aleaciones y cerámicos la resistencia eléctrica desaparece completa y dramáticamente por debajo de cierta temperatura.

1.5. Procesos Fuera de Equilibrio Termodinámico.

"Los sistemas vivientes existen en un mundo de flujos de materia y energía. Un organismo permanece con vida en su estado altamente organizado tomando energía de un sistema mucho más grande en el que está inmerso y procesándola para producir individualmente una menor entropía, un estado más organizado."....

E. Schroedinger [15].

Los modelos estocásticos de muchas partículas en este caso de agentes están definidos por un conjunto C de posibles configuraciones de las partículas $c \in C$. El proceso evoluciona en el tiempo por transiciones instantáneas $c \rightarrow c'$ que ocurren espontáneamente a frecuencias $w_{c \rightarrow c'} \geq 0$. El conjunto de todas las configuraciones, las frecuencias de transición y el estado inicial describen completamente el modelo estocástico en estudio.

Un importante objeto de estudio es la probabilidad $P_t(c)$ de encontrar al sistema en el tiempo t en una cierta configuración c , esta probabilidad debe estar normalizada $\sum_c P_t(c) = 1$, y aunque la evolución de las configuraciones del sistema es generalmente impredecible debido a su naturaleza estocástica, la evolución temporal de la distribución de probabilidad $P_t(c)$ es predecible y está dado por un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Estos sistemas de ecuaciones que usualmente se le llama ecuación maestra [16], describe el flujo de probabilidad entre diferentes configuraciones en términos de contribuciones de pérdida y ganancia de elementos en el estado c y c' :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(c) = \sum_{c'} w_{c' \rightarrow c} P_t(c') - \sum_{c'} w_{c \rightarrow c'} P_t(c) \quad (1.9)$$

Existen muchas razones para estudiar transiciones de fase fuera de equilibrio una de ellas y la más importante, es que en la naturaleza el equilibrio es más una excepción que una regla y los cambios estructurales usualmente tienen lugar en condiciones de no equilibrio. Existe mucho que aprender sobre los complejos fenómenos que ocurren fuera del equilibrio, por ejemplo Erwin Schroedinger reconocía que la vida es un sistema que está

lejos del equilibrio termodinámico que mantiene su nivel local de organización (orden) a expensas de incrementar la entropía del baño térmico sistema que la contiene³.

1.5.1. Dinámica Fuera de Equilibrio.

La mecánica estadística del equilibrio se basa en el axioma de que un sistema estocástico aislado en un estado estacionario maximiza su entropía. Esto significa que visita las configuraciones accesibles y de misma energía con la misma probabilidad, formando un ensamble microcanónico.

Se dice que los sistemas dinámicos están fuera del equilibrio si los procesos microscópicos violan la condición de balance detallado:

$$w_{c \rightarrow c'} P_t(c) = w_{c' \rightarrow c} P_t(c') \quad (1.10)$$

De forma práctica el término "fuera de equilibrio" se refiere a situaciones donde las corrientes de probabilidad entre microestados no tienden a cero o también que las corrientes de probabilidad entre pares de estados c y c' no se cancelan. De forma clara el balance detallado se cumple cuando existen la misma cantidad de transiciones por unidad de tiempo del estado c al estado c' como del c' al c para el proceso inverso.

Un proceso que no ha alcanzado un estado estacionario viola el balance detallado y en consecuencia está fuera del equilibrio. Pero además los sistemas que se encuentran en estado estacionario pueden estar fuera del equilibrio.

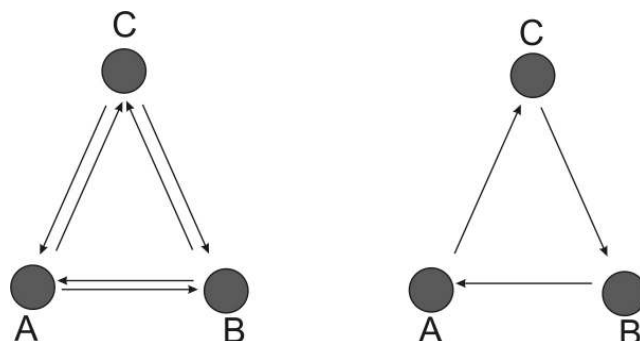


Figura 10. Balance detallado y estados estacionarios fuera de equilibrio.

³Si el baño térmico es infinito entonces su entropía no incrementa permanece casi constante.

La Fig. 10 muestra un sistema con tres microestados A, B y C. En ambos casos la función de distribución estacionaria es $P_s(A) = P_s(B) = P_s(C) = \frac{1}{3}$. En la figura de la izquierda las transiciones ocurren con la misma frecuencia en todas direcciones, mientras que la corriente de probabilidad efectiva se hace cero y la dinámica obedece la condición de balance detallado 1.10. En el modelo en la figura de la derecha Fig.9, las transiciones ocurren solamente en sentido de las manecillas del reloj con frecuencias $w_{A \rightarrow B} = w_{B \rightarrow C} = w_{C \rightarrow A} = 1$ conduciendo a corrientes de probabilidad que no se anulan. En consecuencia incluso en estado estacionario el sistema está fuera de equilibrio [17].

Estados Absorbentes.

Existen modelos donde se presentan interacciones binarias entre los elementos de un sistema. A un par de estos elementos interactuantes se les llama enlace por ejemplo (x_i, x_j) o (i, j) . Las reglas de interacción $S(x_i, x_j)$ o $L = l(i, j)$ que cumplen estos elementos determinan cuando un enlace es activo o no activo. Se entiende por enlace activo cuando según las reglas de interacción el par de elementos (i, j) están en condición de interactuar en un instante dado de tiempo e inactivo en el caso contrario.

En muchos modelos de interacciones binarias que presentan procesos markovianos solo los enlaces activos al tiempo t pueden activar enlaces al tiempo $t + 1$, por lo tanto la configuración que no tiene enlaces activos juega un papel muy especial. Dicho estado sin enlaces activos también llamado estado absorbente se alcanza por medio de la dinámica y no se puede salir de él. Los estados absorbentes pueden ser pensados como trampas, una vez que un sistema alcanza este estado se encuentra atrapado y permanecerá ahí por siempre.

La existencia de estados absorbentes demuestra que los procesos dinámicos de los sistemas se encuentran fuera del equilibrio térmico. La mecánica estadística del equilibrio trata con ensambles en equilibrio estacionario que pueden ser generados por dinámicas que obedezcan la condición de balance detallado 1.10, lo que significa que las corrientes de probabilidad entre pares de estados se cancelen. Debido a que el estado absorbente solo puede ser alcanzado pero no es posible salir de él, siempre existe una corriente de probabilidad distinta de cero hacia el estado absorbente que viola la condición de balance detallado, por lo tanto la evolución temporal antes de alcanzar el estado absorbente no puede ser descrita en términos de ensambles

termodinámicos. Importantes clases de transiciones de fase fuera de equilibrio como por ejemplo percolación dirigida [17] ocurren en modelos que presentan estados absorbentes.

Capítulo 2

Modelos de Comportamiento Colectivo.

2.1. Modelo de Axelrod de Influencia Social.

"Tú nunca podrás predecir lo que cualquier persona hará, pero si puedes decir con precisión lo que hará un número promedio de ellas. Los individuos varían, pero los porcentajes permanecen constantes, dice el estadista.... " Sherlock Holmes.

Arthur Conan Doyle.

El estudio de los sistemas complejos ha entrado en las ciencias sociales con el propósito entre otros de entender como la auto-organización, los efectos cooperativos y la adaptación funcionan en los sistemas sociales. En este contexto el uso de autómatas celulares dinámicos en ocasiones simulán adecuadamente los mecanismos en la base de los complejos comportamientos observados.

Existen antecedentes del estudio de transiciones de fase en sociología así como en latices por ejemplo desde 1976 [18] y hasta el presente surgen más complejos análisis [19].

R. Axelrod propuso un modelo [20] para imitar el funcionamiento de la diseminación de cultura en sociedades. La cultura es parametrizada como el conjunto de F atributos individuales tales como el lenguaje, artes, normas sociales, etc. sujetos a influencia social es decir, estos atributos pueden cambiar como efecto de interacciones mutuas. Esta dinámica debe satisfacer dos simples propiedades:

1. Los individuos prefieren interactuar con otros que compartan muchos de sus atributos culturales.
2. Las interacciones incrementan el número de atributos que los individuos comparten.

Comenzando en un estado inicial con q valores de los F atributos distribuidos aleatoriamente entre agentes ocupando espacios unidimensionales y bidimensionales, los puntos anteriores provocan la formación y fragmentación de regiones de cultura compartida llamados dominios culturales [21].

El modelo presenta una transición que separa una fase de orden de una de desorden. Las fases son caracterizadas por el tamaño de la región de la cultura dominante que ocupa una fracción de la totalidad del sistema. En la fase de desorden el sistema se encuentra en un estado altamente fragmentado con una distribución no trivial de los tamaños de las regiones culturales, mientras que en la fase de orden el tamaño del dominio con mayor número de elementos es del orden de todo el sistema.

2.1.1. Dinámica.

En la práctica el modelo de Axelrod está definido en una latís cuadrada de tamaño lineal L . En cada sitio i se encuentra un conjunto de F variables con valores enteros positivos $\sigma_{i,f}$ que definen los atributos del agente que se encuentra en ese sitio. Cada atributo $f = 1, 2, 3, \dots, F$ es designado aleatoriamente mediante una distribución uniforme de números enteros entre 1 y q . El parámetro q es una medida de la diversidad del sistema [21].

Considérense N agentes en los nodos de una latís cuadrada (autómata celular bidimensional no periódico Fig. 1). El estado del agente i como se dijo anteriormente es un vector F -dimensional $(\sigma_{i,1}, \sigma_{i,2}, \dots, \sigma_{i,F})$. Cada $\sigma_{i,f}$ es un valor entero entre 1 y q que inicialmente son asignados independientemente y con una probabilidad uniforme $1/q$. La dinámica en el tiempo discreto está definida en los siguientes pasos de interacción.

1. Se seleccionan aleatoriamente un par de agentes vecinos (i, j) , usando una vecindad de Von Nuemann o de primeros vecinos (ver Fig.1).
2. Se calcula el traslape también llamado overlap (número de atributos compartidos):

$$l(i, j) = \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{i,f}, \sigma_{j,f}} \quad (2.1)$$

donde:

$$\delta_{\sigma_{i,f}, \sigma_{j,f}} = \begin{cases} 0 & \text{sí } \sigma_{i,f} \neq \sigma_{j,f} \\ 1 & \text{sí } \sigma_{i,f} = \sigma_{j,f} \end{cases} \quad (2.2)$$

3. Sí $0 < l(i, j) < F$ se dice que el (i, j) es un enlace activo y los agentes i y j interactúan con probabilidad $l(i, j)/F$. En caso de interacción efectiva se escoge f' tal que $\sigma_{i,f'} \neq \sigma_{j,f'}$ y se hace el cambio $\sigma_{i,f'} \rightarrow \sigma_{i,f'} = \sigma_{j,f'}$.

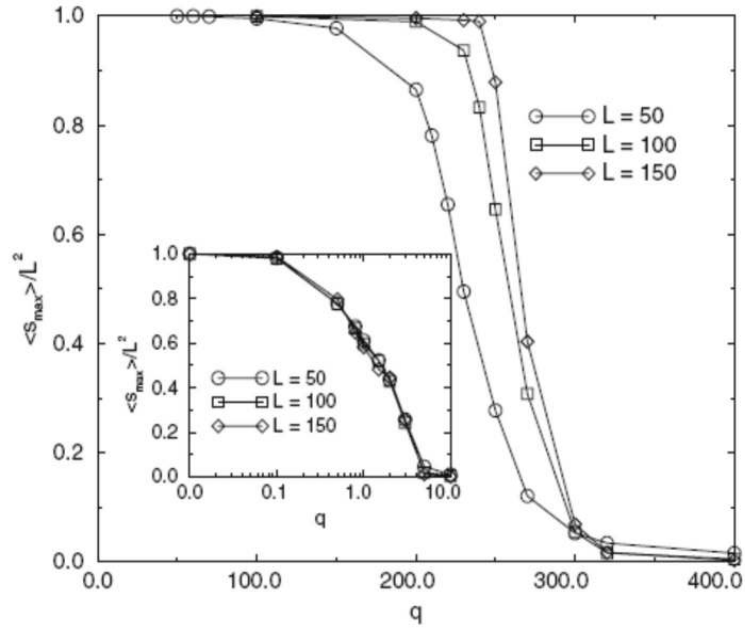
Según [21] y [22] en toda latís finita esta dinámica lleva a un estado absorbente caracterizado por la ausencia de enlaces activos es decir $l(i, j) = F$ o $l(i, j) = 0 \forall i \neq j$. Una forma de medir el tiempo es como el número total de iteraciones dividido entre el número total de sitios $L^2 = N$. Durante la evolución dinámica, la diversidad total medida como el número de valores que los atributos f tienen siempre decrecen. Si todos los atributos de un enlace son iguales, es decir $\sigma_{i,f} = \sigma_{j,f} \forall f$, o si por el contrario todas son diferentes $\sigma_{i,f} \neq \sigma_{j,f} \forall f$, ningún cambio puede ocurrir en el enlace (i, j) . Si algunas de estas dos situaciones se presenta entonces el sistema se encuentra en un estado absorbente, la dinámica del autómata celular se detendrá cuando se alcance tal estado.

El estado final se caracteriza con una distribución de los tamaños de las diferentes regiones culturales, definiendo a las regiones como el conjunto simplemente conexo de sitios en la latís que comparten los mismos atributos. Lo que Axelrod enfatiza sobre su modelo es que ilustra como el mecanismo de convergencia local puede generar divergencias globales.

La evolución dinámica se trata de la competencia entre el desorden de la configuración inicial aleatoria contra el ordenamiento producido por las interacciones sociales locales.

2.1.2. Resultados de la Simulación.

La existencia de la transición en las propiedades de los estados absorbentes es como puede verse en la gráfica 1. El parámetro de orden es del tamaño promedio normalizado de la región más grande $\langle S_{\text{máx}} \rangle / L^2$ y se presenta graficado como función de q .



Gráfica 1 . Comportamiento de $\langle S_{\text{máx}} \rangle / L^2$ vs. q para tres tamaños y $F = 10$ y recuadro $F = 2$ [23].

Para $q = q_c^1 \approx 300$ se observa una transición abrupta caracterizada por una repentina caída de $\langle S_{\text{máx}} \rangle / L^2$ y que se vuelve más precipitada conforme el tamaño L crece. Esto puntualiza la existencia de una transición entre una fase culturalmente ordenada para $q < q_c$ y una fase desordenada para $q > q_c$.

¹El punto crítico es el valor de q por debajo del cual el sistema está en fase de orden y sobre del cual el sistema cambia de fase a una desordenada.

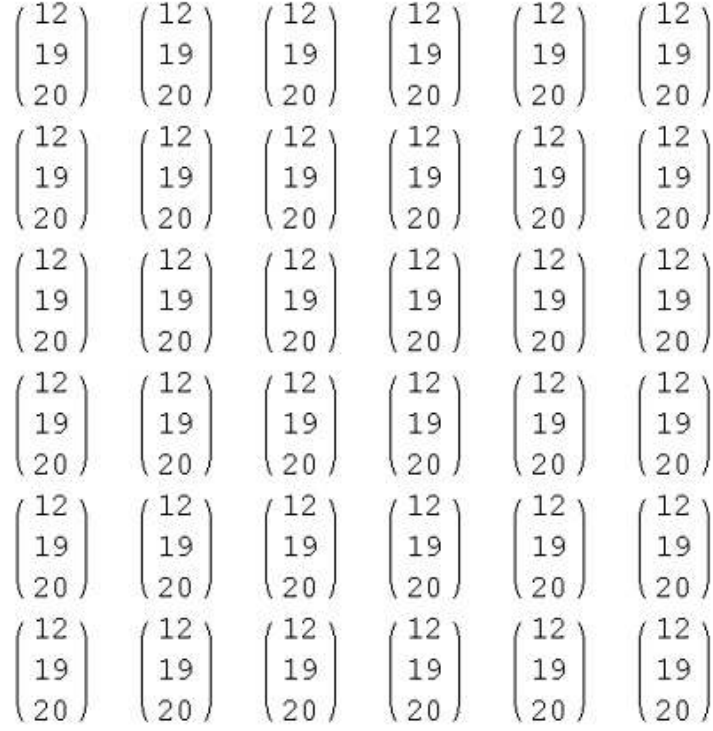


Figura 11. Típica² configuración absorbente homogénea *i.e.* $\langle S_{\text{máx}} \rangle / L^2 = 1$.

Este comportamiento prevalece para todos los valores $F > 2$ y q_c creciendo con F . Para el caso $F = 2$, la fracción ocupada por el dominio mas grande $\langle S_{\text{máx}} \rangle / L^2$ se hace continuamente menor conforme $q \rightarrow q_c^-$.

²Corresponde a una sola condición inicial es decir una sola corrida, se genera un arreglo con atributos aleatorios y se deja evolucionar hasta el estado absorbente.

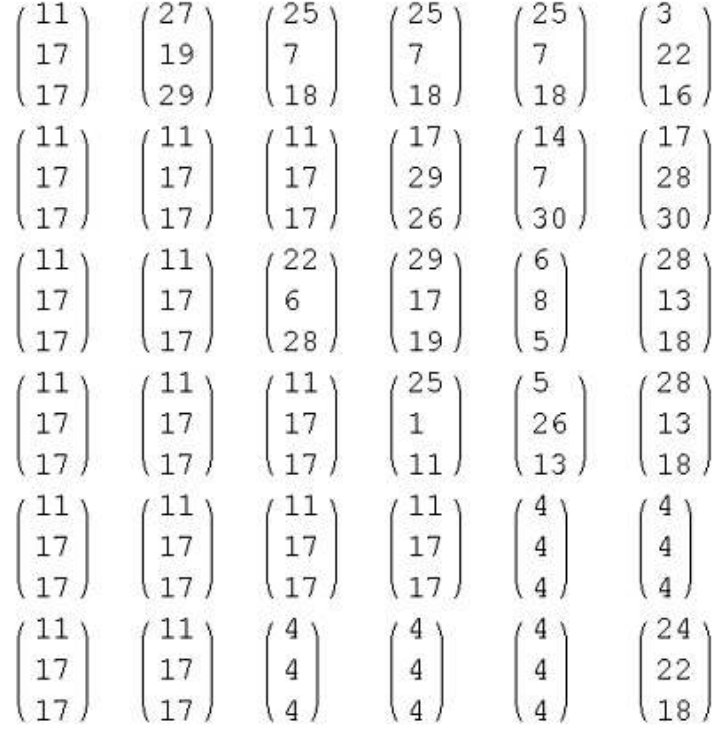


Figura 12. Típica configuración absorbente fragmentada. Se observan grupos de agentes con los mismos atributos (dominios culturales).

En el caso del mismo modelo pero en una dimensión $d = 1$ se ha encontrado que el traslape negativo total V , que es la cantidad de entradas iguales de primeros vecinos del todo el sistema es una función de Lyapunov, es decir una función que nunca incrementa durante el proceso dinámico. Existe una multiplicidad de q^F estados base de V que corresponden a las configuraciones homogéneas (ordenadas) $\sigma_{i,f} = \sigma_{j,f} \forall i, j$, y f , donde el potencial V alcanza su mínimo absoluto $V_{\min} = -NF$. Cualquier otro estado absorbente (desordenado) no es el mínimo absoluto de V [24].

Hasta el momento no se ha encontrado un comportamiento similar para latices d -dimensionales ($d > 1$).

Con el fin de mostrar la precaria estabilidad de las configuraciones absorbentes desordenadas para $d = 2$, los estados absorbentes se someten a perturbaciones de característica simple, es decir:

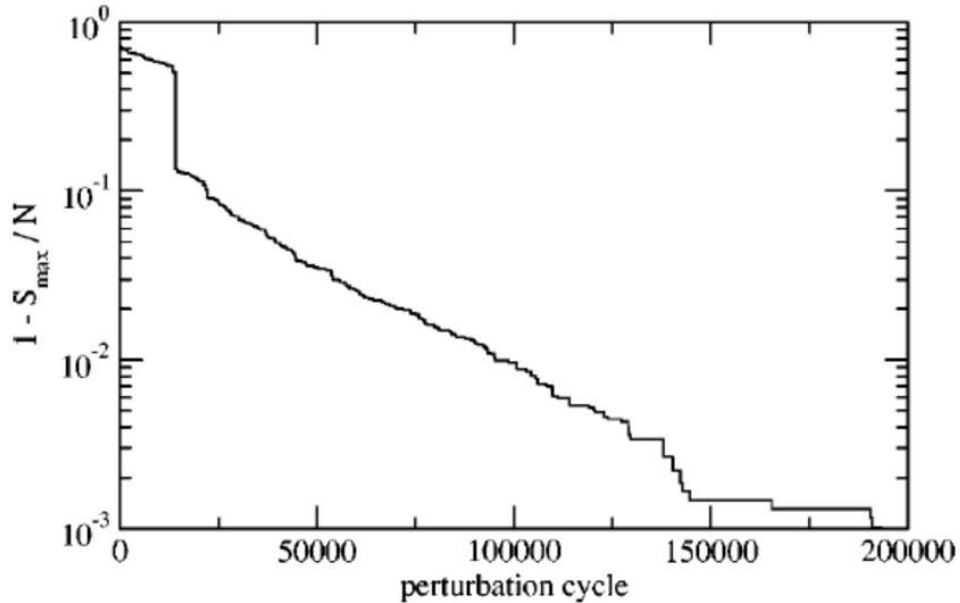
- 1.- Se elige $i \in \{1, \dots, N\}$, $f \in \{1, \dots, F\}$ y $k \in \{1, \dots, q\}$.

2.- Se hace el cambio $\sigma_{i,f} = k$.

En resumen la simulación seguiría los siguientes pasos:

- I. Se inicializa una latís aleatoria.
- II. Se sigue la misma dinámica que en los pasos 1,2 y 3 hasta que se alcance una configuración absorbente.
- III. Se realiza una perturbación de característica simple y se vuelve a (II).

En [24] se reporta que bajo los ciclos de relajación (II) y de perturbación (III) el sistema es conducido a un completo orden donde $\sigma_i = \sigma_j \forall i, j$ y f . Por lo tanto como en el caso unidimensional, únicamente las configuraciones completamente ordenadas son estables, cualquier otra configuración es metaestable.



Gráfica 2. Deficiente estabilidad de estados absorbentes desordenados. $N = L^2 = 100^2$, $F = 10$ y $q = 60$ [24].

2.2. Primer Modelo Propuesto.

"En Física teórica, nosotros tratamos de entender grupos de fenómenos introduciendo símbolos matemáticos que pueden ser correlacionados con los hechos, nómbrense los resultados de las mediciones..."
Werner Heisenberg [25].

Es intuitivo pensar que si se definiera una distancia entre los atributos culturales de las personas por ejemplo el idioma en particular el Inglés con el Alemán y el Inglés con el Japonés, el Inglés sería más "cercano" al Alemán que al Japonés, bajo esta observación en los siguientes modelos se cambió el traslape 2.1 para introducir una metrica cultural.

Por otro lado los individuos sociales no muestran la misma respuesta a la influencia de los demás por esto se propone introducir niveles que determinen que tan influenciable es un individuo bajo la interacción con otros de tal manera que una persona altamente influenciable tiende a imitar los atributos culturales de los demás y una persona no tan influenciable solo se acerque culturalmente a los demás, pero mas aún las personas somos en ocasiones influenciables y en otras no así que en los siguientes modelos esto será de manera aleatoria. Así mismo existen pesonas con mayor capacidad de sociabilizar que otras y esta capacidad depende entre otras cosas de la distancia cultural que hay entre los individuos por ello se implementó un nuevo parámetro restrictivo ε que será una cota sobre la interacción entre los agentes sociales y puede ser visto como un nivel de sociabilidad dependiente de F y q y por lo tanto también de la distancia cultural entre agentes y tendrá el mismo valor para todos los elementos del arreglo.

Con la introducción de esta nueva variable y el cambio de la dinámica original se pretende contribuir a ampliar la descripción del fenómeno de diseminación de cultura en sociedades.

2.2.1. Dinámica y Estado Absorbente.

Análogamente al modelo de Axelrod antes definido considérense N agentes en los nodos de una latís cuadrada (autómata celular bidimensional no periódico Fig. 1). El estado del agente i como se dijo anteriormente es un vector F -dimensional $(\sigma_{i,1}, \sigma_{i,2}, \dots, \sigma_{i,F})$. Cada $\sigma_{i,f}$ es un valor entero entre 1 y q y que inicialmente son asignados independientemente y con una probabilidad uniforme $1/q$. La dinámica en el tiempo discreto está definida en los

siguientes pasos de interacción.

1. Se seleccionan aleatoriamente un par de agentes vecinos (i, j) usando una vecindad de Von Nuemann.
2. Se calcula la *distancia cultural*³:

$$l(i, j) = \sum_{f=1}^F | \sigma_{i,f} - \sigma_{j,f} | \quad (2.3)$$

Es claro que la máxima distancia cultural entre culaquier par de agentes es:

$$l(i, j)_{m\acute{a}x} = (q - 1) \times F = \varepsilon_{m\acute{a}x} \quad (2.4)$$

3. Sí $l(i, j) \leq \varepsilon$ donde ε toma valores fijos $\{1, 2, 3, \dots, l(i, j)_{m\acute{a}x}\}$ se dice que (i, j) es un enlace activo y los agentes i y j interaccionan con probabilidad:

$$P(l(i, j)) = 1 - \frac{l(i, j)}{l(i, j)_{m\acute{a}x}} \quad (2.5)$$

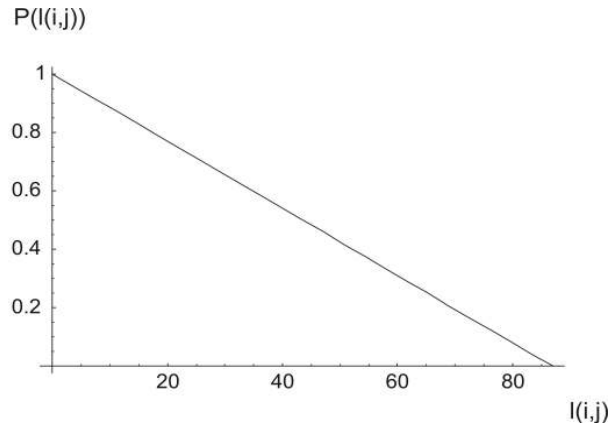
En caso de interacción efectiva se escoge f' tal que $\sigma_{i,f'} \neq \sigma_{j,f'}$ y se hace el cambio $\sigma_{i,f'} \rightarrow k$ donde k es un entero aleatorio tal que $k \in [\sigma_{i,f}, \sigma_{j,f}]$ sí $\sigma_{i,f} < \sigma_{j,f}$ ó $k \in [\sigma_{j,f}, \sigma_{i,f}]$ sí $\sigma_{i,f} > \sigma_{j,f}$ y $\sigma_{j,f'}$ permanece sin cambio, así se logran las siguientes posibilidades:

- I. Los individuos de manera aleatoria pueden imitar características (altamente influenciables).
- II. Los individuos de manera aleatoria pueden cambiar a una característica con valor intermedio (poco influenciables).
- III. Los individuos permanecen sin cambio (no influenciables).

³Una distancia análoga pero entre opiniones se usa en [26].

Esta dinámica de interacción binaria y de acercamiento de características recuerda en lo general al modelo de Deffuant [27] sobre modelos de opinión restringida por un límite de confianza (Bound of Confidence [28]) que juega un papel similar al parámetro ε en este caso.

Debe notarse en la ecuación 2.5 que si $l(i, j) \rightarrow l(i, j)_{m\acute{a}x}$, entonces $P(l(i, j)) \rightarrow 0$ esto significa que la probabilidad de interacción decrece entre más lejanos culturalmente sean los agentes o por el contrario la probabilidad de interacción crece si $l(i, j) \rightarrow 0$ es decir, cuando los agentes son culturalmente cercanos.



Gráfica 3. Probabilidad de interacción en función de la distancia cultural.

Todos los experimentos numéricos que se expondrán se hicieron para un tamaño $N = 400$. Debe notarse que la restricción mínima para la interacción se presenta cuando $\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} = 87$ y la máxima cuando $\varepsilon = 1$.

Los pasos 1 ,2 y 3 se repiten hasta que alguna de las siguientes configuraciones es alcanzada:

- a. $l(i, j) > \varepsilon, \forall i \neq j$
- b. $l(i, j) = 0, \forall i \neq j$
- c. $\eta_{l(i,j) > \varepsilon} + \eta_{l(i,j) = 0} = 4(L - 1)^2 + 12(L - 2) + 8$, donde $\eta_{l(i,j) > \varepsilon}$ es el número de enlaces⁴ con distancia cultural mayor que épsilon y $\eta_{l(i,j) = 0}$ es el número de enlaces con distancia cultural igual a cero.

⁴Debe recordarse que los enlaces son formados por pares de agentes.

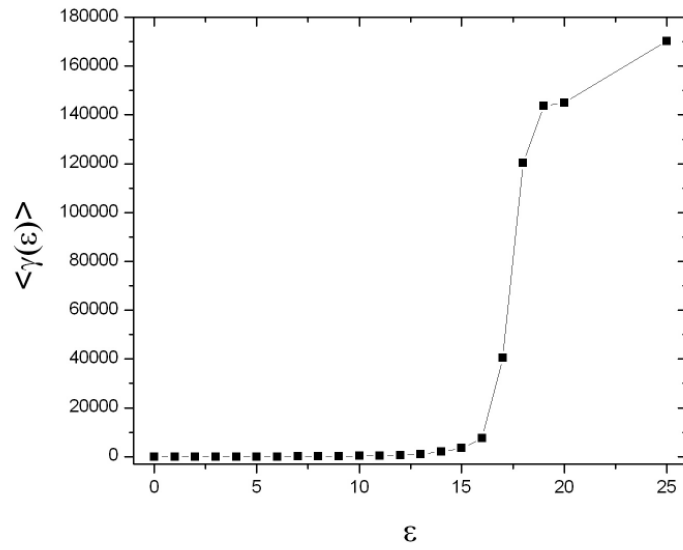
Una diferencia importante de los modelos aquí propuestos con respecto al modelo original es que la dinámica del modelo original únicamente imita los valores de las características culturales así los valores q (diversidad) presentes en el sistema en la configuración inicial son los únicos que pueden estar presentes durante la evolución a diferencia de los modelos propuestos en los que nuevos valores de q que no estuvieron presentes en las condiciones iniciales pueden aparecer debido a la dinámica de acercamiento cultural definida para poder generar valores intermedios durante las interacciones. Por ejemplo si en las condiciones iniciales de el modelo original ningún agente tiene entradas con el valor $q = 12$ correspondiente al idioma Italiano, entonces este idioma no estará presente nunca en esa sociedad, en cambio en los modelos que se proponen este valor podría aparacer en cualquier momento.

2.2.2. Resultados de la Simulación

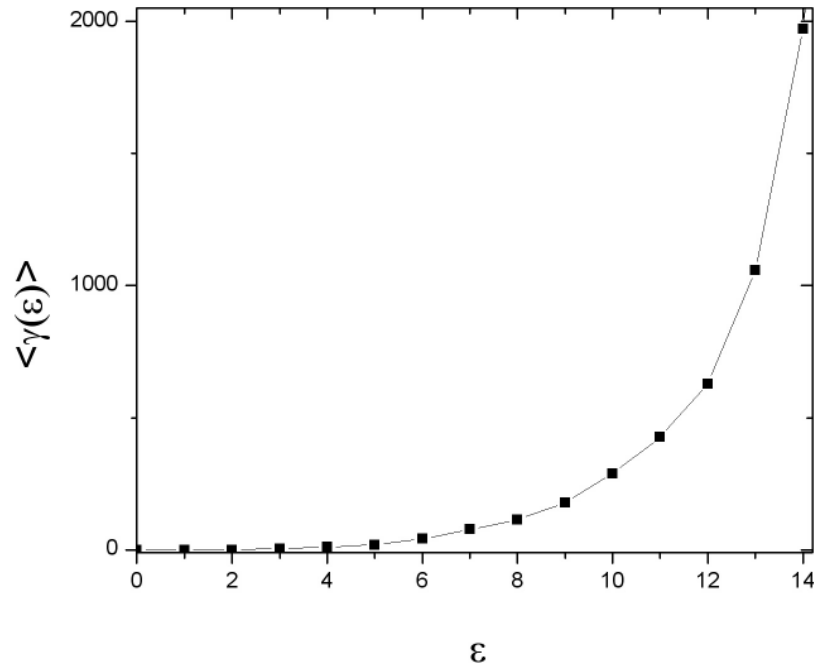
Caracterización

Interacciones Efectivas Definimos a las interacciones efectivas γ como el número de cambios reales de los valores de las características de todos los agentes del sistema durante el tiempo en que el sistema alcanza el estado absorbente. Las interacciones efectivas dependen del parámetro restrictivo ε ya que los enlaces son activos si su distancia cumple que $l(i, j) \leq \varepsilon$, de esta forma si el valor de ε es lo suficientemente pequeño es decir el sistema está muy restringido habrá pocos enlaces que serán activos y por lo tanto habrá pocos cambios en las características de los agentes.

Se quiere saber la forma de cambio de el número de interacciones efectivas γ como función de ε y así encontrar una región en la que el número de interacciones efectivas se vuelve del orden de $L^2 \times F$. Las siguientes gráficas nos dejan ver una región aproximada de ε en el que el sistema puede cambiar de comportamiento.



Gráfica 4.0 Promedio de interacciones efectivas $\langle \gamma(\varepsilon) \rangle$ sobre 40 condiciones iniciales.
 $L^2 = 400$, $F = 3$ y $q = 30$.

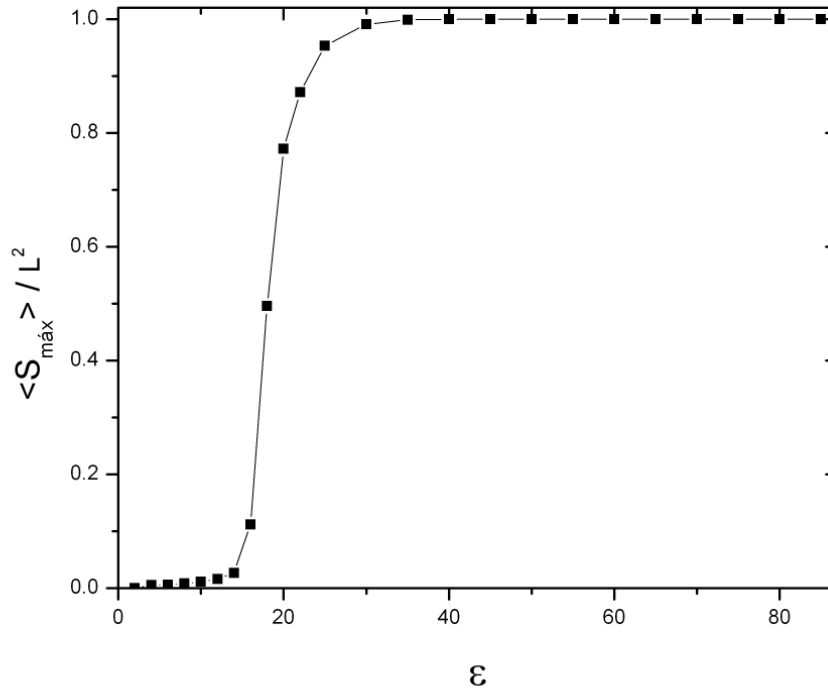


Gráfica 4.1 Región de interés.

Podemos observar en las gráficas 4,0 y 4,1 que el número de interacciones efectivas para $\varepsilon = 14$ es del orden de $L^2 \times F = (400) \times 3 = 1200$ por lo que para valores $\varepsilon \geq 14$ las interacciones efectivas son lo suficientemente abundantes para que todos los agentes sistema hallan interaccionado.

2.2.3. Transición de Fase

Debido a los cambios introducidos al modelo de Axelrod con la finalidad de generalizar la descripción del fenómeno de diseminación de la cultura en sociedades ahora se quiere investigar si la transición de fase que distingue entre una fase de orden y una de desorden prevalece pero ahora como función del nuevo parámetro restrictivo ε y bajo los efectos de la implementación de la métrica cultural. En este sentido se midieron de la misma forma los tamaños de los dominios conexos $\langle S_{m\acute{a}x} \rangle / L^2$ obteniendo la siguiente curva:



Gráfica 5.0. Comportamiento de $\langle S_{m\acute{a}x} \rangle / L^2$ vs. ε para $F = 3$ y $q = 30$. Promedio sobre 30 condiciones iniciales.

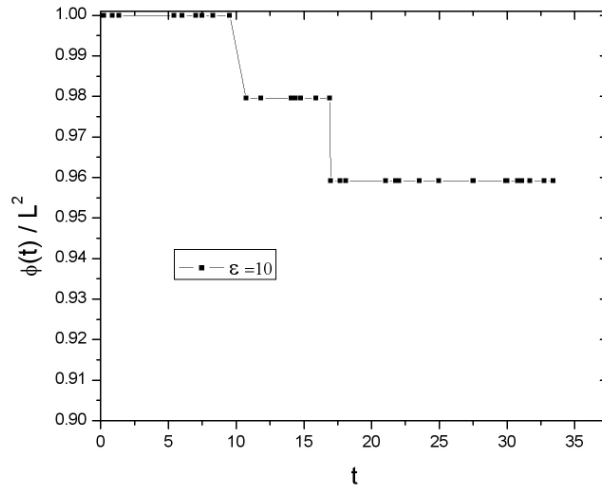
Podemos observar en la gráfica 5.0 que conforme el valor de ε decrece a partir de la mínima restricción que se presenta cuando $\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} = 87$ el sistema pasa de una fase de orden donde el estado final es completamente homogéneo a una fase donde prevalecen múltiples dominios culturales con tamaños pequeños tal como se reporta para el modelo original para $q < q_c$ (ver gráfica 1).

Es importante enfatizar que al incrementar el número total de agentes N la transición se vuelve más pronunciada como se observa en la gráfica 1 pero el comportamiento global del sistema no cambia.

Sí $\theta(t)$ es el número de agentes⁵ en el sistema que comparten distancia cultural igual a cero con al menos otro elemento al tiempo t para un valor de ε entonces definimos:

$$\phi_\varepsilon(t) = N - \theta(t) \quad (2.6)$$

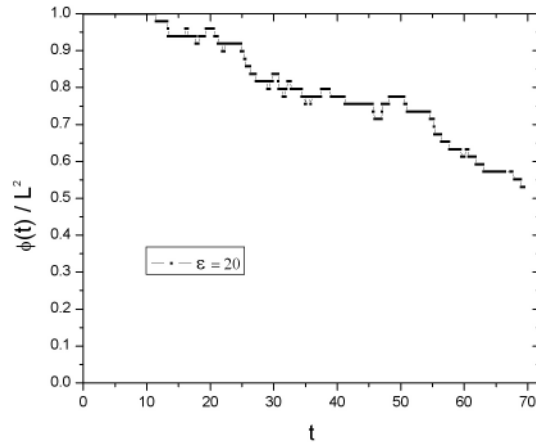
como una descripción temporal del numero de culturas diferentes presentes en el sistema al tiempo t y hasta alcanzar el estado absorbente. El tiempo es aquí medido como el número total de iteraciones (interacciones efectivas o no efectivas) dividido por el número total de agentes L^2 . Debe notarse que $\theta(0)$ puede ser diferente de cero ya que las condiciones iniciales son aleatorias y puede haber un número de agentes idénticos al iniciarse la corrida. A continuación se presentan gráficas normalizadas de corridas particulares para $L^2 = 5^2$.



Gráfica 6.0 Evolución de ϕ en el tiempo para $\varepsilon=10$ hacia una fase desordenada.

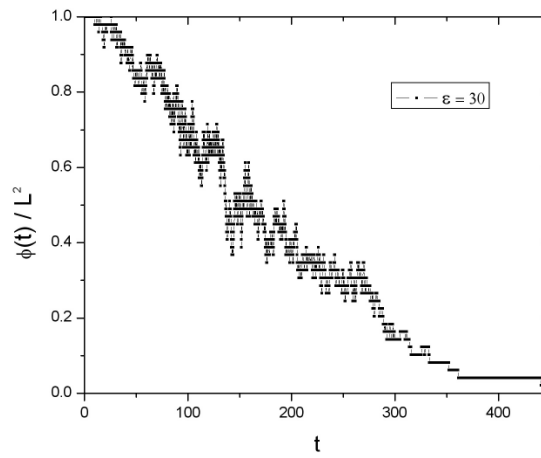
La Gráfica 6.0 corresponde a una corrida que termina en un estado absorbente en fase desordenada altamente fragmentado. El sistema alcanza el estado absorbente en muy poco tiempo ya que está altamente restringido.

⁵Debe distinguirse que es el número de agentes y no el número de pares de agentes.



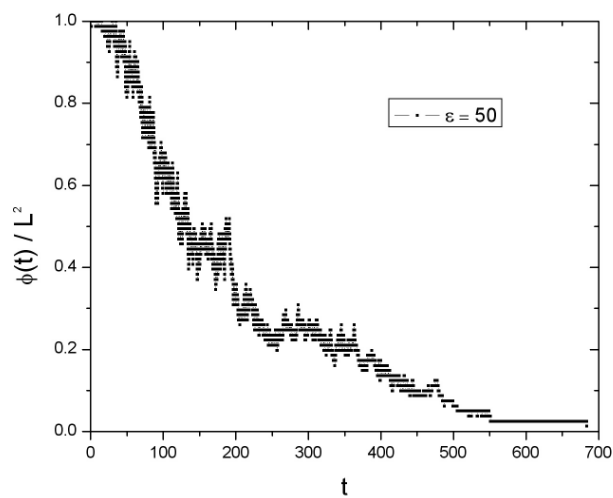
Gráfica 6.1 Evolución de ϕ en el tiempo para $\varepsilon = 20$ cerca del punto crítico ε_c .

Se observa en la Gráfica 6.1 que aproximadamente la mitad del sistema ha llegado a un solo conjunto de características culturales.

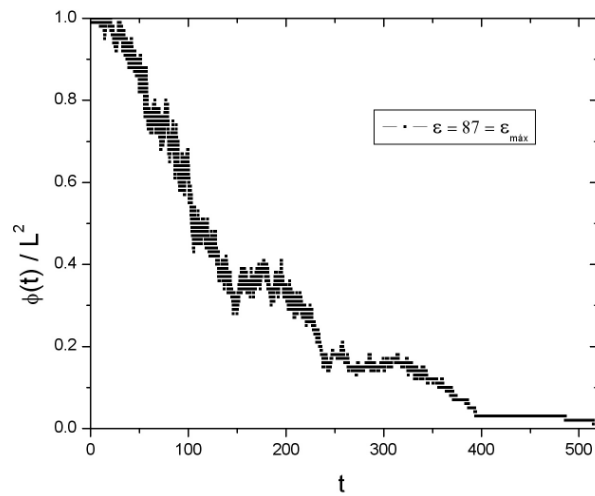


Gráfica 6.2 Evolución de ϕ en el tiempo para $\varepsilon = 30$ hacia una fase de orden.

Las oscilaciones se explican como pares de individuos que han alcanzado distancia cultural cero es decir son idénticos y que al interaccionar independientemente con otros con los que siguen formando enlaces activos provocan que el enlace inactivo original pueda ser activado de nuevo es decir, los agentes que ya eran iguales vuelven a distanciarse. Este comportamiento oscilatorio prevalece para sistemas mas grandes.



Gráfica 6.3. Evolución de ϕ en el tiempo para $\varepsilon = 50$ hacia una fase de orden.



Gráfica 6.4. Evolución de ϕ en el tiempo para $\varepsilon_{\max} = 87$ hacia una fase de orden.

No se observa comportamiento monótono en las gráficas $\phi(t)/L^2$ como función de t . Por lo que a diferencia del modelo original no podemos decir que la diversidad total definida como la cantidad de diferentes valores q presentes al tiempo t en todo el sistema disminuya monotonamente con el tiempo.

2.3. Segundo Modelo Propuesto

2.3.1. Dinámica y Estado Absorbente.

Análogamente al modelo definido en la sección anterior considerense N agentes en los nodos de una latís cuadrada. El estado del agente i , como se dijo anteriormente, es un vector F -dimensional $(\sigma_{i,1}, \sigma_{i,2}, \dots, \sigma_{i,F})$. Cada $\sigma_{i,f}$ es un valor entero entre 1 y q y que inicialmente son asignados independientemente y con una probabilidad uniforme $1/q$. La dinámica en el tiempo discreto está definida con los mismos pasos de interacción 1 y 2 del modelo anterior y el siguiente nuevo punto:

3. Sí $l(i, j) \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon \in \{1, \dots, \varepsilon_{máx}\}$ se dice que el (i, j) es un enlace activo, y los agentes i y j interaccionan con probabilidad 2.5. En caso de interacción efectiva, se escoge f' tal que $\sigma_{i,f'} \neq \sigma_{j,f'}$ y se hace el cambio $\sigma_{i,f'} \rightarrow k$, donde k es un entero aleatorio tal que $k \in (\sigma_{i,f}, \sigma_{j,f})$ sí $\sigma_{i,f} < \sigma_{j,f}$ ó $k \in (\sigma_{j,f}, \sigma_{i,f})$ sí $\sigma_{i,f} > \sigma_{j,f}$ y $\sigma_{j,f'}$ permanece sin cambio.

Como puede verse es prácticamente la misma dinámica pero con la diferencia de que los valores de la nueva característica estan en un intervalo abierto por lo que estos valores nunca pueden igualarse por interacción directa.

Para este modelo no se predice la formación de dominios culturales debido al cambio en el algoritmo de interacción por lo que la caracterización se hará calculando una distribución del número de pares ρ (todos con todos) de vectores con distancia cultural igual a λ definida:

$$\rho(\lambda) = \sum_{i \neq j} \delta_{\lambda, l(i,j)} \quad (2.7)$$

donde:

$$\delta_{\lambda, l(i,j)} = \begin{cases} 0 & \text{sí } l(i, j) \neq \lambda \\ 1 & \text{sí } l(i, j) = \lambda \end{cases} \quad (2.8)$$

para $\lambda = 1, 2, \dots, l(i, j)_{m\acute{a}x}$. Siendo un conteo en estados absorbentes de distancias culturales entre todos los pares de agentes sean o no primeros vecinos se debe cumplir que:

$$\sum_{\lambda=0}^{l(i,j)_{m\acute{a}x}} \rho(\lambda) = C_{L^2}^2 = \frac{L^2!}{(L^2 - 2)!2!} = \frac{L^2(L^2 - 1)}{2} \quad (2.9)$$

que son todos los subconjuntos de dos elementos tomados de un conjunto de L^2 . Esta distribución es un espectro de distancias culturales del modelo social.

El estado absorbente en este caso es cuando se presenta alguna las siguientes configuraciones:

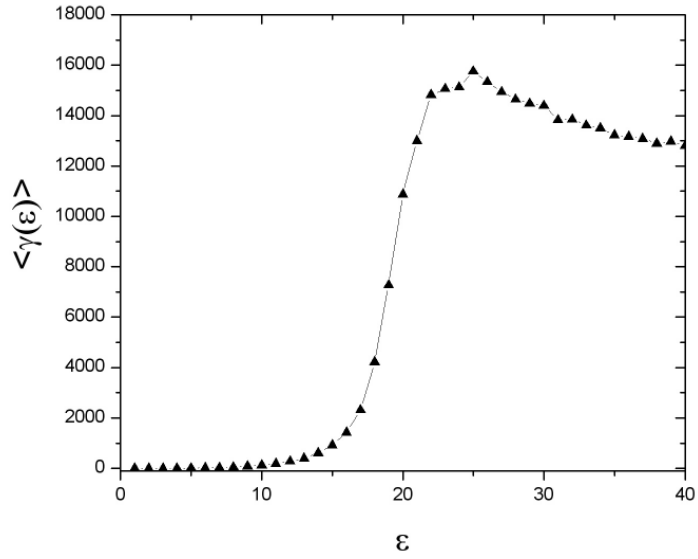
- a. $l(i, j) > \varepsilon \forall i \neq j$
- b. $l(i, j) \leq F \forall i \neq j$
- c. $\eta_{l(i,j) > \varepsilon} + \eta_{l(i,j) \leq F} = 4(L - 1)^2 + 12(L - 2) + 8$, donde $\eta_{l(i,j) > \varepsilon}$ es el número de enlaces⁶ con distancia cultural mayor que épsilon y $\eta_{l(i,j) \leq F}$ es el número de enlaces con distancia cultural menor o igual que F .

2.3.2. Resultados de la Simulación

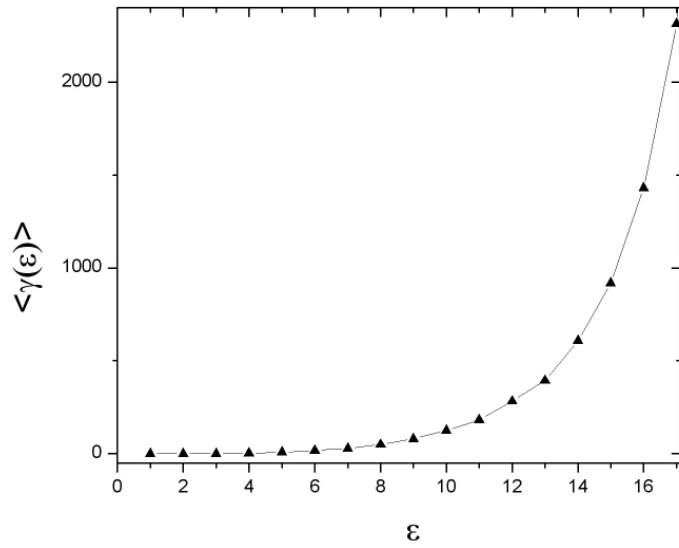
Caracterización

Interacciones Efectivas Como en el modelo anterior definimos a las interacciones efectivas γ como el número de cambios reales de los valores de las características de todos los agentes del sistema durante el tiempo en que el sistema alcanza el estado absorbente y para un valor fijo de ε . Se obtuvieron las siguientes curvas:

⁶Debe recordarse que los enlaces son formados por pares de agentes.



Gráfica 7.0. Promedio de interacciones efectivas $\langle \gamma(\epsilon) \rangle$ sobre 40 repeticiones.
 $L^2 = 400$, $F = 3$ y $q = 30$.

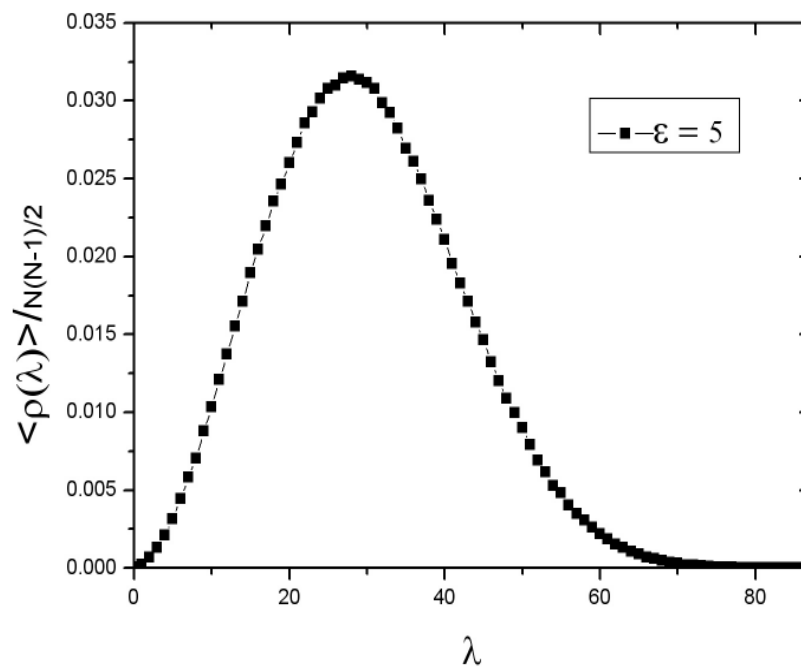


Gráfica 7.1. Región de interés.

Se puede observar en la gráfica 7.1 que las interacciones efectivas son del orden de $L^2 \times F = 1200$ cuando $\epsilon \approx 16$, por lo que para ϵ mayores se considera que todos los agentes del sistema han interactuado al menos una vez con sus vecinos cercanos.

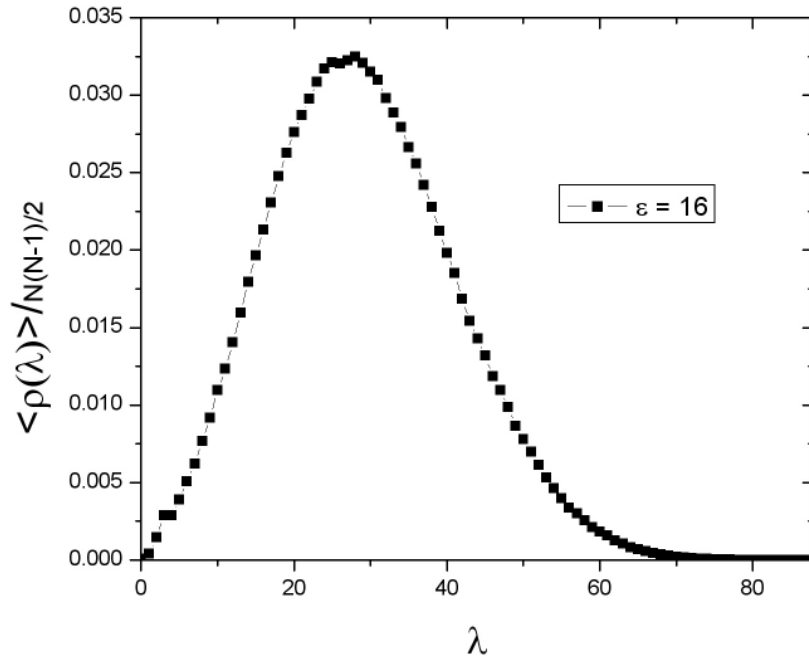
2.3.3. Distribuciones (Espectros Culturales).

Como se explicó en la sección anterior este modelo se caracterizó por el espectro de distancias culturales 2.7. A continuación se presentan los espectros numéricos para diferentes valores del parámetro restrictivo ϵ . Las curvas se promediaron sobre 20 condiciones iniciales para $L^2 = 400$, $F = 3$ y $q = 30$.



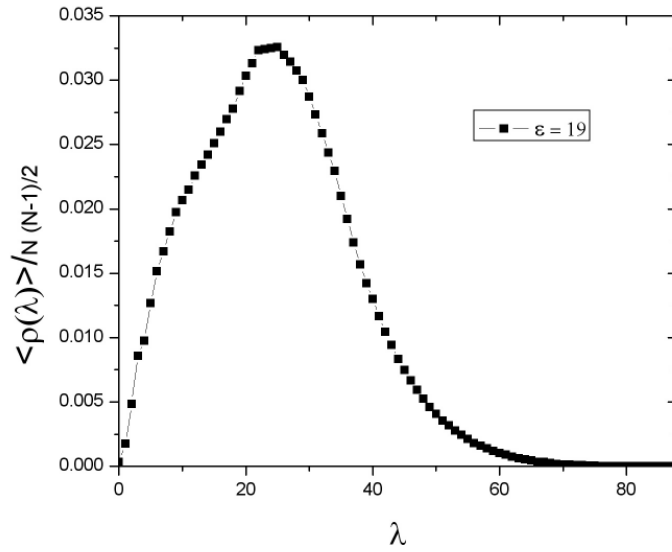
Gráfica 8.0

Se observa en la gráfica 8.0 que el sistema no sale de su configuración aleatoria inicial, esto se debe a que las interacciones efectivas entre los enlaces de agentes son prácticamente nulas como se ve en las gráficas 7.0 y 7.1.



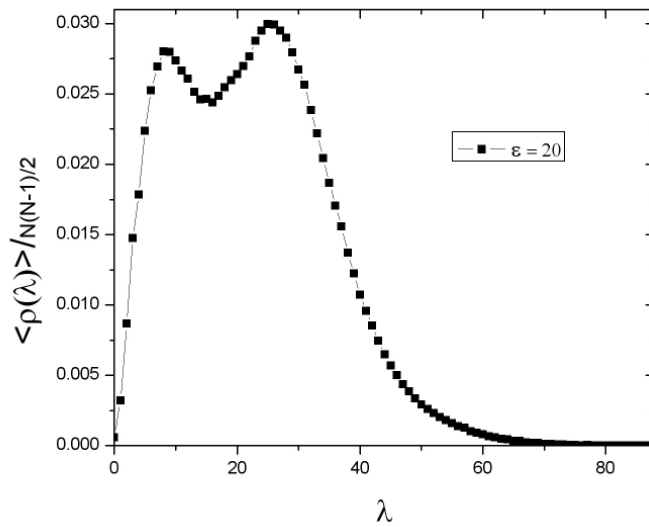
Gráfica 8.1

Podemos observar en la gráfica 8.1 que la distribución es prácticamente la misma que la inicial con la aparición de una pequeña concavidad en el máximo y aunque para $\varepsilon = 16$ las interacciones efectivas ya son del orden del tamaño del sistema (ver gráfica 7.1) no se observa acercamiento o reducción de distancias entre la mayoría de los enlaces.

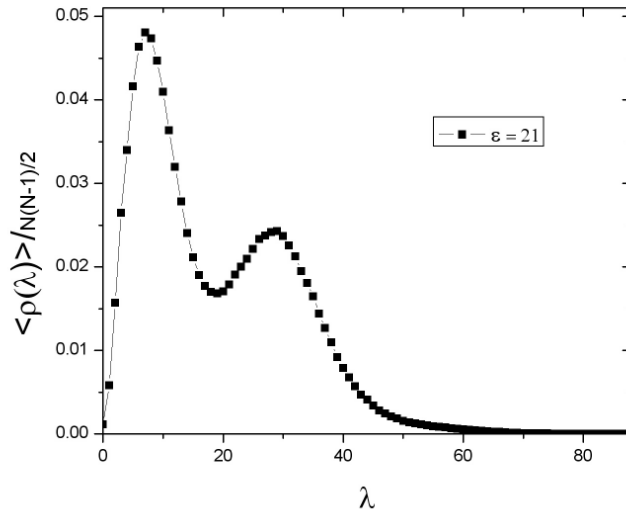


Gráfica 8.2

Observamos en la gráfica 8.2 que el sistema ha alcanzado ya un estado absorbente significativamente diferente al de la configuración inicial aleatoria.

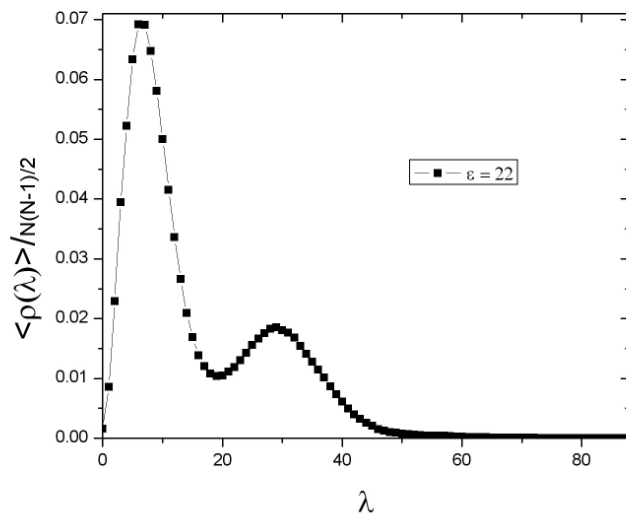


Gráfica 8.3

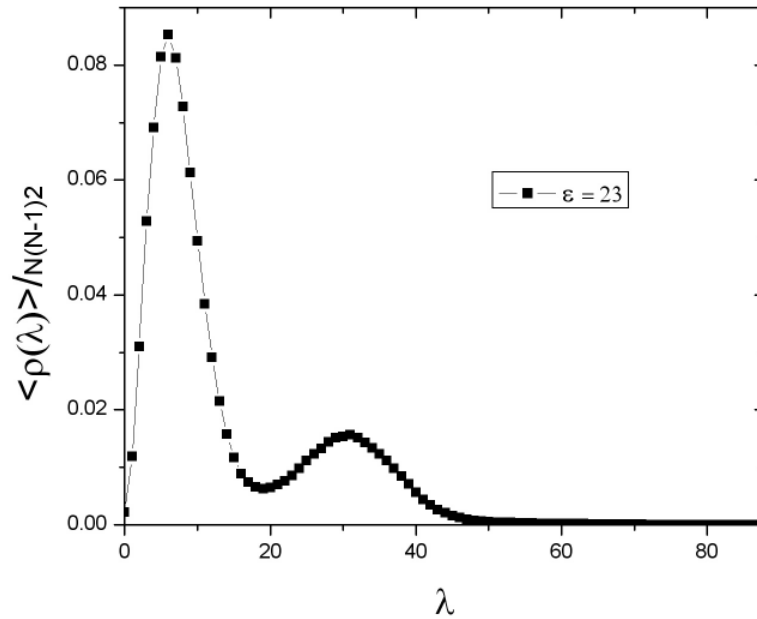


Gráfica 8.4

Comparando las gráficas 8.3 y 8.4 se puede apreciar una notable diferencia en las distribuciones debido a un mínimo cambio en ε , esto es un cambio abrupto para $\varepsilon = 20 \rightarrow \varepsilon' = 21$.



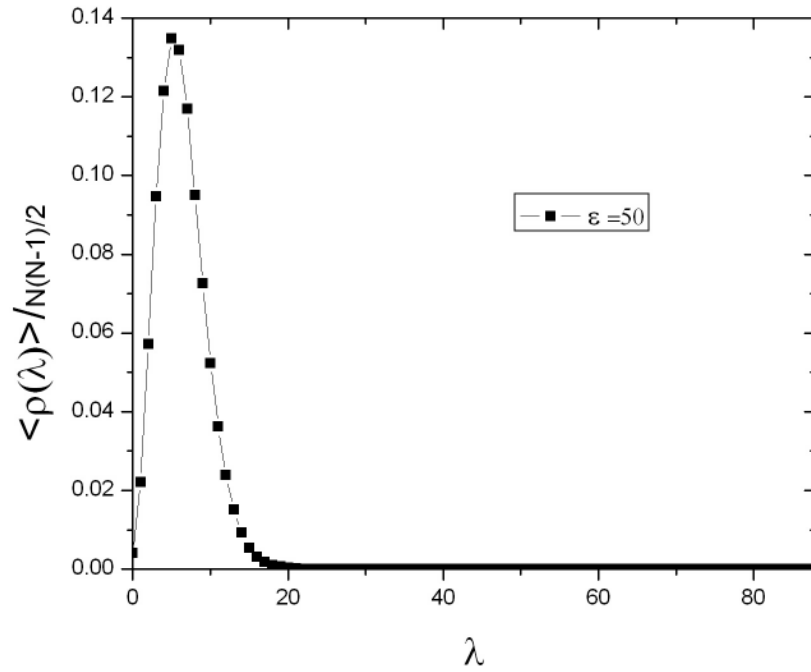
Gráfica 8.5



Gráfica 8.6

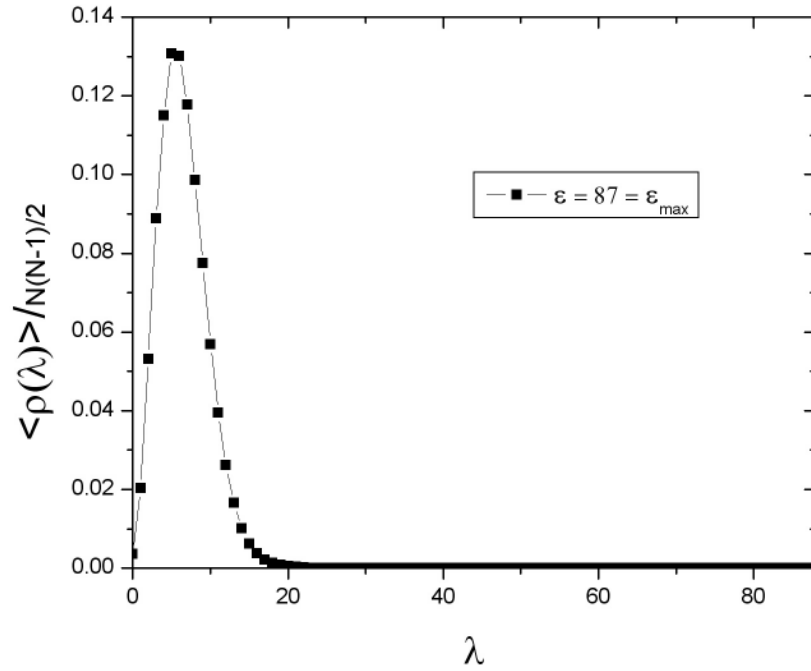
A mayor valor de ε la restricción sobre las interacciones se reduce y los agentes del pico de la derecha van interactuando con mayor frecuencia con sus primeros vecinos y pasan a un conjunto que es el pico de la izquierda en el que los elementos son individuos con distancias culturales menores consecuencia de las constantes interacciones.

En la gráfica 8.7 casi ha desaparecido el conjunto inicial y se aproxima a ser un solo máximo en la distribución.



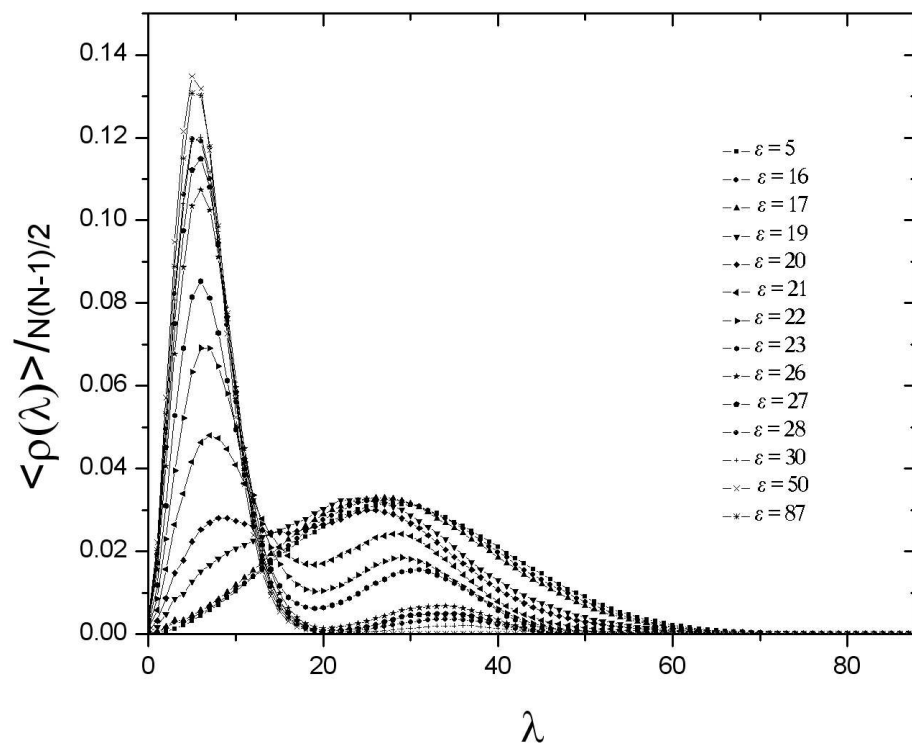
Gráfica 8.8

Eventualmente el conjunto original de distancias culturales ha desaparecido, los individuos sociales redujeron sus distancias culturales llegando a un estado absorbente con una distancia media y una dispersión mucho menor a las de la distribución inicial.



Gráfica 8.9

Como se definió anteriormente las interacciones se dan entre primeros vecinos (Fig. 3) pero es importante recordar que esta distribución toma en cuenta la distancia cultural de todos los pares de agentes sin importar si son vecinos a primer orden esta es una forma global de caracterizar al sistema en sus estados finales.



Gráfica 9 Espectros de distancias culturales.

2.4. Conclusiones

2.4.1. Primer Modelo.

Se ha encontrado una transición de fase fuera de equilibrio abrupta por lo estrecho del intervalo en el que el sistema cambia de comportamiento. La fase de orden es caracterizada por un valor no nulo y de orden 1 para el promedio de los tamaños de los máximos dominios $\langle S_{m\acute{a}x} \rangle / L^2$ y la fase de desorden distinguida por la fragmentación del sistema que consiste en la formación de múltiples dominios culturales. En la fase de orden el tamaño del máximo dominio prácticamente tiene el tamaño de todo el sistema.

A diferencia de la transición encontrada en [29] en función del factor q , en el presente trabajo se analizó en función del parámetro restrictivo ε que puede variar en un rango que depende de el factor q como se ve en la ec. 2.4.

Se ha observado también el fenómeno de aislamiento cultural, que se identifica por la aparición de un dominio cultural dentro de otro, esto es consecuencia de la métrica y la restricción ε ya que hay regiones del sistema donde agentes tienen distancia mayor a la restricción y simplemente quedan culturalmente aislados en el arreglo, esto puede esquematizarse en la Fig. 11 en el agente (28, 1, 22) rodeado por el dominio cultural (11, 14, 10) en la parte inferior derecha.

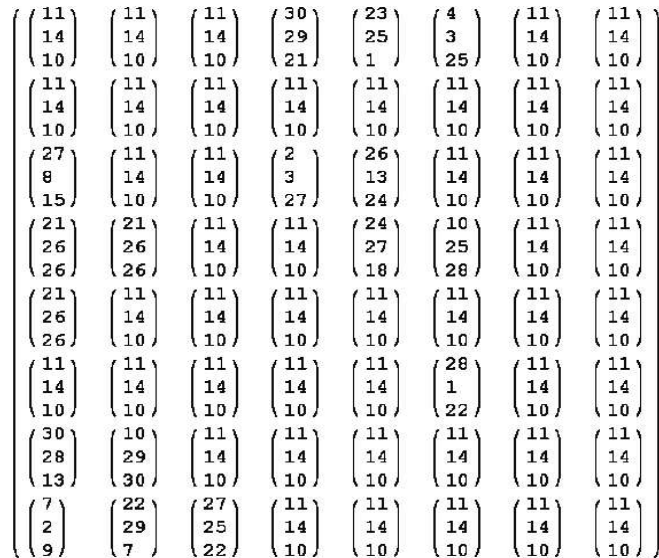


Figura 13. Aislamiento cultural.

De manera intuitiva se predecía que cuando el nivel de sociabilidad ε era mayor, las interacciones de los agentes aumentarían lo que se ha comprobado es correcto, lo que implica que los elementos de la sociedad modelada acortan con mayor frecuencia las distancias culturales con sus vecinos cercanos, esto de manera local por que no necesariamente la convergencia local conduce a la global y esto se verifica en los estados absorbentes fragmentados.

Esta generalización del modelo recupera en el comportamiento general al modelo original teniendo la aplicabilidad de una métrica entre los atributos.

La justificación de estudiar este modelo en función del parámetro ε se encuentra en que los individuos de una sociedad pueden ser parametrizados por un conjunto de un número fijo F de variables y una diversidad q constante es decir, dado un individuo existe un número fijo de valores de sus atributos que lo pueden describir por esto el uso de una restricción o límite de confianza es un paso que contribuye en la descripción de los fenómenos ya descritos.

Se propone el estudiar los casos interesantes en el que cada agente tiene un nivel de sociabilidad ε diferente (autómata celular inhomogeneo) lo cual se apega más a la realidad.

2.4.2. Segundo Modelo.

Se ha encontrado un cambio en las características de los estados absorbentes descritos por la distribución 2.7, dicho cambio sucede para valores $\varepsilon \geq \varepsilon_c \approx 19$. Las interacciones efectivas alcanzan a todo el sistema a partir de $\varepsilon \approx 15$ aunque en esta región no se observan cambios significativos en la distribución inicial de distancias culturales, esto significa que aunque en teoría los agentes del sistema interactúan al menos una vez el sistema no alcanza a alejarse de su estado inicial.

Podemos observar también que la máxima reducción de distancias entre individuos se alcanza cuando todos los agentes se encuentran en promedio a distancias $l(i, j) \leq F$ de sus vecinos cercanos y esto sucede a partir de $\varepsilon \approx 50$. Lo anterior nos permite concluir que el sistema realiza una dinámica más competitiva en el intervalo $[\varepsilon \approx 19, \varepsilon \approx 50]$, es decir hay mayor competencia entre el desorden las condiciones iniciales y el ordenamiento producido por las interacciones sociales mutuas entre los elementos.

Las configuraciones de máximo acercamiento cultural entre agentes se presentan para $\varepsilon \geq 50$, en ellas las distancias culturales entre primeros vecinos son muy pequeñas e incluso nulas esto de manera local pero agentes en extremos opuestos del sistema o agentes que no son primeros vecinos tienen en general distancias $l(i, j) \geq F$ así el sistema con poca o aún sin restricción presenta espectros de distancias culturales que tienen una apreciable dispersión, esto es una consecuencia de las reglas de cambio de estado y de la conectividad entre primeros vecinos.

Se ha observado un fenómeno interesante, de manera intuitiva se creía que era imposible que pares de agentes vecinos cercanos llegarán a tener distancia cultural $l(i, j) = 0$ debido a que el algoritmo de interacción lo prohíbe sin embargo se observan pequeñas regiones del sistema donde los agentes han llegado a igualar sus características completamente, lo que lleva a pensar en un tipo de influencia social indirecta.

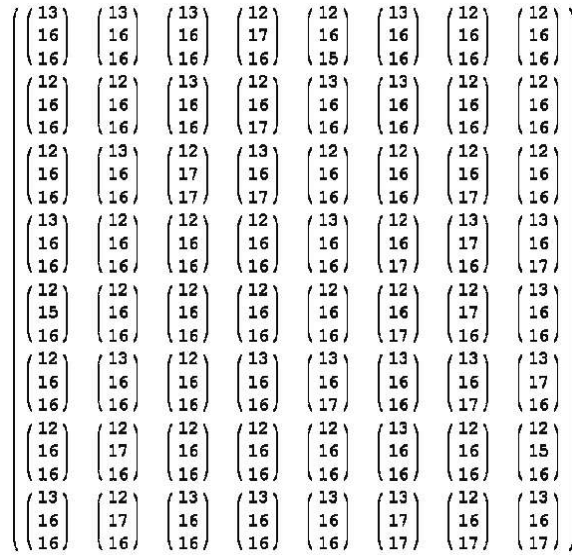


Figura 14. Influencia social indirecta.

Con este nuevo concepto de influencia social indirecta nos referimos al fenómeno de que un par de agentes alcancen los mismos atributos culturales no por la acción de la interacción directa sino por la acción de dinámicas indirectas no triviales.

$$\begin{bmatrix} & i_1 & j_1 & & \\ i_2 & i & j & j_2 & \\ & i_3 & j_3 & & \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Para ejemplificar la complejidad de la dinámica que puede llevar bajo las reglas de este modelo a la formación de regiones de agentes idénticos, obsérvese la configuración 2.10. Sea el enlace (i, j) inactivo es decir $0 < l(i, j) < F$, por lo que el agente i no interacciona más con el agente j , la configuración $l(i, j) = 0$ tiene que lograrse de forma indirecta por distintos caminos por interacciones con diferentes individuos, esto es i interacciona sólo con i_1, i_2 y i_3 mientras que j solo con j_1, j_2 y j_3 , en consecuencia i y j interaccionan a través de (i_1, j_1) y (i_3, j_3) es decir, la información de acercamiento cultural fluye de i a j y viceversa usando los enlaces (i_1, j_1) y (i_3, j_3) como medios o intermediarios.

Se observó también el fenómeno de aislamiento cultural que se identifica por la aparición de un dominio cultural dentro de otro (Fig. 11).

En los modelos expuestos se consideraron algunos elementos de los enfoques sobre modelos de sistemas complejos de Badii & Politi como es el hacer promedios sobre subsistemas ($\langle S_{m\acute{a}x} \rangle / L^2$), el aumento de variables como en este caso lo fué el parámetro ε y separación de enlaces activos de inactivos.

Se propone que se estudie el modelo anterior con restricción ε no homogénea.

Apéndice (Programa Base)

El programa que a continuación se presenta fué utilizado para hacer los experimentos computacionales aquí presentados. Solo es mostrado el algoritmo base que muestra gráficamente las configuraciones inicial y final del autómatas celular del primer modelo propuesto ya que el programa del segundo modelo es muy similar. Por reducción no se presentan los ciclos de conteo de dominios conexos, ciclo de distribución de distancia culturales ni ciclos de promedio de resultados.

Los símbolos del texto del programa no coinciden con la notación que se ha usado en la teoría.

Primer Modelo

Programado en Mathematica 5.2:

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
<< Statistics`MultiDescriptiveStatistics`
(*Introduccion de parametros*)
n = 7; q = 30; F = 3; r1 = 80;
(*inicialización*)
s = Table[i = Table[Random[Integer, {1, q}], {F}];
j = Table[Random[Integer, \
{1, q}], {F}], {i, n}, {j, n}];
(*-1 en frontera*)
s[[n, All]] = s[[All, n]] = s[[1, All]] = s[[
All, 1]] = Table[t = -1, {u, 1, F}];
(*Print[MatrixForm[s];*)
(*inicio ciclo*)
d = 0; h = 0; k = 0; b = 0;
tiempo = {};
While[k < 3,
For[y = 0, y < IntegerPart[(n - 2)^2/2],
Label[inicio];
h++;
ren = Random[Integer, {2, n - 1}];
col = Random[Integer, {2, n - 1}];
(*vector seleccionado*)
```

```

a1 = s[[ren, col]];
ran = Random[Integer, {1, 4}];
(*Eleccion de vecino*)
If[ran == 1, b1 = s[[ren, col + 1]]; ele = b1];
If[ran == 2, g1 = s[[ren + 1, col]]; ele = g1];
If[ran == 3, d1 = s[[ren, col - 1]]; ele = d1];
If[ran == 4, e1 = s[[ren - 1, col]]; ele = e1];
If[ele == Table[t = -1, {u, 1, F}], Goto[inicio]];
lij = Sum[Abs[a1[[z]] - ele[[z]]], {z, 1, F}];
If[lij > r1, Goto[inicio]];
If[lij > r1, y++];
peso = 1 - lij/(q - 1)F;
pe = Random[];
If[pe > peso, Goto[inicio]];
ent = Random[Integer, {1, F}];
p = a1[[ent]];
cop = ele[[ent]];
st = Sort[{p, cop}];
If[Abs[p - cop] > 2, nir = Random[Integer, {st[[1]] + 1, st[[2]] - 1}]];
If[Abs[p - cop] == 2, nir = st[[1]] + 1];
If[Abs[p - cop] == 1, nir = cop];
If[Abs[p - cop] == 0, nir = p];
s = ReplacePart[s, ReplacePart[a1, nir, ent], {ren, col}];
If[nir == p, y++];
If[sust != a1, b++];
(*Print[MatrixForm[s];*)
d++;
(*Print[Length[un]*]);
sel = Take[s, {2, n - 1}, {2, n - 1}];
fl = Flatten[sel, 1];
un = Union[fl];
AppendTo[tiempo, {h, Length[un]/(n - 2)^2}];
If[Length[un] == 1, k = 3];
(*Absorbing state*)
abst =
Table[Sum[
Abs[s[[i, j]][[v]] - s[[i, j + 1]][[v]]], {v, 1, F}], {i, 2, n - 1}, {

```



```

j, 2, n - 2}];
abst1 = Table[Sum[Abs[s[[
i, j]][[v]] - s[[i + 1, j]][[v]]], {v, 1,
F}], {i, 2, n - 2}, {j, 2, n - 1}];
abstate = Flatten[abst];
abstate1 = Flatten[abst1];
AA = Select[abstate, # == 0 &];
BB = Select[abstate1, # == 0 &];
CC = Select[abstate, # > r1 &];
DD = Select[abstate1, # > r1 &];
If[Length[
AA] + Length[CC] == Length[abstate] && Length[
BB] + Length[DD] == Length[abstate1], k = 5];
If[Length[CC] == Length[abstate] && Length[DD]
==
Length[abstate1], k = 5];
If[Length[AA] == Length[abstate] && Length[
BB] == Length[abstate1], k = 5];
];
Print[MatrixForm[s]];

```

Bibliografía

- [1] James P. Coughlin, Robert H. Baran, *Neural Computation in Hopfield Networks and Boltzmann Machines*, University of Delaware Press 1995.
- [2] Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc.2002.
- [3] *Webster Dictionary*, Merriam-Webster, 1986.
- [4] Gérard Weisbuch, *Complex Systems Dynamics an Introduction to Automata Networks*, Addison Wesley 1991, pág. 1.
- [5] Denis Boyer, *Introducción a la Física No Lineal y los Sistemas Complejos*, Escuela de verano, Instituto de Física, UNAM, Agosto de 2005, pág. 21.
- [6] R. Badii & A. Politi, *Complexity. Hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge University Press, 1997, pág. 6,7.
- [7] Sven Bilke & Fredrik Sjunnesson, *Stability of the Kauffman Model*, Physical Review E 2001.
- [8] Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc.2002.
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Editorial Reverté, Vol. 6 1991, pág. 56.
- [10] Gérard Weisbuch, *Complex Systems Dynamics an Introduction to Automata Networks*, Addison Wesley 1991, pág. 7,8.
- [11] Gérard Weisbuch, *Complex Systems Dynamics an Introduction to Automata Networks*, Addison Wesley 1991, pág. 14,15.
- [12] D. Hebb *The organization of behavior*, Wiley 1949 [11].

- [13] Gérard Weisbuch, *Complex Systems Dynamics an Introduction to Automata Networks*, Addison Wesley 1991, pág. 45
- [14] H. Haken, *Synergetics (Nonequilibrium Phase Transitions & Self Organization in Physics, Chemistry and Biology)*, Springer - Verlag, 1983, págs,1-5.
- [15] Erwin Shroedinger, *What is Life?*, 1944, ver Mathematical and Computer Modelling, Vol. 19, No. 6-8, 25-48.
- [16] H. Haken, *Synergetics (Nonequilibrium Phase Transitions & Self Organization in Physics, Chemistry and Biology)*, Springer - Verlag, 1983.
- [17] Haye Hinrichsen, *Non-Equilibrium Phase Transitions*, Physica A 369 (2006) 3-4 Elsevier.
- [18] D. F. Walls, *Non-Equilibrium Phase Transitions in Sociology*, Collective Phenomena 1976, Vol. 2, pp. 125-130.
- [19] Thomas Vojta & Man Young Lee, *Nonequilibrium Phase Transition on a Randomly Diluted Lattice*, Physical Review Letters, 96, 035701 (2006).
- [20] R. Axelrod, *The Complexity of Cooperation*, Princeton University Press, Princeton 1997.
- [21] Claudio Castellano, Matteo Marsilli, Alessandro Vespigniani, *Nonequilibrium Phase Transition in a Model for Social Influence*, Physical Review Letters, Vol. 85(16), 2000 The American Physical Society 3536.
- [22] Konstantin Klemm, Victor M Eguíluz, Raúl Toral and Maxi San Miguel, *Global Culture: A noise induced transition in finite systems*, Physical Review E 67, 045101(R) 2003.
- [23] Claudio Castellano, Matteo Marsilli, Alessandro Vespigniani, *Nonequilibrium Phase Transition in a Model for Social Influence*, Physical Review Letters, Vol. 85(16), 2000 The American Physical Society 3536.
- [24] Konstantin Klemm, Victor M Eguíluz, Raúl Toral and Maxi San Miguel, *Global Culture: A noise induced transition in finite systems*, Physical Review E 67, 045101(R) 2003.
- [25] W. Heisenberg *Physics and Philosophy*, Penguin Classics, pág. 117.

- [26] Dirk Jacobmeier, *Multidimensional Consensus Model on a Barabási - Albert Network*, International Journal Of Modern Physics C, Vol. 16, No. 4 (2005) 633-646, Wolrd Scientific.
- [27] Gérard Weisbuch, Guillaume Deffuant, Frédéric Amblard, and Jean - Pierre Nadal. *Meet, Discuss and Segregate!*, Complexity, 7(3): 55 - 63, 2002.
- [28] Rainer Hegselmann and Ulrich Krause, *Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis and Simulations*, Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS) vol. 5 no. 3 2002.
- [29] Claudio Castellano, Matteo Marsilli, Alessandro Vespigniani, *Nonequilibrium Phase Transition in a Model for Social Influence*, Physical Review Letters, Vol. 85(16), 2000 The American Physical Society, pág. 3536.