UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

“ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA CIENCIA DEL MOVIMIENTO EN GALILEO Y SU RELACIÓN CON EL LENGUAJE MATEMÁTICO”

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
PRESENTA

HELBER BAPTISTA DE SOUZA

DIRECTOR: DR. CARLOS ÁLVAREZ JIMÉNEZ

FEBRERO DE 2007

Por susi

Índice

Capítulo 3:
Movimiento de Proyectiles

Convenciones

- **"mp (AB y AC)" Media Proporcional entre AB y AC**
- **S_1 o S_2…………..Distancias recorridas**
- **T_{AB} o T(AB)……Tiempo para recorrer la distancia AB partiendo del reposo en A**
- **T(AB, C) ………Tiempo para recorrer la distancia AB partiendo del reposo en C**
- **V_{AB} …………….velocidad media entre los puntos A y B**
- **V_A o V_B ……….. grado de velocidad en los instantes A y B o en las posiciones A y B**

Las traducciones utilizadas[1]

- ***De Motu* …….. utilizamos la traducción de Drabkin, presentada en la bibliografía con título traducido al inglés *The Motion and the Mechanics*. Todas las referencias realizadas de este manuscrito están señaladas con su titulo original (*De Motu*), y las páginas señaladas hacen referencia a las páginas de la traducción. La división de *De Motu* en capítulos fue realizada por Drabkin con el objetivo de facilitar la consulta**
- ***Discorsi* ……. utilizamos la traducción de Carlos Solís y Javier Sádaba. Todas las citas señaladas como "*Discorsi*" provienen de esta traducción, y las páginas señaladas hacen referencia a la edición original utilizada para la traducción. Utilizamos también la traducción de Henry Crew y Alfonso Salvio, y las citas provenientes de esta traducción están indicadas como "*Discorsi*" seguido del nombre de los traductores.**
- ***Diálogos* …… utilizamos la traducción de Antonio Beltrán Marí, las páginas señaladas hacen referencia a la versión original.**
- ***Folios* ……… utilizamos las traducciones de Drake, en *Galileo at Work*, y Wisan, en *The New Science of Motion*. Utilizamos también las versiones originales en latín obtenidas por Internet en el sitio del museo Nacional de Florencia (http://www.imss.fi.it)**

Advertencia: todos los diagramas geométricos presentados fueron construidos fuera de escala.

[1] las referencias bibliográficas originalmente en inglés e italiano fueron traducidas al español por mí.

Introducción General

"*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*" es un tratado de Galileo Galilei que fue publicado en 1638, escrito en la forma de diálogos entre tres personajes (Salviati, Sagredo y Simplicio) que discuten las conclusiones de un Autor (que es Galileo, cuyo nombre no aparece) acerca de propiedades físicas de los cuerpos. Salviati es un interlocutor que conoce las ideas de este Autor y procura convencer a los demás de que dichas ideas son verdaderas; Sagredo es un personaje iniciado en las matemáticas euclidianas, y algunas proposiciones serán demostradas por él a partir de las explicaciones de Salviati; mientras Simplicio no conoce las matemáticas y su participación en el diálogo es marcada por preguntas orientadas más por la intuición que por el conocimiento matemático. Estos tres personajes son los mismos que aparecen en un tratado anterior publicado en 1632: *"Dialogo sopra i due massimi sistemi dei mundo."*

De Motu Locali es un tratado formado por las 3ª y 4ª jornadas de los *Discorsi*, donde Galileo realiza la matematización del movimiento terrestre de los cuerpos. Este tratado está dividido en tres partes: la primera dedicada al movimiento uniforme, la segunda al movimiento natural (o acelerado) y la tercera dedicada al movimiento violento (o de proyectiles). Las dos primeras partes constituyen la 3ª jornada y la tercera parte a la 4ª jornada.

A lo largo de esta tesis realizaremos un estudio sobre cómo las matemáticas son utilizadas por Galileo para la consolidación y el desarrollo de su ciencia del movimiento terrestre. Este estudio fue realizado a partir del análisis de las demostraciones de proposiciones y teoremas del movimiento que fueron presentadas por Galileo en *De Motu Locali*. Antes de esclarecer cuál será nuestro recorrido, presentaremos otros aspectos que pueden estar relacionados a este tratado y que no serán abordados en esta tesis.

Influencias medievales

Evidentemente, dado que el estudio del movimiento de los cuerpos es un tema antiguo, y en las propias palabras de Galileo: "No hay, tal vez, en la naturaleza nada más viejo que el movimiento y no faltan libros voluminosos sobre el asunto, escritos por filósofos"[2], consideramos que la influencia de trabajos medievales sobre la obra de Galileo -que analizaremos en esta tesis- es un hecho. No faltan evidencias para decir esto, como es el caso de las numerosas demostraciones del teorema de la velocidad media presentes en los siglos XIV y XV (veremos que se trata de un teorema central en la física galileana), o la definición de movimiento uniformemente acelerado (ya conocido por los eruditos de *Merton College* de Oxford); y aún los primeros pasos que conducirán hacia el propio principio de inercia pueden ser observados por medio de las consideraciones de Filopón (siglo VI) con su rechazo del medio externo para explicar la continuidad del movimiento de los cuerpos[3]. De este modo, a partir de estas y otras influencias medievales[4], es posible realizar un estudio del desarrollo de conceptos claves para la física terrestre de Galileo; sin embargo, no será esta la propuesta que será seguida en esta tesis y la razón es simple: cuando centralizamos el análisis en los

[2] *Discorsi* – p190

[3] Para un análisis más exhaustivo sobre el desarrollo y antecedentes del principio de inercia véase Edward Grant (1983)

[4] Un estudio más detenido sobre la ciencia medieval y la influencia de Avempace sobre Galileo véase Ernest Moody (1975).

fundamentos matemáticos que consolidan la ciencia del movimiento en Galileo, surge un "divisor de aguas" caracterizado por las traducciones e interpretaciones de los *Elementos* de Euclides realizadas por Clavio y Commandino, alrededor de 1570. Para esclarecer mejor este importante aspecto debemos realizar algunas consideraciones relacionadas al proceso de adquisición (comprensión y dominio) de los *Elementos* de Euclides en la Europa de los siglos XVI y XVII.

Los *Elementos* de Euclides es una obra compuesta de trece volúmenes que tratan de geometría plana (volúmenes I a VI), aritmética (VII – X) y geometría sólida (XI – XIII)[5]. Dado la extensión de la obra, la diversidad de conceptos desarrollados, y principalmente, los diferentes niveles de complejidad de los diferentes tratados, la adquisición de conceptos matemáticos (y consecuentemente la posibilidad de aplicarlos en la ciencia del movimiento) fue un proceso lento y desigual:

> "El proceso de apropiación de los *Elementos* es desigual. Algunos libros más simples, como los cuatro primeros, o del libro séptimo al noveno, dedicados a la aritmética, o también, con alguna dificultad mayor, aquellos que tratan de geometría sólida, son rápidamente asimilados, no sin dar luego en algunas discusiones más largas, como aquella del postulado de las paralelas […]. Por otro lado, como es el ejemplo del libro X, son técnicamente más arduos y menos comprensibles; para estos la adquisición es más lenta […]."[6]

De los conceptos y proposiciones matemáticas presentes en los *Elementos* de Euclides, el Libro V posee un puesto singular; por un lado introduce la teoría general de la proporción entre magnitudes[7]- fundamental para la consolidación de gran parte de la obra-, por otro lado, en la escala de complejidad de los libros de Euclides, el Libro V ocupa el primer puesto:

> "Por una parte, por reconocimiento general, [el libro V] es una piedra angular del edificio geométrico, sin él no es posible elevarse sobre las consideraciones más elementales. [Por otra parte], la teoría de proporciones se sitúa en un nivel de abstracción mucho mayor que aquella que corresponde a la parte geométrica de la obra, es casi una meta geometría, o una *mathesis universalis,* en ella se encuentra todo el fundamento de la matemática"[8]

La importancia del Libro V no se aplica solamente para un entendimiento de cómo los *Elementos* de Euclides están estructurados, sino que más bien en nuestro caso, se aplica también para caracterizar parte de los problemas enfrentados por los traductores de este importante tratado en Europa Medieval, y las dificultades no fueron pocas:

> "[…], el Libro V es difícil y complejo. Difícil por el grado de abstracción muy superior al resto del tratado, difícil por la falta de cualquier representación gráfica que permita <<ver>> la necesidad del resultado al lento proceso de la demostración, difícil por la persistencia de una tradición medieval que, insistiendo en sus proporciones racionales y sus clasificaciones y nomenclaturas, impedía atrapar las sutilezas de la teoría general o cuanto menos diluía una perspectiva aritmetizante, que traicionaba el sentido geométrico traduciendo los

[5] Benno Artmann, 1999

[6] Giusti, 1993, p1

[7] Según Thomas L. Heath, la teoría de proporciones ya era utilizada con anterioridad por los Pitagóricos, sin embargo estos la aplicaban solamente para magnitudes conmensurables (es decir, aquellas que pueden ser expresadas por medio de la razón entre números enteros); según este autor no es claro todavía si los pitagóricos extendieron la teoría de proporciones a magnitudes también inconmensurables; véase Thomas L. Heath (1956). Un estudio más detenido acerca de los inconmensurables puede ser visto en Wilbur Richard Knorr (1975)

[8] Giusti, 1993, p2

enunciados en números y operaciones. En fin, difícil sobretodo por la misma estructura axiomática fundada en las relaciones de igualdad y desigualdad, dos definiciones que no conceden a la intuición y que requiere que se proceda por pura deducción.
A todo esto se añade otro problema de complicación: los textos mismos del Libro V, o por lo menos los textos que disponían los estudiosos medievales [como también] del siglo XVI, se encontraban interrumpidos y corrompidos, una circunstancia que fue fuente de problemas sucesivos de interpretación […]"[9]

Giusti señala una última dificultad que se refiere a una circunstancia casi religiosa: la distancia entre la suprema sofisticación de la obra de Euclides y la limitada capacidad de aquellos que lo interpretaban.

Traducciones tempranas de los *Elementos* al latín, como aquella de Campano di Novara (desde el árabe) o de Bartolomeu Zamberti (desde el griego), fueron severamente criticadas por sus sucesores[10]. Las primeras traducciones más correctas desde un punto de vista matemático, y consecuentemente más cercanas de las interpretaciones modernas, son las traducciones de Federico Commandino (1572)[11] y Cristoforo Clavio (1574)[12], la primera desde el griego y la segunda desde el árabe. Aunque ambas traducciones lograron establecer interpretaciones más precisa de la teoría de proporciones, no estaban totalmente exentas de dificultades. Posiblemente, el problema central asociado a la interpretación del Libro V, y consecuentemente de la teoría de proporciones, reside en la propia definición de proporcionalidad (presentada en las ediciones modernas como la Definición 5)[13]. Al referirse a las diferentes definiciones de proporcionalidad publicadas por Clavio y Commandino, Giusti señala:

"Ninguna de las dos interpretaciones procuran dar un método operativo, la finalidad de ambos no es ofrecer reglas de cálculo o de criterios por medio de los cuales se pueda reconocer la igualdad de dos razones, sino más bien de favorecer en la mente del lector la formación de una idea, o bien de una imagen de la cosa definida, con la cual uno pueda entrar en el difícil terreno de la teoría de proporciones."[14].

Evidentemente, el problema que será enfrentado por los sucesores de Clavio y Commandino, entre ellos los mecanicistas del siglo XVI, será no solamente interpretar la definición 5 con más solidez, sino que también saber cómo aplicarla en la explicación de sistemas mecánicos, y las dificultades se extenderán hacia el siglo XVII:

"Una prueba decisiva de la dificultad de la interpretación y asimilación de la definición de Euclides, es el enorme número de comentarios al Libro V que fueron escritos a lo largo de los siglos XVI y XVII, de los cuales solamente una pequeña parte fue impresa"[15]

---

[9] Giusti, 1993, p2
[10] Zamberti debido a su escasa familiaridad con la geometría, y Campano por problemas de circularidad en las definiciones del Libro V; para más detalles véase Giusti (1999), p5 y ss
[11] Ya existían traducciones al italiano de la edición de Commandino en 1575, y la segunda edición fue publicada en 1619. Giusti señala también que la traducción de Commandino fue la base para numerosas ediciones, entre ellas la de David Gregory de 1703
[12] La edición de Clavio fue "considerablemente ampliada", y conoció varias ediciones, hasta 1612 ya existían al menos 5 reediciones.
[13] Giusti señala que en los manuscritos originales utilizados por estos traductores existen diferencias significativas entre las versiones en árabe y griego: "Ni en el texto, ni en la posición misma de la definición [5] en las diversas versiones de los *Elementos* son unívocos. Una misma definición que ocupa la 8ª posición en Commandino, ocupa la 4ª posición en Clavio".
[14] Giusti, 1993, p13
[15] Giusti, 1993, p2

Entre los autores de estos manuscritos podemos señalar a Guidobaldo del Monte[16] y Giovan Battista Benedetti[17].

Será a partir de este contexto histórico que Galileo comenzará a elaborar la matematización de la ciencia del movimiento. Evidentemente el propio Galileo participará de este proceso[18], pues si comparamos demostraciones tempranas (como en un manuscrito *De Motu*, de 1590, o en fragmentos de Galileo del inicio del siglo XVII) con demostraciones presentadas en los *Discorsi*, podremos observar que será cada vez más amplia la utilización por parte de Galileo de los recursos que son ofrecidos por Euclides, eso nos indica que Galileo estará desarrollándose y aprendiendo acerca de la teoría de proporciones en el transcurso de los cuarenta años que anteceden a su muerte.

Ciertamente, dado las críticas y los problemas que señalamos de las traducciones de los *Elementos* anteriores a las traducciones de Clavio y Commandino, es poco probable que Galileo utilizase esas interpretaciones medievales para su desarrollo en la teoría de proporciones[19]. De este modo, para una tesis comprometida con la aplicación del lenguaje matemático en el desarrollo de la ciencia del movimiento en Galileo, no es el caso comprometernos exhaustivamente con antecedentes o influencias medievales en la física galileana. Aún así, haremos un acercamiento parcial de una influencia medieval por medio de un análisis de una demostración de Jordanus (siglo XIII) del principio de balanza y del principio de plano inclinado, veremos entonces cómo Galileo utiliza estos principios en la demostración de conclusiones tempranas relacionadas al descenso de cuerpos a lo largo de planos inclinados[20].

Consideramos, por lo tanto, que la influencia medieval sobre la obra de Galileo, por una parte, se restringe a determinados conceptos físicos y, por otra parte, es interrumpida debido al uso del lenguaje matemático.

Un poco más sobre el contexto histórico de la Teoría de Proporciones

Una segunda posibilidad para realizar esta tesis consiste en un estudio de la matematización de la ciencia del movimiento desde el punto de vista de la teoría de proporciones. Este camino se iniciaría a partir de un estudio más detenido de los

---

[16] *In quintum Euclides Elementorum librum comentarius* Guidobaldo hace un análisis de la definición 5 de Euclides, y también otro manuscrito dedicado al análisis de la proporción compuesta *De proporzione composita di Guidobaldo dal Monte*

[17] En *Diversarum Speculationum Mathematicarum & Physicarum Liber,* Benedetti realiza una tentativa de reformular la teoría de proporciones, sustituyendo la teoría euclidea por una nueva teoría de proporciones; según Giusti: "El motivo científico que insita a Benedetti a sustituir la sistematización euclidea con una nueva teoría de proporciones fue la oscuridad de la definición euclidea de magnitudes proporcionales". El último manuscrito de Benedetti fue *In quintum Euclides librum.*

[18] La definición 5 del Libro V de Euclides será utilizada por Galileo solamente en las demostraciones de los teoremas 1 y 2 del movimiento uniforme, y en todas las demás demostraciones de las 3ª y 4ª jornadas no observamos el uso de dicha definición. En la *quinta jornada,* (aprox. 1641) observamos a Galileo señalar que comprendió la definición 5 por medio del tratado *Espirales*, de Arquímedes; esto nos sugiere que el problema de la interpretación de la definición 5 no estaba totalmente resuelto hasta fines de la primera mitad del siglo XVII.

[19] Según Cohen, "Drake niega la importancia para éste [Galileo] de los últimos estudios medievales sobre el movimiento. La amplitud y significación del conocimiento de Galileo (y el uso) de ideas de los siglos XIV y XV, y de conceptos, principios y métodos del siglo XVI, es objeto en la actualidad de un intenso estudio histórico por parte, entre otros, de William Wallace, Alistair Crombie, y Antonio Carrugo. John Murdoch y Edith D. Sylla han publicado una exploración de las ideas medievales sobre el movimiento *que tiende a minimizar el significado de las ideas medievales sobre el movimiento para la física del siglo XVII*" (Cohen, 1985, p199 – subrayado mío)

[20] El Teorema 3 del movimiento uniformemente acelerado

problemas relacionados a la interpretación de la teoría de proporciones de los *Elementos* de Euclides en la Europa de los siglos XVI y XVII, y, de este modo, saber cómo estos problemas interfieren en la aplicación de la teoría de proporciones a la ciencia del movimiento realizada por Galileo. Sin embargo, dado el largo alcance de este problema, no será este el camino que seguiremos en la presente tesis. Como vimos, una de las principales dificultades de los contemporáneos de Galileo para el dominio de la teoría de proporciones reside en la interpretación de la Definición 5 del Libro V de los *Elementos* de Euclides[21]. De los problemas relacionados a la interpretación de dicha definición mencionaremos dos. La Definición 5 de Euclides establece qué condiciones deben obedecer cuatro magnitudes para que sean proporcionales entre sí, y dichas condiciones son aplicables para dos tipos de magnitudes: conmensurables e inconmensurables[22]. Una primera dificultad sería analizar cómo los contemporáneos de Galileo caracterizaban la diferencia entre estos dos tipos de magnitudes; de hecho, en la 5ª jornada Galileo realiza una interpretación de la definición 5 en términos de magnitudes conmensurables, y no hemos encontrado ninguna referencia que nos indicara que Galileo estuviera conciente de la distinción entre estos dos tipos de magnitudes[23].

Un segundo problema consiste en la propia noción de "proporcionalidad". En la versión en árabe de los *Elementos*, traducido por Clavio, la definición 4 afirma que "proporcionalidad es la similitud entre razones", mientras que la definición equivalente presente en la versión en griego, traducida por Commandino afirma: "analogía es la semejanza entre proporciones". Estas diferentes traducciones, derivadas de diferencias en las versiones originales, generarán diferentes caminos interpretativos que caracterizan en parte el propio proceso de entendimiento de la teoría de proporciones de los estudiosos de los siglos XVI y XVII, y, evidentemente, la realización de un estudio de la matematización del movimiento que fuera centralizado en el propio proceso de entendimiento de la teoría de proporciones, requiere consideraciones precisas capaces de caracterizar estas diferentes interpretaciones. Dada la extensión de este tema, la obra de Galileo quedaría en un plano secundario. Aún así, haremos un acercamiento a un aspecto interno de la teoría de proporciones relacionado al problema de la inclusión de nuevas magnitudes en un sistema matemático preexistente, esto será discutido en la introducción del capítulo 2.

De este modo, un estudio de la influencia de la matemática sobre el desarrollo de la física terrestre de Galileo no será (ni puede ser) realizada a partir de la relación de Galileo con estudios de algunos autores medievales de la ciencia del movimiento, ni tampoco a partir de consideraciones de los problemas relacionados al proceso de adquisición de los *Elementos* de Euclides; de modo que decidimos iniciar nuestro estudio a partir del análisis de la matematización del movimiento que fue publicada por

---

[21] Podemos presentar la Definición 5 como sigue: dado cuatro magnitudes "A", "B", "C" y "D", decimos que A/B = C/D si existen "k" y "q" tales que las tres condiciones abajo sean satisfechas:

1) si $k.A > q.B$ entonces $k.C > q.D$
2) si $k.A < q.B$ entonces $k.C < q.D$
3) si $k.A = q.B$ entonces $k.C = q.D$

[22] A grandes rasgos, decimos que dos magnitudes son conmensurables cuando su razón puede ser expresada por medio de la razón entre números enteros; y magnitudes inconmensurables son aquellas donde la razón no puede ser expresada por números enteros, como es el caso de la razón entre las longitudes de las hipotenusas de dos triángulos rectángulos.

[23] Para más detalles véase los comentarios de Raffaello Magiotti y G. Grandi a la 5ª jornada de Galileo, en Giusti (1993), p75

Galileo en *De Motu Locali*, y fue a partir de este análisis que encontramos el argumento que nos servirá de guía para el desarrollo de esta tesis.

La ciencia del movimiento de Galileo: ¿empírica o matemática?

Una primera consecuencia del análisis realizado de las proposiciones presentadas en *De Motu Locali* fue el darnos cuenta que Galileo prácticamente no hace referencias a procedimientos experimentales. De hecho, existe solamente un experimento descrito por Galileo que está dedicado a probar una única proposición (el teorema de los tiempos cuadrados), que consiste en el famoso experimento de cuerpos que descienden a lo largo de planos inclinados. El hecho de que Galileo describa un único experimento aplicado a una única proposición es muy importante, dado que *De Motu Locali* está compuesto de 44 proposiciones en la 3ª jornada (6 para el movimiento uniforme y 38 para el movimiento uniformemente acelerado) más 14 proposiciones en la 4ª jornada.

El verdadero papel de la experimentación[24] para el desarrollo de la ciencia del movimiento descrita por Galileo en *De Motu Locali* comporta una cierta "ambigüedad". La propuesta inicial de Galileo, como veremos a continuación, es proponer principios y teoremas que efectivamente correspondan a lo que "podemos observar" en la naturaleza; sin embargo, en la introducción de la 3ª jornada, Galileo afirma haber descubierto propiedades del movimiento que *no han sido ni observadas ni demostradas*; hace entonces referencias explícitas al corolario de los números impares y a que la trayectoria de proyectiles tiene la forma geométrica de una parabólica[25].

A continuación veremos un poco sobre cómo Galileo explica el papel de la experimentación aplicado a la formulación de dos principios centrales de su física terrestre: la definición de movimiento uniformemente acelerado y el Postulado de Galileo.

El primer contacto de Galileo con la definición de movimiento acelerado en *De Motu Locali* es presentado como sigue:

> "Ante todo parece deseable encontrar y explicar una definición que mejor corresponda al fenómeno natural. Cualquiera puede inventar un tipo arbitrario de movimiento y discutir sus propiedades; esto, por ejemplo, aquellos que han imaginado hélices y [líneas] cóncavas para describir ciertas formas de movimiento las cuales no concuerdan con la naturaleza, y han muy admirablemente establecido las propiedades que estas curvas poseen en virtud de su definición; sin embargo, nosotros hemos decidido considerar el fenómeno de la caída de los cuerpos con una aceleración tal cual realmente sucede en la naturaleza, y hacer con que esta definición de movimiento acelerado exhiba las características esenciales de movimientos acelerados [tal cual son] observados. En esto, por fin, después de repetidos esfuerzos[26] nosotros confiamos haber logrado esta tarea. Creemos haber confirmado principalmente a través de consideraciones de resultados experimentales que concuerdan y corresponden exactamente con aquellas propiedades que han sido, una seguida de la otra, demostradas por nosotros."[27]

---

[24] Peter Dear alerta sobre las distintas nociones de experiencia y experimentación que podemos encontrar en el siglo XVII, véase P. Dear, *Discipline and Experience*, Univercity of Chicago Press, 1995

[25] Ambas proposiciones están descritas en el Capítulo 3 de esta tesis

[26] En la traducción original al inglés leemos: "after repeated *efforts*". En la traducción de Carlos Solís y Javier Sádaba podemos leer "después de largas *reflexiones*" [y el original en latín "diuturnas mentis agitaciones"]

[27] *Discorsi* – traducción al ingles de Crew, H. y Salvio, A, p200

Aquí vemos a Galileo comprometerse para ofrecer una definición de movimiento acelerado "tal cual observamos en la naturaleza". De hecho, Galileo establece la definición correcta de la caída de los cuerpos: los incrementos de velocidad serán iguales para iguales intervalos de tiempo. Sin embargo, Galileo nos dice que "después de largos esfuerzos" cree haber logrado establecer dicha correspondencia por medio del acuerdo entre los resultados experimentales y las "propiedades que serán sucesivamente demostradas a partir de la definición". La "correspondencia" pretendida por Galileo entre la definición y los hechos naturales, ocurre, por lo tanto, de manera indirecta. "Galileo raras veces se refiere a esta definición como un principio y algunas veces, eventualmente, se refiere a ella como una definición arbitraria"[28]. Aunque exista un claro énfasis del papel central de la experimentación, la definición de movimiento acelerado parece ser, más bien, independiente de la observación de los hechos, tal cual es el ejemplo mencionado por Galileo, "aquellos que imaginan ciertas curvas para describir ciertas formas de movimiento".

A partir de la observación, Galileo sabe que la velocidad de un cuerpo aumenta a lo largo de su caída, la primera cuestión crucial para establecer la correcta definición de movimiento acelerado consiste en saber *"cuál es la proporción en que suceden dichos aumentos"*. Para esto Galileo recurrirá al principio de simplicidad:

> "En suma, el estudio del movimiento acelerado nos ha llevado, como agarrados de la mano, a la observación de las costumbres y reglas que sigue la misma naturaleza en todas sus obras restantes, para cuya *ejecución suele hacer uso de los medios más inmediatos, más simples y más fáciles.* No puedo por menos que estar seguro de que no hay nadie que crea que se pueda nadar o volar de una manera más simple y más fácil que la que usan, por instinto natural, los peces y los pájaros.
> "Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo, poco a poco, cada vez más velocidad, *¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción?* Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, *no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquella que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha que se da entre tiempo y movimiento.*"[29]

De hecho, las velocidades adquiridas por un cuerpo en caída podrían aumentar según otras proporciones (según la sucesión de los números impares, o según los números cuadrados, etc), sin embargo, de todos los casos posibles, el más simple es aquél donde los aumentos de velocidad son siempre iguales entre sí. Galileo no ofrece cualquier indicación de que dicha elección haya sido orientada por algún resultado experimental:

> "El énfasis inicial está en la experimentación, sin embargo los argumentos ofrecidos por Salviati en el diálogo subsiguiente son principalmente racionales, y los experimentos son requeridos con el propósito de demostrar que el movimiento se incrementa continuamente desde el reposo[30]"[31].

Una vez establecido que los aumentos de velocidad son siempre iguales, resta determinar si dichos aumentos suceden con respecto al tiempo (ley correcta de la caída) o al espacio (ley incorrecta de la caída). Los criterios que guiaron a Galileo hacia la

---

[28] Wisan, 1973, p121
[29] *Discorsi* – p197, subrayado es mío
[30] Véase *Discorsi*, pp199 y ss
[31] Wisan, 1973, p212

correspondencia correcta entre incrementos de velocidad y el tiempo son oscuros y de difícil interpretación. La razón de esto es que en manuscritos tempranos (anteriores a 1610) vemos a Galileo demostrar teoremas centrales a partir de la ley incorrecta de caída, y posteriormente observamos a los mismos teoremas ser demostrados a partir de la ley correcta. Galileo no es claro acerca del porqué de este cambio, y en *De Motu Locali* Galileo no presenta elementos que nos orienten hacia los criterios de su elección, solamente presenta un rechazo a la ley incorrecta que es demostrada por reducción al absurdo[32].

Después de presentar las razones del rechazo de la definición alternativa para el movimiento acelerado (la ley incorrecta), al enunciar la definición de movimiento uniformemente acelerado, Galileo recurre nuevamente al principio de simplicidad:

> "[…] del mismo modo que la igualdad y uniformidad del movimiento se define sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios (en efecto, llamamos movimiento uniforme al movimiento que en tiempos iguales recorre espacios iguales), así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo, *podemos imaginarnos* que los aumentos de velocidad tengan lugar con [la misma] simplicidad. [Podemos hacer esto] en cuanto *determinemos teóricamente* que un movimiento es uniformemente y, del mismo modo, continuamente acelerado, cuando en tiempos iguales, se los tome de la forma que se quiera, adquiere incrementos iguales de velocidad"[33]

Y más adelante presenta un enunciado de la definición más simplificado:

> "Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que, partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez [*celeritatis momenta*]"[34]

El. segundo principio central, el Postulado, es presentado por Galileo luego después de la definición, y es enunciado como sigue:

> "Doy por supuesto que los grados de velocidad alcanzados por un mismo móvil, en planos diversamente inclinados, son iguales cuando las alturas de los mismos planos son también iguales"[35]

Este postulado descrito por Galileo es central para el desarrollo de casi la totalidad[36] de las proporciones que serán desarrolladas en la 3ª jornada de los *Discorsi.* A partir del diagrama de la figura abajo, el postulado establece que si un cuerpo inicia su movimiento desde el reposo en el punto C, y desciende a lo largo de los planos CB, CD

---

[32] "Si las velocidades son proporcionales a los espacios atravesados o por atravesar, tales espacios son recorridos en tiempos iguales [Teorema 2 del MU]; en consecuencia, si las velocidades con las que el cuerpo que cae recorre cuatro codos fuesen dobles de las velocidades con las que recorrió los dos primeros codos (precisamente en cuanto que una distancia es el doble de la otra), entonces los intervalos de tiempo de tales recorridos son iguales. Ahora bien, que un mismo móvil atraviese los cuatro y los dos codos al mismo tiempo es algo que no puede darse, a no ser en el movimiento instantáneo. Nosotros vemos, no obstante, que el grave que cae realiza su movimiento en el tiempo, recurriendo en menos los dos codos que los cuatro. Es, por lo tanto, falso que su velocidad aumente en proporción al espacio." *Discorsi* - p203

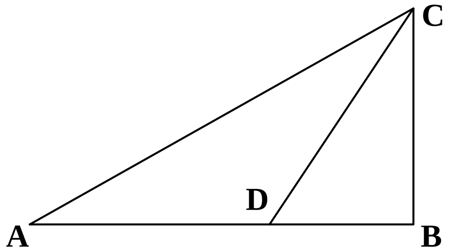
[33] *Discorsi* - p198, subrayado es mío

[34] *Discorsi* – p205

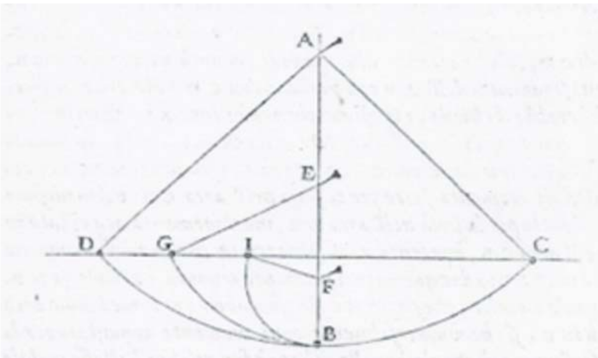
[35] *Discorsi* – p205

[36] A partir de este postulado Galileo demuestra el teorema 3 del movimiento acelerado, central para la física terrestre de Galileo. Para más detalles véase introducción de los capítulos 1 y 2 de esta tesis.

y CA, entonces las velocidades adquiridas por el cuerpo en los puntos B, D y A serán iguales entre sí.

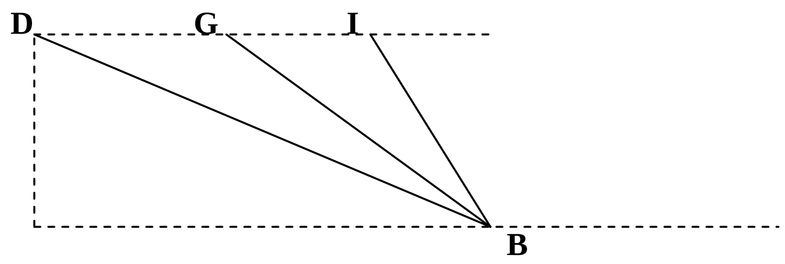


Galileo presenta una demostración para este postulado por medio de un experimento utilizando un péndulo. En la figura que sigue considere un cuerpo preso en una cuerda. Si la cuerda está fija en la otra extremidad en el punto “A”, y el cuerpo es abandonado desde el reposo en “C”, desconsiderando cualquier fricción, el cuerpo descenderá por el arco CB y ascenderá por el arco BD hasta alcanzar el punto “D”. De este modo, Galileo concluye que el ímpeto adquirido por el cuerpo en su descenso por el arco CB será suficiente para hacer con que este mismo cuerpo ascienda desde el punto B hasta el punto D (del otro lado, de misma altura). Ahora bien, si ponemos un clavo en el punto “E”, del mismo modo, el cuerpo desciende por el arco CB y ascenderá por el arco BG hasta alcanzar el punto “G” (de misma altura); y lo mismo sucederá si el clavo es fijado en el punto F



A partir de esta construcción experimental, dado que los arcos CB y BD son iguales, la velocidad adquirida por el cuerpo en el punto B después de su descenso por CB será la misma velocidad que impulsa el ascenso del cuerpo a lo largo del arco BD (y viceversa, la velocidad necesaria para que el cuerpo ascienda desde B hasta D es la misma velocidad que el cuerpo adquiere si éste descendiera desde el reposo en D hasta B). Ahora bien, dado que la velocidad que impulsa el ascenso del cuerpo por los arcos BD, BG y BI es la misma (que fue adquirida en el descenso por CB), y dado que los puntos D, G y I poseen la misma altura, Galileo concluye que las velocidades que serían adquiridas si el cuerpo fuera abandonado desde los puntos D, G y I, al alcanzar el punto B, serían iguales entre sí.

Galileo entonces extiende su conclusión del movimiento de un cuerpo en un péndulo hacia el movimiento de un cuerpo a lo largo de planos de misma altura y distintas inclinaciones. A partir del diagrama de la figura abajo, si abandonamos un cuerpo desde el reposo en los puntos D, G y I, éste alcanzará el punto B con la misma velocidad.



Al concluir la demostración, Sagredo acepta el argumento afirmando:“el experimento es tan apto para establecer el postulado, que podemos considerarlo *como si se lo hubiera demostrado*”[37]. Es importante notar que Galileo nos ofrece pistas claras de que la analogía entre el movimiento de un cuerpo en un péndulo y en un plano inclinado no es perfectamente correcta, como el propio Galileo nos esclarece a continuación:

> “Aunque el experimento que hemos hecho nos muestra que la caída por el arco CB confiere al móvil un *momento* tal que pueda volver a llevarlo a la misma altura por cualquiera de los arcos BD, BG o BI, nosotros *no podemos mostrar, con la misma evidencia*, que lo mismo habría de ocurrir en el caso de que una bola totalmente redonda hubiese de descender a través de planos rectos, cuyas inclinaciones son, respectivamente, las mismas que las cuerdas de dichos arcos”[38]

De hecho, primero, la aceleración del cuerpo en el descenso por un arco y por un plano inclinado no proceden de la misma forma; en el primer caso la acción de la aceleración gravitacional sobre el movimiento del cuerpo varía disminuyendo de intensidad hasta alcanzar su valor mínimo en el punto B, mientras en el descenso por un plano inclinado la aceleración será constante a lo largo de todo el movimiento. Segundo, este mismo experimento no puede ser reproducido para el movimiento en planos inclinados, dado que después de descender por el primer plano, el cuerpo, al ser desviado para iniciar su ascenso por el segundo plano perdería energía, haciendo que la velocidad máxima adquirida en el descenso no sea la misma velocidad con que el cuerpo inicia su ascenso (supuesto utilizado para el movimiento del cuerpo en un péndulo). En efecto, Galileo afirma que el resultado de este experimento debe ser tomado como un postulado[39].

> “Tomemos, de momento, pues, esto como un postulado, cuya verdad sin sombras estableceremos más adelante al contemplar otras conclusiones, fundamentales en tales hipótesis y que responden con toda exactitud a los experimentos”[40]

De este modo, tanto el postulado como la definición de movimiento acelerado serán confirmados por medio de evidencias experimentales a lo largo del tratado. Sin embargo, como hemos dicho, Galileo presentará solamente un experimento para mostrar la correspondencia entre una proposición (derivada de la definición) y los hechos que pueden ser observados; se trata del famoso experimento con planos inclinados, utilizado para demostrar el teorema de los tiempos cuadrados. Veremos en seguida una breve

---

[37] *Discorsi*, p207
[38] *Discorsi*, p207, subrayado es mío
[39] La última palabra de Galileo acerca de la demostración de este importante postulado será dado por medio de la demostración de escolio 1 de la 3ª jornada, que será analizada detenidamente en el capítulo 1 de esta tesis.
[40] *Discorsi*, p208

descripción de este experimento como también algunas de las distintas posiciones de algunos estudiosos con respecto al mismo.

Después de la demostración del primer corolario del teorema de los tiempos cuadrados, observamos a Simplicio realizar una solicitud:

> "[…] es éste el momento oportuno de presentar algunos de esos experimentos de los que se dice que abundan y que en muchos casos concuerdan con las conclusiones que se han demostrado"[41].

Salviati entonces presenta la descripción de un experimento de cuerpos que descienden a lo largo de un plano inclinado:

> "En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso, colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después hacíamos descender por él una bola de bronce muy dura, bien redonda y pulida.
> Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta la altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho) la bola por dicho canal, tomando nota, como en seguida he de decir, del tiempo que tardaba en recorrerlo todo. Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos constatar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esta misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del mismo modo más exacto, precisamente la mitad del otro. […] llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de sus tiempos"[42].

La preocupación de Galileo de esclarecer detalles de las características físicas de los materiales utilizados ("listón de doce codos", etc), como también los procedimientos adoptados ("dejar la bola caer en el tablón" o "repetir el procedimiento varias veces"), pueden ser indicativos de que efectivamente realizó este experimento. Talvez el hecho más notable de la descripción que acabamos de ver es el uso de "papel de pergamino lustrado al máximo", se trata de una información que solamente se aprende en la práctica, dado que otros materiales podrían haber sido utilizados: una cosa es asumir (teóricamente) que no existe fricción entre superficies en contacto, otra cosa, muy diferente, es buscar qué materiales permiten "realizar" dicha condición en un experimento. Sin embargo, aunque dicho experimento pudiera efectivamente haber sido realizado, el verdadero papel para la consolidación del teorema a que este experimento se aplica es un tema controvertido, como veremos a continuación.

Según Koyré[43] la acumulación de cierto número de hechos, colección de datos adquiridos de la observación y de la experiencia, no constituye una ciencia, "Los <<hechos>> tienen que ser ordenados, interpretados, explicados. En otras palabras, sólo cuando son sometidos a un tratamiento teórico es que el conocimiento de los hechos se vuelve una ciencia"[44]. Koyré considera que existe una significativa diferencia entre

---

[41] *Discorsi*, p298
[42] *Discorsi*, p213
[43] Ramalho, M. (trad), 1982, *Alexandre Koyré: Estudos de historia do pensamento científico*
[44] *Ibid* , p272

"experiencia" y "experimentación": la primera es generada a partir de un sentido común, mientras la segunda es la contrapartida del desarrollo teórico y es generado a partir de un sistema matemático preexistente:

> "La observación y la experiencia – es decir, la observación y la experiencia rudimentarias, efectuadas a través del sentido común – no tuvieron sino un papel de reducida importancia en la edificación de la ciencia moderna. Se podría decir que ellas constituyen los principales obstáculos que la ciencia encontró en su camino. No fue la experiencia, sino la experimentación que impulsó el crecimiento de la ciencia y favoreció su victoria. […] la experimentación y teoría son mutuamente inter-determinadas, y es con el desarrollo de la precisión y el perfeccionamiento de la teoría que aumentan la precisión y el perfeccionamiento de las experiencias científicas. En efecto, si una experiencia científica – como Galileo tan bien expresó -, constituye una pregunta formulada a la naturaleza, es claro que la actividad cuyo resultado es la formulación de esa pregunta es función de la elaboración del lenguaje en el cual esa actividad se expresa."[45]

La interdependencia entre la teoría y la experimentación es determinada por la aplicación del lenguaje matemático en el estudio de fenómenos naturales. De hecho, según Koyré la realización de un experimento, y consecuentemente la elección de los materiales y procedimientos que serán seguidos, es orientada según la definición matemática de las magnitudes que pretendemos medir:

> "La investigación teórica adopta y desarrolla el modo de pensar del matemático. Esa es la razón por la cual su <<empirismo>> [de la ciencia moderna] difiere del todo de la tradición aristotélica: <<El libro de la naturaleza es escrito en caracteres geométricos>>, declaraba Galileo. Eso implica la circunstancia de que, para lograr su objetivo, la ciencia moderna tiene que sustituir el sistema de conceptos flexibles y semi-cualitativos de la ciencia aristotélica por un sistema de conceptos rígidos y estrictamente cuantitativos. Lo que significa que la ciencia moderna se constituye sustituyendo el mundo cualitativo, o más exactamente, *mixto*, del sentido común (y de la ciencia aristotélica), por un mundo arquimediano de la geometría, volviendo real o –lo que es exactamente la misma cosa – sustituyendo el mundo del más o menos, que es nuestra vida cotidiana, por un Universo de medida y de precisión. En efecto, esa sustitución excluye automáticamente del Universo todo que no puede ser sometido a la medida exacta."[46]

De un lado tenemos el mundo "real", de las formas irregulares con fuerzas disipantes, y de otro, el mundo matemático "ideal", de las formas perfectas; para que la correspondencia entre estos dos mundos sea verificada es crucial que las medidas tomadas en un experimento sean precisas, pues en caso contrario las predicciones matemáticas teóricas no concordarán con los resultados experimentales. Será a partir de la imprecisión de las medidas de los experimentos de Galileo que Koyré cuestionará la posibilidad de que la experimentación actuase como una base que sostiene el desarrollo de la ciencia de Galileo. Al referirse al experimento del plano inclinado que describimos anteriormente, escribe Koyré:

> "Una bola de bronce descendiendo en un canal liso y pulido, ¡hecho en la madera! Un recipiente de agua con un pequeño orificio por el cual el agua es recolectada en un vaso, para que sea pesada y, así, medir el tiempo de descenso de la bola: qué acumulación de

---

[45] *Ibid*, p272
[46] *Ibid*, p272-3

> fuentes de error e inexactitud. Es evidente que las experiencias de Galileo son destituidas de valor. La propia perfección de sus resultados es una rigurosa prueba de su inexactitud”[47]

Koyré sostiene que Galileo fue incapaz de realizar medidas directas en el experimento del plano inclinado “por un lado sustituye la caída libre por el movimiento a lo largo de un plano inclinado y, por otro lado, por el movimiento de un péndulo”, sostiene también que ambas sustituciones son basadas en supuestos equivocados:

> “Las experiencias de Galileo se basan en las siguientes suposiciones: a) que el movimiento de un cuerpo que desciende a lo largo de un plano inclinado es equivalente al movimiento de un cuerpo que desciende sin fricción sobre el mismo plano; b) que el movimiento pendular es perfectamente isócrono. Siendo ese isocronismo una consecuencia de su ley de la caída, [sin embargo] ninguna medida directa de los períodos consecutivos de oscilación es posible, simplemente porque no había relojes con los cuales se podría determinar dicho isocronismo. Galileo, entonces sustituye la medida directa por la comparación entre los movimientos de dos péndulos diferentes (de igual longitud), cuyos movimientos de oscilación, aún con amplitudes diferentes, no llegan en el mismo momento a sus posiciones de equilibrio (el punto más bajo de la curva). La misma experiencia, hecha con péndulos cuyas oscilaciones son constituidos por cuerpos de pesos diferentes, demuestra que los cuerpos pesados o leves caen con la misma velocidad”[48]

Los artículos de Koyré fueron publicados en su mayoría en los años 50. A partir de los años 60, surgieron nuevos argumentos a favor de resaltar el papel central de la experimentación en la ciencia del movimiento de Galileo. Esta nueva línea de argumentación sugiere que las medidas realizadas por Galileo no eran tan “imprecisas” como se suponía. De hecho, según Wisan:

> “Settle reproduce satisfactoriamente los resultados experimentales de Galileo utilizando equipamientos comparables, y conjetura que no apenas los experimentos fueron realizados sino que juegan un papel clave en el desarrollo de la ciencia de Galileo”[49].

El experimento reproducido por Settle consiste en el que describimos antes acerca del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado.

El papel central de la experimentación fue posteriormente reforzado por medio de los trabajos de Stillman Drake[50].

> “En los comienzos de los años 70, Stillman Drake realizó un nuevo estudio de los manuscritos de Galileo. Entre ellos encontró páginas que habían sido omitidas por Favaro en su edición de [las obras de] Galileo porque << ellos contenían apenas cálculos o diagramas sin proposiciones o explicaciones que los asistieran>>”[51]

Drake concluyó de su análisis que estos datos y diagramas representan no otra cosa que:

> “[…] una serie de experimentos diseñados para poner a prueba una *suposición fundamental*. La suposición, según Drake, era la de la inercia lineal; el descubrimiento fue que un proyectil moviéndose lentamente (una bola que rueda hacia abajo por un plano inclinado,

[47] *Ibid*, p275
[48] *ibid*
[49] Wisan, 1973, p120. véase Bibliografía complementaria.
[50] Los análisis de Stillman Drake han sido publicados en varios artículos, véase bibliografía complementaria.
[51] Cohen, B, 1985, *The Birth of a new physics*, W-W-Norton & Company, New York, p 197-8

> encuentra un deflector y es lanzado al espacio) tiene una trayectoria curva que se asemeja a una parábola"[52].

Sin embargo, la demostración presentada por Galileo en la 4ª jornada de los *Discorsi*, de que la trayectoria de un proyectil tiene la forma geométrica de una parábola, no recurre a cualquier consideración empírica, más bien se trata de una demostración guiada por el lenguaje matemático[53]. De este modo, la lectura de las demostraciones de las proposiciones que fueron publicadas por Galileo nos sugiere que el desarrollo de su ciencia del movimiento fue guiado más bien por pensamiento racional, a partir de la aplicación del lenguaje matemático. Por otro lado, los estudios de Drake sobre los manuscritos de Galileo (no publicados) sugieren que el pensamiento de Galileo fue guiado más bien por medio de experimentos.

La posición, defendida por Drake, y como vimos, también por Settle, de que la experimentación es la guía del pensamiento de Galileo no es universalmente aceptada; Wisan, por ejemplo, considera que la mayor parte del trabajo de Galileo es orientado racionalmente (en el sentido de matematizado), más de lo que los estudios de Settle sugieren. Wisan, a su vez, acepta que la experimentación posea un papel clave en los trabajos de Galileo, sin embargo afirma que "es difícil determinar exactamente cuál es este papel, especialmente en el caso de los trabajos acerca del movimiento"[54]. De hecho, la propia conclusión de Drake posee dificultades, como afirma Cohen:

> "Drake nos ha proporcionado una versión de los pasos que llevaron al descubrimiento de las leyes del movimiento que concuerdan razonablemente con los diagramas y datos numéricos de Galileo. Queda todavía abierta la cuestión de si es posible que una versión algo diferente explique también estos escuetos apuntes. En ausencia de comentarios o anotaciones explicativas del mismo Galileo, *cualquier reconstrucción debe ser un tanto tentativa e hipotética*. Para efectuar estas reconstrucciones y dar un significado físico a los números, diagramas y notas ocasionales de Galileo, *Drake ha tenido que hacer cierto número de suposiciones, conjeturar las posibles etapas intermedias de su pensamiento*. Lo que emerge es una imagen consistente, pero que no ha sido universalmente aceptada."[55]

En la actualidad, la controversia reside en saber cómo los experimentos influenciaron el desarrollo de las ideas de Galileo acerca del movimiento, como afirma Cohen:

> "El creciente conocimiento de los experimentos realmente llevados a cabo por Galileo ha conducido a una renovación del interés por tratar de elucidar, tan precisamente como sea posible, el camino que siguió Galileo en su descubrimiento de las leyes del movimiento. ¿Fueron dirigidos sus pasos principalmente por el análisis intelectual, como sus trabajos publicados podrían hacernos creer? ¿O se desarrollaron sus ideas mientras se hallaba realizando experimentos?"[56]

La controversia sobre cuál es la guía del pensamiento de Galileo, matemática o experimentación, todavía no está resuelta, pues existen aún consideraciones relacionadas al tema que no fueron puestas en tela de juicio. Como vimos, Galileo

---

[52] *Ibid*, subrayado es mío
[53] Como veremos en al capítulo 3 de esta tesis, utiliza una propiedad geométrica de parábolas del tratado de cónicas de Apollonius, el teorema de los tiempos cuadrados y su primer corolario (el corolario de los números impares).
[54] Wisan, 1973, p120
[55] *Ibid*, p 200, subrayado es mío
[56] *Ibid*, p 197

promete en el inicio de la 3ª jornada "numerosas pruebas experimentales que corresponden a las proposiciones que son derivadas de la definición", esta afirmación nos da a entender que la experimentación efectivamente orienta el pensamiento de Galileo, sin embargo, si es así ¿por qué Galileo presenta solamente una descripción experimental? Por otra parte, veremos proposiciones, como la regla de doble distancia[57], que describen propiedades físicas del movimiento cuya demostración está muy lejos de cualquier posibilidad de representación experimental. El propio Galileo parece querer mostrar que encontró en la matemática el punto de partida para el desarrollo de su física terrestre. En la 4ª jornada, después de demostrar que el lanzamiento de un cuerpo con un ángulo de 45º presenta un alcance máximo, nos describe una importante consideración acerca del papel de las matemáticas en la ciencia del movimiento:

> "Sagredo: La fuerza de las demostraciones que fluyen necesariamente, *como ocurre sólo en las matemáticas*, me llena de asombro y satisfacción. Yo ya sabía, por las explicaciones recibidas de los artilleros, que entre todos los disparos de trayectoria curva que se hacen en artillería o con morteros, el de máximo alcance, es decir, aquel que manda a mayor distancia la bala, es el que se obtiene cuando la elevación tiene cuarenta y cinco grados o, como ellos dicen, el sexto punto de la escuadra. A pesar de todo esto, entender por qué ocurre así supera infinitamente la información recabada de otros u obtenidas por la acumulación de repetidas experiencias.
> Salviati: Lo que V. S. dice es muy cierto. El conocimiento de un solo efecto, obtenido a través de su causa, nos abre las puertas de la comprensión y atestigua la existencia de otros efectos *sin necesidad de recurrir a la experiencia*, como ocurre, precisamente, en el caso que estamos tratando. Así, una vez que de la mano de la demostración tenemos la certeza de que entre todos los disparos de armas de tiro curvo, el de mayor alcance es aquel cuya elevación tiene cuarenta y cinco grados, el autor nos demuestra lo que tal vez *con la sola experiencia no se había observado* […]"[58]

Galileo entonces presenta la explicación de lo que será demostrado en la siguiente proposición: se sabe que el alcance máximo se adquiere con disparos de 45º, sin embargo, si realizamos dos disparos, uno con 35º y otro con 55º (es decir, con 10º menos y 10º más), entonces ambos disparos presentan *el mismo alcance*. Y, en efecto, generalizando esta conclusión para cualquier par de disparos que superen o sean superados por el mismo número de grados con respecto al ángulo de 45º, los alcances serán siempre iguales.

Como conclusión aceptamos que la experimentación posee un papel central para la física terrestre de Galileo Galilei, sin embargo, dicho papel no puede ser de un guía, sino más bien aquél de hacer corresponder enunciados matemáticos con la realidad de los fenómenos naturales: el papel de la experimentación sería más bien de un juez, que determinara la verdad o falsedad de los enunciados físicos establecidos por medio del lenguaje matemático previamente establecido. Por otro lado, esta posición solamente puede ser admitida como parcial, dado que en *De Motu Locali* consideramos que es demasiado escaso el material que permitiría una conclusión más definitiva.

---

[57] Véase capítulo 2 de esta tesis
[58] *Discorsi*, p296 – subrayado mío

Nuestro recorrido

La segunda consecuencia del estudio realizado sobre las demostraciones de las proposiciones demostradas en las 3ª y 4ª jornadas, es el hecho de que Galileo no presenta ningún teorema (o proposición) que incorpore la “aceleración” como una magnitud del movimiento, es decir, la aceleración no es una magnitud que fue cuantificada por Galileo. Aunque Galileo no solamente defina movimiento uniformemente acelerado como también describa sus propiedades por medio de las proposiciones de la 3ª jornada, no existe ninguna proporción que determine una medida de aceleración, es decir, que haga referencia a una cantidad que podría ser representada por medio de la longitud de un segmento de recta. En efecto, el objetivo de esta tesis consistirá en caracterizar este aspecto de la física de Galileo. Evidentemente, tampoco podremos ofrecer una respuesta definitiva a este problema, nuestro objetivo es más bien ofrecer una explicación de cómo es que este problema, en sí mismo, puede ser justificado. Para abordar este tema utilizaremos dos hipótesis de trabajo que nos servirán como guías, ambas buscarán explicar, bajo distintos enfoques, el por qué de la ausencia de la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento.

La primera hipótesis de trabajo sugiere que la ausencia de la aceleración (insistimos, como magnitud cuantificada del movimiento) se deriva de un problema de interpretación del significado físico de las magnitudes que están expresadas por la teoría de proporciones; esta hipótesis está apoyada en dos bases. La primera base se caracteriza por un supuesto, realizado en la demostración del primer escolio de la 3ª jornada de los *Discorsi*, donde el ímpeto es un invariante del movimiento uniformemente acelerado. Hoy sabemos que el movimiento uniformemente acelerado posee dos magnitudes físicas que son invariantes, a saber, fuerza y aceleración. Veremos que Galileo se acercará a esta importante conclusión, reconociendo que existe un invariante para el movimiento uniformemente acelerado, pero interpretará que dicho invariante está relacionado al peso del cuerpo y jamás entenderá a este invariante como una aceleración.

La segunda base que sostiene la primera hipótesis de trabajo proviene de una paradoja encontrada por Galileo, esta paradoja se caracteriza por una contradicción de resultados entre el Postulado de Galileo (extendido al movimiento de cuerpos a lo largo de planos inclinados) y un teorema temprano, que llamaremos teorema “*De Motu*”. Si consideramos un cuerpo que desciende a lo largo de un plano inclinado y después el mismo cuerpo desciende a lo largo de una vertical, de misma altura, el Postulado afirma que en ambos trayectos las velocidades máximas adquiridas por el cuerpo deben ser iguales entre sí, sin embargo, el teorema *De Motu* afirma que el cuerpo debe ser más veloz por la vertical que por el plano inclinado. Veremos evidencias de que Galileo presenta esta contradicción y no entiende cómo es posible que un cuerpo sea más veloz, y, al mismo tiempo, posea la misma velocidad. En la actualidad dicha contradicción no existe. De hecho, siguiendo la misma situación física descrita por Galileo, sabemos que las velocidades deben ser iguales, pero es la aceleración (y no velocidad) la que será mayor por la vertical que por el plano inclinado. De este modo, la contradicción de resultados encontrada por Galileo dejaría de existir si él reconociera que el “más veloz”, en el teorema *De Motu*, no hacía referencia a la velocidad, sino a una nueva magnitud del movimiento, de un tipo físico distinto de la velocidad, que hoy llamamos aceleración. Dedicaremos todo el capítulo 1 para el análisis y presentación tanto de la paradoja como también del supuesto de que el ímpeto fuera un invariante del movimiento uniformemente acelerado.

La segunda hipótesis de trabajo que seguiremos en esta tesis afirma que la ausencia de la aceleración es un problema matemático, es decir, se deriva de límites de representación del sistema matemático que fue utilizado por Galileo: la teoría de proporciones. Como vimos, es a partir de un supuesto de simplicidad que Galileo considera que los aumentos de velocidad son iguales para iguales intervalos de tiempo (que corresponde a la ley correcta de caída de los cuerpos). Sin embargo, existe una diferencia entre aceptar que los aumentos de velocidad sean iguales, y extender dicho supuesto a un segundo paso, y considerar que los aumentos de velocidad en tiempos iguales pueden ser expresados por medio de un invariante del movimiento. Este segundo paso es caracterizado por la inserción de una nueva magnitud en el esquema teórico, que correspondería a la aceleración. Veremos en el capítulo 2 que la necesidad de la inserción de nuevas magnitudes para explicar las propiedades del movimiento de los cuerpos está directamente relacionada al problema de la cuantificación (o la posibilidad de medirse) de dichas magnitudes. Dada la complejidad y extensión de los análisis necesarios para caracterizar este problema desde el punto de vista matemático, solamente abordaremos este tema parcialmente (en la primera sección del capítulo 2), haciendo así, que el análisis que realizaremos esté orientado por elementos indirectos.

A partir de consideraciones de la estructura general de las proposiciones que forman la 3ª jornada de los *Discorsi*, veremos que la importancia del movimiento uniforme en la física terrestre de Galileo trasciende el ámbito físico y se extiende hacia una necesidad que es matemática. Esta consideración, derivada del análisis de las demostraciones de teoremas que son centrales para el movimiento uniformemente acelerado, posee un aspecto inesperado: si el objetivo de Galileo es describir un movimiento que es acelerado, entonces ¿por qué necesita del movimiento uniforme? De hecho, ambos son movimientos distintos y hoy podemos describirlos de manera independiente. Sin embargo, veremos que de los ocho principios y teoremas fundamentales de la física terrestre de Galileo, seis poseen dependencia directa del movimiento uniforme.

Esta importancia central del movimiento uniforme puede ser interpretada a partir del hecho de que para la cuantificación de cualquier magnitud física es necesario que dicha magnitud sea relacionada a algún tipo de invariante; dado que el movimiento uniformemente acelerado no posee un invariante que le sea propio, para la cuantificación de las magnitudes físicas aplicadas a la descripción de este movimiento, Galileo recurrirá a la velocidad constante del movimiento uniforme como el invariante necesario para cuantificar el espacio, tiempo y los grados de velocidad del movimiento uniformemente acelerado. De este modo, la relación entre ambos movimientos será central para la consolidación de las proposiciones que describen el movimiento uniformemente acelerado en Galileo.

La segunda hipótesis de trabajo será abordada, por lo tanto, a partir del análisis de cómo Galileo realiza la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado. Veremos que son dos los teoremas que determinan dicha relación: el teorema de la velocidad media y la regla de doble distancia. El capítulo 2 será dedicado, por lo tanto, al análisis de cómo estos teoremas son demostrados y donde y cómo son aplicados, veremos entonces que ambos teoremas necesitan de supuestos que no están justificados.

Una vez concluido el análisis de consideraciones aplicadas a las demostraciones del teorema de la velocidad media y regla de doble distancia, pasaremos a realizar un estudio de cómo estos dos teoremas son aplicados para el desarrollo de las 3ª y 4ª jornadas de los *Discorsi*. Veremos entonces que el teorema de la velocidad media es utilizado para la demostración de dos teoremas de la 3ª jornada: el teorema de los tiempos cuadrados y el teorema 3, ambos serán descritos y sus demostraciones serán analizadas al final del capítulo 2.

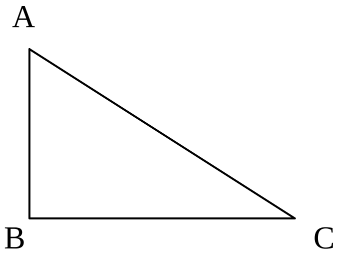
Para el estudio de la aplicación de la regla de doble distancia surgió un imprevisto. Este teorema es aplicado en las demostraciones de las proposiciones de la 4ª jornada, que trata, como hemos dicho, del movimiento de proyectiles. Un primer modo que nos ocurrió para ilustrar dicha aplicación sería por medio de la presentación de las demostraciones de las 14 proposiciones que forman la 4ª jornada, pero dicho proyecto sería inviable debido a su extensión. Decidimos entonces ilustrar la aplicación de la regla de doble distancia por medio del análisis de la proposición 4 de la 4ª jornada, donde Galileo presenta un método de determinación de los grados de velocidad adquiridos por un móvil en movimiento compuesto. Sin embargo, esta segunda iniciativa también ofreció una dificultad de presentación. La proposición 4 depende directamente de las conclusiones demostradas por Galileo en las tres proposiciones anteriores. De este modo, para que el lector pudiera comprender la aplicación de la regla de doble distancia en la proposición 4 decidimos presentar también el análisis de las proposiciones anteriores, que corresponden a las proposiciones 1, 2 y 3. En la proposición 1 Galileo demuestra que la trayectoria de un móvil lanzado oblicuamente posee la forma geométrica de un curva muy particular, la parábola; en la proposición 2 Galileo realiza un método de determinación de la medida de velocidad de un movimiento compuesto de dos velocidades (el que hoy llamamos de “composición vectorial de movimientos”); y por último, la proposición 3 presenta un método de determinación de los grados de velocidad adquiridos por un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado en cualquier instante del movimiento. Veremos, entonces, cómo estas tres proposiciones unidas y la regla de doble distancia convergen hacia la demostración de la proposición 4. Evidentemente, dado los compromisos asumidos, el capítulo 3 no podrá abordar el tema central de esta tesis (el problema de la ausencia de la aceleración), más que de modo indirecto, pues el lector verá que de hecho Galileo no utiliza ninguna longitud de segmento de recta que represente la aceleración. De este modo, el capítulo 3 de esta tesis debe ser considerado como un apéndice, o un complemento natural del análisis desarrollado en los dos capítulos anteriores.

Capítulo 1:
El teorema *De Motu* y la paradoja de Galileo

I. Introducción

En un manuscrito temprano llamado "*De Motu*" (de aproximadamente de 1590[1]), Galileo presenta un teorema (que llamaremos "teorema *De Motu*") que establece una comparación entre las características del movimiento de un cuerpo que desciende por una vertical y por un plano inclinado de misma altura. Este teorema demuestra dos afirmaciones: que el descenso del cuerpo por la vertical es "más veloz" que su descenso por el plano inclinado; y que las "velocidades" máximas adquiridas por ambos descensos son inversamente proporcionales a las distancias recorridas.

En la figura "a" presentamos en forma esquemática la proporción establecida por este teorema[2].



Teorema De Motu:
V_B/V_C = AC/AB

Figura "a"

Según el teorema *De Motu*, si un mismo cuerpo desciende a lo largo de los planos AC y AB, partiendo del reposo en el punto A, entonces la velocidad adquirida en el punto B (en el descenso por el plano AB), es para la velocidad adquirida en el punto C (en el descenso por el plano AC), como la longitud del plano AC es para la longitud del plano AB, es decir: V_B/V_C = AC/AB. Consecuentemente, según el teorema *De Motu*, dado que AC > AB, se sigue necesariamente que $V_B > V_C$.

En el mismo manuscrito *De motu*, Galileo también presenta consideraciones acerca de su Postulado[3]. Inicialmente el Postulado es aplicado al movimiento de cuerpos a lo largo de una vertical, posteriormente Galileo extiende el Postulado hacia el movimiento de cuerpos a lo largo de planos inclinados[4], y, como hemos dicho, la consecuencia de

---

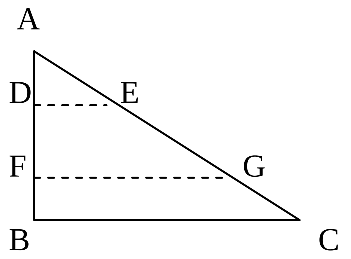
[1] Según Drabkin, traductor de este fragmento al inglés, a partir de la doctrina expuesta y de otras indicaciones presentes, este manuscrito pudo haber sido compuesto en el tiempo en que Galileo enseñaba en la Universidad de Pisa, es decir, entre 1589 y 1592. El autor complementa que al no haber sido publicado este manuscrito, se hace imposible la determinación de una fecha precisa de realización.

[2] En lenguaje moderno, llamando de "α" el ángulo de inclinación del plano AC, tenemos que la aceleración "a" a lo largo del plano AC es dada por: "$a = g \operatorname{sen}\alpha$", donde $\operatorname{sen}\alpha = AB/AC$. De este modo tenemos que: $a/g = AB/AC$.

[3] En el capítulo 8 del manuscrito *De Motu* podemos leer: "Nosotros decimos, entonces, que cuerpos de mismo tipo (y cuerpos de mismo tipo son definidos como aquellos hechos de mismo material, como metal, madera, etc), pero ellos pueden ser de diferentes tamaños, aún que se muevan con la misma velocidad, y una roca grande no caerá más rápidamente que una pequeña" [Drabkin (trad), 1960, p27].

[4] La aplicación del Postulado al movimiento de cuerpos en planos inclinados es un problema central para el entendimiento de la consolidación de la física terrestre de Galileo. Como hemos dicho, aún en los *Discorsi* Galileo todavía posee problemas para su demostración. Se trata de un problema cuyo estudio se debe iniciar en el análisis de manuscritos tempranos, como *De Motu* y *Le Meccaniche* (de aprox. 1600).

esta aplicación es que las velocidades adquiridas por un cuerpo que desciende a lo largo de planos de misma altura y distintas inclinaciones son iguales entre sí. En la figura “b” ilustramos este concepto.



Postulado: $V_B = V_C$

Figura “b”

Según el postulado de Galileo, si un cuerpo es abandonado desde el reposo en el punto A, y desciende a lo largo de los planos AB y AC, entonces las velocidades en los puntos pertenecientes a la misma horizontal serán iguales entre sí, es decir, $V_D = V_E$, $V_F = V_G$ y $V_B = V_C$.

Si comparamos los resultados del teorema *De Motu* y del Postulado de Galileo podemos observar que sus resultados se contradicen, pues para un mismo sistema físico, el teorema *De Motu* afirma que las velocidades deben ser diferentes, mientras que para el Postulado las velocidades deben ser iguales entre sí. Veremos que Galileo estaba consciente de este problema, y que a pesar de sus tentativas él no logra encontrar una explicación que fuera satisfactoria, y trata esta contradicción como una paradoja. Evidentemente, desde un punto de vista moderno, la contradicción de resultados que caracteriza esta paradoja no existe. Sabemos que el movimiento de un cuerpo a lo largo de una vertical posee mayor “aceleración” que el movimiento a lo largo de un plano inclinado (y no mayor velocidad). El problema posiblemente sea derivado de un error interpretativo que ocurrió cuando Galileo cuantificó “veloz” como una cantidad equivalente a la “velocidad”. De hecho, desde un punto de vista moderno, si interpretamos la razón entre velocidades establecida por el teorema *De Motu* como una razón entre “aceleraciones”, el teorema está correcto. Galileo entonces poseía una expresión matemática capaz de representar la aceleración, sin embargo, no viendo esta posibilidad es forzado a enfrentar la contradicción de resultados que termina por generar un problema que actúa en las bases de su mecánica terrestre.

Iniciaremos el estudio de esta contradicción por medio del análisis de algunos posibles antecedentes del teorema *De Motu*, como es el caso del principio de balanza de Arquímedes y el principio de plano inclinado, este último posiblemente de Jordanus (del siglo XIII). Veremos entonces un ejemplo de la influencia tanto medieval como griega sobre los trabajos de Galileo. Analizaremos un fragmento llamado “*Liber Karastones*”, traducido al árabe por Thabit ibn Qurra, donde veremos surgir un importante concepto denominado “poder de movimiento”. Posiblemente fue a partir de las conclusiones de *Liber Karastones* que Jordanus obtiene el concepto de “peso posicional”, aplicado a cuerpos en una balanza, que será central para la demostración de Galileo del teorema *De Motu*. Una segunda contribución importante de Jordanus para los trabajos de Galileo es el “principio de plano inclinado”, donde veremos a Jordanus utilizar un nuevo concepto denominado “fuerza de descenso”, también crucial para la demostración del teorema *De Motu*. Veremos, ya casi al final de este capítulo, que la aplicación del concepto de "fuerza de descenso" en el teorema *De Motu* es muy similar a la aplicación del concepto de "ímpeto" en el primer escolio de la tercera jornada de los *Discorsi* (dado que tanto el ímpeto como la fuerza de descenso obedecen las mismas leyes de variación determinadas por la inclinación del plano), será esta similitud que nos sugiere una posible relación entre la paradoja de Galileo con la demostración de dicho escolio. El análisis de los antecedentes conceptuales del teorema *De Motu* nos permitirá, por lo tanto, comprender con claridad algunas características de conceptos claves de la física terrestre de Galileo, en este caso el ímpeto y el principio de plano inclinado.

Una vez concluida esta primera parte iniciaremos la descripción de la paradoja que el teorema *De Motu* genera con el Postulado de Galileo. Veremos entonces que Galileo estaba conciente de este problema por medio de la presentación de dos fragmentos del inicio del siglo XVII (el fragmento "*dubito*" de 1603 y "*mirandum*" de 1607). Veremos también que aún en la publicación de *Diálogos* (en 1630) Galileo todavía no había encontrado una solución.

Finalizando el capítulo 1 realizaremos un análisis de la demostración del primer escolio de la tercera jornada de los *Discorsi*, y será en la demostración de este escolio que encontraremos el supuesto de que existe un invariante propio del movimiento uniformemente acelerado, independiente del movimiento uniforme, al cual Galileo llamará "ímpeto".

En la introducción general vimos una tentativa de Galileo para demostrar la validez de su Postulado, cuando es extendido al movimiento de cuerpos a lo largo de planos inclinados. Esta tentativa consistía en un experimento basado en la analogía entre las propiedades físicas del movimiento de cuerpos colgados en una cuerda (péndulos) y las propiedades físicas del movimiento a lo largo de planos inclinados. Vimos también que Galileo considera que dicha analogía no es perfectamente válida. Después de la publicación de la primera edición de los *Discorsi* (en 1638), Galileo realiza una segunda demostración del Postulado (alrededor de 1639), más rigurosa, presentado en un escolio de la 3ª Jornada. En este escolio, vemos a Galileo reconocer la existencia de un invariante propio del movimiento uniformemente acelerado, independiente del movimiento uniforme, y será a partir de este invariante que Galileo demuestra que las velocidades de descenso de un cuerpo a lo largo de planos distintamente inclinados deben ser iguales (desde que la altura sea la misma). Veremos que Galileo parece estar confundido acerca del significado físico de dicho invariante, pues aplica diferentes nombres a la magnitud que corresponde a dicho invariante (como ímpeto, energía, momentum y tendencia). El reconocimiento de Galileo de la existencia de un invariante, que por fin será llamado por Galileo "ímpeto", posee tres consideraciones importantes. Primero, este supuesto será utilizado por Galileo solamente una vez: en la demostración del primer escolio de la 3ª jornada de los *Discorsi*, en todas las demás proposiciones de este tratado se refleja dicho supuesto. Segundo, la demostración de este escolio no fue presentada en la versión original de los *Discorsi*, publicado en 1638, sino en una edición póstuma de 1655 aproximadamente. Con respecto a la demostración de este escolio escribe Wisan:

> "Esta prueba fue adicionada en un escolio póstumo para la edición italiana de 1656. Está basada en principios de dinámica revisados, la ley correcta de caída, y en el teorema de los tiempos cuadrados. La prueba fue construida por demanda de Viviani, como puede ser visto en los propios relatos de Viviani, y también como algo corroborando comentarios de Galileo"[5]

[5] *Ibid*, p124

Según Carlos Solís, el escolio fue incluido en una edición de 1655 de los *Discorsi*:

> “En una carta a B. Castelli (30-XII-1639), Galileo señala las criticas de Viviani al principio del movimiento acelerado y su propósito de demostrarlo definitivamente. Como se verá, Galileo introduce para ello [el escolio] consideraciones dinámicas que, de haber surgido antes, tal vez habrían cambiado la composición y estructura de ésta obra [*Discorsi*] […] Desgraciadamente, Galileo estaba ciego y envejecido por todas las calamidades que tenía que sufrir y no estaba en condiciones de emprender una nueva obra, cuya envergadura exigía la reestructuración conceptual de los *Discorsi*. Galileo dictó el añadido que comienza aquí [demostración del escolio 1], en octubre de 1638 y lo revisó un año más tarde. Viviani le dio forma de diálogo y lo incluyó en la edición de 1655”. [p302]

Es importante notar que, según Carlos Solís, la demostración del escolio constituye una nueva etapa de desarrollo de la física terrestre de Galileo que no pudo ser concluida.

Como tercera y última consideración, veremos que desde un punto de vista moderno, si interpretamos el ímpeto como “aceleración”, la demostración del escolio es correcta; sin embargo, si interpretamos el ímpeto como “componente de la fuerza peso” que actúa en la dirección del movimiento, la demostración también es correcta. Eso genera una ambigüedad interpretativa, de hecho, “fuerza” y “aceleración” son magnitudes de tipos físicos distintos, y aunque ambas sean invariantes del movimiento uniformemente acelerado cada una representa una propiedad distinta del movimiento; de este modo, el ímpeto es una magnitud que no posee un equivalente moderno “preciso”. La resolución de esta ambigüedad será dada por el propio Galileo. En la demostración del escolio veremos que Galileo establece una relación directa entre ímpeto y el peso del cuerpo (en la forma de “peso total” o “peso parcial”), de modo que será evidente que Galileo tenía en mente que el invariante del movimiento acelerado estuviera vinculado a consideraciones dinámicas del movimiento, y no presenta pista alguna de que el ímpeto pudiera estar relacionado con lo que hoy entendemos por aceleración. Aunque desde un punto de vista moderno el ímpeto pueda ser interpretado también como aceleración, no podemos afirmar que fuera así para Galileo. Posiblemente, después de largos esfuerzos por dar una solución a la paradoja (más de 30 años de estudios), Galileo reconoció que pudiera existir un invariante para el movimiento uniformemente acelerado, pero que estaría relacionado con lo que causa las variaciones de velocidad, y no llegó a reconocer que pudiera existir un segundo invariante, de un tipo físico distinto del primero, que no se aplica a las causas de las variaciones de velocidad, el cual llamamos hoy aceleración.

II. El principio de balanza aplicado a nociones del movimiento de los cuerpos

El principio de balanza afirma que: si dos cuerpos están dispuestos en los brazos de una balanza habrá equilibrio si los pesos de dos cuerpos son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias al centro de la balanza. La demostración de este principio surge para un caso especial en Euclides, y para un caso general en Arquímedes[6]. Suponga dos pesos “a” y “b” dispuestos en una balanza con centro en “C”, como ilustra la figura 1:

---

[6] Heath, Thomas L. (trad), 1978, *The Works of Arquímedes,“On the equilibrium of Planes or the centres os gravity of planes* - Libro I, proposiciones 1 a 7”, Enciclopedia Británica (Great Books), 22ª. ed., pp502-4

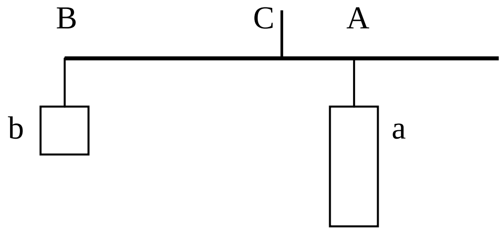


Figura 1

El principio afirma que el sistema estará en equilibrio si **b / a = AC / BC.**

Es posible que el principio de balanza sea derivado de conceptos anteriores a Arquímedes o Euclides. Nuestro objetivo no será analizar las demostraciones de este importante principio, sino observar con especial atención el surgimiento de un concepto derivado de la aplicación de nociones del movimiento a cuerpos que cuelgan en los brazos de una balanza. En seguida analizaremos dos fragmentos de la antigüedad que utilizan la relación entre movimiento y principio de balanza, el primero derivado de trabajos de seguidores de Aristóteles y el segundo de origen desconocido.

En un tratado llamado *“Mechanica”*[7], aproximadamente del siglo III a.C. (Wisan, pp132), encontramos una discusión informal de problemas diversos de mecánica, entre los cuales surge el principio de balanza. Si consideramos el centro de una balanza en el centro de un círculo, y si la balanza gira alrededor de su centro, los pesos que se encuentran en los brazos de la balanza describirán una trayectoria en la forma de arcos de circunferencia. En la figura 2, suponga que en la posición inicial de la balanza, dos pesos “a” y “b” se encuentran en los puntos “A” y “B”, respectivamente. Después del movimiento de los brazos de la balanza, los cuerpos adquieren las nuevas posiciones identificadas por los puntos “C” y “D”, y, en efecto, los cuerpos describirán en su trayectoria arcos de circunferencia AC y BD, vea figura 2.

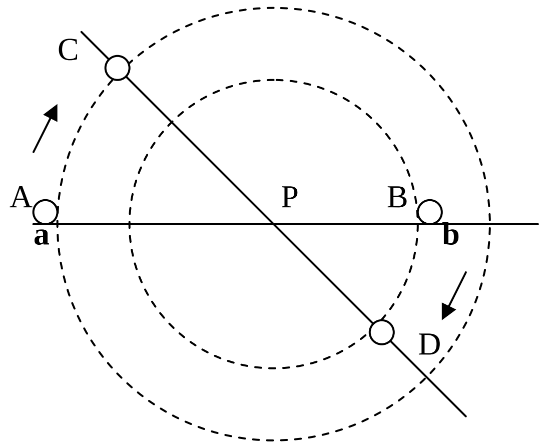


Figura 2: el giro de los brazos de la balanza hacen que los pesos “a” y “b” describan los arcos AC y BD, respectivamente.

Figura 2: el giro de los brazos de la balanza hacen que los pesos “a” y “b” describan los arcos AC y BD, respectivamente

La primera consecuencia de esta representación se deriva de propiedades geométricas de la circunferencia. Dado que el arco AC es mayor que el arco BD, el peso “a” recorre, en *el mismo tiempo*, *una distancia mayor* que la recorrida por el peso “b”. Se decía, entonces, que el peso “a” es “*más efectivo*” que el peso “b”, pues la velocidad

[7] Según Wisan, este tratado era considerado del propio Aristóteles, pero que actualmente se acepta que sea más bien un producto de su escuela.

con la que el peso “a” recorre la distancia AC debe ser mayor que la velocidad con la que el peso “b” recorre la distancia BD.

El segundo fragmento que relaciona la balanza con el movimiento de los cuerpos surge entre textos antiguos que se volvieron conocidos en la Edad Media a partir de fuentes árabes llamado “*Liber Karastones”*[8]. El primer teorema de éste fragmento introduce el concepto de “poder de movimiento” como una magnitud que procura caracterizar una propiedad general del movimiento de los cuerpos:

> “Si dos espacios son recorridos en el mismo tiempo, entonces los espacios están en la misma proporción que el poder de movimiento *(Virtutis motus)”*. (Wisan, 1973, pp137)

De este modo, si un cuerpo recorre 30 km y otro cuerpo recorre 60 km en el mismo tiempo que el primero, entonces el segundo cuerpo posee el doble de poder de movimiento que el primero. Podemos representar este teorema como sigue:

(teorema 1 – *Liber Karastones*): si $T_A = T_B$ se sigue que $\Omega_A / \Omega_B = S_A / S_B$

Donde “Ω” representa el “poder de movimiento”, “S” la distancia recorrida y “T” el tiempo de recorrido.

El segundo teorema procura establecer un acercamiento directo entre las propiedades del movimiento circular con propiedades geométricas de una balanza, por medio de la relación entre al arco y el radio de una circunferencia:

> “Si una balanza dividida en dos partes desiguales gira alrededor del punto de equilibrio, este movimiento genera dos sectores de circunferencia similares, y la razón de los arcos es la misma que la razón de los brazos de la balanza” (Wisan, 1973, pp137).

En este caso, utilizando el mismo diagrama de la figura 2, el teorema da la relación:

(Teorema 2 – *Liber Karastones*): AC / BD = AP / BP

Ahora bien, observando la figura 2 podemos ver que la distancia recorrida por el movimiento de cuerpos conectados a los brazos de una balanza son arcos de circunferencia. Por lo tanto, aplicando en teorema 1, la proporción entre el poder de movimiento y las distancias recorridas sería representada por la proporción:

De T1 (Liber Karastones): $\Omega_A / \Omega_B = AC / BD$

Aplicando la relación entre arcos y radios de circunferencia establecida por el teorema 2, el poder de movimiento (Ω) puede ser expresado como sigue:

(de T1 y T2): $\Omega_A / \Omega_B = AP / BP$

De este modo, el poder de movimiento de cada cuerpo es directamente proporcional a sus distancias al centro de la balanza. El teorema 3 se encargará de establecer la relación entre este resultado y el principio de balanza de Arquímedes, en otras palabras,

---

[8] Según Wisan, este fragmento es de origen desconocido, fue traducido al árabe por Thabit ibn Qurra y posteriormente al latín posiblemente por Gerard de Cremona (Wisan, 1973, pp136)

determina cuál es la relación entre los poderes de movimiento de cada cuerpo según la condición de equilibrio de balanzas.

Como vimos, el principio de una balanza establece que el equilibrio ocurre si los pesos son inversamente proporcionales a sus respectivas distancias al centro de la balanza. A partir de ahí surgen dos casos.

Suponga dos pesos “a” y “b” dispuestos en una balanza con centro en “C”, y suponga que sus distancias al centro de la balanza sean “AC” y “BC”, respectivamente.

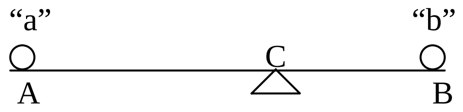


Figura 3

Según la proporción de Arquímedes, el equilibrio ocurre si: b/a = AC/BC

Si “a” = “b”, entonces, necesariamente, AC = BC, es decir, sus distancias deben también ser iguales. En este caso, dado que el poder de movimiento (Ω) es directamente proporcional a las distancias al centro de la balanza, entonces:

Dado que Ω_a / Ω_b = AC/BC y AC = BC, se sigue que $\mathbf{\Omega_a = \Omega_b}$ (1)

Ahora, si a partir de la situación de equilibrio, el cuerpo “a” es movido haciendo variar su distancia al centro, entonces el valor de su peso debe ser incrementado (o disminuido) de tal modo que los pesos sean inversamente proporcionales a sus distancias al centro de la balanza, es decir, que b/a = AC / BC, “desde que el poder del punto A excede el poder del punto B por la cantidad que AC excede BC” (Wisan, 1973, pp137). De este modo, tenemos:

Dado que Ω_a / Ω_b = AC/BC y b/a = AC/BC, se sigue que $\mathbf{\Omega_a / \Omega_b = b/a}$ (2)

Las relaciones establecidas en (1) y (2) determinan la relación entre el poder de movimiento de los cuerpos en una balanza en situación de equilibrio. Estas conclusiones serán importantes para nuestro posterior análisis de las demostraciones del principio de balanza y del principio de plano inclinado en los trabajos de Jordanus y Tartaglia. Es importante notar que el poder de movimiento es una magnitud que caracteriza el equilibrio de cuerpos en una balanza por medio de su relación con los pesos de los cuerpos, y *no por medio de su igualdad*. De hecho, podemos ver en el caso (2) que los poderes de movimiento necesariamente deben ser desiguales para que haya equilibrio.

Ahora bien, una balanza posee la propiedad de permitir que un cuerpo ejerza influencia, o “acción”, sobre otro cuerpo. Esta “acción” depende del valor de los pesos y de sus distancias al centro. El equilibrio surge a partir de la igualdad recíproca de las “acciones” que los pesos en una balanza ejercen en entre sí, y *esa igualdad debe ser verificada tanto si los pesos son iguales o diferentes*. En efecto, dicha “acción” se trata de una magnitud diferente del poder de movimiento y que *Liber Karastones* no determina.

III. El principio de Balanza y el concepto de “peso posicional” en Jordanus

Nuestro análisis del trabajo de Jordanus se centrará en el modo con que este establece la relación entre el principio de balanza con el principio de plano inclinado. La demostración de Jordanus del principio de plano inclinado es muy similar al modo con que él presenta la demostración del principio de balanza (de Arquímedes)[9]. Evidentemente, una balanza y un plano inclinado son sistemas físicos distintos, y la manera de relacionarlos utilizada por Jordanus es a través del importante concepto de “peso posicional” (“*gravitatis secundum situm*” o “peso según posición”).

Vimos que en una balanza un cuerpo de peso menor es capaz de equilibrar otro cuerpo más pesado según la relación entre las distancias de ambos pesos al centro de la balanza. Vimos también en *Liber Karastonis* que cuanto más el cuerpo se aleja del centro de la balanza, mayor será su poder de movimiento. La noción de peso posicional de Jordanus sigue un criterio similar, cuanto más el cuerpo se aleja del centro de la balanza, mayor será la “acción” (o fuerza) que este cuerpo es capaz de ejercer sobre el cuerpo situado en el otro brazo de la balanza. Naturalmente, si la balanza está en equilibrio, las acciones de ambos cuerpos se deben anular. La relación entre poder de movimiento y peso posicional es implícita en Jordanus y podemos identificarla a partir del análisis de la demostración que Jordanus hace para el principio de balanza, que veremos en seguida.

La demostración del principio de balanza de Jordanus parte del supuesto de que si una balanza está en equilibrio, entonces los pesos son inversamente proporcionales a sus distancias al centro de la balanza. Sea la balanza ACB y dos pesos “a” y “b” como ilustra la figura 5, y sea la proporción b/a = AC/BC. Jordanus demuestra que, si esta proporción se verifica, entonces la balanza no se moverá en ninguna dirección.

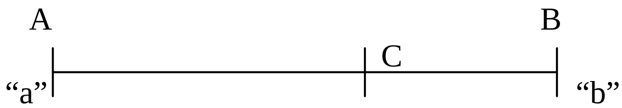


Figura 5

Suponiendo que la balanza descienda en el lado de “B”, entonces la nueva situación sería representada por la balanza en la posición DCE, como ilustra la figura 6:

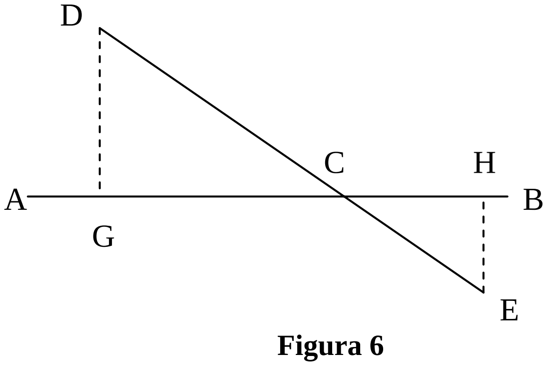
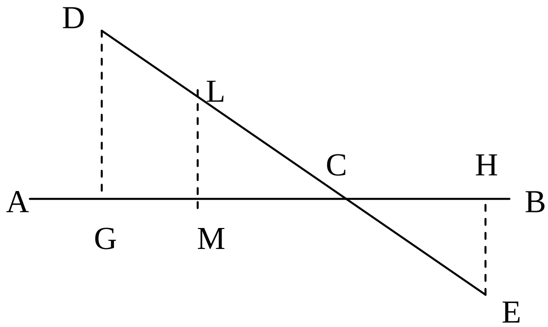


Figura 6

[9] Las demostraciones de ambos principios son presentadas por Jordanus en dos tratados del siglo XIII, *“Elementa Jordani super demonstrationem ponderum”* y *“Liber Jordani de ratione ponderis*. Según Wisan, “aunque muchos de los teoremas de este tratado posean antecedentes en los griegos y en escritos árabes que concuerdan con los problemas de balanza, algunos de los principios y métodos parecen ser originales de Jordanus o debido a alguna fuente a la que Jordanus tenía acceso pero que hasta ahora es desconocida para nosotros” (p137)

En ese caso, los pesos “a” y “b” adquieren las posiciones “D” y “E” respectivamente. La demostración puede ser parafraseada como sigue:

1) A partir de la figura es evidente que los triángulos DCG y CHE son semejantes, luego: DC / CE = DG / EH
2) Pero DC / CE = b / a, luego b / a = DG / EH
3) Suponga el peso “l” igual al peso “b” colocado en el punto “L”, tal que LC = CE



4) Dado que LM = EH, se tiene que DG / LM = b/a = l/a, y así **DG / LM = l/a**
5) Pero, como fue probado, “a” y “l” son inversamente proporcionales a sus movimientos contrarios, por lo tanto lo que es suficiente para erguir “a” hasta “D”, bastaría para erguir “l” a través de la distancia LM
6) Desde que l = b y CL = CB, entonces “l” no puede ser cargado por “b”, luego, “a” tampoco puede ser cargado por “b”.

La estrategia de Jordanus consistió en tomar un tercer peso “l” donde el equilibrio con “b” es incontestable, y a partir de ahí determinar cuál es la relación entre el peso “l” y el peso “a”. Dicha relación es establecida por medio de la proporción demostrada en el paso 4, que es derivada de la semejanza de triángulos, pero su interpretación, en el paso 5, es oscura. Según Wisan, en este paso crucial de la demostración, Jordanus hace uso del moderno “principio de trabajo”[10]; de hecho, de la proporción del paso 4 podemos

[10] En lenguaje moderno, utilizando la misma figura de la demostración de Jordanus, tenemos dos conceptos físicos: “torque” y “trabajo”. El primero consiste en el producto de la fuerza peso del cuerpo por la distancia de donde se encuentra el cuerpo hasta el centro de la balanza; en otras palabras: para un mismo torque, cuanto mayor es el peso de un cuerpo menor debe ser la distancia en que éste se encuentra del centro, y viceversa. Para que la balanza esté en equilibrio basta hacer con que los torques generados por los pesos de ambos cuerpos colgados en brazos opuestos de la balanza sean iguales. Utilizando la letra griega “Γ” para representar el torque y “P” para representar la fuerza peso, tenemos:

1) $\Gamma_a = P_a. AC$ y $\Gamma_b = P_b. BC$
2) Si la balanza está en equilibrio: $\Gamma_a = \Gamma_b \Rightarrow P_a.AC = P_B. BC \Rightarrow \mathbf{P_a/P_b = BC/AC}$ (principio de balanza)

No es necesario, en la demostración moderna, hacer uso del concepto de “trabajo” ni de recurrir a un tercer cuerpo. “Trabajo” es una magnitud que mide la energía necesaria para hacer mover un cuerpo, su cuantificación depende de la fuerza ejercida sobre el cuerpo y de la distancia recorrida bajo acción de esta fuerza, la formula general es: T = F. d (donde “T” es el trabajo, “F” la fuerza y “d” la distancia recorrida – esa expresión es válida cuando la fuerza posee la misma dirección que el movimiento del cuerpo). Para erguir un cuerpo colgado en el brazo de una balanza, el trabajo necesario será el producto de la fuerza peso de este cuerpo por la distancia vertical recorrida (la altura). Siguiendo los pasos de Jordanus, tenemos que:

ver que el producto de los pesos por sus alturas son iguales entre sí, y este producto caracteriza el concepto de trabajo (“a”. DG = “l”. LM).

> “El que carga “a” hasta “D” y “l” hasta “M”, de todos modos, debe ser una “fuerza de movimiento” la cual es la misma en ambos casos. Esta suposición no es explícita, pero puede ser que el autor la tuviera en mente. Es decir, la fuerza que causa el descenso del peso en B hasta E debe ser igual a la fuerza que causa el ascenso de los pesos en el otro brazo de la balanza, y esta fuerza debe ser la misma, cualquiera que sean los pesos o dondequiera que estén localizados” [Wisan, 1973, p140][11]

No existe mención de “fuerza” en el tratado de Jordanus, y Wisan sugiere que la idea estaría implícita en la sentencia, “a” y “l” son *inversamente proporcionales a sus movimientos contrarios*. Wisan argumenta que esta última sentencia sea derivada del primer teorema de Jordanus, el cual está basado en la noción aristotélica de la relación entre peso y velocidad de caída de los cuerpos:

> “La proporción de la velocidad de descenso [*velocitatis in descendendo*], entre cuerpos pesados, es la misma que aquella entre sus pesos, tomados en el mismo orden; pero la proporción del descenso para el contrario ascenso es la proporción inversa” [Wisan, 1973, p139]

Por lo tanto, si tenemos dos cuerpos en movimiento de *descenso*, el más pesado recorrerá una distancia mayor en el mismo tiempo (es decir, el peso es proporcional a la velocidad de descenso); mientras que, si el movimiento es de *ascenso*, el cuerpo más pesado recorrerá una distancia menor en el mismo tiempo. De este modo, Wisan interpreta la afirmación “a” y “l” *son inversamente proporcionales a sus movimientos contrarios*” como sigue: dado que la distancia vertical recorrida por el peso “a” es mayor que la distancia recorrida por el peso “l”, el peso “a” necesariamente debe ser menor que el peso “l”. Es posible que Jordanus buscara establecer una analogía con nociones del movimiento de cuerpos por la vertical a través de la proporción entre los pesos, es decir, no con respecto a sus distancias al centro como sugería *Liber Karastonis*, sino con respecto a sus alturas. Siendo así, dado la proporción “l/a =DG/LM”, el que yergue un cuerpo erguirá también el otro, y la causa de este movimiento debe provenir de un mismo origen, es decir, la fuerza peso del cuerpo “b”. En otras palabras, dado que el valor del peso “b” y su distancia al centro son fijos, la fuerza que éste posee para erguir otros pesos en el brazo opuesto debe ser siempre la misma: si “b” no es capaz de erguir “l” (pues están en equilibrio), y dado que fuerza

---

3) Por semejanza de triángulos: **EC/CD = EH/DG**
4) Dado que BC = EC y AC = DC, sustituyendo (2) en (3): $\mathbf{P_a/P_b = EH/DG}$
5) De (4): P_a DG = P_b. EH
6) Pero P_a DG = T_a y P_b. EH = T_b, luego $\mathbf{T_a = T_b}$

Para cuerpos colgados en una balanza, la igualdad de “trabajos” es una manera diferente de indicar una condición de equilibrio. Jordanus, por lo tanto, demuestra que el principio de balanza de Arquímedes es verdadero haciendo con que de éste derive la igualdad de trabajos.

[11] Según Wisan, Jordanus no utiliza el término “fuerza” en su tratado (mucho menos “trabajo”). Sin embargo, Jordanus presenta una intuición correcta de estos conceptos, y, en efecto, en esta cita Wisan procura reproducir el razonamiento de Jordanus por medio de la aplicación de términos modernos, de modo que pudiera ser más comprensible para nosotros. De hecho, dado que el sistema está en equilibrio, no habrá una fuerza que “cause el descenso del peso en B”. Naturalmente, dado que las fuerzas están en equilibrio, el trabajo total realizado en el sistema es cero (dado que no hay movimiento).

necesaria para erguir “l” es la misma que es necesaria para erguir “a” (principio de trabajo), entonces “b” no será capaz de erguir “a”, y así, ambos estarán en equilibrio.

IV. El principio de plano inclinado y el concepto de “fuerza de descenso”

Otro principio fundamental para que Galileo pueda demostrar el teorema *De Motu* es el principio de plano inclinado. Este principio establece que si dos pesos, “a” y “b”, se encuentran sobre planos de distintas inclinaciones, para que haya equilibrio, los pesos deben ser directamente proporcionales a las longitudes de los planos en que se encuentran. Naturalmente consideramos que los pesos están conectados por una cuerda, de modo que los pesos puedan interactuar uno con el otro. El diagrama de la figura abajo ilustra este principio[12].

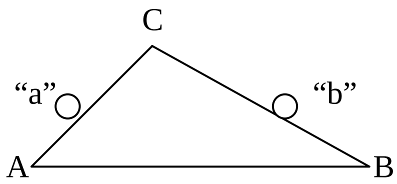


Figura 4: para que haya equilibrio, el principio de plano inclinado establece que la proporción **a / b = AC/BC** debe ser satisfecha

Según Wisan, “la correcta formulación de este principio [plano inclinado] no parece haber sido hecha por los antiguos, aunque Hero y Pappus de Alexandría estudiaran el problema” (Wisan, 1973, pp136). Es posible, entonces, que el principio de plano inclinado encuentre su primera formulación correcta con los trabajos de Jordanus.

Jordanus extiende el concepto de peso posicional, aplicado a cuerpos colgados en los brazos de una balanza, para cuerpos situados sobre planos de distintas inclinaciones. Del mismo modo que el “poder de movimiento” en *Liber Karastones*, el “peso posicional” en Jordanus es una magnitud directamente proporcional a la distancia al centro de la balanza, y, en condición de equilibrio, inversamente proporcional a los pesos de los cuerpos. En otras palabras, *el peso posicional y el poder de movimiento son magnitudes que obedecen la misma ley de variación*. La idea central del concepto de peso posicional de Jordanus es que un mismo peso puede aumentar o disminuir su “acción” sobre otro cuerpo haciendo variar únicamente su posición en el brazo de la balanza. Un efecto similar puede ser observado en un cuerpo situado sobre un plano inclinado: si hacemos que el plano se acerque a la vertical, la “acción” de la fuerza peso sobre el movimiento del cuerpo aumenta, de este modo, un mismo cuerpo puede equilibrar cuerpos más pesados o más leves según la inclinación del plano. La magnitud que varía según la inclinación del plano es llamada por Jordanus de “fuerza de

---

[12] En lenguaje moderno, para que el sistema esté en equilibrio la aceleración debe ser igual a cero. Por la segunda ley de Newton: F_r = m. a (donde “F_R” es la fuerza resultante, “m” la masa del sistema y “a” es la aceleración). De este modo tenemos:

1) $P_a \operatorname{sen}\alpha - P_b \operatorname{sen}\beta = m.a$
2) Sistema en equilibrio: a = 0, por lo tanto $P_a \operatorname{sen}\alpha = P_b \operatorname{sen}\beta$ (donde α y β son los ángulos de inclinación del plano AC y CB, respectivamente)
3) De la figura: $\operatorname{sen}\alpha = h/AC$ y $\operatorname{sen}\beta = h/CB$ (donde “h” es la altura del triángulo)
4) De (2) y (3): $P_a . (h/AC) = P_b . (h/AB)$
5) Por lo tanto: $\mathbf{P_a / P_b = AC/CB}$

descenso” (*virtus in descendendo*). De este modo, el peso posicional varía según el peso y *posición* del cuerpo, mientras la fuerza de descenso varía según el peso e *inclinación del plano*.

Antes de proseguir hacia la presentación del principio de plano inclinado, se hace necesario esclarecer cómo es que la inclinación del plano será definida por Jordanus.

Jordanus define oblicuidad del plano según su proyección con la vertical: para planos de la misma longitud, un plano será más oblicuo cuanto menor es su proyección vertical.

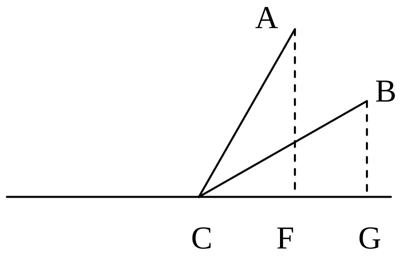


Figura 7: el plano BC es más oblicuo que el plano AC, pues la proyección vertical BG del plano BC es menor que la proyección vertical AF, del plano AC.

Por analogía con la noción de poder de movimiento de *Liber Karastones*, podemos establecer la noción de fuerza de descenso para planos inclinados. Vimos que en balanzas el poder de movimiento es directamente proporcional a las distancias recorridas en el mismo tiempo (y por lo tanto proporcional a la velocidad). En la figura 7 tenemos planos de la misma longitud (por lo tanto las distancias recorridas son iguales), pero el tiempo de recorrido por el plano AC es menor que el tiempo de recorrido por el plano BC, en efecto, la velocidad por AC es mayor que la velocidad por BC. Por lo tanto, el poder de movimiento por AC es mayor que el poder de movimiento por BC. Del mismo modo, para Jordanus, la fuerza de descenso por AC será mayor que la fuerza de descenso por BC, y de este modo, la fuerza de descenso es inversamente proporcional a la oblicuidad del plano, es decir, cuanto más el plano se acerca a la horizontal, menor será la fuerza de descenso del cuerpo.

El concepto de fuerza de descenso posee una característica muy similar a la moderna noción de “proyección de la fuerza peso”. Utilizando un lenguaje moderno, en la medida que el plano se acerca a la vertical, la componente de la fuerza peso (es decir, la proyección de la fuerza peso en la dirección del movimiento) del cuerpo aumenta, y en efecto aumentará también su aceleración. Para planos de misma longitud, el cuerpo que posea mayor aceleración recorrerá la misma distancia en un tiempo menor. El concepto de fuerza de descenso consigue capturar este concepto por medio del uso de otros términos: en la medida que el plano se acerca de la vertical, la fuerza de descenso aumenta, eso puede ser interpretado como el aumento de la “acción” que el componente de la fuerza peso ejerce sobre el movimiento del cuerpo, y en efecto, el cuerpo se moverá más rápidamente. A partir de este concepto, para que Jordanus pueda formular el principio de plano inclinado le falta saber cómo determinar esta fuerza a partir del peso e inclinación del plano, es decir, cómo determinar la medida de la fuerza de descenso.

Jordanus considera que la fuerza que hace descender un cuerpo por un plano de determinada inclinación será esencialmente la misma fuerza que este cuerpo resistiría al movimiento de subida por este plano. Este principio corresponde a un postulado de Arquímedes[13]. Según Wisan, en *"Liber Jordani de ratione ponderis"* podemos leer:

> "El movimiento de cualquier peso es hacia el centro (del mundo), y su fuerza es un poder de tendencia hacia abajo y de resistir al movimiento en sentido contrario" (Wisan, 1973, p141).

Será a partir de este principio que Jordanus desarrolla la condición de equilibrio para cuerpos en planos inclinados. El principio de plano inclinado postulado por Jordanus es dado como sigue:

> "Si dos pesos descienden a lo largo de planos diversamente inclinados, entonces, si las inclinaciones son directamente proporcionales a los pesos, ellos serán de igual fuerza de descenso ("*virtus in descendendo")*" (Wisan, p141).

El equilibrio entre dos cuerpos dispuestos en planos de diferentes inclinaciones es determinado, por lo tanto, a partir de la igualdad de las fuerzas de descenso. Dado que la fuerza de descenso es definida como la fuerza con que el cuerpo resiste a su movimiento contrario, el equilibrio ocurrirá si la fuerza de descenso es igual a la fuerza con que el cuerpo resiste al movimiento de subida.

Del mismo modo que el principio de balanza establece la condición de equilibrio a partir de la relación entre pesos y distancias al centro, el principio de plano inclinado de Jordanus es enunciado en función de los pesos e inclinaciones de los planos. Evidentemente, la teoría de proporciones, que es el sistema matemático utilizado por Jordanus, no permite representar la inclinación de planos en términos del ángulo que el plano forma, sea con la horizontal o con la vertical (lo que correspondería modernamente a la utilización de funciones trigonométricas), y en efecto, la inclinación debe ser representada en términos de la longitud del plano.

Vimos que Jordanus define la oblicuidad del plano en términos de su proyección vertical: cuanto menor la proyección vertical más oblicuo será el plano (o más cerca de la horizontal). De este modo, si tomamos dos planos de misma altura, pero de oblicuidades distintas, el plano más cercano de la horizontal necesariamente tendrá mayor longitud (ver figura 8).

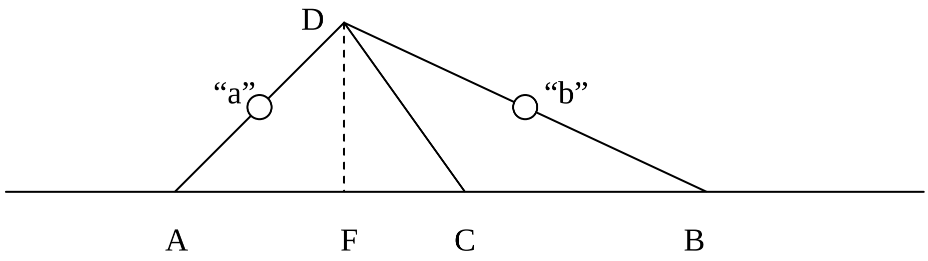


Figura 8: Para planos de misma altura, cuanto mayor la longitud más oblicuo es el plano. En la figura, el plano DB es más oblicuo que el plano DA, que a su vez es más oblicuo que el plano DC.

Siendo así, podemos describir la fuerza de descenso en términos de la longitud de los planos, pues dado que para planos de misma altura la oblicuidad es directamente proporcional a la longitud del plano, se seguirá que la fuerza de descenso es

[13] Según la Sexta Proposición del tratado de hidrostática de Arquímedes (Wisan, 1973, p135) "la fuerza con la cual un cuerpo tiende a descender es igual a con la cual el cuerpo resiste al movimiento de ascenso". Wisan sugiere que este tratado no era bien conocido en la Edad Media, pero que algunas de sus ideas fundamentales y procedimientos pueden haber sido aplicados en este período (Wisan, 1973, p135)

inversamente proporcional a la longitud del plano. Utilizando el símbolo "F" para representar la fuerza de descenso, tenemos la relación:

$$\mathbf{F_a / F_b = DB/DA}$$

Si aceptamos que exista equivalencia entre fuerza de descenso y poder de movimiento, entonces el principio de plano inclinado puede ser derivado de la proporción entre poder de movimiento y pesos determinada en *Liber Karastones.* En ese caso tenemos que:

1) dado $\mathbf{F_a / F_b = DB/DA}$
2) y dado que $\mathbf{\Omega_a / \Omega_b = b/a}$ *(Liber Karastones)*
3) Entonces, si $F_a / F_b = \Omega_a / \Omega_b$ se sigue que: $\mathbf{b/a = DB/DA}$

Esta última proporción es justamente la que fue asumida en la demostración del principio de plano inclinado, y expresa la condición del enunciado de que "las inclinaciones son directamente proporcionales a los pesos", donde "inclinaciones" se refiere a la propia longitud de los planos. Sin embargo, no sabemos si Jordanus verdaderamente recorrió este camino para deducir el principio de plano inclinado (determinado por la proporción entre pesos y longitudes de los planos). Tenemos solamente que Jordanus toma el principio de plano inclinado y demuestra que es verdadero[14].

Para la demostración del principio de plano inclinado, Jordanus toma dos planos inclinados, DA y DC, donde DC es el plano más oblicuo, y dos pesos "h" y "e" dispuestos sobre los planos DA y DC respectivamente. Ver figura 9.

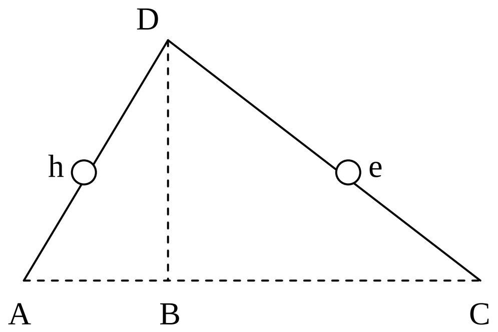


Figura 9: si los planos DC y DA tuviesen la misma longitud, desde la figura podemos ver que la proyección vertical de DA sería mayor que la proyección vertical de DC, de ahí que DC sea el plano más oblicuo.

La demostración se inicia con la suposición de que los cuerpos "h" y "e" poseen la misma fuerza de descenso si la proporción **e/h = DC/DA** es verificada. Afirmar que los cuerpos tienen la "misma fuerza de descenso" es equivalente a afirmar que, si los cuerpos estuviesen conectados entre sí por medio de una cuerda, el sistema permanecería en equilibrio[15]. Jordanus no asume explícitamente que los cuerpos están

---

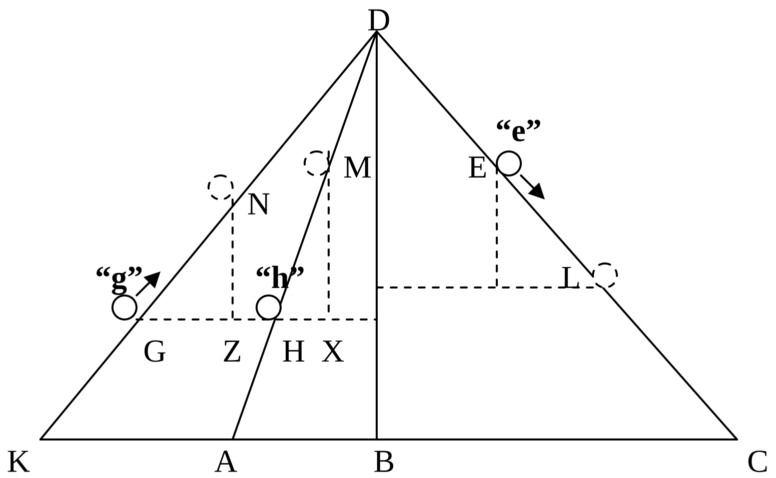
[14] Un aspecto que disminuye la precisión de esta interpretación es que la proporción en (1) (entre fuerza de descenso y longitud del plano) sugiere que si las longitudes son distintas, se sigue que las fuerzas de descenso también serán diferentes.

[15] En notación moderna, la proporción e/h = DC/DA equivale a **"e" sen α = "h" senβ**, donde "α" y "β" serían los ángulos que los planos forman con la horizontal, donde lo pesos "e" y "h" están apoyados.

conectados por una cuerda, pero veremos que asume relaciones entre distancias recorridas que caracterizan esta suposición.

La demostración puede ser parafraseada como sigue:

1) sea el plano DK de misma oblicuidad que el plano DC, y sea el peso “g” igual al peso “e”
2) si es posible, suponga que “e” desciende del punto “E” al punto “L” y suponemos que “h” suba del punto “H” al punto “M”



3) sea GN = HM = EL (condición que se verificaría si los pesos estuviesen conectados por una cuerda),
4) el triángulo DBK es semejante al triángulo GNZ, y por lo tanto: **DB/DK = NZ/NG**
5) el triángulo DBA es semejante al triángulo MXH, y por lo tanto: **MX/MH = DB/DA**
6) de (4) y (5): **DK/DA = MX/NZ**
7) pero e/h = DC/DA y DC = DK y “g” = “e”: e/h = DC/DA = DK/DA = MX/NZ = g/h
8) por lo tanto: **g/h = MX/NZ** (“g”.NZ = “h”.MX – “principio de trabajo”)
9) luego, la fuerza para erguir “h” a través de MX es la misma que para erguir “g” por NZ
10) pero “e” y “g” son pesos iguales en planos igualmente inclinados (pues DC=DK)
11) por lo tanto “e” no puede erguir “g”, y, consecuentemente, “e” no puede erguir “h”.

Podemos ver que la demostración es similar a la demostración del principio de balanza. De hecho, parte de una proporción que se quiere saber si es verdadera, y la reescribe en términos de las alturas a partir de propiedades derivadas de la construcción geométrica de la demostración. Asume entonces un tercer peso,”g”, de igual valor al peso “e” y verifica la relación entre “h” y “g” por medio del principio de trabajo[16].

---

[16] En notación moderna, llamando de “α” y “β” los ángulos de inclinación de los planos DA y DC, respectivamente:

1) Por la segunda ley de Newton, F_R = m.a. Si hay equilibrio entonces a = 0.
2) $F_R = P_h.\, sen\alpha - P_e.\, sen\beta = 0 \Rightarrow \mathbf{P_h.\, sen\alpha = P_e.\, sen\beta}$
3) $sen\alpha = DB/DA$ y $sen\beta = DB/DC$
4) de (2) y (3): $\mathbf{P_h/P_e = DA/DC}$ (principio de plano inclinado)

El principio de plano inclinado determinado por Jordanus será fundamental para posteriores trabajos de Galileo, y, como veremos, es utilizado en la demostración del teorema *De Motu*. Posteriormente, en los *Discorsi*, Galileo utilizará este principio para demostrar la aplicación del Postulado para el movimiento de cuerpos en planos inclinados. Aunque el término "fuerza de descenso" sea utilizado en *De Motu*, en los *Discorsi* este término ya no es utilizado, pero sus nociones se hacen presentes por medio de otros términos como "ímpeto" o "peso parcial" de un cuerpo.

Los estudios realizados por Jordanus reaparecen en los trabajos de Tartaglia (~1542), pero este ultimo falla al demostrar el principio de plano inclinado. Como vimos, la demostración del principio de plano inclinado requiere la correcta comprensión de cómo un concepto aplicado a cuerpos en una balanza (peso posicional), es extendido para cuerpos en un plano inclinado (fuerza de descenso), de modo que, en principio, sin un correcto entendimiento de la relación entre estos dos sistemas físicos no se puede establecer una correcta demostración.

Asumiendo en parte los resultados de los trabajos de Jordanus y en parte otras fuentes medievales, Tartaglia establece la demostración del principio de balanza a partir de un nuevo concepto, no presente en los trabajos de Jordanus. Partiendo de consideraciones "cuidadosas" acerca de la distinción de los conceptos de peso simple, peso específico y peso posicional (este último como está definido por Jordanus), Tartaglia establece unos pocos teoremas relacionados a pesos en una balanza (Wisan, p146). Entre esos teoremas surge el teorema IV que establece que:

> "Para cuerpos de igual peso simple, pero desigual peso posicional, el poder de descenso es proporcional a las distancias al centro de la balanza, o la distancia desde el brazo de la balanza suporte." (Wisan, 1973, p147)

Con la noción de "peso simple", Tartaglia procura identificar que un cuerpo, independiente de su posición en la balanza, posee un "peso" propio que es invariante.

Es importante notar que el teorema IV sugiere una situación de desequilibrio, pues si los pesos simples son iguales y pesos posicionales diferentes, la balanza no puede estar en equilibrio. Para este caso, el teorema establece que cuanto mayor es la distancia al centro, mayor será la fuerza de descenso. De este modo, peso posicional y fuerza de descenso son directamente proporcionales. En el teorema V, Tartaglia establece que para cuerpos de mismo peso simple el equilibrio sucederá si ambos cuerpos poseen la misma distancia al centro de la balanza. A partir de estos teoremas, Tartaglia logra demostrar el principio de balanza, pero al aplicar el teorema IV para cuerpos en planos inclinados él falla:

> "[…] él [Tartaglia] no comprendió cómo el principio de trabajo era aplicado en *De Ratione* [tratado de Jordanus] y su prueba del principio de plano inclinado falla porque él no considera el hecho de que el teorema IV no es aplicable en pesos en planos inclinados, sino apenas para pesos en balanzas". [Wisan, 1973, p148]

Es muy importante notar que el principio de plano inclinado requiere la correcta interpretación de su relación con el principio de balanza, y es justamente en esta relación entre ambos principios donde Tartaglia falla y Galileo tendrá éxito. Aunque el

---

En lenguaje moderno, no es necesario suponer un tercer cuerpo "g" para la demostración del principio de plano inclinado.

principio de balanza era extensamente discutido, parece ser que a partir de Tartaglia hasta Galileo el principio de plano inclinado fue muy poco estudiado:

> “Un sorprendente fracaso está en el tratamiento del principio de plano inclinado. Guidobaldo simplemente se refiere a Pappus, y Benedetti no parece haber tocado este tema […]. Parece ser que este principio fue poco explorado entre Tartaglia y Galileo. Cardano, por otro lado, intentó probar que el peso efectivo de un cuerpo en un plano inclinado depende del ángulo del plano” [Wisan, 1973, p149]

De este modo, es posible que el conocimiento que Galileo poseía acerca del principio de plano inclinado fuera derivado principalmente de los estudios de Jordanus y Tartaglia.

V. El teorema *De Motu*

De Motu es un manuscrito escrito por Galileo entre los años 1589 y 1592. El hecho de que no haya sido publicado hace difícil establecer una fecha precisa. Los conceptos demostrados en este manuscrito no siempre son claros. A grandes rasgos, Galileo presenta un estudio de las relaciones entre el movimiento vertical de los cuerpos y la densidad del medio, aplicando para este estudio definiciones de peso específico (peso por unidad de volumen) y principios de hidrostática. Acepta que el movimiento natural puede ser hacia arriba o abajo, según la densidad relativa del cuerpo con respecto al medio. Para determinar la velocidad de un cuerpo inmerso en un medio físico, Galileo recurre a una analogía entre principios de hidrostática y principio de balanza, y explica que la velocidad del cuerpo es determinada a través de la diferencia entre los pesos específicos del medio en que el cuerpo está inmerso y del propio cuerpo. Contrario a lo que piensa Aristóteles, para medios de densidad cero, Galileo explica que el movimiento no puede ser instantáneo, sino que sucede a lo largo del tiempo, y en este caso postula que la velocidad es proporcional al propio peso del cuerpo. Otro concepto claramente distinto de Aristóteles surge en la explicación dada por Galileo para la continuidad del movimiento de proyectiles. En este caso Galileo explica que el medio externo no es causa para la continuidad del movimiento, sino que la fuerza utilizada en el lanzamiento es impresa en el cuerpo y disminuye gradualmente a lo largo del movimiento.

En el capítulo 9 de este fragmento, Galileo establece un importante principio donde *la fuerza que hace a un cuerpo moverse hacia abajo es la misma fuerza con que el mismo cuerpo resiste al movimiento hacia arriba,* principio que, como vimos, también es asumido por Jordanus (y como indicamos anteriormente posiblemente pertenece a Arquímedes). Galileo demuestra este principio a partir del análisis de la acción del peso sobre el movimiento de un cuerpo, según la relación entre esta acción y la densidad del medio físico en el cual el cuerpo está inmerso. Por ejemplo, la fuerza necesaria para que un pedazo de madera se hunda en el agua es la misma fuerza con que este pedazo flotaría en el mismo medio. A partir de ahí Galileo establece una equivalencia entre movimiento de caída de los cuerpos y el principio de balanza: tomando la densidad del medio como el origen de la “resistencia al movimiento”, el medio físico, en la balanza, adquiere el papel de un “contrapeso”.

La demostración del teorema *De Motu* se inicia en al capitulo 14 a partir de dos cuestiones fundamentales:

> “El problema es por qué el mismo cuerpo pesado, con movimiento natural hacia abajo sobre planos de inclinaciones variadas con el plano horizontal, se mueve más prontamente y rápidamente en estos planos que forman ángulos más cercanos al ángulo recto con la horizontal: y, en adición, el problema de la razón [de la velocidad] de los movimientos que son tomados en planos de inclinaciones variadas” [296 – *De Motu*[17]]

Para que el problema sea “mejor comprendido”, Galileo presenta un diagrama representando planos de la misma longitud pero diferentes inclinaciones. Galileo entonces pregunta por qué un mismo cuerpo desciende más velozmente por el plano AB que por el plano BD (o por qué el descenso por BD es más veloz que por el plano BE). La segunda pregunta es saber “cuánto más veloz” es el descenso por AB que por BD.

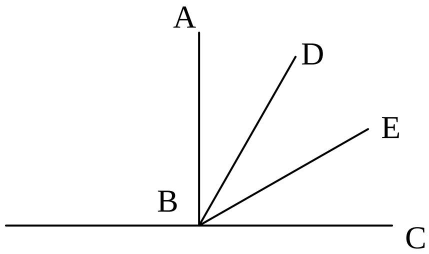


Figura 10

La estrategia para responder a esas preguntas consiste en aplicar en este problema el principio caracterizado en el capítulo 9:

> “Si, entonces, nosotros podemos encontrar *cuán menor* es la fuerza necesaria para erguir el cuerpo por la línea BD que por la línea AB, nosotros entonces encontraríamos *cuán mayor* es la *fuerza en el descenso* por la línea AB que por la línea BD” [297 – *De Motu*, subrayado mío]

El problema consiste en encontrar la razón entre las “fuerzas de descenso” adquiridas por un mismo cuerpo en planos diversamente inclinados, y la estrategia es determinar dicha razón por medio de la resistencia ofrecida por el cuerpo para ascender por los planos inclinados.

Naturalmente que el problema está centrado en el análisis de las propiedades del movimiento de cuerpos en planos inclinados, y, en efecto, requiere la utilización del principio de plano inclinado. El tratamiento de Galileo para este principio es similar al ofrecido por los trabajos de Jordanus y Tartaglia, pero de una forma mucho más sofisticada. Por medio de un diagrama mixto donde una balanza y un plano inclinado están representados simultáneamente, Galileo establecerá una relación directa entre el *peso posicional* de un cuerpo en una balanza y la *fuerza de descenso* del mismo cuerpo en un plano inclinado. De este modo, la relación entre las diferentes fuerzas de descenso de un mismo cuerpo en planos de distintas inclinaciones es determinada a partir de los diferentes pesos posicionales correspondientes adquiridos por el cuerpo según su posición en el brazo de una balanza.

[17] Haremos referencia a citas del manuscrito con su nombre original “*De Motu*”. En esta tesis no fue posible tener acceso a una copia del manuscrito original, de modo que fue utilizado la traducción al ingles realizada por I. Drabkin, presentada en las referencias bibliográficas como “*On Motion and On Mechanics*” de I. Drabkin y S. Drake.

Suponga una balanza CD con centro en A, donde dos pesos de igual valor están dispuestos en los extremos de la balanza, es decir, en los puntos C y D. Cada peso presenta un peso posicional regulado según su distancia al centro. Ahora, suponga que la balanza gire alrededor de su centro, haciendo mover el brazo AD hacia el punto B, como ilustra la figura 11.

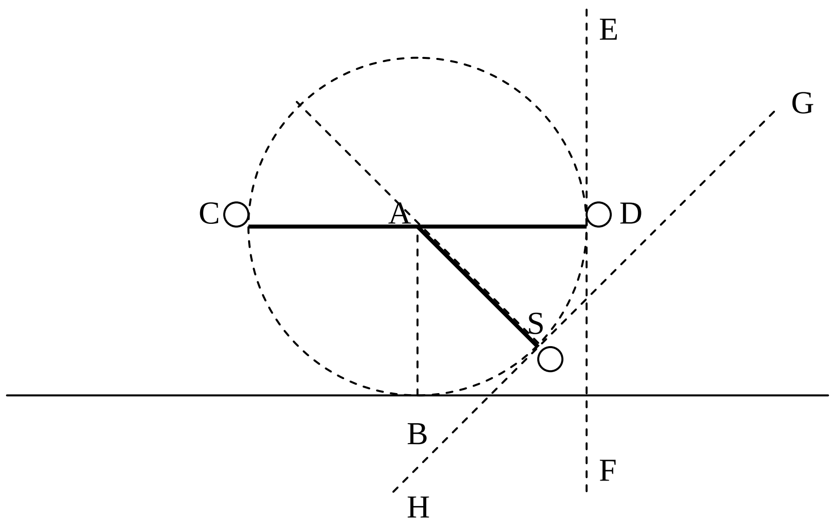


Figura 11

A partir del diagrama de la figura 11 Galileo asume que el *peso posicional* del cuerpo en el punto D de la balanza, equivale a la *fuerza de descenso* del mismo cuerpo si éste descendiera por la vertical EF. Del mismo modo, el *peso posicional* del cuerpo que corresponde al punto S en la balanza equivale a la *fuerza de descenso* del mismo cuerpo si éste descendiera por el plano inclinado GH:

> "Ahora, si suponemos que la línea AD se mueve hacia B, alrededor del punto fijo A, entonces el descenso del cuerpo, en el punto inicial D, será como si en la línea EF. Por lo tanto, el descenso del cuerpo por la línea EF será una consecuencia del peso del cuerpo en el punto D. Nuevamente, cuando el cuerpo está en S, su descenso en el punto inicial S será como si en la línea GH, y por lo tanto el movimiento del cuerpo en GH será una consecuencia del peso que el cuerpo tiene en el punto S" [297 – *De Motu*]

En otras palabras, *la fuerza de descenso en un plano inclinado equivaldrá, en Galileo, al peso posicional en una balanza*. Primero, es importante notar que dado que es el mismo cuerpo que ocupa los puntos D y S, el peso simple será el mismo. Por lo tanto, cuando Galileo afirma que "el movimiento será una consecuencia del *peso* del cuerpo", se refiere al *peso posicional* determinado a partir de las posiciones que los cuerpos ocupan en el brazo de la balanza.

Ahora bien, vimos que la fuerza de descenso en planos inclinados de la misma altura depende de la longitud de los planos, y por el diagrama de la figura 11 podemos ver que las longitudes de los planos GH y EF ni siquiera están definidas. En efecto, Galileo utilizará el peso posicional del cuerpo a partir de sus posiciones en la balanza CD para determinar cuál es la fuerza de descenso de este mismo cuerpo por los planos GH y EF. Será a partir de esta equivalencia que acabamos de explicar que Galileo responderá las dos preguntas dirigidas al movimiento de los cuerpos en planos inclinados.

Para responder a su primera pregunta, “*¿por qué los cuerpos pesados se mueven más rápidamente en planos inclinados más próximos de la vertical?”*, Galileo asume que la *velocidad de descenso es directamente proporcional a la fuerza de descenso*,

> “Si, entonces, nosotros podemos mostrar que el cuerpo es *menos pesado* en el punto S que en el punto D, claramente el movimiento en la línea GH será *más lento* que en la línea EF” [298 – *De Motu*, subrayado mío]

Por lo tanto, para explicar por qué la velocidad de los cuerpos varía según la inclinación del plano, basta determinar cuál es la variación de la fuerza de descenso según la inclinación, y dicha fuerza, como vimos, será determinada a partir del peso posicional del cuerpo en el brazo de la balanza.

La fuerza de descenso del cuerpo en el punto D ya está dada, pues el peso posicional en este punto es proporcional a su distancia al centro AD, y, dado que AD es igual a CA, los pesos en D y en C están en equilibrio, es decir, la fuerza de descenso por D es igual al peso posicional del cuerpo en C.

Para la determinación del peso posicional en el punto S, Galileo construye una perpendicular desde S hasta el brazo de balanza AD. Esta perpendicular corta AD en el punto P. La fuerza de descenso en S será determinada por el peso posicional del cuerpo en P (como si el peso en S estuviera suspendido por una cuerda, ver figura 12). De este modo, el peso suspendido en P puede ser comparado al peso en C por medio del propio mecanismo de la balanza. Ahora bien, dado que la distancia PA es menor que la distancia CA, y dado que los pesos simples son iguales[18], entonces el peso posicional en P es menor que el peso posicional en C, luego la fuerza de descenso en S será menor que la fuerza de descenso en D. Dado la desigualdad entre las fuerzas de descenso, tenemos que el movimiento por EF (punto D) será “más veloz” que el movimiento por GH (punto S).

La segunda pregunta establece *en qué proporción* un movimiento es más veloz que el otro. Para establecer esta proporción, Galileo prolonga la recta CD hasta cortar GH en el punto Q (Figura 12)

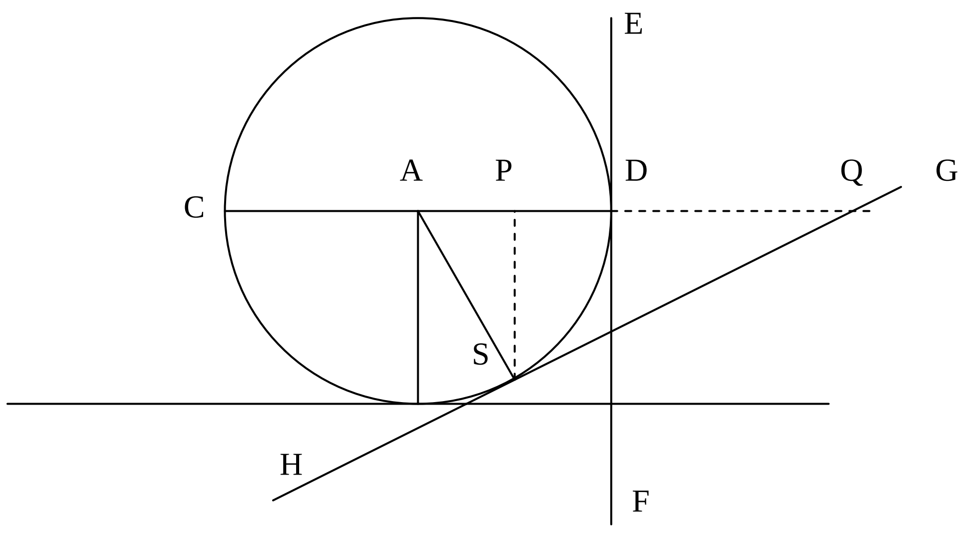


Figura 12

[18]Es importante notar que esta suposición se ajusta al Teorema IV de Tartaglia

Enseguida Galileo establece la proporción entre rapidez del movimiento en función de las distancias DA y AP,

> "Ahora, **[1]** desde que el cuerpo desciende por la línea EF más rápidamente que por GH en la misma razón como el cuerpo es más pesado en el punto D que en el punto S, y **[2]** desde que el cuerpo es más pesado en el punto D que en S en la misma razón que la longitud de la línea DA es mayor que la longitud de la línea AP, se sigue que **[3]** el cuerpo descenderá por la línea EF más rápidamente que por la línea GH en la misma razón que la longitud de la línea DA es mayor que la longitud de la línea AP. Por lo tanto, la velocidad en EF tendrá para la velocidad por GH la misma razón que la líneas DA para la línea AP". [298 – *De Motu*]

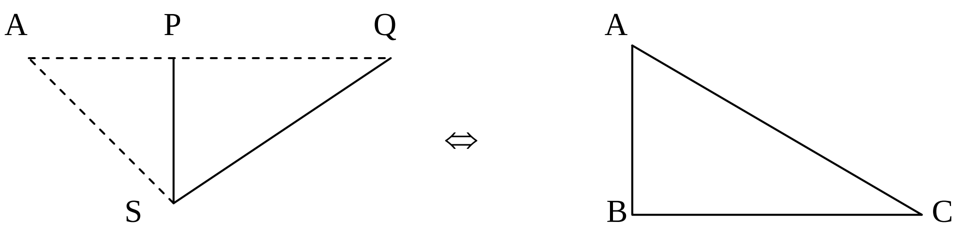
En otras palabras, si representamos la idea de "cuán más veloz" por "V" (velocidad), y la pesadez de los cuerpos según sus distancias al centro de la balanza por "Ω" (peso posicional), las proporciones descritas pueden ser representadas por:

[1]: $\mathbf{V_{EF}/V_{GH} = \Omega_D/ \Omega_S}$
[2]: $\mathbf{\Omega_D/ \Omega_S = DA/AP}$
[3]: $\mathbf{V_{EF}/V_{GH} = DA/AP}$

Ahora bien, la proporción representada en [3] está en función de las distancias que caracterizan los pesos posicionales en la balanza, pero la proporción debe ser en función de las longitudes de los planos, por lo tanto, se sigue que:

1) dado que el triángulo AQS es semejante al triángulo APS, se sigue que: QS/PS = AS/AP
2) pero AS = DA, luego: QS / PS = DA / AP
3) pero DA / AP = V_{EF}/V_{GH}
4) luego, de 2 y 3: $\mathbf{V_{EF}/V_{GH} = QS / PS}$

Observando la figura 12, podemos ver que "QS" representa la longitud de un plano cuya altura es representada por "PS". La velocidad "V_{EF}" es la velocidad del cuerpo por la vertical, y "V_{GH}" la velocidad por el plano inclinado, por lo tanto, la proporción deducida en "4" nos afirma que si un *mismo cuerpo* desciende por planos de diferentes inclinaciones, pero de misma altura, la "rapidez" del movimiento será inversamente proporcional a la longitud de los planos. En la figura 13 ilustramos un diagrama que representa con más claridad la conclusión de la demostración.



V_{EF}/V_{GH} = QS/PS $\qquad$ V_{AB}/V_{AC} = AC/AB

Figura 13: representación esquemática del Teorema *De Motu*

Es importante notar que si interpretamos el término "rapidez" aplicado al teorema *De Motu* como "aceleración", según entendemos hoy, la proporción estará correcta.

Naturalmente, dado que la “rapidez” es directamente proporcional a la fuerza de descenso del cuerpo, la misma proporción aplicada a la velocidad también se aplicará a la fuerza de descenso, es decir:

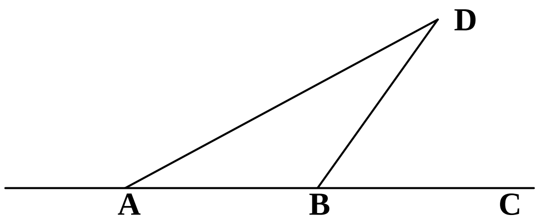
Dado que $V_{AB}/V_{AC} = F_{AB}/ F_{AC}$ y $V_{AB}/V_{AC} = AC/AB$
Se sigue que $\mathbf{F_{AB}/ F_{AC} = AC/AB}$.

Esta última proporción, aunque podemos derivarla directamente de la demostración, no es presentada por Galileo en el teorema *De Motu*, ella es apenas utilizada como apoyo para su conclusión. Más adelante, cuando analicemos el primer escolio de la tercera jornada, veremos a Galileo utilizar una proporción “similar” a ésta, con la diferencia de que en el escolio Galileo ya no se refiere a la “fuerza de descenso”, sino a un conjunto de nombres entre los cuales aparecerán “impeto” y “momento”.

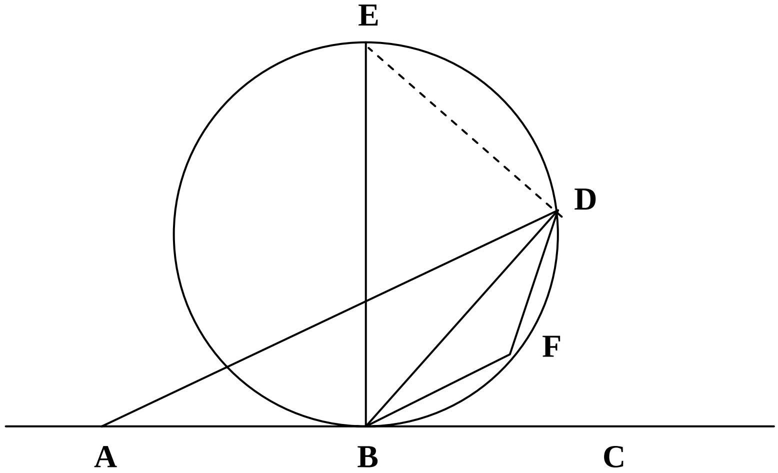
VI. Folio 172: una nueva demostración del teorema *De Motu*

El fragmento que analizaremos a continuación, presentado en el folio 172, de aproximadamente 1603, podemos encontrar una nueva demostración del teorema *De Motu,* la traducción es de Wisan:

> “**[1]** Sea ABC un plano horizontal, desde el cual las líneas DB y DA forman dos planos inclinados: yo digo que el mismo cuerpo mueve más lentamente[19] a lo largo de DA que a lo largo de DB, según la razón entre las longitudes de DA y DB.



> **[2]** Si, de hecho, uno yergue en B una perpendicular a la horizontal, BE, y en D dibuja DE perpendicular a BD, encontrando BE en E; entonces, circunscribimos un círculo sobre el triángulo BDE, el cual será tangente a AC en B, desde el cual dibujamos BF paralelo a AD, y completamos FD.



[19] *mobile tardius*

[3] Es claro que la lentitud a lo largo de BF es similar a la lentitud a lo largo de AD[20]. Pero **[4]** desde que un cuerpo se mueve sobre DB y FB en el mismo tiempo, **[5]** es claro que las velocidades [*velocitates*] a lo largo de DB están para las velocidades a lo largo de FB como DB es para FB, desde que dos cuerpos, partiendo desde los puntos D y F, siempre requieren igual tiempo para recorrer porciones de la línea DB y FB los cuales son proporcionales a toda las líneas DB y FB
Pero **[6]** desde que el ángulo BFD en la porción [del círculo] es igual al ángulo DBA con la tangente, mientras el ángulo DBF es igual al ángulo alterno [interno] BDA, los triángulos BDF y ABD son equiángulos, así BD está para BF así como es AD para DB.

Por lo tanto, **[7]** como AD es para DB, así[21] las velocidades [velocitas] a lo largo de DB para la velocidad a lo largo de AD, y, consecuentemente, la lentitud a lo largo de AD para la lentitud a lo largo de DB.

Si nosotros asumimos esto, podemos demostrar el que sigue. Por lo tanto, uno asume que **[8]** la velocidad del movimiento[22] aumenta o disminuye según la proporción el cual el *momenta* de gravedad[23] aumenta o disminuye; y desde que nosotros sabemos que e*l momenta gravitatis* del mismo cuerpo en el plano DB son para el *momenta* en el plano DA como la longitud DA es para la longitud DB, entonces la velocidad a lo largo de DB es para la velocidad a lo largo de DA como DA es para DB." [folio 172][24]

La demostración puede ser parafraseada como sigue:

[1] se quiere probar que: $\dfrac{\text{Lentitud DA}}{\text{Lentitud DB}} = \dfrac{DA}{DB}$

[2] construcción del diagrama geométrico que será utilizado en la demostración;

[3] dado que BF es paralelo a DA: (la lentitud por BF) = (lentitud por DA), y consecuentemente, Galileo considerará: $V_{BF} = V_{DA}$

[4] la igualdad de los tiempos de recorrido a lo largo de BF y BD se deriva del teorema de las cuerdas, por lo tanto: $T_{BF} = T_{BD}$

[5] Si los tiempos son iguales, entonces[25]:

$$\text{Si } T_{BF} = T_{BD} \Rightarrow \frac{V_{DB}}{V_{BF}} = \frac{DB}{BF}$$

[6] A partir de la igualdad entre ángulos: el triángulo BDF es semejante al triángulo ABD, de ahí:

[20] *tarditatem per fb esse consimilem tarditati per da*;
[21] "*ut ad ad db, ita **velocitas** per db ad **velocitatem** per da*".
[22] *motus velocitatem*
[23] *gravitatis momenta*
[24] Wisan (trad), 1973, pp222
[25] Wisan justifica ese paso "por una vieja regla medieval las velocidades son proporcionales a las distancias recorridas". Por otro lado, esta relación concuerda con una aplicación del teorema 2 del movimiento uniforme para movimientos acelerados. Sin embargo, aunque fuera posible que Galileo ya conociera este teorema, no sabemos si él ya realizaba su aplicación en el movimiento acelerado.

$$\frac{DB}{BF} = \frac{AD}{DB}$$

[7]: de [5] y [6]:

$$\frac{V_{DB}}{V_{BF}} = \frac{AD}{DB} \quad \Rightarrow \text{de [3]}: \frac{\mathbf{V_{DA}}}{\mathbf{V_{DA}}} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{DB}} = \frac{\text{(lentitud DA)}}{\text{(lentitud DB)}}$$

En este fragmento observamos el uso del término “velocidades”, en el plural, posiblemente sea una manera encontrada por Galileo para referirse a la existencia un conjunto de grados de velocidades que varían a lo largo del movimiento de descenso del cuerpo, eso indica que él tiene en mente un movimiento que es acelerado. En [3] las *lentitudes* a lo largo de los planos BF y AD son asumidos como similares, eso porque, dado que los planos son paralelos, Galileo considera que los cambios de velocidad poseen la misma intensidad[26] (lo que equivale, en lenguaje moderno, a afirmar acertadamente que las aceleraciones son iguales). Sin embargo, en [7], dado que la lentitud por BF es “similar” a la lentitud por AD, Galileo asume que las “velocidades” por BF son iguales a las velocidades por AD, en efecto, si cambiamos el término “velocidades” por “aceleración” el razonamiento es correcto. Evidentemente, la proporción presentada en [7] es el teorema *De Motu*, Acerca de cómo debemos interpretar el término “*velocitas*” en este fragmento, alerta Wisan:

> “Pero *velocitas* no es ni velocidad media ni velocidad instantánea. Es la “rapidez” en el sentido de que el cuerpo más veloz es aquél que recorre mayor distancia en el mismo tiempo. Para comparar rapidez [entre dos cuerpos] Galileo compara distancias recorridas en el mismo tiempo. Interpretando [rapidez] como aceleración, su resultado es correcto”[27]

Un camino complementario para interpretar “velocidades”, surge si consideramos la relación entre rapidez y lentitud. Evidentemente, cuanto mayor la rapidez de un cuerpo menor será su lentitud, y siguiendo la interpretación de Wisan, esa proporcionalidad inversa es expresada en la proporción presentada en [7]. Sin embargo, en [3], como vimos, Galileo establece también una equivalencia entre “lentitud” y “velocidades”. Podríamos entonces interpretar “rapidez” y “lentitud” como magnitudes que procuran expresar las *diferentes intensidades* con que las velocidades varían a lo largo de cada movimiento, es decir, sabemos que las velocidades cambian, y que pueden cambiar más rápidamente o más lentamente, según la intensidad de dichos cambios. Si es así, desde un punto de vista moderno, “rapidez” y “lentitud” parecen querer dar cuenta de una propiedad del movimiento caracterizada por el moderno concepto de aceleración, de hecho, será la intensidad de la aceleración la que determina con qué intensidad cambiarán las velocidades a lo largo del movimiento[28].

Al final del fragmento, observamos a Galileo enunciar que la ley de variación de los “momentos de gravedad” es equivalente a la ley de variación de las “velocidades” del movimiento. De este modo, los momentos de gravedad es alguna cosa que aumenta a lo

---

[26] En el análisis que haremos del Escolio 1 de la 3ª Jornada, veremos a Galileo asumir que los ímpetos adquiridos por un cuerpo que se mueve a lo largo de planos de misma inclinación son iguales entre sí.

[27] Wisan, 1973, p223

[28] según la noción moderna de aceleración como una magnitud que determina la tasa de variación de la velocidad a lo largo del movimiento

largo de un plano dado[29]. Con el uso del término “gravedad” unido a “momento”, Galileo puede estar sugiriendo que es la pesadez del cuerpo es la que está aumentando a lo largo del movimiento:

> “Galileo debe estar pensando aquí en términos de incrementos de velocidad lo cual es, en cada instante, proporcional al incremento de *momentum*, mientras el último es, en cambio, generado por y en algún sentido proporcional a, el *momentum* estático, o el peso efectivo de un cuerpo. Si es así, el análisis de Galileo sería cercano a aquél de Buridan (Clagett, 1959, p525) y consistente con el principio peripatético que fuerza constante genera velocidad constante”[30]

De hecho, si tomamos la proporción establecida en [8], y la comparamos con la proporción entre velocidades determinada en [7], tenemos que los momentos de gravedad son directamente proporcionales a las velocidades del cuerpo:

$$\frac{\text{(momento de gravedad por DB)}}{\text{(momento de gravedad por DA)}} = \frac{DA}{DB} = \frac{V_{DB}}{V_{DA}}$$

VII. La paradoja de Galileo

Como vimos en la introducción, la paradoja de Galileo se caracteriza por una contradicción de resultados entre el Postulado de Galileo y el teorema *De Motu*. Antes de iniciar la presentación de cómo Galileo expresa dicha paradoja en manuscritos publicados o no, es importante indicar la estrecha relación que existe entre el Postulado y el teorema 3 del movimiento uniformemente acelerado.

Como vimos, el Postulado afirma que la velocidad de descenso de un cuerpo a lo largo de planos de diferentes inclinaciones, y misma altura, son iguales. El teorema 3 es una consecuencia del Postulado y está enunciado como sigue:

> “Si uno y mismo móvil se mueve, partiendo del reposo, sobre un plano inclinado y a lo largo de una vertical, teniendo ambos la misma altura, los tiempos de movimientos estarán entre sí como las longitudes [respectivas] del plano y de la vertical” [215 – *Discorsi*]

En otras palabras. Considere el plano inclinado ilustrado en la figura 14. El teorema 3 afirma que: dado que $V_B = V_C$, se sigue que $AB/ AC = T_{AB} /T_{AC}$.

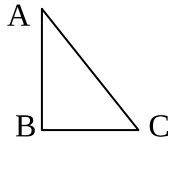


Figura 14

El teorema 3 será analizado en el capítulo 2, cuando presentaremos las aplicaciones del teorema de la velocidad media. La razón por la cual anticipamos esta pequeña

[29] ni los momentos de velocidad ni los momentos de gravedad pueden ser interpretados en el moderno sentido de aceleración, dado que este último será constante a lo largo del movimiento por un determinado plano inclinado

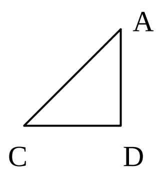
[30] Wisan, 1973, p223

explicación se debe al hecho de que en algunos de los fragmentos que veremos a continuación Galileo expresa la paradoja no en términos del Postulado, sino en términos de la contradicción de resultados entre el teorema 3 y el teorema *De Motu*.

VII.1. Algunos antecedentes de la paradoja

Esta paradoja que acabamos de ver está presente en dos fragmentos que analizaremos a continuación. El primer fragmento es de 1603 (Drake), y es presentado en el folio[31] 177r, llamado "fragmento *dubito*":

> "Las velocidades de cuerpos, que empiezan sus movimientos con momentos desiguales, están siempre entre ellos en la misma proporción como si ellos se moviesen con movimiento uniforme: por ejemplo, un cuerpo empieza a moverse por AC, empezando su movimiento con un momento que es al momento a lo largo de AD como AD es a AC.



> Si ellos se mueven con movimiento uniforme, el tiempo a través de AC sería para el tiempo a través de AD como AC es a AD. [Teorema 1-MU], el cual en movimiento [acelerado] yo dudo____"[Drake, 1978, p81 - folio 177][32]

Observamos en el inicio del fragmento que la intención es determinar que existe una relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado. Enuncia, entonces, que el momento a lo largo de AC está para el momento a lo largo de AD como AD está para AC. En este pasaje, si interpretamos "momento" como "momentos de velocidad" (que equivalen a "grados de velocidad"), entonces dicha proporción coincide con la que fue

---

[31]"folio" es un término técnico utilizado para hacer referencia a manuscritos realizados por Galileo entre 1602 hasta 1630 aproximadamente, que nunca fueron publicados. En estos manuscritos encontramos tentativas tempranas de demostraciones de teoremas del movimiento realizadas por Galileo. En su gran mayoría están en latín (siendo que podemos encontrar algunos también en italiano). La lista completa de estos fragmentos (folios) poden ser consultadas por internet en el sitio del museo nacional de Florencia (www.imss.fi.it). El museo ofrece la posibilidad de ver estos manuscritos (muchos realizados por las manos de Galileo) y también ofrece una trascripción de los manuscritos (para que se pueda leer con claridad lo que está escrito). Stillman Drake, en su libro "Galileo´s at Work" ofrece la traducción al inglés de una cantidad significativa de estos manuscritos, los cuales fueron utilizados para la realización de esta parte de la tesis.

[32] "Velocitates mobilium quae inaequali momento incipiunt motum, sunt semper inter se in eadem proportione ac si aequabili motu progrederentur: ut, verbi gratia, mobile per *ac* incipit motum cum momento ad momentum per *ad* ut *da* ad *ac*; si aequabili motu progrederetur, tempus per *ac* ad tempus per *ad* esset esset ut *ac* ad *ad*, quod in accelerato dubito quidem; et ideo demonstra?..." [Museo Nacional de Florencia]. El término "momento" en "*inaequali momento*" fue traducido, tanto por Wisan (pp200) como por Drake (pp81) como "moment", indicando un "momento de tiempo". Más adelante, en "*incipit motum cum momento ad momentum*" las traducciones no coinciden: en Wisan leemos "begining its motion with a momentum which is to momentum", mientras en Drake leemos "begans motion with a moment to the moment"; ambas traducciones son correctas, dado que el término latín "momentum" puede ser traducido tanto como "Impulso, movimiento, mudanza, variación" como también "parcela, pequeña cantidad, pequeña división y, especialmente: pequeña división del tiempo, momento, minuto, instante" Dado que Galileo no explica si con "momentum" quiere hacer referencia a "momenta velocitatis", no podremos afirmar si en este fragmento Galileo se refiere a los "grados de velocidad", podemos apenas sugerir que sea así, pues la proporción expresada en "incipit motum cum momento ad momentum per *ad* ut *da* ad *ac*", coincide con la proporción expresada en el teorema *De Motu.*

demostrada por el teorema *De Motu*, y, en ese caso, las velocidades deben ser necesariamente desiguales[33]. En seguida, el fragmento enuncia que si un móvil recorriera dos caminos distintos en movimiento uniforme, entonces las distancias serían proporcionales a los tiempos de recorrido (este enunciado corresponde al teorema 1 del movimiento uniforme), y la duda es si la misma proporción podría ser verificada para el caso del movimiento acelerado.

Teorema 1 del movimiento uniforme	Teorema 3 del movimiento acelerado	Teorema De Motu
…………………… $V_{AC} = V_{AD}$ sii $\dfrac{T_{AC}}{T_{AD}} = \dfrac{S_{AC}}{S_{AD}}$	$\mathbf{V_C = V_D}$ sii $\dfrac{T_{AC}}{T_{AD}} = \dfrac{S_{AC}}{S_{AD}}$	$\dfrac{V_C}{V_D} = \dfrac{AD}{AC}$ $\Rightarrow$ dado que $AD \neq AC$ se sigue que $\mathbf{V_C \neq V_D}$

A partir del cuadro anterior, podemos observar que si el teorema 1 del movimiento uniforme[34] es aplicado al movimiento acelerado (en ese caso en la forma del teorema 3), entonces los grados de velocidad en el descenso a lo largo de ambas distancias (AC y AD) deben ser iguales. Sin embargo el teorema *De Motu* afirma que las velocidades no pueden ser iguales, de ahí la "duda": si las velocidades del movimiento acelerado son desiguales, el teorema 3 del movimiento acelerado no puede ser válido, y consecuentemente, el teorema 1 del movimiento uniforme no podría ser aplicado al movimiento acelerado.

El segundo fragmento que analizaremos que se refiere a la paradoja se encuentra en el folio 164 de 1607 (Drake), llamado "fragmento *mirandum*", cito:

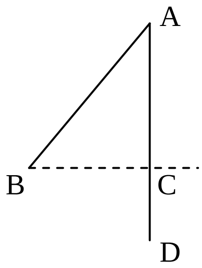
> "Extraordinario ¿Ahora, es el movimiento a lo largo de la vertical AD más veloz que a lo largo del plano inclinado AB? Eso parece ser así, desde que espacios iguales son recorridos más velozmente a lo largo de AD que a lo largo de AB. Pero también parece ser que no, porque dibujando la horizontal BC, el tiempo a lo largo de AB es al el tiempo a lo largo de AC como AB es a AC [teorema 3 – MA], entonces, el mismo momento de velocidad [existe en el movimiento] a través de AB y a través de AC; y verdaderamente aquella velocidad es una y la misma con lo cual en iguales tiempos desiguales espacios son recorridos los cuales son en la misma proporción como los tiempos."[Drake, 1978, p125 - folio 164][35]

---

[33] Si interpretamos "momentos" como "instantes de tiempo" la proporción descrita pierde su significado dentro del contexto del fragmento, pues no hay proporciones demostrados por Galileo que afirmen que en movimiento acelerado *los tiempos deban ser inversamente proporcionales a las distancias de recorrido*. De hecho, en el fragmento del folio 147 de aproximadamente 1604, encontramos una demostración temprana del teorema de los tiempos cuadrados, hecho que evidencia que Galileo ya conocía la relación correcta entre espacios y tiempos para el movimiento acelerado.

[34] Para una explicación más detenida del teorema 1 del movimiento uniforme véase apéndice 2

[35] Drake, 1978, pp125 La versión original: "Mirandum. Numquid motus per perpendiculum *ad* velocior sit quam per inclinationem *ab* ? Videtur esse; nam aequalia spacia citius conficiuntur per *ad* quam per *ab*. Attamen videtur etiam non esse; nam, ducta orizontali *bc*, tempus per *ab* ad tempus per *ac* est ut *ab* ad *ac*: ergo eadem momenta velocitatis per *ab* et per *ac*. Est enim una eademque velocitas illa quae, temporibus in[a]equalibus, spacia transit inaequalia, eandem quam tempora rationem habentia."[Museo Nacional de Florencia]. Aquí nuevamente las traducciones de Drake y Wisan no coinciden. En la frase "Est enim una eademque velocitas illa quae, temporibus in [a]**equalibus**, spacia transit **inaequalia**, eandem quam tempora rationem habentia", la traducción de Drake sigue una interpretación literal del fragmento "[…];



En este fragmento vemos a Galileo enunciar dos afirmaciones claramente contradictorias. En un primer momento, afirma que el movimiento por la vertical es *más veloz* que por el plano inclinado, dado que "espacios iguales son recorridos en menos tiempo por la vertical que por el plano inclinado". En seguida afirma que ambos movimientos son *igualmente veloces*, dado que si $T_{AB}/T_{AC} = AB/AC$ (proporción que caracteriza el teorema 3-MA), entonces las velocidades deben ser iguales; parece que Galileo asume que "rapidez" y "velocidades" son magnitudes equivalentes entre sí. Este fragmento no da ninguna referencia de cómo Galileo pretende resolver la contradicción entre los dos enunciados:

> "La primera conclusión se sigue de la definición de Aristóteles de veloz. La segunda es sugerida por el teorema de Arquímedes: si las velocidades son iguales, los tiempos están en la misma proporción que las distancias recorridas. Arquímedes restringe su proposición al movimiento uniforme y esta proposición se vuelve el primer teorema de Galileo para el movimiento uniforme en *De motu locali*"[36]

La noción aristotélica de "veloz"[37] es expresada en términos de la comparación entre las distancias recorridas en el mismo tiempo (o la comparación entre los tiempos de recorrido para la misma distancia).

Un importante teorema que podría estar en la mente de Galileo para sostener dicha noción de veloz es el "teorema del ángulo recto"[38], que establece la relación de desigualdad entre distancias recorridas por cuerpos que descienden por planos de distintas inclinaciones. Este teorema demuestra que un cuerpo que se mueve a lo largo de la vertical recorre, *en el mismo tiempo*, una mayor distancia que su movimiento por un plano inclinado, y consecuentemente el cuerpo que desciende por la vertical es más veloz. A grandes rasgos podemos enunciarlo como sigue: en la figura de la página siguiente, si el ángulo ABC es recto, entonces un cuerpo abandonado desde el reposo en A, recorrerá las distancias AB y AC en el mismo tiempo.

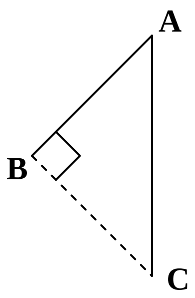
---

and indeed that speed is one and the same with which in **equal** times **unequal** spaces are passed which have the same ratio as the same times"; mientras Wisan traduce siguiendo un sentido más coherente matemáticamente: "[…], in fact, the velocity is always the same which in **unequal** times traverses **unequal** spaces which are in the same proportion as the times"(Wisan, pp202). La diferencia entre las dos traducciones está en que si los espacios son desiguales, y si están en la misma proporción que los tiempos, evidentemente los tiempos no pueden ser iguales.

[36] Wisan, 1973, p202

[37] Una presentación más detenida de dicha noción veremos en *Diálogos*, en la próxima sección.

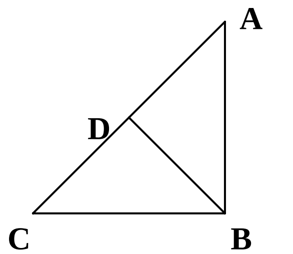
[38] Que es un caso particular del teorema de las cuerdas, presentado en los Discorsi en la proposición 6 del movimiento acelerado.



Tenemos entonces que $T_{AB} = T_{AC}$ y por construcción AC > AB (dado que AC será la hipotenusa del triángulo ABC), en efecto, el movimiento por la vertical es más veloz que por el plano inclinado, pues *recorre distancia mayor en el mismo tiempo*.

Una demostración temprana del teorema del ángulo recto puede ser encontrada en el folio 177 (luego después del fragmento "*dubito*"), donde es demostrado a partir del teorema 3 del movimiento acelerado y del corolario de la media proporcional. La demostración es presentada como sigue:

> "Aliter sic: El tiempo a lo largo de AC es para el tiempo a lo largo de AB, por el precedente [referencia a la proporción presentada en el fragmento *dubito*], como la línea AC es para la línea AB; pero [el tiempo a lo largo de AC] tiene la misma proporción también con respecto al tiempo a lo largo de AD, AB siendo la media proporcional entre AC y AD; por lo tanto, los tiempos a lo largo de AD y AB serán iguales" [Wisan, 1973, p200 – folio 177][39]

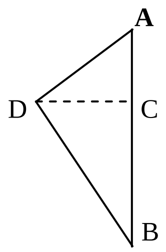


La demostración puede ser parafraseada como sigue:

1) por T3 – MA: T_{AC}/T_{AB} = AC/AB
2) AB = MP(AC y AD)
3) Por corolario de la media proporcional: T_{AC}/T_{AD} = AC/AB
4) De (1) y (3): $T_{AC}/T_{AB} = T_{AC}/T_{AD}$, luego: $\mathbf{T_{AB} = T_{AD}}$

---

[39] En notación moderna, considerando en la figura abajo los ángulos ADB y DCA rectos, por construcción, los ángulos ADC y DBA son iguales (llamemos a estos ángulos "α"). Podemos demostrar este teorema como sigue:



1) AD = ½ g. senα.T^2_{AD}
2) AB = ½ g T^2_{AB}
3) De (1) y (2): (T^2_{AD}.senα)/T^2_{AB} = AD/AB
4) Pero senα = AD/AB (por el ángulo DBA)
5) Luego: $\mathbf{T_{AD} = T_{AB}}$

En el paso (2) de la demostración, para que AB sea la media proporcional entre AC y AD, dado que el ángulo CBA es recto, el ángulo BDA necesariamente debe ser recto[40].

Por un lado, en la demostración del teorema del ángulo recto, podemos observar a Galileo utilizar el teorema 3 del movimiento acelerado para demostrar un teorema que confirma que el cuerpo es más veloz por la vertical que por el plano inclinado; por otro lado, como vimos, el teorema del ángulo recto y el teorema 3 poseen resultados que son contradictorios.

El problema crucial enfrentado por Galileo fue saber cómo caracterizar *lo que cambia* en el movimiento de los cuerpos cuando éstos descienden a lo largo de planos de distintas inclinaciones. Hoy sabemos que *lo que cambia* es la aceleración, sin embargo Galileo no presenta en los fragmentos que analizamos ninguna pista de que él estuviera consciente de que fuera la "aceleración" la magnitud capaz de explicar las diferencias entre los movimientos a lo largo de planos de distintas inclinaciones. En la próxima sección, a partir de nuestro análisis de la paradoja presentada por Galileo en *Diálogos*, veremos con más claridad que Galileo busca solucionar la paradoja por medio de las relaciones entre distancias y tiempos de recorrido, y no por medio del reconocimiento de que para la solución de este problema se requiere una nueva magnitud física, distinta de las magnitudes ya conocidas. De hecho, Galileo poseía la pregunta correcta, sin embargo procuraba su solución en las variables equivocadas.

> "[…] podemos ver en el fragmento *mirandum* que Galileo encontró un profundo y genuino enigma y que él no sabía que hacer con eso" [Wisan, 1973, p204]

El hecho de que no vemos a Galileo recurrir a la "aceleración" para describir el movimiento acelerado no parece ser de origen terminológico, de hecho, términos como "*motus naturaliter accelerati*", "*motu accelerato definitionem*" o "*uniformiter acceleratum*" pueden ser leídos en la versión original de los *Discorsi*. Es posible que "aceleración" fuera un término utilizado por Galileo para referirse a un tipo de movimiento, donde las velocidades cambian a cada instante del tiempo.

Los términos utilizados para referirse a la velocidad del movimiento acelerado son indicados por Wisan:

> "La velocidad adquirida en cada punto a lo largo de un camino es algunas veces llamada por Galileo "*gradus velocitatis*" (el término medieval) o los "*momenta velocitatis*", y algunas veces "*gradus* o *momenta celeritatis*[41]"[42]

En la próxima sección veremos una tentativa de Galileo de resolver la paradoja a partir de relaciones de igualdad y desigualdad entre distancias y tiempos de recorrido.

VII.2. La paradoja entre el Postulado y teorema De Motu en Diálogos

Los fragmentos que analizamos en la sección anterior nos presentan claramente que, durante el desarrollo de los fundamentos de su física terrestre, Galileo encontró un

---

[40] dado que la media proporcional es demostrada por Euclides en la proposición 13 del libro VI por medio de regla de semejanza de triángulos – véase apéndice 1.

[41] Donde "*celeritatis*" significa "veloz" o "rapidez"

[42] Wisan, 1973, p204

problema que actúa directamente en la comparación entre movimientos de distintas aceleraciones. Dicho problema, como vimos, es derivado de una contradicción de resultados entre el teorema 3 y el teorema *De Motu*, ambos del movimiento acelerado. En esta sección analizaremos cómo este mismo problema fue presentado por Galileo en *Diálogos* (publicado en 1632), y veremos una tentativa de Galileo para solucionar esta contradicción por medio del uso de la noción de *ímpeto*.

Después de una discusión acerca del movimiento diurno de la Tierra en *Diálogos*, observamos a Salviati orientar a Sagredo para aceptar que el Postulado es verdadero. En seguida Salviati pregunta si el movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado no sería más lento que a lo largo de una vertical; Sagredo está confuso, entiende que esto parece ser verdad, pero entiende que esta conclusión parece contradecir el Postulado.

Para justificar el Postulado, Galileo primero recurre a una analogía entre el movimiento de un cuerpo en un péndulo y el movimiento por planos inclinados. Dadas las características físicas del péndulo, sin considerar las resistencias externas, el cuerpo preso en la cuerda siempre vuelve a su altura original (figura 15). A partir de ahí Galileo concluye que el ímpeto adquirido por el cuerpo durante el descenso es suficiente para devolverlo a la altura de la que partió.

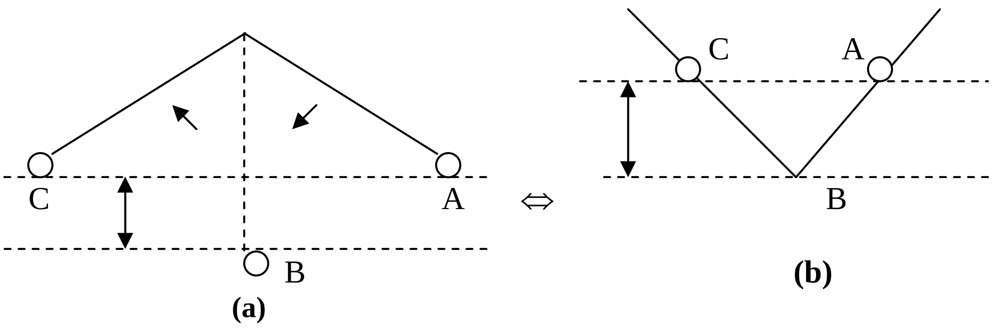


Figura 15: Galileo hace una analogía del movimiento de un cuerpo en un péndulo y en planos inclinados. (a) Si el cuerpo parte del reposo en A, el impeto adquirido en el descenso hasta el punto B será suficiente para erguir el cuerpo hasta la misma altura inicial, es decir, hasta el punto C. (b) del mismo modo, si el cuerpo parte del reposo en A, el impeto sería suficiente para que el cuerpo, después de pasar por el punto B, se moviera en ascenso por el plano BC, hasta alcanzar la misma altura inicial en el punto C.

En el movimiento del péndulo, Galileo observa que el cuerpo posee una tendencia a moverse hacia al "centro común", es decir, el punto más bajo del trayecto (punto B del diagrama "a" de la figura 15), y lo que determina su descenso es la diferencia de alturas entre el punto de partida (punto A) y este centro común. Y, en efecto, el ímpeto adquirido en la bajada impulsa el cuerpo en la subida hacia una distancia al centro igual a la que tenía en el inicio del movimiento. Se trata de una conclusión derivada de la conducta (ideal) de los péndulos. El concepto clave es que "los ímpetos de bajada y subida son iguales dado que las distancias al centro son iguales". Esta misma conclusión es extendida para el movimiento de cuerpos en un plano inclinado:

> "Salviati: Y puesto que yo sé que no dudáis en conceder que la adquisición de Ímpeto se procede mediante el alejamiento del punto del que el móvil parte y la aproximación al centro hacia el que tiende el movimiento ¿tendréis dificultad en aceptar que dos móviles iguales, aunque desciendan por líneas distintas, sin ningún impedimento, adquieren impetos iguales, siempre que la aproximación al centro sea igual? [47 – *Diálogos*]

Es decir, dado que planos inclinados de misma altura poseen la misma distancia al centro (de la Tierra), entonces es natural asumir que los ímpetos serán iguales entre sí.

> "Sagredo: creo firmemente que sí, porque, en efecto, ambas se han acercado igual al centro y, por lo que acabo de aceptar hace un momento, sus ímpetos serían también suficientes para devolverlas a la misma altura" [47 – *Diálogos*]

A partir de esta analogía, los ímpetos adquiridos por un cuerpo en descenso por un plano inclinado *dependen exclusivamente de las distancias verticales recorridas*, y no de la longitud de los planos (es decir, la intensidad del ímpeto depende solamente de la componente vertical del movimiento). Ahora bien, dado que los ímpetos son iguales, las velocidades adquiridas deben ser, *del mismo modo*, iguales entre sí, es decir, observando el diagrama "b" de la figura 15, si el cuerpo desciende por el plano AB y después asciende por el plano BC, en todos los puntos del movimiento que posean alturas iguales deben también poseer la misma velocidad. Esta última afirmación corresponde al propio "Postulado de Galileo" aplicado a planos inclinados.

Salviati conduce a Sagredo a aceptar el Postulado, pero entonces al comparar el Postulado con el teorema *De Motu* surge la contradicción,

> "Salviati: Pero [el cuerpo] sobre el plano inclinado CA descendería, aunque con movimiento más lento que por la perpendicular CB [teorema *De Motu*].
> Sagredo: He estado a punto de responder decididamente que si, por parecerme necesario que el movimiento por la perpendicular CB debe ser más veloz que por la inclinada CA. Sin embargo, si esto fuera así, ¿cómo podría la que cae por la inclinada, al llegar al punto A, *tener tanto ímpeto, es decir, el mismo grado de velocidad*, que la que cae por la perpendicular? *Parece que esas dos afirmaciones se contradicen.*" [48 – *Diálogos*, subrayado mío]

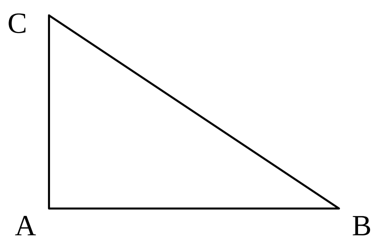


Figura 16

Salviati en seguida intenta indicar que no hay una contradicción, dado que un cuerpo puede ser más "veloz" que otro, y, al mismo tiempo, presentar la misma "velocidad".

> "Salviati: Así pues, aún os parecería mucho más falso si yo dijera que las velocidades de los cuerpos que caen por la perpendicular y por la inclinada son absolutamente iguales. Y, sin embargo, esta afirmación es totalmente verdadera; como también lo es la que a su vez afirma que el cuerpo que cae se mueve más velozmente por la perpendicular que por la inclinada.
> Sagredo: A mi entender esas dos afirmaciones son contradictorias" [*Diálogos* – p48]

Para esclarecer que no existe tal contradicción, Salviati recurre, en un primer momento, a la noción de "veloz":

"Salviati: cuando vos imagináis un móvil más veloz que otro, ¿qué idea os representáis en la mente?
Simplicio: Me figuro que, en el mismo tiempo, uno recorre mayor espacio que otro, o bien recorre el mismo espacio en un tiempo menor
Salviati: Perfecto, y para móviles igualmente veloces, ¿qué idea haces?
Simplicio: Me figuro que recorren espacios iguales en tiempos iguales.
Salviati: ¿Y nada más que eso?
Simplicio: Creo que esta es la definición correcta de los movimientos iguales.
Sagredo: Añadimos también esta otra: esto es que se diga que las velocidades son iguales cuando los espacios recorridos tienen la misma proporción que los tiempos en los cuales son recorridos, y será una definición más universal" [48 – *Diálogos*]

Tal cual fue presentado en el fragmento "*mirandum*", en esta cita observamos la noción aristotélica de "veloz" y la proposición "más universal", enunciada por Sagredo, corresponde a la de Arquímedes, sólo que aplicada para el movimiento acelerado (que equivale al teorema 3 del movimiento acelerado). Del modo en que es presentado este argumento, posiblemente Galileo pretende hacer que el lector vea que a partir de la noción aristotélica se puede derivar la proposición de Arquímedes. De hecho, en seguida veremos que será precisamente este camino el que Galileo seguirá para intentar resolver la paradoja. En otras palabras, utilizando el diagrama de la figura 16, podemos representar el camino seguido por Galileo de forma esquemática como sigue:

Por teorema 3 y Postulado:

$$\mathbf{V_A = V_B} \Leftrightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{T_{CB}}{T_{CA}}$$

Por teorema De Motu:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \mathbf{V_A < V_B}$$

Galileo intentará probar que: $\mathbf{V_B > V_C}$ **y** $\mathbf{V_B = V_C}$ **pueden ser compatibles, si ambos pueden derivar la relación:**

$$\frac{CB}{CA} = \frac{T_{CB}}{T_{CA}}$$

Dado que la relación propuesta por el teorema 3 ya está probada, Galileo intentará demostrar que a partir de la desigualdad de velocidades también se puede derivar la proporción entre distancias y tiempos de recorrido, es decir:

$$\mathbf{V_A < V_B} \Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{T_{CB}}{T_{CA}}$$

La estrategia que será seguida por Galileo para determinar esta última relación será por medio de la comparación, en un primer momento, de las distancias recorridas en tiempos iguales, y, en un segundo momento, comparar los tiempos de recorrido para distancias iguales. A continuación mostramos cómo Galileo presenta su argumento:

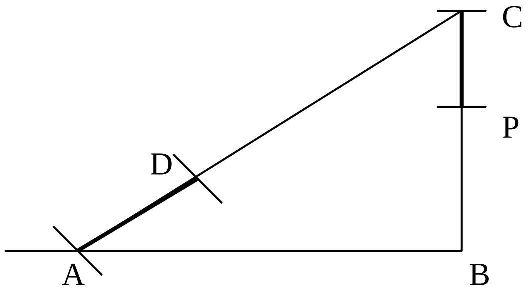
Salviati: Y, sin embargo, es preciso que lo creáis. Decidme, ¿No van esos movimientos acelerándose continuamente?

Sagredo: Se van acelerando. Pero más en la perpendicular que por la inclinada.” [*Diálogos* – p49]

En esta cita, si interpretamos la respuesta de Sagredo desde un punto de vista moderno, tenemos la propia resolución de la paradoja. De hecho, es la aceleración, y no la velocidad, que es más grande por la vertical que por la inclinada. Sin embargo parece ser que Galileo no ve esta posibilidad, como veremos a continuación, continuará la discusión de la paradoja en términos de distancias y tiempos de recorrido:

“Salv. ¿Pero esa aceleración se produce de tal modo por la inclinada, que tomadas dos partes iguales en cualquier lugar de estas dos líneas, perpendicular y inclinada, el movimiento en la parte perpendicular *sea siempre más veloz* que en la parte inclinada?
Sagr. No señor, por el contrario, yo podría tomar un espacio en la inclinada en el que la velocidad sería bastante mayor que en un espacio equivalente en la perpendicular. Eso sucedería si el espacio escogido de la perpendicular fuese próximo al punto C, y en la inclinada muy lejano.” [*Diálogos* – p49]

Tomando dos distancias iguales, Galileo compara los tiempos de recorrido. Naturalmente, dado que el cuerpo es más veloz por la perpendicular, si ambas distancias son tomadas desde el inicio del movimiento en el punto C, el tiempo de recorrido por la perpendicular será menor que por la inclinada. Sin embargo, en esta parte del argumento, la verdadera intención de Galileo es demostrar que “no siempre el cuerpo es más veloz por la perpendicular”, y la manera de demostrarlo es seleccionando distancias iguales cuyo recorrido se inicia en diferentes instantes del tiempo. De este modo, Galileo pretende indicar que para distancias iguales no siempre el tiempo de recorrido por la perpendicular será menor que el tiempo de recorrido por la inclinada. En el diagrama de abajo procuramos representar de forma esquemática este argumento:



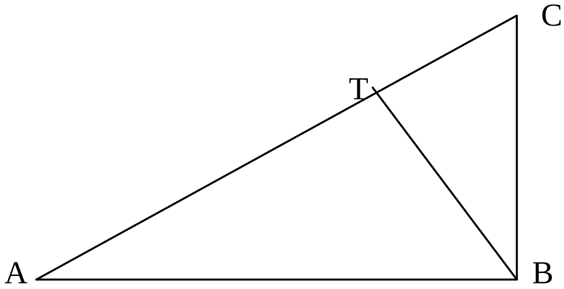
DA = CP se sigue que $T_{DA} < T_{CP}$

Luego, el movimiento por DA es más veloz que el movimiento por CP

Considerando que la distancia representada por el segmento DA es igual a la distancia CP, naturalmente, el intervalo de tiempo para recorrer DA será menor que el tiempo para recorrer CP; de ahí Galileo concluye que el movimiento por la inclinada DA es “más veloz” que el movimiento por la perpendicular CP.

“Ved, pues, que la proposición que dice <<el movimiento por la perpendicular es más veloz que por la inclinada>> no se verifica en todos los casos, sino sólo en los movimientos que empiezan desde el primer punto, es decir, desde el reposo” [49 – *Diálogos*].

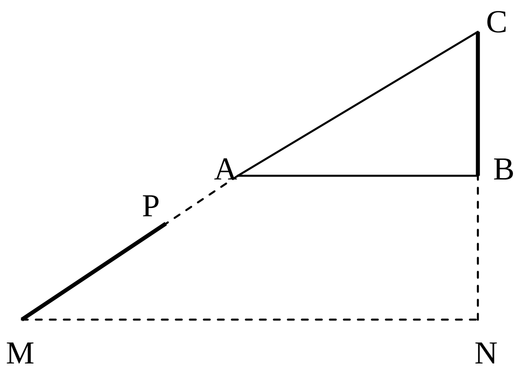
El mismo razonamiento no es posible si fijamos el tiempo. De hecho, para intervalos de tiempos iguales, la distancia recorrida por la perpendicular *siempre será mayor* que la distancia recorrida por la inclinada (como demuestra el teorema del ángulo recto). Galileo procura establecer relaciones de desigualdad entre razones compuestas por los tiempos de recorrido y por los espacios recorridos. Si abandonamos un cuerpo desde el reposo en C, en iguales intervalos de tiempo, la distancia recorrida por la perpendicular (CB) será mayor que la distancia recorrida por la inclinada (CT). Dado que los tiempos son iguales, la razón entre los tiempos es igual a la unidad; y dado que CT < CB, la razón CT/CB < 1 = T_{CT}/T_{CB}.



Por teorema del ángulo recto: $T_{CT} = T_{CB}$ y CT < CB

luego: $\mathbf{T_{CT} / T_{CB} > CT/CB}$

> “Por otro lado, si CA es prolongada cuanto fuera necesario, si tomara una parte igual a CB, pero recorrida en un tiempo menor, el tiempo de la inclinada en relación al tiempo en la perpendicular guardaría una proporción menor que la de los respectivos espacios.”



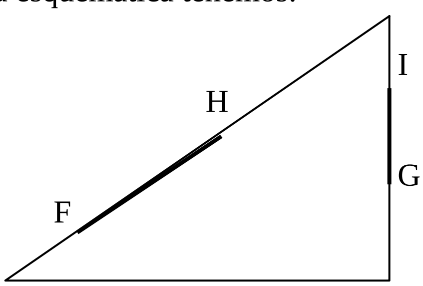
CB = MP, se sigue que $T_{CB} > T_{MP}$

Luego: $\mathbf{T_{MP} / T_{CB} < MP/CB}$

En resumen, Galileo presenta casos donde la razón entre las distancias puede ser mayor o menor que la razón entre los tiempos de recorrido, a partir de ahí concluye que de todos estos “casos posibles” habrá uno en que la razón entre distancias sea igual a la razón entre los tiempos:

> “Así pues, si en la inclinada y en la perpendicular podemos hallar espacios y velocidades tales que las proporciones entre esos espacios sean menores y mayores que las proporciones de los tiempos, *podemos aceptar muy razonablemente* que *haya también espacios para los cuales los tiempos de los movimientos conserven la misma proporción que los espacios*” [*Diálogos* – p50]

De forma esquemática tenemos:



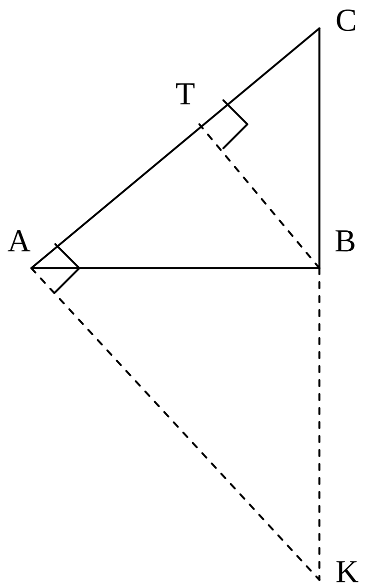
T_{HF}/T_{GI} = HF/GI

Naturalmente toda la argumentación que acabamos de ver no sería siquiera necesaria si Galileo considerase que la aceleración y velocidad son magnitudes de tipos distintos. Enseguida la conclusión del argumento:

> “Sagr. Ya he despejado mi duda más importante, y comprendo que es no sólo posible sino incluso diría necesario lo que me parecía una contradicción. *Pero incluso así, todavía no entiendo* que *uno de esos casos posibles* o necesarios sea el que necesitamos ahora, de modo que sea cierto que el tiempo de descenso por CA guarde la misma proporción que el tiempo de caída por CB que la línea CA por CB, y por tanto pueda decirse *sin caer en contradicción* que las velocidades por la inclinada CA y por la perpendicular CB son iguales.
> Salv. Por el momento contentaos con que haya eliminado vuestra incredulidad. *Y dejad la teoría para otra ocasión*, esto es, para cuando veáis las cosas que en torno a los movimientos locales ha demostrado nuestro académico.

A partir de la conclusión Galileo nos da pistas de que está consciente de que el argumento que fue presentado parece no ser suficiente para resolver la contradicción. De hecho, por la voz de Sagredo leemos “acepto el argumento, pero todavía no entiendo”, y Salviati procurando cerrar la discusión sugirió dejar “la teoría para otra ocasión”.

En seguida Galileo presenta nuevamente el mismo razonamiento expresado por medio del teorema del ángulo recto, procurando, talvez, reforzar el argumento anterior. Presentamos abajo en forma esquemática esta última parte del argumento:



Dado que:
$T_{CT} = T_{CB}$ y CB > CT, se sigue que el movimiento por CB es más veloz que por CT.

Del mismo modo.
Dado que:
$T_{AC} = T_{CK}$ y AC < CK, se sigue que el movimiento por CK es más veloz que el movimiento por AC.

Y concluye:

> “Pero cuando comparamos el movimiento hecho por toda la línea CA, no con todo el movimiento hecho en el mismo tiempo por la perpendicular prolongada, sino por el hecho en parte del tiempo sólo por CB, no repugna que el móvil por CA, al continuar descendiendo hasta más allá de T pueda llegar hasta A en un tiempo tal que la proporción existente entre las líneas CA y CB sea la que exista entre los tiempos.” [*Diálogos* – p51]

VIII. El primer escolio de la tercera jornada de los *Discorsi*

Después de concluir la demostración del segundo corolario del teorema segundo del movimiento uniformemente acelerado, Galileo enuncia, en la forma de un escolio, “*que las leyes establecidas para el movimiento vertical son válidas para el movimiento por planos inclinados”*.

La demostración del escolio se inicia con algo que Galileo enuncia como “un hecho del todo conocido”: que cuerpos que descienden por planos de distintas inclinaciones presentan distintos valores máximos de velocidad:

> “[…] la máxima [velocidad] se alcanza siguiendo la vertical, mientras que en las otras inclinaciones va disminuyendo tal velocidad cuanto más se alejan de dicha verticalidad, esto es, cuanto más oblicuamente se inclinan. De ahí que el impulso [ímpeto], la tendencia [talento], la energía [energía], es decir, la intensidad [momento] de la caída va disminuyendo en el móvil a causa del plano sobre el que dicho móvil se apoya y desciende” [215 – *Discorsi*][43]

Es importante notar la estrecha relación entre velocidad e ímpeto establecida por Galileo en esta cita: ambas magnitudes poseen una ley de variación determinada por medio de la inclinación del plano por el cual desciende el cuerpo. Dicha ley de variación es precisamente la que fue demostrada por Galileo en el teorema *De Motu*, con la diferencia que en *De Motu* al contrario del “ímpeto”, Galileo usa el término “fuerza de descenso”. En principio ambos conceptos representan el mismo significado físico, dado que ambos son directamente proporcionales a la velocidad y ambos poseen la misma ley de variación con respecto a la inclinación del plano. A partir de la figura 17 podemos ver con más claridad la relación entre la variación de la intensidad del “ímpeto” con respecto a la inclinación del plano:

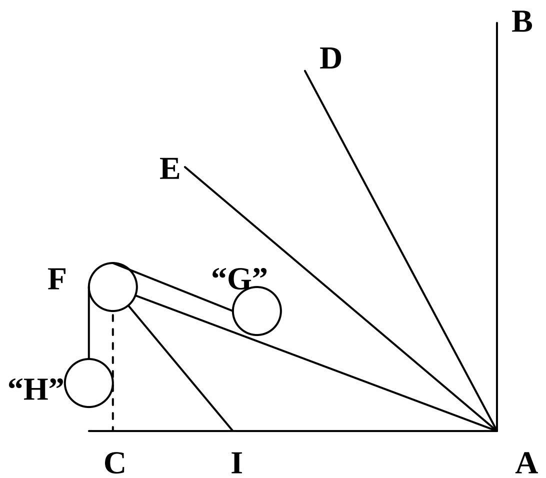


Figura 17

A partir de la figura 17, Galileo explica que:

“El ímpeto máximo y total del grave al descender, que tiene lugar por el plano perpendicular BA, es menos si lo hace por DA, menor todavía por EA y va disminuyendo

[43] Es importante notar que la noción de “oblicuidad” utilizada por Galileo es la misma que vimos en Jordanus.

sucesivamente en el caso de FA, para desaparecer, finalmente, del todo en la horizontal CA, donde el móvil es indiferente con respecto tanto al movimiento como al reposo, no teniendo, por si mismo, tendencia a moverse hacia ninguna parte ni ofrece tampoco ninguna resistencia a ser movido" [*Discorsi* – p215]

Un segundo aspecto importante es la multiplicidad de nombres utilizados por Galileo (ímpeto, energía, tendencia) para referirse a una única magnitud, que no es la velocidad, pero que también varía con la inclinación del plano. Para fines prácticos, Galileo utilizará solamente el término "impeto" y "*momentum*" para referirse a esta magnitud en los *Discorsi*. Eso puede ser un indicativo de que Galileo estuviera confundido con la interpretación del significado físico de la magnitud que incorporará las nuevas propiedades físicas que serán descritas más adelante.

La demostración del escolio[44] se inicia con la demostración de lo que Galileo llama "Lema de los ímpetos". Considere el plano inclinado AF de altura FC, como indica la figura 17. La propuesta de Galileo es determinar la proporción entre el ímpeto adquirido por un *mismo* cuerpo si este descendiera por la vertical FC y por el plano FA,

> "Tal FC es aquella línea a través del la cual el ímpeto de un grave y la intensidad de su tendencia a descender [*momento del descendere*] alcanzan su máximo. Nos preguntamos, ahora, cuál es la proporción que se da entre esta intensidad [momento] y la del mismo móvil al caer por el plano inclinado" [216 – *Discorsi*]

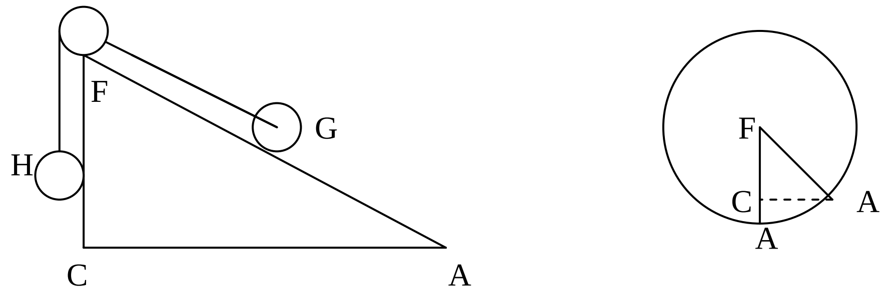
Es importante notar que la propuesta que caracteriza el inicio de la demostración del escolio es justamente la misma que Galileo utilizó para iniciar la demostración del teorema *De Motu*.

Dado que "el ímpeto de caída de un grave es igual a la resistencia o fuerza mínima que basta para impedir su movimiento y pararlo" (suposición que, como vimos, es también utilizada por Jordanus), para determinar el ímpeto adquirido por un cuerpo en un plano inclinado, Galileo utiliza un sistema compuesto de dos cuerpos *distintos* conectados por una cuerda.

Sean los cuerpos "H" y "G" conectados por una cuerda como ilustra la figura 18.

---

[44] La demostración que analizaremos en seguida no fue presentada en la primera edición de los *Discorsi* de 1638, y fue añadido en una edición posterior de 1655. De hecho, según Henry Crew y Alfonso Salvio (traductores de los *Discorsi* publicados por la Enciclopedia Británica): "El diálogo que interviene entre este escolio y el teorema que sigue [teorema 3] fue elaborado por Viviani, en la orientación de Galileo" [p208]. Y, según Carlos Solís Santos, en una nota de pie de página de la traducción al español, afirma: "En una carta a B. Castelli (30-XII-1639), Galileo señala las criticas de Viviani al principio del movimiento acelerado y su propósito de demostrarlo definitivamente. Como se verá, Galileo introduce para ello consideraciones dinámicas que, de haber surgido antes, tal vez habrían cambiado la composición y estructura de esta obra [*Discorsi*] […] Desgraciadamente, Galileo estaba ciego y envejecido por todas las calamidades que tenía que sufrir y no estaba en condiciones de emprender una nueva obra, cuya envergadura exigía la reestructuración conceptual de los *Discorsi*. Galileo dictó el añadido que comienza aquí [demostración del escolio que veremos], en octubre de 1638 y lo revisó un año más tarde. Viviani le dió forma de diálogo y lo incluyó en la edición de 1655". [p302] Es importante notar que la demostración que veremos ahora constituye una nueva etapa de desarrollo de la física terrestre de Galileo que no pudo ser concluida.



(a) (b)

Figura 18

Dado que los cuerpos “H” y “G” están conectados por una cuerda, las distancias recorridas por ambos cuerpos deben ser siempre iguales. Por otro lado, la resistencia al movimiento solamente actúa en la componente vertical del movimiento, pues, como argumenta Galileo, en la horizontal la resistencia al movimiento es nula, dado que en tal movimiento la distancia al centro común se mantiene siempre la misma. En efecto, Galileo considera que la tendencia al descenso o resistencia al ascenso, presentes en un cuerpo, solamente ocurre *si existe una variación de la distancia del cuerpo con respecto a la horizontal*. De este modo, el ímpeto de un cuerpo por un plano inclinado será determinado a partir de su distancia vertical recorrida, es decir, a partir de la componente vertical del movimiento:

> “Supuesto, pues, que el grave G, al moverse de A a F, ofrece resistencia solamente en cuanto asciende a través de la distancia vertical CF, mientras que el otro grave, H, baja necesariamente por la vertical todo lo que es el espacio FA, y dado que tal proporción de ascenso y descenso se mantiene siempre la misma, sea poco o mucho el movimiento de tales móviles (ya que éstos están atados), podemos afirmar categóricamente que en caso de equilibrio, es decir, cuando los cuerpos no se muevan, las intensidades [*momentos*], las velocidades o sus tendencias al movimiento [*propensioni al moto*] , es decir, *los espacios que serían recurridos por ellos en el mismo tiempo*, han de estar en una proporción que es inversa a la de sus pesos”. [217 – *Discorsi*, subrayado mío]

Cuando Galileo afirma “los espacios recorridos en tiempos iguales” se refiere a los “espacios recorridos mientras el peso de los cuerpos ofrecen resistencia al movimiento” De este modo, el cuerpo G ofrece resistencia mientras recorre la distancia FC, y H y ofrece resistencia por toda la distancia vertical FA (diagrama “b” figura 18). De este modo, en la figura 18 (a), tenemos que el equilibrio ocurrirá si el peso G es inversamente proporcional a FC y el peso H inversamente proporcional a FA:

Peso H / Peso G = FC/FA

Esta proporción[45] establece, en otras palabras, que los pesos son directamente proporcionales a las longitudes de los planos. Dicha afirmación corresponde al principio de plano inclinado demostrado por Jordanus. A partir de esta proporción Galileo interpreta un importante concepto físico. Dado que el peso del cuerpo H ejerce su acción total sobre su movimiento, mientras que el peso del cuerpo G ejerce una acción parcial, para que se verifique equilibrio, es necesario que el peso total de H sea igual al peso parcial de G. Ahora bien, el principio de plano inclinado establece la relación entre

---

[45] Esta proporción equivale, en notación moderna a la expresión: P_G. sen α = P_H, donde “α” es el ángulo entre el plano AF y la horizontal.

los pesos de dos diferentes cuerpos, mientras que el objetivo de Galileo es establecer la relación entre los ímpetos de un mismo cuerpo en planos de diferentes inclinaciones. Esta transición es determinada por Galileo por medio de la suposición de que el peso total del cuerpo H será la medida del "peso parcial" del cuerpo G:

> "Y puesto que estamos de acuerdo en la equivalencia del ímpeto, la energía, la intensidad [*momento*] o la proporción al movimiento y la fuerza o resistencia mínima suficiente para detenerlo, y puesto que hemos concluido que el grave H es capaz por sí solo de evitar el movimiento del grave G, se sigue que el peso más pequeño H, el cual ejerce su [tendencia al descenso con una] intensidad total por la vertical FC, *será la medida precisa* de la intensidad [*momento*] parcial que ejerce el peso mayor G por el plano inclinado AF" [217 – *Discorsi*, subrayado mío]

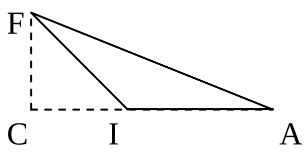
Dado que el ímpeto total del cuerpo H es igual al ímpeto parcial de G, a partir del principio de plano inclinado, Galileo concluye que:

- Peso total H / peso total G = FC/FA
- Dado que, peso total de H = "peso parcial" G,
- entonces **"peso parcial" G / peso total G = FC/FA**

El *ímpeto parcial* actuará sobre el cuerpo G cuando este se encuentra sobre el plano FA, y *el ímpeto total* cuando G esta libre para moverse en la vertical FC. De este modo, llamando el peso parcial de G como "ímpeto por FA", y el peso total como "ímpeto por FC", a partir del principio de plano inclinado surge la relación donde los impetos serán inversamente proporcionales a las longitudes en que actúan sobre el cuerpo, es decir:

$$\mathbf{I_{FC}/I_{FA} = FA/FC}$$

Extendiendo esta conclusión a un caso general, suponga dos planos FA y FI de diferentes inclinaciones y misma altura:



$$\mathbf{I_{FI} / I_{FA} = FA/FI}$$

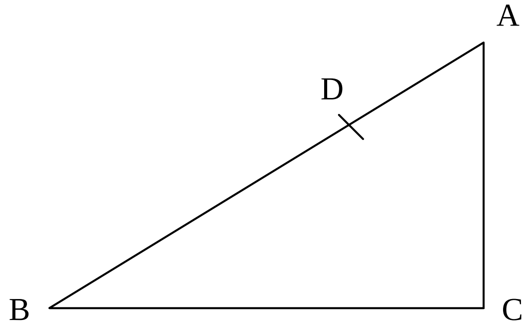
Por lo tanto, para un caso general, el "lema de los ímpetos" establece que para un mismo cuerpo, los ímpetos son inversamente proporcionales a las longitudes de los planos.

Es importante notar que el Lema de los ímpetos determina una proporcionalidad inversa entre las longitudes de los planos y los ímpetos que actúan en cada plano. Dicha proporcionalidad es muy similar a aquella que fue establecida en el teorema *De Motu*, con la diferencia que al contrario de "ímpeto", el teorema *De Motu* se refiere a la "velocidad". Una segunda observación importante. Considerando la relación expresada por Galileo entre "ímpeto" y "velocidad" que vimos en el inicio del escolio, donde ambas poseen una variación de intensidad directamente relacionada con la inclinación del plano, podemos escribir que: $I_{FI} / I_{FA} = V_{FI} / V_{FA}$ (donde "V_{FI}" representa la máxima velocidad adquirida en el descenso del móvil a lo largo del plano FI). Consecuentemente, a partir del Lema de los ímpetos, podemos escribir $V_{FI} / V_{FA} = FA/FI$, tal cual está en el teorema *De Motu*.

Es posible que Galileo tuviera esa relación en mente al demostrar el escolio, pues el sistema físico de análisis y las preguntas aplicadas tanto por el Lema de los ímpetos como por el teorema *De Motu* son similares. Aún así, aunque dicha similitud sea casi explícita, solamente podemos sugerir que dicha relación exista, dado que Galileo no presenta referencias explícitas de que así sea.

Veamos a continuación la demostración del escolio[46]. Una vez establecido el lema de los ímpetos, Galileo procede a demostrar el Postulado, donde los grados de velocidad de un mismo móvil al descender por planos de misma altura, pero con diferentes inclinaciones, son iguales entre sí. La demostración puede ser parafraseada como sigue:

Considere el plano inclinado AB de altura AC.



1) Del lema de los ímpetos: $\mathbf{I_{AC}/I_{AB} = AB/AC}$
2) Sea AD la 3ª proporcional entre AB y AC, entonces: AB/AC = AC/AD
3) Dado que los puntos D y B están en el mismo plano: $\mathbf{I_{AB} = I_{AD}}$
4) Luego, de 1, 2 y 3: $\mathbf{I_{AC}/I_{AD} = AC/AD}$

A partir de (4) Galileo concluye que:

> "Por esa razón, el móvil, en el mismo tiempo que atravesaría el espacio vertical AC, atravesaría también el espacio AD del plano inclinado AB (*puesto que las intensidades de velocidad [momento] están en la misma proporción que los espacios*). También el grado de velocidad en C tendrá, con respecto al grado de velocidad en D, la misma proporción que se da entre AC y AD" [218 – *Discorsi*, subrayado mío]

Este pasaje es oscuro y de difícil interpretación. En forma esquemática Galileo nos afirma que:

5) si $\mathbf{I_{AC}/I_{AD} = AC/AD}$ entonces $\mathbf{T_{AC} = T_{AD}}$

---

[46] En lenguaje moderno, considere "α" el ángulo que el plano AB forma con la horizontal.
1) $\text{sen}\alpha = AC/AB$
2) $V_B = g.\ \text{sen}\alpha.T_{AB}$
3) $V_C = g.\ T_{AC}$
4) De (2) y (3): $V_B/V_C = \text{sen}\alpha.(T_{AB}/T_{AC})$
5) Sustituyendo (1) en (4): $\mathbf{V_B/V_C = (AC/AB).\ (T_{AB}/T_{AC})}$
6) $AC = ½\ g.\ T_{AC}^2$
7) $AB = ½.\ g.\ \text{sen}\alpha.\ T_{AB}^2$
8) De (6) y (7): $AC/AB = (T_{AC}^2/T_{AB}^2).\ (1/\text{sen}\alpha)$
9) Sustituyendo (1) en (8): $AC/AB = (T_{AC}^2/T_{AB}^2).\ AB/AC \Rightarrow \mathbf{AC/AB = T_{AC}/T_{AB}}$.
10) Sustituyendo (9) en (5): $V_B/V_C = (AC/AB).\ (AB/AC) \Rightarrow \mathbf{V_B/V_C = 1} \Rightarrow \mathbf{V_B = V_C}$

6) por lo tanto; $\mathbf{V_C/V_D = AC/AD}$

La justificación presentada por Galileo, **"***puesto que las intensidades de velocidad [momento] están en la misma proporción que los espacio"*, sólo puede referirse al Teorema 2 del movimiento uniforme[47]. Si de hecho utiliza este teorema, entonces tendríamos:

- **si** $\mathbf{I_{AC}/I_{AD} = AC/AD}$ **entonces** $\mathbf{T_{AC} = T_{AD}}$
- por T2 – MU: si $\mathbf{T_{AC} = T_{AD}}$ **entonces** $V_{AC} / V_{AD} = AC/AD$
- Por teorema de la velocidad media: $\mathbf{V_C/V_D = AC/AD}$

En ese caso, la suposición de que los impetos son directamente proporcionales a las velocidades es implícita, pues:

- Dado que $I_{AC}/I_{AD} = AC/AD$
- Dado que $V_C/V_D = AC/AD$
- Se sigue que: $\mathbf{I_{AC}/I_{AD} = V_C/V_D}$

El objetivo de Galileo con la resolución de los pasos 4 y 5 es determinar la proporción entre velocidades y distancias recorridas en el paso 6. La continuación de la demostración es presentada como sigue:

7) por def. MA: $V_B / V_D = T_{AB} / T_{AD}$

8) del corolario de la media proporcional: $T_{AB} / T_{AD} = AB/AC$

9) de 7 y 8: $V_B / V_D = AB/AC$

10) de (2) y (9): $\mathbf{V_B / V_D = AC/AD}$

11) de (6) y (10): $\mathbf{V_C/V_D = V_B / V_D}$

12) Luego: $\mathbf{V_C = V_B}$

En la demostración de este escolio Galileo presenta aspectos que son cruciales para la resolución de la paradoja que discutimos en las secciones anteriores. Iniciaremos nuestro análisis a partir de la relación entre el teorema *De Motu* y el Lema de los Ímpetos.

En el teorema *De Motu* vimos que Galileo establece una relación entre las velocidades adquiridas en el descenso *de un mismo cuerpo* por planos de distintas inclinaciones, y que dichas velocidades fueron consideradas directamente proporcionales a la fuerza de descenso que actúa sobre el cuerpo, de modo que tanto las velocidades como la fuerza de descenso dependen de la inclinación del plano. En efecto, el teorema determinaba que las velocidades (así como las fuerzas de descenso) eran inversamente proporcionales a las longitudes de los planos; y fue justamente dicha proporcionalidad inversa la que sugirió a Galileo que la velocidad a lo largo de la vertical debería ser mayor que las velocidades a lo largo de la inclinada, conclusión que,

[47] En la demostración del Teorema 6 (el Teorema de la cuerdas), Galileo realiza la misma asunción del paso 5, con la diferencia que en ese caso él hace referencia explícita al teorema 2 del movimiento uniforme. Después de demostrar la proporción $I_{AD} / I_{AC} = AD/AC$, Galileo concluye: "Por esa razón, este mismo grave atravesará, en el mismo tiempo, *según la segunda proposición del primer libro*, los espacios de los planos CA y DA […]" [*Discorsi*, p221 subrayado mío]

una vez contrastada con el Postulado, genera una contradicción de resultados que fue tratada por Galileo como una paradoja.

Ahora bien, en la demostración del escolio, la misma proporción inversa surge nuevamente, pero por un camino totalmente distinto. Primeramente Galileo presenta una demostración del principio de plano inclinado por medio de un análisis de la condición de equilibrio que debe ser aplicada para los pesos de dos cuerpos dispuestos sobre planos de distintas inclinaciones. La demostración en sí misma es “física”, es decir, Galileo recurre a la intuición para determinar la relación entre los pesos y longitudes de los planos; no hace uso, en efecto, de ninguna proposición específica de los *Elementos* de Euclides.

El Lema de los Ímpetos surge como una extensión del principio de plano inclinado: primero Galileo establece una relación entre peso total y peso parcial entre dos cuerpos bajo la condición de equilibrio, en seguida, por medio de una equivalencia entre ímpeto y peso (total y parcial), Galileo establece que para un *mismo cuerpo* la razón entre los ímpetos es inversamente proporcional a la razón entre las longitudes de los planos. La semejanza entre el lema de los ímpetos y el teorema *De Motu* se restringe a que ambos determinan que existe una magnitud del movimiento, que depende de la inclinación del plano, y que es inversamente proporcional a las longitudes de cada plano. En otras palabras, tanto el ímpeto como la fuerza de descenso dependen de la inclinación del plano y son, ambos, inversamente proporcionales a las longitudes de cada plano.

Un segundo aspecto importante de la demostración del escolio está en la equivalencia que Galileo establece entre ímpeto y momento. Vimos, en el análisis del folio 172 (de 1603), que Galileo interpretaba el término “momento” como una cosa que varía en intensidad a lo largo del movimiento, y la relación de proporcionalidad establecida entre los momentos de gravedad y los momentos de velocidad sugerían que Galileo utilizaba el supuesto de que “una fuerza constante genera una velocidad constante”. Sin embargo, en el paso (3) de la demostración del escolio, observamos a Galileo realizar un supuesto distinto: dado que las distancias AB y AD están en el mismo plano, se sigue que los ímpetos que actúan en ambas distancias son iguales, $I_{AB} = I_{AD}$.

Y tercero y último aspecto, la proporción implícita en la demostración, donde los ímpetos son directamente proporcionales al grado máximo de velocidad, nos sugiere la relación de proporcionalidad entre una constante (ímpeto) y una variable (grado de velocidad). El hecho de que Galileo no presenta dicha proporción de manera explícita *puede ser* un indicativo de que no estuviera seguro de ella.

Tomando ahora la proporción entre ímpeto y velocidad e interpretando desde un punto de vista moderno, tenemos que:

1) $\dfrac{I_{AC}}{I_{AD}} = \dfrac{V_C}{V_D}$

2) Si interpretamos “ímpeto” por “aceleración” (llamando aceleración de “A”), tenemos:

$$\frac{A_{AC}}{A_{AD}} = \frac{V_C}{V_D}$$

3) dado que "$A_{AC} = g$" y "$A_{AD} = g \operatorname{sen}\alpha$": $\dfrac{g}{(g.\operatorname{sen}\alpha)} = \dfrac{V_C}{V_D}$

4) Llamando de "α" el ángulo entre el plano AB y la horizontal: $\operatorname{sen}\alpha = AC/AB$

5) de (3) y (4): $\mathbf{\dfrac{V_C}{V_D} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}}$

De hecho, a partir del punto de vista moderno, la razón entre aceleraciones efectivamente genera una proporción entre velocidades y longitudes de los planos.

Por otro lado, si interpretamos "ímpeto" como la "fuerza peso" (o la componente de la fuerza peso), tenemos que:

1) $F_{AC}/F_{AD} = V_C/V_D$
2) $F = m.\ A$
3) $m.\ A_{AC}/m.A_{AD} = V_C/V_D$
4) Dado que las masas son iguales: $\mathbf{A_{AC}/A_{AD} = V_C/V_D}$

Por lo tanto, desde un punto de vista moderno, podemos interpretar el ímpeto tanto como "fuerza" como también "aceleración", sin embargo, desde el punto de vista de la física galileana, el ímpeto hace referencia solamente a la fuerza peso, y no a la aceleración.

> "El punto central del argumento de Galileo consiste en hacer depender los espacios recorridos de las tasas de aceleración (momentos de velocidad) [relación que corresponde al Lema de los Ímpetos], de manera que la razón entre aquéllos expresa la razón que existe entre los momentos de descenso. Ahora bien, éstos no son otra cosa que la fuerza resultante que actúa constantemente a lo largo de los planos, ya que equivalen a la fuerza necesaria para producir el equilibrio en cualquiera de los puntos del plano. Así pues, al menos en este caso, Galileo explica mediante consideraciones dinámicas los fundamentos mismos de la descripción cinemática del movimiento naturalmente acelerado"[48].

De hecho, si consideramos el problema de la descripción del movimiento en términos intuitivos, tenemos que las magnitudes más evidentes son el espacio y tiempo; la velocidad surge como una magnitud que da cuenta de las variaciones de espacio y tiempo (por medio del cual se puede cuantificar la intensidad de un movimiento), y la "fuerza", mas bien en el sentido de "fuerza peso", como una "cosa" que hace que los cuerpos se muevan hacia abajo (el centro común al cual todas las cosas atañen). Galileo nos da pistas de que estaba consciente de que el "peso de los cuerpos" pudiera estar relacionado al movimiento acelerado, dichas pistas están en el uso de términos como "fuerza de descenso", "momentos de gravedad", y finalmente "ímpeto". La cuestión enfrentada por Galileo es saber cómo dicha fuerza puede ser constante y al mismo tiempo generar algo variable. En ese contexto Galileo jamás nos da pistas de que la "aceleración" pudiera ser una segunda invariante del movimiento, de modo que,

[48] Carlos Solís, p302

“aceleración”, en Galileo, debe ser interpretado como un término que hace referencia *no* a una magnitud, sino a un “*tipo de movimiento*”, distinto del movimiento uniforme, donde existen cambios de intensidad de las velocidades.

Si de hecho con el Lema de los Ímpetos Galileo quería hacer referencia al teorema *De Motu*, no sabemos; y podemos apenas sugerir que exista dicha relación. Si es así, entonces la demostración del Postulado de Galileo, presentada por medio de un escolio, puede ser la tentativa de resolver la paradoja que describimos en las secciones anteriores. Es posible entonces que, en la tentativa de resolver la paradoja, Galileo se diera cuenta de que existía una magnitud del movimiento que es invariante, pero al contrario de considerar que eran dos las invariantes de tipos distintos, consideró que existía solamente una, y al interpretar su significado físico, relacionó esta invariante con la fuerza peso del cuerpo.

Y para finalizar, acerca de esta crucial suposición, de que el ímpeto es invariante, es importante resaltar tres aspectos: primero, será solamente en este escolio que observamos a Galileo utilizar en una demostración el ímpeto como un invariante, de modo que las 38 proposiciones desarrolladas para el movimiento acelerado, que se seguirán en la 3ª jornada, serán demostradas en términos de espacio, tiempo y velocidad, las mismas magnitudes físicas utilizadas en la demostración de los teoremas del movimiento uniforme; segundo, la conclusión de que el ímpeto es un invariante no es derivada de la definición de movimiento uniformemente acelerado, ni tampoco parece ser derivada del lema de los ímpetos, parecer ser, más bien, una suposición aislada. Y tercero y último, la demostración de este escolio fue insertada en publicaciones póstumas de los *Discorsi*, de modo que los teoremas del movimiento acelerado no incorporan las importantes conclusiones utilizadas en este escolio. Como vimos en la introducción, posiblemente en este escolio Galileo inició una nueva etapa de desarrollo de su física terrestre que no pudo ser concluida.

En los próximos capítulos de la tesis, presentaremos un análisis de cómo le fue posible a Galileo determinar las propiedades de un movimiento que es “acelerado” sin utilizar una magnitud que incorpore la propia aceleración del movimiento.

Capítulo 2:
Relación entre Movimiento Uniforme y el Movimiento Uniformemente Acelerado

I. Introducción

En el capítulo anterior realizamos un análisis de una contradicción de resultados entre el teorema *De Motu* y el Postulado, y sugerimos que esta contradicción se originó de un *problema de interpretación* del significado físico de una magnitud expresada por medio de la teoría de proporciones. Vimos también que Galileo llegó a reconocer, al final de su vida, que existía un invariante para el movimiento uniformemente acelerado, que fue interpretado por Galileo como un tipo de "componente de la fuerza peso" que actúa sobre el movimiento de descenso de un cuerpo en un plano inclinado. La más importante conclusión del capítulo anterior es que Galileo realizó su física terrestre sin recurrir a la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento; en efecto, el objetivo de este capítulo es realizar un estudio de cómo le fue posible a Galileo consolidar su física terrestre sin recurrir a la aceleración como una magnitud del movimiento. Veremos, entonces, que una de las principales bases que sostienen el desarrollo matemático de los teoremas del movimiento acelerado reside en la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado, que es establecido por medio de dos teoremas: el teorema de la velocidad media y la regla de doble distancia. Realizar el análisis de cómo Galileo establece y, principalmente, cómo aplica la relación entre el movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado es una tentativa de acercarnos al problema de la ausencia de la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento acelerado. Como hemos sugerido, el hecho de que el movimiento uniforme sirva de base matemática para el desarrollo del movimiento uniformemente acelerado puede ser una consecuencia, o un efecto, de que la aceleración no fue introducida como una invariable del movimiento acelerado.

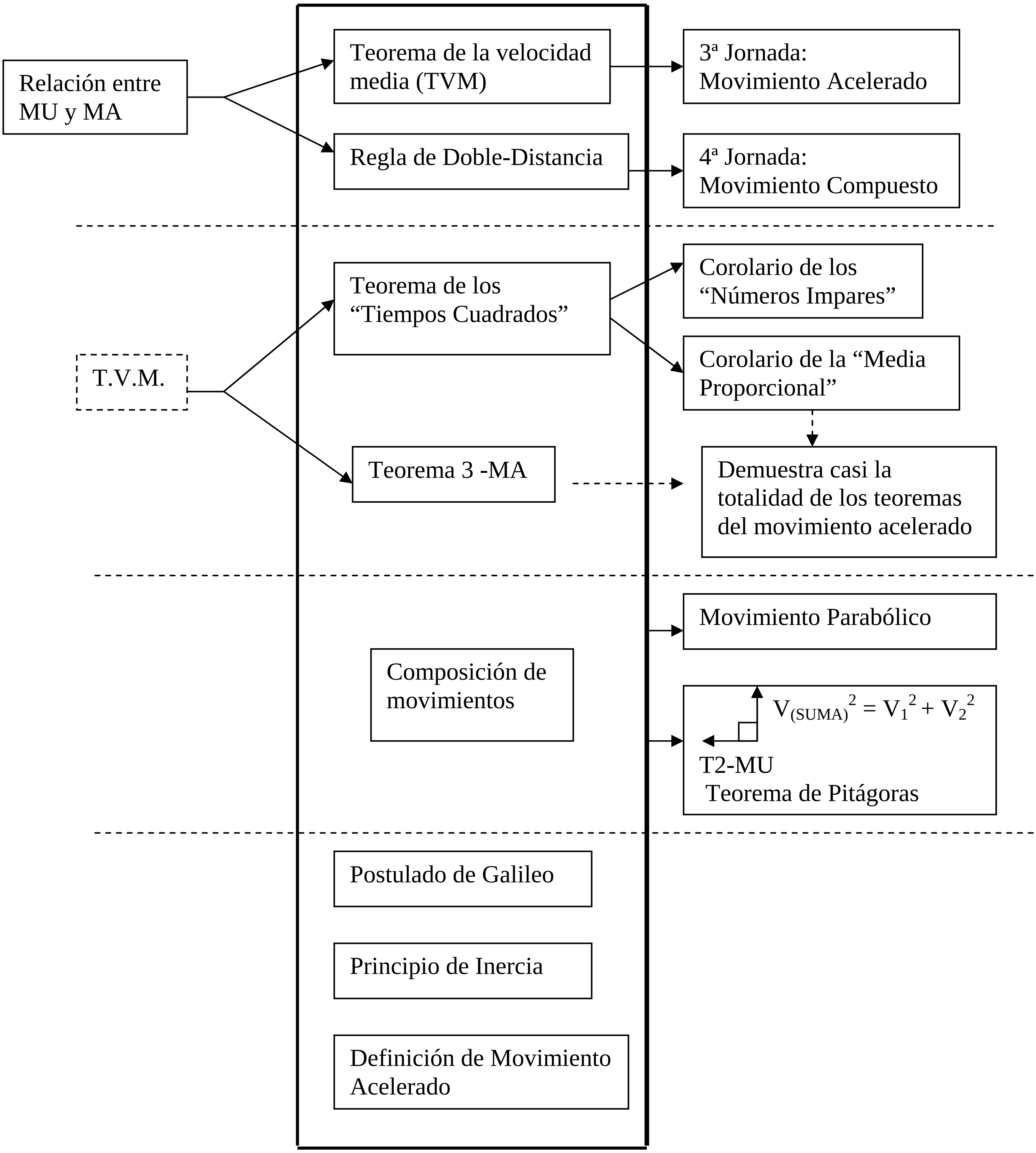
Con la finalidad de reforzar la importancia central de la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado, presentamos, en el cuadro de la página siguiente, los ocho principios y teoremas fundamentales[1] de la física terrestre de Galileo (indicados dentro del cuadro subrayado). Los dos primeros, el Teorema de la Velocidad Media[2] y la Regla de Doble Distancia[3], son teoremas dedicados a establecer una relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado (en el primero la relación es establecida por medio de las velocidades, y en el segundo por medio de las distancias). Por alguna razón (que analizaremos parcialmente[4]), Galileo utilizará el teorema de la velocidad media en la aplicación de teoremas del movimiento acelerado (3ª jornada) mientras la regla de doble distancia es utilizada para el movimiento compuesto (4ª jornada).

[1] Wisan, 1973, p112

[2] Teorema 1 - Proposición 1 del movimiento acelerado

[3] Su demostración es presentada como un Escolio (escolio 2), después de la proposición 23

[4] Para un análisis más completo es necesario considerar cómo las escuelas medievales utilizaban (como también justificaban) *la suposición de que el área es proporcional a la distancia de recorrido*, suposición clave para la demostración del teorema medieval de la velocidad media (como también de la regla de doble distancia de Galileo). Galileo no pudo justificar dicha suposición, y es posible que el teorema de la velocidad media haya sido insertado con la finalidad de recurrir a autoridades medievales.



El Teorema 3 (Proposición 3) tiene una estrecha relación con el Postulado de Galileo (como vimos en el capítulo anterior). El Postulado, en sí mismo, establece que cualquier cuerpo, independiente de su peso, si es abandonado desde una misma altura, desconsiderando efectos de resistencia del aire, llegará al piso al mismo tiempo. Este Postulado es posteriormente extendido al movimiento de cuerpos a lo largo de planos inclinados, donde Galileo concluirá que las velocidades adquiridas por cuerpos que descienden por planos de diferentes inclinaciones, pero de misma altura, serán siempre iguales entre sí. El Teorema 3 consolida esta conclusión por medio de una proporción entre las distancias recorridas y los tiempos de recorrido.

El Teorema de los Tiempos Cuadrados[5] establece que las distancias recorridas por un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado son proporcionales al cuadrado de los tiempos de recorrido. Este teorema posee dos corolarios: el corolario de los números impares y el corolario de la media proporcional. El primero es utilizado una única vez, en la demostración de que la trayectoria de proyectiles tienen la forma geométrica de una parábola (teorema 1 de la cuarta jornada); el segundo corolario, unido al teorema 3 del movimiento acelerado (u uno, u otro o bien ambos), participa en la demostración de casi la totalidad de los teoremas de la 3ª jornada, como también de los primeros tres teoremas de la cuarta jornada (centrales para el movimiento compuesto).

La composición de movimientos es central para la cuarta jornada, pues a partir de ella Galileo establece una descripción del movimiento de cuerpos lanzados oblicuamente. De los teoremas de la 4ª jornada, destacamos el Teorema 1 (Proposición 1), donde Galileo demuestra que la trayectoria de proyectiles posee la forma geométrica de una parábola, y el Teorema 2 (Proposición 2), donde Galileo lanza las primeras bases del que será conocido posteriormente como "composición vectorial de movimientos".

De estos elementos centrales, la definición de movimiento acelerado, el principio de inercia y el teorema de la velocidad media poseen antecedentes medievales. Según Edward Grant tanto en el *Merton College* (de la Universidad de Oxford) como también en otros lugares, las definiciones de movimiento uniforme y de movimiento uniformemente acelerado, como también la importante noción de "velocidad instantánea", ya eran conocidas. La velocidad del movimiento acelerado era tratada como "algo" que varía en intensidad:

> "Durante la primera mitad del siglo XIV en el Colegio Merton de la Universidad de Oxford, un grupo de eruditos ingleses de la jerarquía de Heytesbury, Dumbleton y Swinteshead llegaran a tratar variaciones en velocidad como si fueran variaciones en la intensidad de una cualidad. La intensidad de una velocidad aumentaba con su incremento en un grado no menor al de la intensidad del rojo de una manzana realzada por la gradual maduración". [Grant, 1983, p112]

Y Grant complementa que son "numerosas pruebas aritméticas y geométricas de este vital teorema [teorema de la velocidad media] que fueron propuestas durante los siglos XIV y XV", esto nos sugiere que este teorema estaba ampliamente difundido en la Europa de este período, lo que hace posible que Galileo tuviera conocimiento de él.

El principio de Inercia posee largos antecedentes medievales:

> "Mucho antes que la ciencia física aristotélica llegara al Occidente latino en los siglos XII y XIII, comentaristas griegos y árabes habían producido una literatura muy completa en la que el movimiento local era intensamente debatido". [Grant, 1983, p89]

Los primeros pasos que inician lo que más tarde llamaremos "principio de inercia" comienzan con cuestionamientos en contra de la postura aristotélica de que el medio externo era la causa de la continuidad del movimiento de los cuerpos. A partir de este

[5] Teorema 2 - Proposición 2 del movimiento acelerado

rechazo, Filopón[6] (~siglo VI), sugiere la existencia de un "tipo de fuerza incorpórea impresa" para explicar la continuidad del movimiento de los cuerpos. Los sucesores de Filopón procurarán caracterizar dicha "fuerza impresa" como algo autodisipante y transitorio, como en Abull Barakat[7] (~1164) o Nicolás de Boneto[8] (1343?); o como algo permanente que persistiría en el cuerpo de forma indefinida, como en Avicena[9] (~siglo XI) o Buridan[10] (siglo XIII). Los estudios relacionados a este tema que fueron realizados por estos eruditos (como también otros que no mencionamos aquí, como Santo Tomás de Aquino siglo XIII, Francisco de Marchia siglo XIV, etc), fueron cruciales no solamente para la consolidación del principio de inercia en los siglos XVI y XVII, sino también para la caracterización física del propio movimiento uniforme (de su conservación y existencia real), suposición que será utilizada por Galileo para la composición de movimientos.

La importancia central del movimiento uniforme puede ser observada a partir del cuadro de la página anterior: de los ocho principios y teoremas fundamentales que están presentados, seis están directamente relacionados al movimiento uniforme, y, si consideramos la aplicación del principio de simplicidad, la propia definición de movimiento uniformemente acelerado posee una relación *indirecta* con la definición de movimiento uniforme[11] (haciendo que solamente el Postulado fuera independiente del movimiento uniforme).

Esta participación activa de teoremas del movimiento uniforme en la consolidación y realización de los fundamentos de la física terrestre de Galileo no puede pasar desapercibida, y, en efecto, dedicaremos este capítulo para realizar un extenso análisis de cómo Galileo establece la relación entre ambos movimientos, y, lo que es más importante, cómo Galileo aplica dicha relación.

Iniciaremos con el análisis de un antecedente de la demostración del Teorema 3 del movimiento acelerado, donde Galileo establece la relación temprana entre movimiento uniforme y movimiento acelerado por medio de una "aproximación". Veremos entonces que Galileo abandona este camino para relacionar ambos movimientos y utilizará los dos teoremas ya mencionados, ambos independientes de dicha aproximación.

En seguida iniciaremos un análisis detenido del desarrollo de la demostración de la Regla de Doble Distancia. La Regla de Doble Distancia posee antecedentes tempranos, anteriores a la publicación de *Diálogos*, y es posible, como veremos, que sea un teorema independiente de la ciencia medieval del movimiento. Este teorema posee dos demostraciones que se distinguen enteramente entre sí por medio de los supuestos que cada demostración utiliza. En una de las demostraciones requiere la suposición de que la distancia de recorrido es proporcional al área de un triángulo (para el caso del movimiento acelerado), o del rectángulo (para el movimiento uniforme). Veremos a Galileo presentar una tentativa de justificación de la relación de proporcionalidad entre área y distancia en *Diálogos*, sin éxito, y en los *Discorsi* repetirá el mismo argumento, aunque de forma resumida. La segunda demostración de la Regla de Doble Distancia se

---

[6] Grant, 1983, *Física en la edad media*
[7] *ibid*
[8] *ibid*
[9] *ibid*
[10] *ibid*
[11] El movimiento uniforme es el más simple de todos los movimientos posibles, dado que los cambios de espacio serán siempre simétricos a los cambios de tiempo. De los movimientos cuya velocidad varía en intensidad, el más simple de todos es aquél donde los incrementos de velocidad serán iguales entre sí, suposición que caracteriza la propia definición de movimiento uniformemente acelerado.

deriva de una clase enteramente nueva de problemas (presentadas en el análisis de las proposiciones 17, 21 y 23), y también enteramente independiente de la primera suposición. Sin embargo, para concretizar esta segunda demostración, Galileo es forzado a realizar un nuevo supuesto: dos razones compuestas de magnitudes de longitudes infinitas son iguales entre sí, suposición que, aún en la modernidad, tampoco puede ser justificada. Veremos que Galileo posiblemente estaba conciente de estos dos problemas.

La demostración del Teorema de la Velocidad Media es presentada en una única proposición (en contraste con la Regla de Doble Distancia que se deriva de la demostración de tres proposiciones), que también requiere la suposición de que la distancia es proporcional al área. En principio no existen consideraciones de este teorema en *Diálogos* (ni tampoco hemos encontrado antecedentes tempranos), y según Wisan fue introducido en los *Discorsi* poco tiempo antes de su publicación.

Una vez concluido el estudio de las demostraciones de los dos teoremas utilizados por Galileo para relacionar el movimiento uniforme con el movimiento acelerado, iniciaremos el análisis, ya al final del capítulo 2 y a lo largo del capítulo 3, de cómo el teorema de la velocidad media y la regla de doble distancia son aplicados en la obra de Galileo. Veremos entonces que el Teorema de la Velocidad Media es aplicado para la demostración de dos teoremas que son centrales para el movimiento uniformemente acelerado: el Teorema de los Tiempos Cuadrados y el Teorema 3. Para el análisis del modo con que este último es aplicado, realizaremos un estudio detenido de las demostraciones de estos dos importantes teoremas, y veremos que la aplicación del movimiento uniforme, en este caso, se deriva de una necesidad matemática. La aplicación de la regla de doble distancia será presentada, como hemos dicho en la introducción general en el capítulo 3.

II. Algunas consideraciones acerca del problema de la inserción de nuevas magnitudes en un esquema matemático preexistente.

Haremos en seguida algunas consideraciones de cómo la ausencia de la aceleración puede estar relacionada a un problema de límite de representación matemática de la teoría de proporciones.

En los *Discorsi*, Galileo procura describir las propiedades del movimiento en términos de un lenguaje matemático, y matematizar un movimiento significa *expresarlo en términos de cantidades definidas*:

> "La primera y más natural función de la teoría de proporciones aplicada a la ciencia de la naturaleza, consiste en poner en su *base cuantitativa* alguna relación simple entre las magnitudes que intervienen en la descripción de un fenómeno físico. La situación más elemental es aquella en la cual son presentes dos variables, en particular cuando estas son ligadas entre si por medio de una relación de proporcionalidad. Ese es el caso, por ejemplo, del teorema 1 del movimiento uniforme de la tercera jornada de los *Discorsi*. [E. Giusti, 1993, p37, subrayado mío]

En términos modernos, el modo más simple y más intuitivo de relacionar dos variables es por medio de la expresión[12]: "A = k. B". A partir de este esquema, la

[12] Son muchos y variados los ejemplos de aplicación de dicha relación en la ciencia física: cuanto mayor es el peso de un cuerpo, mayor su volumen (P = k. V), o cuanto mayor la tensión eléctrica mayor será el

elección de las variables que serán relacionadas es orientada según la posibilidad, o acceso, de que dichas variables sean cuantificadas. Evidentemente, sabemos que una cosa es proporcional a otra según la comparación del aumento o disminución de las medidas de cada variable que estamos relacionando.

Para un estudio cuantificado del movimiento, el espacio y tiempo son las variables más indicadas, dado la posibilidad de que ambas magnitudes sean representadas por cantidades conocidas. De hecho, podemos medir una distancia por medio de una comparación directa con otra distancia (que sería lo que hoy llamamos "unidad de medida"), y del mismo modo podemos también medir el tiempo. Dada esa posibilidad, podemos decir que cuanto mayor la distancia mayor debe ser el tiempo necesario para recorrer esta distancia, de modo que es claro que ambas son magnitudes directamente proporcionales, y su relación puede ser escrita directamente por medio de la expresión matemática: "S = k. T".

Una vez que la relación en entre las dos variables es establecido, resta saber cual es la relación entre la constante de proporcionalidad ("k") y el fenómeno en examen. "En muchos casos, la constante de proporcionalidad "k" viene elegida para describir la variedad de los aspectos que el fenómeno incorpora" (Giusti), y será *cuantificada* reescribiendo la relación "A = k. B" en la forma: "k =A/B". De este modo, a partir de la razón entre las dos variables "A" y "B", la constante de proporcionalidad "k" pasa a ser una *nueva magnitud* relacionada al fenómeno que será definida por medio de la razón entre las magnitudes precedentes (este es el caso de la velocidad del movimiento uniforme).

Sin embargo, diferentes tipos de movimiento incorporan diferentes relaciones entre el espacio y el tiempo, y dichas relaciones deben ser establecidas por medio de una *definición*. Por ejemplo, el movimiento uniforme es definido por medio de la relación más simple posible entre el espacio y tiempo: espacios iguales son recorridos en iguales intervalos de tiempo. Ahora, escribiendo (o expresando) la relación entre el espacio y tiempo dada por definición en lenguaje matemático, tenemos una razón entre ambas magnitudes cuyo cociente es una constante, que es llamada "velocidad" (S/T = V). Es importante notar que *la velocidad es una magnitud que no está presente en la definición del movimiento uniforme*, sino que *será derivada da partir de la definición por medio de una relación matemática.*

Siguiendo el mismo razonamiento, el movimiento uniformemente acelerado es definido a partir de la relación más simple existente entre "incremento de velocidad" y "tiempo": iguales incrementos de velocidad en iguales intervalos de tiempo. La razón que expresa dicha relación entre la velocidad y tiempo, que insistimos, dada por definición, genera una nueva magnitud constante, que llamamos "aceleración" (V/T = A). Del mismo modo que la velocidad del movimiento uniforme, la aceleración no es una magnitud que está presente en la definición, sino que es derivada a partir de la definición por medio de una relación matemática.

De este modo, las definiciones de movimientos siempre son aplicadas para establecer una relación entre dos magnitudes, y es a partir de la relación establecida por definición entre estas magnitudes que podremos cuantificar una tercera magnitud (la

---

flujo de electrones en las redes de un circuito (U = k. I). Casos un poco más complejos son aquellos relacionados a proporcionalidad inversa (A. B = k), como es el caso de una transformación del estado de un gas a temperatura constante, cuanto mayor la presión menor debe ser el volumen de este gas (P. V = k); o una vez fija la distancia, cuanto mayor la velocidad menor es el tiempo de recorrido (V. T = k). La forma más general es aquella donde una potencia de la primera es proporcional a una potencia de la segunda magnitud ($A^n = k. B^q$), como es el caso de la tercera ley de Kepler ($T^2 = k. R^3$).

velocidad o la aceleración), diferente de las primeras, y que también expresará una propiedad del movimiento: la *propiedad invariable* que el movimiento definido incorpora.

Ahora bien, las medidas de velocidad y aceleración obtenidas por estas relaciones matemáticas requieren la aplicación de una razón entre dos magnitudes (espacio y tiempo o velocidad y tiempo) que son *de tipos físicos distintos*. De hecho, por medio de la relación "V = S/T" podemos al mismo tiempo *cuantificar y definir* la velocidad del movimiento uniforme, esto es, podemos decir "qué es velocidad" a partir de su relación (insistimos, dado por la matemática) entre el espacio y el tiempo. Sin embargo, el sistema matemático utilizado por Galileo es la Teoría de Proporciones y, en la *Teoría de Proporciones una razón entre dos magnitudes solamente puede ser escrita si ambas son magnitudes de un mismo tipo*, por ejemplo, que A y B sean rectas, o que A y B representen áreas. Esa es una condición impuesta tanto por la definición 3 del Libro V de Euclides, que enuncia: "una razón es un tipo de relación con respecto del tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo"[13], como también por la definición IV del Libro V, que enuncia:"Magnitudes son para formar una razón una a otra cuando son capaces, si multiplicadas, de exceder una a otra"[14] (es decir, podemos escribir "A/B" si existen "k" y "q" tales que: k. A > B y q. B > A). Euclides restringe estas definiciones para magnitudes geométricas puras, sin vínculos con la naturaleza. Por otro lado, Galileo extenderá esta noción de "homogeneidad geométrica" para establecer razones entre magnitudes físicas, de modo que todas las razones entre magnitudes físicas, establecidas por medio de la teoría de proporciones y aplicadas a la ciencia del movimiento, serán siempre *físicamente homogéneas.* En efecto, todas las razones que serán establecidas por la física terrestre de Galileo serán siempre escritas como "V_1/V_2", "S_1/S_2" o "T_1/T_2". Galileo jamás podrá escribir (ni lo hace) que la velocidad es la razón entre el espacio y el tiempo. Esta elección de Galileo hace que las relaciones entre magnitudes físicas (o leyes del movimiento) puedan ser escritas (o determinadas) por medio de la Teoría de proporciones. Evidentemente, como vimos, las definiciones 3 y 4 del libro V de Euclides son aplicadas a la comparación entre "tamaño" de las magnitudes que forman la razón, y no tiene sentido decir que 4 metros sea mayor o menor que 3 segundos.

Impedido de realizar razones entre magnitudes no homogéneas, Galileo enfrentará una seria dificultad: *¿cómo definir la velocidad?*

> "En la teoría de proporciones este camino no es posible, dado que esta teoría sólo permite la razón entre magnitudes homogéneas […]. En efecto, la introducción de nuevas magnitudes como la velocidad o el peso específico debe ser independiente [de la definición], mediante una definición <<metafísica>> y una serie de axiomas que relacionen [la constante de proporcionalidad] con las magnitudes precedentes y determinen su comportamiento en relación a este". [E. Giusti, 1993, p39]"

A partir de la Teoría de Proporciones la velocidad es una magnitud que no puede ser derivada directamente de la definición de movimiento uniforme. Galileo entonces deberá suponer, *sin poder justificar*, que *existe una cantidad, finita* (la velocidad), capaz de dar cuenta de la relación entre el espacio y tiempo que fue determinada por la definición de movimiento uniforme. Es importante resaltar que para que la velocidad se

---

[13] T. L. Heat, 1956, p14
[14] *ibid*

vuelva una magnitud[15] del movimiento, es necesario primero suponer que existe una cantidad finita que la represente. Por el camino del cociente (es decir, la posibilidad de definir la velocidad por medio de una razón entre magnitudes físicas no homogéneas), dicha cantidad es determinada directamente por la razón entre el espacio y el tiempo, es decir, primero la cantidad es determinada y después la llamaremos velocidad. Por el camino de la teoría de proporciones Galileo primero debe suponer que dicha cantidad exista sin que haya una relación matemática que sostenga dicho supuesto, se trata por lo tanto de de una elección *a priori* y metafísica. Evidentemente, la realización del supuesto de que existe una cantidad sin un apoyo matemático incorpora elementos arbitrarios que acaban siendo superados por medio de otros factores:

> "No siendo practicable el camino del cociente, tal elección se basará en la relevancia del nuevo concepto con respecto al objeto que se propone. En la mayor parte de los casos la elección es natural y casi obligada (como es el caso de la velocidad), otras veces son posibles opiniones diversas, y la preferencia de una u otra es determinada por varios factores, entre ellos, y de manera importante, la tradición." [Giusti, 1993, p40]

Una vez realizado el supuesto de que existe una cantidad finita capaz de representar la intensidad del movimiento, el paso siguiente consiste en determinar qué tipo de relación deberá existir entre la nueva magnitud y las magnitudes precedentes, o, en otras palabras, establecer cómo la nueva magnitud (la velocidad) podrá ser cuantificada a partir del espacio y tiempo. Evidentemente, dado que la elección de la cantidad que representa la velocidad es independiente de la definición, dicha relación debe ser establecida por medio de la aplicación de axiomas.

> "Resuelto el problema físico, resta naturalmente [el problema de] fijar la relación entre la nueva magnitud y las [magnitudes] precedentes. También cuando la elección es aquella natural, correspondiente, es decir, en términos algebraicos, a tomar como magnitud auxiliar el cociente A/B, [por la teoría de proporciones] la relación entre esta y las magnitudes iniciales no son una consecuencia inmediata de la definición, que no es dada en términos algebraicos, sino metafísicos, y deben ser deducidos de los axiomas, explícitos o sobreentendidos, que acompañan la definición. Es a partir de ésta que se deriva, según los cánones de la teoría de proporciones, la relación buscada". [Giusti, 1993, p40]

Para hacer más claro esto, tomemos como ejemplo, el procedimiento realizado por Galileo para insertar la velocidad como magnitud cuantificada para el movimiento uniforme. La definición de movimiento uniforme es presentada por Galileo como sigue:

> "Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que sean estos, son iguales entre sí". [Discorsi – p191]

Por medio de la definición, Galileo establece cuál debe ser la relación entre espacio y tiempo para que el movimiento sea "uniforme". Los axiomas del movimiento uniforme pueden ser escritos de manera esquemática como sigue:

Axioma 1.

(Para uno y mismo movimiento uniforme)

$$V_1 = V_2, \text{ si } T_1 > T_2 \Rightarrow S_1 > S_2$$

[15] "Magnitud en el sentido de una cantidad finita, continua y extendida en una, dos o tres dimensiones" - Knorr, p15

Axioma 2.
(Para uno y mismo movimiento uniforme)
$V_1 = V_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow T_1 > T_2$

Axioma 3.
(Para dos movimentos uniformes)
$T_1 = T_2$, si $V_1 > V_2 \Rightarrow S_1 > S_2$

Axioma 4.
(Para dos movimentos uniformes)
$T_1 = T_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow V_1 > V_2$

Podemos interpretar la formación de estos axiomas en términos modernos por medio de la relación "A= k. B". Si tomamos "A" y "B" como espacio ("S") y tiempo ("T"), respectivamente, tenemos "S = k. T", donde "k" es la constante que fue elegida como "velocidad" ("una elección, repetimos, que se debe hacer *a priori*, y guiada por la intuición física más que por la evidencia algébrica" – Giusti, pp41). Haciendo variar los valores de espacio y tiempo tenemos las relaciones: "$S_1 = V. T_1$" y "$S_2 = V. T_2$", donde "V", que representa la velocidad, debe ser igual en ambos casos ("un único y mismo movimiento uniforme"). Dado que "V" es constante, si $T_1 > T_2$ se sigue necesariamente que $S_1 > S_2$, y del mismo modo, si $S_1 > S_2$ se sigue que $T_1 > T_2$. Estas dos últimas relaciones de desigualdad corresponden precisamente a los axiomas 1 y 2 del movimiento uniforme. Por medio de ellas Galileo establece una primera relación entre la "velocidad" y las magnitudes presentes en la definición. Por medio de estos dos axiomas es posible establecer una única relación: si las velocidades de ambos movimientos son iguales, entonces los espacios son proporcionales a los tiempos. Para obtener una variedad más amplia de teoremas, el camino consiste en cambiar la magnitud que ocupa el puesto de la constante de proporcionalidad. Haciendo entonces que la constante sea el tiempo, y tomando la velocidad como variable, surgirán los dos últimos axiomas. Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, tomando el tiempo como constante tenemos: "$S_1 = T. V_1$" y "$S_2 = T. V_2$", y del mismo modo, si $S_1 > S_2$ se sigue que $V_1 > V_2$, y viceversa. No sabemos si Galileo recurrió a este camino para formular los axiomas del movimiento uniforme; solamente podemos sugerir que este esquema reproduce, por medio de representaciones modernas, un posible modo de razonamiento que podría haber sido utilizado por Galileo; de hecho, el propio formato de la expresión "A = k. B" es moderno.

Los axiomas del movimiento uniforme poseen, por lo tanto, la función de introducir una nueva magnitud del movimiento, la velocidad, y también de establecer cómo esta última se relaciona con el espacio y tiempo[16].
Este mismo mecanismo, -utilizado para relacionar la velocidad del movimiento uniforme con las variaciones de espacio y tiempo-, no es posible aplicarlo para las *velocidades del movimiento acelerado*, y la razón es simple: *la velocidad del movimiento uniforme*, por ser constante a lo largo de un mismo movimiento (lo que equivale a decir que posee una duración en el tiempo), *presenta efectos que son perceptibles*, es decir, para una misma velocidad existirán distancias y tiempos de recorridos que pueden ser medidos (es decir, ser representados por segmentos de recta

[16] La aplicación de los axiomas para la consolidación de los 6 teoremas del movimiento uniforme están presentadas en el apéndice 2.

con longitudes finitas), y que, de este modo, pueden ser comparados entre sí. Sin embargo, dado que los grados de velocidad del movimiento acelerado no poseen una duración en el tiempo, sólo presentan *efectos instantáneos*, es decir, a cada grado de velocidad corresponderá *un espacio y tiempo que no pueden ser representados por medio de una extensión* (pues no se trata de una distancia y un intervalo de tiempo, sino de una posición del espacio y un instante del tiempo). Dado que, en este caso, el espacio y el tiempo son *puntuales*, no pueden ser comparados entre sí. De este modo, aunque fijemos la igualdad entre dos grados de velocidad de dos movimientos acelerados, no será posible establecer una relación de igualdad o desigualdad entre los espacios y los tiempos (del mismo modo que un punto no puede ser mayor o menor que otro punto). De hecho, la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento acelerado es producida por un conjunto infinito de diferentes grados de velocidades.

Dado que el camino seguido para la determinación de la velocidad del movimiento uniforme no puede ser extendido para las velocidades del movimiento acelerado, la cuestión crucial reside en saber cómo los grados de velocidad serán definidos para el movimiento uniformemente acelerado. Galileo primero establecerá la diferencia entre ambas velocidades, para que en seguida pueda determinar una comparación entre ellas.

La velocidad del movimiento uniforme posee siempre la misma intensidad a lo largo del movimiento, y por eso se trata de una magnitud que posee una duración en el tiempo. Por otro lado, los grados de velocidad del movimiento acelerado varían a cada instante del movimiento, de modo que no posee una duración en el tiempo, y como hemos dicho, no produce efectos durables. La importante noción de grados de velocidad surgirá como una respuesta a una objeción de Sagredo:

> Sagredo: "Cuando imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, y comienza a moverse acelerándose según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante del movimiento […] en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, [el grave] estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos muestran que un grave, *cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable*" [199]
>
> Salviati: "Ocurriría esto […] si el móvil permaneciera durante cierto intervalo de tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad. " [200-1]

Resuelto el problema de saber qué son los grados de velocidad que caracterizarán el movimiento acelerado, el segundo problema consiste en saber cómo podemos cuantificarlos. Para medir los grados de velocidad Galileo utiliza el efecto del choque que un objeto que cae produce contra un obstáculo que cede en el impacto[17].

[17] "De ahí el término "*momento della velocità*" que Galileo utiliza para indicarla. Si el mismo Galileo traduce *momento* como *eficacia*, tenemos claro el cuadro conceptual que gobierna la velocidad instantánea. Un movimiento se compone con cierta velocidad, pero al momento del choque es eficaz sólo aquel [grado de velocidad] que el cuerpo posee en aquél instante[del choque] […]" (E. Giusti, 1993, p42)

> "En la falta de una definición algebraica, la relación entre las nuevas magnitudes son dadas a través de la relación entre otras magnitudes [que pueden ser] notadas, que en consecuencia vienen asumidas a priori como proporcionales a la primera" [Giusti, p42]

En efecto, Galileo asume que el efecto del choque es proporcional a la velocidad adquirida por el cuerpo en el momento del impacto. Evidentemente, la intensidad de un choque tampoco es cuantificable, de modo que este experimento sirve apenas para consolidar la idea de que las intensidades de la velocidad cambian a lo largo del movimiento de caída de un cuerpo a cada instante del movimiento[18]. La respuesta al problema será relacionar los grados de velocidad con otra magnitud -que no sea el efecto del choque-, que pueda ser cuantificada; y esa "otra magnitud" será justamente la velocidad del movimiento uniforme. De este modo, los grados de velocidad serán, al mismo tiempo, cuantificados e insertados dentro del esquema matemático de la teoría de proporciones, por medio de su relación con la velocidad del movimiento uniforme. De hecho, no es por una orientación estética que la primera proposición demostrada por Galileo para el movimiento acelerado sea justamente el teorema de la velocidad media, que establece, como veremos, la relación entre las velocidades del movimiento acelerado con la velocidad del movimiento uniforme. Este aspecto, de la colocación del teorema de la velocidad media, es crucial para comprender en qué bases se sostiene la estructura general de la matematización del movimiento realizada por Galileo.

La idea consiste en buscar un invariante capaz de ofrecer una posibilidad de medir los grados de velocidad del movimiento acelerado, y la velocidad del movimiento uniforme es un invariante. En ningún momento de la 3ª y 4ª jornada de los *Discorsi* Galileo presentará axiomas que permitan consolidar la aceleración como invariante del movimiento uniformemente acelerado, de modo que todo el movimiento acelerado será descrito por Galileo en términos de tres magnitudes que son variables: espacio, tiempo y grados de velocidad. A partir de ahí es que podemos observar la importancia central que la relación entre movimiento uniforme y movimiento acelerado posee para la física terrestre de Galileo: será en el movimiento uniforme donde Galileo encontrará la invariable que permitirá cuantificar las magnitudes relacionadas al movimiento acelerado. De este modo, la importancia del movimiento uniforme transciende el alcance físico y se extiende hacia una necesidad matemática.

III. Un antecedente de la relación entre movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado

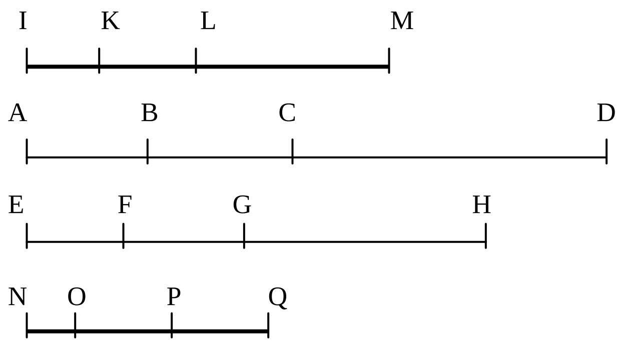
Aproximadamente en 1605 encontramos a Galileo trabajando en una prueba para el teorema 3, que está presente en el folio 138 seguido del folio 179. En realidad, esta prueba es un intento de demostrar el teorema 3 a partir del postulado de Galileo y del teorema 1 del movimiento uniforme. El objetivo de presentar esta prueba es ilustrar una tentativa de Galileo para demostrar un teorema del movimiento acelerado, a partir del movimiento uniforme, sin recurrir a un teorema que intermedie ambos movimientos. Un segundo aspecto importante de este análisis que nos gustaría resaltar, es la presencia del concepto de continuidad aplicado en la demostración del teorema para determinar una

[18] De hecho, si dejamos un cuerpo caer sobre arena blanda desde una altura de dos metros, el choque del cuerpo con la arena producirá un cráter de un determinado diámetro. Si abandonamos el mismo cuerpo desde una altura de cuatro metros, el cráter producido por el choque tendrá un diámetro mayor que el primero. Considerando que el efecto del choque es proporcional a los grados de velocidad, cuanto mayor es la intensidad del choque, mayor debe ser el grado de velocidad en el momento del choque.

correspondencia biunívoca entre los infinitos grados de velocidad adquiridos en el descenso por la vertical y por el plano inclinado, y así veremos surgir una inconsistencia en dicha correspondencia. En seguida analizaremos ambos fragmentos.

Folio 138v

> "Si existe un número cualquiera de espacios, y otros de multitudes combinadas, los cuales cuando son tomados en par tienen la misma proporción, y si dos móviles se mueven a través de estos [espacios] de modo que cualquier par de espacios correspondientes las [velocidades de los] movimientos son [iguales y] constantes, entonces como todos los espacios del movimiento antecedente son a todos los espacios del movimiento consecuente, así será el tiempo a todo el movimiento en el primero a el tiempo del movimiento de todo el espacio del segundo. Desde que [las velocidades del] movimiento a través de los espacios AB y EF son [iguales y] constantes, entonces por el precedente, como el espacio AB es a EF, así será el tiempo IK a NO […]". [folio 138] [19]



A partir de la proporción establecida AB/EF = IK/NO, Galileo complementa que "del mismo modo", BC/FG = KL/OP y CD/GH = LM/PQ.

La condición de que las velocidades sean iguales determina la posibilidad de aplicar el teorema 1 del movimiento uniforme al problema. La característica principal de este fragmento es la subdivisión de dos espacios en espacios menores, y de este modo, el fragmento muestra que la proporción entre las subdivisiones de los espacios y las subdivisiones de los tiempos es conservada. A partir de ahí el fragmento muestra que la proporción entre las subdivisiones determina la proporcionalidad entre el total. Podemos parafrasear la continuación del fragmento como sigue:

1) dado que AB/EF = BC/FG = CD/GH, entonces IK/NO = KL/OP = LM/PQ
2) y dado que: AB/EF = BC/FG = CD/GH, entonces AB/EF = AD/EH
3) del mismo modo: IK/NO = IM/NQ
4) pero AB/EF = IK/NO
5) por lo tanto, de 2, 3 y 4: AD/EH = IM/NQ

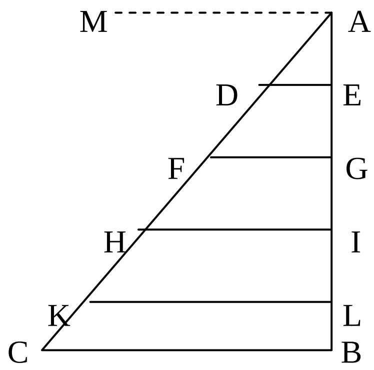
Como sugiere Drake, "la importancia de ese teorema reside en la tentativa explícita de Galileo de determinar una proporcionalidad en términos de una correspondencia uno-a-uno" [Drake, 1978, pp112]. Esta misma correspondencia utilizada en el folio 138 entre espacios y tiempos de dos movimientos uniformes será aplicada para la demostración del teorema 3 en el folio 179. La comparación ocurre entre dos movimientos acelerados, uno por la vertical y el otro sobre un plano inclinado. En este

---

[19] Traducción al inglés de S. Drake, 1978, p111

segundo fragmento la demostración se inicia con la construcción de un diagrama ilustrado en la siguiente figura:

Folio 179



"Desde que es asumido que en descenso natural los momentos de velocidad crecen continuamente según la proporción de partida en la vertical desde la horizontal en la cual se inicia el movimiento, está claro que produciendo la línea horizontal AM, paralela a BC, y tomando en la vertical cualquier numero de puntos E, G, I y L, a través de la cual son trazadas paralelas a la horizontal ED, GF, IH y LK, entonces el momento o grado de velocidad de un móvil en el punto E será el mismo con el grado de velocidad del movimiento a través de AC en el punto D, dado que los puntos E y D tienen la misma distancia vertical desde la horizontal AM […]" [folio 179][20]

Galileo extiende la igualdad de las velocidades para los demás puntos de la línea vertical, de modo que: $V_G = V_F$, $V_I = V_H$, $V_L = V_K$ y $V_C = V_B$. Naturalmente, dicha igualdad proviene del Postulado de Galileo, en los puntos equidistantes a la horizontal las velocidades son iguales entre sí. Es importante notar que la suposición donde las velocidades aumentan en proporción a la distancia vertical de recorrido proviene de la aplicación de la ley incorrecta de la caída de los cuerpos.

En seguida Galileo aplica el concepto de continuidad y establece la correspondencia entre todos los grados de velocidades adquiridos en el descenso por AB y AC. Dado que la velocidad aumenta continuamente según la proporción de la distancia vertical recorrida, entonces:

"se sigue que en el movimiento por AB existen tantos grados de velocidad como existen puntos en la línea AB […] los cuales corresponden a tantos [puntos] que existen en la línea AC, y esa correspondencia es determinada por las líneas paralelas en los cuales los mismos grados de velocidad existen. […]"[21]

Es importante notar que la suposición de la existencia de infinitos grados de velocidades que se corresponden en los dos movimientos se deriva de la infinitud de puntos existentes en ambas rectas que representan los caminos recorridos. Ahora bien, vimos que en el folio 138 Galileo establece una relación uno-a-uno entre espacios y tiempos de recorrido, pero dicha correspondencia es establecida entre segmentos de recta, y no entre puntos. Para que Galileo pueda derivar el teorema 3 a partir de la correspondencia propuesta en el folio 138, es necesario que en el folio 179 la

[20] Traducción al inglés de Drake, 1978, p113
[21] Drake, 1978, p113

correspondencia entre las distancias de recorrido por la vertical y plano inclinado sea también entre segmentos de recta, y no entre puntos. En efecto, a continuación vemos a Galileo cambiar el tipo de correspondencia que fue establecida, posiblemente para permitir la aplicación del folio 138,

> “Por lo tanto esto es como si en la línea AB existieran innumerables espacios diminutos[22], así para hablar, y otros [en AC] iguales en un cierto censo a aquella multitud [adicionado después: tomados en pares] según la misma regla de correspondencia y marcados a lo largo de AC por innumerables líneas paralelas extendidas desde puntos de la línea AB para la línea AC, y esos espacios diminutos existen en pares singulares correspondiendo en los mismos grados de velocidad”[23]

Es decir, Galileo sugiere que existe un número infinito de pequeños espacios a lo largo de AB y AC, y que por medio de un número infinito de paralelas (que comunican los diminutos espacios de ambos trayectos), dichos espacios están en correspondencia uno-a-uno. El folio 138 garantiza que la división infinita del espacio y tiempo no impide que la proporción entre ellos permanezca verdadera, y vimos que dicha condición se deriva de la condición de que las velocidades sean iguales (condición derivada para la aplicación del teorema 1 del movimiento uniforme). Dado que la correspondencia entre las distancias fue establecida (tal cual supone el folio 138) y dado que las velocidades son iguales, aunque uno-a-uno, Galileo concluye que los tiempos de recorrido están en la misma proporción que las distancias de ambos movimientos.

Es importante notar que la diferencia entre las demostraciones de los folios 138 y 179 es precisamente la misma diferencia entre las nociones de velocidades aplicadas al movimiento uniforme y acelerado, respectivamente. En el primero, la igualdad de velocidades es establecida en dos aspectos, entre los dos movimientos y entre cada punto que determina la distancia de recorrido, dado que la velocidad es constante. Pero para el folio 179, la igualdad establecida se restringe a cada par de puntos correspondientes, de modo que para la distancia EG, por ejemplo, el grado de velocidad en el punto E será menor que el grado de velocidad en el punto G, puesto que las velocidades aumentan según la proporción de la distancia vertical recorrida. Ahora bien, Galileo sugiere que la misma distancia EG es compuesta de infinitos “espacios diminutos”. Naturalmente, dichos espacios determinan una distancia, aunque sean diminutos existirán infinitos grados de velocidad, pero, dado que la distancia es más pequeña y dado que la velocidad aumenta con la distancia, la diferencia entre la velocidad final y inicial de una distancia “diminuta” ciertamente será más pequeña que la diferencia verificada en la distancia EG. Cuanto más pequeño es el espacio recorrido, más pequeño también será la diferencia entre los grados de velocidad final e inicial. Si es este el razonamiento utilizado por Galileo, podemos, por aproximación, sugerir que para distancias infinitamente pequeñas la diferencia entre los grados de velocidad final e inicial será tan pequeña que prácticamente será constante. De este modo, los grados de velocidad aumentarían discretamente y no continuamente. Si es así, por aproximación, la condición del folio 138 es perfectamente ajustable a las condiciones aplicadas al movimiento acelerado. Esta interpretación parece concordar con lo que Drake sugiere:

> “Era apenas hablando de intervalos finitos, de todos los modos pequeños, que Galileo era capaz de utilizar el folio 138 para llegar a la conclusión concerniente a lo largo de la vertical

[22] “spacelets”
[23] Drake, 1978, p113

> y plano inclinado. La validez del folio 179 está, por lo tanto, restringida a cambios-cuantitativos de velocidades a lo largo de líneas, innumerables como Galileo coloca, pero nunca contables ni matemáticamente continuas”[24]

De cualquier forma, en el fragmento del folio 179 no hay rastros de la aplicación de algún teorema que establezca una relación entre las velocidades del movimiento uniforme y movimiento acelerado, y la relación entre ambos movimientos es establecida sólo por medio de una aproximación. Es cierto que la preocupación de Galileo de relacionar ambos movimientos está presente ya en períodos tempranos de su trabajo, como vimos en los folios 138 y 179. Otro ejemplo de la relación temprana entre ambos movimientos está en el folio 177 (fragmento “*dubito*”); en el capítulo anterior vimos que este fragmento indica una paradoja derivada de la validez del teorema 1 del movimiento uniforme para el movimiento acelerado. Es importante notar que ni en el folio 177 ni en el folio 179 existe cualquier señal del teorema medieval de la velocidad media, por el contrario, en un fragmento de este mismo período (folio 163), veremos a Galileo buscar otro teorema llamado “regla de doble-distancia”, que es independiente del teorema de la velocidad media, que da cuenta de la relación entre ambos movimientos. Es posible entonces que Galileo buscase una relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado que fuera independiente de suposiciones medievales. De hecho, como afirma Wisan,

> “No existen rastros del teorema 1 del movimiento acelerado [teorema de la velocidad media] en Diálogos y cambios de último minuto sugieren que él fue revisado y adicionado en el tratado inmediatamente antes de la publicación [de los Discorsi]. Puede ser, entonces, que alrededor de 1630 Galileo tenía una fundamentación para su tratado del movimiento acelerado basado en la regla de doble-distancia que dependía del concepto de continuidad desde el reposo como principio básico.”[25]

En seguida presentaremos un extenso análisis de la regla de doble-distancia y veremos que en un formato final, este teorema tiene dos demostraciones, una basada en el principio de continuidad donde requiere la suposición medieval de que la distancia es proporcional al área, y otra basada en una clase de problemas aplicados al movimiento acelerado totalmente nueva e independiente de la primera. Iniciaremos nuestro análisis con la presentación del folio 163.

IV. Regla de Doble-Distancia

III.1. Un antecedente de la regla de doble-distancia

Posiblemente una de las primeras tentativas de derivar la relación entre movimiento uniforme y acelerado es presentada en un fragmento del folio 163, que según Drake pertenece al año de 1603 aproximadamente. En este fragmento observamos a Galileo asumir la ley equivocada de la caída de los cuerpos[26], es decir, considera que los incrementos de velocidad de un cuerpo en caída libre son proporcionales a las distancias de recorrido. La relación entre los dos movimientos es determinada por medio de una

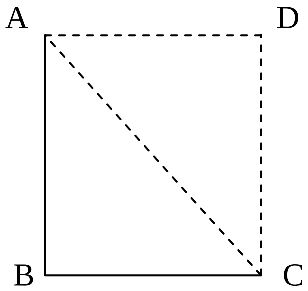
---

[24] Drake, 1978, p114
[25] Wisan, 1973, p277
[26] Según Wisan, existen evidencias de que Galileo utilizaba la ley equivocada de la caída de los cuerpos hasta algún tiempo después de 1610 (Wisan, 1973, p207)

regla denominada "regla de doble-distancia"; en este fragmento observamos a esta última ser derivada de la regla de doble-velocidad.

En la regla de doble velocidad Galileo considera un cuerpo que cae en movimiento acelerado vertical y recorre una cierta distancia, AB. En seguida el mismo cuerpo recorre la *misma distancia* en movimiento uniforme. El objetivo del teorema es encontrar qué relación puede existir entre los dos movimientos. El teorema es enunciado en el fragmento como sigue:

> "Sea un cuerpo que se mueve con movimiento naturalmente acelerado desde A hasta B; yo digo que si las velocidades *en todos los puntos* son las mismas como la que encontramos en B, el espacio AB sería recorrido con el *doble de rapidez*, desde que *todas las velocidades* en puntos singulares de la línea AB tendrían para las velocidades, los cuales son iguales a la velocidad BC, en la misma razón como el triángulo ABC [posee] para el rectángulo ABCD" [folio 163][27]



En otras palabras, en la figura del fragmento, tenemos el triángulo ABC representando el movimiento acelerado y el rectángulo ABCD representando el movimiento uniforme, dado que ambas figuras poseen un lado común en AB, y dado que AB representa la distancia recorrida, entonces ambos movimientos recorren la misma distancia.

Aparentemente Galileo utiliza otro camino para establecer esta conclusión, no recurre a la longitud del segmento de recta, sino al número de puntos de dicho segmento (*"las velocidades en todos los puntos"*). Considerando que el cuerpo recorriera la distancia AB con movimiento acelerado, entonces los grados de velocidad aumentarían sucesivamente de A hasta B, y serían *tan numerosos como los puntos existentes entre A y B*. Del mismo modo, si este mismo cuerpo recorriera la misma distancia AB con movimiento uniforme, con velocidad igual a la máxima velocidad adquirida por el movimiento acelerado, es decir, BC, dichas velocidades serían en número iguales al de los puntos del mismo segmento AB. Por lo tanto, el número de velocidades del movimiento acelerado es igual al número de velocidades del movimiento uniforme. Por lo tanto, es a partir de la igualdad del número de puntos del segmento que Galileo establece la igualdad de las distancias de recorrido.

Una vez que la igualdad de las distancias recorridas por ambos movimientos fue establecida, dado que todas las velocidades del movimiento uniforme están para todas las velocidades del movimiento acelerado en la misma razón que el rectángulo ABCD está para el triángulo ABC, Galileo concluye que el movimiento uniforme tendrá el "*doble de rapidez*" que el movimiento acelerado. Si interpretamos el término "rapidez" como "velocidad", la regla se vuelve más clara. En ese caso, dado que la velocidad total es proporcional al área, y dado que la misma velocidad total es todavía una velocidad, el

[27] Drake, 1978, p82 – subrayado mío

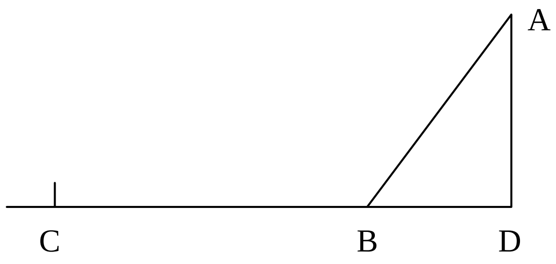
movimiento uniforme tendrá el doble de velocidad que el movimiento acelerado, evidentemente el “doble” surge a partir de la relación entre áreas.

El problema de relacionar el área con la distancia recorrida parece tener su origen en los límites de aplicación de la propia teoría de proporciones al análisis de las propiedades del movimiento acelerado[28]:

> “Descartes, operando en un universo algebraico, multiplica cada velocidad por un tempúsculo inaccesible, para deducir en fin, sumando todos los espacios así obtenidos, el espacio recorrido en el tiempo asignado. En la teoría de proporciones no es posible multiplicar velocidad y tiempo: sólo la razón, no la magnitud, y mucho menos multiplicar magnitudes no homogéneas. Galileo no consigue sumar los espacios infinitesimales recorridos del móvil ni los instantes singulares, pero sí consigue sumar la velocidad instantánea, los grados de velocidad, componentes elementales de una velocidad total de la cual se deduce la relación entre el espacio y el tiempo. En ambos casos juega la misma idea matemática, que consiste en reducir el cálculo de la suma al confronto del área del triángulo que representa la velocidad instantánea creciente […]. Pero mientras para los algebristas el área del triángulo corresponde inmediatamente al espacio recorrido, para Galileo éste se obtiene sumando todas las velocidades, ésta se vuelve de tipo macroscópico [velocidad total], que necesitará de nuevo combinar con el tiempo, según la relación usual, para obtener un resultado circular”[29]

En la continuación del folio 163 se presenta la demostración de la regla de doble-distancia a partir de un nuevo diagrama. En esta regla Galileo describe un cuerpo que desciende por el plano inclinado AB con movimiento acelerado adquiriendo una cierta velocidad máxima al alcanzar el punto B. Al llegar a B el cuerpo tiene su movimiento transferido para la horizontal CD, de modo que la velocidad máxima adquirida por el cuerpo en el movimiento acelerado es igual a la velocidad con que el cuerpo se moverá por la horizontal CD (del mismo modo que el diagrama de la regla de doble-velocidad establece). A partir de esta descripción Galileo concluye que si la distancia recorrida en movimiento uniforme es doble de la distancia recorrida por movimiento acelerado, es decir, si BC = 2AB, entonces los tiempos de recorrido serán iguales.

> “Se sigue desde esto [regla de doble-velocidad] que si existe un plano BA elevado de la horizontal CD tal que BC sea el doble de BA, un móvil que se mueve desde A hasta B y entonces desde B hasta C recorrerá estas dos distancias en iguales [intervalos] de tiempo […]”[30]



La regla de doble-distancia es derivada a partir de la regla de doble velocidad, pero la inferencia utilizada no es clara. Si asumimos que “doble de veloz” quiere referirse a

---

[28] Es posible que el cambio de Galileo por la ley correcta de la caída de los cuerpos esté relacionado al problema de integración de velocidades.

[29] Giusti, E., 1993, p41

[30] Drake, 1978, p82

"doble de velocidad", entonces tendríamos que con el doble de velocidad uniforme se recorrería el doble de la distancia que se recorrería con movimiento acelerado en el mismo tiempo. Si es así, entonces la regla de doble-velocidad determina que el movimiento uniforme recorre la misma distancia en la "mitad del tiempo". Al referirse a la regla de doble-velocidad, interpreta Wisan:

> "Si la línea AB fuera tomada para representar el tiempo en vez de la distancia, entonces las áreas del triángulo y rectángulo representarían distancias, y por la regla tradicional para el movimiento local, desde que el doble de distancia es recorrida por movimiento uniforme [en el mismo tiempo], este movimiento tendría el "doble de rapidez", o tendría el doble de velocidad que el movimiento acelerado. Pero Galileo tomó AB para representar la distancia. [El término] "doble de rapidez" debe ser tomado para significar "*en la mitad del tiempo*".[31]

Ahora bien ¿a qué tipo de velocidad nos referimos? No puede ser al grado máximo de velocidad del movimiento acelerado porque, como vimos, la regla de doble-velocidad asume una igualdad entre dicho grado y la velocidad del movimiento uniforme. Por lo tanto el doble de velocidad sólo puede referirse al doble de un tipo de *velocidad media* del movimiento acelerado.

.

III.2. La regla de Doble-Distancia en Diálogos

Diálogos es un tratado publicado aproximadamente 28 años después del folio 163. En esa ocasión, la regla de doble-distancia es demostrada a partir de la ley correcta de caída de los cuerpos.

En esta sección veremos la demostración de la regla de doble-distancia tal cual es presentada en *Diálogos*, y veremos que muchas de las suposiciones descritas en el análisis del folio 163 todavía se hacen presentes. Vimos en el análisis del folio163 que la demostración de la regla de doble-velocidad utiliza dos suposiciones principales: que el número de velocidades del movimiento uniforme es igual al número de velocidades del movimiento acelerado, y que la velocidad total es proporcional al área de las figuras. Como conclusión, sugerimos que la misma distancia es recorrida en la mitad del tiempo. En *Diálogos* estos aspectos señalados se repetirán, pero con mucho más precisión. En efecto, Galileo aplicará una distribución discreta de valores de velocidad para ambos movimientos, por medio de la representación numérica de cada grado de velocidad. De este modo, la comparación de la velocidad total de ambos movimientos adquiere también un valor numérico, más fácil de comparar.

El argumento se inicia con un cuestionamiento de Sagredo sobre la validez de la regla de doble-distancia, "Proposición que otra vez habéis supuesto como verdadera, pero que no está demostrada" [252 – *Diálogos*]. Para la demostración, Galileo recurre, en un primer momento, a un experimento mental donde un cuerpo cae por un pozo que atraviesa el centro de la Tierra. Dado que este pozo ideal no posee un fin, el movimiento del cuerpo será de *descenso* hasta llagar al centro, y partir de ahí presentará un movimiento de *ascenso* hasta llegar al otro lado de la Tierra (del mismo modo que un cuerpo se mueve en un péndulo de un lado a otro). Por medio de una analogía con el movimiento de un cuerpo en un péndulo, en el movimiento de un cuerpo que cae a través del centro de la Tierra, los grados de velocidad adquiridos en el descenso serán simétricos a los grados

[31] Wisan, 1973, p206

de velocidad adquiridos en el ascenso. De este modo, dado que las distancias recorridas en el descenso y ascenso son iguales, el tiempo de recorrido en ambos recorridos también deben ser iguales:

> "Me parece que, a partir de ahí (razonando con bastante propiedad), se puede creer que si el globo terrestre estuviese perforado por el centro, una bala de cañón que descendiera por tal pozo hasta el centro adquiriría tal grado de velocidad que, una vez atravesado el centro, la impelería hacía arriba por un espacio igual al de caída, decreciendo progresivamente la velocidad más allá del centro con disminuciones similares a los incrementos adquiridos al descender. *Y creo que el tiempo que tardaría en éste segundo movimiento ascendente sería igual al tiempo de la caída*"[32]

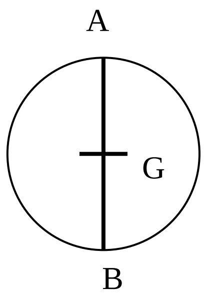


Figura 1: representación esquemática del experimento ideal de Galileo. En los puntos A y B el cuerpo se encuentra en reposo. Cuando el cuerpo es abandonado desde el reposo en A, él cae en movimiento acelerado aumentando su velocidad hasta llegar al centro de la Tierra representado por el punto G. A partir del centro el cuerpo inicia un movimiento desacelerado, disminuyendo su velocidad continuamente. Hasta alcanzar el reposo nuevamente en el punto B.

Después de esta analogía, Galileo concluye que "es razonable" que en el movimiento uniforme el móvil recorre en el mismo tiempo el doble de distancia. Galileo argumenta que si numerásemos los grados de velocidad de "0" (reposo en los puntos A o B) a "10" (velocidad en el centro de la Tierra), entonces la suma de todos los valores de velocidad adquiridos en el descenso totalizaría 55, y, consecuentemente, el total de velocidades adquiridas en el ascenso sería 55. Por lo tanto, la suma del total de velocidades adquiridas en el descenso y ascenso sería 110. Ahora bien, si consideramos que el cuerpo inicia su movimiento en el punto A con una velocidad igual a 10, y recorre toda la distancia AG (figura 2a) siempre con la misma velocidad, entonces, la velocidad total adquirida por el cuerpo en este caso sería 110. A partir de ahí Galileo concluye que en el movimiento uniforme el móvil recorre la misma distancia recorrida por el movimiento acelerado en la mitad del tiempo.

Es importante notar que la conclusión del argumento se deriva de la asunción de que la velocidad total es proporcional a las distancias de recorrido, y, de este modo, dado que las velocidades totales son iguales, ambos movimientos recorren la misma distancia. La relación entre los tiempos es determinada a partir del "número de velocidades". Dado que las velocidades son proporcionales a los tiempos de recorrido, el "número de velocidades" será proporcional a la longitud del segmento que representa el tiempo de recorrido, de este modo, el movimiento uniforme alcanza el total de 110 con un "número de velocidades" que es la mitad del número necesario para que el movimiento acelerado alcance el mismo total, luego, el tiempo de recorrido del

[32] *Diálogos*, p254 – subrayado mío

movimiento uniforme será de la mitad del tiempo de recorrido del movimiento acelerado. En la página siguiente presentamos un diagrama que ilustra este análisis.

En la figura 2b**,** suponga que los segmentos AG y BG representen el tiempo de recorrido desde A hasta G y desde G hasta B, respectivamente. El segmento GL representa el grado máximo de velocidad alcanzada cuando el cuerpo llega el centro de la Tierra, su valor es representado por el número 10. De este modo, de A hasta G estarían distribuidos los valores de 0 a 10 de velocidades, del mismo modo, en el segmento BG los valores de 10 a 0. Si sumamos cada valor atribuido a las velocidades, entonces el total de 110 sería alcanzado para el movimiento acelerado en la extensión que corresponde al triángulo ABL; mientras que para el movimiento uniforme el mismo total es obtenido a lo largo del rectángulo AFGL (dado que cada valor de velocidad es 10). Ahora bien, dado que los segmentos AG y BG son iguales entre sí (el tiempo de descenso hasta el centro de la Tierra es igual al tiempo de ascenso hasta el otro lado, a manera de un péndulo), y dado que Galileo asume que la velocidad total es equivalente (o proporcional) a la distancia de recorrido, entonces a partir del diagrama podemos ver

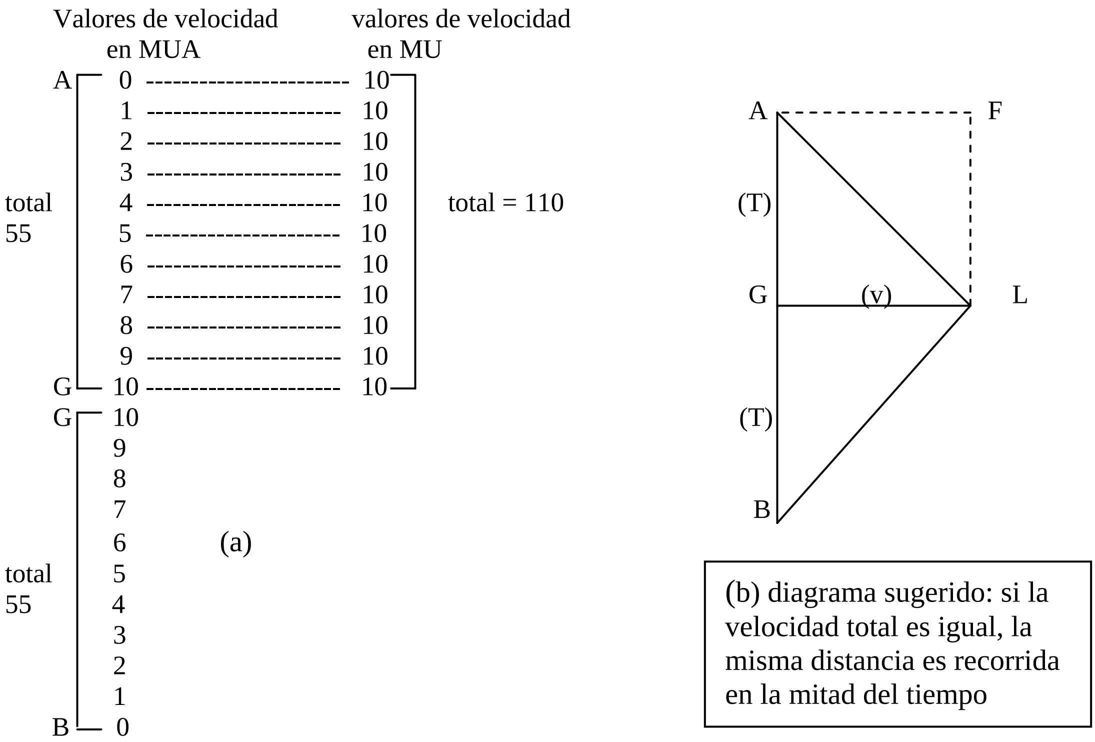


Figura 2: representación esquemática: (a) Galileo asume que la velocidad total representa la distancias recorridas. De este modo, dado que la suma de velocidades tienen el mismo valor 110, Galileo supone que las distancias recorridas son iguales (b) es un diagrama que sugerimos como una tentativa de hacer más claro el argumento.

que la *misma distancia es recorrida por el movimiento uniforme en la mitad del tiempo*. Son dos los aspectos que debemos resaltar en esta primera parte del argumento: 1) hasta aquí no fue aplicado el principio de continuidad, de modo que la velocidad total no puede ser comparada a las áreas de las figuras geométricas que fueron indicadas. De hecho, Galileo no propone dichas construcciones, las presentamos como tentativa de hacer más claro el argumento; 2) la suposición de que la velocidad total sea proporcional a la distancia de recorrido no está justificada por Galileo.

En seguida Galileo presenta un segundo argumento para justificar la relación: mismo tiempo – doble de distancia. Será Sagredo quien sugiere considerar solamente los grados de velocidad adquiridos en el descenso por AG. De este modo, los tiempos de recorrido de ambos movimientos serán necesariamente iguales entre sí, y la relación entre las distancias surgirá a partir de la relación entre las velocidades totales de ambos movimientos. Siendo así, numerando los grados de velocidad de 0 (reposo) a 5 (máxima velocidad), el total de velocidades adquiridas por el movimiento acelerado sólo en el descenso será 15, mientras que si todos los grados de velocidad fuesen iguales al máximo 5, la velocidad total sería 30, es decir, del doble de la primera. Ahora bien, dado que la velocidad total representa la distancia, y que la velocidad total del movimiento uniforme es doble, entonces la distancia recorrida por el movimiento uniforme deberá también ser del doble que la distancia recorrida por el movimiento acelerado. Es de este modo que Galileo concluye que en el mismo tiempo el movimiento uniforme recorre el doble de espacio que el movimiento acelerado. En la figura 3 ilustramos un diagrama que correspondería al razonamiento de esta segunda parte de la demostración.

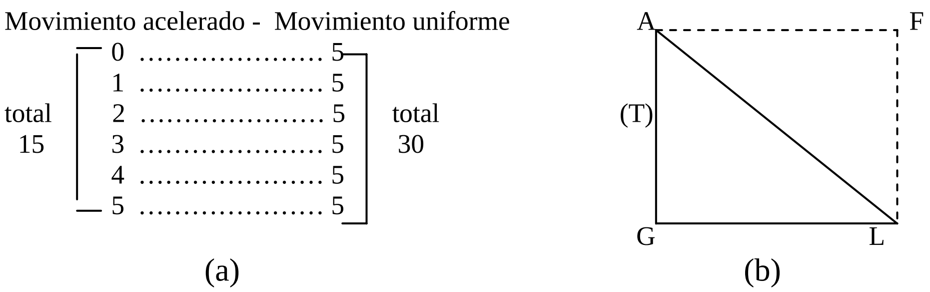


Figura 3: representación esquemática de la conclusión: en el mismo tiempo el movimiento uniforme recorre el doble de distancia

En la figura 3b, el segmento AG representa el tiempo de recorrido, y dado que este segmento es común a ambos movimientos los tiempos de recorrido serán iguales. El triángulo AGL contiene la distribución de velocidades del movimiento acelerado, donde cada velocidad adquiere valores de 0 a 5, mientras que las velocidades del movimiento uniforme están distribuidas el rectángulo AGFL, donde todas las velocidades poseen el valor 5. Ahora bien, dado que la velocidad total del movimiento uniforme (que es 30) es del doble de la velocidad del movimiento acelerado (que es 15), y a partir de la equivalencia entre velocidad total y distancia (equivalencia no justificada), Galileo concluye que el movimiento uniforme recorre, en el mismo tiempo el doble de distancia que el movimiento acelerado.

Después veremos a Galileo justificar a partir de la aplicación del principio de continuidad que la velocidad total es proporcional al área. Es posible que su intención fuera mostrar que si la distancia es proporcional a la velocidad total y la velocidad total es proporcional al área, entonces las distancias recorridas son proporcionales al área. Por otro lado, veremos que la única suposición justificada es la que determina la proporcionalidad entre área y velocidad total, siendo las otras dos simplemente asumidas por Galileo.

Galileo entonces presenta una prueba más formal para la regla de doble-distancia a partir del concepto de continuidad. El razonamiento es similar y el concepto de continuidad es integrado como sigue:

> "Puesto que, en el movimiento acelerado el aumento es continuo, los grados de velocidad, la cual crece continuamente, no se pueden dividir, en algún numero determinado, porque, al cambiar de instante en instante, siempre son infinitos."[33]

Es importante notar que la noción de velocidad para el movimiento acelerado se refiere a un tipo de magnitud que no posee duración en el tiempo, de ahí el uso de términos como "grados" o "momentos" para referirse a la velocidad. La representación geométrica del tiempo utilizada por Galileo es un segmento de recta, de modo que cuanto mayor es la longitud del segmento mayor será la duración del tiempo de recorrido. Si es en la longitud del segmento de recta que Galileo representa la duración del tiempo, para representar un tiempo sin duración es necesario asumir un segmento de recta sin longitud, es decir, un punto. De este modo, cada grado de velocidad corresponderá a cada punto de la recta que representa el intervalo de tiempo. Dado que existen infinitos puntos en cualquier segmento de recta, independientemente del cuan pequeña sea su longitud, siempre existirán, consecuentemente, infinitos grados de velocidad para cualquier intervalo de tiempo que se establezca.

Estas consideraciones se hacen evidentes a partir de los argumentos que Galileo presentará en la continuación de la demostración del teorema. Con el objetivo de ejemplificar sus ideas, Galileo propone la construcción de un triángulo ABC, tomando en el lado AC segmentos de recta iguales entre sí representando iguales intervalos de tiempo.

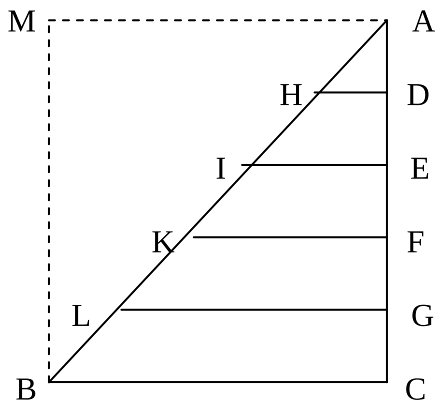


Figura 4

Las paralelas a la horizontal representan los incrementos de velocidad adquiridos desde el estado de reposo en A hasta el máximo grado de velocidad representado por el segmento BC. Dado que la velocidad aumenta continuamente, existirán infinitos grados de velocidad correspondientes a los infinitos instantes presentes en cada intervalo de tiempo. El argumento es presentado como sigue:

> "Pero, dado que la aceleración se hace continuamente de instante en instante, y no intermitentemente [*intercisamente*] de una parte extensa [*quanta*] de tiempo en otra, habiendo supuesto el término A como momento mínimo de velocidad, es decir, como estado de reposo, y como primer instante del tiempo subsiguiente AD, está claro que antes de la adquisición del grado de velocidad DH, en el tiempo AD se ha pasado por otros infinitos grados sucesivamente menores, ganados en los *infinitos instantes que hay en el tiempo DA, correspondientes a los infinitos puntos que hay en la línea DA*"[34]

Por lo tanto, los infinitos puntos de un segmento de recta determinan el número infinito de grados de velocidad. En otras palabras, Galileo utiliza una propiedad que es

---

[33] *Diálogos*, p255

[34] *Diálogos*, p255 - subrayado mío

geométrica para determinar una nueva propiedad física para el movimiento de los cuerpos. Dado que los instantes son sucesivos en el tiempo, consecuentemente, en cada intervalo del tiempo existirán sucesivas rectas paralelas que representan cada grado de velocidad. La unión de dichas paralelas determinará una superficie, en el caso de la figura 4, el área del triángulo.

> "[…] *para representar la infinitud de grados de velocidad* que preceden al grado DH, hay que suponer infinitas líneas sucesivamente menores que se supongan trazadas desde los infinitos puntos de la línea DA, paralelas a DH, *y esta infinitud de líneas nos representa al final la superficie del triángulo* AHD"[35]

En esta cita vemos a Galileo determinar explícitamente la relación entre el total de velocidades, determinado por la suma de un número infinito de paralelas, con el área de la superficie del triángulo. En otras palabras, Galileo justifica que el área representa, no la distancia, sino la velocidad total.

Para establecer la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento acelerado, Galileo entonces construye el paralelogramo AMBC cuya superficie estará determinada por la suma de todas las velocidades, cada una igual al segmento "BC" (que corresponde a la máxima velocidad alcanzada por el movimiento acelerado). Aquí no observamos a Galileo utilizar el término "velocidad total", sino "masa" o "agregado" de velocidades. A partir del hecho de que el "agregado" de velocidades del paralelogramo AMBC es doble de agregado de velocidades del triángulo ABC, Galileo presenta su conclusión como sigue:

> "[…] si el móvil que al caer se ha servido de los grados de velocidad acelerada, conforme el triángulo ABC, ha recorrido en tanto tiempo tal espacio, *es muy razonable y probable* que sirviéndose de la velocidad uniforme, correspondiente al paralelogramo, recorra con movimiento uniforme, en el mismo tiempo, el doble del espacio recorrido por el movimiento acelerado"[36]

Por lo tanto, la conclusión del argumento no se apoya, como Galileo cuidadosamente señaló anteriormente, en la equivalencia entre velocidad total y área, sino más bien en la equivalencia entre área y distancia de recorrido. De hecho, dado que el área del rectángulo es doble del área del triángulo, Galileo concluye que la distancia de recorrido será una el doble de la otra, y no de las velocidades totales. Posiblemente la cuestión se concentre en la interpretación del significado físico de "velocidad total". En la interpretación del folio 163 sugerimos que Galileo asume una equivalencia entre velocidad total y velocidad media, derivada de la ley errada de la caída de los cuerpos. Casi 30 años después vemos claramente a Galileo aceptar una equivalencia entre la velocidad total y la distancia de recorrido. No es claro cómo Galileo justifica esta suposición (y según Wisan, no justifica); si fue por necesidad de representar en un único diagrama las tres magnitudes fundamentales del movimiento, y así poder relacionarlas, no sabemos. Acerca de esta misma demostración comenta Wisan:

> "Aquí tenemos el corazón de la tentativa de Galileo de justificar la suposición medieval de que la distancia recorrida es proporcional al área […]. Lo que él está intentando justificar es la suposición de que las distancias recorridas son proporcionales a ese total de velocidades. Galileo no procede en justificar esta asunción […]"[37]

---

[35] *Diálogos,* p255 - subrayado mío
[36] *Diálogos,* p256 - subrayado mío
[37] Wisan, 1973, p279

La regla de doble-distancia actúa en un problema que es central en la física terrestre de Galileo: la relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado. Posiblemente Galileo estuviera consciente de que en *Diálogos* la demostración utiliza una suposición que no está justificada, pues en los *Discorsi* veremos a Galileo presentar una segunda demostración, rigurosamente matemática, para esta misma regla, y veremos surgir nuevamente una suposición no justificada. En otras palabras, Galileo intenta establecer la regla de doble-distancia a través de dos caminos independientes, y en ambos encuentra problemas. Antes de discutir con mayor amplitud el problema de la relación entre movimiento uniforme y movimiento acelerado, discutiremos en la próxima sección cómo esta misma regla está presentada en los *Discorsi*.

V. La presentación de la regla de doble-distancia en los *Discorsi*

IV.1. Una nueva clase de problemas

Según Wisan, en el inicio del período de Pádua, Galileo empieza a trabajar en un nuevo conjunto de problemas los cuales guían el uso de las matemáticas hacia el descubrimiento de nuevas consecuencias de sus proposiciones fundamentales[38]. Esa nueva clase de problemas procuran establecer cuestiones más complejas de modo que se permita un mejor entendimiento de “las propiedades de la aceleración y sus variaciones según la inclinación” [267- *Discorsi*].

Acerca del origen de esta nueva clase de problemas comenta Wisan:

> “Los resultados no aparecen como soluciones para problemas previamente explorados o como descubrimientos de consecuencias verificadas experimentalmente. Al contrario, ellos surgen desde una exploración de la fertilidad de nuevos teoremas matemáticos del movimiento y una búsqueda para profundizar el entendimiento del movimiento acelerado a través del descubrimiento de resultados particulares”[39]

Wisan sugiere que posiblemente esos problemas hayan surgido a partir de las tentativas de Galileo para desarrollar teoremas de “tiempo mínimo”[40], sugiere también que posiblemente como resultado del desarrollo de estos nuevos problemas, emerge la tentativa de probar la regla de la Doble-Distancia a partir del teorema III y del corolario de la media proporcional[41]:

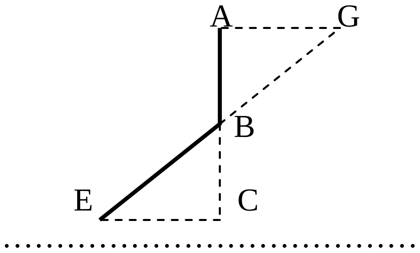
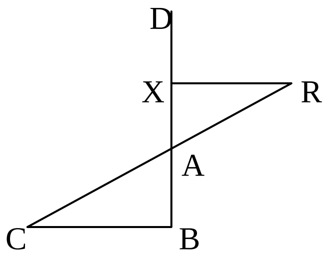
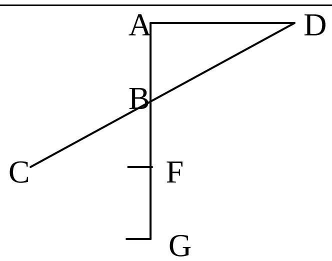
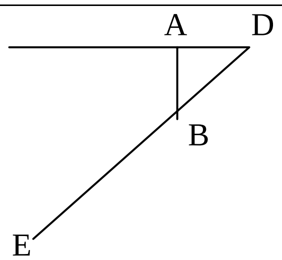
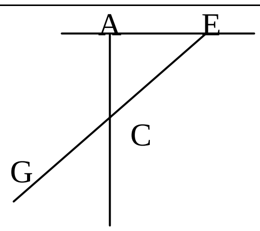
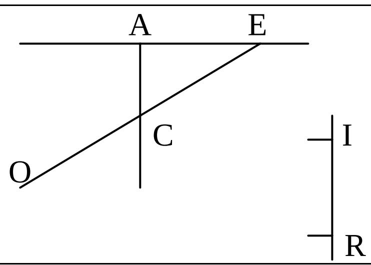
> “Esta búsqueda [de esta nueva clase de problemas] puede, entonces, haber sido dirigida, entre otras cosas, hacia el establecimiento de la Regla de la Doble-Distancia en un camino que sería independiente de las técnicas medievales […]”[42]

En la tabla de abajo ilustramos algunos de las proposiciones que caracterizan esa nueva clase de problemas.

---

[38] Proposiciones fundamentales como teoremas 2, 3, el postulado, etc.
[39] Wisan – 1973, p229
[40] En los Discorsi corresponde a los Teoremas 19, 20, 21 y 22. Son derivados del teorema de las cuerdas (teorema 6).
[41] que corresponde al segundo colorario del teorema II – MA
[42] Wisan, 1973, p232

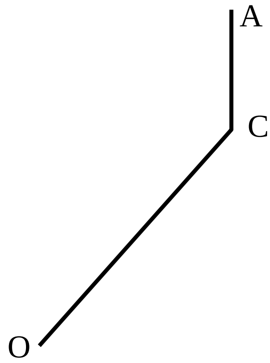
La regla de doble-distancia será derivada a partir de tres proposiciones que surgen entre esa nueva clase de problemas: el problema IV, el teorema XIV y el problema IX. En seguida discutiremos las demostraciones y consecuencias de los enunciados de estas tres proposiciones, y veremos que la regla de doble distancia es un caso particular del problema IX.

Problema I – proposición XIII		trazar el plano desde B hasta la línea horizontal, tal que: **T(AB) = T(BE, A)**
Problema II – proposición XIV		AX =? Tal que **T(XA)=T(AC, X)**
Problema III – proposición XV		FB=? Tal que **T(BC, A) = T(FB, A)**
Problema IV – proposición XVII		Se pide determinar BE, tal que: **T(AB) = T(BE, A)**
Teorema XIV – proposición XXI		Si **T(AC) = T(CG, A)** Entonces 2AC<CG<3AC
Problema IX – proposición XXIII		Un cuerpo parte del reposo en A. Se pide trazar un plano desde C (plano CO), tal que: Si **T(AC) = T(CO, A)**, entonces 2AC < CO < 3AC

Las demostraciones que serán presentadas siguen los diagramas originales utilizados por Galileo. En seguida haremos una descripción más detallada de las tres proposiciones, seguidas de sus demostraciones. Con la finalidad de resaltar la dependencia entre las tres proposiciones mencionadas con la demostración de la regla de doble-distancia, presentaremos al final un análisis de las consecuencias de las tres proposiciones a partir de un mismo diagrama (que corresponde al diagrama del problema IX).

IV.2. Demostración de las proposiciones XVII, XXI y XXIII

La situación física que será analizada consiste en un cuerpo que cae por una vertical, desde el reposo en el punto A, y tiene su movimiento transferido hacia un plano inclinado CO como ilustra la figura abajo:



De este modo, el cuerpo desciende por AC adquiriendo una cierta velocidad al llegar al punto C, y con esta misma velocidad comienza su movimiento por el plano CO. Las tres proposiciones que estaremos discutiendo determinarán dos caminos de análisis en este sistema físico: 1) qué condiciones deben existir para que los tiempos de recorrido por AC y por CO sean iguales y, 2) qué restricciones deben ser impuestas sobre la longitud del plano CO de modo que la igualdad de los tiempos sea verificada.

El problema IV establece, básicamente, cuál es la proporción que determina la igualdad de los tiempos de recorrido por AC y por CO, y es enunciado como sigue:

> “Dada una perpendicular y un plano inclinado con respecto a aquélla, señalar en dicho plano una parte tal que por ella descienda un móvil, después de caer a lo largo de la perpendicular, recorriéndola en un tiempo que sea igual al empleado en atravesar la misma perpendicular partiendo del reposo” [Discorsi – 235]

Es importante notar que el problema se inicia a partir de la longitud de una perpendicular y de un plano inclinado conocidos. En la figura 5 presentamos el diagrama geométrico utilizado por Galileo para la resolución del problema.

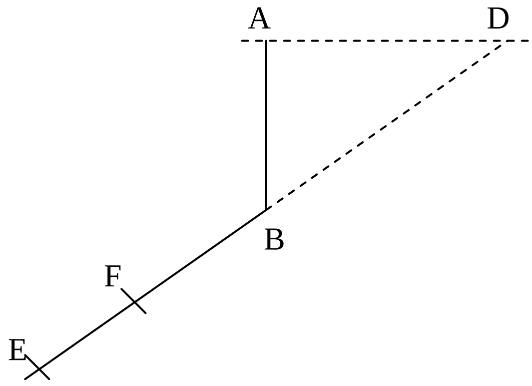


Figura 5

1) tomemos T(AB) = AB
2) considere el punto “F”, tal que: AB=BF
3) prolonguemos la recta BE hasta encontrar con la horizontal AD en “D” tal que: DF = MP (DB y DE)
4) por el teorema 3: si T(AB) = AB entonces T(DB) = DB
5) por el corolario de la media proporcional: T(DE)/T(DB) = DF/DB
6) por la proposición[43] 17 – Libro V de Euclides:

   (T (DE) – T (DB))/T (DB) = (DF – DB)/DB

   T (BE)/T(DB) = BF/DB $\Rightarrow$ **T(BE, D) = BF**
7) Por el postulado de Galileo, se sigue que: T(BE, D) = T(BE, A)
8) **8)** Por (2), se sigue que: **T(BE, A) = T(AB)**

En la resolución del problema, la media proporcional presentada en el paso (3) proviene de que el segmento de recta “DE” es la tercera proporcional entre DF y DB. Se trata de un paso justificado, dado que DF y DB son segmentos que ya están determinados (pues la posición del punto “D” está determinada por el encuentro del plano inclinado pasando por el punto “B”). Es importante notar que la posición del punto “E” en el plano inclinado es el que determina la propia resolución del problema.

El Teorema XIV mostrará que la igualdad de los tiempos, determinada por el problema IV, será válida no solamente para una, sino para un conjunto de distancias situadas en el intervalo entre 2AC y 3AC. A partir del diagrama utilizado en la demostración de este teorema tenemos que: si T (AC) = T (CG, A), entonces 2AC < CG < 3AC. En este caso, el problema 4 se volverá un caso especial del teorema XIV. Su enunciado es presentado como sigue:

> “Si tiene lugar una caída a lo largo de una perpendicular, partiendo del reposo, y si se toma, desde el comienzo del movimiento, una porción recorrida en un tiempo cualquiera y a la que sigue un movimiento desviado sobre un plano arbitrariamente inclinado, el espacio que, sobre

[43] Afirma que: si a/b =c/d, entonces: (a-b)/b = (c-d)/d. Otro modo de deducir la conclusión del paso 6 es por medio del teorema 11 – proposición 11, que a su vez utiliza la proposición 17 del libro V en su demostración.

dicho plano, es recorrido en un tiempo igual al de la caída precedente desarrollada a lo largo de la perpendicular, será más del doble, pero menos del triple que el espacio ya recorrido a lo largo de la perpendicular” [Discorsi – 238]

Tomando un plano de “cualquier inclinación CE”, la demostración es como sigue:

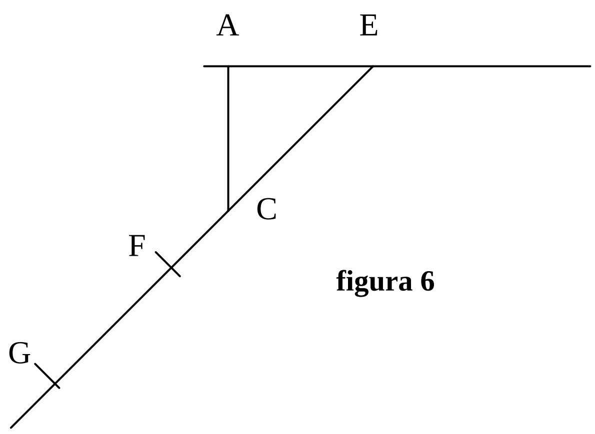


figura 6

Parte 1: demuestra que si T (AC) = T (CG, A), entonces CG > 2AC

1) Considere que T(AC) = AC, y AC = CF
2) Dado que T(AC) = AC, entonces por el teorema 3, T(CE)= CE, y de la premisa del teorema: T(CG, A) = AC = CF
3) Considere[44] que EF = MP (EC y EG), entonces: CE/EF = EF/EG
4) pero, por geometría elemental[45]: **CE/EF = CF/FG**
5) de la figura: CE < EF
6) dado la proporción CE/EF = CF/FG, si CE < EF entonces CF < FG
7) de la figura: CG = CF + FG, luego CG > CF + CF, es decir, CG > 2CF, pero CF = AC, por lo tanto **CG > 2AC**

---

[44] El teorema propone como condición inicial que T(AC)=T(CG, A). Dado que el plano inclinado es arbitrario, es decir, puede poseer cualquier inclinación, la condición que debe ser impuesta sobre la construcción de la representación geométrica de la demostración del teorema es que EF = MP (EC y EG), es decir, que “EF” sea la media proporcional de “EC” y “EG”. De hecho:

1) dado que T(CE) = CE,
2) entonces por el corolario de la media proporcional se sigue que T(CE)/T(EG) = CE/EF
3) de la proposición 17 – Libro V de Euclides: (T(CE) – T(EG)]/T(CE)) = (CE – EF)/EF
4) Ahora, T(CE) – T(EG) = T(CG) y CE – EF = CF
5) Luego: T(CG) = CF = AC

Si analizamos con atención este paso de la demostración, veremos que ni el punto “E” ni el punto “G” poseen sus posiciones definidas, de modo que la media proporcional que fue aplicada no estaría justificada. Posiblemente Galileo justifique la media proporcional por medio de la propia premisa del teorema (que los tiempos deben ser iguales). De hecho, como vimos en el problema IV, a partir de un plano inclinado dado, Galileo establece una media proporcional que permitió determinar la igualdad de los tiempos. En el teorema XIV, la igualdad de los tiempos es la premisa del teorema, de ahí la media proporcional.

[45] Dado que EF = MP (CE y EG) entonces utilizando el diagrama de la demostración de la media proporcional en la Proposición 13 del Libro VI, podemos inferir que Δ EFC ~ Δ EFG, de ahí se sigue que: EF/EG = EC/EF = FC/FG. Esa misma conclusión podría ser lograda por medio de la aplicación de la Proposición 17 – Libro V seguida de la Proposición 16 del Libro V como en Wisan (1973, p233)

Parte 2: si T (AC) = T (CG, A), entonces CG < 3AC

8) pero también de la figura CE > AC, pues toda hipotenusa es mayor que uno de los catetos del triángulo
9) dado AC = CF, entonces CE > CF
10) dado que FE = CE + CF, entonces FE < CE + CE, es decir, FE < 2CE
11) si FE < 2CE, para preservar la proporción CE/EF = CF/FG, entonces se sigue que FG < 2CF
12) dado que CG = FG + CF, si FG < 2CF, entonces CG < 2CF + CF, es decir, CG < 3CF. Dado que CF = AC, tenemos que **CG < 3AC**.

El teorema XIV establece, por lo tanto, una condición más amplia sobre la relación entre las distancias de recorrido por la vertical y por el plano inclinado, bajo la condición de que los tiempos de recorrido en ambas líneas sean iguales. Es importante notar que la conclusión de que existe un conjunto de distancias sobre el plano inclinado que satisface la igualdad de los tiempos implica que, para cada valor de distancia asumido para CG dentro del intervalo, la inclinación del plano debe cambiar proporcionalmente para que la condición del teorema XIV sea satisfecha, en otras palabras, para *cada inclinación existirá solamente una longitud que satisface la condición de igualdad de los tiempos*. Esta conclusión es natural, dado que cambiando la inclinación del plano cambiamos también la aceleración aplicada al movimiento del cuerpo, y para un mismo tiempo las distancias recorridas deben variar. En efecto, si cada longitud de CG corresponde a un ángulo de inclinación específico, entonces el intervalo 2AC < CG < 3AC debe poseer un correspondiente intervalo de ángulos permitidos. Llamando de "α" el ángulo de inclinación del plano con la horizontal, entonces 2AC < CG < 3AC tiene una equivalencia con el intervalo $0^o < \alpha < 90^o$. Esta fundamental relación entre distancia de recorrido y ángulo de inclinación del plano no está determinada por el teorema XIV, (por eso toma un "plano arbitrariamente inclinado"), veremos en seguida que dicha relación será determinada por el problema 9.

El problema 9 muestra cómo construir un plano inclinado tal que las dos condiciones del teorema XIV sean satisfechas.

> "Tomando en la perpendicular un espacio que sea recorrido en un tiempo cualquiera, partiendo del reposo, trazar, desde el extremo inferior de este espacio, un plano inclinado sobre el cual, después de la caída a lo largo de la perpendicular, se recorra en el mismo tiempo un espacio igual a un espacio dado cualquiera, con tal de que sea superior al doble, pero no inferior al triple, del espacio recorrido a lo largo de la perpendicular" [Discorsi – p241]

El problema se inicia asumiendo una distancia vertical AC y un segmento IR, tal que 2AC < IR < 3AC.

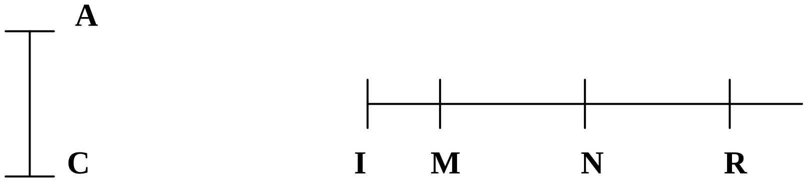


Figura 7

La finalidad del problema consiste en trazar un plano desde “C” con una inclinación tal que “el móvil, después de su caída a través de AC, atraviese, durante el tiempo AC, una distancia igual a IR” [241 – *Discorsi*].

1) Sea T(AC) = AC
2) tomemos RN y NM iguales a AC
3) tracemos por el punto “C” un plano “CE” que encuentre la horizontal “AE” en un punto tal que: **IM/MN = AC/CE**

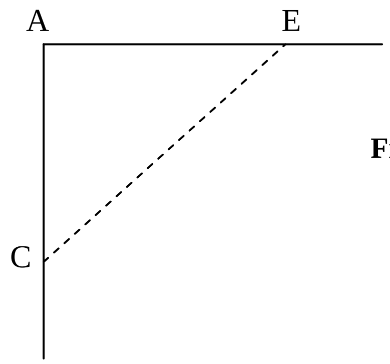


Figura 8

4) prolonguemos el plano “CE” hasta “O” y tomemos CF = RN, FG = NM y GO= IM (es claro que, por (2) tenemos CF = RN = FG = NM = AC)

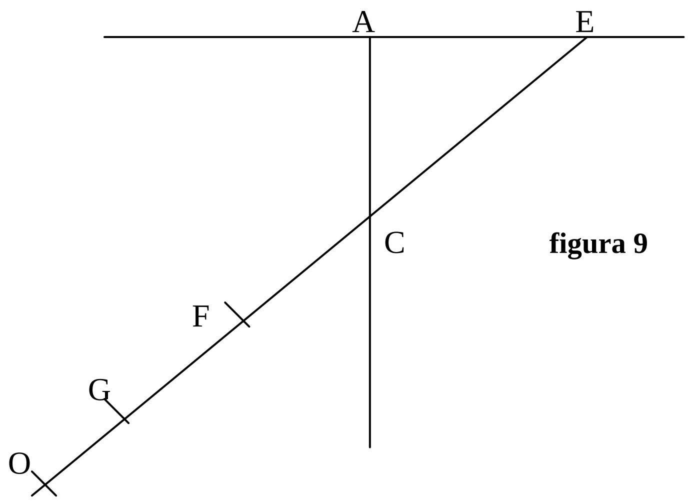


figura 9

5) de (3) y (4): **GO/FG = CF/CE**
6) por proposición 18 – Libro V de Euclides[46]:
   (GO + FG)/FG = (CF + CE)/CE $\Rightarrow$ OF/CF = EF/CE
7) dado que FG = CF, entonces OF/CF = EF/CE $\Leftrightarrow$ OF/CF = EF/CE
8) por la Proposición 12 – Libro V de Euclides[47]:
   (OF + EF)/ (CF + CE) = EF/CE $\Rightarrow$ **EO/EF = EF/CE**,

[46] Afirma que: si a/b = c/d, entonces (a+b)/b = (c+d)/d
[47] Afirma que: si a/b = c/d, entonces (a+b)/(c+d) = a/b = c/d

De donde concluimos que EF = MP (EO y CE)

9) dado que T (AC) = AC, por Teorema 3, T (CE) = CE

10) por el corolario de la media proporcional: T(CE)/T(EO) = CE/EF

11) por proposición 17- Libro V[48]: (T(EO) – T(CE))/T(CE) = (EF – CE)/CE $\Rightarrow$ T(CO, E) = CF

12) por el Postulado de Galileo: T(CO, A) = T(CO, E)

13) Entonces, dado que de (6) CF = AC $\Rightarrow$ T(CO, A) = T (AC)

El problema 9 determina una "ley de variación" que establece la relación entre inclinación del plano y longitudes recorridas en el plano inclinado, bajo las condiciones del teorema XIV. Dicha ley de variación corresponde justamente a la proporción presentada en (5).

Vimos que en el problema 9 primeramente Galileo aplica la condición sobre las distancias de recorrido del teorema XIV sobre un segmento cualquier "IR", de modo que 2AC < IR < 3AC. Al trazar el plano inclinado por el punto "C", Galileo transfiere las propiedades del segmento "IR" a las longitudes del plano por medio de las equivalencias presentadas en (2) y (4). A partir de esta construcción geométrica, Galileo asume la proporción presentada en (3), de modo que ésta incorpore una de las dos condiciones impuestas por el teorema XIV. Es importante notar que la proporción del paso (3) surge a partir de que el segmento "CE" es la 4ª proporcional entre los segmentos "IM", "MN" y "AC" (suposición justificada, dado que las longitudes de estos tres segmentos están determinadas).

Una vez que la condición de los intervalos de distancias está satisfecho (por medio del segmento auxiliar "IR"), resta al problema 9 demostrar que la proporción asumida en (3) satisface la segunda condición impuesta por el teorema XIV, de la condición de la igualdad de los tiempos, que está presentada entre (6) y (13). Es interesante notar que la proporción deducida en (8) corresponde a la proporción utilizada por el problema 4 y por el teorema XIV.

IV.3. Análisis de las consecuencias de las proposiciones 17, 21 y 23

En esta sección indicaremos cómo que los enunciados de tres proposiciones anteriores convergen hacia la realización de la demostración de la regla de doble distancia.

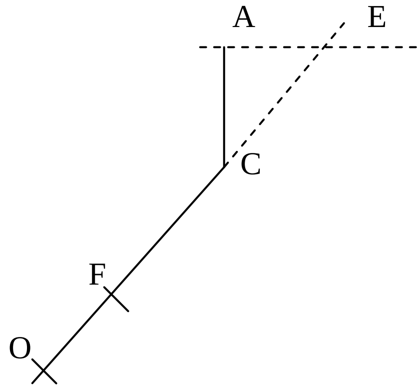
Vimos que las proposiciones 17, 21 y 23 actúan sobre un mismo sistema físico: aquél donde un cuerpo que desciende por la vertical tiene su movimiento transferido hacia un plano de determinada inclinación.

El Problema IV determina que para un plano inclinado dado (es decir, para un único plano de inclinación conocida) es posible deducir que los tiempos de recorrido por la vertical y por el plano inclinado son iguales entre sí. El teorema XIV extiende la igualdad de los tiempos determinada por el Problema IV para un conjunto de planos inclinados donde las longitudes permitidas están entre un determinado intervalo de

---

[48] En el paso 11, se puede demostrar que T(CE)/T(EO) = CE/EF $\Leftrightarrow$ T(EO)/T(CE) = EF/CE por medio de la aplicación de la proposición 16 del libro V de Euclides dos veces. Esta proposición afirma que: si a/b =c/d entonces a/c = b/d

valores. A partir del diagrama de la figura abajo, podemos ilustrar las conclusiones de estas dos proposiciones como sigue:



El problema IV establece que, a partir de un determinado plano inclinado dado (plano “EO” de la figura), existe una proporción que permite deducir la igualdad de los tiempos, es decir: La proporción **OE/EF =EF/CE** permite deducir que **T (CO, A) = T (AC)**

Es importante notar que la manera que Galileo posee para determinar la inclinación de un plano es por medio de su longitud, y no por medio del ángulo.

El teorema XIV toma como premisa la igualdad de los tiempos determinada en el problema IV, y determina el conjunto de longitudes (o inclinaciones) donde dicha igualdad entre los tiempos sea verificada: **Si T (AC) = T (CO, A) $\Rightarrow$ 2AC < CO < 3AC**

Naturalmente, para un intervalo de tiempo fijo, cuanto mayor la aceleración mayor debe ser la distancia recorrida por el cuerpo (y consecuentemente mayor será la longitud del plano), de modo que si hacemos variar la inclinación del plano, su longitud debe necesariamente variar también. Ahora bien, cuanto más el plano se acerca de la horizontal CT = 2AC (vide figura 10), menor será su aceleración, y consecuentemente menor también será la longitud del plano; y del mismo modo, cuanto más el plano se acerca de la vertical CP = 3AC, mayor será la aceleración y mayor será también la longitud del plano. A partir del intervalo de longitudes permitidas, tenemos que la máxima longitud se obtiene cuanto más el plano se acerca de la longitud 3AC, y la mínima longitud se obtiene cuanto más el plano se acerca de la longitud 2AC. La figura 10 procura ilustrar esta importante conclusión derivada del teorema XIV.

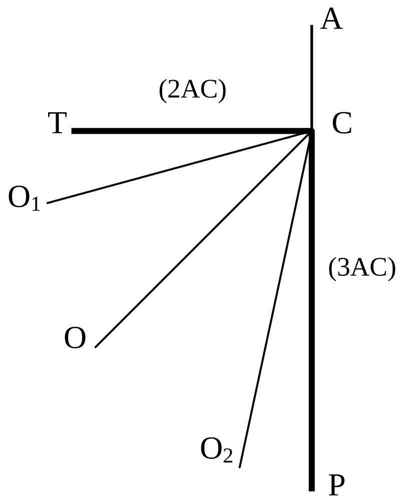


Figura 10

Dado que la igualdad de los tiempos es tomada como premisa, el teorema XIV se inicia con la misma proporción establecida por el problema IV, y a partir de una nueva proporción, equivalente a la primera, deduce el intervalo de longitudes que satisface la condición de igualdad de los tiempos. De modo que:

- Dado T (CO, A) = T (AC), entonces OE/EF =EF/CE
- OE/EF =EF/CE ⇔ EF/CE = OF/CF[49]
- EF/CE = OF/CF deduce que 2AC < CO < 3AC

A partir del análisis del problema IV y del teorema XIV tenemos que existen dos proporciones claves: OE/EF =EF/CE utilizada para deducir la igualdad de los tiempos, y EF/CE = OF/CF para deducir el intervalo de longitudes permitidas para que los tiempos sean iguales.

El problema IX se inicia con la presentación de un segmento de recta "CO" que obedece la condición derivada de la demostración del teorema XIV. De este modo, "CO" no es uno, sino un conjunto de segmentos cuyas longitudes están dentro del intervalo entre 2AC y 3AC. Siendo dados los segmentos AC e CO, Galileo construye, utilizando una 4ª proporcional, la proporción GO/FG = CF/CE (donde "CE" es la 4ª proporcional).

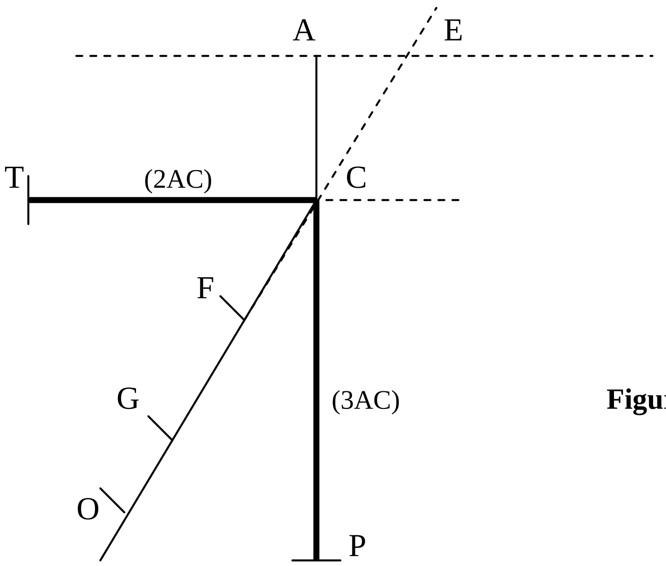


Figura 11

Es importante notar que en la proporción anterior los segmentos "CF" y "FG" poseen longitudes invariables (y iguales a AC), Será a partir de la variación de la longitud del segmento "GO" que el segmento "CO" podrá hacer variar su longitud de tal modo que:

Si GO → cero, entonces CO → 2AC
Si GO → AC, entonces CO → 3AC

Dado que la longitud del segmento "GO" es variable (y dado que AC es constante), en la medida que variamos la longitud de "GO" la longitud del segmento "CE" deberá necesariamente variar, de modo que la proporción sea verdadera. Para hacer más claras

[49] Dado que: OE/EF =EF/CE = OF/CF

las consecuencias de la relación entre las longitudes de “GO” y de “CE”, dado que CF = FG = AC, reescribiremos la proporción GO/FG = CF/CE en la forma:

$$GO / AC = AC / CE \qquad (1)$$

Ahora bien, realizaremos el análisis de las consecuencias de esta proporción sobre el diagrama geométrico utilizado en algunos pasos: 1) “AC” es un segmento de longitud fija, y “GO” puede variar su longitud dentro de un intervalo de valores que está determinado; en la medida que “GO” asume una determinada longitud (dentro del intervalo entre 2AC y 3AC), el segmento “CE” necesariamente cambiará su longitud, de modo que la proporción arriba permanezca verdadera. 2) el punto “E” está definido como el punto de intersección entre el plano “CO” y la recta horizontal que pasa por el punto “A” (del segmento vertical “AC”), de este modo, el único modo que el segmento “CE” tiene para hacer variar su longitud será por medio del cambio de su inclinación (figura 12).

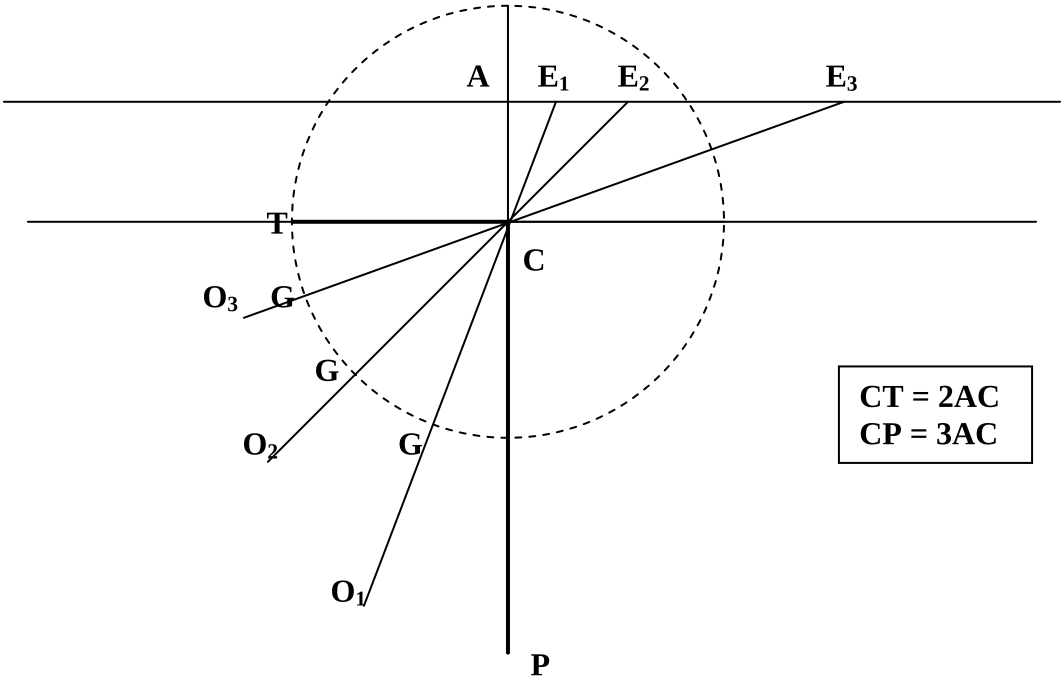


Figura 12: en la figura, trazamos una circunferencia con centro en “C” y radio “CT” como referencia, de modo que quede más claro las variaciones de la longitud del segmento “GO” con respecto al intervalo de valores permitidos.

En la figura 12 podemos observar gráficamente que en la medida que el segmento “GO” se acerca de “cero” (límite inferior del intervalo permitido), para que el segmento “CE” aumente su longitud debe inclinarse se acercando cada vez más de la horizontal “CT”. Y del mismo modo, en la medida que el segmento “GO” se acerca de su límite superior del intervalo que le es permitido (es decir, la longitud “AC”), para que el segmento “CE” disminuya su longitud debe inclinarse se acercando cada vez más de la vertical “CP”. De este modo, Galileo consigue controlar las variaciones de la inclinación del plano “CO” por medio de la proporción (1). Para quedar más claro cómo sucede dicha ley, llamemos de “α” el ángulo del plano CO con la horizontal, entonces tendremos que:

Dado que **GO / AC = AC / CE**, entonces:
- **Si $\alpha \to 90^o$, entonces CE $\to$ AC y GO $\to$ AC**
- **Si $\alpha \to 0^o$, entonces CE $\to \infty$ y GO $\to$ 0**

El problema IX se dedicará a establecer que a partir de esta proporción se puede deducir la igualdad de los tiempos. Representamos abajo un resumen de las principales conclusiones derivadas de las tres proposiciones que acabamos de ver:

Problema 4: EO / EF = EF / CE deriva T (AC) = T (CO, A)
Teorema XIV: T (AC) = T (CO, A) deriva 2AC < CO < 3AC
Problema IX: GO / AC = AC / CE deriva EO / EF = EF / CE

La demostración de la regla de doble distancia surgirá como un caso particular del problema IX. Antes de iniciar el análisis de la demostración de este importante teorema, es necesaria una última consideración.

Al final de la resolución del problema IX, Galileo utiliza el escolio 1 de la tercera jornada y establece que todas las propiedades del movimiento que fueron demostradas son válidas también para el caso donde el plano AC no fuera vertical, sino que tuviera alguna inclinación:

> “Debe notarse, sin embargo, que la misma solución puede alcanzarse si el movimiento antecedente [por el plano AC] tiene lugar, no a lo largo de la perpendicular, sino a través de un plano inclinado”. [242 – *Discorsi*]

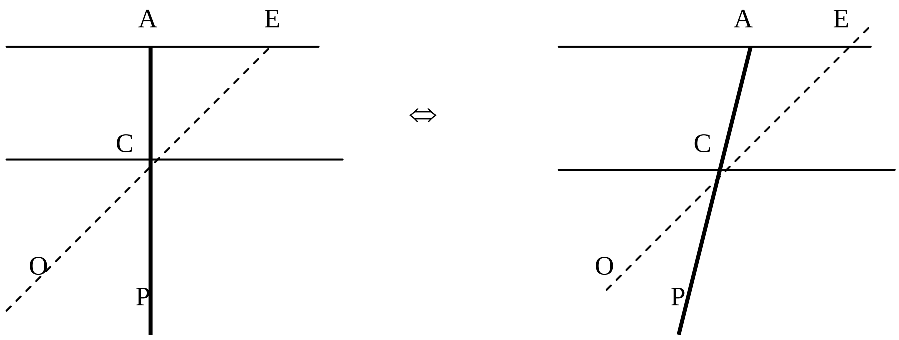


Figura 13

En efecto, para los diagramas que seguirán aplicaremos esta equivalencia.

Por lo tanto, existen dos proporciones que son centrales en la discusión que desarrollamos hasta aquí. Una que determina la igualdad de los tiempos de recorrido por AC y por CO, y la otra que determina los intervalos de longitudes permitidas para que la igualdad de los tiempos se verifique, de este modo tenemos:

IV.4. Demostración de la regla de Doble-Distancia

Vimos que el teorema XIV establece un intervalo de longitudes que satisfacen la condición de la igualdad de los tiempos, y vimos también que la ley de variación de las longitudes según la inclinación del plano es determinada por una proporción establecida por el problema IX. Ahora bien, el teorema XIV establece que si T (AC) = T (CO, A), entonces el segmento CO es mayor que 2AC y menor que 3AC, no dice que CO puede ser igual a uno estos casos. La demostración de la regla de doble-distancia se deriva del análisis de las consecuencias implicadas, a partir de la proporción establecida por el problema IX, cuando CO alcanza uno de los dos límites, es decir, cuando CO = 2AC o cuando CO = 3AC. Naturalmente, para estos casos, el teorema XIV no da garantías de que la igualdad de los tiempos de recorrido será igual.

Antes de empezar sugiero la siguiente consideración: del diagrama utilizado por el problema 9 podemos ver que CO = 2AC + GO. Vimos que cuando el ángulo de inclinación del plano con la horizontal “tiende” a cero o a 90^o grados, el segmento GO tiende, respectivamente, a “cero” o a “AC”. De este modo surgen las siguientes relaciones:

Si $\alpha \to 90^o$, **GO $\to$ AC y CO $\to$ 3AC**

Si $\alpha \to 0^o$, **GO $\to$ 0 y CO $\to$ 2AC**

Ahora analizaremos cada caso por separado**.**

Caso 1) cuando “CO” se aproxima de “3AC”

1) Dado que CO = 2AC + GO, si CO $\to$ 3AC, entonces necesariamente GO $\to$ AC;

2) Dado que **GO/AC = AC/CE, si GO $\to$ AC, entonces AC $\to$ CE.** Esto significa que: “CE es un poco mayor que AC y, en consecuencia, el punto “E” está próximo del punto “A” y la recta CO formará con CS un ángulo muy agudo, tanto que casi coinciden ambas líneas”. [242 – *Discorsi*]. De este modo, la recta CO se “trasladará” hacia la vertical, acercándose de la recta AC.

3) Para el caso donde CO = 3AC, vea figura.

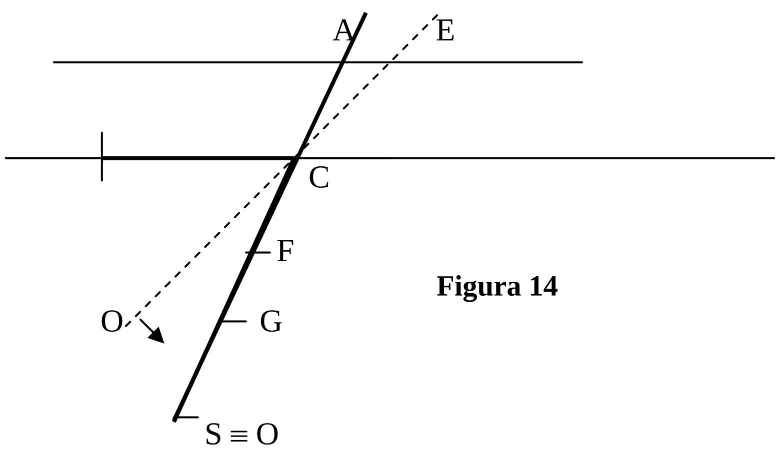


Figura 14

Es necesario demostrar que si para este caso la igualdad de los tiempos también es válida, es decir, si CO = 3AC entonces T (CO, A) = T (AC). Aplicando la proporción que establece la igualdad de los tiempos para este caso, tenemos que:

4) dado OE/FE = FE/CE, entonces FE = MP (OE y CE)

5) dado que AC = CE, T(AC) = T(CE)

6) por el colorario de la media proporcional: T(AO)/T(AC) = AF/AC (dado que AF=FE en este caso)
7) por proposición 17 – Libro V:

   [T (AO) – T (AC)] / T (AC) = (AF – AC)/AC $\Rightarrow$ T(CO) = CF
8) pero CF = AC, luego T (CO, A) = T(AC)

En este caso, en el límite de CO $\rightarrow$ 3AC, es decir CO = 3AC, tenemos que el cuerpo caerá por un plano de una única inclinación. Si en el tiempo “T” recorre la distancia “AC”, y en el tiempo sucesivo igual al anterior, recorrerá 3 veces la distancia anterior. Este primer caso analizado consiste en un caso particular del primer corolario del teorema 2, también denominado “corolario de los número impares”, que afirma que un cuerpo en movimiento acelerado, a cada intervalo sucesivo de tiempo igual, las distancias recorridas aumentan en la misma sucesión de los números impares, es decir, “x”, “3x”, “5x”, “7x”, etc. Este corolario es utilizado una única vez en los *Discorsi*, en la construcción del diagrama del teorema 1 de la 4ª jornada, donde Galileo demuestra que la trayectoria de un cuerpo lanzado oblicuamente corresponde siempre a un arco de parábola.

Caso 2) cuando “CO” se aproxima de “2AC”

1) Dado que CO = 2AC + GO, entonces si CO $\rightarrow$ 2AC, necesariamente GO $\rightarrow$ 0;

2) Si GO $\rightarrow$ 0, esto quiere decir que “GO” será una línea muy corta. Dado que GO/AC = AC/CE, si GO $\rightarrow$ 0 entonces AC/CE $\rightarrow$ 0. Esto quiere decir que:

3) “AC será muy pequeña en comparación con CE, que habrá de ser muy larga, de modo que casi coincida con la línea horizontal que pasa por C” [242 – *discorsi*]. De este modo, el punto “E” se debe alejar del punto “A” de modo que “CE” sea tan larga que casi coincida con el plano horizontal que pasa por “C”.

4) Para el caso en que CO = 2AC, CE será paralela a AC. Vea figura.

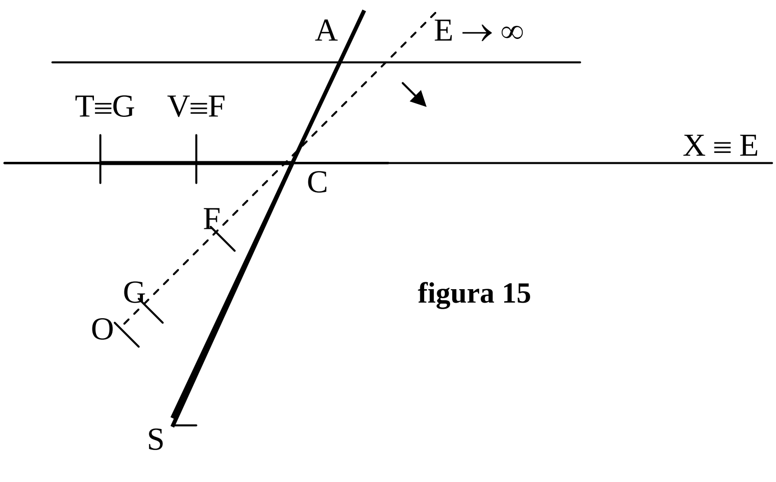


figura 15

Para el caso extremo donde CO = 2 AC, el punto ”O” pasa a coincidir con la posición del punto “G”. Para representar los puntos “F” y “G ≡ O” en la nueva posición del plano, utilizaremos los puntos “V” y “T” respectivamente. De modo que CV = CF = AC y CT = CG = 2AC. El punto “E” es definido como el punto de intersección entre el plano “CE” y la horizontal que pasa por “A”. Dado que en este caso AE es paralela a CX, *el punto “E” debe localizarse en el infinito*, llamemos “X” la nueva posición de “E”. Resta ahora verificar si la igualdad de los tiempos en este nuevo diagrama se verifica, es decir, si T (AC) = T(CT, A).

En el texto presentado en los *Discorsi* Galileo construye el diagrama, conforme fue descrito anteriormente, y en seguida concluye:

> “[…] después del descenso por el plano inclinado AC, el movimiento se continúa a lo largo de la línea horizontal, como sería el caso de CT, el espacio que recorrería sucesivamente el móvil, en un tiempo igual al de la caída, sería exactamente el doble de la distancia AC”[50]

Después sigue una justificación:

> “Llegados a este punto parece, además, que sea apropiado un razonamiento como el precedente: es evidente, en efecto, que puesto que OE es a EF como EF es a CE, precisamente CF mide el tiempo de la caída por CO. Si además, la línea horizontal CT, que es doble de AC, se divide por la mitad en V, prolongada en dirección a X, se extenderá hasta el infinito antes que pueda encontrarse con la prolongación de AE. En consecuencia, la proporción de la línea infinita TX con respecto a la infinita VX *no será distinta* de la proporción que se da entre la infinita VX y la infinita CX”[51]

Dado que en este caso surge un tratamiento de magnitudes infinitas, veamos cómo podría suceder la demostración de la validez de la igualdad de los tiempos.

Vimos que la igualdad de los tiempos es determinada a partir de la proporción: EO/EF = EF/CE. Aplicando la equivalencia de nomenclaturas utilizadas para el caso que analizamos, tenemos que:

$$\mathbf{EO/EF = EF/CE \Leftrightarrow TX/VX = VX/CX}$$

Por lo tanto:

1) Dado que TX/VX = VX/CX, pues *“no existe diferencia entre razones de magnitudes infinitas”*, podemos concluir que VX = MP (TX y CX)
2) Dado que T(AC) = AC implica que T(CE) = CE, entonces T(CX) $\rightarrow$ CX, del mismo modo que CE se aproxima de la horizontal CX
3) Aplicando el corolario de la media proporcional, tenemos:
   T(TX)/T(CX) = VX/CX
4) por proposición 17 – Libro V: [T(TX) – T(CX)]/T(CX) = (VX – CX)/CX, luego:
   T(CT) = CV = AC
5) por lo tanto, CT = 2AC, es recorrido, después del descenso por AC, en un tiempo T (CT) = AC = T(AC).

Esta demostración posee serias advertencias que deben ser observadas. Primero, cuando la proporción que permitirá la demostración de la igualdad de los tiempos es formada para el caso donde AE es paralela a CX, tenemos:

---

[50] *Discorsi*, p242
[51] *Discorsi*, p242 - énfasis mío

$$TX/VX = VX/CX$$

Pero, dado que el punto "X" está en el infinito, dicha proporción equivale a:

$$\infty/\infty = \infty/\infty$$

Ahora, "∞/∞" *es una indeterminación matemática*, es decir, aún hoy, en la modernidad, no sabemos cómo dar una respuesta a esta razón, y de este modo tampoco podemos admitir que dicha igualdad es o no es verdadera. Una segunda advertencia importante está en el paso (4). Ahí la operación matemática "T (TX) – T (CX)" equivale a "$\infty - \infty$". Galileo concluye que dicha diferencia resulta en el tiempo T (CT) que es *"finito"*. Según lo que se acepta actualmente, "$\infty \pm \infty = \infty$".

Galileo omite la demostración de que la igualdad de los tiempos será válida en este caso, lo que al parecer, presentando la proporción que determina la igualdad de los tiempos (TX/VX = VX/CX) pretende dejar entendido que el mismo procedimiento que analizamos para el caso 1 sería válido también para este caso. Acerca de la omisión de la prueba comenta Wisan:

> "Galileo sabía que su teorema era correcto, pero tal vez instintivamente encogió la presentación de la prueba para evitar la fórmula absurda que era requerida para probar de esta manera."[52]

En la continuación Galileo afirma que la misma conclusión podría ser alcanzada siguiendo "otro procedimiento, esto es, volviendo a la misma línea de argumentación desplegada en la demostración de la primera proposición" [242-*Discorsi*]. Este "otro procedimiento" es una segunda demostración similar a la que fue discutida en *Diálogos,* y la *proposición primera* se refiere al teorema 1 del movimiento acelerado, "la misma línea de argumentación" se refiere, por lo tanto, a la suposición de que la distancia de recorrido es proporcional al área.

La segunda demostración es similar, como decimos, a la demostración de la regla de doble-distancia que analizamos en *Diálogos*. En efecto, Galileo recurre a la suposición medieval de que el área es proporcional al espacio y a partir del mismo diagrama utilizado en *Diálogos*, concluye que, en el mismo tiempo, el movimiento uniforme recorre el doble de distancia que el movimiento acelerado. El concepto de continuidad también es utilizado, pero esta vez con menos énfasis; la riqueza de detalles para caracterizar los infinitos grados de velocidad ya no es presentado en los *Discorsi*. Galileo presenta más bien un resumen de la demostración que analizamos en *Diálogos*.

La relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado es, por lo tanto, establecida por dos vías, y vimos que ambas poseen una suposición no justificada, sea la suposición medieval de que el área es proporcional al espacio, o sea la igualdad de dos razones entre magnitudes infinitas. Posiblemente Galileo estuviera consciente de estos dos problemas y por eso mantiene las dos demostraciones en los *Discorsi*, como sugiere Wisan:

[52] Wisan, 1973, p235

> “La segunda demostración puede haber sido agregada porque Galileo tenía remordimientos sobre el juego de magnitudes infinitas de la primera [demostración]. De todos modos, la primera demostración no es omitida, y la aplicación del teorema XI puede haber sido pretendida apenas para mostrar que el resultado es consistente con los procedimientos usuales y que no existe contradicción en el argumento dentro de los límites”[53]

VI. La demostración del teorema de la velocidad media

El teorema de la velocidad media (teorema 1 – proposición 1) postula que si un cuerpo recorriera con movimiento uniformemente acelerado una cierta distancia en un cierto tiempo, entonces, para que esta misma distancia fuera recorrida en el mismo tiempo con velocidad uniforme, esta velocidad debe ser la mitad de la velocidad máxima adquirida por el movimiento acelerado. El teorema, por lo tanto, se inicia con una clara condición: misma distancia en el mismo tiempo, y la relación entre el movimiento uniforme y acelerado es establecida por medio de la relación entre las velocidades de ambos movimientos. A continuación veremos los pasos de la demostración de Galileo para este teorema.

En la figura 16 el segmento de recta “AB” representa el espacio recorrido por un móvil en movimiento uniformemente acelerado. El móvil parte del reposo en el punto “A” y alcanza el punto “B” con velocidad máxima “V_F”. En el recorrido de “A” para “B” el cuerpo utiliza un intervalo de tiempo representado por el segmento de recta “CD”.

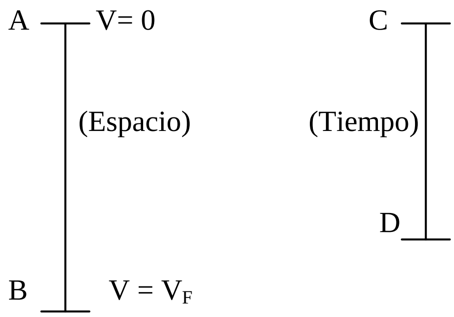


Figura 16: “AB” representa la distancia recorrida por un mismo móvil en movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado. “CD” representa el tiempo de recorrido de la distancia “AB” por ambos movimientos.

Suponiendo en la figura que el tiempo crezca de “C” a “D”, entonces en el instante “C” el cuerpo se encuentra con velocidad cero. En la medida que el cuerpo avanza de “A” para “B” su velocidad aumenta con incrementos iguales para iguales intervalos de tiempo, alcanzando su valor máximo en el instante “D”. Si dividimos el segmento de recta “CD” en partes iguales, podemos representar (figura 17) los incrementos de velocidad por medio de las rectas horizontales “MN”, “RS”, “OT” y “DG”.

---

[53] Wisan, 1973, p235

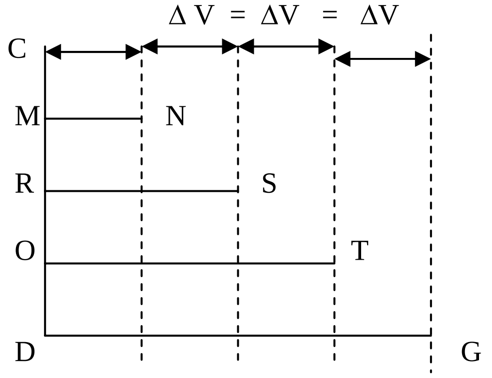


Figura 17

En el intervalo de tiempo "CM, el cuerpo sufrió un incremento de velocidad representado por el segmento "MN". En el intervalo de tiempo siguiente "MR", el cuerpo sufre un nuevo incremento igual al anterior alcanzando la velocidad "RS", y así sucesivamente. Dado que los incrementos de velocidad son siempre iguales, es posible unir los puntos "C", "N", S", "T" y "G" en una única recta. Tendríamos entonces la formación de un triángulo "CDG", como ilustra la figura 18:

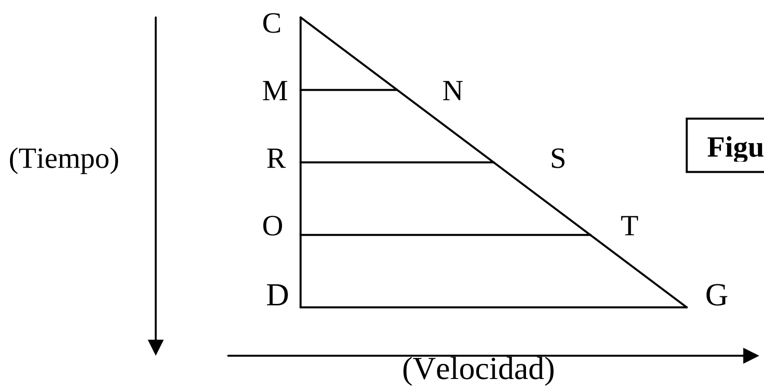


Figura 18

Supongamos ahora que el mismo cuerpo recorriera la misma distancia "AB" en el mismo intervalo de tiempo "CD" con velocidad constante, entonces su velocidad a lo largo de todo el recorrido se debe mantener siempre la misma. Supongamos que el segmento de recta "CK" representa esta velocidad constante. Entonces tendremos la figura 19:

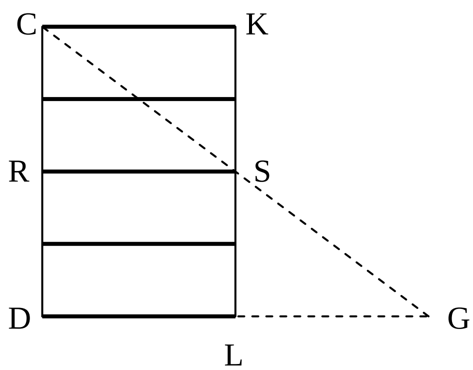


Figura 19: los segmentos de recta "CK", "RS" y "DL" representan las velocidades de un móvil en movimiento uniforme a lo largo del intervalo de tiempo "CD".

En la figura 19 tenemos representados los dos movimientos para un mismo intervalo de tiempo "CD". Falta todavía representar en la figura las distancias recorridas por ambos movimientos, y que éstas sean iguales entre sí. La distancia recorrida surgirá representada por las áreas de las figuras. Así, la distancia recorrida por el cuerpo en movimiento acelerado será el área del triángulo "CDG", y la distancia recorrida por el cuerpo en movimiento uniforme será el representado por el área del rectángulo "KCDL". Las distancias recorridas serán iguales sólo si el lado del rectángulo que representa la velocidad uniforme sea de la mitad de la base del triángulo. De este modo tendremos que para que las distancias y tiempos sean iguales para los dos movimientos, es necesario que la velocidad del movimiento uniforme sea la mitad de la velocidad máxima del movimiento acelerado del intervalo de tiempo "CD".

El Teorema 1 puede ser expresado como sigue:

$$\textbf{Si } S_{MU} = S_{MA} \textbf{ y } T_{MU} = T_{MA} \Rightarrow V_{MU} = V_{MA}/2$$

VII. Aplicaciones del teorema de la velocidad media en los *Discorsi*.

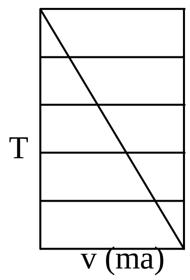
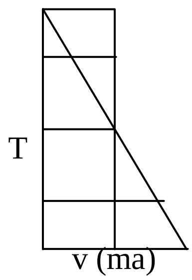
Antes de iniciar la discusión de la aplicación del teorema de la velocidad media y de la regla de doble-distancia de Galileo en los *Discorsi*, se hacen necesarias algunas consideraciones acerca de la composición general de cómo Galileo presenta la tercera y cuarta jornadas de este tratado.

A grandes rasgos, los teoremas del movimiento de la física terrestre de Galileo, tal cual está presentada en los *Discorsi*, puede ser dividida en dos partes. La primera, presentada en la tercera jornada, está dedicada al estudio del movimiento acelerado de los cuerpos, tanto para el movimiento vertical como para el movimiento a lo largo de planos inclinados; mientras la segunda, presentada en la cuarta jornada, está dedicada al estudio del movimiento de proyectiles, donde se hace presente la composición de movimientos. La relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado en ambos casos es central, pero es aplicada de manera diferente para cada caso. Para el desarrollo de los teoremas del movimiento acelerado, Galileo considera que *existe un único movimiento* acelerado, y la relación entre ambos movimientos es necesaria cuando la demostración de algún teorema del movimiento acelerado requiere la aplicación de algún teorema del movimiento uniforme, en este caso, la necesidad de una relación se deriva de la dependencia de un teorema con respecto a otro, y por lo tanto, los teoremas del movimiento uniforme surgen más bien por una necesidad "matemática".

Para el movimiento de proyectiles es diferente. Dado que el movimiento de un cuerpo lanzado oblicuamente es descrito en términos de dos "componentes del movimiento", uno uniforme y horizontal y otro acelerado y vertical, la relación entre ambos movimientos converge hacia la caracterización de un único movimiento compuesto, no existe en ese caso una dependencia de los teoremas de un movimiento con respecto a otro, y ambos son tratados de modo independiente. En otras palabras, Galileo considera que existen dos movimientos, uno uniforme y otro acelerado, que unidos generan una tercera clase de movimiento, híbrido, donde las trayectorias descritas tienen la forma geométrica de una parábola. Es importante notar que en el movimiento de proyectiles, el movimiento acelerado coexiste con el movimiento uniforme, de modo que la relación entre ambos movimientos se vuelve más bien una relación física, mientras que para demostración de los teoremas del movimiento acelerado no hay dicha coexistencia entre ambos movimientos.

En ambos los casos, tanto para teoremas de la tercera como en la cuarta jornada, para que la relación entre movimiento uniforme y movimiento acelerado se concretice, es necesaria la aplicación de un teorema que intermedie ambos movimientos, y como vimos, Galileo tiene dos teoremas que permiten esta relación. En los *Discorsi*, Galileo utilizará el teorema de la velocidad media para la demostración de teoremas del movimiento acelerado, mientras la regla de doble-distancia es utilizada para la demostración de teoremas de la cuarta jornada. En seguida presentamos un cuadro donde resumimos las principales diferencias entre la regla de doble-distancia y el teorema de la velocidad media.

A partir del cuadro siguiente, podemos ver que tanto el teorema de la velocidad media como la regla de doble-distancia dependen de la suposición medieval de que el área es proporcional a la distancia recorrida, por otro lado, la regla de doble distancia posee una segunda demostración donde requiere la suposición de la igualdad de dos razones entre magnitudes infinitas. Es posible que la segunda demostración de la regla de doble-distancia fuera un intento de Galileo para establecer una vía alterna que hiciera a la regla de doble-distancia independiente de cualquier suposición medieval. Como vimos, es posible que Galileo estuviera consciente de que no es evidente que la igualdad entre magnitudes infinitas sea verdadera, y no es claro si este hecho sea el que al final hizo a Galileo decidirse por el teorema de la velocidad media.

	Regla de doble distancia	**Teorema de la velocidad media**
Condición Inicial	$V_{MU} = V_{MA}$ (*)	$T_{MU} = T_{MA}$ $D_{MU} = D_{MA}$
Diagrama		
Conclusión	Si $T_{MU} = T_{MA} \Rightarrow \mathbf{D_{MU} = 2.\ D_{MA}}$ (Si $D_{MU} = D_{MA} \Rightarrow T_{MU} = ½.\ T_{MA}$)	$\mathbf{V_{MU} = ½.\ V_{MA}}$
suposición	Dos demostraciones: • $D \propto$ Área • $\infty/\infty = \infty/\infty$	Una demostración • $D \propto$ Área

(*) "V_{MA}" representa la velocidad máxima adquirida por el cuerpo en movimiento acelerado

Dado el largo alcance del análisis necesario para la descripción de las diferentes aplicaciones de la relación entre movimiento uniforme y acelerado en los teoremas de la tercera y cuarta jornadas de los *Discorsi*, procederemos de la siguiente forma; en esta sección analizaremos la aplicación del movimiento uniforme al movimiento acelerado, situando, por lo tanto, nuestro análisis a los teoremas de la tercera jornada que utilizan dicha relación. El capítulo 3 de esta tesis está dedicado al análisis del movimiento de proyectiles, y a partir de ahí procederemos a exaltar la aplicación del segundo tipo de relación que mencionamos.

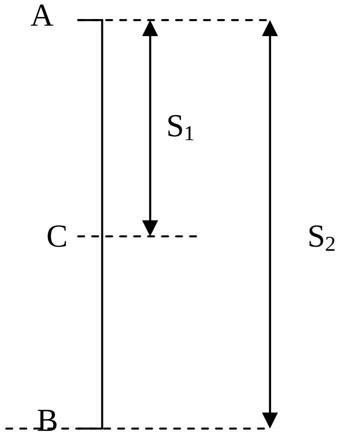
La tercera jornada está compuesta de 22 teoremas y 16 problemas. Del total de 38 proposiciones la gran mayoría es derivada de los teoremas 3 y de un corolario del teorema 2. El primero, ya mencionado anteriormente, establece cuál es la proporción entre distancias y tiempos de recorrido del movimiento a lo largo de planos de distintas inclinaciones; está relacionado al principio de plano inclinado y se deriva del Postulado de Galileo. El teorema 2, también conocido como "teorema de los tiempos cuadrados", establece la proporción entre distancias y tiempos de recorrido en movimiento acelerado (por una vertical o por un plano inclinado). Veremos que tanto el teorema 2 como el teorema 3 dependen directamente del movimiento uniforme, el primero se apoya en el teorema 4 del movimiento uniforme y el segundo en el teorema 1 del movimiento uniforme. Las demás proposiciones de la tercera jornada no necesitarán del movimiento uniforme, dado que se derivan de estos dos teoremas. De este modo, el teorema de la velocidad media es necesario solamente en la demostración de los teoremas 2 y 3 de la tercera jornada, enseguida presentaremos las demostraciones de ambos.

VI.1. El teorema de los tiempos cuadrados y el corolario de la media proporcional

El teorema de los tiempos cuadrados demostrado en los *Discorsi* afirma que:

> "Si un cuerpo cae, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado, los espacios por él recorridos en cualquier tiempo que sea, están entre sí como el cuadrado de la proporción entre los tiempos, o lo que es lo mismo, como los cuadrados de los tiempos" [209 - *Discorsi*]

En otras palabras, si un cuerpo cae por una distancia vertical AB, entonces en el tiempo "T_1" recorre la distancia "S_1" y en el tiempo "T_2" recorre la distancia "S_2", el teorema afirma que[54]: $\mathbf{S_1/S_2 = (T_1/T_2)^2}$



Para la demostración del teorema, Galileo presenta dos segmentos de recta separados, uno representando las distancias y el otro los tiempos de recorrido. Utilizando la definición de movimiento acelerado es posible, a partir del segmento de recta que representa el tiempo, incorporar una representación geométrica de los diferentes grados de velocidad adquiridos durante el movimiento. La demostración puede ser parafraseada como sigue:

[54] En lenguaje moderno, tenemos $S_1 = ½\ g.\ T_1^2$ y $S_2 = ½\ g.\ T_2^2$, por lo tanto: $\mathbf{S_1/S_2 = (T_1/T_2)^2}$ = ½ g

Considere una distancia vertical HI que es recorrida en movimiento acelerado en un tiempo AB. En el tiempo AB tomemos dos segmentos cualesquiera AD y AE para representar los tiempos de recorrido por las distancias HL y HM respectivamente.

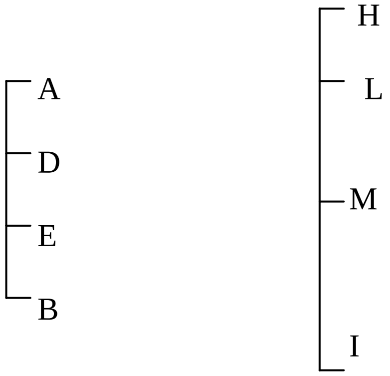
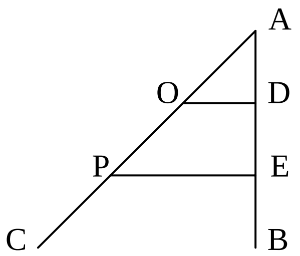


Figura 20 : la distancia HL es recorrida en el tiempo AD, del mismo modo, HM en el tiempo AE y HI en el tiempo AB

A partir del diagrama de la figura 20, la proporción que se pretende demostrar puede ser escrita como sigue**: HM/HL = (AE/AD)^2**

Dado que el movimiento es acelerado, los grados de velocidad aumentan según el aumento del tiempo de recorrido, para representar dichos grados, Galileo toma el segmento que representa el tiempo y, a partir del punto A traza una línea AC formando un ángulo cualquiera con AB. A partir de los puntos D y E se trazan entonces las líneas paralelas a la horizontal DO y EP, de modo que DO representa la velocidad máxima alcanzada durante el intervalo de tiempo AD, mientras EP representa el máximo grado de velocidad adquirido en el intervalo AE.



Como vimos, según el teorema 1 del movimiento acelerado, un móvil en movimiento uniforme recorre la misma distancia en el mismo tiempo que un cuerpo en movimiento acelerado si la velocidad del movimiento uniforme es la mitad de la máxima velocidad adquirida por el movimiento acelerado. De este modo, la distancia HL será recorrida en el tiempo AD en movimiento uniforme si su velocidad uniforme "V_{AD}" es igual a OD/2. Del mismo modo, la distancia HM es recorrida en movimiento uniforme en el tiempo AE si su velocidad uniforme "V_{AE}" es EP/2. Siendo así:

$$V_{AD} / V_{AE} = (OD/2)/(EP/2) = OD/EP$$

A partir de esta conclusión la demostración es presentada como sigue:

1) $V_{AD} / V_{AE} = OD/EP$
2) por **T4 – MU**: HL/HM = V_{AD} / V_{AE} . AD/AE
3) por definición de MA: OD/EP = AD/AE

4) de 1 y 2: HL/HM = OD/EP. AD/AE

5) de 3 y 4: HL/HM = AD/AE. AD/AE

6) luego: HL/HM = $(AD/AE)^2$

Es importante notar que la situación física que el teorema se aplica es de un cuerpo que cae en movimiento uniformemente acelerado, no presenta cualquier consideración de que exista un movimiento uniforme. Sin embargo, en el paso (2) de la demostración podemos observar la aplicación de un teorema que es demostrado para el movimiento uniforme, de modo que dicho teorema no posee cualquier correspondencia con la situación física que fue descrita. De este modo, la presencia de un teorema del movimiento uniforme se deriva de la necesidad de se recurrir a una proporción (o una relación ya establecida entre distancia, tiempo y velocidad) necesaria para demostrar el teorema de los tiempos cuadrados. En efecto, la aplicación del teorema 4 del movimiento uniforme no proviene de una necesidad de explicar una circunstancia física aplicada al teorema, sino de una necesidad que es matemática. Dado que el movimiento uniforme y el movimiento acelerado son de tipos distintos, las proporciones que expresan las propiedades de cada movimiento deben ser igualmente distintas. La estrategia de Galileo consiste en aplicar el teorema de la velocidad media de modo que los teoremas aplicados a cada tipo de movimiento puedan ser relacionados entre sí.

Veremos a continuación que el teorema de los tiempos cuadrados podría también ser demostrado a partir de la regla de doble distancia:

1) V_{AD} / V_{AE} = OD/EP

2) Tenemos entonces que el cuerpo recorre con movimiento acelerado la distancia HL en el tiempo AD adquiriendo velocidad máxima OD. Por la regla de doble-distancia, con velocidad V_{AD} un cuerpo en movimiento uniforme recorrería en el mismo tiempo AD una distancia que es doble, es decir, 2 HL. De este modo, por T4 – MU: **2HL/2HM = V_{AD} / V_{AE} . AD/AE**

3) De la definición de MA: AD/AE = OD/EP

4) de 1 y 3: AD/AE = V_{AD} / V_{AE}

5) de 2 y 4: 2HL/2HM = AD/AE . AD/AE

6) luego: HL/HM = $(AD/AE)^2$

Podemos observar, que las dos demostraciones son muy parecidas, la única diferencia reside en el paso 2, donde se aplica la relación entre el movimiento uniforme y movimiento acelerado.

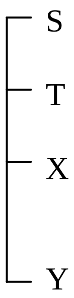
Existen demostraciones tempranas del teorema 2 del movimiento acelerado, donde Galileo utiliza la ley errada de la caída de los cuerpos. Esta demostración puede ser encontrada en los folios 85 seguido del folio 128. Es curioso notar que antes de que Galileo aceptase la ley correcta de la caída de los cuerpos, el teorema 2 ya estaba establecido.

El teorema de los tiempos cuadrados posee dos corolarios, el corolario de los números impares (que será discutido en el capítulo 3) y el corolario de la media proporcional. Este último es central para el desarrollo de gran parte de los teoremas de la tercera jornada, y dada su importancia discutiremos su demostración.

El corolario de la media proporcional establece un método que permite determinar el tiempo de recorrido de un cuerpo en movimiento acelerado en términos de la media proporcional entre dos distancias recorridas. El enunciado del colorario es expresado en los Discorsi como sigue:

> "Se sigue, en segundo lugar, que si se toman, a partir del comienzo del movimiento, dos espacios cualesquiera, recorridos en tiempos cualesquiera, los tiempos respectivos estarán entre sí como cualquiera de los dos espacios está con respecto a la media proporcional entre los dos espacios dados"[55]

Tomamos dos distancias, ST y SY, medidas desde el punto inicial S. la demostración es simple y puede ser parafraseada como sigue:



1) De T2-MA: $SY/ST = (T_{SY}/T_{ST})^2$
2) Suponga SX = mp(SY y ST), entonces se sigue que: SY/SX = SX/ST
3) De (2) tenemos: $ST = SX^2/SY$
4) Sustituyendo 3 en 1: $SY/(SX^2/SY) = (T_{SY}/T_{ST})^2 \Rightarrow \mathbf{SY/SX = T_{SY}/T_{ST}}$

De 4 tenemos que, si el segmento de recta SY representa el tiempo de recorrido por la distancia SY, entonces el tiempo de recorrido por ST será el segmento de recta caracterizado por la media proporcional entre SY y ST[56].

VI.2. El teorema 3 de la tercera jornada

El teorema 3 del movimiento acelerado presentado en los *Discorsi* afirma que:

---

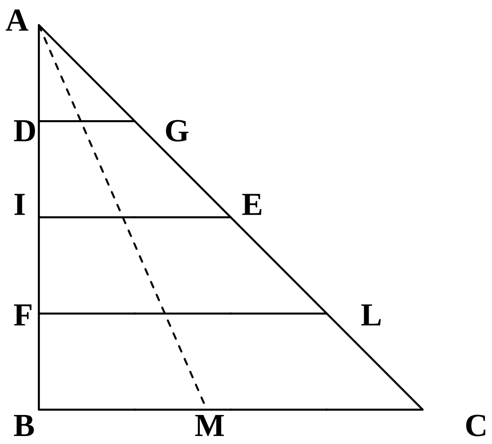
[55] *Discorsi*, p214

[56] En lenguaje moderno:

1) SX = mp (ST y SY)
2) $ST = ½.g.\ T_{ST}^2$
3) $SY = ½\ g.\ T_{SY}^2$
4) De (1): $SX^2 = ST.\ SY \Rightarrow SX^2 = ¼.g\ .(T_{ST}\ .\ T_{SY})^2 \Rightarrow SX = 1/2.g\ .T_{ST}\ .\ T_{SY}$
5) De (3): $½.g = SY/T_{SY}^2$
6) Sustituyendo (5) en (4): $\mathbf{SY/SX = T_{SY}/T_{ST}}$

> "Si uno y mismo móvil se mueve, partiendo del reposo, sobre un plano inclinado y a lo largo de uno vertical, teniendo ambos la misma altura, los tiempos de los movimientos estarán entre sí como las longitudes [respectivas] del plano y de la vertical"[57]

Para la demostración, Galileo construye un plano vertical AB y desde el punto A traza una línea AC formando un ángulo cualquiera con la vertical. El teorema propone entonces probar que las longitudes AB y AC están en la misma razón que sus tiempos de recorrido[58]. La demostración puede ser parafraseada como sigue:



1) del postulado de Galileo: $V_C = V_B$

2) suponiendo que un cuerpo recorriera las distancias AB y AC en movimiento uniforme, y llamando sus velocidades V_{AB} y V_{AC}, respectivamente, entonces de T1-MU: **si $V_{AB} = V_{AC}$, entonces $AB/AC = T_{AB}/T_{AC}$**

3) del teorema de la velocidad media, si las mismas distancias son recorridas en el mismo tiempo por un movimiento uniforme y por un movimiento acelerado, entonces: $V_{AB} = ½\ V_B$ y $V_{AC} = ½\ V_C$

4) sustituyendo 3 en 2: **si** $½\ V_B = ½\ V_C$ entonces: $AB/AC = T_{AB}/T_{AC}$

5) de 1: $V_C = V_{B,}$ luego: $AB/AC = T_{AB}/T_{AC}$

Del mismo modo, podemos extender la demostración para los demás puntos indicados, de modo que:

$V_D = V_G \Rightarrow AD/AG = T_{AD}/T_{AG}$
$V_I = V_E \Rightarrow AI/AE = T_{AI}/T_{AE}$

---

[57] Discorsi, p215

[58] En lenguaje moderno, considere "α" el ángulo entre el plano AC y la horizontal BC. De este modo:

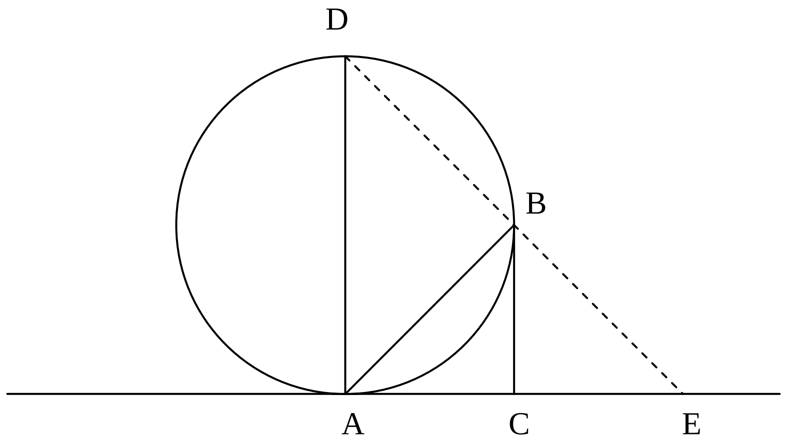
1) $\text{sen}\alpha = AB/AC$.
2) $AB = ½\ g.\ T_{AB}^2$
3) $AC = ½\ g.\ \text{sen}\alpha.\ T_{AC}^2$
4) De (2) y (3): $AC/AB = \text{sen}\alpha.\ (T_{AC}/T_{AB})^2$
5) De (1) y (4): $AC/AB = AB/AC.\ (T_{AC}/T_{AB})^2$
6) $(AC/AB)^2 = (T_{AC}/T_{AB})^2$
7) **Luego: $AC/AB = T_{AC}/T_{AB}$**

$V_F = V_L \Rightarrow AF/AL = T_{AF}/T_{AL}$

El teorema presenta un corolario donde los tiempos de recorrido a lo largo de AM y AC, están en la misma proporción que las distancias AM y AC.

El teorema 3 posee dos demostraciones antecesoras totalmente distintas de la que acabamos de ver. Una está en los folios 138 y 179 que discutimos en la sección 2.

Podemos encontrar en el folio 163, "inmediatamente después de la regla de doble distancia y antes de los corolarios" (Wisan, p215) una demostración temprana del teorema 3 (posiblemente la primera) donde no requiere el teorema de la velocidad media. En este fragmento el teorema 3 es derivado del corolario de la media proporcional y del teorema de las cuerdas (presentado en los *Discorsi* como el teorema 6 del movimiento acelerado). La demostración está presentada como sigue (Wisan, 1973, p215):



1) por teorema de las cuerdas: $T_{AD} = T_{AB}$
2) por corolario de la media proporcional: T_{AD} / T_{BC} = MP (AD y BC) / BC
3) por geometría elemental: AB = MP (AD y BC)
4) luego T_{AD} / T_{BC} = $\mathbf{T_{AB} / T_{BC}}$ **= AB / BC**

El corolario afirma que T_{BE} / T_{AB} = BE / AB.

Capítulo 3:
Movimiento de Proyectiles

I. Introducción

La física terrestre de Galileo está dividida en tres partes: movimiento uniforme, movimiento uniformemente acelerado y movimiento de proyectiles. Como ya vimos, la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado es central para la física terrestre de Galileo, y la importancia de dicha relación se extiende también para los teoremas del movimiento de proyectiles. Sin embargo, existen dos diferencias en el modo que se aplica dicha relación: 1) como vimos en el capítulo anterior, la necesidad del movimiento uniforme para los teoremas del movimiento uniformemente acelerado proviene de una necesidad que es "matemática", en este capítulo veremos que para el movimiento de proyectiles la necesidad del movimiento uniforme proviene de una necesidad que es "física". En otras palabras, los teoremas del movimiento acelerado (que requieren el movimiento uniforme para su demostración) describen situaciones físicas que no se aplican al movimiento uniforme, es decir, el movimiento uniforme no posee existencia "real" para estos teoremas; mientras que en el movimiento de proyectiles veremos la coexistencia de ambos movimientos, es decir, Galileo considera que tanto el movimiento uniforme como también el movimiento acelerado poseen existencia real en las situaciones físicas que serán descritas por los teoremas. 2) Una segunda diferencia importante está en la dependencia entre ambos movimientos. Los teoremas del movimiento acelerado dependen del movimiento uniforme para su demostración, mientras que para el movimiento de proyectiles ambos movimientos son considerados independientes entre sí, es decir, Galileo considera que las leyes del movimiento uniforme ya no interfieren en las leyes del movimiento acelerado. El capítulo 3 será dedicado a esclarecer estas dos diferencias que fueron apuntadas por medio del análisis de las cuatro primeras proposiciones del movimiento de proyectiles (4ª jornada).

Iniciaremos con el análisis de la demostración, realizada por Galileo, de que la trayectoria de un proyectil posee la forma geométrica de una curva muy particular: la parábola. Veremos que dicha demostración está divida en dos partes: una matemática, derivada de una propiedad geométrica de parábolas (del tratado de *Cónicas*, de Apollonius); y una parte física, derivada de la aplicación de teoremas del movimiento acelerado, y la conclusión final de Galileo que proviene de la comparación entre las dos partes mencionadas a partir de la construcción geométrica del teorema. Dedicaremos la sección 3 para describir las objeciones presentadas por Sagredo y Simplicio a este importante teorema.

Realizaremos en seguida un análisis de las demostraciones de las proposiciones 2 y 3, donde Galileo, respectivamente, ofrecerá un método de determinación del grado de velocidad a partir de las velocidades de dos movimientos (uniformes) que son independientes entre sí, y un método de determinación del grado de velocidad adquirido por un cuerpo en caída libre en cualquier instante del movimiento.

Una vez que hemos concluido el análisis de las tres primeras proposiciones del movimiento de proyectiles, veremos cómo estas proposiciones convergen hacia la resolución de un único problema indicado en la proposición 4: cómo determinar los grados de velocidad adquiridos por un móvil en movimiento oblicuo en cualquier instante del movimiento. Veremos así aparecer dos dificultades: una relacionada a la determinación del grado de velocidad de la componente horizontal, y la otra relacionada a la composición de movimientos. La determinación de los grados de velocidades de la componente vertical será dada por el teorema 3, sin embargo, para la determinación del grado de velocidad de la componente horizontal Galileo enfrenta una fuerte dificultad. La componente horizontal es descrita por las leyes del movimiento uniforme, y este, a su vez, dado que no posee ni inicio ni fin (es eterno), no presenta la posibilidad de determinar un grado de velocidad a partir de condiciones iniciales que sean conocidas, de este modo, dado que serán infinitos los grados de velocidad para la componente horizontal no existirá uno que pudiera ser determinado. Veremos que Galileo superará esta dificultad extendiendo las condiciones iniciales aplicadas a la componente vertical para la determinación de la propia velocidad de la componente horizontal, por medio de lo que Galileo llamará "medida común". Esta medida será determinada por medio de la construcción geométrica de un segmento de recta (que será una nueva magnitud para el movimiento compuesto) denominada "elevación de la parábola".

Una vez que cada componente de velocidad ya puede ser determinado (por medio de la medida común), surgirá una segunda dificultad relacionada con la propia composición de movimientos: cómo hacer que dos movimientos, que son independientes, puedan ser relacionados entre sí. Para eso Galileo utilizará el teorema 2, donde las velocidades de movimientos que son perpendiculares entre sí pueden ser relacionadas por medio de un teorema geométrico: el teorema de Pitágoras.

Será por medio del análisis de la proposición 4 que podremos ofrecer al lector una ilustración tanto del modo en que Galileo superará las dificultades mencionadas anteriormente, como también, -lo que caracterizaba el objetivo inicial de este capítulo-, ilustrar la aplicación de la regla de doble distancia en el movimiento de proyectiles. Veremos entonces que dicha aplicación requiere condiciones que restringen la determinación de velocidades del movimiento compuesto, es decir, el método presentado por Galileo puede ser aplicado solamente en un caso particular donde el ángulo de lanzamiento debe ser de cuarenta y cinco grados. Será a partir de la construcción gráfica para la resolución de la proposición 4 (adaptada de modo que la regla de doble distancia pudiera ser aplicada) que Galileo creará nuevas magnitudes físicas: altura, elevación y amplitud, más aptas para la descripción del movimiento de proyectiles, a partir de las cuales los teoremas que se seguirán serán descritos. No podremos ofrecer un análisis de la aplicación de estas nuevas magnitudes debido a la extensión de la tesis, solamente ofreceremos, por medio de la proposición 4, un análisis del origen de dichas magnitudes.

Como hemos dicho en la introducción general, este capítulo no aborda el tema de la ausencia de la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento, solamente podremos ofrecer al lector la oportunidad de verificar que de hecho la aceleración, aún en el movimiento compuesto, no es considerada en las demostraciones de los teoremas que serán analizados. De este modo, el capítulo 3 es presentado como un complemento de los avances realizados en los capítulos anteriores, es decir, un modo de ilustrar aplicaciones prácticas de los teoremas del movimiento uniforme y movimiento uniformemente acelerado para la descripción de una situación física fácilmente observada en la vida cotidiana: el lanzamiento de un proyectil.

II. Teorema 1 – 4ª Jornada

El teorema 1 se inicia con la demostración de dos propiedades de parábolas, la primera es aplicada para la demostración de que la curva que un proyectil describe cuando es lanzado oblicuamente posee la forma geométrica de una parábola (Teorema

1 de la 4ª jornada); y la segunda es aplicada en la Proporción 4 – Problema 1, donde Galileo desarrolla un método de medida de los grados de velocidad del movimiento compuesto. Con el objetivo de hacer más clara nuestra exposición, llamaremos a ambas propiedades 1 y 2, respectivamente.

Podemos describir la propiedad 1 de parábolas como sigue:

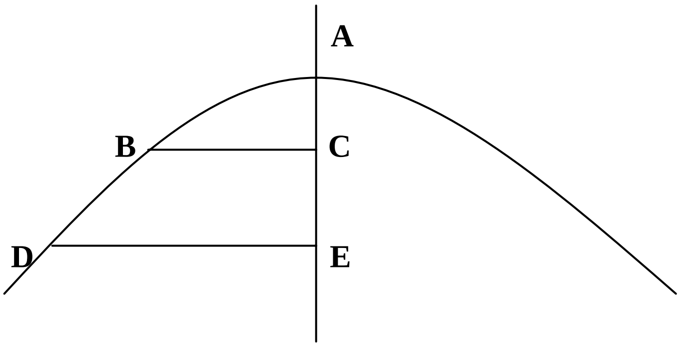


Figura 1

La propiedad 1 afirma que: si la curva AD es una parábola, entonces:

$$\mathbf{BC^2/ED^2 = AC/AE}$$

Para la demostración de esta propiedad Galileo presenta el diagrama geométrico ilustrado en la figura de la página siguiente. La demostración puede ser parafraseada como sigue:

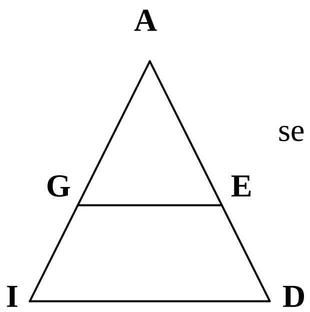
1) Dado que $FE \perp GH$, se sigue que[1]: **$FE^2 = GE.EH$**

2) Dado que $BD \perp IK$, se sigue que: **$BD^2 = ID.DK$**

3) De (1) y (2): **$(BD/FE)^2 = (ID.DK)/(GE.EH)$**

4) Puesto que ED // HK y EH // DK, se sigue que: EH = DK, luego de (3): **$(BD/FE)^2 = ID/GE$**

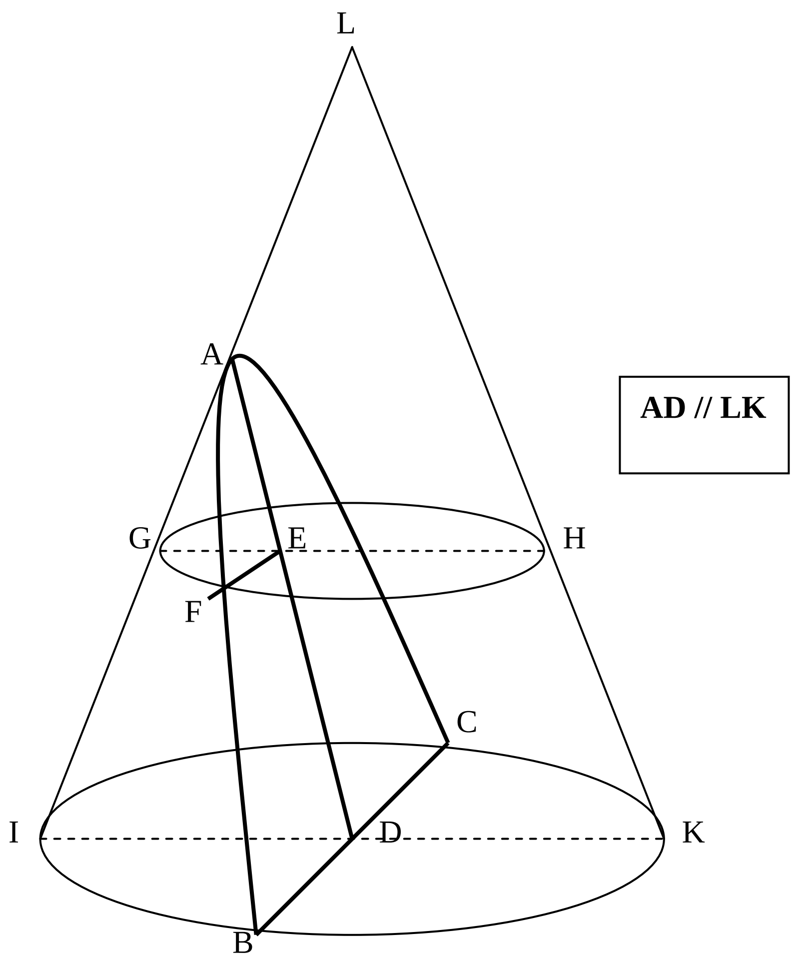
5) De la semejanza entre los triángulos AGE y AID,



se sigue que: **$ID/GE = AD/AE$**

6) De (4) y (5): **$(BD/FE)^2 = AD/AE$ (c.q.d.)**

[1] Los pasos (1) y (2) son derivados de la proporción 13 del libro VI de los Elementos de Euclides, aplicados a la media proporcional (véase apéndice 1)



Evidentemente, como podemos observar, esta propiedad no hace referencia a cualquier elemento que pudiera corresponder a la realidad del movimiento de un cuerpo, se trata de un teorema matemático sin compromisos con la realidad. La estrategia seguida por Galileo será construir un diagrama geométrico, derivado de conceptos y principios físicos del movimiento desarrollados en la 3ª jornada, y hacer que, a partir de dicho diagrama, la propiedad 1 de parábolas pueda ser identificada.

Para la demostración de que la trayectoria de un cuerpo lanzado oblicuamente, presenta la forma geométrica de una parábola, Galileo recurrirá a las leyes y propiedades físicas del movimiento uniforme y del movimiento uniformemente acelerado para explicar una nueva situación física, donde un cuerpo se mueve en la horizontal y simultáneamente por la vertical, de modo que esta nueva "clase" de movimiento incorpora las propiedades de ambos movimientos, ya analizados en la 3ª jornada, simultáneamente.

> "Imaginémos un móvil proyectado sobre un plano horizontal del que se ha quitado el más mínimo roce; sabemos ya que en tal caso, y según el que hemos expuesto detenidamente en otro lugar, dicho movimiento se desenvolverá sobre el plano con un movimiento uniforme y perpetuo, en el supuesto de que este plano se prolongue hasta el infinito. Si, por el contrario, nos imaginamos un plano limitado y elevado, el móvil, que suponemos dotado de gravedad, una vez que ha llagado al extremo del plano y continúe su marcha, *añadirá al movimiento precedente*, uniforme y inagotable, esa tendencia hacia abajo, debida a su propia gravedad. Nace de aquí un movimiento compuesto de un movimiento horizontal uniforme más un movimiento descendente naturalmente acelerado." [268 – *Discorsi*, subrayado mío]

El diagrama abajo (figura 2), representa de forma esquemática la situación física que será utilizada para la demostración del Teorema 1 de la 4ª jornada. Considere un cuerpo que se mueve sobre un plano horizontal y elevado AB con movimiento uniforme con una cierta velocidad. A partir del punto "B", con el término del plano, el cuerpo inicia un movimiento "natural descendiente" a lo largo de la vertical simultáneamente al movimiento que existía a lo largo de AB.

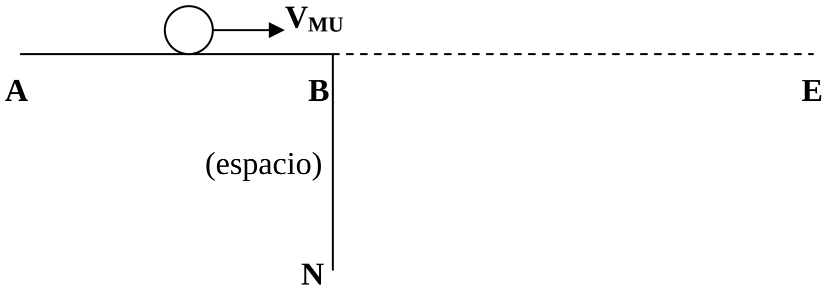


Figura 2

Son dos aspectos claves en la explicación de Galileo para el movimiento compuesto. El primero es la noción correcta de que las propiedades del movimiento uniforme se conservan después del término del plano de apoyo; la segunda es que las propiedades del movimiento uniforme y del movimiento acelerado *son independientes entre sí*, es decir, Galileo ya no utilizará las leyes de un movimiento para derivar las leyes de otro tipo de movimiento (como vimos en las demostraciones de los teoremas 2 y 3 del movimiento acelerado), en el movimiento compuesto, las leyes de cada componente ya están establecidas, y el objetivo será conciliarlas de tal modo que puedan explicar una nueva situación física.

El objetivo del Teorema 1 es demostrar cuál es la trayectoria que será descrita por el cuerpo en movimiento compuesto. Evidentemente, las sucesivas posiciones adquiridas por el cuerpo en caída, que caracterizan la trayectoria, podrán ser determinadas a partir de las distancias recorridas en el mismo tiempo por cada componente del movimiento. Dado que cada componente es independiente entre sí, el único modo de conciliarlas de modo que puedan componer un único movimiento es por medio de la construcción de los recorridos a partir de los mismos intervalos de tiempo. De este modo, el primer paso de la demostración es construir segmentos de recta que representen intervalos de tiempo iguales entre sí. Dividiendo entonces el segmento BE de la figura 2 en partes iguales (representados por los segmentos "BC", "CD" y "DE"), cada parte representará un intervalo de tiempo igual, y será a partir de estos intervalos iguales de tiempo que las distancias recorridas por cada componente serán determinadas.

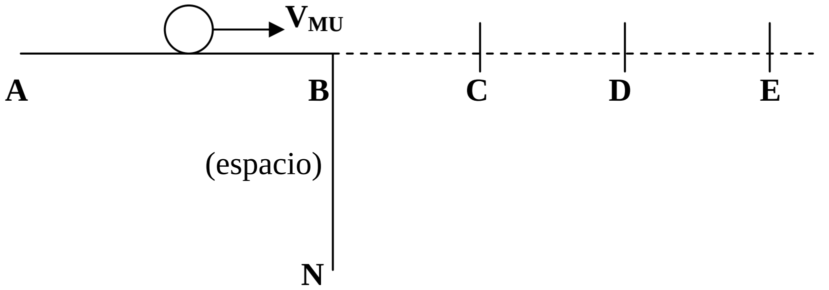


Figura 3

II.1. Determinación de las distancias horizontales

Para la determinación de las distancias horizontales Galileo enfrenta un serio problema. Dado que el movimiento uniforme es invariante (es siempre igual en todos los instantes), no existe un instante que se distinga de los demás instantes del movimiento, de modo que no podemos decir que este movimiento posea un inicio o un fin, este aspecto impide la posibilidad de determinar una velocidad en particular y consecuentemente una distancia de recorrido. Evidentemente, una vez que fijemos un determinado intervalo de tiempo, para cada grado de velocidad existirá una determinada distancia de recorrido (por el teorema 2 del movimiento uniforme). El problema es que dado que existen infinitos grados de velocidad posibles, existirán respectivamente infinitas distancias de recorrido, pero Galileo necesita solamente de una distancia, ¿cómo determinarla?

En la demostración del teorema 1 Galileo no presenta este problema explícitamente, sin embargo, a partir de consideraciones presentadas en la proporción 4 (que veremos más adelante) como también de aspectos derivados de la construcción gráfica de la demostración, concluimos que Galileo *asume* que los segmentos de recta que representan los tiempos de recorrido (segmentos BC, CD y DE) poseen la misma longitud de los segmentos de recta que representarán las distancias de recorrido, es decir, los segmentos de recta BC, CD y DE representarán, simultáneamente, tanto los intervalos de tiempo como también las distancias recorridas. Interpretamos esta suposición como sigue: dependiendo del grado de velocidad del movimiento uniforme, para un mismo tiempo, la distancia de recorrido podrá ser representada por un segmento de recta cuya longitud sea mayor, menor o igual al segmento que representa los intervalos de tiempo. Dado que el tiempo está determinado, de los infinitos valores de velocidad posibles, existe uno (y sólo uno) donde la longitud que representa la distancia coincide con la longitud del segmento que representa el tiempo. La descripción del argumento de Galileo, para la determinación de los grados de velocidad del movimiento uniforme en la resolución de problemas de movimiento compuesto, será presentada en nuestro análisis de la proposición 4.

II.2. Determinación de las distancias verticales

Las distancias verticales son determinadas por medio del corolario de los números impares[2] (que corresponde al primer corolario del Teorema de los Tiempos Cuadrados). Considerando un cuerpo que cae libremente, en movimiento vertical uniformemente acelerado, este corolario afirma que las distancias recorridas sucesivamente, en iguales intervalos de tiempo, aumentan en la misma sucesión de los números impares. En otras palabras, llamando “d” a la distancia recorrida en el primer intervalo de tiempo, entonces en el segundo intervalo de tiempo, igual al anterior, el cuerpo recorrerá una distancia igual a “3d”, en el tercer intervalo de tiempo “5d”, y después “7d”, “9d”, “11d” y así sucesivamente. Representamos en la figura 5 el enunciado del corolario en forma esquemática.

---

[2] La demostración de este corolario, en lenguaje moderno, puede ser dado como sigue:

1) $BF = ½ .g\ t^2$
2) $FG = g.\ t^2 + ½\ g.\ t^2 = 3.\ (½\ g.\ t^2)$,
3) pero de (1) $½\ g.\ t^2 = BF$, luego: $\mathbf{FG = 3.\ BF}$
4) $GH = 2\ g.\ t^2 + ½\ g.\ t^2 = 5.\ (½.\ g.\ t^2)$, luego: $\mathbf{GH = 5.\ BF}$

Colorario de los números impares

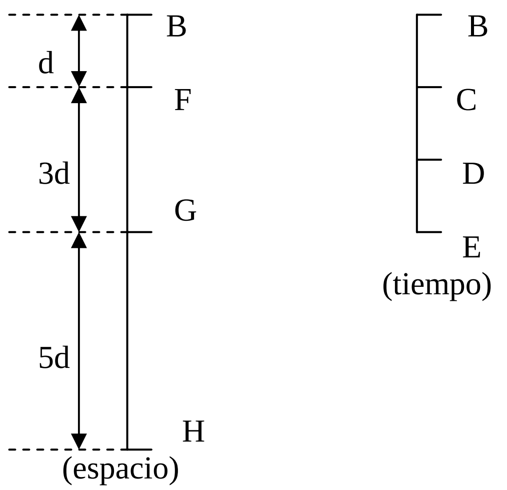
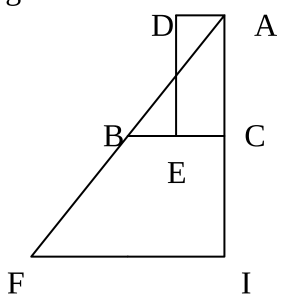


Figura 4: Suponga que un cuerpo parte desde el reposo en el punto A y cae por la vertical AD. En el tiempo BC, el cuerpo habrá recorrido la distancia vertical BF, en el tiempo CD la distancia FG y en el tiempo DE la distancia GH. Para hacer más clara la explicación, llamemos a la distancia BF de "d". El corolario establece que si los intervalos de tiempos BC, CD y DE son iguales, entonces si BF = d, FG = 3d, GH = 5d, y así sucesivamente, según la sucesión de los números impares.

La demostración del corolario puede ser parafraseada a través de cuatro diagramas, como sigue:

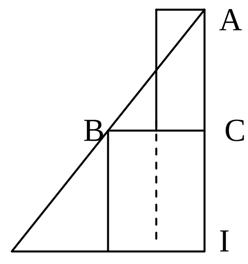
Diagrama 1:



AI: transcurso del tiempo
FI: velocidad máxima alcanzada en el tiempo AI
BC: velocidad máxima alcanzada en el tiempo AC

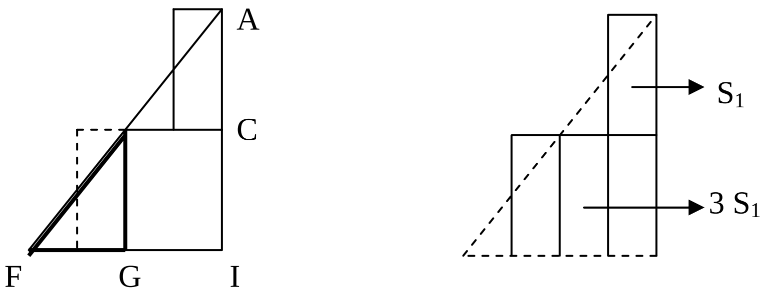
Del diagrama 1: para que un cuerpo en movimiento uniforme recorra en el mismo tiempo AC la misma distancia que en movimiento acelerado, la velocidad uniforme debe ser la mitad de la máxima velocidad alcanzada en el tiempo AC, es decir: CE = ½ BC

Diagrama 2:



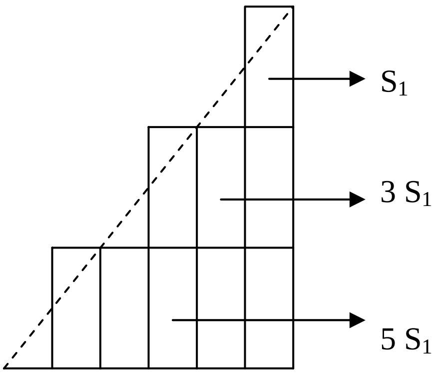
Naturalmente, si el cuerpo siguiera en movimiento uniforme a partir del instante C, en el tiempo CI igual a AC, recorrería un espacio igual al doble del espacio recorrido en AC.

Diagrama 3:



Dado que el cuerpo sigue con movimiento acelerado, a la distancia recorrida en CI por el movimiento uniforme, se debe añadir un crecimiento correspondiente a las paralelas del triángulo BFG. De este modo, el espacio recorrido por el movimiento acelerado en el tiempo CI será tres veces la distancia recorrida en el tiempo AC.

Diagrama 4:



Siguiendo el mismo procedimiento, en el tercer intervalo de tiempo igual a los anteriores, el movimiento acelerado habrá recorrido 5 veces la distancia recorrida en primer intervalo de tiempo, y así sucesivamente.

II.3. Composición de movimientos

En el movimiento compuesto, a cada intervalo de tiempo igual, el cuerpo recorre simultáneamente una distancia horizontal y otra distancia vertical. Para determinar las posiciones del cuerpo en movimiento oblicuo debemos *aplicar las reglas* de la variación de las distancias recorridas para cada dirección del movimiento *simultáneamente*. De este modo, al terminar el primer intervalo de tiempo BC, el cuerpo habrá recorrido una distancia horizontal (representado por un segmento de recta de misma longitud que el segmento BC), y, simultáneamente recorrerá una cierta distancia vertical que corresponde al segmento de recta BF = d (figura 5). En el término del intervalo de tiempo siguiente, CD, el cuerpo recorrerá la misma distancia horizontal que en el intervalo de tiempo anterior, y simultáneamente habrá recorrido en la vertical una distancia representada por el segmento FG = 3d, y así sucesivamente:

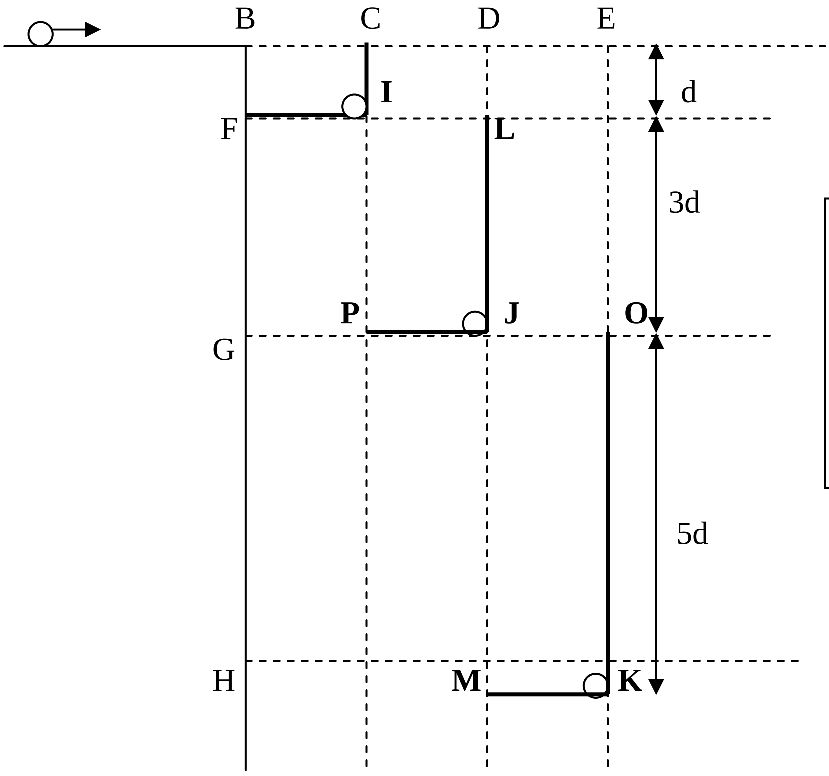


Figura 5: representación esquemática del diagrama utilizado en demostración del teorema 1 de la cuarta jornada

Si consideramos los infinitos instantes del intervalo de tiempo BE, tendremos un conjunto infinito de posiciones ocupadas por el cuerpo a lo largo del movimiento, que una vez unidas darán la forma geométrica de la trayectoria recorrida por el cuerpo. Para la determinación de esta curva, Galileo utiliza el teorema de los tiempos cuadrados y la propiedad de parábolas que mencionamos en el inicio. A partir del diagrama de la figura 5 podemos ver que en el tiempo BC (T) el cuerpo recorre la distancia vertical BF, mientras que en el tiempo BD (2T) recorre la distancia vertical BG (d + 3d = 4d). Para dejar más clara la lectura de estos valores, les presentamos en la siguiente tabla:

Tiempo de recorrido	Unidades de tiempo	Distancia recorrida	Unidades de distancia
BC	**T**	BF	**d**
BD	**2T**	BG	d + 3d = **4d**
BE	**3T**	BH	d + 3d + 5d = **9d**

A partir de las unidades de distancia y tiempo de recorrido, tenemos la relación entre las distancias y los cuadrados de los tiempos, es decir:

$BC^2/BD^2 = BF/BG$, pues $T^2 / (2T)^2 = d/4d$, es decir: ¼ = ¼
$BD^2/BE^2 = BG/BH$, pues $(2T)^2 / (3T)^2 = 4d/9d$, es decir: 4/9 = 4/9

Ahora bien, en la figura abajo (figura 6), suponga que la curva IJK sea una curva cualquiera. Tenemos que, matemáticamente, si la curva IJK es una parábola, entonces la relación **$BF/BG = (FI/GJ)^2$** debe ser verificada. Por otro lado, físicamente, tenemos que “BF” representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo “BC”, mientras que “BG” representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo “BD”, por lo tanto:

1) Por el teorema de los tiempos cuadrados: $BF/BG = (BC/BD)^2$
2) Dado que BC = FI y BD = GJ, de (1): **$BF/BG = (FI/GJ)^2$**
3) Sin embargo, por la propiedad 1 de parábolas, la relación $BF/BG = (FI/GJ)^2$ *solamente es verdadera si la curva IJK es una parábola*.

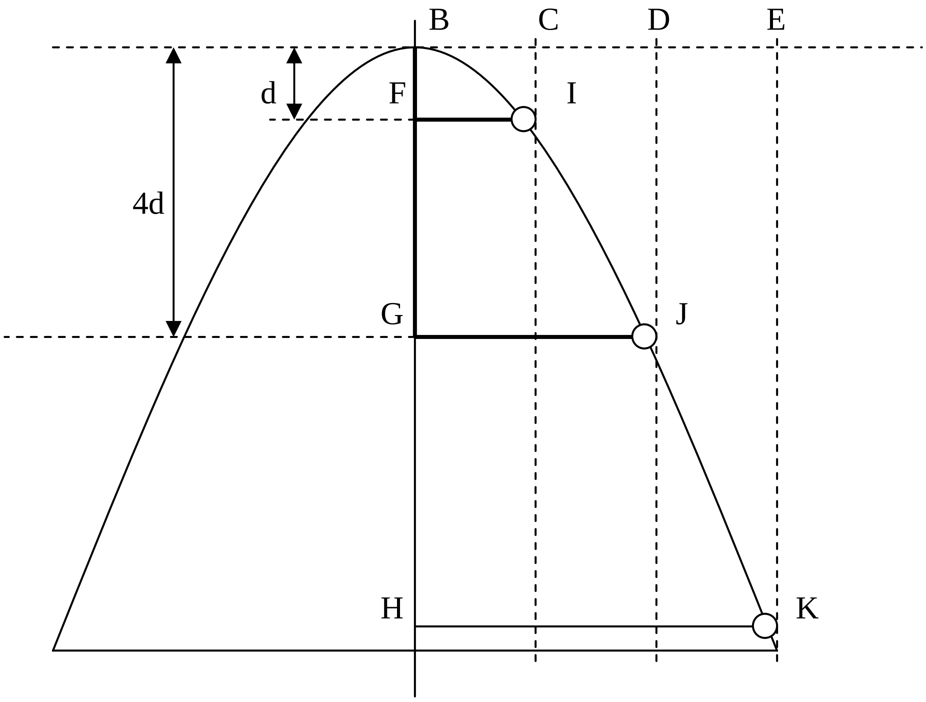


Figura 6

Dado que a partir del "teorema de los tiempo cuadrados" se puede deducir la misma proporción deducida en la propiedad de parábolas que vimos, Galileo concluye que la trayectoria real del cuerpo en movimiento compuesto debe presentar la forma geométrica de una parábola.

III. Tres objeciones al teorema 1

Al término de la exposición de la demostración del teorema 1 del movimiento de proyectiles, Salviati recibe dos objeciones de sus compañeros relacionadas a asunciones que fueron utilizadas en la demostración. La primera es apuntada por Sagredo y cuestiona cómo es posible que ambos componentes sean de hecho independientes entre sí:

> "[…] suponiendo que el movimiento transversal se mantenga siempre uniforme, que el movimiento descendiente se mantenga, igualmente, en la proporción que le corresponde, o sea, acelerándose siempre en proporción al cuadrado de los tiempos, y que tales movimientos y sus velocidades respectivas, al mezclarse, no se alteren y perturben mutuamente, de modo que la trayectoria que recorre el proyectil al continuar su movimiento acabe por degenerar en algo diferente; esto me parece, sin embargo, imposible" [273 – *Discorsi*]

Sagredo argumenta que dado que el eje de la parábola apunta hacia el centro de la Tierra, y dado que la curva al hacer la parabólica siempre se aleja de este eje, el proyectil jamás alcanzaría el centro de la Tierra.

En seguida Simplicio presenta dos objeciones. La primera cuestiona la conservación del movimiento uniforme. Según él, el movimiento uniforme no puede ser perpetuo porque un cuerpo que se mueve sobre una horizontal necesariamente debe acercarse o alejarse del centro de la Tierra. Su argumento puede ser representado esquemáticamente en el diagrama de la figura 7.

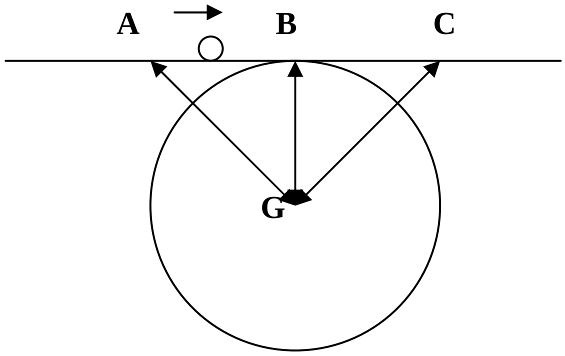


Figura 7: suponga el punto G como el centro de la Tierra, y los puntos A, B y C como posiciones adquiridas por un cuerpo en movimiento horizontal.

A partir del diagrama de la figura 5, Simplicio sugiere que la horizontal es siempre una línea tangente a la superficie de la Tierra, y, de este modo, un cuerpo dotado de movimiento uniforme necesariamente se debe acercar o alejar del centro de la Tierra, de modo que el movimiento debe ser siempre acelerado. En ese caso, el movimiento de "A" a "B" debe ser acelerado, como si el cuerpo descendiera por un plano inclinado, mientras que el movimiento desde B hasta C debería ser como si el cuerpo se moviese hacia arriba en un plano inclinado. Este mismo argumento es presentado en De Motu como sigue:

> "[…] un plano no puede ser paralelo a la horizontal, desde que la superficie de la tierra es esférica, y un plano no puede ser paralelo a tal superficie. Por lo tanto, desde que un plano toca la esfera solamente en un punto, si nosotros nos alejamos de éste punto, nosotros tendríamos que movernos hacia arriba"[3]

La idea implícita en la objeción puede ser derivada del propio análisis realizado para el movimiento acelerado en la tercera jornada de los *Discorsi.* Utilizando lenguaje moderno, Galileo describe solamente movimientos acelerados cuya aceleración es derivada de la acción del campo gravitacional terrestre. De este modo, la aceleración solamente puede actuar sobre el movimiento de un cuerpo si este posee una variación en la distancia de las paralelas a la horizontal. El diagrama de la figura 8 procura ilustrar este concepto.

[3] *De Motu,* p301 -

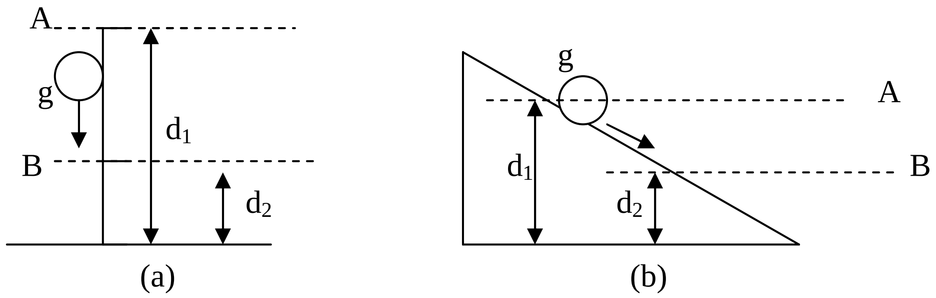


Figura 8: representación de movimientos bajo acción de la aceleración gravitacional en teoremas de la tercera jornada de los Discorsi. En ambos diagramas, a lo largo de su movimiento, el cuerpo “g” presenta diferentes distancias a la horizontal (puntos A y B), por lo tanto el movimiento es acelerado.

En la segunda objeción, Simplicio alega que es imposible obtener un movimiento uniforme experimentalmente, no sólo debido al hecho de que la horizontal sea tangente a la superficie de la Tierra, sino que también es imposible evitar la resistencia del medio, “la cual ha de destruir la uniformidad del movimiento horizontal, así como la ley de aceleración de los cuerpos que caen” [274 – *Discorsi*].

Ambas objeciones convergen hacia dificultades experimentales de probar la conservación del movimiento uniforme, y, en efecto, ambas objeciones son respondidas por medio de aproximaciones de la teoría con la realidad.

Galileo empieza respondiendo la primera objeción de Simplicio recurriendo a aproximaciones utilizadas por Arquímedes:

> “La autoridad de Arquímedes puede tranquilizar a cualquiera; éste en su Mecánica y en el primer libro de la Cuadratura de su parábola, toma como principio cierto que el brazo de una balanza o de una romana es una línea recta, siendo todos los puntos de la misma equidistantes del centro común de los cuerpos, y que las cuerdas de las que penden los pesos son paralelas entre sí.” [275 – *Discorsi*]

Galileo complementa que las distancias con que operamos son tan pequeñas en comparación con la distancia que nos separa del centro de la Tierra que “podemos tomar tranquilamente un minuto de un grado del círculo máximo como su fuese una línea recta, y dos perpendiculares que cuelgan de sus extremos como si fuesen paralelas”.

Evidentemente Galileo responde a la primera objeción de Simplicio por medio de una aproximación. Si hablamos rigurosamente, la trayectoria de cualquier movimiento sobre la superficie de la Tierra debe ser un arco de circunferencia, pero dado que dicha circunferencia posee un radio infinitamente superior a trayectorias observables, podemos considerar, con buena aproximación, que el movimiento sobre la superficie de la Tierra sucede en línea recta, y no en arco[4]. De este mismo modo, Galileo responde en parte la objeción de Sagredo, alegando que un tiro de un proyectil de artillería describe

[4] En referencia a esa misma suposición presentada por Galileo en *De Motu*, Drabkin comenta: “[…] pesos suspensos en los extremos de los brazos de una balanza en equilibrio son asumidos para colgar perpendicularmente al brazo [y de este modo las cuerdas que sostienen los pesos deben ser asumidas como líneas paralelas]. Benedetti, apenas pocos años antes, había criticado la misma asunción en Jordanus y Tartaglia. Ubaldi [Guidobaldo dal Monte] también había discutido el mismo asunto en su *Mechanics* (1577)” [nota de Drabkin en la traducción de *De Motu*, p67]. Drabkin complementa que este asunto fue duramente debatido en el siglo siguiente.

parábolas cuyas dimensiones son insignificantes si son comparadas a la dimensión de la distancia que nos separa del centro de la Tierra.

En la segunda objeción de Simplicio, acerca de la imposibilidad de evitar la resistencia del medio, Galileo comenta:

> "Por lo que se refiere a perturbaciones procedentes de la resistencia del medio, es esta una dificultad más considerable y difícil, dada su multiplicidad de variedades, de someterlas a reglas fijas y a una descripción rigurosa." [275 – *Discorsi*]

Galileo explica que la resistencia del medio perjudica la comprobación experimental de teoremas tanto del movimiento uniforme como acelerado, y cita ejemplos que demuestran la afinidad de Galileo con el uso de recursos experimentales, por ejemplo, él explica como es que el aire interfiere sobre el movimiento y qué se debe hacer para minimizar dicha resistencia: "Por lo que atañe la velocidad, a medida que ésta sea mayor, mayor también será la resistencia ofrecida por el aire" [275 – *Discorsi*]. Galileo orienta que la elección de los tipos de materiales, así como la forma geométrica de los cuerpos pueden ayudar a minimizar los efectos del medio sobre el movimiento,: "La ventaja de esta manera de proceder no será pequeña, puesto que el material y la forma que se elijan habrán de ser los menos sujetos a los inconvenientes del medio, como ocurre con los cuerpos muy pesados y redondos" [276 – *Discorsi*].

Existe un antecedente de la respuesta de Galileo a la objeción de Simplicio en *De Motu* (1590). Al finalizar la demostración de un teorema que determina la razón entre diferentes intensidades del movimiento adquiridos por cuerpos en planos de distintas inclinaciones, Galileo integra el siguiente comentario:

> "Pero esta prueba debe ser entendida en la asunción de que no existen resistencias accidentales (ocasionadas por la aspereza del cuerpo moviente o del plano inclinado, o por la forma del cuerpo). Nosotros debemos asumir que el plano es, así para decir, incorpóreo, o, por lo menos, cuidadosamente alisado y perfectamente duro, […] Y el cuerpo moviente debe ser perfectamente liso, de una forma que no resista al movimiento, es decir, una forma perfectamente esférica, y de un material duro o fluido como el agua". [298-9 – *De Motu*]

Galileo concluye que si el sistema físico está dispuesto según esas recomendaciones (según ese camino), entonces cualquier cuerpo en un plano paralelo a la horizontal podrá ser movido por una fuerza muy pequeña, "por una fuerza menor que cualquier fuerza dada" [299 – *De Motu*], es decir, siguiendo determinadas precauciones, el movimiento uniforme podría ser verificado experimentalmente.

IV. La descripción del movimiento de un proyectil

En el teorema 1 de la 4ª jornada vimos a Galileo deducir que la trayectoria de un cuerpo lanzado oblicuamente presenta siempre la forma de una parábola. En la demostración de este importante teorema, vimos a Galileo aplicar leyes del movimiento uniforme y del movimiento acelerado para caracterizar las distancias recorridas por el proyectil en cada dirección del movimiento; el movimiento uniforme para la componente horizontal y el movimiento acelerado para la componente vertical. Ambas componentes son tratadas de modo independiente, es decir, las distancias recorridas por el cuerpo en la horizontal son independientes de si existe o no cualquier movimiento por la vertical, y viceversa. La única relación que podemos observar entre ambas componentes ocurre por medio de la simultaneidad con que suceden ambos movimientos, es decir, al mismo tiempo, el proyectil recorre dos distancias de modo independiente, una horizontal y otra vertical, y la restricción central que permite que estas distancias puedan convergir hacia la descripción de un único movimiento es que éstas sucedan al mismo tiempo.

Por lo tanto, la relación establecida entre ambas componentes por el teorema 1 sucede a partir de la construcción gráfica de la demostración. En otras palabras, el hecho de que las dos distancias sucedan simultáneamente permite a Galileo afirmar que al término de cada intervalo de tiempo el cuerpo lanzado ocupará solamente una única posición, la cual puede ser identificada solamente a partir de la construcción geométrica del teorema.

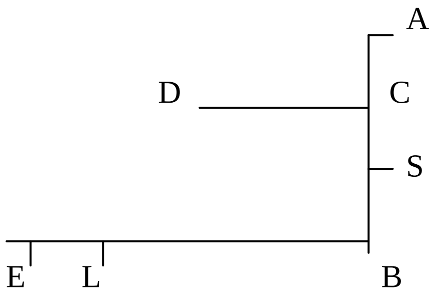
Es importante notar que la relación entre las dos componentes es establecida por medio de las distancias de recorrido bajo la condición de igualdad de los tiempos. El paso siguiente en la descripción del movimiento parabólico consiste en desarrollar un método que permita medir los valores de velocidad adquiridos por el cuerpo a lo largo de su movimiento compuesto. Dado que ambas componentes del movimiento son independientes, para la realización de este segundo paso Galileo necesita primero desarrollar un método que permita determinar las medidas de velocidades de cada componente, por separado, en cada instante del movimiento. Una vez que las velocidades de cada componente puedan ser determinadas, Galileo necesita de un teorema que permita determinar la medida de la velocidad del movimiento compuesto a partir de las velocidades de cada componente. En otras palabras, para la caracterización del movimiento de proyectiles, Galileo debe primero saber determinar los valores de velocidad de cada componente por separado, para que después ambas velocidades determinen una única velocidad del cuerpo en movimiento.

Procederemos identificando cómo Galileo determina las velocidades de cada componente y en seguida la composición de las velocidades.

IV.1. Método de determinación de valores de velocidad para la componente vertical

Este método es determinado por medio del teorema 3 de la 4ª jornada. Este teorema establece que dado el valor de la velocidad adquirida por un cuerpo, en un cierto instante, en movimiento vertical, la velocidad adquirida en cualquier instante del movimiento será igual a la media proporcional entre las distancias recorridas. El teorema es derivado de la regla de doble-distancia, del corolario de la media proporcional y del teorema 2 del movimiento uniforme, la demostración puede ser parafraseada como sigue:

Teorema 3 – proposición 3 del MP (Movimiento de Proyectiles)[5]



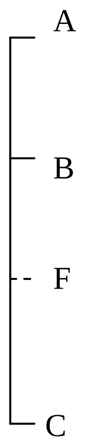
1) Sea AC = T_{AC} = V_C (o Ímpeto en C)
2) Sea AS = mp (AC y AB)
3) sea CD = 2AC y BE = 2AB, por la regla de doble-distancia: **T_{CD} = T_{AC} y T_{BE} = T_{AB}**
4) T_{AC} = AC, por el corolario de la media proporcional: T_{AB} = AS
5) si T_{AB} = AS, de 1: T_{BE} = AS
6) Hagamos ("BL" 4ª proporcional): "tiempo AS / tiempo AC" = BE/BL, (entonces T_{BL} = T_{CD})
7) Dado que el cuerpo recorre BL y CD con movimiento uniforme (puesto que son segmentos horizontales) con velocidades adquiridas en el punto B y C, respectivamente, entonces por T2-MU: **si $T_{CD} = T_{BL} \Rightarrow V_C / V_B$ = CD/BL**
8) Dado: (de 3) AB/AC = BE/CD y (de 2 y 6) BE/BL = AB/AS, entonces: **CD/BL = AC/AS**
9) de 7 y 8: **V_C / V_B = AC/AS**

El paso 6 puede ser interpretado como sigue, por "tiempo AS" entendemos "el segmento de recta AS que representa un tiempo de recorrido", en ese caso representa el tiempo de recorrido por BE (paso 5); del mismo modo, el "tiempo AC" se refiere al segmento de recta AC que representa el tiempo de recorrido por AC (paso1) o por CD (paso 3). Ahora bien, la 4ª proporcional sugiere que si son dadas 3 magnitudes cualesquiera, podemos suponer la existencia de una cuarta magnitud, de modo que las tres primeras adquieran una proporcionalidad, es decir, dado A, B y C, entonces existe X tal que: A/B = C/X. En ese caso, los segmentos AS, AC y BE ya están definidos en la demostración, y el segmento BL adquiere el papel de la 4ª proporcional. En otras palabras, sabemos que T_{BE} = AS, podemos suponer que con velocidad V_B el cuerpo recorrerá una cierta distancia sobre la horizontal BE en el tiempo AC, representamos dicha distancia por el segmento de recta BL.

Podemos parafrasear la conclusión del teorema como sigue:

[5] En lenguaje moderno, la determinación de la velocidad instantánea adquirida por un cuerpo que cae en movimiento uniformemente acelerado puede ser obtenida por las expresiones (donde "V_0" es la velocidad inicial del cuerpo, en el caso de que inicie su movimiento desde el reposo, V_0 =0):
En función del tiempo: $V = V_0 + g. T$
En función de la distancia de recorrido: $V^2 = V_0^2 + 2. g. h$ (donde "h" es la distancia vertical recorrida)

Supongamos que un cuerpo recorre con movimiento acelerado una distancia vertical AC partiendo desde el reposo en A. Supongamos que en el punto B la velocidad adquirida por el cuerpo sea V_B, es decir, $V_B = AB$, y queremos saber cuál es la velocidad del cuerpo en el punto C. El teorema 3 demuestra que la medida de la velocidad en el punto C es representada por la media proporcional entre las distancias AB y AC, entonces: $V_B/V_C = AB/$ [mp (AB y AC)]. Supongamos que AF sea esta media proporcional entre AB y AC, entonces: $V_B/V_C = AB/AF$



Es importante notar que el teorema 3 permite determinar las medidas de velocidad solamente si existe un valor de velocidad que sea conocido y que sea diferente de cero, es decir, en la descripción que hicimos, la velocidad "V_B" debe ser conocida para que la velocidad "V_C" pueda ser determinada.

IV.2. Método de determinación de valores de velocidad para la componente horizontal

Como vimos, el teorema 3 determina que, si existe un valor de velocidad conocido, es posible determinar el valor de la velocidad de la caída de un cuerpo en cualquier instante del movimiento. El objetivo de este teorema es ofrecer un método que sea objetivo, es decir, que cualquiera pueda encontrar los mismos valores de velocidad en el movimiento vertical, dado que "las velocidades crecientes en todas las partes del mundo tienen las mismas características […] los grados de velocidad serán siempre y en todo lugar el mismo" [286 – *Discorsi*]. Para la determinación de la velocidad de la componente horizontal, es necesario el mismo criterio de objetividad, de modo que las velocidades del movimiento compuesto puedan ser siempre las mismas. Por otro lado, mientras que las velocidades de la componente vertical pueden ser determinadas desde que se conozca una velocidad en algún instante del movimiento, para el caso de la componente horizontal es diferente. Como vimos, la componente horizontal del movimiento de un proyectil es determinada por leyes del movimiento uniforme. Dado que en este tipo de movimiento la velocidad posee siempre la misma intensidad, no hay un método que permita determinar el valor de la velocidad, de hecho, el movimiento uniforme puede existir para cualquier velocidad, desde que ésta sea siempre de la misma intensidad:

> "Dado que en el movimiento uniforme son innumerables los grados de velocidad, pero sólo uno de ellos, y no uno cualquiera tomado arbitrariamente, debe correlacionarse con el grado de velocidad adquirido en el movimiento naturalmente acelerado […]" [282 – *Discorsi*]

Galileo entonces apunta hacia la necesidad de una "*medida común* según la cual se pueda medir la velocidad, el ímpeto o la intensidad de ambos movimientos" [282 – *Discorsi*]. La idea es utilizar un mismo conjunto de valores de espacio, tiempo y velocidad, que sirva para establecer las condiciones iniciales del movimiento de ambas componentes. Este conjunto de valores iniciales será representado por medio de un único segmento de recta llamado "elevación", y puede ser caracterizado como sigue:

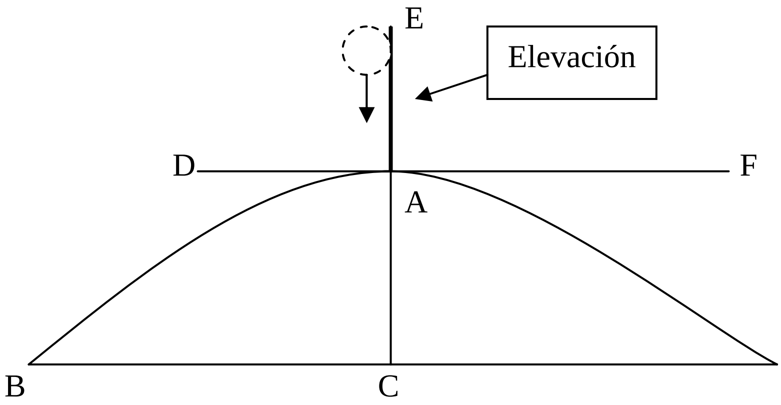


Figura 9: representación de la elevación utilizada por Galileo para establecer la "medida común" necesaria para la determinación de la velocidad de ambas componentes del movimiento.

Usualmente, podemos considerar el inicio del movimiento de un proyectil de diversas formas, sea por el lanzamiento de una flecha desde el punto B, sea con el término de un plano horizontal elevado (como el plano FA de la figura). En ambos casos, la velocidad de la componente horizontal no puede ser determinada. Como solución a este problema, Galileo propone que las velocidades de ambas componentes sean determinadas por una medida común. Supongamos que el cuerpo inicia su movimiento desde el punto E partiendo del reposo. El cuerpo entonces cae con movimiento naturalmente acelerado y adquiere una cierta velocidad V_A al llegar al punto A. La idea es que esa velocidad V_A posea un doble papel: determinará cual será la velocidad del movimiento por la componente horizontal (como si el móvil, a partir de A, continuase su movimiento por la horizontal AD), y, por otro lado, V_A será la velocidad que servirá para determinar las demás velocidades de la componente vertical (por teorema 3).

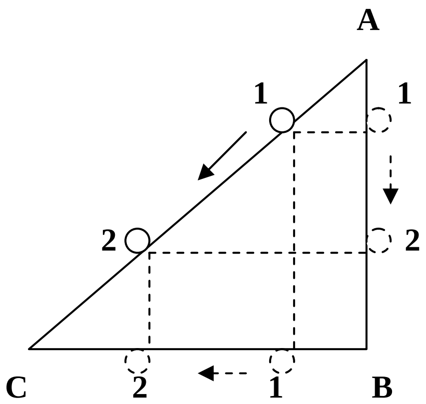
Es importante notar que la velocidad "V_A" no puede ser determinada; debe ser un valor "dado", es decir, hará parte de las condiciones iniciales de la composición de movimientos, será entendido como un valor "conocido", como una referencia para que las demás magnitudes de las componentes puedan ser determinadas. Esto no quiere decir que sea un valor arbitrario, pues "V_A" es definido como la velocidad que el cuerpo adquiriría en al punto A después de recorrer la distancia EA desde el reposo en E. Por otro lado, este valor debe ser considerado como "conocido" dado que Galileo no puede, por medio del sistema matemático utilizado, determinar un valor de velocidad adquirido por un cuerpo a partir de un valor de velocidad nulo. En la práctica, Galileo considerará que el segmento de recta EA representa, a la vez, la distancia recorrida, el tiempo de recorrido y también la velocidad adquirida en A ($EA = T_{EA} = V_A$), y dado que el segmento de recta que representa la velocidad V_A es conocido (dado por la "elevación"), se considera que la propia intensidad de la velocidad, como también el tiempo de recorrido, son conocidos.

IV.3. La composición de movimientos

Una vez que ambos valores de velocidad ya pueden ser determinados, Galileo necesita un nuevo teorema que permita relacionar ambos valores de modo que a partir de estos la velocidad del movimiento compuesto pueda ser determinada. Dicha relación es establecida por medio del teorema 2 de la 4ª jornada.

La demostración del teorema 2 puede ser parafraseada como sigue:

Teorema 2 – Proposición 2 del MP[6]



Supongamos que un cuerpo recorre la distancia AC con movimiento uniforme. La idea es imaginar que este movimiento es doble, es decir, mientras el cuerpo recorre la distancia AC, recorrerá, con movimiento uniforme, las distancias AB y AC simultáneamente; de este modo, estas dos últimas asumen el papel de componentes del movimiento por AC. El objetivo es establecer cuál será la relación entre las velocidades de los tres movimientos. La demostración puede ser parafraseada como sigue:

1) T(AB) = T(BC) = T(AC)
2) Por T2 –MU: si T(AB) = T(BC) , entonces AB/BC = V_{AB} /V_{BC},
3) Por T2 -MU: si T(AB) = T(AC), entonces AC/AB = V_{AC}/V_{AB}
4) Asumiendo que $\mathbf{V_{AC} = AC}$, entonces de 3: $\mathbf{V_{BC} = BC}$
5) De 4 y 2: $\mathbf{V_{AB} = AB}$
6) Por teorema de Pitágoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2$
7) Luego, de 4: $V_{AC}^2 = V_{AB}^2 + V_{BC}^2$

De este modo, si las intensidades de velocidades en ambas componentes fuera 3 y 4, por ejemplo, Galileo esclarece que la velocidad resultante no será simplemente la suma de ambos valores, es decir, 7, sino más bien 5, pues en ese caso tendríamos 16 sumado a 9, resultado 25, cuya raíz cuadrada será 5.

Es importante notar que el teorema 2 establece la relación entre las componentes del movimiento para el caso específico donde ambas componentes son casos de movimientos uniformes. Por otro lado, como vimos, en el movimiento de proyectiles, uno de los componentes es un movimiento acelerado. En otras palabras, Galileo demuestra un teorema que establece la relación entre las velocidades de dos

[6] En lenguaje moderno, la demostración de la composición de velocidades puede ser obtenida por medio de la “regla del paralelogramo” (composición vectorial de velocidades – para más detalles véase apéndice 3).

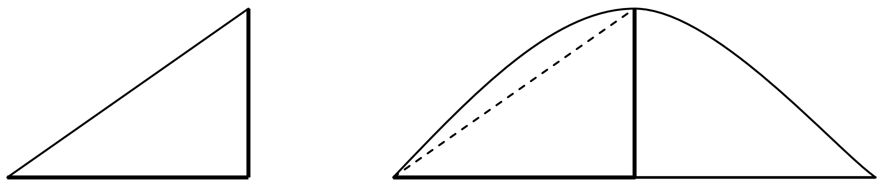
movimientos de mismo tipo, mientras que la relación que necesita debe ser entre velocidades de tipos distintos. Galileo no esclarece cómo este teorema puede ser válido para el segundo caso, simplemente asume que es válido. La extensión del teorema 2 para velocidades de movimientos distintos es expuesta en las palabras de Sagredo al final de la resolución del problema 1 – proposición 4:

> "Ver cómo se unen estos impetos diversos, así como la cantidad de impeto que resulta de tal mezcla, es algo para mí tan nuevo que produce en mi mente no poca confusión. No me refiero a la unión de dos movimientos uniformes, aunque sean desiguales entre sí, cuando dicha unión tiene lugar por las líneas horizontal y perpendicular, respectivamente, puesto que en ese caso veo perfectamente que el resultado es un movimiento cuyo cuadrado es igual al cuadrado de ambas componentes. La confusión surge cuando la composición se da entre el movimiento horizontal uniforme y el perpendicular naturalmente acelerado. Desearía, pues, que tratáramos de asimilar mejor ésta materia." [285 – *Discorsi*]

Como respuesta, Salviati hace una extensa exposición de lo que ya había sido dicho, resaltando, por ejemplo la importancia de una noción de velocidad que sea "común y aceptada por todos"; ofrece una explicación del método que utiliza para determinar los tiempos y intensidades de velocidad de un cuerpo en caída libre (corolario de la media proporcional y teorema 3 – MP); presenta un ejemplo del teorema 2 para el caso de componentes de mismo tipo (ambas con movimientos uniformes); explica nuevamente la resolución del problema 1. Aparentemente, en toda la exposición, el momento en que más se acerca de una respuesta más aceptable a la pregunta de Sagredo es cuando aplica una analogía entre grados de velocidad de un cuerpo con la "fuerza de golpe" que este cuerpo produce contra un obstáculo. Es posible que Galileo tuviera en mente que las velocidades del movimiento compuesto aumentan en "grados", y, a cada instante del trayecto parabólico, la intensidad de la velocidad resultante adquirida por el cuerpo es proporcional a la fuerza con que éste choca contra el obstáculo. En ese caso, lo que importaría serían las intensidades de las velocidades de cada componente en cada instante del movimiento; aún así, esta analogía es establecida por Galileo para un caso donde ambas intensidades de velocidad sean uniformes.

Podemos investigar, a partir del conocimiento de Galileo sobre las propiedades del movimiento, qué dificultades existen para demostrar la aplicación del teorema 2 en un caso donde una de las componentes del movimiento es de tipo acelerado.

Una primera dificultad está en la propia construcción del triángulo utilizado en la demostración del teorema 2. Como sabemos, el teorema de Pitágoras, que determinó, al final la propia composición de velocidades, solamente es válido para triángulos que posean un ángulo recto. Ahora bien, cuando Galileo utiliza el movimiento uniforme en ambas componentes del movimiento, dado que a cada intervalo de tiempo, las distancias serán proporcionales entre sí (por T2 – MU), todos los puntos del movimiento compuesto resultarán "colineales", es decir, que pertenecen a un mismo segmento de recta. De este modo, la conjunción de dos movimientos uniformes es consistente con la forma geométrica de un triángulo. Por otro lado, si una de las componentes del movimiento es acelerado, las distancias recorridas por ambas componentes a cada intervalo de tiempo ya no serán proporcionales entre sí, dado que una será siempre igual mientras la otra aumenta a cada intervalo de tiempo. El resultado de la conjunción entre las distancias de las dos componentes resultaría, como vimos en la demostración del teorema 1 –MP, en una parábola, y no 3 en un segmento de recta, y en ese caso el triángulo deja de existir y el teorema de Pitágoras ya no puede ser aplicado. La figura abajo ilustra la diferencia que acabamos de analizar.

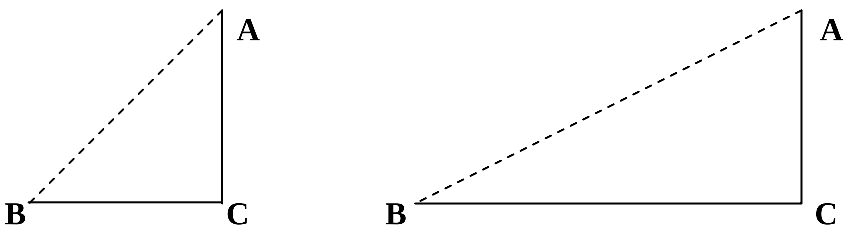


(a) (b)

Figura 10: (a) figura geométrica derivada de la composición de movimientos de mismo tipo, uniforme; (b) figura geométrica derivada de la composición de movimientos de tipos distintos, uniforme (horizontal) y acelerado (vertical)

La solución para este problema será presentada por Galileo a través de la “medida común” que permite determinar las velocidades de ambas componentes del movimiento, y mostraremos cómo por medio del análisis del problema 1 de la cuarta jornada, y de la forma en que en la práctica los teoremas 1, 2 y 3 actúan en la descripción del movimiento de un proyectil.

Podemos también observar que si utilizamos la regla de doble-distancia o el teorema de la velocidad media para extender la aplicación del teorema 2 a movimientos acelerados, surgirá una restricción sobre la construcción del triángulo rectángulo utilizado en la demostración, esto hace que la composición de movimientos se vuelva un caso particular. Como vimos, los dos teoremas que relacionan el movimiento uniforme con el movimiento acelerado poseen restricciones sobre las relaciones entre tiempos y distancias. La restricción sobre el tiempo no es problemática, dado que para que los tiempos sean iguales basta asumir que ambas componentes existan simultáneamente; de hecho, ambos teoremas utilizan la igualdad de los tiempos. Por otro lado, la restricción sobre las distancias aplicada a la demostración hace que los triángulos sean casos particulares. El teorema de la velocidad media requiere que las distancias recorridas sean iguales, eso hace que el triángulo utilizado por el teorema 2 sea isósceles, mientras que la regla de doble-distancia afirma que la distancia recorrida por el movimiento uniforme sea del doble de la distancia recorrida por el movimiento acelerado, y eso hace con que el triángulo sea también un caso especial. Es este último caso el que será aplicado por Galileo en la determinación de los grados de velocidades adquiridos por un proyectil.



(a) Teorema de la velocidad media

(b) regla de doble-distancia

Figura 11

En la figura 11, en ambos esquemas el segmento AC se representa la “elevación” que permite la “medida común” de los valores de velocidad. En el diagrama (a), tenemos la construcción del triángulo apto para la aplicación del teorema de la velocidad media (AC = BC), y en efecto, la velocidad con que el cuerpo recorre la distancia BC debe ser la mitad de la velocidad máxima adquirida por el cuerpo en su descenso en movimiento acelerado por AC. Es importante notar que este teorema no es compatible con la idea de medida común que Galileo utilizará para la descripción del movimiento de un proyectil. En el diagrama (b) tenemos BC = 2AC, en ese caso, a partir de la regla de doble-distancia, la velocidad con que el cuerpo recorre toda la distancia BC debe ser igual a la velocidad máxima adquirida en el descenso del cuerpo por AC. Por lo tanto, la medida común podrá ser aplicada bajo la restricción impuesta por la regla de doble-distancia sobre las distancias recorridas.

Un segundo aspecto reside en la propia forma geométrica de una parábola. Si las distancias AC y BC son iguales, es más fácil que la curva que une los puntos A y B sea un arco de circunferencia, mientras que si BC = 2AC (como veremos más adelante), es posible trazar arcos de parábola para unir los puntos A y B.

De este modo, el teorema 2 es demostrado para cualquier triángulo rectángulo, desde que las componentes sean ambas compuestas por movimientos uniformes. Para que el teorema 2 pueda ser aplicado para la composición de movimientos de tipos distintos, surge la restricción sobre las distancias recorridas por ambas componentes en el mismo tiempo, que debe ser impresa por medio de las longitudes de los lados del triángulo. Galileo posee dos alternativas, ya sea imponer que los lados sean iguales y aplicar el teorema de la velocidad media, o bien que un lado sea el doble del otro y utilizar la regla de doble distancia. De estas dos alternativas, parece ser que la regla de doble-distancia posee mejores posibilidades de representar una solución más simplificada para la determinación de los grados de velocidad del movimiento compuesto.

IV.4. La teoría en la práctica – la determinación de las velocidades del movimiento compuesto[7]*.*

La Proposición 4 – Problema 1 pide que se determinen las medidas de los grados de velocidad del movimiento compuesto para cualquier instante del movimiento. Para la construcción de la resolución del problema surge la aplicación de *tres condiciones*. La primera condición, como vimos, se deriva de la exigencia, física, de que ambas componentes del movimiento existan simultáneamente, de este modo, el tiempo de recorrido por ambas componentes debe ser siempre el mismo.

La segunda condición se deriva de una propiedad geométrica de parábolas. En la figura de abajo, considere el punto C como tangente a la parábola BC. “A” es el punto de intersección entre la vertical AD y la tangente AC, y “B” es el punto de intersección entre la vertical AD y la horizontal BI, entonces esta propiedad demuestra que AB será siempre igual a BD. Ver figura 12.

La tercera condición se deriva de la “medida común” necesaria para que las velocidades de ambas componentes puedan ser determinadas. En la figura del diagrama anterior, las componentes del movimiento se realizan a lo largo de los segmentos BD y DC. Ahora bien, vimos que AB = BD, de modo que, si el cuerpo parte del reposo en el punto “A” y recorre el segmento AB con movimiento acelerado, adquiriendo velocidad V_B en el punto B, y, del mismo modo, si iniciase su movimiento en el punto B, desde el reposo, y recorriera la distancia BD con movimiento acelerado, adquiriendo velocidad V_D en el punto D, dado que AB = BD, entonces se sigue que: $T_{AB} = T_{BD}$ y $V_B = V_D$. Por otro lado, la velocidad V_B es la velocidad de la componente horizontal del cuerpo. Dado que ambas componentes del movimiento coexisten, entonces en el tiempo T_{BD} la

[7] Para la demostración en lenguaje moderno, véase apéndice 3

distancia horizontal recorrida debe ser, según la regla de doble distancia, 2BD. En otras palabras, de la asunción de Galileo de que ambas componentes del movimiento deben poseer una medida común deriva una consecuencia, no geométrica, de que la distancia CD sea el doble de la distancia BC. De hecho, la relación entre los segmentos CD y BC no es derivada de una propiedad general, ni geométrica ni tampoco física, se deriva, más bien, del método utilizado por Galileo para determinar las velocidades de ambas componentes.

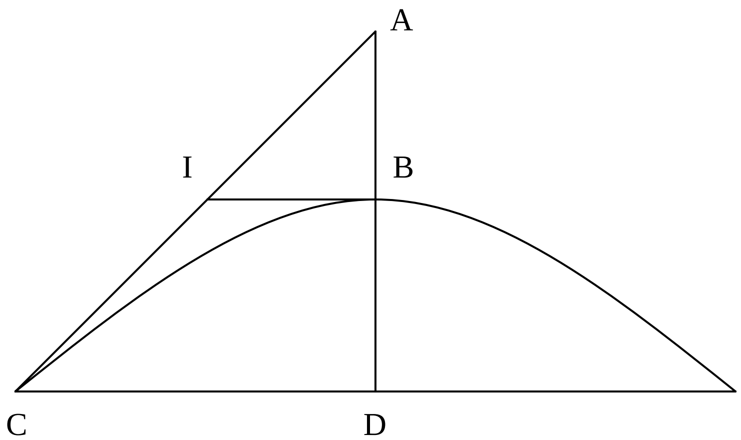


Figura 12: representación para la explicación de la segunda propiedad de parábolas utilizada por Galileo para la descripción del movimiento de proyectiles

Dado que AB = BD y CD = 2BD, entonces CD = AD, de modo que la construcción de la resolución del problema 1 se restringe a lanzamientos de proyectiles con un ángulo de 45^o (dado que el triángulo ACD debe ser isósceles).

A partir de estas tres condiciones y de los teoremas 1, 2 y 3, el problema 1 puede ser desarrollado. Con la finalidad de identificar cómo esas tres restricciones mencionadas articulan la resolución del problema 1, llamaremos:

- **C1** la restricción de que los tiempos deben ser iguales,
- **C2** la propiedad de la tangente a parábola, es decir: AB = BD
- **C3** la restricción de que el ángulo debe ser de 45^o: CD = AD

La condición 1 es necesaria, pues es derivada de la exigencia de que ambas componentes existan simultáneamente; la condición 2 será utilizada para determinar una elevación que tenga relación con las distancias recorridas, de modo que las velocidades de ambas componentes puedan ser determinadas; y la condición 3 permitirá que la regla de doble-distancia sea aplicada al problema.

La resolución del problema puede ser parafraseada como sigue:

Medida común: $\mathbf{AB = T_{AB} = V_B}$

Parte 1: Determinación de la componente vertical

1) por **C2**: AB = BD

2) si consideramos que un móvil parte del reposo desde A y se mueve hasta el punto B, y después parte nuevamente del reposo en B y se mueve hacia el punto D, dado que AB = BD, y dado que la aceleración en ambos movimientos es la misma (misma inclinación), entonces: **T (AB, A) = T (BD, B) –** [C1 satisfecha]
3) dado que las distancias y tiempos de recorrido por AB y BD son iguales, entonces la máxima velocidad adquirida en ambos movimientos acelerados deben ser iguales, es decir: V_B (desde el reposo en A) = V_D (desde el reposo en B)
4) dado que V_B = AB, entonces V_D = AB
5) Por C3: AB = BI = BD, luego: $\mathbf{V_D = BI}$

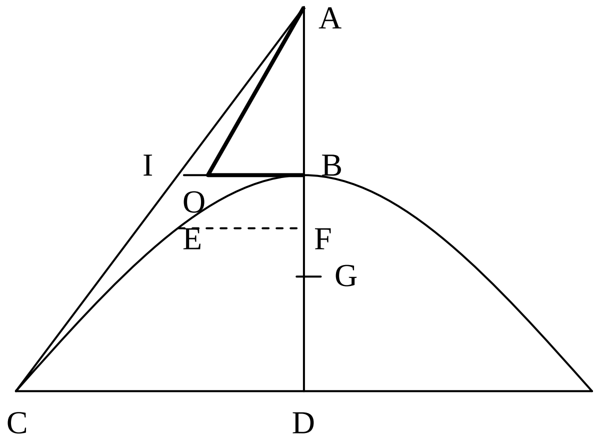
Parte 2: Determinación de la componente horizontal

6) dado la velocidad de la componente horizontal**:** $\mathbf{V_{MU} = V_B = AB}$
7) por C3: CD = AD
8) dado AB = BD, entonces CD = 2AB (o CD = 2 BD)
9) de 5 y 7: por la regla de doble distancia, T (AB, A) = T (CD).
10) Dado que **T (AB, A) = T (BD, B)**, entonces de 8: T(CD) = T(BD, B) – [C1 satisfecha]

Parte 3: Determinación de la velocidad compuesta del móvil en el punto C:

11) dado el triángulo ABI, por teorema de Pitágoras: $AI^2 = AB^2 + BI^2$
12) pero BI = V_D y AB = V_{MU}, por lo tanto: $AI^2 = V_D^2 + V_{MU}^2$
13) por T2 – MP: $V_D^2 + V_{MU}^2$ = (velocidad compuesta por ambos movimientos)^2
14) luego: $V_C^2 = AI^2 \Rightarrow \mathbf{V_C = AI}$

La igualdad de los tiempos (condición 1) fue satisfecha para la componente horizontal por medio de la regla de doble-distancia, mientras para la componente vertical por medio de la igualdad de segmentos (C2). La composición de las velocidades de ambos movimientos es, al final, determinada a partir de un triángulo; la demostración consistió, en resumen, en determinar que ambas velocidades pueden ser medidas por segmentos que forman un triángulo rectángulo. En seguida veremos la segunda parte de la demostración, donde Galileo determinará la medida de la velocidad del movimiento compuesto para cualquier instante del movimiento. Naturalmente, en ese caso, la velocidad de la componente horizontal permanecerá la misma, mientras que la velocidad de la componente vertical será derivada a partir del teorema 3 de la 4ª jornada. La demostración puede ser parafraseada como sigue:



Suponga, ahora, un punto cualquiera "E" de la parábola descrita por la trayectoria del proyectil. Tomemos BG como media proporcional entre BF y BD, entonces tenemos:

1) sea EF paralela a CD
2) dado que BG = mp(BF y BD), entonces, por T3 –MP: $V_D/V_F = BD/BG$, luego, dado que $V_D = BD$: $\mathbf{V_F = BG}$
3) tomemos el segmento BO igual a BG trazado desde el punto B. Dado que AB = BD (C2) y AB = BI (C3), el segmento BO debe ser menor que BI.
4) Dado que BG = BO, se sigue que $\mathbf{V_F = BO}$
5) Entonces tenemos: $V_{MU} = AB$ y $V_F = BO$
6) Por teorema de Pitágoras en el triángulo ABO: $AO^2 = AB^2 + BO^2$
7) De 5: $AO^2 = V_{MU}^2 + V_F^2$
8) De T2 – MP: $V_{MU}^2 + V_F^2 = V_E^2$
9) Luego: $V_E^2 = AO^2 \Rightarrow \mathbf{V_E = AO}$

De este modo, los grados de velocidad adquiridos por un cuerpo en movimiento compuesto son determinados por medio de rectas identificadas por hipotenusas del triángulo rectángulo, donde uno de sus catetos es formado por la propia "elevación" de la parábola. Naturalmente, en el instante cero, la hipotenusa coincide con la elevación, y la velocidad del movimiento compuesto será la propia velocidad del movimiento uniforme. En la medida que el movimiento avanza, la longitud de la hipotenusa aumenta gradualmente hasta coincidir con el segmento AI, donde la velocidad será máxima. En realidad Galileo no ofrece un método de determinación numérico para las velocidades, más bien se trata de un método geométrico, dado que las velocidades son identificadas por segmentos de recta. La restricción es clara, dado que para la resolución es necesario que el segmento CD sea igual al segmento AD para que las velocidades puedan ser determinadas, no se trata, por lo tanto, de un método general.

Conclusión General

La presente tesis está dedicada al análisis de la matematización de la física terrestre de Galileo Galilei. Considerando los distintos modos de abordar este tema (algunos señalados en la introducción), procuramos abordar un problema que es central en la física galileana: la ausencia de la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento uniformemente acelerado. Dada la extensión del análisis necesario para la consolidación de este importante aspecto, decidimos orientar nuestro análisis por medio de dos hipótesis de trabajo, a partir de las cuales realizamos una descripción de la aplicación de la teoría de proporciones a la ciencia del movimiento en Galileo.

La primera hipótesis considera que la ausencia de la aceleración es un problema de interpretación acerca de cuáles magnitudes son expresadas en la teoría de proporciones. Esta hipótesis se origina a partir de dos bases: la paradoja de Galileo y el ímpeto considerado como un invariante del movimiento uniformemente acelerado. Presentaremos a continuación las principales conclusiones del análisis que fue realizado sobre estas dos bases en el capítulo 1.

La paradoja surge como una contradicción de resultados derivada del estudio de Galileo de las propiedades del movimiento acelerado en planos inclinados. Por un lado, el Postulado afirma que las velocidades adquiridas en el descenso deben ser iguales, por otro lado, el teorema *De Motu* afirma que las velocidades no son iguales. Galileo no entiende cómo es posible que sea así, y no consigue ofrecer una respuesta a esta contradicción. Sabemos hoy que tal contradicción no existe, una vez que interpretamos el "más veloz" del teorema *De Motu* como "mayor aceleración". El hecho de que esta paradoja haya resistido casi tres décadas en los trabajos de Galileo, puede ser una consecuencia de que él buscaba realizar una descripción del movimiento acelerado no en términos de cuatro, sino en términos de tres magnitudes centrales: el espacio, el tiempo y la velocidad. Como conclusión de esta primera base, tenemos que con el teorema *De Motu* Galileo poseía una proporción que determina una ley de variación correcta del movimiento uniformemente acelerado, pero el hecho de que haya interpretado "velocidad" al contrario de aceleración, es un indicativo de que Galileo no consideró que pudiera existir una nueva magnitud, de un tipo físico distinto a las tres anteriores, a partir de la cual el movimiento uniformemente acelerado pudiera ser descrito.

El aspecto más importante de la paradoja es que ésta se aplica directamente a uno de los principios fundamentales de la física terrestre de Galileo: el Postulado. En el primer escolio de la 3ª jornada de los *Discorsi*, Galileo realizará una nueva demostración para el Postulado, que incorpora nuevos elementos conceptuales que fueron considerados en la segunda base que sostiene la primera hipótesis de trabajo. En esta tesis, consideramos que la demostración de este escolio puede ser la última tentativa de Galileo de dar una resolución a la paradoja. Para que podamos relacionar el ímpeto como un invariante con la primera hipótesis de trabajo, necesitamos realizar dos consideraciones, ambas aplicadas a la demostración del primer escolio, que buscan esclarecer el significado físico de "ímpeto" para Galileo: la relación entre el "lema de los ímpetos" y el "teorema *De Motu*" y la relación entre "ímpeto" y "grados de velocidad".

Como vimos, en el primer escolio, el Postulado es demostrado a partir de lo que Galileo llamó "lema de los ímpetos". Aunque Galileo no realice consideraciones explícitas, el "lema de los ímpetos" parece estar relacionado al teorema *De Motu,* pues: ambos se aplican al mismo sistema físico (plano inclinado); el ímpeto (en el lema) y la “fuerza de descenso” (en el teorema *De Motu*) obedecen las mismas leyes de variación (determinada según la inclinación del plano); ambos están relacionados al Postulado; ambos están relacionados al principio de plano inclinado; y por último, ambos establecen una proporcionalidad inversa entre las longitudes de los planos y una magnitud que expresa una propiedad del movimiento, dicha magnitud corresponde a la “velocidad” en el teorema *De Motu*, y al “ímpeto” en el lema de los ímpetos.

La relación entre ímpeto y grados de velocidad es oscura, dadas ciertas ambigüedades que dicha relación incorpora. En el inicio del escolio, vemos a Galileo enunciar que las velocidad o momentos de un mismo móvil son diversas y varían según la inclinación del plano, y que el máximo grado de velocidad es adquirido cuando el plano se encuentra en la posición vertical. De ahí, Galileo concluye que “el ímpeto, el talento, le energía, o, como podemos decir, el momento de descenso de un móvil va disminuyendo según el plano se aleja de dicha verticalidad”. De este modo, Galileo explica al lector que grados de velocidad y el ímpeto son magnitudes que obedecen la misma ley de variación, dado que ambas aumentan (o disminuyen) según el plano se acerca (o se aleja) de la verticalidad. De hecho, esta interpretación es confirmada a partir de la proporción entre ímpeto y grados de velocidad que puede ser derivada directamente de la demostración.

El supuesto de que el ímpeto es un invariante del movimiento de descenso de un cuerpo es inesperado, de hecho no hay antecedentes ni en el escolio ni en las demás proposiciones de *De Motu Locali*, y Galileo no presenta ninguna discusión mas detenida que nos permita interpretar el porqué dicho supuesto es asumido. Si de hecho la relación entre el teorema *De Motu* y el Lema de los ímpetos es correcta, entonces es posible que Galileo, al intentar dar una resolución final a la paradoja, se haya dado cuenta de que pudiera existir una “nueva magnitud” del movimiento, de un tipo físico distinto de la velocidad, y los diferentes nombres con que Galileo se refiere a esta nueva magnitud puede ser una pista de que él todavía no estaba seguro de cual sería su significado físico: por un lado, el ímpeto es proporcional a los grados de velocidad, por otro lado, ¿cómo es posible que un invariable (ímpeto) sea proporcional a algo que es variable (velocidad)? La solución debe provenir de una interpretación correcta del significado físico de las magnitudes relacionadas al problema. Sin embargo, Galileo no realiza una distinción clara sobre qué relación debe existir entre ímpeto y grados de velocidad (como afirma el museo nacional de Florencia en la trascripción del manuscrito original de la demostración del escolio: “en ciertos contextos Galileo no realiza una clara distinción entre los conceptos de *momentum gravitatis*[1], grados de velocidad y la noción relacionada de ímpeto”)[2]. En última instancia, dada la relación entre el Lema de los ímpetos y el principio de plano inclinado, el ímpeto debe ser interpretado como un “tipo” de fuerza de descenso (al estilo del teorema *De Motu*) que, desde un punto de vista moderno, corresponde a la “componente de la fuerza peso” que actúa en el movimiento de descenso de un cuerpo.

La segunda hipótesis de trabajo afirma que el problema de la ausencia de la aceleración se origina en límites de representación del sistema matemático utilizado por Galileo. Esta hipótesis también se apoya en dos bases: el problema de la inserción de

[1] Véase sección VI del capítulo 1 de esta tesis

[2] El museo presenta esta observación en la forma de un *hiperlink* denominado “Condition Impetus-veloc-prop”

muevas magnitudes en un sistema matemático preexistente, y el papel central de la relación entre el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado.

En la sección 2 del capítulo 2, vimos que el camino para la inserción de nuevas magnitudes físicas se realiza en dos etapas: la primera consiste en considerar que existe una cantidad finita capaz de representar el aspecto (o cualidad) físico que se pretende cuantificar; y, una vez que la existencia de dicha cantidad fue considerada, el segundo paso consistirá en relacionar esta nueva magnitud con las magnitudes preexistentes, dicha relación es realizada por medio del uso de axiomas.

De este modo, para el movimiento uniforme, Galileo considera en un primer momento que existe una cantidad finita que representa la intensidad del movimiento de un cuerpo, que llamó "velocidad", y, en un segundo momento, determina cómo esta nueva magnitud será cuantificada, es decir, presenta cual será su relación con las magnitudes preexistentes en la definición, es decir, el espacio y el tiempo, por medio del uso de axiomas. Es importante notar que Galileo "ve" la velocidad no como una consecuencia de la definición de movimiento uniforme, sino como una necesidad, sin la cual el espacio y tiempo no podrían ser relacionados matemáticamente. La elección de Galileo de que la nueva magnitud fuera la velocidad, y no otro concepto físico, es natural y aceptable, como sugiere E. Giusti, son muchos los factores que intervienen en la elección del significado físico de la nueva magnitud, "entre ellos, y de manera importante, la tradición". Es de este modo que interpretamos, y respondemos, cuál es el papel de los axiomas del movimiento uniforme: insertar la velocidad como una magnitud cuantificada del movimiento uniforme. Este procedimiento es derivado de los límites de representación matemática del formato teórico que estructura y consolida la teoría de proporciones.

Del mismo modo, en principio, para que la "aceleración" fuera insertada como el invariante del movimiento uniformemente acelerado, Galileo debería seguir los mismos pasos realizados para el movimiento uniforme, es decir: realizar el supuesto de que existe una cantidad capaz de representar la intensidad de los cambios de velocidad con respecto al tiempo, y establecer la relación entre la "aceleración", velocidad y tiempo por medio del uso de axiomas (vide apéndice 2). De este modo, consideramos que la ausencia de la aceleración en la física de Galileo no puede provenir de un problema de límite de la teoría de proporciones, dicha ausencia parece ser, más bien, un problema metafísico, es decir, le bastaría a Galileo "ver" la necesidad de una nueva cantidad que permitiese la cuantificación de los grados de velocidad y del tiempo, de modo independiente del movimiento uniforme. Es posible que Galileo no viera dicha necesidad dado que ya poseía un camino para la cuantificación de las magnitudes del movimiento uniformemente acelerado por medio de su relación con el movimiento uniforme.

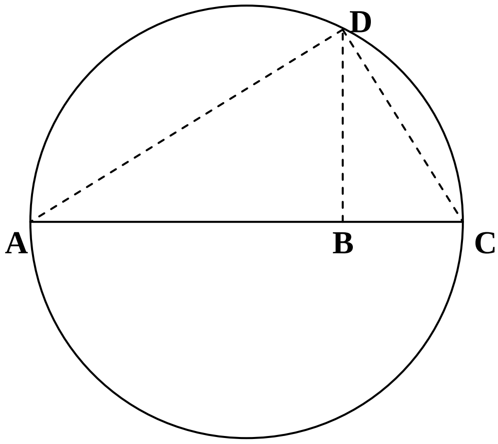
La segunda base que sostiene la segunda hipótesis de trabajo, esto es, el papel central de la relación del movimiento uniforme con el movimiento uniformemente acelerado, surge como una consecuencia de la ausencia de la aceleración. De hecho, para que sea posible cuantificar una magnitud física es necesario que dicha magnitud pueda ser comparada con un invariante; dado que Galileo no posee un invariante propio para el movimiento uniformemente acelerado, Galileo recurrirá a la velocidad del movimiento uniforme como el invariante que le permitirá cuantificar el espacio, tiempo y los grados de velocidad del movimiento acelerado. De este modo explicamos el porqué la relación entre ambos movimientos sea tan central para la física de Galileo.

Finalizando la conclusión, consideramos que de las dos hipótesis de trabajo utilizadas en esta tesis, la que se acerca a una explicación más plausible de la ausencia de la aceleración en *De Motu Locali* es la primera, que afirma que se trata de un problema de interpretación, de hecho, Galileo tenía en sus manos una proporción que expresaba una ley de variación de la aceleración (según la inclinación del plano), y poseía el instrumental matemático necesario para consolidar la aceleración como una nueva magnitud del movimiento, le faltó solamente “ver” lo que las matemáticas ya le decían. Talvez las matemáticas sean de hecho “el libro de la naturaleza”, y solamente nos restaría interpretarlo.

Apéndice 1: Tercera, cuarta y Media proporcional.

En las demostraciones analizadas en esta tesis, fue corriente la utilización de la media proporcional, tercera y cuarta proporcional. El objetivo de este apéndice es explicar en qué consisten estas proposiciones.

La media proporcional corresponde a la proposición 13 del Libro VI de los *Elementos* de Euclides. Su demostración puede ser parafraseada como sigue:



A partir del diagrama arriba, sea BD un segmento de recta perpendicular al diámetro de la circunferencia AC. Dado que ADC es un ángulo en el semicírculo, este es un ángulo recto.

Por construcción, los triángulos ABD y BCD son semejantes, aplicando reglas de semejanza de triángulos encontramos la proporción:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\mathbf{DB}}{BC} = \frac{AB}{\mathbf{DB}}$$

El segmento de recta DB es el único que se repite en la proporción. De este modo llamamos DB de media proporcional entre los segmentos BC y AB. Evidentemente, a partir de la proporción, podemos deducir que $\mathbf{DB^2 = BC.\ AB.}$

Del mismo modo, los triángulos ADC y ABD son semejantes, entonces tenemos:

$$\frac{\mathbf{AD}}{AC} = \frac{AB}{\mathbf{AD}} = \frac{DB}{DC}$$

A partir de esta última proporción, tenemos que el segmento AD es el que se repite. De este modo decimos que AD es la media proporcional entre AC y AB. Y del mismo modo, podemos escribir: $AD^2 = AC.\ AB.$

Análogamente, los triángulos ADC y BDC son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\mathbf{DC}}{AC} = \frac{BC}{\mathbf{DC}} = \frac{DB}{AD}$$

En ese caso, DC es la media proporcional entre AC y BC.

La 3ª y 4ª proporcional son segmentos deducidos de la misma forma, por medio de semejanza de triángulos, corresponden a las proporciones 11 y 12 del Libro VI de los Elementos de Euclides, respectivamente. Podemos enunciarlos como sigue:

3ª proporcional: dado dos segmentos cualesquiera “AB” y “BC”, existe un tercer segmento “X” tal que: AB/BC = BC/**X**. (en ese caso, evidentemente, BC será una media proporcional entre “AB” y “X”).

4ª proporcional: dados tres segmentos “AB”, “BC” y “CD”, existe un cuarto segmento “X” tal que: AB/BC = CD/**X**.

Apéndice 2

La realización de este apéndice posee dos objetivos: indicar cuál es el papel de los axiomas en la construcción de los teoremas del movimiento uniforme; y a partir de un razonamiento análogo, realizar una simulación y construir los axiomas equivalentes para el movimiento uniformemente acelerado y desarrollar, como un ejercicio, los teoremas que podrían ser derivados de estos nuevos axiomas.

Lo que nos incentiva a realizar el segundo objetivo es una pregunta: si Galileo hubiera insertado la aceleración como magnitud cuantificada del movimiento, entonces qué axiomas y qué teoremas nuevos se derivarían de esta iniciativa. Evidentemente, dado que Galileo no realiza este procedimiento, extenderemos el mismo razonamiento utilizado por Galileo para la consolidación de la velocidad como magnitud del movimiento uniforme para simular la inserción de la aceleración como magnitud cuantificada. De este modo, construiremos por analogía los axiomas y algunos teoremas (derivados de los axiomas) para el movimiento uniformemente acelerado. El objetivo de esta simulación consiste en buscar qué dificultades Galileo enfrentaría como también qué consecuencias podrían existir si Galileo hubiera recorrido este camino.

Una primera consecuencia es que Galileo no podría describir el movimiento acelerado en términos de “grados de velocidad”, sino en términos de “variaciones de velocidad”; aunque ambas magnitudes se vuelven iguales si asumimos que el cuerpo parte del reposo, se trata de conceptos distintos. De hecho, en la definición de movimiento uniformemente acelerado, los incrementos de velocidad expresan la tasa de variación de los grados de velocidad con respecto a los intervalos de tiempo. Galileo utiliza este concepto solamente por medio de representaciones geométricas, y considera como magnitud cuantificada solamente los grados de velocidad. Sin embargo, a partir de esta simulación veremos que los incrementos de velocidad también deben ser representados como magnitud en la teoría de proporciones, de modo que Galileo habría de utilizar dos maneras de expresar la velocidad en el movimiento acelerado.

Existe también una segunda consecuencia. Vimos que la definición de movimiento uniforme determina la relación que debe existir entre espacio y tiempo; y a partir de axiomas la velocidad surge como una tercera magnitud. De modo que los teoremas del movimiento uniforme serán expresados en términos de las leyes de variación entre tres magnitudes: espacio, tiempo y velocidad. En la simulación que realizamos para el movimiento uniformemente acelerado sucedió algo similar, de modo que los teoremas que podrían ser determinados a partir de la definición y de los axiomas aplicados al movimiento acelerado permiten expresar leyes de variación solamente entre tres magnitudes: velocidad, tiempo y aceleración. El problema surge cuando procuramos expresar las leyes de variación del espacio en el movimiento acelerado. La teoría de proporciones permite relacionar tres magnitudes o más en una única expresión solamente por medio de la proporción compuesta; ésta, a su vez, es construida por medio del producto entre razones, por ejemplo, “A/B = A/C. C/D. D/B”. En efecto, las cuatro magnitudes necesarias para la descripción del movimiento uniformemente acelerado no pueden ser relacionadas por medio de un producto entre ellas, requiere otras funciones matemáticas que sobrepasan las posibilidades ofrecidas por la proporción compuesta (como podemos ver en la expresión moderna, donde: $\Delta S = V_o . T + ½ g. T^2$). Si existen otros recursos de la teoría de proporciones (o que pudieran ser derivados de ella) capaces de solucionar esta dificultad, no sabemos. Una consecuencia del problema de insertar el espacio en el nuevo esquema es que no encontramos un camino que nos permitiera deducir los teoremas 2 y 3 del movimiento acelerado de

Galileo (dado que estos expresan justamente leyes de variación del espacio para el movimiento acelerado).

En efecto, lo que ofreceremos en seguida consistirá en un análisis parcial, o bien, solamente una introducción a un nuevo problema, que procura *simular*, desde el punto de vista de la teoría de proporciones, las posibilidades de describir el movimiento acelerado a partir de la aceleración.

El procedimiento que realizaremos consiste en presentar, paso a paso, como es que los axiomas y "nuevos" teoremas del movimiento acelerado serían realizados a partir del mismo razonamiento aplicado a los axiomas y teoremas del movimiento uniforme, tal cual fueron presentados por Galileo. En efecto, presentaremos los axiomas del movimiento uniforme, y reflejaremos el mismo procedimiento para los axiomas del movimiento acelerado, en seguida presentaremos las demostraciones de los teoremas del movimiento uniforme reflejando cómo serían los teoremas equivalentes para el movimiento uniformemente acelerado.

Axiomas

En la introducción del capítulo 2, utilizamos un esquema moderno para expresar la formación de los axiomas del movimiento uniforme. Este esquema, derivado de la manera más simple de determinar una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes, es expresado de la forma: "A = k. B". A partir de él, pudimos reconstruir todos los axiomas del movimiento uniforme, y será a partir de este mismo esquema que construiremos los axiomas para el movimiento acelerado.

Para el movimiento uniforme, las variables "A" y "B" representaban, respectivamente, una distancia y un intervalo de tiempo, y la constante de proporcionalidad "k" representa la relación constante entre las dos variables, llamada "velocidad". De este modo, pudimos reconstruir los axiomas del movimiento uniforme en la misma forma que fue presentada por Galileo:

Axioma 1. $V_1 = V_2$, si $T_1 > T_2 \Rightarrow S_1 > S_2$

Axioma 2. $V_1 = V_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow T_1 > T_2$

Axioma 3. $T_1 = T_2$, si $V_1 > V_2 \Rightarrow S_1 > S_2$

Axioma 4. $T_1 = T_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow V_1 > V_2$

Los axiomas del movimiento uniformemente acelerado seguirían el mismo razonamiento. Utilizando el esquema "A = k. B", tendríamos "A" representando el incremento de velocidad (ΔV), "B" un intervalo de tiempo correspondiente (ΔT) y la constante de proporcionalidad "k" representaría, evidentemente, al aceleración (A). A partir de esta elección podemos deducir los dos primeros axiomas haciendo variar las magnitudes representadas por los parámetros "A" y "B", de este modo tenemos[1]:

---

[1] Donde "T_1" y "T_2" representan los intervalos de tiempo correspondientes a los incrementos de velocidad "ΔV_1" y "ΔV_2"

$$\mathbf{\Delta V_1 = A_1 . T_1}$$
$$\mathbf{\Delta V_2 = A_2 . T_2}$$

Para un único y mismo movimiento uniformemente acelerado (es decir, cuando $A_1 = A_2$):

$$\mathbf{Si\ \Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow T_1 > T_2}$$
$$\mathbf{Si\ T_1 > T_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2}$$

Para aumentar las posibilidades de combinación, hacemos ahora que el tiempo sea la constante de proporcionalidad y hacemos variar la aceleración. De este modo, para dos movimientos uniformemente acelerados, si $T_1 = T_2$ tenemos que:

$$\mathbf{Si\ \Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow A_1 > A_2}$$
$$\mathbf{Si\ A_1 > A_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2}$$

Los axiomas del movimiento uniformemente acelerado serían:

Axioma 1 $A_1 = A_2$, si $\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow T_1 > T_2$

Axioma 2 $A_1 = A_2$, Si $T_1 > T_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2$

Axioma 3 $T_1 = T_2$, Si $\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow A_1 > A_2$

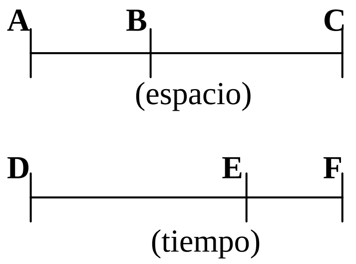
Axioma 4 $T_1 = T_2$, Si $A_1 > A_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2$

En seguida haremos una presentación de un análisis de la demostración del Teorema 1 del movimiento uniforme, siguiendo los pasos realizados por Galileo en la 3ª jornada de los *Discorsi*, donde veremos la aplicación tanto de los axiomas del movimiento uniforme como también de la Definición 5 del Libro V de Euclides en la demostración. En seguida realizaremos un ejercicio de cómo sería la demostración equivalente para el movimiento uniformemente acelerado, haciendo con que este "nuevo" teorema sea demostrado a partir de los axiomas del movimiento uniforme como también por medio de la definición 5 del Libro V de Euclides.

Teorema 1 – MU

"Si una partícula moviente, portadora de una velocidad constante, recorre dos distancias los intervalos de tiempo requeridos son una a otra en la razón de estas distancias"[2]

El enunciado del teorema puede ser parafraseado como sigue:



Siendo el tiempo requerido para atravesar AB representado por DE y el tiempo requerido para atravesar BC, por EF, es decir:

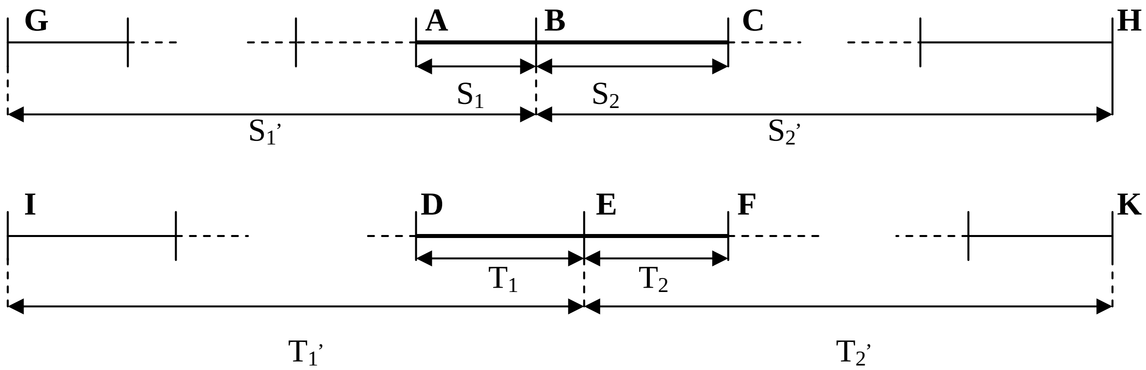
$$\mathbf{T_{AB} = DE \quad y \quad T_{BC} = EF}$$

Si AB es recorrido con velocidad V_1 y BC con velocidad V_2, entonces:

Si $V_1 = V_2$, entonces $$\mathbf{\frac{AB}{BC} = \frac{T_{AB}}{T_{BC}}}$$

Demostración:

Extendiendo la distancia AC hacia GH y extendiendo el tiempo DF hacia IK, y dividiendo AG en cualquier número de espacios, cada uno igual a AB, y marcamos DI con exactamente el mismo número de intervalos de tiempo, cada uno igual a DE. Hacemos el mismo con CH y FK



Desde que T_1 (segmento DE) es el tiempo requerido para atravesar S_1 (segmento AB), entonces todo el tiempo T_1' (EI) será el tiempo requerido para atravesar toda la distancia S_1' (BG)

Dado el "mismo número de divisiones":

$S_1' = k. S_1$ y $T_1' = k. T_1$, y, del mismo modo**: $S_2' = q. S_2$ y $T_2' = q. T_2$**

---

[2] Crew, H y Salvio, A. (traductores), *Dos nuevas Ciencias*, p197

Dado que el movimiento es uniforme:

$$\begin{aligned}&\textbf{Si } S_1' = S_2' \Rightarrow T_1' = T_2' \text{ .... } \textbf{por Definición de MU}\\ &\textbf{Si } S_1' > S_2' \Rightarrow T_1' > T_2' \text{ .... } \textbf{por Axioma 2}\\ &\textbf{Si } S_1' < S_2' \Rightarrow T_1' < T_2' \text{ .... } \textbf{por Axioma 2}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}k.\,S_1 = q.\,S_2 &\Rightarrow k.\,T_1 = q.\,T_2\\ k.\,S_1 > q.\,S_2 &\Rightarrow k.\,T_1 > q.\,T_2\\ k.\,S_1 < q.\,S_2 &\Rightarrow k.\,T_1 < q.\,T_2\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Por definición 5 del
Libro V de Euclides

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{T_1}{T_2}}$$

Un importante aspecto relacionado a los teoremas 1 y 2 del movimiento uniforme es que solamente en las demostraciones de estos dos teoremas vemos a Galileo utilizar la definición 5 del Libro V de Euclides. Se trata de una consideración que no podemos dejar que pase desapercibida. De hecho, como señalamos en la introducción general de esta tesis, las dificultades de interpretación de la definición 5 en la Europa contemporánea de Galileo no eran pocas.

En el inicio de 1641, Galileo dictó a Envangelista Torricelli[3] el esbozo de un tratado dedicado a la definición de proporcionalidad de Euclides, que sería anexado a los *Discorsi* como la 5ª jornada. Este tratado es presentado en la forma de un diálogo entre los mismos interlocutores de los *Discorsi* (Salviati, Simplicio y Sagredo), está originalmente escrita en italiano, y está dedicada a un análisis de la definición 5 del libro V de Euclides y a la proporción compuesta. En el inicio de este manuscrito podemos leer:

> "Sagredo: […].Para comenzar por lo tanto en orden al principio del libro, propongo a V.S. un escrúpulo mío antiguo, renovando la demostración que el Autor aporta en la primera demostración del Movimiento Uniforme, la cual procede por la vía de los igualmente múltiplos. Esta es una ambigüedad que yo he siempre tenido en torno de la quinta definición del libro quinto de Euclides.
> […]
> Salviati: […] confieso que por cualquier año después de haber estudiado el [libro] Quinto de Euclides me quedé en las mismas nieblas. Superé finalmente esta dificultad, cuando al estudiar las *espirales* de Arquímedes, encontré en el principio del libro una demostración similar a la predicha por nuestro Autor […]"[4]

Y efectivamente, en "el principio" de *Espirales* de Arquímedes, en la proposición 1, podemos leer:

[3] Giusti, 1993, p277
[4] Galileo, 5ª jornada – trascripción en italiano en *Euclides Reformatus*, Giusti, 1993, pp279 y ss

> "Si un punto se mueve con un ritmo uniforme a lo largo de cualquier línea, y dos longitudes son tomadas en ella, ellos [las longitudes] serán proporcionales a los tiempos descritos por ellos.
> [demostración:] Dos longitudes desiguales son tomadas en una línea recta, y dos longitudes en otra línea recta representando los tiempos; y ellos son probados ser proporcionales tomando los equimúltiplos de cada longitud y el correspondiente tiempo después, a la manera de Euclides. V, Definición 5"[5].

Arquímedes solamente indica cómo la proposición 1 podría ser demostrada, posiblemente por considerar la aplicación de la definición 5 trivial. Si comparamos la demostración realizada por Galileo y la indicada por Arquímedes podemos observar una gran similitud. Sin embargo las similitudes no terminan aquí, el teorema 2 del movimiento uniforme de Galileo también posee similitud con la proposición 2 de Espirales de Arquímedes. El teorema 2 es enunciado como sigue:

> "Si una partícula moviente recorre dos distancias en iguales intervalo de tiempo, esas distancias tendrán entre sí la misma razón que sus velocidades. Y viceversa, si las distancias son como las velocidades entonces los tiempos serán iguales"[6].

Y la proposición 2 de *Espirales* de Arquímedes, afirma:

> "Si dos puntos en diferentes líneas respectivamente se mueven a lo largo de ellas cada uno con un ritmo uniforme, y si las longitudes son tomadas, una en cada línea, formando pares, tal que cada par es descrito en iguales tiempos, las longitudes serán proporcionales.
> [demostración:] Esto es probado una vez que equiparamos las razones de las longitudes tomadas en una línea a aquellas de los tiempos de recorrido, los cuales deben ser iguales a las razones de las longitudes tomadas en la otra línea"[7]

Esto nos sugiere que las dos únicas aplicaciones de la definición 5 del libro V de Euclides, que fueron realizadas por Galileo en su tratado, fueron orientadas por Arquímedes. Es posible entonces, dado que no existen otras aplicaciones de dicha definición, que Galileo jamás haya logrado un dominio de la definición 5; de hecho, en el análisis realizado por Galileo de la definición 5 en la 5ª jornada es restringida a la proporcionalidad entre magnitudes conmensurables, mientras que la definición 5 de Euclides es aplicable también a la proporcionalidad de magnitudes inconmensurables. Si es así, entonces es poco probable que Galileo realizara demostraciones de teoremas basado en la aplicación de la definición 5 que fueran independientes de sugerencias de Arquímedes; como es el caso de la demostración que veremos a continuación.

---

[5] Arquímedes, *On spirals*, traducción al ingles de Sir Thomas L. Heat, enciclopedia británica, 1978 – p484.
[6] Crew, H y Salvio, A. (traductores), *Dos nuevas Ciencias*, p198
[7] Arquímedes, *On spirals*, traducción al inglés de Sir Thomas L. Heat, enciclopedia británica, 1978 – p484

“Teorema 1 equivalente para el movimiento acelerado”

La construcción gráfica sería equivalente a la construcción realizada por el teorema 1 del movimiento uniforme, con la diferencia de que al revés de construir pares de segmentos de recta que representan distancias y tiempos, utilizaríamos segmentos de recta que representan velocidad y tiempo.

Una primera consecuencia de la construcción gráfica de la demostración del “teorema 1” derivado del nuevo esquema, es que los segmentos de recta que representan las velocidades no pueden representar “grados de velocidad”, sino “variaciones o incrementos de velocidad”. La razón es simple. Dado que cada grado de velocidad corresponde a un único instante, si tomásemos los segmentos de recta para representar grados de velocidad, entonces los segmentos de rectas que representarían el tiempo no podrían ser “segmentos”, sino “puntos geométricos”. El problema de esta representación es que ella no es compatible con las posibilidades de representación de la teoría de proporciones. En la teoría de proporciones las magnitudes son “cantidades finitas y continuas”, y la noción de continuidad está relacionada a segmentos de recta, y no puntos. De esta consideración surge la primera consecuencia que distingue a las representaciones matemáticas derivadas del “nuevo esquema” de las representaciones utilizadas por Galileo. En la ciencia del movimiento matematizada por Galileo, los incrementos de velocidad solamente son utilizados para la construcción de representaciones geométricas con la finalidad de construir proporciones entre grados de velocidad e intervalos de tiempo que pudiesen ser derivados de la definición de movimiento acelerado. la diferencia entre “grado” e “incrementos” de velocidad consiste en que el primero representa la intensidad de la velocidad en un dado instante del movimiento, mientras el segundo representa una “diferencia” entre intensidades de velocidad; ambos son matemáticamente “equivalentes” si, y solo si, la velocidad inicial es cero.

De este modo, aplicando la misma construcción gráfica utilizada para la demostración del movimiento uniforme, y utilizando los segmentos de recta para representar “incrementos de velocidad” (ΔV) e “intervalos de tiempo (T), tenemos:

$\mathbf{k.\ \Delta V_1 = q.\ \Delta V_2 \Rightarrow k.\ T_1 = q.\ T_2}$ **…… por Definición de MA**
$\mathbf{k.\ \Delta V_1 > q.\ \Delta V_2 \Rightarrow k.\ T_1 > q.\ T_2}$ **…..... por Axioma 1 del MA**
$\mathbf{k.\ \Delta V_1 < q.\ \Delta V_2 \Rightarrow k.\ T_1 < q.\ T_2}$ **…… por Axioma 1 del MA**

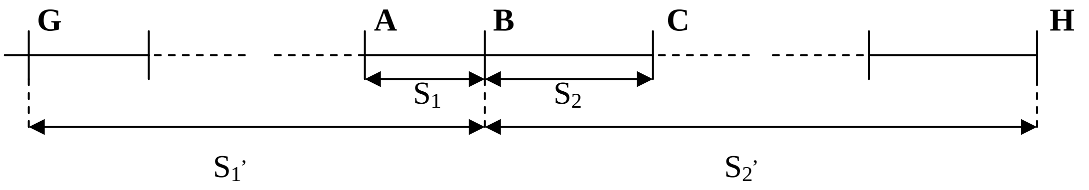
Por definición 5 de Euclides:

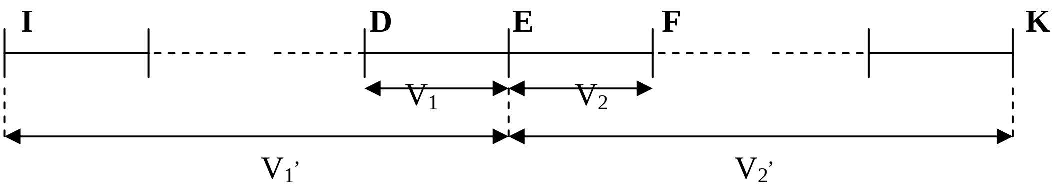
$$\text{Si } \mathbf{A_1 = A_2} \text{ se sigue que } \quad \frac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}} = \frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{T_2}}$$

Teorema 2 – MU

"Si una partícula moviente recorre dos distancias en iguales intervalos de tiempo, esas distancias tendrán entre sí la misma razón que sus velocidades. Y viceversa, si las distancias son como las velocidades entonces los tiempos serán iguales".

Demostración:





Suponga que la distancia S_1 (segmento AB) es recorrida con velocidad V_1 (segmento DE) en un tiempo T_1, y, del mismo modo, la distancia S_2 (BC) es recorrida con velocidad V_2 (EF) en un tiempo T_2.

$$\textbf{Si } T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

Demostración análoga a anterior:

$$S_1' = k.\ S_1 \text{ y } V_1' = k.\ V_1$$

$$S_2' = q.\ S_2 \text{ y } V_2' = q.\ V_2$$

Si $S_1' = S_2' \Rightarrow V_1' = V_2'$ **……….. Por definición de MU**
Si $S_1' > S_2' \Rightarrow V_1' > V_2'$ **……….. por Axioma 4**
Si $S_1' < S_2' \Rightarrow V_1' < V_2'$ **……….. por Axioma 4**

$$\Downarrow$$

Si $k.\ S_1 = q.\ S_2 \Rightarrow k.\ V_1 = q.\ V_2$
Si $k.\ S_1 > q.\ S_2 \Rightarrow k.\ V_1 > q.\ V_2$
Si $k.\ S_1 < q.\ S_2 \Rightarrow k.\ V_1 < q.\ V_2$

$$\Downarrow$$

Por definición 5 del
Libro V de Euclides

$$\boxed{\textbf{Si } T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2}}$$

“Teorema 2 equivalente para el movimiento acelerado”

De manera análoga, la demostración equivalente para el movimiento uniformemente acelerado, tomando los pares de segmentos de recta para representar “incrementos de velocidad” y diferentes “intensidades de aceleraciones”, en iguales intervalos de tiempos, sería:

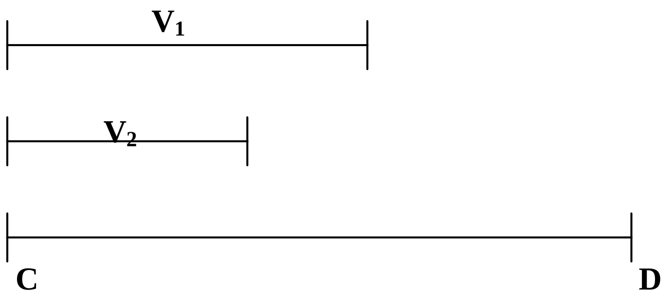
$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow A_1 = A_2 \text{ .... } \textbf{por Definición de MA}$$
$$\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow A_1 > A_2 \text{ .... } \textbf{por axioma 3 del MA}$$
$$\Delta V_1 < \Delta V_2 \Rightarrow A_1 < A_2 \text{ …… } \textbf{por axioma 3 del MA}$$

Por definición 5 de Euclides:

$$\text{Si } T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Teorema 3 – MU

“En el caso de velocidades desiguales, los intervalos de tiempo requeridos para recorrer un dado espacio son uno para el otro como las velocidades”



Un cuerpo recorre la distancia CD con velocidad constante V_1 en un tiempo T_1. Y otro cuerpo recorre la misma distancia CD con velocidad constante V_2 en un tiempo T_2. Dado que para una misma distancia, cuanto mayor es la velocidad menor debe ser el tiempo de recorrido, el teorema 3 afirma que:

$$\text{Si } S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Demostración:

1) Suponga que $V_1 > V_2$
2) Por **Axioma 3**: si $V_1 > V_2 \Rightarrow S_1 > S_2$ si $T_1 = T_2$

3) Por T2-MU: si $T_1 = T_2 \Rightarrow S_1/S_2 = V_1/V_2$

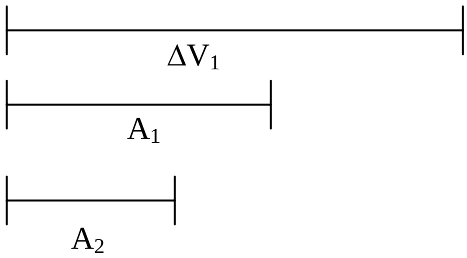
4) (**Por axioma de la 4ª Proporcional**): Si S_1 = CD, entonces existe una distancia S_2 = CE < CD, tal que el móvil "2" recorra dicha distancia en el mismo tiempo que el móvil "1" recorre la distancia CD, de modo que: $\mathbf{V_1/V_2 = CD/CE} \Leftrightarrow T_1 = T_{2'}$

5) Interpretando (4), el móvil "2" recorre la distancia CD en T_2 y recorre la distancia CE en un tiempo $T_{2'} = T_1$. Dado que es el mismo móvil, las dos distancias son recorridas con la misma velocidad. Por el **teorema 1 – MU**: $CD/CE = T_2 / T_{2'}$, dado que $T_{2'} = T_1$ se sigue que: $\mathbf{CD/CE = T_2/T_1}$

6) De (4) y (5): $\mathbf{V_1/V_2 = T_2/T_1}$

"Teorema 3 equivalente para el movimiento acelerado"

El teorema equivalente para el movimiento uniformemente acelerado sería demostrado como sigue:

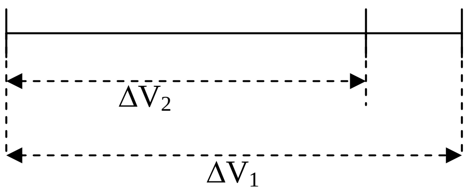


Un cuerpo adquiere un incremento de velocidad ΔV_1 con aceleración A_1 en un intervalo de tiempo T_1; y el mismo cuerpo adquiere el mismo incremento de velocidad ΔV_1 con aceleración A_2 en un intervalo de tiempo T_2.

Dado que, para un mismo incremento de velocidad, cuanto mayor la aceleración, menor es el tiempo necesario para adquirir dicho incremento, entonces:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Demostración:



1) Suponga $A_1 > A_2$

2) Por axioma 3 del MA: si $\mathbf{\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow A_1 > A_2}$ **si** $\mathbf{T}_1 = T_2$

3) Por teorema 2 del MA (nuevo esquema): si $\mathbf{T}_1 = T_2 \Rightarrow \mathbf{\Delta V_1 / \Delta V_2 = A_1 / A_2}$

4) Existe un incremento de velocidad ΔV_2, tal que el móvil “2” adquiera dicho incremento con aceleración A_2 en el mismo tiempo que A_1 genera el incremento de velocidad ΔV_1 en T_1;

5) De ese modo, la misma intensidad de aceleración A_2 genera el incremento de velocidad ΔV_2 en un intervalo de tiempo T_1, y genera el incremento de velocidad ΔV_1 en el intervalo de tiempo T_2. Por lo tanto, por el teorema 1 del MA:

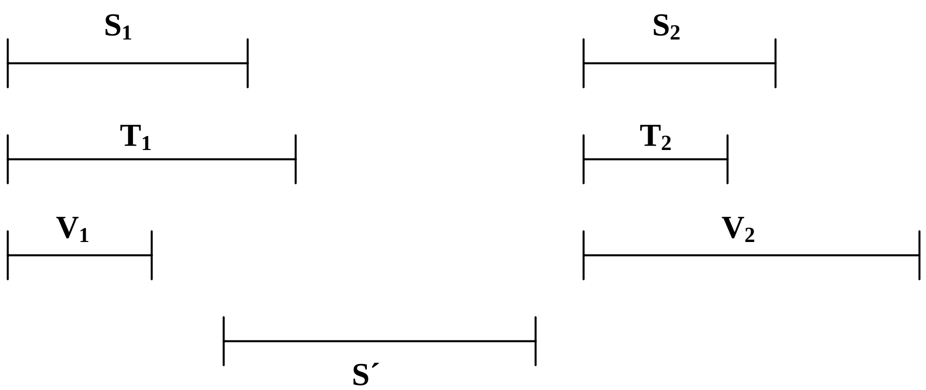
$$\frac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}} = \frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{T_1}}$$

6) de (3) y (5): $\mathbf{A_1 / A_2 = T}_2 / T_1$

De este modo, si tenemos dos aceleraciones de intensidades diferentes, pero que generan iguales incrementos de velocidades, el teorema 3 del nuevo esquema afirma que:

$$\textbf{Si } \mathbf{\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{T_2}{T_1}}$$

Teorema 4 – MU



1) Suponga una distancia S´ tal que: $\mathbf{S_1/S' = V_1/V_2} \Rightarrow T_1 = T'_2$

2) Entonces el cuerpo “2” recorre dos distancias: S´ en T_1 y S_2 en T_2 con la misma velocidad. Por el teorema 1 –MU: $\mathbf{S'/S_1 = T_1/T_2}$

3) Por Definición 5 del Libro VI de Euclides: $\mathbf{S_1/S_2 = S_1/S' . S'/S_2}$

4) Dado que por (1): $S_1/S' = V_1/V_2$, y por (2): $S'/S_1 = T_1/T_2$, de (3) tenemos que: $\mathbf{S_1/S_2 = T_1/T_2 . V_1/V_2}$

“Teorema 4 equivalente para el movimiento acelerado”

Para la demostración del teorema equivalente para el movimiento uniformemente acelerado, tendríamos que los segmentos de rectas utilizados para la demostración del teorema 4 – MU representarían incrementos de velocidades (ΔV_1 y ΔV_2), intervalos de tiempo (T_1 y T_2) y dos intensidades de aceleración distintas (A_1 y A_2). Utilizaríamos la longitud de un segmento de recta auxiliar para representar un cierto incremento de velocidad ($\Delta V´$). A partir de esta construcción gráfica la demostración puede ser parafraseada como sigue:

1) suponga $\Delta V´$ tal que: $\mathbf{\Delta V_1/\Delta V´ = A_1 / A_2}$ de esta proporción tenemos: $T_1 = T´$

2) interpretando (1) tenemos que, la misma intensidad de aceleración A_2 genera un incremento de velocidad $\Delta V´$ en un tiempo $T´ = T_1$; y genera un incremento de velocidad ΔV_2 en un tiempo T_2. Del teorema 1 del MA:

$$\frac{\mathbf{\Delta V´}}{\mathbf{\Delta V_2}} = \frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{T_2}}$$

3) Por Definición 5 del Libro VI de Euclides: $\dfrac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}} = \dfrac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V´}} \cdot \dfrac{\mathbf{\Delta V´}}{\mathbf{\Delta V_2}}$

4) De (1) y (2):

$$\frac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}} = \frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} \cdot \frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{T_2}}$$

Las demostraciones de los teoremas 5 y 6 del movimiento uniforme son análogos a la demostración del teorema 4 del MU, con la diferencia de que el segmento de recta auxiliar representaría un tiempo T` en el primero caso, y una velocidad V´ en el segundo.

Teorema 5 – MU

1) suponga un intervalo de tiempo T´ tal que: $\mathbf{T_1/T´ = V_2/V_1}$, por T3-MU: $S_1 = S´$
2) entonces de (1) el cuerpo “2” recorre dos distancias: S_1 en T´ y S_2 en T_2 con la misma velocidad. Por T1 –MU: $\mathbf{T´/T_2 = S_1/S_2}$
3) Por la definición 5 del Libro VI de Euclides: $T_1/T_2 = T_1/T´ \,.\, T´/T_2$
4) Dado que por (1): $T_1/T´ = V_2/V_1$, y por (2): $T´/T_2 = S_1/S_2$, se sigue por (3): $\mathbf{T_1/T_2 = S_1/S_2 \,.\, V_2/V_1}$

“Teorema 5 equivalente para el movimiento acelerado”

1) suponga un intervalo de tiempo T´ tal que:

   $\mathbf{T_1/T' = A_2/A_1}$, por T3- MA: $\mathbf{\Delta V_1 = \Delta V'}$

2) entonces, la aceleración A_2 genera el incremento de velocidad $\mathbf{\Delta V_1}$ en un intervalo de tiempo **T´,** y genera el incremento de velocidad $\mathbf{\Delta V_2}$ en un intervalo de tiempo $\mathbf{T_2}$**.** Por T1-MA: $\mathbf{\Delta V_1/ \Delta V_2 = T'/T_2}$

3) Por la definición 5 del Libro VI de Euclides: $T_1/T_2 = T_1/T' \cdot T'/T_2$

4) Dado que de (1): $\mathbf{T_1/T' = A_2/A_1}$**,** y de (2): $\mathbf{T'/T_2 = \Delta V_1/ \Delta V_2}$**,** entonces, sustituyendo esas dos proporciones en (3), tenemos que:

$$\frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{T_2}} = \frac{\mathbf{A_2}}{\mathbf{A_1}} \cdot \frac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}}$$

Teorema 6 – MU

1) suponga una velocidad V´ tal que: $\mathbf{V_1/V' = S_1/S_2}$**.** Por T2-MU: $T_1 = T'$

2) entonces el cuerpo “2” recorre la misma distancia S_2 con V´ en T_1 y con V_2 en T_2. Por T3-MU: $\mathbf{V'/V_2 = T_2/T_1}$

3) Por la Definición 5 del Libro VI de Euclides: $\mathbf{V_1/V_2 = V_1/V'. V'/V_2}$

4) Dado que por (1): $V_1/V' = S_1/S_2$, y pot (2): $V'/V_2 = T_2/T_1$. De (3) tenemos que: $\mathbf{V_1/V_2 = S_1/S_2 \cdot T_2/T_1}$

“Teorema 6 equivalente para el movimiento acelerado”

1) suponga una velocidad A´ tal que: $\mathbf{\Delta V_1/\Delta V_2 = A_1/A'}$**. Por T2 – MA:** $T_1 = T'$

2) entonces el incremento de velocidad $\mathbf{\Delta V_2}$ es generado por la aceleración **A`** en un tiempo $\mathbf{T_1}$, y es generado por $\mathbf{A_2}$ en un tiempo $\mathbf{T_2}$. Por T3- MA: $\mathbf{A'/A_2 = T_2/T_1}$

3) Por la Definición 5 del Libro VI de Euclides: $\mathbf{A_1/A_2 = A_1/A'. A'/A_2}$

4) Dado que, de (1): $\mathbf{A_1/A' = \Delta V_1/\Delta V_2}$**,** y de (2): $\mathbf{A'/A_2 = T_2/T_1}$, entonces, sustituyendo esas dos proporciones en (3), tenemos que:

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{\mathbf{\Delta V_1}}{\mathbf{\Delta V_2}} \cdot \frac{\mathbf{T_2}}{\mathbf{T_1}}$$

Axiomas	**Movimiento Uniforme**	**Movimiento Uniformemente Acelerado**
Axioma 1	$V_1 = V_2$, si $T_1 > T_2 \Rightarrow S_1 > S_2$	$A_1 = A_2$, si $\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow T_1 > T_2$
Axioma 2	$V_1 = V_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow T_1 > T_2$	$A_1 = A_2$, Si $T_1 > T_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2$
Axioma 3	$T_1 = T_2$, si $V_1 > V_2 \Rightarrow S_1 > S_2$	$T_1 = T_2$, Si $\Delta V_1 > \Delta V_2 \Rightarrow A_1 > A_2$
Axioma 4	$T_1 = T_2$, si $S_1 > S_2 \Rightarrow V_1 > V_2$	$T_1 = T_2$, Si $A_1 > A_2 \Rightarrow \Delta V_1 > \Delta V_2$

Teoremas	**Movimiento Uniforme**	**Movimiento Uniformemente Acelerado**
Teorema 1	$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{T_1}{T_2}$
Teorema 2	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2}$	$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{A_1}{A_2}$
Teorema 3	$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{T_2}{T_1}$
Teorema 4	$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2} . \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{A_1}{A_2} . \frac{T_1}{T_2}$
Teorema 5	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_1} . \frac{S_1}{S_2}$	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{A_2}{A_1} . \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2}$
Teorema 6	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} . \frac{T_2}{T_1}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} . \frac{T_2}{T_1}$

Apéndice 3

En la actualidad, la velocidad es una magnitud vectorial, y siendo que, para realizar la suma entre velocidades debemos considerar no solamente la intensidad, sino también su dirección y sentido. El caso en que los vectores forman un ángulo de 90º entre sí es el más simple (para otros ángulos se utiliza la "ley de los cosenos", de la cual el teorema de Pitágoras es un caso particular), y la suma puede ser obtenida directamente por medio del teorema de Pitágoras. En el esquema de abajo, representamos la suma de dos vectores "a" y "b", perpendiculares entre sí. La construcción geométrica de la suma sigue lo que hoy llamamos "regla del paralelogramo" (diagrama "1"):

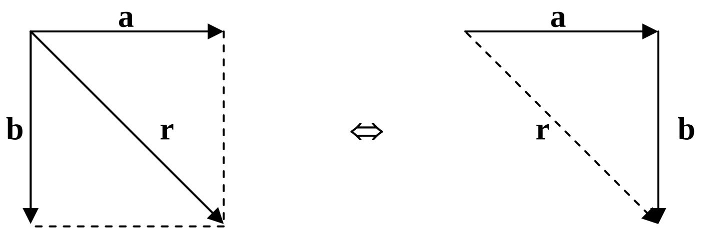
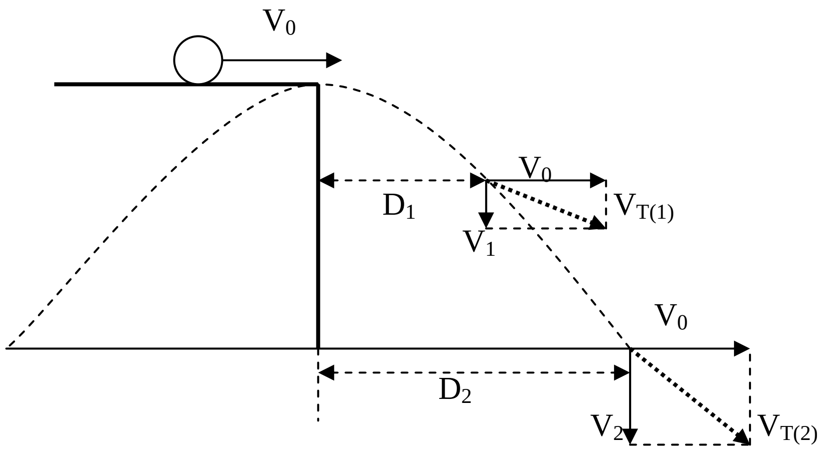


diagrama (1) **diagrama (2)**

A partir del diagrama (2), equivalente al diagrama (1), es más claro que a partir de la regla del paralelogramo se puede derivar la un triángulo rectángulo, donde los catetos corresponden a las intensidades de las velocidades de ambos movimientos ("a" y "b"), mientras la hipotenusa corresponde a la intensidad de la velocidad resultante (vector "r"). De este modo: $\mathbf{r^2 = a^2 + b^2}$

La determinación de los grados de velocidad del movimiento compuesto, en lenguaje moderno, es presentada en el esquema abajo:



La velocidad total será determinada por medio del teorema de Pitágoras (por construcción gráfica): $V_T^2 = V_O^2 + V_{MA}^2$. Dado que la velocidad de la componente horizontal (V_0) es constante, para la determinación de la velocidad total (V_T) se necesita apenas calcular las velocidades adquiridas por la componente vertical del movimiento.

La velocidad de la componente vertical puede ser determinada por medio de la relación: V = g. T, de modo que se necesita solamente el tiempo de recorrido. Y el tiempo puede ser determinado por medio de las distancias horizontales, a partir de la ecuación horaria del movimiento uniforme. De este modo tenemos:

1) $D_1 = V_0 .T_1 \Rightarrow T_1 = D_1/V_0$
2) $V_1 = g. T_1$ (dado que la velocidad inicial en la vertical es cero)
3) De (1) y (2): $V_1 = g. (D_1/V_0)$
4) $V_{T1}^2 = V_0^2 + V_1^2$
5) $V_{T1}^2 = V_0^2 + g^2. (D_1/V_0)^2$
6) $\mathbf{V_{T(1)} = 1/V_0 (g^2. D_1^2 + V_0^4)^{1/2}}$

La determinación de la velocidad total en el instante "2" ($V_{T(2)}$) es análoga a la anterior, con la diferencia de que al revés de "D_1", en la expresión final, tendríamos "D_2". Utilizando "$V_{T(N)}$" para representar la velocidad en un instante cualquiera y "D_N" una distancia horizontal cualquiera, podemos escribir la expresión general de las velocidades adquiridas por el cuerpo en movimiento compuesto en la forma:

$$\mathbf{V_{T(N)} = 1/V_0 (g^2. D_N^2 + V_0^4)^{1/2}}$$

Donde el parámetro "D_N" está en función del tiempo: $\mathbf{D_N = V_0 . T_N}$. Sustituyendo esta expresión en la expresión general, tenemos:

1) $V_{T(N)} = 1/V_0. [g^2. (V_0. T_N)^2 + V_0^4]^{1/2}$
2) $V_{T(N)} = 1/V_0. [g^2. T_N^2 + V_0^2]^{1/2}. V_0$
3) $\mathbf{V_{T(N)} = (g^2. T_N^2 + V_0^2)^{1/2}}$

Apéndice 4: Presentación en forma esquemática de los teoremas cuyas demostraciones fueron presentadas y/o analizadas a lo largo de la tesis

Teoremas del Movimiento Acelerado
(3ª Jornada)

Teorema 1 – Proposición 1 (teorema de la velocidad media)	Para dos movimientos: uno uniforme y otro uniformemente acelerado	Si $S_{MU} = S_{MA}$ y $T_{MU} = T_{MA}$ Se sigue que: $V_{MU} = V_{MA}/2$
Teorema 2 – Proposición 2 (teorema de los tiempos cuadrados)	Para un único y mismo movimiento uniformemente acelerado	$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{T^2_1}{T^2_2}$
Colorario 1 – teorema 2 (colorario de los números impares)	Para un único y mismo movimiento uniformemente acelerado	Si $T_1 = T_2 = T_3 = T_N$ Entonces $S_1 = d$ $S_2 = 3d$ $S_3 = 5d$ $S_N = (2n -1).d$
Colorario 2 – teorema 2 (colorario de la media proporcional)	Para un único y mismo movimiento uniformemente acelerado	Si $T_{AB} = AB$ Se sigue que $\dfrac{T_{AB}}{T_{AC}} = \dfrac{AB}{mp(AB \text{ y } AC)}$
Teorema 3 – Proposición 3	Para dos movimientos acelerados a lo largo de planos de distintas inclinaciones	$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{T_{AB}}{T_{AC}}$
Regla de Doble Distancia	Para dos movimientos: uno uniforme y otro uniformemente acelerado	Si $V_{MU} = V_{MA}$ y $T_{MU} = T_{MA}$ Se sigue que: $S_{MU} = 2.\ S_{MA}$

Bibliografía:

- Artmann, Benno, 1999, *Euclid – the creation of matematics,* ed Springer
- Cohen, B, 1985, *The Birth of a new physics,* W.W. Norton & Company, Nova York
- Crew, H y Sálvio, A. (trad.), 1978, *Galileo Galilei: Dialogues Concerning the Two New Sciences*, Enciclopedia Británica/Universidad de Chicago, (The Great Books, 28), Chicago, 22a. ed., pp129 y ss
- Drabkin, I. E. y Drake, Stillman, 1960, *Galileo Galilei: On Motion and On Mechanics*, Universidad de Wisconsin
- Dear, Peter, 1995, *Discipline and Experience,* Universidad of Chicago Press
- Drake, Stillman, 1978, *Galileo at Work*, Universidad de Chicago
- Giusti, Enrico, 1993, *Euclides Reformatus*, ed. Bollati Boringhieri, Torino
- Grant, E, 1983, *Física en la Edad Media*, FCE, México
- Heat, L. T.(trad), 1978, *Arquimedes: On the equilibrium of planes or the centres of gravity of planes – book 1*, Enciclopedia Británica/Universidad de Chicago, (The Great Books, 11), Chicago, 22a. ed., pp502 y ss
- Heat, T. L. (trad), 1956 , *The Thirtteen books os Euclid´s Elements*, ed. Dover
- Heat, L. T.(trad), 1978, *Arquimedes: On Spirals,* Enciclopedia Británica/Universidad de Chicago, (The Great Books, 11), Chicago, 22a. ed., pp482 y ss
- Knorr, W. R, 1975, *The evolution of the euclidean elements,* D. Reidel Publishing Company, Holanda, p15
- Marí, A. Beltrán (trad), 1994, *Galileo Galilei: Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Editorial Alianza, Madrid
- Ramalho, M. (trad), 1982, *Alexandre Koyré: Estudos de historia do pensamento científico*, Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro – Brasil, 1ª. ed.
- Solís, Carlos y Sábada, J. (trad.), 1996, *Galileo Galilei: Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*, Editorial Planeta-De Agostini [1981]
- Taliaferro, R. Catesby, 1978, *Apollonius: Conics,* Enciclopedia Británica/Universidad de Chicago, (The Great Books, 11), Chicago, 22a. ed., pp603 y ss
- Wisan, Winifred, 1974, "The New Science of Motion: A Study of Galileo´s De Motu Locali", en *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 13, pp103-306

Bibliografía complementaria

- Drake, S, 1973, "Galileo´s Discovery of the law of free fall", en *Scientific American,* vol. 228, num. 5, pp 84-92
- Drake, S., 1973, "Galileo´s experimental confirmation of Horizontal Inercia", en *Isis,* vol. 64, pp 291-305
- Drake, S, 1974, "Mathematics and Discovery in Galileo´s Physics", en *Historia Matematica*, vol.1, pp129-150

- Drake, S. y MacLachlan, J., 1975, “Galileo´s Discovery of Parabolic Trajectory”, en *Scientific America*, vol. 232, num.3, pp102-110.
- Moody, E. A, 1975, *Studies in medieval philosophy, science, and logic*, University of California Press, Los Angeles, pp 203 y ss
- Settle, T. B, 1961, “An Experiment in the History of Science”, en *Science*, vol. 133, pp19-23