



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**“Análisis y simulación de la  
probabilidad de ruina en el modelo  
clásico de Cramér-Lundberg”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

**ADRIANA MARTÍNEZ NICOLÁS**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**“Análisis y simulación de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg”**

realizado por **Martínez Nicolás Adriana**, con número de cuenta **09711757-7**, quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Actuaría**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a)  
Propietario Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Propietario Dra. María Cristina Gutiérrez Delgado

Propietario Dra. Ana Meda Guardiola

Suplente Dr. Mogens Bladt Petersen

Suplente Act. Jaime Vázquez Alamilla

Atentamente  
“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”  
Ciudad Universitaria, D.F., a 13 de octubre del 2006.  
**EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN  
DE LA LICENCIATURA EN ACTUARÍA**

**ACT. ROBERTO CANOVAS THERIOT**



Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

DE  
MATEMÁTICAS

Análisis y simulación de la probabilidad de  
ruina en el modelo clásico de  
Cramér-Lundberg

Adriana Martínez Nicolás

2007

*A mis padres,  
Agustín y Macrina.  
A mis hermanas,  
Alma, Gaby y Nancy.  
A toda mi familia.  
A mis amigos.*

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento es para el Dr. Luis Antonio Rincón por toda su confianza, apoyo, paciencia y enseñanzas durante la realización de este trabajo.

A mis sinodales Dra. Cristina Gutiérrez, Dra. Ana Meda, Dr. Mogens Bladt y Act. Jaime Vázquez por su tiempo y dedicación en la revisión de mi trabajo, así como en sus imprescindibles comentarios para mejorarlo.

A Laura por brindarme su confianza, apoyo y amistad.

A Marisa por su confianza y por adentrarme al mundo de la enseñanza.

A la UNAM.

*Gracias.*

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>1 El modelo clásico de Cramér-Lundberg</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Descripción del modelo . . . . .	2
<b>2 Probabilidad de ruina</b>	<b>13</b>
<b>3 Probabilidad de ruina para reclamaciones pequeñas</b>	<b>21</b>
3.1 Distribuciones con cola ligera . . . . .	21
3.2 Desigualdad de Lundberg . . . . .	24
3.3 Coeficiente de ajuste . . . . .	33
3.4 Caso exponencial . . . . .	37
3.5 Caso distribuciones tipo fase . . . . .	41
3.6 Simulación . . . . .	43
3.6.1 Vía método Monte Carlo . . . . .	43
3.6.2 Vía fórmula Pollaczec-Khinchine . . . . .	44
3.6.3 Resultados . . . . .	45
<b>4 Probabilidad de ruina para reclamaciones grandes</b>	<b>55</b>
4.1 Distribuciones con cola pesada . . . . .	56
4.2 Resultados preliminares . . . . .	59
4.3 Desigualdad para reclamaciones grandes . . . . .	72
4.4 Simulación . . . . .	75
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A Algunos conceptos utilizados</b>	<b>87</b>

A.1	Transformadas . . . . .	87
A.2	Procesos de renovación . . . . .	88
A.3	Funciones directamente Riemann integrables . . . . .	92
<b>B</b>	<b>Código de programas</b>	<b>94</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>

# Prefacio

A lo largo de la historia de la humanidad, siempre han estado presentes los eventos catastróficos como son los terremotos, los huracanes, las inundaciones, entre otros; cada uno de ellos ha dejado una serie de pérdidas tanto humanas como económicas. Lo anterior nos lleva a hablar del concepto de *riesgo*, que es uno de los principales temas de estudio dentro de los seguros.

Por su parte, el sector asegurador no ha estado exento, desde sus inicios se ha visto afectado de igual manera, en donde a menudo no se contaba con las reservas necesarias para solventar las catástrofes ocurridas, principalmente por las deficiencias de las técnicas actuariales utilizadas. Por lo que, una de las grandes ocupaciones de la ciencia actuarial, ha sido el análisis de la solvencia de la empresas de seguros.

La *teoría del riesgo*, y en particular, la *teoría de la ruina*, nos ofrecen herramientas matemáticas para llevar a cabo un análisis más cuidadoso y fidedigno del tratamiento financiero de las reclamaciones que afronta una compañía aseguradora.

Este trabajo busca exponer un poco de la teoría actuarial acerca de la solvencia basada en el modelo Cramér-Lundberg, de manera que haya una convergencia en el tratamiento de este concepto fundamental para la correcta operación del seguro.

En el primer capítulo se describe el modelo de riesgo colectivo que corresponde al modelo clásico de Cramér-Lundberg, así como algunas de sus propiedades, basados en los trabajos de Beard et. al. [3] y [4], Gerber [8] y Melnikov [11].

En el segundo capítulo se introducen las definiciones referentes a la probabilidad de ruina, dando pie al estudio de la misma en dos grandes casos, cuando la distribución de las reclamaciones tiene cola ligera o tiene cola pesada. El primero, se trata en el tercer capítulo, de manera similar a lo que presenta Embrechts et. al. [6]. También se incorpora la parte de la simulación considerando este tipo de distribuciones.

Por último, en el cuarto capítulo, se describe un poco de la teoría de las distribuciones con cola pesada así como la estimación de la probabilidad de ruina, basada en lo presentado por Embrechts et. al. [6], Rolski et. al. [15] y Mikosch [12]. En la última sección se muestran los resultados de la estimación de la probabilidad de ruina vía simulación.

# Capítulo 1

## El modelo clásico de Cramér-Lundberg

### 1.1 Introducción

Tradicionalmente las técnicas actuariales más utilizadas se basan en frecuencias y en el promedio de montos de reclamación, producidos por los siniestros. Sin embargo, los montos de reclamación y sus tiempos de ocurrencia varían con respecto a lo esperado, esto quiere decir, que su comportamiento es aleatorio y pueden ser vistas como variables aleatorias.

Dentro de la teoría clásica del riesgo se han desarrollado muchos modelos estocásticos para reflejar lo que ocurre con el proceso de reclamaciones, esto significa que una parte muy importante en estudio son las obligaciones que contrae cualquier institución financiera. Además, la estructura financiera de una compañía aseguradora depende del manejo de costos, pero este factor no es sujeto a fluctuaciones aleatorias como las reclamaciones, y la inversión de capital, puede o no serlo. A su vez la teoría de la ruina está muy relacionada con el proceso de reclamaciones, ya que es de gran interés para la compañía aseguradora el tratar de estimar lo mejor posible lo que va a suceder en el futuro a partir de la información actual derivada del capital inicial, el ingreso vía prima, el tamaño de las reclamaciones y el tiempo de ocurrencia de las reclamaciones.

El punto de inicio es el modelo Poisson compuesto, trabajado en 1903 por el

actuuario sueco Filip Lundberg<sup>1</sup>, poniendo los cimientos de la teoría del riesgo moderna. Ésta fue detallada matemáticamente, más tarde, por el estadístico y probabilista sueco Harald Cramér<sup>2</sup> en la década de los 30's, introduciendo los métodos actuariales sobre la teoría del riesgo colectivo a los seguros de daños.

El modelo introducido por Lundberg es simple, y es capaz de describir la dinámica básica de un portafolio homogéneo de seguros. Por esto, suponemos un portafolio de seguros o pólizas de riesgos similares tales como un portafolio de seguros de automóviles para algún tipo de conductor de automóviles.

En este capítulo se describirá el modelo clásico de Cramér-Lundberg dándonos pie al estudio de las probabilidades de ruina. Lo que nos interesa es analizar el proceso del agregado de siniestros generados por un riesgo en un período de tiempo mayor a un año y las repercusiones que tiene sobre la probabilidad de ruina, que en los siguientes capítulos veremos con mayor detenimiento.

## 1.2 Descripción del modelo

Empezaremos definiendo los procesos básicos dentro del modelo clásico de Cramér-Lundberg.

### Definición 1

1. El proceso del monto de reclamaciones se define como  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , donde las  $X_k$  para  $k = 1, 2, \dots$ , son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas y tienen función de distribución común  $F$ , media finita denotada por  $E[X_k] = \mu$  y varianza  $Var(X_k) = \sigma^2 \leq \infty$ .

2. Los tiempos de reclamación ocurren en instantes aleatorios de tiempo denotados por  $T_i$  tales que:

$$0 < T_1 < T_2 < \dots$$

---

<sup>1</sup>Ernest Filip Oskar Lundberg (1876-1965). Estudió matemáticas, posteriormente fundó una compañía aseguradora, y después de trabajar en diferentes aseguradoras fue nombrado actuario. Paralelamente, realizó su trabajo sobre la teoría de riesgo colectivo, donde fue una pieza clave para la teoría desarrollada hasta esos momentos.

<sup>2</sup>Carl Harald Cramér (1893-1985). También tuvo contribuciones en actuaría, teoría de los números, procesos estocásticos estacionarios, entre otros temas.

3. El proceso de ocurrencia de las reclamaciones es el número de reclamaciones contingentes en el intervalo  $[0, t]$ , y se define como sigue:

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

y por convención se usará  $\sup \emptyset = 0$ .

4. Los tiempos inter-arribo, son los tiempos que transcurren entre dos reclamaciones sucesivas, los cuales son denotados por:

$$Y_1 = T_1, \quad Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

donde las variables aleatorias  $Y_k$  son i.i.d. con distribución exponencial y media finita,  $E[Y_1] = \frac{1}{\lambda}$ .

5. La sucesión  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es independiente de la sucesión  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

La definición del proceso del tamaño de los siniestros, en el primer punto, refleja el factor de una estructura probabilística homogénea en el portafolio al considerar las variables que denotan el monto de las reclamaciones como i.i.d. Además, desde un punto de vista intuitivo, podemos suponer que el proceso del monto de las reclamaciones  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y el proceso del tiempo inter-arribo  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son independientes ya que el tamaño de cada reclamación no depende del momento en que ocurra. Por consiguiente, el proceso del número de reclamaciones  $(N(t))_{\{t \geq 0\}}$  y el proceso de los montos de siniestros son independientes.

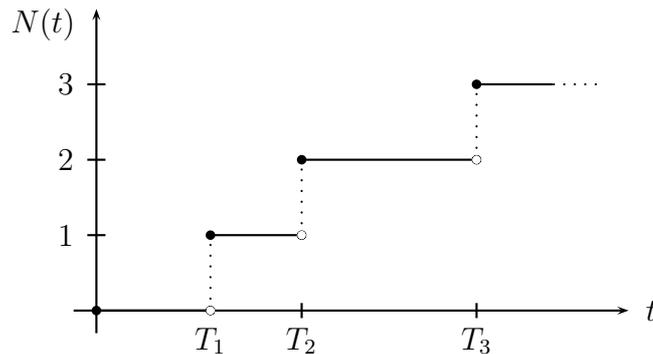


Figura 1.1: Una trayectoria del proceso de Poisson.

Como consecuencia de la Definición 1, el proceso  $N(t)$  es un proceso Poisson homogéneo con intensidad (tasa)  $\lambda > 0$ . Entonces:

$$P[N(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Una posible realización del proceso Poisson homogéneo se muestra en la Figura 1.1.

El modelo Sparre-Anderson es una generalización del modelo de Cramér-Lundberg que utiliza en el proceso de ocurrencia de las reclamaciones un proceso de renovación. Es decir, los tiempos de inter-arribo no son necesariamente exponenciales.

**Definición 2** *El proceso del agregado de siniestros  $(S(t))_{t \geq 0}$  de un portafolio se define como:*

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{si } N(t) > 0, \\ 0 & \text{si } N(t) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

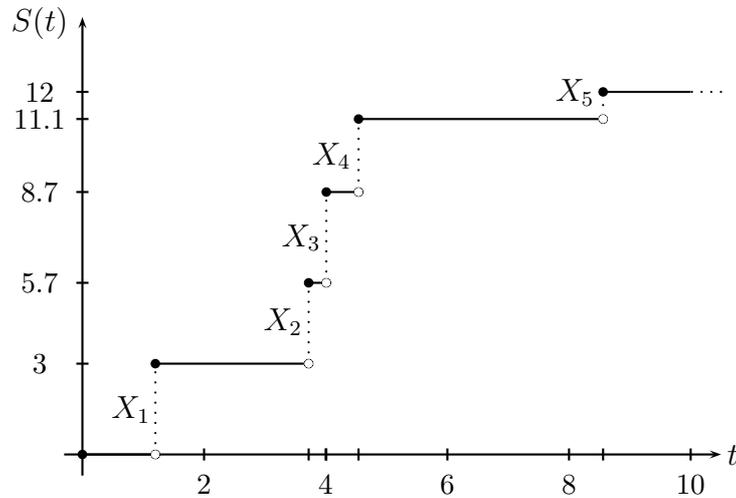


Figura 1.2: Una trayectoria del proceso de agregado de siniestros.

En la Figura 1.2 se muestra una trayectoria del proceso del agregado de siniestros a lo largo del tiempo  $t$ , donde la distribución del proceso es *Poisson compuesta* con parámetro  $\lambda = 0.5$  por unidad de tiempo y los montos de

siniestros tienen una distribución exponencial con parámetro  $\mu = 3$ .

El proceso  $(S(t))_{t \geq 0}$  es un proceso de suma parcial aleatoria, que se obtiene al sustituir el índice determinado  $n$  en la suma  $S_n = X_1 + \cdots + X_n$  por la variable aleatoria  $N(t)$ :

$$S(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)} = S_{N(t)}, \quad t \geq 0.$$

A lo anterior se le conoce como *proceso compuesto*. Observemos que cuando consideramos que  $Var(X_k) = \sigma^2 < \infty$ , el proceso del agregado de siniestros  $(S(t))_{t \geq 0}$  comparte varias propiedades con el proceso de una suma parcial, como las propiedades asintóticas del teorema del límite central y la ley fuerte de los grandes números<sup>3</sup>.

**Lema 1** *El agregado de siniestros  $S(t)$  con  $t \geq 0$  tiene función de distribución*

$$G_S(x) = P[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x) \quad t \geq 0, x \geq 0, \quad (1.3)$$

donde  $F^{n*}(x) = P[\sum_{i=1}^n X_i \leq x]$  es la  $n$ -ésima convolución de  $F$ .

*Demostración.*

Tenemos que

$$\begin{aligned} G_S(x) &= P[S(t) \leq x] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x \mid N(t) = n\right] P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right] P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x). \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Más detalles sobre estas características se encuentran en Melnikov [11].

Utilizamos el supuesto de independencia entre el monto de las reclamaciones y el número de ocurrencias al tiempo  $t$ . ■

En general, para cualquier función de distribución  $F$  sobre  $(-\infty, \infty)$  se define:

$$F^{0*}(x) = 1_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Con lo anterior podemos encontrar la expresión para la función generadora de momentos del agregado de siniestros, que se enuncia a continuación.

**Lema 2** *Para cada  $r \geq 0$ , el proceso del agregado de siniestros  $(S(t))_{t \geq 0}$  tiene función generadora de momentos*

$$M_{S(t)}(r) = E[e^{rS(t)}] = M_{N(t)}(\ln M_{X_i}(r)). \quad (1.5)$$

*Demostración.*

Para la demostración utilizaremos que el proceso del número de siniestros es independiente del proceso de montos de reclamación.

$$\begin{aligned} M_{S(t)}(r) &= E[\exp\{r \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\exp\{r \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\} | N(t) = k] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\exp\{r \sum_{i=1}^k X_i\}] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\prod_{i=1}^k e^{rX_i}] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E^k[e^{rX_i}] P[N(t) = k] \\ &= E[(M_{X_i}(r))^{N(t)}] \\ &= E[e^{N(t) \ln M_{X_i}(r)}] \\ &= M_{N(t)}(\ln M_{X_i}(r)) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como en este caso estudiamos el modelo Cramér-Lundberg, recordemos que la variable aleatoria que denota el número de siniestros en el período  $[0, t]$  se distribuye Poisson con parámetro  $\lambda t$  y tiene función generadora de momentos

$$M_{N(t)}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)},$$

por lo que la función generadora del agregado de siniestros es

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(M_{X_i}(r) - 1)}. \quad (1.6)$$

Para una compañía de seguros es importante conocer el proceso de siniestros a lo largo del tiempo pero aún más lo es el identificar y modelar la evolución temporal de las reservas de una compañía aseguradora, esto es, el comportamiento del riesgo <sup>4</sup>, ya que así se puede conocer con mayor exactitud el momento en el que se requiere una recapitalización por parte de los accionistas.

**Definición 3** *El proceso de riesgo  $(U(t))_{t \geq 0}$  se define como sigue*

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

en donde  $u \geq 0$  denota el capital inicial,  $ct$  el ingreso vía prima durante el período  $[0, t]$  a una tasa constante  $c > 0$  y  $S(t)$  es el agregado de siniestros en el momento  $t$ .

Cabe aclarar que dentro de las simplificaciones del modelo consideramos que los siniestros se pagan tan pronto como se tiene conocimiento de ellos por la compañía, y que no existe ganancia por intereses derivados del superávit.

En la Figura 1.3 se muestra una trayectoria del proceso de riesgo, bajo los supuestos del modelo clásico de Cramér-Lundberg, es decir, el proceso comienza en  $t = 0$  con un capital inicial  $u = 10$ , una tasa de crecimiento  $c = 0.5$ , el agregado de siniestros al momento  $t$  tiene distribución *Poisson compuesto* con parámetro  $\lambda t = 0.5t$ , y los montos de siniestros tienen distribución exponencial con parámetro  $\mu = 3$ . Podemos observar que al momento que ocurre una reclamación se descuenta inmediatamente del proceso reflejado en un egreso para la aseguradora.

---

<sup>4</sup>Risk process. En algunos textos se le llama proceso de superávit (surplus process) ya que en esencia se analiza la diferencia existente entre los ingresos y egresos de una institución financiera.

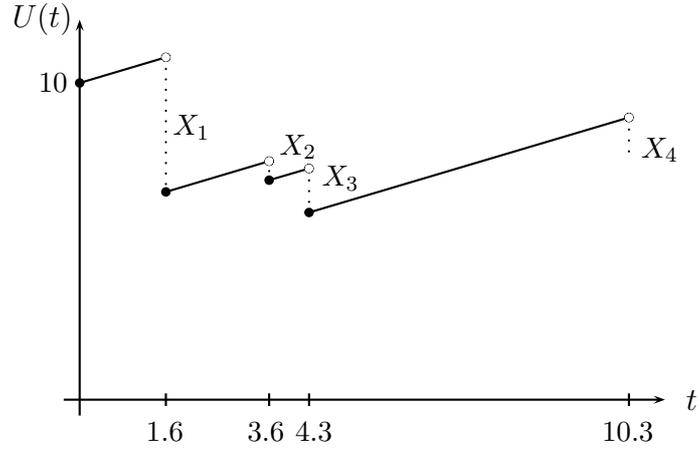


Figura 1.3: Una trayectoria del proceso de riesgo.

**Proposición 1** Para cada  $r \geq 0$ , el proceso de riesgo  $(U(t))_{t \geq 0}$  tiene función generadora de momentos

$$M_{U(t)}(r) = e^{r(u+ct)} M_{S(t)}(-r). \quad (1.8)$$

*Demostración.*

Del Teorema 1 se puede derivar la expresión para la función generadora de momentos de proceso de riesgo  $U(t)$  como sigue

$$\begin{aligned} M_{U(t)}(r) &= E[e^{rU(t)}] \\ &= E[e^{r(u+ct)-rS(t)}] \\ &= e^{r(u+ct)} M_{S(t)}(-r) \end{aligned}$$

■

De la misma manera que en el proceso del agregado de siniestros, la función generadora para cada proceso de riesgo  $U(t)$  en el modelo Cramér-Lundberg se expresa como

$$M_{U(t)}(r) = e^{r(u+ct)} e^{\lambda t(M_{X_i}(-r)-1)}. \quad (1.9)$$

Las funciones generadoras de los dos procesos implican que todos los momentos de las variables aleatorias son finitos, pero es suficiente que por lo menos exista el primer momento ya que la condición básica del modelo se deriva de lo anterior, la cual veremos después del siguiente lema. En algunos casos el segundo momento existe de las variables aleatorias antes mencionadas.

**Lema 3** Sea  $(U(t))_{t \geq 0}$  un proceso de riesgo, entonces para el modelo de renovación se tiene que:

$$E[U(t)] = u + ct - \mu E[N(t)], \quad (1.10)$$

y para el modelo clásico Cramér-Lundberg es:

$$E[U(t)] = u + ct - \lambda \mu t. \quad (1.11)$$

*Demostración.*

Sea  $U(t)$  el proceso de riesgo para  $t > 0$ , entonces se tiene que:

$$E[U(t)] = E[u + ct - S(t)] = u + ct - E[S(t)]$$

y considerando que los procesos del número de siniestros y el monto de las reclamaciones son independientes, se calcula la esperanza como sigue

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E[E[S(t)|N(t)]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i | N(t) = k\right] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^k X_i\right] P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k E[X_i] P[N(t) = k] \\ &= \mu \sum_{k=0}^{\infty} k P[N(t) = k] \\ &= \mu E[N(t)], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E[U(t)] = u + ct - \mu E[N(t)].$$

En particular, para el caso del modelo clásico  $(N(t))_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson homogéneo con tasa  $\lambda > 0$ , entonces  $E[N(t)] = \lambda t$  y

$$E[U(t)] = u + ct - \mu \lambda t.$$

■

Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[U(t)]}{t} = c - \lambda\mu, \quad (1.12)$$

Se tiene casi seguramente, por la ley fuerte de los grandes números, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = c - \lambda\mu \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - ct}{t} = \lambda\mu - c.$$

Nos interesa el límite anterior ya que si  $c < \lambda\mu$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} < 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - ct}{t} > 0$  casi seguramente. Como consecuencia  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) - ct = \infty$  y  $\sup_{0 \leq t < \infty} (S(t) - ct) = \infty$  casi seguramente. Además,  $P[\sup_{0 \leq t < \infty} (S(t) - ct) > u] = 1$  lo que nos indica que no tiene solvencia la compañía aseguradora.

Por lo que, una condición necesaria para la solvencia de la compañía aseguradora es que

$$c > \lambda\mu, \quad (1.13)$$

a la que se le conoce como la *condición de ganancia neta*<sup>5</sup>, de esta manera se considera que el ingreso vía prima sea mayor al monto esperado de los siniestros para poder cubrir todos las reclamaciones sin tener pérdidas, esto significa que  $E[U(t)]$  es positivo cuando  $t$  es grande. Por lo que, la condición básica en el modelo Cramér-Lundberg se define como:

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0. \quad (1.14)$$

La constante  $\rho$  es llamada *recargo de seguridad*<sup>6</sup> y representa un factor de recargo de la prima. Claramente el ingreso vía prima en el período  $[0, t]$  es

$$ct = (1 + \rho)\lambda\mu t. \quad (1.15)$$

Ahora encontraremos la expresión para la varianza, cuando  $\sigma^2 < \infty$ , del proceso de riesgo en el momento  $t$ .

---

<sup>5</sup>Net profit condition.

<sup>6</sup>Safety loading, este valor lo establece cada compañía aseguradora a partir de las estimaciones de la tasa del proceso y del valor esperado de los montos de siniestros.

**Lema 4** Sea  $(U(t))_{t \geq 0}$  un proceso de riesgo, entonces para el modelo de renovación se tiene que:

$$\text{Var}(U(t)) = \mu^2 \text{Var}(N(t)) + \sigma^2 E[N(t)], \quad (1.16)$$

y para el modelo clásico Cramér-Lundberg es:

$$\text{Var}(U(t)) = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2). \quad (1.17)$$

*Demostración.*

Sea  $U(t)$  el proceso de riesgo en  $t > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}(U(t)) &= \text{Var}(u + ct - S(t)) \\ &= \text{Var}(S(t)), \end{aligned}$$

considerando que el proceso del número de siniestros y el de los montos de reclamación son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S(t)) &= E[(S(t))^2] - E^2[S(t)] \\ &= E[E[(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i)^2 | N(t)]] - \mu^2 E^2[N(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[(\sum_{i=1}^k X_i)^2 | N(t) = k] P[N(t) = k] - \mu^2 E^2[N(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i=1}^k E[X_i^2] + \sum_{i \neq j} E[X_i X_j]) P[N(t) = k] - \mu^2 E^2[N(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k(\sigma^2 + \mu^2) + k(k-1)\mu^2) P[N(t) = k] - \mu^2 E^2[N(t)] \\ &= (\sigma^2 + \mu^2) E[N(t)] + \mu^2 E[N^2(t)] - \mu^2 E[N(t)] - \mu^2 E^2[N(t)] \\ &= \sigma^2 E[N(t)] + \mu^2 \text{Var}(N(t)) \end{aligned}$$

Para el modelo clásico Cramér-Lundberg la fórmula anterior se reduce a

$$\text{Var}(U(t)) = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2).$$

Puesto que  $N(t)$  tiene distribución Poisson con parámetro o tasa  $\lambda t$  entonces  $\text{Var}(N(t)) = \lambda t$ , sustituyéndolo en la expresión para la varianza obtenida llegamos a lo deseado.



Dentro de las aplicaciones actuariales, además del caso que hemos visto, otros tres modelos que son de especial interés son:

- i. El caso binomial compuesto, que se aplica a seguros de vida modelando el número de reclamaciones como las posibles ocurrencias de siniestros dentro de un portafolio con  $n$  pólizas, es decir, que sigue una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p$ . El inconveniente que presenta este modelo es que la varianza del número de siniestros es menor que su esperanza por lo que su uso se reduce a riesgos no tan variables como en los seguros de vida.
- ii. El modelo binomial negativa compuesto<sup>7</sup> con la correspondiente distribución binomial negativa con parámetros  $\alpha$  y  $p$  para el número de siniestros. La utilización de esta distribución nos ofrece una alternativa, dándonos una ventaja práctica al tener una varianza mayor a su valor esperado, lo que no ocurre al considerar la distribución Poisson. Consecuentemente, la distribución binomial negativa puede dar un mejor ajuste a un conjunto de datos cuya varianza muestral sea mayor que su media muestral.
- iii. La distribución geométrica compuesta, donde  $N(t)$  tiene una distribución geométrica, en este caso la distribución compuesta está determinada por  $p = 1 - P[N(t) = 0]$  y por la distribución de los montos de siniestros.

En el resto de este trabajo solamente se tratará el caso cuando el número de siniestros al tiempo  $t$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ .

---

<sup>7</sup>En algunos textos también se le llama modelo Pascal compuesto.

# Capítulo 2

## Probabilidad de ruina

Cuando nos referimos a ruina queremos decir que hay un momento en el cual el proceso de riesgo  $(U(t))_{t \geq 0}$  es negativo. A esto se le conoce como la ruina del portafolio, ya que en este momento técnicamente se necesitará una nueva inversión de capital, no necesariamente significa que la compañía haya quebrado.

Debemos considerar con mayor detenimiento el primer instante en el cual se necesita una recapitalización, que se define formalmente como sigue.

**Definición 4** *El tiempo de ruina es:*

$$\tau(t) = \inf \{s : 0 \leq s \leq t, U(s) \leq 0\}, \quad (2.1)$$

donde por convención  $\inf \emptyset = \infty$ , y utilizaremos  $\tau = \tau(\infty)$  para el tiempo de ruina con horizonte infinito<sup>1</sup>.

Para calcular la probabilidad de ruina debemos tener en cuenta que ésta depende del comportamiento del proceso de riesgo, el cual puede ser analizado en forma discreta o en forma continua, ofreciendo varias aproximaciones.

Dentro del análisis discreto, se observan los procesos del agregado de siniestros y el de riesgo en intervalos de tiempo de igual longitud a través del tiempo, como se muestra en las Figuras 2.1 y 2.2. En las dos figuras el

---

<sup>1</sup>El término horizonte infinito se refiere al análisis del proceso de riesgo  $U(t)$  para  $t \in [0, \infty)$ , mientras que el estudio del proceso en horizonte finito es para  $t \in [0, s]$  con  $0 < s < \infty$ .

proceso del agregado de siniestros se distribuye *Poisson compuesto* con tasa  $\lambda = 5$ , donde los montos de reclamación tienen una distribución normal truncada<sup>2</sup>.

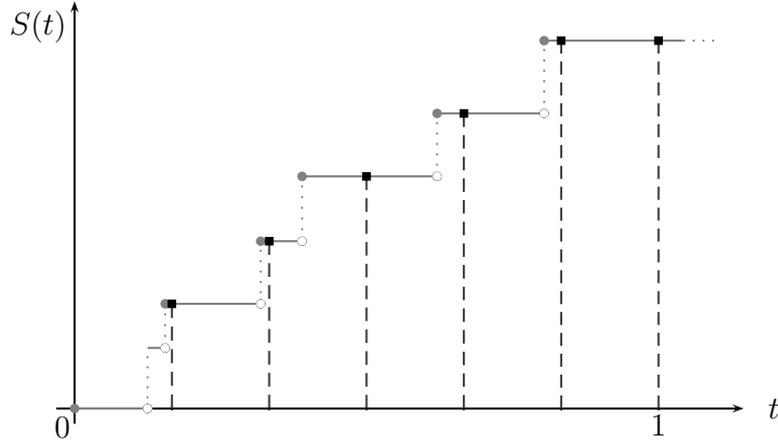


Figura 2.1: Una trayectoria del proceso de agregado de siniestros en tiempo discreto.

En la figura anterior podemos observar que a lo largo de un año ( $t = 1$ ) se tienen seis reclamaciones las cuales ocurren entre los momentos en que se realiza la revisión del proceso que es cada dos meses, por lo que no se tiene una buena cobertura del comportamiento a lo largo del año.

Los conocimientos sobre la probabilidad de que ocurra la ruina pueden ser útiles para determinar la solvencia del portafolio. Formalmente, la probabilidad de ruina en tiempo discreto<sup>3</sup> es definida de la siguiente manera.

**Definición 5** Sea  $h > 0$ , definimos las siguientes probabilidades de ruina en tiempo discreto

$$\psi_h(u, t) = P[U(s) \leq 0, \text{ p. a. } s = h, 2h, \dots, nh \leq t, n \in \mathbb{N}] \quad (2.2)$$

y

$$\psi_h(u) = P[U(s) \leq 0, \text{ p. a. } s = h, 2h, 3h, \dots]. \quad (2.3)$$

<sup>2</sup>Es una transformación de la distribución normal para obtener valores positivos, la cual se verá en el siguiente capítulo.

<sup>3</sup>El intervalo de estudio del proceso de riesgo  $U(t)$  se discretiza en tiempos fijos de la misma longitud.

Como observamos, el periodo de tiempo  $h$  puede ser del tamaño que deseemos (un año, un semestre, un mes, una semana, etc.), entre más pequeño sea tendremos una mejor cobertura sobre el proceso de riesgo y por lo tanto se aproximará con mayor exactitud la probabilidad de ruina para la compañía aseguradora.

En la siguiente figura se analiza el comportamiento del proceso de riesgo  $U(t)$  en tiempo discreto con un capital inicial  $u = 10$ , una tasa  $c = 1$ , el parámetro Poisson  $\lambda = 5$  al año y una distribución normal truncada para el monto de los siniestros. La revisión se lleva a cabo cada dos meses durante un año, en el cual se tienen seis reclamaciones con las que el proceso logra tomar valores negativos, esto ocurre un poco antes del octavo mes que es donde se tiene conocimiento de una quiebra técnica dado como resultado del análisis de los activos y pasivos de la compañía aseguradora, en este momento se deben tomar decisiones para incrementar su solvencia. En algunas ocasiones, se presentan este tipo de eventos sin que la aseguradora se percate de ello.

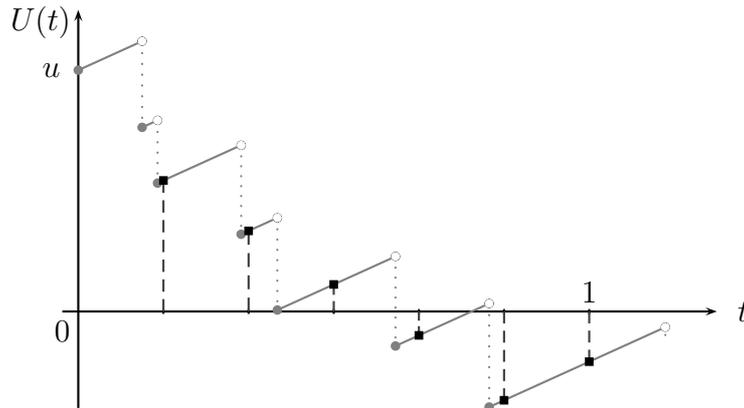


Figura 2.2: Una trayectoria del proceso de riesgo en tiempo discreto.

Algunas relaciones que son fáciles de verificar, además de ser de gran utilidad, entre las probabilidades de ruina en tiempo discreto considerando diferentes horizontes de tiempo, para  $h > 0$ , son:

1.  $\psi_h(u_2, t) \leq \psi_h(u_1, t)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$  y  $t > 0$ .

2.  $\psi_h(u_2) \leq \psi_h(u_1)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$ .
3.  $\psi_h(u, t_1) \leq \psi_h(u, t_2) \leq \psi_h(u)$  para  $u > 0$  y  $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$ .
4.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_h(u, t) = \psi_h(u)$  para  $t > 0$ .

Analizando en tiempo continuo el proceso de riesgo,  $(U(t))_{t \geq 0}$ , se definirá la probabilidad de ruina en tiempo continuo, la cual se tomará como base para el desarrollo de las cotas superiores para la misma, que se verán en los próximos capítulos.

**Definición 6** *La probabilidad de ruina en tiempo finito o con horizonte finito en tiempo continuo es*

$$\psi(u, t) = P[U(s) \leq 0, \text{ para alguna } s \leq t]. \quad (2.4)$$

*La probabilidad de ruina en tiempo infinito o con horizonte infinito en tiempo continuo es*

$$\psi(u) = P[U(s) \leq 0, \text{ para alguna } s \geq 0]. \quad (2.5)$$

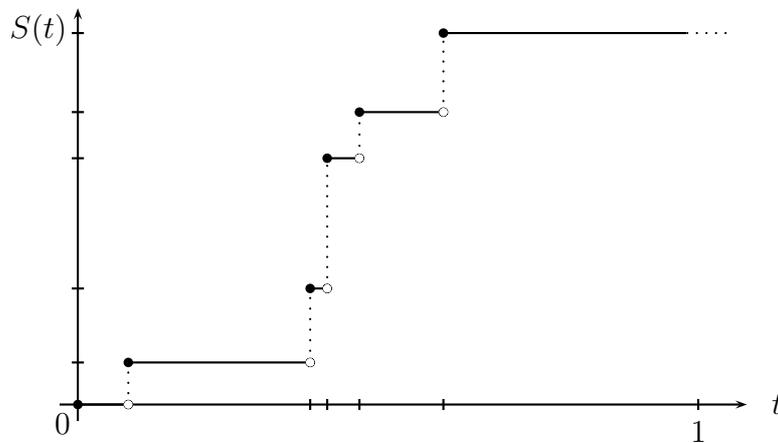


Figura 2.3: Una trayectoria del proceso de agregado de siniestros en tiempo continuo.

En la figura anterior observamos una trayectoria del proceso del agregado de siniestros para  $t \geq 0$ , con una distribución *Poisson compuesta* con tasa  $\lambda = 5$  y los montos de siniestros se distribuyen gama con parámetros  $\alpha = 2$



También encontramos algunas relaciones útiles entre las probabilidades de ruina en tiempo continuo,  $\psi(u)$  y  $\psi(u, t)$ , para diferentes horizontes de tiempo, las cuales son:

1.  $\psi(u_2, t) \leq \psi(u_1, t)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$  y  $t > 0$ .
2.  $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$ .
3.  $\psi(u_2, t_2) \leq \psi(u_1, t_1)$  para  $0 < u_1 \leq u_2 < \infty$  y  $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$ .
4.  $\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2) \leq \psi(u)$  para  $u > 0$  y  $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$ .
5.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \psi(u)$  para  $u > 0$  y  $t > 0$ .

Podemos relacionar la probabilidad de ruina en tiempo discreto y continuo de la siguiente forma:

6.  $\psi_h(u, t) \leq \psi(u, t)$  para  $t > 0$ .
7.  $\psi_h(u) \leq \psi(u)$  para  $t > 0$ .

Hay también dos relaciones que aproximan la probabilidad de ruina en tiempo continuo mediante la probabilidad de ruina en tiempo discreto considerando el mismo capital inicial,  $u > 0$ , y el mismo horizonte de tiempo,  $t > 0$ :

8.  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(u, t) = \psi(u, t)$ .
9.  $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(u) = \psi(u)$ .

El análisis en tiempo continuo se puede aproximar por medio del discreto como se observa en la Figura 2.5, de manera similar a las dos primeras figuras de este capítulo, se considera que los montos de reclamación tienen distribución normal truncada, el número de siniestros se distribuye Poisson con parámetro  $\lambda = 5$  por unidad de tiempo, un capital inicial  $u = 10$  y una tasa  $c = 1$ . Como el análisis del proceso de riesgo se lleva a cabo en períodos determinados de tiempo menores que los utilizados en la Figura 2.2, el estudio del mismo es un poco más exacto aunque no es completo.

Conforme se realiza la revisión del proceso de riesgo en períodos con longitud más pequeña, se controla mejor el mismo, facilitando una mejor toma de decisiones.

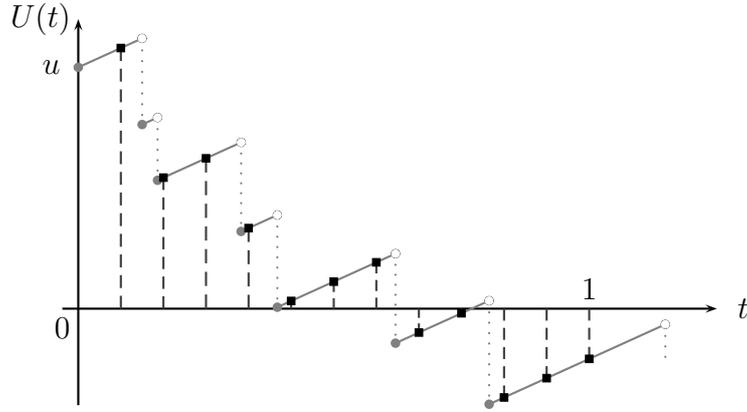


Figura 2.5: Una trayectoria del proceso de riesgo en tiempo discreto.

El análisis presentado en los siguientes dos capítulos es a tiempo continuo y con horizonte infinito ya que los resultados son más generales que en el caso discreto, así como cuando se toma un horizonte de tiempo finito. Asmussen [1] presenta un análisis en tiempo discreto para ciertos casos como son algunas distribuciones, algunos valores del capital inicial, entre otros.

Por definición del proceso de riesgo, la ruina puede ocurrir sólo en algún tiempo de reclamación  $T_i$  con un capital inicial  $u \geq 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= P[u + ct - S(t) < 0 \text{ para alguna } t \geq 0] & (2.6) \\
 &= P[u + cT_n - S(T_n) < 0 \text{ para alguna } n \geq 1] \\
 &= P[u + c \sum_{k=1}^n Y_k - \sum_{k=1}^n X_k < 0 \text{ para alguna } n \geq 1] \\
 &= P[u + \sum_{k=1}^n (cY_k - X_k) < 0 \text{ para alguna } n \geq 1] \\
 &= P[\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) > u \text{ para alguna } n \geq 1]. & (2.7)
 \end{aligned}$$

Esto es análogo a encontrar la siguiente probabilidad

$$1 - \psi(u) = P[\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u, \text{ para toda } n \geq 1]$$

$$= P\left[\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right]. \quad (2.8)$$

Ahora consideremos la sucesión de v.a.i.i.d.

$$Z_k = X_k - cY_k, \quad k \geq 1,$$

y la correspondiente caminata aleatoria

$$W_0 = 0, \quad W_n = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad n \geq 1.$$

Note que  $E[Z_1] = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0$  es la condición sobre el factor de recargo de la prima,  $\rho$ . Entonces la probabilidad de no ruina está dada por

$$1 - \psi(u) = P\left[\sup_{n \geq 1} W_n \leq u\right].$$

En general, para el modelo de renovación, la determinación de la probabilidad de no ruina  $1 - \psi(u)$  se reduce al estudio de la distribución del supremo de la caminata aleatoria antes descrita. Esta probabilidad puede ser determinada por la identidad de Spitzer, como se puede ver en Feller [7], p. 613, la cual proporciona la distribución del último supremo para una caminata aleatoria general. Una aplicación del resultado anterior, permite expresar a la probabilidad de no ruina como una función de distribución geométrica compuesta<sup>4</sup>, a esta expresión se le conoce como la *fórmula Pollaczek-Khinchine*

$$1 - \psi(u) = P[M \leq u] = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n H^{n*}(u) \quad (2.9)$$

donde  $M$  es una v. a. con distribución geométrica compuesta, para alguna  $\alpha \in (0, 1)$  y una función de distribución  $H$  particular, la expresión  $H^{n*}$  denota la  $n$ -ésima convolución de  $H$ , que se demostrará en el siguiente capítulo. Ambos,  $\alpha$  y  $H$ , pueden en general ser determinados por medio de la teoría clásica de Wiener-Höpf, ver Feller [7], sección XVIII.3.

La estimación de la probabilidad de ruina,  $\psi(u)$ , puede trabajarse para muchos modelos aplicando una variedad de técnicas. El objetivo de este trabajo es el estudio de estas probabilidades en el modelo Cramér-Lundberg, primero la estimación en el caso de reclamaciones pequeñas y posteriormente para reclamaciones grandes.

---

<sup>4</sup>Para mayores detalles puede ver Embrechts et. al. [6] y Asmussen [1].

# Capítulo 3

## Probabilidad de ruina para reclamaciones pequeñas

Como ya se ha dicho, el objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis de las probabilidades de ruina, así como acotarlas para minimizar el riesgo de una ruina técnica para una compañía aseguradora.

En este capítulo se utilizarán funciones de distribución con cola ligera para los montos de reclamación, estas distribuciones las veremos a continuación.

### 3.1 Distribuciones con cola ligera

Comenzaremos con la definición para las distribuciones de cola ligera.

**Definición 7** *Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  tiene cola ligera si para alguna  $s > 0$ ,*

$$M(s) < \infty,$$

*donde  $M(s) = E[e^{sX}]$  es la función generadora de momentos de la v. a.  $X$ .*

Mikosch en [12], realiza una discusión preliminar sobre las distribuciones de cola ligera y pesada, en donde nos dice que una manera de determinar la densidad de la cola es por medio de una comparación con la distribución exponencial de la siguiente manera:

**Proposición 2** Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  tiene cola ligera si para alguna  $\lambda > 0$ ,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty,$$

en donde  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ .

La demostración de este resultado se encuentra en Mikosch [12], p. 92.

Entre las distribuciones continuas que se consideran con cola ligera se encuentran la distribución exponencial, gama, normal truncada y weibull bajo algunas condiciones sobre uno de sus parámetros; para las cuales es fácil verificar que cumplen con la condición de cola ligera. Las funciones de densidad de cada una de ellas son:

1. **Distribución exponencial** o  $\exp(1/\mu)$  tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu},$$

para  $x > 0$  y  $\mu > 0$ . Su valor medio es igual a  $\mu$  y su varianza es  $\mu^2$ .

2. **Distribución gama** o  $\Gamma(\alpha, \beta)$  con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta},$$

para  $x > 0$  y  $\alpha, \beta > 0$ . Su media está dada por  $\alpha\beta$  y su varianza por  $\alpha\beta^2$ .

3. **Distribución Weibull** o  $W(r, b)$  con función de densidad

$$f(x) = rbx^{r-1} e^{-bx^r},$$

para  $x > 0$ , donde el parámetro de forma es  $r \geq 1$  y el parámetro escalar es  $b > 0$ . La media para esta distribución está dada por  $\Gamma(\frac{r+1}{r})b^{-1/r}$  y varianza  $(\Gamma(\frac{r+1}{r}) - \Gamma^2(\frac{r+2}{r}))b^{-2/r}$ .

4. **Distribución normal truncada** con función de densidad

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2},$$

para  $x > 0$ , con media igual a  $\sqrt{2/\pi}$  y varianza  $1 - 2/\pi$ .

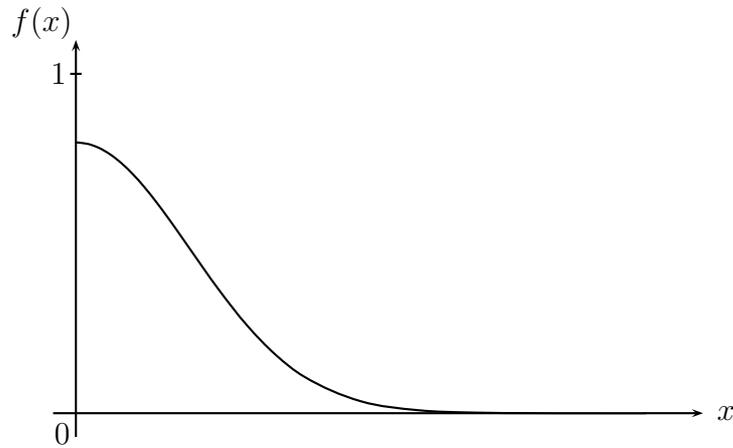


Figura 3.1: Densidad de una distribución normal truncada.

En la Figura 3.1 observamos la gráfica de la función de densidad de la distribución normal truncada, ésta se obtiene fácilmente al tomar el valor absoluto de una variable aleatoria  $Y$  con distribución normal estándar, es decir, con media igual a cero y desviación estándar igual a uno, de tal forma que  $F(x) = P[|Y| \leq x] = 2(\Phi(x) - 0.5)$ . Sin embargo, es de gran interés el análisis de la distribución de los montos de reclamación cuando se trata de una normal con parámetros  $\mu > 0$  y  $\sigma > 0$ , siempre teniendo en consideración de que tales cantidades sean positivas. Por ejemplo, la distribución normal doblada<sup>1</sup> es una transformación de la distribución normal dada por  $F(x) = P[|Y| \leq x]$  donde la v.a.  $Y$  se distribuye normalmente con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , la cual tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \cosh\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(x^2 + \mu^2)}{2\sigma^2}\right),$$

para  $x > 0$ , es útil para modelar los montos de las reclamaciones de ciertos siniestros.

En una sección más adelante hablaremos de una clase de distribuciones que juegan un papel muy importante ya que se tienen formas exactas para la

---

<sup>1</sup>También conocida como *foldednormal*. Ésta y otras distribuciones no tan conocidas, así como combinaciones de ellas se encuentran en McLaughlin [10], pp. 39, 85-98.

probabilidad de ruina  $\psi(u)$ , además de que son manejables computacionalmente.

## 3.2 Desigualdad de Lundberg

En el capítulo anterior se menciona que la condición de solvencia para el modelo Cramér-Lundberg es  $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ . En esta sección usaremos esta condición para demostrar que la fórmula Pollaczek-Khinchine tiene la siguiente expresión

$$1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u), \quad (3.1)$$

donde

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0,$$

denota la integral de la cola de la distribución<sup>2</sup> y  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ ,  $x \geq 0$  denota el área de la cola de la distribución  $F$ . Recordemos que en (2.9) se expresa a la probabilidad de no ruina como una función de distribución geométrica compuesta, más adelante se demostrará que  $\alpha = (1 + \rho)^{-1}$  y  $H$  es la función de distribución de los montos de siniestros,  $F$ , llegando a la ecuación (3.1).

También en este apartado, se enunciará y demostrará el teorema de Cramér-Lundberg. Antes veamos la siguiente proposición en donde se utiliza la transformada de Laplace-Stieltjes<sup>3</sup>, que nos será de gran utilidad para la demostración de uno de los teoremas más importantes dentro de la teoría de la ruina.

**Proposición 3** *Si existe  $R > 0$  tal que*

$$\hat{f}_I(-R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho, \quad (3.2)$$

*es equivalente a que exista una raíz positiva  $R$  tal que  $M_Z(R) = 1$ , donde  $Z_k = X_k - cY_k$ .*

---

<sup>2</sup>También es conocida como la *distribución estacionaria de exceso* o la *distribución de equilibrio* de  $F$ .

<sup>3</sup>La definición de esta transformada se encuentra en el Apéndice A.

*Demostración.*

Desarrollando e integrando por partes como sigue

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{Rx} dF_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{Rx} \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{1}{R\mu} \left( \bar{F}(x) e^{Rx} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{Rx} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{R\mu} (M_X(R) - 1),\end{aligned}$$

sustituyendo lo obtenido en (3.2) y despejando  $M_X(R)$  llegamos a que

$$M_X(R) = \frac{cR}{\lambda} + 1 = \frac{cR + \lambda}{\lambda}.$$

Por otro lado obtenemos el valor de  $M_Z(R)$  como sigue

$$\begin{aligned}M_Z(R) &= E[e^{RZ_k}] = E[e^{R(X_k - cY_k)}] \\ &= E[e^{RX_k}] E[e^{-cRY_k}] \\ &= M_{X_k}(R) M_{Y_k}(-cR),\end{aligned}$$

sabemos que las variables aleatorias  $(Y_k)_{k \in N}$  son i.i.d. con distribución exponencial por lo que

$$M_Z(R) = \left( \frac{\lambda}{\lambda + cR} \right) M_X(R)$$

y sustituyendo  $M_X(R)$  por  $(\lambda + cR)/\lambda$  obtenemos

$$M_Z(R) = \frac{\lambda}{\lambda + cR} \left( \frac{\lambda + cR}{\lambda} \right) = 1.$$

■

Dentro de los principales resultados de la teoría del riesgo se encuentra el teorema que a continuación se enuncia y demuestra:

**Teorema 1** (*Cramér-Lundberg*)

*Considere el modelo Cramér-Lundberg junto con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$ . Asuma que existe  $R > 0$  tal que (3.2) se cumple. Entonces se tienen las siguientes relaciones:*

a) Para toda  $u \geq 0$ ,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (3.3)$$

b) Si además

$$\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty, \quad (3.4)$$

entonces

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru} \psi(u) = \left( \frac{R}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx \right)^{-1} < \infty. \quad (3.5)$$

Antes de continuar, podemos derivar las siguientes consideraciones:

1. La condición fundamental de Cramér-Lundberg (3.2) puede escribirse como

$$\int_0^\infty e^{Rx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

2. Se sigue inmediatamente de la definición de la transformada de Laplace-Stieltjes que, siempre que  $R$  exista en (3.2), es única.

*Demostración.*

Para a) recordemos que en el capítulo anterior habíamos expresado a la probabilidad de no ruina como:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= P[\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u] \\ &= P[\sup_{n \geq 1} W_n \leq u] \end{aligned}$$

donde  $W_n = \sum_{k=1}^n Z_k$  y  $Z_k = X_k - cY_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . La variable aleatoria  $Z_k$  tiene función de distribución  $H(z)$ , y su función generadora de momentos es

$$M_Z(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{sz} dH(z) = E[e^{sZ}].$$

Ahora podemos obtener la función generadora de momentos de  $W_n$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E[e^{sW_n}] &= E[\exp(s \sum_{k=1}^n Z_k)] \\ &= (E[e^{sZ}])^n \\ &= (M_Z(s))^n. \end{aligned}$$

Partiendo de la función generadora de momentos de la variable  $W_n$  y utilizando la esperanza condicional con respecto al tiempo de ruina, se obtiene:

$$\begin{aligned}
E[e^{sW_n}] &= \psi(u, n)E[e^{sW_n}|\tau \leq n] + (1 - \psi(u, n))E[e^{sW_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u, n)E[e^{sW_\tau + s(W_n - W_\tau)}|\tau \leq n] \\
&\quad + (1 - \psi(u, n))E[e^{sW_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u, n) \sum_{i=1}^n E[e^{sW_i} (M_Z(s))^{n-i} | \tau = i] P[\tau = i | \tau \leq n] \\
&\quad + (1 - \psi(u, n))E[e^{sW_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u, n)E[e^{sW_\tau} (M_Z(s))^{n-\tau} | \tau \leq n] \\
&\quad + (1 - \psi(u, n))E[e^{sW_n}|\tau > n].
\end{aligned}$$

Multiplicando por  $(M_Z(s))^{-n}$ :

$$\begin{aligned}
1 &= \psi(u, n)E[e^{sW_\tau} (M_Z(s))^{-\tau} | \tau \leq n] \\
&\quad + (1 - \psi(u, n))E[e^{sW_n} (M_Z(s))^{-n} | \tau > n].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por la Proposición 3, el valor  $s = R$  cumple que  $M_Z(R) = 1$ , al cual se le conoce como *coeficiente de ajuste*, en la siguiente sección estudiaremos un poco más acerca de este valor. Reemplazando  $R$  en (3.6), se tiene que:

$$1 = \psi(u, n)E[e^{RW_\tau} | \tau \leq n] + (1 - \psi(u, n))E[e^{RW_n} | \tau > n].$$

Se desarrollan dos aproximaciones. Primero, el segundo término se omite, ya que como sabemos esta probabilidad es cero o positiva, dejándonos una desigualdad. Para la segunda aproximación, note que la definición de  $\tau$  nos dice que el proceso de riesgo en ese instante de tiempo es negativo, es decir, la diferencia entre los egresos por pago de reclamaciones y los ingresos vía prima es mayor que el capital inicial  $u$ , entonces la cantidad  $W_\tau$  en el primer término indica el valor de la ruina, i. e., un valor siempre mayor que  $u$ . Si  $W_\tau$  es reemplazada por  $u$ , entonces:

$$\begin{aligned}
1 &\geq \psi(u, n)E[e^{RW_\tau} | \tau \leq n] \\
&\geq \psi(u, n)E[e^{Ru} | \tau \leq n] \\
&= \psi(u, n)e^{Ru},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(u, n) \leq e^{-Ru}.$$

El valor  $n$  es algún número entero positivo y se sigue cuando  $n$  tiende a infinito que:

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-Ru} = e^{-Ru},$$

por lo tanto

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Con lo que se concluye la demostración de la primera parte del Teorema.

Ahora para la demostración del inciso  $b$ , denotemos  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ . Recuerde que  $\delta(u)$  puede ser expresada vía la caminata aleatoria generada por  $(X_i - cY_i)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \delta(u) &= P[u + ct - S(t) \geq 0 \text{ para toda } t > 0] \\ &= P[S(t) - ct \leq u \text{ para toda } t > 0] \\ &= P[S(t) - c(t - Y_1) - X_1 \leq u + cY_1 - X_1 \text{ para toda } t > Y_1, X_1 - cY_1 \leq u] \\ &= P[S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \text{ para toda } t > 0, X_1 - cY_1 \leq u], \end{aligned}$$

donde  $S'(t)$  es una copia independiente de  $S(t)$ . Se sigue que

$$\delta(u) = E[P[S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \text{ para toda } t > 0, X_1 - cY_1 \leq u | Y_1, X_1]],$$

usando la independencia entre  $X_1$  y  $Y_1$ ,

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} P[S'(t) - ct \leq u + cs - x \text{ para toda } t > 0] dF(x) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+cs} \delta(u + cs - x) dF(x) ds, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable,  $z = u + cs$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{z-u}{c}} \int_0^z \delta(z-x) dF(x) \frac{dz}{c} \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \int_0^z \delta(z-x) dF(x) dz. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $u$

$$\begin{aligned}
\delta'(u) &= \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \int_0^z \delta(z-x) dF(x) dz - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int_0^u \delta(u-x) dF(x) \\
&= \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) dF(x).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $v$  con respecto a la medida de Lebesgue

$$\int_0^v \delta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^v \delta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^v \int_0^u \delta(u-x) dF(x) du, \quad (3.7)$$

desarrollando la doble integral, tenemos que

$$\begin{aligned}
-\int_0^v \int_0^u \delta(u-x) dF(x) du &= \int_0^v \left( \delta(u-x) \bar{F}(x) \Big|_0^u + \int_0^u \delta'(u-x) \bar{F}(x) dx \right) du \\
&= \int_0^v \delta(0) \bar{F}(u) du - \int_0^v \delta(u) du \\
&\quad + \int_0^v \int_0^u \delta'(u-x) \bar{F}(x) dx du,
\end{aligned}$$

sustituyendo en (3.7)

$$\begin{aligned}
\delta(v) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^v \delta(u) du + \int_0^v \delta(0) \bar{F}(u) du - \int_0^v \delta(u) du \right] \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^v \int_0^u \delta'(u-x) \bar{F}(x) dx du \\
&= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^v \delta(0) \bar{F}(x) du + \int_0^v \int_0^u \delta'(u-x) \bar{F}(x) dx du \right],
\end{aligned}$$

haciendo un cambio en el orden de integración

$$\begin{aligned}
\delta(v) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^v \delta(0) \bar{F}(x) du + \int_0^v \bar{F}(x) \int_x^v \delta'(u-x) du dx \right] \\
&= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^v \delta(0) \bar{F}(x) du + \int_0^v (\delta(v-x) - \delta(0)) \bar{F}(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Finalmente llegamos a la solución

$$\delta(v) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^v \delta(v-x) \bar{F}(x) dx.$$

Note que  $\delta(0)$  es desconocida. Sin embargo,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(\infty) = \delta(\infty) = 1 - \psi(\infty)$  puesto que los conjuntos son crecientes y se tiene continuidad por abajo. Además, usando la condición de solvencia se llega a que  $\delta(\infty) = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \delta(\infty) \bar{F}(x) dx \\ &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(x) dx \\ &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \mu, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\delta(0) + \frac{\lambda\mu}{c} = 1.$$

Ahora ya podemos conocer el valor de  $\delta(0)$ , el cual es

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^v \delta(v-x) \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^v \delta(v-x) dF_I(x) \\ &= \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_0^v \delta(v-x) dF_I(x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observemos que desarrollando un poco la igualdad anterior se obtiene la fórmula (3.1).

Sustituyendo  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$  y definiendo  $\alpha = \frac{1}{1 + \rho} < 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= (1 - \alpha) + \alpha \int_0^u (1 - \psi(u-x)) dF_I(x) \\ &= 1 - \alpha + \alpha \int_0^u dF_I(x) - \int_0^u \psi(u-x) d(\alpha F_I(x)), \\ \psi(u) &= \alpha - \alpha F_I(u) + \int_0^u \psi(u-x) d(\alpha F_I(x)) \\ &= \alpha \bar{F}_I(u) + \int_0^u \psi(u-x) d(\alpha F_I(x)), \end{aligned}$$

en donde  $0 < \alpha < 1$ . Esta ecuación corresponde a una *ecuación de renovación defectuosa*, puesto que  $\alpha F_I$  no es una función de distribución.

Usando la transformada de Esscher, reescribimos la ecuación como sigue:

$$\begin{aligned} e^{Ru}\psi(u) &= \alpha e^{Ru}\bar{F}_I(u) + \int_0^u e^{Rx}\psi(u-x)d(\alpha F_I(x)) \\ &= \alpha e^{Ru}\bar{F}_I(u) + \int_0^u e^{R(u-x)}\psi(u-x)dF_{I,R}(x) \end{aligned}$$

donde, por la condición (3.2), ésta corresponde a una *ecuación de renovación estándar* ya que  $F_{I,R}$  corresponde a una función de distribución continua. Una clara aplicación del *teorema clave de renovación de Smith*, uno de los principales dentro de la teoría de renovación, se usará para concluir la demostración.

Utilizaremos primero el *teorema clave de renovación de Smith* y después verificaremos que cumple las condiciones requeridas:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{\int_0^\infty \alpha e^{Rx}\bar{F}_I(x)dx}{\int_0^\infty x dF_{I,R}(x)},$$

desarrollando el numerador

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha e^{Ru}\bar{F}_I(u)du &= \frac{\alpha}{R} \left[ e^{Rx}\bar{F}_I(x)|_0^\infty + \int_0^\infty e^{Rx}dF_I(x) \right] \\ &= \frac{\alpha}{R} (\hat{f}_I(-R) - 1) \\ &= \frac{\rho}{R(1+\rho)} < \infty, \end{aligned}$$

y el denominador

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x dF_{I,R}(x) &= \frac{\alpha}{\mu} \int_0^\infty x e^{Rx}\bar{F}(x)dx \\ &= \frac{1}{\mu(1+\rho)} \int_0^\infty x e^{Rx}\bar{F}(x)dx < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{\rho\mu}{R} \left( \int_0^\infty x e^{Rx}\bar{F}(x)dx \right)^{-1} < \infty,$$

que es exactamente a lo que deseamos llegar. Ahora, podemos verificar las condiciones necesarias para aplicar el *Teorema clave de renovación de Smith*. Partiendo de que

$$\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty,$$

además, si derivamos e integramos por partes se tiene que

$$\alpha e^{Ru} \bar{F}_I(u) = \int_u^\infty e^{Rx} d(\alpha F_I(x)) - R \int_u^\infty \alpha \bar{F}_I(x) e^{Rx} dx,$$

donde podemos observar que  $\alpha e^{Ru} \bar{F}_I(u)$  es la diferencia de dos funciones Riemann integrables no decrecientes, y entonces es directamente Riemann integrable. ■

En la siguiente proposición veremos cómo se llega a la expresión (3.1).

**Proposición 4** *Bajo las mismas condiciones del Teorema 1, la probabilidad de no ruina puede ser expresada como en (3.1), esto es,*

$$1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u).$$

*Demostración.*

Utilizando la misma notación que en la demostración anterior, podemos expresar a (3.8) como

$$\delta(u) = (1 - \alpha) + \alpha \int_0^u \delta(u - x_1) dF_I(x_1),$$

sustituyendo  $\delta(u - x_1)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(u) &= (1 - \alpha) + \alpha \int_0^u \left( (1 - \alpha) + \alpha \int_0^{u-x_1} \delta(u - x_1 - x_2) dF_I(x_2) \right) dF_I(x_1) \\ &= (1 - \alpha) + (1 - \alpha) \alpha \int_0^u dF_I(x_1) \\ &\quad + \alpha^2 \int_0^u \int_0^{u-x_1} \delta(u - x_1 - x_2) dF_I(x_2) dF_I(x_1), \end{aligned}$$

de forma recursiva se llega a que

$$\delta(u) = (1 - \alpha) + (1 - \alpha) \alpha F_I(u) + (1 - \alpha) \alpha^2 \int_0^u \int_0^{u-x_1} dF_I(x_2) dF_I(x_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (1 - \alpha)\alpha^n \int_0^u \cdots \int_0^{\sum_{i=1}^n x_i} dF_I(x_n) \cdots dF_I(x_1) \\
& + \alpha^{n+1} \int_0^u \cdots \int_0^{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} \delta(u - \sum_{i=1}^{n+2} x_i) dF_I(x_{n+2}) \cdots dF_I(x_1),
\end{aligned}$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= (1 - \alpha)(1 + \alpha F_I(u) + \cdots + \alpha^n F_I^{n*}(u) + \cdots) \\
&= (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_I^{n*}(u),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\delta(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \rho)^n} F_I^{n*}(u),$$

que corresponde a la ecuación (3.1). ■

### 3.3 Coeficiente de ajuste

En este apartado nos enfocaremos un poco más al estudio del coeficiente de Lundberg, en la mayoría de los casos no es tan fácil encontrar una expresión analítica para el mismo ya que depende directamente de la distribución de los montos de reclamación, como veremos más adelante. Comencemos con la definición del exponente de Lundberg.

**Definición 8** *Dada una función de distribución  $F$  de cola ligera para el tamaño de reclamación, se define el exponente de Lundberg o coeficiente de ajuste<sup>4</sup> como aquella constante  $R > 0$  tal que*

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}. \tag{3.9}$$

---

<sup>4</sup>Dentro del reaseguro a  $R$  también se le conoce como la *constante de insolvencia* del asegurador.

Es necesario que la distribución en cuestión sea de cola ligera ya que esto nos asegura la existencia de la función generadora de momentos de la v. a. que denota a los montos de reclamación, y por lo tanto la relación mostrada en la ecuación (3.9) es cierta. La situación antes expuesta se observa con mayor claridad en la siguiente definición, por la Proposición 3 es análoga a la Definición 8.

**Definición 9** *Asuma que la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $Z_k$  existe en alguna vecindad del origen,  $(-s_0, s_0)$  con  $s_0 > 0$ . Si existe una única solución positiva  $R$  a la ecuación*

$$M_Z(R) = M_{Z_k}(R) = E[e^{R(X_k - cY_k)}] = 1 \quad (3.10)$$

*entonces ésta es llamada coeficiente de Lundberg o de ajuste.*

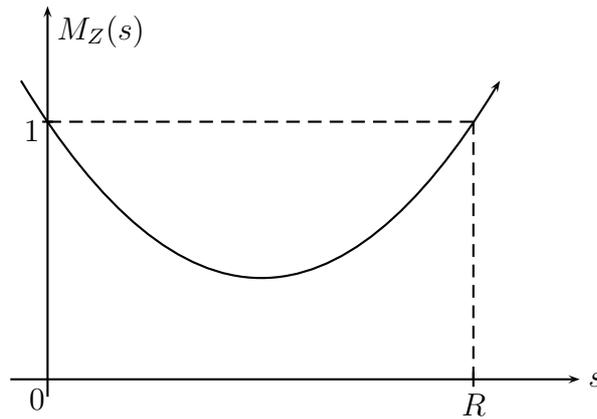


Figura 3.2: Función generadora de momentos de la variable aleatoria  $Z$ .

La Figura 3.2 muestra un ejemplo típico de la función  $M_Z(s)$  con el exponente de Lundberg  $R$ .

La existencia de la función generadora de momentos  $M_X(s)$  para  $s \in [0, s_0)$  implica la existencia de  $M_Z(s) = M_X(s)M_{cY}(-s)$  para  $s \in [0, s_0)$  ya que  $M_{cY}(-s) \leq 1$  para toda  $s \geq 0$ . Para  $s \in (-s_0, 0)$ , el mismo argumento implica que  $M_Z(s)$  existe si  $M_{cY}(-s)$  es finita. Por consiguiente, la función generadora de momentos de  $Z$  existe en una vecindad del cero si las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias  $X_k$  y  $cY_k$  existen. En el

modelo Cramér-Lundberg con intensidad  $\lambda$  para el número de reclamaciones, se tiene que

$$M_{cY_k}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - cs}$$

existe para  $s < \lambda/c$ .

En las dos definiciones del coeficiente de ajuste se menciona que  $R$  es única, para probar que existe como solución a (3.9) y (3.10), observe los siguientes factores:

La función  $M_Z(s)$  tiene derivadas de todo orden en  $(-s_0, s_0)$  y además

- i)  $M_Z(0) = 1$ ,
- ii)  $M'_Z(0) = E[Z] = E[X_k - cY_k] = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0$ ,
- iii)  $M''_Z(s) = E[Z^2 e^{sZ}] > 0$  para toda  $s$ .

La condición ii) y la continuidad de  $M_Z(s)$  implica que la función generadora de momentos decrece en alguna vecindad del cero. Por otro lado, el punto iii) implica que  $M_Z(s)$  es convexa. Se puede concluir que existe algún  $s_1 \in (0, s_0)$  tal que  $M'_Z(s_1) = 0$ , entonces  $M_Z(s)$  cambia su comportamiento monótono de decreciente a creciente en  $s_1$ . Para  $s > s_1$ ,  $M_Z(s)$  crece. Por lo tanto, hay uno y sólo un valor  $s = R$  que satisface  $M_Z(s) = 1$ , la solución es única, condicionada a que la función generadora de momentos exista en una vecindad del origen suficientemente grande. Una condición suficiente para que esto suceda es que exista  $0 < s_2 \leq \infty$  tal que  $M_Z(s) < \infty$  para  $s < s_2$  y  $\lim_{s \uparrow s_2} M_Z(s) = \infty$ . Esto significa que la función generadora de momentos  $M_Z(s)$  crece continuamente a infinito. En particular, asumimos el valor 1 para  $s$  suficientemente grande.

De este argumento también vemos que la existencia del exponente de Lundberg como la solución de (3.10) no es automática; la existencia de la f.g.m. de  $Z$  en alguna vecindad del cero no es suficiente para asegurar que hay alguna  $R > 0$  con  $M_Z(R) = 1$ .

De lo anterior llegamos a que

$$M_Z(s) = M_X(s) \left( \frac{\lambda}{\lambda + sc} \right).$$

Y sabemos que  $M_Z(s) = 1$  sólo se cumple para  $s = 0$  y para  $s = R$ , pero nos interesa la raíz positiva por lo que tomamos la segunda solución

$$M_X(R) \left( \frac{\lambda}{\lambda + cR} \right) = 1, \quad (3.11)$$

recordemos que  $c = (1 + \rho)\lambda\mu$ , sustituyendo

$$\begin{aligned} \lambda M_X(R) &= \lambda + cR \\ &= \lambda + (1 + \rho)\lambda\mu R. \end{aligned}$$

Entonces

$$M_X(R) = 1 + (1 + \rho)\mu R.$$

Por lo tanto el *coeficiente de Lundberg*,  $R$ , es independiente del parámetro Poisson, solamente depende del factor de recargo,  $\rho$ , y de la distribución de los montos de siniestros.

Nos es de gran interés tener una idea del valor de  $R$ , para esto podemos encontrar un límite superior partiendo de (3.11), de la siguiente manera

$$\lambda \int_0^\infty e^{Rx} dF(x) > \lambda \int_0^\infty \left( 1 + Rx + \frac{1}{2}R^2x^2 \right) dF(x),$$

integrando tenemos que

$$\lambda + cR > \lambda(1 + Rm_1 + \frac{1}{2}R^2m_2)$$

y despejando al coeficiente de ajuste

$$(c - \lambda\mu)R > \frac{1}{2}\lambda R^2 m_2,$$

por lo tanto

$$R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda m_2}, \quad (3.12)$$

donde  $m_2$  es el segundo momento de los montos de siniestros, que es igual a  $\sigma^2 + \mu^2$ . Notemos que la cota queda en términos de la esperanza y varianza del proceso del agregado de siniestros en una unidad de tiempo. La existencia de este límite implica que la cota de la probabilidad de ruina se relaciona como sigue

$$e^{-\frac{2(c-\lambda\mu)}{\lambda(\sigma^2+\mu^2)}u} < e^{-Ru}, \quad (3.13)$$

aunque no podemos relacionarlo directamente con la probabilidad de ruina.

### 3.4 Caso exponencial

En esta sección, veremos un caso particular del modelo, esto es, donde la distribución de los montos de siniestros es exponencial con media  $\mu$ .

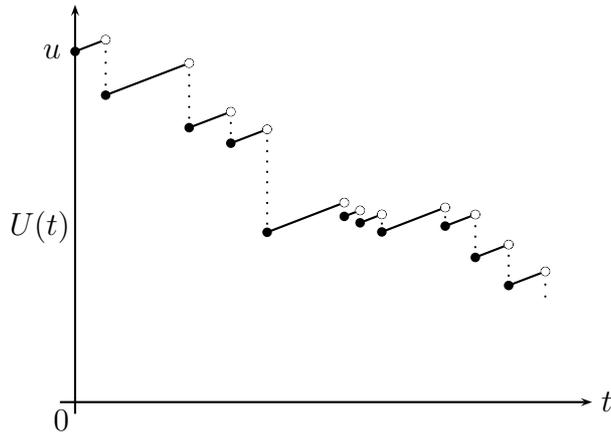


Figura 3.3: Trayectoria del proceso de riesgo en el caso exponencial.

En la Figura 3.3 se muestra una trayectoria del proceso de riesgo en donde los tamaños de reclamación siguen una distribución exponencial con parámetro  $1/\mu$ , i.e. con media  $\mu$ . El periodo de tiempo analizado es corto, el proceso no llega a ser negativo pero nos interesa conocer su comportamiento a largo plazo, por lo que es importante considerar diferentes periodos de tiempo para el análisis del mismo.

**Teorema 2** *Considere el modelo Cramér-Lundberg incluyendo la condición de ganancia neta  $\rho > 0$ . Suponga que existe  $R > 0$  tal que (3.2) se cumple, esto es que*

$$\hat{f}_I(-R) = \int_0^\infty e^{Rx} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho.$$

*Entonces para el caso en el que los montos de reclamación siguen una distribución exponencial,  $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$ , la fórmula Pollaczec-Kinchine en (3.1) se reduce a*

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp\left(-\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)}u\right), \quad u \geq 0. \quad (3.14)$$

Además el coeficiente de ajuste está dado por

$$R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}. \quad (3.15)$$

*Demostración.*

Para esta parte, primero debemos obtener la integral de la cola de la distribución que a continuación se realiza:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-x/\mu},$$

y entonces

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{-y/\mu} dy \\ &= -e^{-y/\mu} \Big|_0^x \\ &= 1 - e^{-x/\mu}, \end{aligned}$$

que corresponde a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro  $1/\mu$ .

Para obtener la  $n$ -ésima convolución, sabemos que la suma de  $n$  variables aleatorias con distribución exponencial con parámetro  $\mu$ , se distribuye gama con parámetros  $n$  y  $\mu$ . En Mood [13], encontramos que si una v.a.  $X$  tiene dicha distribución, su función de distribución se puede expresar como

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x/\mu} \frac{(x/\mu)^k}{k!},$$

para  $x > 0$ . Aplicando el resultado anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u) \\ &= \frac{\rho}{1 + \rho} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \left( 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-u/\mu} \frac{(u/\mu)^k}{k!} \right) \right] \\ &= \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{\rho}{1 + \rho} \left( \frac{1 + \rho}{\rho(1 + \rho)} \right) - \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-u/\mu} \frac{(u/\mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho} e^{-u/\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u/\mu)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \\
&= 1 - \frac{\rho}{1+\rho} e^{-u/\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u/\mu)^k}{k!} \frac{1}{\rho(1+\rho)^k} \\
&= 1 - \frac{1}{1+\rho} \exp\left(\frac{-u}{\mu} + \frac{u}{\mu(1+\rho)}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{1+\rho} \exp\left[-\frac{u}{\mu} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u\right).$$

Claramente observamos que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

donde

$$R = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)} = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}.$$

■

De esta forma concluimos que para este caso se tiene una expresión analítica exacta de la probabilidad de ruina, no sólo es una cota. Si tenemos los valores  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $c$  y  $u$ , podemos fácilmente calcular la probabilidad de ruina con horizonte infinito, y por las relaciones vistas en el capítulo anterior tenemos una cota para la probabilidad de ruina en tiempo finito para cualquier valor de  $t$ .

En la Figura 3.4 se muestra la probabilidad de ruina en tiempo infinito,  $\psi(u)$ , como una función del capital inicial. Los valores que se utilizaron para obtener esta gráfica son  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0.2$  y  $c = 0.5$ , con los que se obtuvo el valor de  $\rho = 1.5$ , sustituyendo estos valores en la probabilidad de ruina se llega a

$$\psi(u) = \frac{1}{2.5} e^{-3u}.$$

Como se observa, el valor más grande que toma la función es de 0.4 para un capital inicial igual a cero, de ahí decrece rápidamente conforme el capital

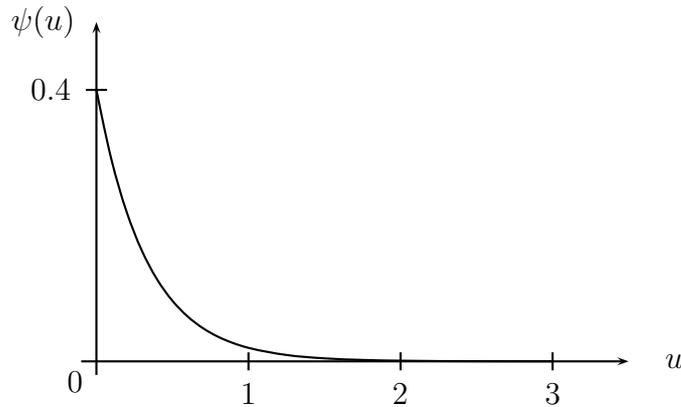


Figura 3.4: Probabilidad de ruina en el caso exponencial.

inicial aumenta, y para un capital inicial mayor a 1 la probabilidad de ruina es muy cercana a cero.

**Ejemplo 1** *Ahora supongamos que tenemos un cartera de seguros bajo el modelo Cramér-Lundberg donde los montos de siniestros pueden ser modelados por la distribución Pareto, esto es:*

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \quad x \geq 0, \quad \alpha > 1,$$

entonces

$$F(x) = 1 - \frac{\beta^\alpha}{(\beta+x)^\alpha} \quad y \quad \bar{F}(x) = \beta^\alpha(\beta+x)^{-\alpha} \quad x \geq 0, \quad \alpha > 1.$$

Además  $E[X_1] = \beta(\alpha-1)^{-1}$  y la condición de solvencia para este caso es

$$\rho = \frac{c(\alpha-1)}{\lambda\beta} - 1 > 0.$$

Una pregunta importante que nos debemos hacer es: ¿podemos trabajar con la estimación de Cramér-Lundberg para este caso ya que se cumple la condición de ganancia neta? La respuesta es que no, puesto que para cada  $R > 0$

$$\int_0^\infty e^{Rx} \bar{F}(x) dx = \int_0^\infty e^{Rx} \left( \frac{\beta}{\beta+x} \right)^\alpha dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{e^{Rx} \beta^\alpha}{R(\beta + x)^\alpha} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{Rx} \alpha \beta^\alpha}{R(\beta + x)^{\alpha+1}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

En este caso no podemos estimar la probabilidad de ruina por la desigualdad de Cramér-Lundberg. Esto se debe a que la distribución Pareto pertenece a la clase de distribuciones subexponenciales que se verá con más detalle en el próximo capítulo.

### 3.5 Caso distribuciones tipo fase

Antes de la definición de una distribución tipo fase necesitamos la definición de un proceso de Markov, que a continuación se enuncia.

**Definición 10** Un proceso de Markov  $(J_t)_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico con la siguiente propiedad para  $0 \leq s < t$

$$P[J_t = j_t | J_s = j_s, \dots, J_0 = j_0] = P[J_t = j_t | J_s = j_s].$$

Lo que es de nuestro particular interés es un proceso de Markov terminante  $(J'_t)_{t \geq 0}$  con espacio de estados finito y matriz de intensidades  $\mathbf{P}'$ . Un proceso de Markov terminante se define como un proceso de Markov  $(J'_t)_{0 \leq t < \infty}$  agregándole un estado absorbente  $a$  de tal forma que el espacio de estados queda como  $E_a = E \cup \{a\}$ , que  $a$  sea absorbente significa que  $P_i[J'_t = a \text{ eventualmente}] = 1$  para toda  $i \in E$  y donde todos los estados  $i \in E$  son transitorios.

**Definición 11** Una distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  se dice que es de tipo fase si  $F$  es la distribución del tiempo de vida de un proceso de Markov terminante  $(J_t)_{t \geq 0}$  con espacio de estados finito y probabilidades de transición homogéneas.

En otras palabras, una distribución tipo fase es la distribución del tiempo de absorción en una cadena de Markov con espacio de estados finito, donde uno de ellos es absorbente y los demás son transitorios. Algunos casos especiales son la distribución exponencial, la Erlang y la hipereponencial, entre otras. Los parámetros de una distribución tipo fase son el conjunto  $E$  de estados transitorios, la restricción  $\mathbf{P}$  de la matriz de intensidades del proceso de Markov y el vector renglón  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in E}$  de probabilidades iniciales.

Los parámetros que se nombran son los siguientes  $(E, \alpha, \mathbf{P})$  o en algunas ocasiones basta con el par  $(\alpha, \mathbf{P})$  y se le conoce como la representación del proceso.

Las propiedades analíticas básicas de las distribuciones tipo fase están dadas por el siguiente resultado.

**Teorema 3** *Sea  $F$  una distribución tipo fase con representación  $(E, \alpha, \mathbf{P})$ . Entonces:*

- a) *la expresión de la función de distribución es  $F(x) = 1 - \alpha e^{\mathbf{P}x} \mathbf{e}$ ,*
- b) *la función de densidad es  $f(x) = F'(x) = \alpha e^{\mathbf{P}x} \mathbf{t}$ ,*
- c) *la función generadora de momentos es  $M(s) = \alpha (-s\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{t}$ ,*
- d) *el  $n$ -ésimo momento es  $E[X^n] = (-1)^n n! \alpha \mathbf{P}^{-n} \mathbf{e}$   
donde  $\mathbf{e}$  es un vector columna con todos sus componentes iguales a uno y  $\mathbf{t} = -\mathbf{P}\mathbf{e}$ .*

La demostración del resultado anterior así como de los siguientes, se encuentra en Asmussen [1].

**Proposición 5** *Sea  $X$  una v. a. tipo fase con representación  $(\alpha, \mathbf{P})$ , asuma que  $\mathbf{P}$  es irreducible, sea  $-\eta$  el mayor valor propio de  $\mathbf{P}$ , sea  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  los correspondientes vectores propios derecho e izquierdo normalizados por  $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 1$  y defina  $C = \alpha \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{e}$  es un vector columna con todos sus componentes iguales a uno. Entonces la cola  $\bar{F}(x)$  es asintóticamente exponencial,*

$$\bar{F}(x) \approx C e^{-\eta x}.$$

**Corolario 1** *Asuma que la distribución de los montos de reclamación son tipo fase con representación  $(\alpha, \mathbf{P})$ . Entonces la probabilidad de ruina tiene la siguiente expresión*

$$\psi(u) = \alpha_+ e^{(\mathbf{P} + \mathbf{t}\alpha_+)u},$$

donde  $\alpha_+ = -\lambda \alpha \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\lambda > 0$  es el parámetro Poisson y  $\mathbf{t} = -\mathbf{P}\mathbf{e}$ .

## 3.6 Simulación

El objetivo de llevar a cabo las simulaciones del proceso de riesgo estudiado es para validar los resultados teóricos obtenidos, es decir, corroborar para distribuciones de cola ligera por medio de la generación de números aleatorios que la cota dada corresponde a la probabilidad calculada muestralmente bajo los supuestos de la probabilidad clásica.

Se consideraron dos métodos de simulación, el primero es el método Monte Carlo y el segundo es aplicando la fórmula Pollaczek-Kinchine, en seguida se explica cada uno de ellos.

### 3.6.1 Vía método Monte Carlo

Utilizando éste método se generan las variables correspondientes al monto de las reclamaciones, así como los tiempos de arribo en que ocurre cada una de ellas, de esta forma se tiene una trayectoria a lo largo de un periodo de tiempo definido. Notemos que el análisis se realiza de forma continua ya que conocemos las características de todos los siniestros ocurridos, y en tiempo finito.

Para lograr nuestro objetivo necesitamos considerar los supuestos del modelo para no tener demasiados sesgos en las estimaciones. Los valores que se utilizaron como parámetros del modelo son para fines ilustrativos, no se analiza algún caso en particular aunque no se descarta el uso del programa<sup>5</sup> para casos reales. Esos valores se eligieron indistintamente sin olvidar que deben cumplir la condición de ganancia neta.

El número de corridas fueron 10 para cada distribución, cada corrida tuvo una longitud de 5000 iteraciones, ya que con este número las probabilidades de ruina estimadas son muy cercanas a la probabilidad de ruina, como se observará más adelante en la Tabla 3.1.

Para cada corrida se utilizaron diferentes parámetros, en todos los casos se calculó la cota de la probabilidad de ruina con horizonte infinito, excepto en

---

<sup>5</sup>El programa principal es *p ruina(u,c,lambda,dist,p1,p2,p3,t,m)*, en el apéndice se explica la forma de utilizarlo.

el caso exponencial donde se tiene una forma cerrada de dicha probabilidad, esto nos sirve para realizar la comparación entre lo teórico y lo muestral, aunque cabe aclarar que la estimación es en horizonte finito. La cota para la probabilidad de ruina a tiempo infinito depende del valor del coeficiente de Lundberg, el cual se calculó por métodos numéricos en el programa Mathematica.

Los resultados que se presentan son a modo de resumen. Para el cálculo de la probabilidad de ruina con datos generados aleatoriamente, se llevó un conteo en cada iteración del proceso de riesgo en el que toma por lo menos un valor negativo durante el periodo de análisis.

La instrucción para calcular la probabilidad de ruina con horizonte finito es  $pruina(u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3, t, m)$ , en el anexo se detallará la forma de utilizar el programa.

Se utilizó el software MatLab versión 6.5 para la creación y desarrollo de los programas, los cuales se anexan en el Apéndice A al final de este trabajo. La elección de este paquete se debió principalmente a la familiaridad con el lenguaje de programación, además de que cuenta con librerías estadísticas y probabilísticas que facilitan la simulación, igualmente proporciona resultados escritos y gráficos que pueden exportarse a otros paquetes. Una característica que tiene este paquete es la manipulación de matrices, por lo que la forma de almacenamiento de datos es vectorialmente que también sirve para obtener las gráficas requeridas.

Cabe mencionar que la computadora en la que se realizó el trabajo cuenta con un procesador Celeron de 1.1 GHz con 128 MB en memoria RAM, con lo que la duración de cada corrida toma un poco de tiempo, sobretodo por el número de iteraciones (trayectorias) que se realizaron dentro de cada corrida.

### 3.6.2 Vía fórmula Pollaczec-Khinchine

Como su nombre lo dice se basa en la fórmula Pollaczec-Khinchine (2.9), la cual es

$$1 - \psi(u) = P[M \leq u],$$

donde  $M = \sum_{i=1}^K X_{Ii}$ , con  $X_{I1}, X_{I2}, \dots$  v.a.i.i.d. con función de densidad común  $f_I(x) = \bar{F}(x)/\mu$  y  $K$  es una variable aleatoria geométrica con parámetro  $\rho/(1 + \rho)$ .

En cada iteración, se genera un número aleatorio de acuerdo a la distribución de la v. a.  $K$ , esto es que  $P[K = k] = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k$ , tal número determina la cantidad de variables aleatorias con distribución  $F_I$  que se generan y posteriormente se suman, si dicha suma es mayor que  $u$  se considera como ruina.

En este caso, la probabilidad que se estima por la simulación es la probabilidad de ruina con horizonte infinito. Una desventaja es que no se obtienen resultados gráficos como en la simulación vía método Monte Carlo, por lo mismo el tiempo de la simulación es menor.

Este método sólo se utilizó para el caso exponencial ya que la generación de números aleatorios con distribución  $F_I$  se simplifica, en comparación con las demás distribuciones.

Se realizaron 10 corridas, cada una de ellas tuvo una longitud de 1000000 iteraciones con el fin de obtener más dígitos en las probabilidades estimadas, ya que desde pocas iteraciones se obtienen probabilidades estimadas muy cercanas a las probabilidades teóricas, como se muestra en la Tabla 3.3.

La instrucción para estimar la probabilidad de ruina con horizonte infinito es  $pr(u, c, \lambda, \mu, m)$ . El programa basado en este método se anexa al final de este trabajo donde se explica la forma de utilizarlo.

### 3.6.3 Resultados

A continuación se presentan los resultados de la simulación para el caso de distribuciones con cola ligera.

#### Caso exponencial

Comenzaremos mostrando los resultados de la simulación por método Monte Carlo, donde tenemos la suposición de que los montos se distribuyen exponencialmente con parámetro  $1/\mu$ .

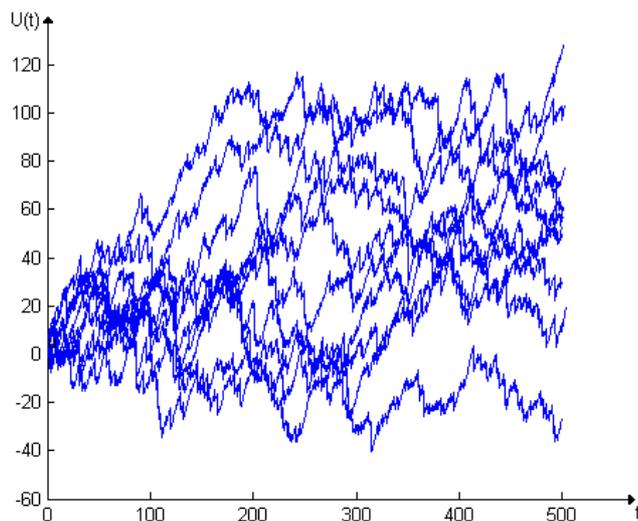


Figura 3.5: Algunas trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso exponencial.

En la Figura 3.5 se presentan algunas iteraciones de la primera corrida, con los parámetros que se encuentran en el primer renglón de la Tabla 3.3, donde además se muestra la probabilidad estimada, la cual nos ofrece una aproximación muy cercana a la probabilidad de ruina obtenida como en (3.14). En algunas trayectorias presentadas se aprecia una tendencia, ya sea positiva o negativa, lo que nos indica que es posible conocer previamente al momento de la ruina si es probable que ésta ocurra.

En la Tabla 3.1 se observa cómo la probabilidad de ruina estimada crece hasta la probabilidad de ruina calculada como en (3.14) conforme el periodo de tiempo en el que se analiza el proceso de riesgo aumenta, así como cuando el número de iteraciones también se incrementa.

Los parámetros utilizados son  $\mu = 2$  y  $\lambda = 1$  con lo que se obtiene un valor medio esperado para el agregado de siniestros de 2 por unidad de tiempo, con lo anterior se determina una tasa de ingreso vía prima de 2.1 y un factor de recargo,  $\rho = 0.05$ , por último se considera un capital inicial de 5 unidades monetarias.

t	Iteraciones	$\hat{\psi}(u, t)$	$\psi(u)$
50	1000	0.6710	0.845490976
50	5000	0.6702	0.845490976
100	1000	0.7250	0.845490976
100	5000	0.7504	0.845490976
500	1000	0.8120	0.845490976
500	5000	0.8242	0.845490976
900	1000	0.8210	0.845490976
900	5000	0.8358	0.845490976

Tabla 3.1: Aproximación a la probabilidad de ruina en tiempo finito.

Iteraciones	$\hat{\psi}(u)$	$\psi(u)$
1000	0.8450	0.845490976
5000	0.8422	0.845490976
10000	0.8465	0.845490976
50000	0.8459	0.845490976
100000	0.8454	0.845490976
500000	0.8456	0.845490976
1000000	0.8461	0.845490976
5000000	0.8457	0.845490976

Tabla 3.2: Aproximación a la probabilidad de ruina en tiempo infinito.

En la Tabla 3.2 se encuentran los resultados que se obtuvieron al utilizar la fórmula Pollaczek-Khinchine como método de simulación. En dicha tabla podemos observar que desde la realización de pocas iteraciones la diferencia entre la probabilidad estimada en tiempo infinito y la teórica es mínima.

En la Tabla 3.3 se muestran los valores de los parámetros utilizados en la realización de las diez corridas, así como la probabilidad de ruina teórica y la estimada por los dos métodos de simulación. En general, la probabilidad estimada en tiempo finito es muy cercana a la teórica, en la mayor parte es menor, lo cual es justificable ya que para la generación de números aleatorios se toma un periodo de análisis finito, lo que es uno de los inconvenientes que se presentan al realizar la simulación, pero recordemos que en el capítulo an-

$u$	$\lambda$	$\mu$	$c$	$\rho$	$t$	$\hat{\psi}(u, t)$	$\hat{\psi}(u)$	$\psi(u)$
5	1	2	2.1	0.05	500	0.8320	0.845383	0.845490976
40	2	5	10.5	0.05	300	0.6020	0.650250	0.650676593
10	3	1.25	4	0.0667	300	0.5588	0.568666	0.568622493
80	4	2	9	0.125	200	0.0100	0.010411	0.010438781
10	5	1.4286	7.4	0.036	500	0.7194	0.756764	0.756834718
0	6	20	125	0.042	300	0.9500	0.950544	0.96
20	7	2.8571	21	0.05	500	0.6670	0.682243	0.682410772
30	8	10	83	0.0375	500	0.8486	0.864445	0.864808047
500	9	20	187	0.0389	700	0.3140	0.377375	0.377577043
300	10	2.3256	23.5	0.0105	300	0.1464	0.259058	0.259014615

Tabla 3.3: Algunos resultados en el caso exponencial.

terior habíamos visto una desigualdad que relaciona la probabilidad de ruina en tiempo finito e infinito.

En la octava columna observamos los resultados de la estimación de la probabilidad de ruina en tiempo infinito por medio de la fórmula Pollaczek-Khinchine, ésta se aproxima más a la probabilidad teórica que la estimación por vía Monte Carlo que aparece en la séptima columna. Hay que recordar que en las dos últimas columnas el análisis se realiza a tiempo infinito.

Estos valores tratan de cubrir diversas situaciones posibles, como cuando se tiene un capital inicial bajo o cuando hay un número promedio muy grande de reclamaciones o algún escenario que conjunte las dos. Podemos ver que cuando se considera valores grandes para  $t$ , la probabilidad estimada es más cercana a la calculada con los parámetros dados.

Para establecer el valor de la tasa de ingreso vía prima se consideró la esperanza del proceso del agregado de siniestros, para posteriormente calcular el valor del factor de recargo de la prima.

En las siguientes distribuciones con cola ligera sólo se realizó la simulación por método Monte Carlo.

### Caso gama

Para el siguiente caso, tomaremos la distribución gama con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para los tamaños de reclamación. Cabe aclarar que la distribución que estamos manejando en este trabajo coincide con la que utiliza el paquete para la generación de números aleatorios con esta distribución.

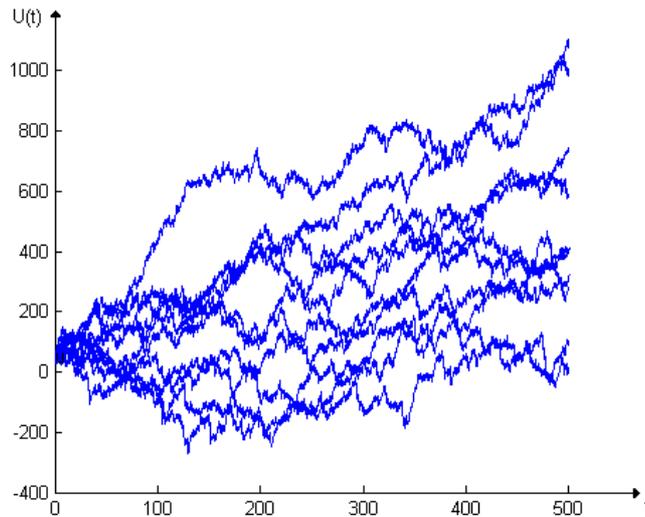


Figura 3.6: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso gama.

Algunas trayectorias del proceso de riesgo en donde se tiene un capital inicial de 50 unidades monetarias, el número promedio de siniestros es de 4 por unidad de tiempo, los parámetros de la distribución de los montos de siniestros son  $\alpha = 6$  y  $\beta = 1$ , la tasa de ingreso vía prima es de 25 y con un factor de recargo de 0.0417, se muestran en la Figura 3.6. Para un periodo de 500 unidades, se observa que aproximadamente la mitad tienden hacia arriba y la otra hacia abajo en los primeros valores de  $t$ , lo que se refleja directamente en la probabilidad de ruina estimada.

De manera similar al caso exponencial, algunos resultados de la simulación para este caso se muestran en la Tabla 3.4, en donde podemos observar diferentes casos que tratan de cubrir diversas situaciones, además se calculó numéricamente el valor del coeficiente de Lundberg  $R$  para obtener la cota

$u$	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$c$	$\rho$	$t$	$\hat{\psi}(u, t)$	$e^{-Ru}$
5	1	5	2	10.5	0.05	300	0.9144	0.9607
40	2	1	5	11	0.10	500	0.4432	0.4832
30	3	3	2.5	23	0.0222	600	0.822	0.8773
50	4	6	1	25	0.0417	500	0.5146	0.7118
90	5	2.9	1.4286	21	0.0138	500	0.4268	0.6441
12	6	4	0.1429	3.45	0.0060	700	0.4938	0.8197
9	7	1	0.3333	2.6	0.1143	400	0.0562	0.0627
4	8	13	0.0667	7.1	0.0240	600	0.765	0.8166
0	9	2	10	190	0.0556	500	1	1
115	10	50	1.6667	850	0.02	400	0.918	0.9480

Tabla 3.4: Algunos resultados en el caso gama.

superior de la probabilidad de ruina. Entre éstos se encuentran diferentes valores para el capital inicial, y para el factor de recargo se tienen valores muy pequeños, siendo el valor más grande de 11.43% para el octavo caso que corresponde a la probabilidad de ruina estimada más pequeña, en general, esto se debe a que la tasa de ingreso vía prima es muy cercana al valor de la media del agregado de siniestros en una unidad de tiempo. Se consideran varios horizontes de tiempo.

Para la Tabla 3.5 se consideraron los parámetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 5$ ,  $\lambda = 2$  y  $c = 11$ , además el periodo de análisis es de 500 unidades de tiempo. Recordemos el límite para el coeficiente de Lundberg dado por (3.11), con los valores antes escritos calculamos el valor de este límite, el cual es 0.02. Y utilizando (3.12) llegamos a que  $e^{-0.02u} < e^{-Ru}$ . En la tabla se refleja lo antes mencionado, donde se muestran los resultados del límite de la cota para la probabilidad de ruina como función del capital inicial, esto es  $e^{-0.02u}$ , así como la estimación de la misma con horizonte finito vía simulación para cada valor de  $u$ . De los valores estimados los primeros nueve son menores a los de la cota, y los últimos son mayores aunque por una diferencia mínima.

$u$	$e^{-0.02u}$	$\hat{\psi}(u, t)$
0	1	1
1	0.980198673	0.891
3	0.941764534	0.8596
5	0.904837418	0.8438
10	0.818730753	0.7502
20	0.670320046	0.6236
30	0.548811636	0.5298
40	0.449328964	0.4432
50	0.367879441	0.3654
80	0.201896518	0.2078
100	0.135335283	0.1402
150	0.049787068	0.0598
200	0.018315639	0.0224
500	0.0000454	0

Tabla 3.5: Comparación de  $\hat{\psi}(u, t)$  y la cota para R.

### Caso Weibull

Ahora supongamos que los montos de reclamación siguen una distribución Weibull con parámetros  $r \geq 1$  y  $b > 0$ , algunas trayectorias del proceso de riesgo en este caso se muestran en la Figura 3.7. De igual manera, se aprecia que en periodos grandes se tiene una clara tendencia.

Los parámetros que se utilizaron para la gráfica anterior fueron los correspondientes al sexto renglón de la Tabla 3.5. Como se observa, el factor de recargo de la prima es de 10.74%, con lo que se estimó una probabilidad de ruina con tiempo finito,  $t = 500$ , pequeña.

Para llevar a cabo las corridas simulando el proceso de riesgo, dentro de la instrucción se tienen que cambiar de orden los parámetros para que corresponda a la misma distribución, esto se debe a que en Matlab se considera primero al parámetro escalar,  $b$ , y después el de forma,  $r$ .

Algunos resultados se muestran en la Tabla 3.6, donde podemos observar que la media para los montos de siniestro son pequeños, y que la media del

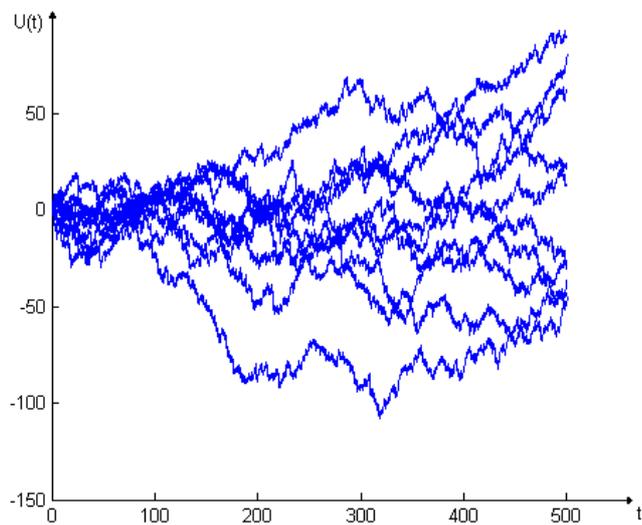


Figura 3.7: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso Weibull.

$u$	$\lambda$	$r \geq 1$	$b$	$c$	$\rho$	$t$	$\hat{\psi}(u, t)$	$e^{-Ru}$
1.2	1	6	1.5	1	0.1533	400	0.6270	0.6902
0.5	2	1.25	31	0.15	0.2561	700	0.0980	0.1203
2	3	5	18	1.9	0.2296	400	0.1818	0.2305
3	4	9	41	2.9	0.1567	400	0.2366	0.2631
1	5	2.5	1	4.45	0.0031	500	0.9594	0.9942
7.1	6	4.8	0.7	6.3	0.0642	600	0.4180	0.4328
4	7	2	14	2.34	0.4114	500	0.0004	0.0003
6	8	7.6	10	5.69	0.0251	400	0.5936	0.6592
5	9	1	3	3.5	0.2	300	0.0976	0.1173
9	11	3.7	11	5.75	0.1074	500	0.0238	0.0304

Tabla 3.6: Algunos resultados en el caso Weibull.

agregado de siniestros es determinada en su mayor parte por el parámetro o tasa Poisson. También es posible apreciar en la última columna el valor de la cota para la probabilidad de ruina, para lo cual se llevó a cabo el cálculo numérico del coeficiente de ajuste an cada caso.

### Caso normal truncada

Para finalizar esta parte, supongamos que los montos de reclamación tienen una distribución normal truncada, la media de esta distribución es  $\sqrt{2/\pi}$  y su varianza es  $1 - 2/\pi$ , por lo que los valores que se modificaron para realizar la simulación fueron: la tasa de ingreso vía prima, el capital inicial y el tiempo de estudio del proceso de riesgo.

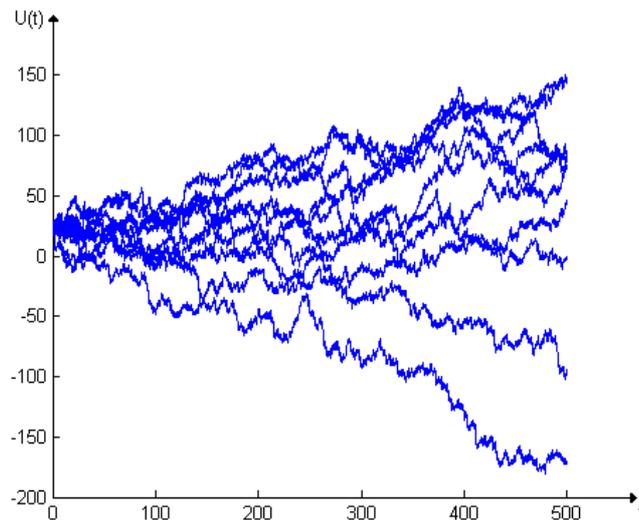


Figura 3.8: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso normal truncada.

El factor de recargo de la prima se determinó como  $\rho = \frac{c\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{2}} - 1$ , dependiendo del valor asignado a  $c$  y  $\lambda$ . Algunas trayectorias del proceso de riesgo bajo estas suposiciones se muestran en la Figura 3.8, podemos observar que los montos de reclamación son pequeños y depende en gran medida del número de siniestros que ocurren, al igual que en los otros casos se observa una tendencia para cada una de ellas.

$u$	$\lambda$	$c$	$\rho$	$t$	$\hat{\psi}(u, t)$	$e^{-Ru}$
1	2	3	0.8800	600	0.2716	0.4375
3	3.7	3.4	0.1517	700	0.4734	0.5250
4.4	5	6	0.5040	600	0.0620	0.0813
5	4	3.8	0.1906	700	0.2396	0.2692
7.2	1.25	1.3	0.3034	500	0.0496	0.0616
8	6	6.8	0.4204	300	0.0146	0.0184
9	11	11	0.2533	400	0.0412	0.0495
16	7.6	7.6	0.2533	600	0.0042	0.0048
23	9	7.2	0.0027	900	0.7616	0.9075
62	8.64	7	0.0154	500	0.1445	0.2219

Tabla 3.7: Algunos resultados en el caso normal truncada.

Los valores que se utilizaron para la gráfica anterior fueron  $c = 7.2$ , un capital inicial de 23 unidades monetarias y  $t = 700$ , con lo que el valor del factor de recargo fue de 15.17%.

Los resultados de todas las corridas se muestran en la Tabla 3.6, en donde observamos diversas situaciones, por ejemplo, el primer caso tiene un factor de recargo grande,  $\rho = 150.66\%$ , y aunque el capital inicial es pequeño se estima una probabilidad de ruina pequeña para  $t = 300$ .

## Capítulo 4

# Probabilidad de ruina para reclamaciones grandes

La frecuencia y severidad de reclamaciones grandes hace necesaria la elaboración de modelos estadísticos más sofisticados, así como un análisis preciso probabilístico y estadístico. La teoría de valores extremos provee las herramientas necesarias y es introducido dentro de este campo, ofreciendo una alternativa para generar un escenario a usar.

Son de gran interés las distribuciones con cola pesada o de valores extremos ya que en la práctica, los actuarios utilizan diferentes distribuciones para la modelación de eventos, entre las que podemos mencionar a la distribución lognormal que es utilizada por ejemplo para reflejar el comportamiento de seguros de motores de autos, y la distribución Pareto para modelar reclamaciones causadas por incendios.

Como vimos anteriormente, la distribución Pareto viola la condición (3.2) del Teorema de Cramér-Lundberg causando aproximaciones erróneas al utilizarla, por lo que debemos ajustar la cota de la probabilidad de ruina considerando estas circunstancias.

En este capítulo se presentan algunos resultados teóricos desarrollados antes por diversos autores, que nos serán de gran utilidad para el desarrollo de la simulación.

## 4.1 Distribuciones con cola pesada

La definición para distribuciones con cola pesada es la que sigue:

**Definición 12** Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  es de cola pesada si para toda  $s > 0$

$$M(s) = \infty.$$

Más adelante hablaremos con más detalle de las distribuciones con cola pesada, pero una forma de caracterizar a estas distribuciones es la siguiente<sup>1</sup>:

**Proposición 6** Una función de distribución  $F$  tiene cola pesada si para toda  $\lambda > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0,$$

donde  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ , para  $x > 0$ .

La demostración de este resultado se encuentra en Mikosch [12].

Entre las distribuciones que son absolutamente continuas con cola pesada se encuentran las siguientes:

1. **Distribución lognormal** o  $LN(\mu, \sigma)$  con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)},$$

para  $x > 0$ , con parámetros  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ . Si la v.a.  $X$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ , entonces  $e^X$  se distribuye  $LN(\mu, \sigma^2)$ .

2. **Distribución Pareto** o  $Par(\alpha, \beta)$  con función de densidad

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}},$$

para  $x > 0$ , con exponente o parámetro de forma  $\alpha > 0$ , y parámetro escalar  $\beta > 0$ . El área de la cola está dada por  $\bar{F}(x) = (\beta/(\beta + x))^\alpha$ .

---

<sup>1</sup>Es una comparación con la distribución exponencial como en el capítulo anterior, sobre esto consultar Mikosch [12].

3. **Distribución Burr** o  $B(\alpha, \beta, \kappa)$  con función de densidad

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha\kappa x^{\kappa-1}}{(\beta + x^\kappa)^{\alpha+1}},$$

con parámetros  $\alpha, \beta, \kappa > 0$  y área de la cola dada por

$$\bar{F}(x) = \left( \frac{\beta}{\beta + x^\kappa} \right)^\alpha.$$

4. **Distribución Weibull** o  $W(r, b)$  con función de densidad

$$f(x) = rbx^{r-1}e^{-bx^r},$$

para  $x > 0$ , donde el parámetro de forma es  $r > 0$  y el parámetro escalar es  $b > 0$ , por lo tanto  $\bar{F}(x) = \exp\{-bx^r\}$ . Si  $r \geq 1$  entonces  $W(r, b)$  tiene cola ligera, en caso contrario tiene cola pesada.

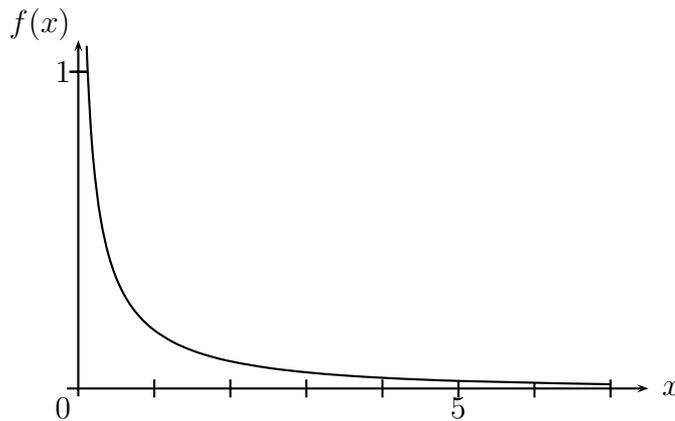


Figura 4.1: Función de densidad de una distribución Weibull.

En la figura anterior podemos observar la función de densidad de una v.a. Weibull con parámetros  $r = 0.5$  y  $b = 1$ , en donde para valores de  $x$  menores a uno la probabilidad de ocurrencia decae rápidamente, y conforme el valor  $x$  aumenta la función de densidad se estabiliza siendo cercana a cero.

5. **Distribución loggama** o  $L\Gamma(\alpha, \beta)$  con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (\ln x)^{\alpha-1} x^{-1/\beta-1}$$

para  $x > 1$ , con parámetros  $\alpha, \beta > 0$ . Si la v.a.  $X$  tiene distribución  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , entonces  $e^X$  se distribuye como  $L\Gamma(\alpha, \beta)$ .

6. **Benktander tipo I** o  $BenI(a, b, c)$  con función

$$\bar{F}(x) = cx^{-a-1} e^{-b(\ln x)^2} (a + 2b \ln x),$$

para  $x > 1$  y parámetros  $a, b, c > 0$ .

7. **Benktander tipo II** o  $BenII(a, b, c)$  con función

$$\bar{F}(x) = cax^{-(1-b)} \exp\{-(a/b)x^b\},$$

para  $x > 1$ , con parámetros  $a > 0$ ,  $0 < b < 1$  y  $0 < c \leq a^{-1}e^{a/b}$ .

8. **Distribución  $\alpha$ -estable truncada**, para  $X$  variable aleatoria  $\alpha$ -estable con  $1 < \alpha < 2$  y función de distribución dada por  $F(x) = P[|X| \leq x]$ .

La mayoría de estas variables aleatorias tienen soporte en  $(0, \infty)$ , excepto las distribuciones Benktander y la loggama que se concentran en  $(1, \infty)$ . En el último caso tenemos que mencionar algunas de las características básicas que satisfacen las variables aleatorias que son  $\alpha$ -estables<sup>2</sup>.

**Definición 13** Una v.a.  $X$  se dice que es estable si satisface

$$b(c_1, c_2)X + a(c_1, c_2) = c_1X_1 + c_2X_2 \quad (4.1)$$

para  $X, X_1$  y  $X_2$  i.i.d., para todo número no negativo  $c_1$  y  $c_2$ , para  $b(c_1, c_2) > 0$  y  $a(c_1, c_2)$  números reales.

Ahora consideremos la suma de  $n$  v.a.i.i.d. tales que satisfacen la ecuación (4.1), es decir, que tienen distribución estable. Entonces para algunas constantes reales positivas  $a_n$  y  $b_n$  y  $X = X_1$ ,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} b_n X + a_n, \quad n \geq 1,$$

---

<sup>2</sup>Para más detalles sobre este tipo de distribuciones, así como las correspondientes demostraciones, consultar Embrechts [6].

lo podemos reescribir como

$$b_n^{-1}(S_n - a_n) \stackrel{d}{=} X.$$

Concluimos que si una distribución es estable entonces es una distribución límite para la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

**Teorema 4** *La clase de distribuciones estables (no degeneradas) coincide con la clase de todos los posibles límites (no degenerados) de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (normalizados y centrados).*

Este Teorema nos asegura que no hay alguna otra posible distribución límite. Es importante, para la clase de distribuciones estables, realizar una descripción analítica, siendo el camino más común determinar su función característica.

**Teorema 5** *Una distribución estable tiene función característica*

$$\phi(t) = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sign}(t)z(t, \alpha))\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

donde  $\gamma$  es una constante real,  $c > 0$ ,  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\operatorname{sign}(t)$  es el signo del número real  $t$  y

$$z(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

**Definición 14** *El número  $\alpha$  en la función característica (4.2) es llamado el exponente característico de la correspondiente distribución  $\alpha$ -estable.*

## 4.2 Resultados preliminares

Consideremos una suma finita de  $n$  variables aleatorias,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , donde cada  $X_i$  representa la  $i$ -ésima reclamación dentro de un portafolio, y  $S_n$  es el agregado o monto total por reclamaciones. Ordenemos esos montos de menor a mayor y denotémoslos por  $X_{(i)}$  de tal manera que:

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

A menudo, una reclamación es llamada grande cuando el monto total es predominantemente determinado por ella. Esta vaga formulación puede ser interpretada de varias formas, como las que a continuación se enuncian:

- Se dice que una reclamación dentro de un portafolio es grande si el valor de la reclamación es sólo experimentado en un periodo de tiempo amplio.
- Otra interpretación es cuando el cociente de  $X_{(n)}$  y  $S_n$  es grande. Esto es cuando  $X_{(n)}/S_n \stackrel{d}{=} Z$ , donde la distribución de  $Z$  tiene más masa concentrada cercana a uno. Si las reclamaciones no son excesivas entonces esperamos que  $X_{(n)}$  juegue un papel menos importante en el total  $S_n$ .
- Más generalmente, una reclamación es llamada grande si consume más de una porción fija  $p$  del monto total de reclamaciones, esto significa que  $X_{(m)}$  es grande si  $m \geq \min\{k : X_{(k)} > pS_n\}$ .
- Dentro de la práctica actuarial, una forma heurística para decidir si una función  $F$  corresponde a una variable aleatoria  $X$  con cola pesada es si cumple que el 20% de las reclamaciones explican más del 80% del total de las reclamaciones, esto es, si

$$\frac{1}{\mu} \int_{f_{0.2}}^{\infty} x dF(x) \geq 0.8,$$

donde  $\bar{F}(f_{0.2}) = 0.2$  y  $\mu$  es la media de  $X$ .

- Cuando la media y la varianza no convergen a un valor límite promedio, debido a que no existen por la gran masa de probabilidad concentrada en la cola de la distribución.

Hay varias definiciones de reclamaciones grandes que son matemáticamente buenas pero difícilmente verificables estadísticamente, como la siguiente:

- El monto total es grande por que una reclamación lo es. Matemáticamente puede ser interpretado como

$$P[S_n > x] \approx P[X_{(n)} > x], \quad x \rightarrow \infty.$$

Para demostrar que lo anterior lo cumplen las variables aleatorias con distribuciones con cola pesada, nos enfocaremos al análisis de un subconjunto de ellas, en donde podemos encontrar a las distribuciones del monto de las reclamaciones mencionadas en la sección anterior, tal subconjunto se le conoce como clase *subexponencial*, la definición y algunas características las veremos a lo largo de esta sección.

Otra clase que es de nuestro interés es la de *variación regular*, así como su relación con la clase *subexponencial*, que nos será de gran utilidad para la estimación de la probabilidad de ruina.

Sea  $Q(x) = -\ln \bar{F}(x)$ , que se conoce como la *función de riesgo*<sup>3</sup> de la distribución  $F$  en  $(0, \infty)$ . Esta terminología es motivada por el siguiente hecho, si  $F$  tiene una densidad continua entonces  $Q(x)$  es diferenciable y

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

para  $F(x) < 1$ , es la *tasa de riesgo*, Rolski [15]. La tasa de riesgo dentro de los seguros de vida se refiere a la tasa de mortalidad y para los seguros de incendios nos indica la tasa de extinción, también tiene sentido dentro de otras áreas de los seguros así como en el análisis de sobrevivencia y en la teoría de la credibilidad.

**Teorema 6** Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  tiene cola pesada si

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} = 0. \quad (4.4)$$

*Demostración.*

Supongamos que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} = 0$ .

Por lo que, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $x' > 0$  tal que  $Q(x) \leq \varepsilon x$  para toda  $x \geq x'$ . Por consiguiente para alguna  $c > 0$  tenemos que  $\bar{F}(x) \geq ce^{-\varepsilon x}$  para toda  $x \geq 0$  y de aquí

$$\int_0^{\infty} e^{sx} \bar{F}(x) dx = \infty,$$

para toda  $s \geq \varepsilon$ . Como tomamos  $\varepsilon > 0$  arbitraria, la desigualdad anterior se cumple para toda  $s > 0$ , esto significa que  $F$  tiene cola pesada. ■

---

<sup>3</sup>Hazard function.

**Observación 1** Para toda  $s > 0$  y para una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  con cola pesada se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = \infty. \quad (4.5)$$

Ahora veremos algunas definiciones y características sobre la clase de distribuciones *subexponencial*<sup>4</sup>.

**Definición 15** Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  es *subexponencial* si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} = 2. \quad (4.6)$$

Notemos que el término *subexponencialidad* es motivado por la igualdad (4.5), sin embargo, es usado para una clase pequeña de distribuciones con cola pesada.

Denotemos  $S$  a la clase de todas las distribuciones subexponenciales. Entre las familias de distribuciones que se encuentran en  $S$  están las distribuciones lognormal, Benktander (tipo I y II) y Weibull con parámetro de forma,  $r$ , menor que uno; en Embrechts [6] se detalla más acerca de dichas familias.

Una consecuencia directa de (4.6) es que  $\bar{F}(x) > 0$  para toda  $x > 0$ , sin embargo, no todas las distribuciones con esta propiedad son subexponenciales. Por ejemplo, una v.a. con distribución exponencial no es subexponencial ya que en este caso

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{e^{-\lambda x}(1 + \lambda x)}{e^{-\lambda x}} \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, es fácil ver que si  $F$  es subexponencial y  $X_1, X_2$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$ , entonces tenemos para  $x \rightarrow \infty$

$$P[X_1 + X_2 > x] \approx P[X_{(2)} > x], \quad (4.7)$$

ya que

$$P[X_{(2)} > x] = 1 - F^2(x) = (1 - F(x))(1 + F(x)),$$

---

<sup>4</sup>Para mayores detalles de esta clasificación vea Rolski [15].

de (4.6) se llega a que

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{2(1 - F(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{(1 + F(x))(1 - F(x))}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F^2(x)} = 1.$$

En general, podemos encontrar la siguiente igualdad

$$\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)dF(y)}{\bar{F}(x)}, \quad (4.8)$$

desarrollando como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} \\ &= 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)*}(x)}{\bar{F}(x)} \\ &= 1 + \frac{\int_0^x dF(y) - \int_0^x F^{n*}(x-y)dF(y)}{\bar{F}(x)}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (4.8). En particular, para  $n = 2$ , se tiene que

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}dF(y), \quad (4.9)$$

de donde se sigue que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2. \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) implica que el valor límite 2 en (4.6) es mínimo. Además, en (4.9) se utilizan dos propiedades útiles de las distribuciones subexponenciales que a continuación se enuncian.

**Lema 5** *Dos propiedades básicas de las distribuciones subexponenciales son:*

a) Si  $F \in S$ , entonces para toda  $y > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1. \quad (4.11)$$

b) Si  $F \in S$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) = 1. \quad (4.12)$$

*Demostración.*

Para  $y \leq x$ , la igualdad (4.9) queda como

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\bar{F}(x-z)}{\bar{F}(x)} dF(z) + \int_y^x \frac{\bar{F}(x-z)}{\bar{F}(x)} dF(z) \\ &\geq 1 + F(y) + \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} (F(x) - F(y)), \end{aligned}$$

para  $x$  bastante grande de modo que  $F(x) - F(y) \neq 0$ , se llega a

$$1 \leq \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \left( \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1}.$$

Obteniendo el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1},$$

esto completa la demostración de (4.11) puesto que, para  $F$  subexponencial, el lado derecho de la desigualdad tiende a 1 conforme  $x \rightarrow \infty$ . El límite en (4.12) es una consecuencia inmediata de (4.9). ■

**Lema 6** *Sea  $F$  una función subexponencial y sea  $F_1$  una función distribución tal que  $F_1(0) = 0$  y*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_1(x)}{\bar{F}(x)} = c,$$

*para alguna  $c \in [0, \infty)$ . Entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * F_1}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + c. \quad (4.13)$$

*Demostración.*

Por (4.8), se tiene que

$$\frac{\overline{F} * \overline{F}_1(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}_1(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y),$$

lo que es equivalente a mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}_1(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = c. \quad (4.14)$$

Para alguna  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0$  tal que  $\overline{F}_1(x) \leq (c + \varepsilon)\overline{F}(x)$  para  $x \geq x_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\overline{F}_1(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) &\leq (c + \varepsilon) \int_0^{x-x_0} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \frac{\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &\leq (c + \varepsilon) \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \frac{\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}. \end{aligned}$$

La última expresión tiende por el Lema 5 a  $c + \varepsilon$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , obteniendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}_1(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \leq c.$$

De forma similar se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}_1(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq c.$$

Con lo que se prueba (4.14) y también el lema. ■

En el siguiente resultado se incorpora la clase de distribuciones subexponenciales dentro de la clase de las distribuciones con cola pesada.

**Teorema 7** *Cada  $F \in S$  es una distribución con cola pesada.*

*Demostración.*

Sea  $F \in S$ , por el Teorema 5 basta demostrar que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} = 0$  tomando la versión logarítmica de (4.11), se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \overline{F}(x-y) - \ln \overline{F}(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (Q(x) - Q(x-y)) = 0,$$

para toda  $y \geq 0$ . Por lo tanto, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 > 0$  tal que para toda  $x \geq x_0$  tenemos que  $Q(x) - Q(x-1) < \varepsilon$ . Iterando se llega a que

$$Q(x) \leq Q(x-1) + \varepsilon \leq Q(x-2) + 2\varepsilon \leq \dots \leq Q(x-n) + n\varepsilon,$$

donde  $n$  es tal que  $x_0 \leq x-n < x_0+1$ . Con lo que

$$Q(x) \leq \sup_{x_0-1 \leq x' \leq x_0} Q(x') + (x-x_0)\varepsilon, \quad x \geq x_0.$$

Como tomamos  $\varepsilon$  de forma arbitraria entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} = 0$ . ■

Utilizando el Lema 6 podemos realizar la siguiente caracterización de las distribuciones subexponenciales.

**Teorema 8** *Se dice que una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  es subexponencial si y sólo si para cada  $n \geq 2$ ,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \quad (4.15)$$

*Demostración.*

Se usará inducción sobre  $n$ . Comenzando para  $n = 2$ , la igualdad (4.15) se cumple por definición. Ahora supongamos que (4.15) se cumple para  $n-1$ , entonces tomando  $F_1 = F^{(n-1)*}$  en el Lema 6 se llega a lo deseado. Por lo tanto, la función de distribución  $F$  es subexponencial. ■

**Lema 7** *(Condición suficiente para la subexponencialidad)*

*Una función de distribución  $F$  sobre  $(0, \infty)$  es subexponencial si*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2. \quad (4.16)$$

*Demostración.*

Como  $F$  es la función de distribución de una variable aleatoria positiva, se

sigue inmediatamente que  $F^{2*}(x) \leq F^2(x)$ , i.e.  $\overline{F^{2*}}(x) \geq \bar{F}^2(x)$  para toda  $x \geq 0$ . De lo que se sigue que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2,$$

y por la condición del lema, el límite de la relación (4.15) se sigue para  $n = 2$ . Continuando la prueba por inducción, supongamos que se cumple para  $n$  y demostremos que se cumple para  $n + 1$ . Para  $x \geq y > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \\ &= 1 + \int_0^{x-z} \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\bar{F}(x-y)} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \int_{x-z}^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \\ &= 1 + I_1(x) + I_2(x) \end{aligned}$$

Insertando  $-n+n$  en  $I_1$  y notando que  $\frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\bar{F}(x-y)} - n$  puede ser arbitrariamente pequeño para  $0 \leq y \leq x-z$  y  $z$  suficientemente grande, se sigue que

$$I_1(x) = (n + o(1)) \int_0^{x-z} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y).$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{x-z} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) &= \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} - \int_{x-z}^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \\ &= \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} - J(x, z) \\ &= (1 + o(1)) - J(x, z) \end{aligned}$$

donde  $J(x, z) \leq \frac{F(x) - F(x-z)}{\bar{F}(x)} \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$  por (4.10). Entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = n$ .

Finalmente,  $\frac{\overline{F^{n*}}(x-y)}{\bar{F}(x-y)}$  es acotada para  $x-z \leq y \leq x$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} J(x, z) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) = 0$ , completando la prueba. ■

**Lema 8** Si  $F \in S$  entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una constante finita  $k$  tal que para toda  $n \geq 2$ ,

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq k(1 + \varepsilon)^n, \quad x \geq 0. \quad (4.17)$$

*Demostración.*

Sea  $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \bar{F}^{n*}(x)/\bar{F}(x)$ . Usando (4.16) obtenemos, para cada  $T < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{n*}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \sup_{x \geq T} \int_0^x \frac{\bar{F}^{n*}(x-y)}{\bar{F}(x-y)} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \\ &\leq 1 + (\bar{F}(T))^{-1} + \alpha_n \sup_{x \geq T} \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{\bar{F}(x)}, \end{aligned}$$

donde  $(\bar{F}(T))^{-1} < \infty$ . Ahora ya que  $F \in S$  podemos, dado algún  $\varepsilon > 0$ , encontrar  $T$  tal que

$$\alpha_{n+1} \leq 1 + (\bar{F}(T))^{-1} + \alpha_n(1 + \varepsilon).$$

De aquí

$$\alpha_n \leq (1 + (\bar{F}(T))^{-1})\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon)^n,$$

implicando (4.17). ■

Antes de continuar debemos introducir el concepto de variación regular, en donde denotaremos como  $\mathbb{R}_\beta$  a la clase de funciones de variación regular con índice  $\beta \in \mathbb{R}$ , este tema es tratado con más detalle en Embrechts [6] y en Mikosch [12].

**Definición 16** Una función  $L$  positiva y medible sobre  $(0, \infty)$  bajo la medida de Lebesgue es de variación regular en  $\infty$  de índice  $\beta \in \mathbb{R}$ , i.e.  $L \in \mathbb{R}_\beta$ , si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = c^\beta, \quad c > 0. \quad (4.18)$$

Cuando  $\beta = 0$  entonces  $\mathbb{R}_0$  es la clase de funciones de variación regular lenta, tales funciones tienen la siguiente representación<sup>5</sup>

$$L(x) = c(x) \exp \left( \int_z^x \frac{\varepsilon(y)}{y} dy \right),$$

para  $x \geq z$ , alguna  $z > 0$ , donde  $\varepsilon(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$  y  $c(x)$  es una función positiva que satisface que  $c(x) \rightarrow c$  para alguna constante positiva  $c$ .

---

<sup>5</sup>La demostración de este resultado se encuentra en Mikosch [12].

Es de nuestro interés esta clase, ya que incluye a las distribuciones Pareto, Burr,  $\alpha$ -estable truncada y loggama, puesto que se pueden representar como nos lo indica la Definición 15.

**Definición 17** *Sea una función de variación lenta  $L$ . Se dice que una v.a. positiva  $X$  y su función de distribución son de variación regular con índice  $\beta \geq 0$ , si la cola de la distribución puede ser expresada como*

$$\bar{F}(x) = x^{-\beta}L(x), \quad x > 0. \quad (4.19)$$

Los resultados que enseguida se enuncian nos serán de gran utilidad para la estimación de la probabilidad de ruina considerando este tipo de distribuciones.

**Lema 9** *Si  $F_1, F_2$  son dos funciones de distribución tales que*

$$\bar{F}_i(x) = x^{-\beta}L_i(x),$$

*para  $\beta \geq 0$  y  $L_i \in \mathbb{R}_0$ ,  $i = 1, 2$ , entonces la convolución  $G = F_1 * F_2$  tiene una variación regular en la cola tales que cuando  $x \rightarrow \infty$*

$$\bar{G}(x) \approx x^{-\beta}(L_1(x) + L_2(x)). \quad (4.20)$$

*Demostración.*

Sea  $X_1, X_2$  variables aleatorias independientes con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente. Utilizando que  $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$  es fácil verificar que

$$\bar{G}(x) \geq (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x))(1 - o(1)).$$

Si  $0 < \varepsilon < 1/2$ , entonces de

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1 - \varepsilon)x\} \cup \{X_2 > (1 - \varepsilon)x\} \cup \{X_1 > \varepsilon x, X_2 > \varepsilon x\},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &\leq \bar{F}_1((1 - \varepsilon)x) + \bar{F}_2((1 - \varepsilon)x) + \bar{F}_1(\varepsilon x)\bar{F}_2(\varepsilon x) & (4.21) \\ &= (\bar{F}_1((1 - \varepsilon)x) + \bar{F}_2((1 - \varepsilon)x))(1 + o(1)) \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{-\beta}x^{-\beta}(L_1(x) + L_2(x))(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Aquí

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} \leq (1 - \varepsilon)^{-\beta},$$

como podemos observar, cuando  $\delta$  decrece a 0 el lado derecho tiende a 1, llegando a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{x^{-\beta}(L_1(x) + L_2(x))} = 1.$$

Por lo que, es  $\bar{G}(x)$  tiene variación regular. ■

El siguiente resultado nos será de ayuda para la estimación de ruina con distribuciones de cola pesada.

**Corolario 2** Si  $\bar{F}(x) = x^{-\beta}L(x)$  para  $\beta \geq 0$  y  $L \in \mathbb{R}_0$ , entonces para toda  $n \geq 1$ ,

$$\overline{F^{n*}}(x) \approx n\bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

*Demostración.*

Utilizaremos inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$ , la ecuación (4.22) se cumple por el lema anterior. Ahora supongamos que (4.22) se cumple para  $n - 1$ , esto es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(n-1)*}}(x)}{x^{-\beta}(n-1)L(x)} = 1.$$

Para verificar que se cumple para cualquier  $n$ , tomamos  $F^{(n-1)*}$  en lugar de  $F_1$  dentro de la demostración del Lema 9, con lo que se llega a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{x^{-\beta}nL(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{n\bar{F}(x)} = 1.$$

Por lo tanto, la  $n$ -ésima convolución tiene variación regular en la cola, para  $n \geq 1$ . ■

Basados en el corolario anterior podemos establecer la relación que sigue

**Corolario 3** Si  $\bar{F}(x) = x^{-\beta}L(x)$  para  $\beta \geq 0$  y  $L \in \mathbb{R}_0$ , entonces para toda  $n \geq 1$

$$P[S_n > x] \approx P[X_{(n)} > x], \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

*Demostración.*

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 P[X_{(n)} > x] &= \overline{F}^n(x) = 1 - F^n(x) \\
 &= 1 + F(x) - F(x) + \cdots + F^{n-1}(x) - F^{n-1}(x) - F^n(x) \\
 &= \left(1 + F(x) + \cdots + F^{n-1}(x)\right) \\
 &\quad - F(x) \left(1 + F(x) + \cdots + F^{n-1}(x)\right) \\
 &= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x).
 \end{aligned}$$

Observemos que  $F^k(x)$  tiende a 1 cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces cuando  $x \rightarrow \infty$  se llega a que

$$P[X_{(n)} > x] \approx n\overline{F}(x),$$

y por el Corolario 1, podemos concluir que cuando  $x \rightarrow \infty$

$$P[S_n > x] \approx P[X_{(n)} > x].$$

■

Esto implica que para las funciones de distribución con variación regular en la cola, la cola de la función de distribución de la suma  $S_n$  es principalmente determinada por la cola de función de distribución del máximo  $X_{(n)}$ , lo anterior es la extensión natural de (4.7). Es exactamente una de las nociones intuitivas de las distribuciones con cola pesada o de reclamaciones grandes.

**Lema 10** *Si  $F$  es de variación regular entonces  $F \in S$ .*

*Demostración.*

Sean  $X$ ,  $X_1$  y  $X_2$  v.a.i.i.d. con función de distribución  $F$  de variación regular. Partiendo de (4.21) y desarrollando

$$\begin{aligned}
 P[X_1 + X_2 > x] &\leq 2\overline{F}((1 - \varepsilon)x) + (\overline{F}(\varepsilon x))^2 \\
 &= 2\overline{F}((1 - \varepsilon)x)(1 + o(1)) \\
 &\leq 2(1 - \varepsilon)^{-\beta} x^{-\beta} L(x)(1 + o(1)).
 \end{aligned}$$

Obteniendo el límite

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{x^{-\beta} L(x)} \leq 2(1 - \varepsilon)^{-\beta},$$

como  $\varepsilon > 0$  es arbitraria, entonces

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2.$$

Además, por (4.10) se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

con lo que se concreta la prueba. ■

**Lema 11** *Si se cumple (4.10), entonces para toda  $\varepsilon > 0$ ,*

$$e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

La demostración de este lema se puede encontrar en Embrechts [6].

El lema anterior, justifica el nombre de subexponencial para  $F \in S$ , ya que  $\overline{F}(x)$  decae a cero más lento que cualquier exponencial  $e^{-\varepsilon x}$  para  $\varepsilon > 0$ . Además, para alguna  $\varepsilon > 0$

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y} \overline{F}(y), \quad y \geq 0,$$

se tiene como consecuencia que para  $F \in S$ ,  $\hat{f}(-\varepsilon) = \infty$  para toda  $\varepsilon > 0$ .

### 4.3 Desigualdad para reclamaciones grandes

Considerando las características de las distribuciones con cola pesada, en el siguiente teorema se presenta la relación con la probabilidad de ruina, de manera análoga que en el capítulo anterior.

**Teorema 9** *(Teorema Cramér-Lundberg para reclamaciones grandes)*  
*Considere el modelo Cramér-Lundberg con la condición de solvencia  $\rho > 0$  y  $F_I \in S$ , entonces cuando  $u \rightarrow \infty$*

$$\psi(u) \approx \rho^{-1} \overline{F}_I(u). \quad (4.25)$$

*Demostración.*

Recordemos que la expresión para la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \bar{F}_I^{n*}(u), \quad u \geq 0,$$

donde  $F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy$ .

Bajo la condición Teorema 7, se tiene que

$$\frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)},$$

obteniendo el límite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)},$$

utilizando el Teorema de Convergencia Monótona

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} &= \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)} \\ &= \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} n \\ &= \rho \sum_{n=0}^{\infty} n (1 + \rho)^{-(n+1)} \\ &= -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (1 + \rho)^{-n} \\ &= -\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \\ &= -\rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \\ &= \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la demostración del teorema. ■

Además, sabemos que  $(1 + \rho)^{-1} < 1$ , supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(1 + \rho)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$ , utilizando el Lema 8 se llega a que

$$(1 + \rho)^{-n} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)} \leq (1 + \rho)^{-n} k(1 + \varepsilon)^n, \quad u \geq 0.$$

Ahora sumando sobre los valores de  $n$  y desarrollando

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)} &\leq k \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} (1 + \varepsilon)^n, \quad u \geq 0 \\ &= k \frac{1 + \varepsilon}{\rho - \varepsilon} \end{aligned}$$

El lado derecho de la desigualdad es finito por lo que la probabilidad de ruina esta acotada.

Podemos ver que para las distribuciones de los montos de siniestros que son subexponenciales, la probabilidad de ruina en horizonte infinito  $\psi(u)$  con un capital inicial grande  $u$  se determina esencialmente por la cola de la distribución de los tamaños de reclamación  $\bar{F}(x)$  para valores grandes de  $x$ , esto es

$$\psi(u) \approx \frac{1}{\rho\mu} \int_u^{\infty} \bar{F}(x) dx, \quad u \rightarrow \infty.$$

Cabe señalar que la probabilidad de ruina depende directamente del factor de recargo de la prima y de la integral de la cola para las distribuciones subexponenciales, que puede causar un poco de dificultades para obtener su valor, pero por medio de métodos numéricos se puede encontrar.

El siguiente teorema relaciona a la clase subexponencial y la probabilidad de ruina con horizonte infinito, la demostración de este resultado puede encontrarse en Embrechts [6].

**Teorema 10** *Considere el modelo Cramér-Lundberg con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- a)  $F_I \in S$ .
- b)  $1 - \psi(u) \in S$ .
- c)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \rho^{-1}$ .

Como en el caso exponencial tenemos una aproximación para la probabilidad de ruina pero ahora considerando que los montos de siniestros siguen distribuciones con cola pesada, aunque es mejor para valores grandes del capital inicial dándonos una idea la probabilidad de ruina en horizonte infinito.

## 4.4 Simulación

Para el desarrollo de la simulación se utilizó el método Monte Carlo con las mismas hipótesis del modelo Cramér-Lundberg pero ahora se consideraron distribuciones con cola pesada. Se utilizaron los mismos programas de la parte de cola ligera, agregando la opción de elegir distribuciones con cola pesada para la generación de los números aleatorios que corresponden al monto de los siniestros.

Las distribuciones con cola pesada que se consideraron para realizar la simulación son las distribuciones lognormal, Pareto, Burr, Weibull y loggama. Matlab cuenta con el generador de números aleatorios para las distribuciones lognormal y Weibull, pero para las distribuciones Pareto y Burr se crearon dos programas para la generación de números aleatorios por medio del método de transformación inversa, y para la distribución loggama se desarrolló un programa que por medio de una transformación que parte de la generación de números aleatorios con distribución gama se llega a lo deseado. Estos programas se pueden consultar al final de este trabajo.

De manera similar al caso de reclamaciones pequeñas, se realizarán diez corridas con diferentes valores de los parámetros, y para estimar la probabilidad de ruina con horizonte finito se contabilizarán 5000 iteraciones. Además, se considera un valor de  $t$  igual a 500, ya que con este valor se tiene un intervalo suficiente para observar lo que ocurre con las trayectorias y realizar una “buena” aproximación a la probabilidad de ruina como en (4.25).

El programa utilizado para estimar la probabilidad de ruina a tiempo finito es *pruina* que se anexa al final del trabajo, y la instrucción con la que se hace uso del programa es  $pruina(u, c, \lambda, dist, p1, p2, p3, t, m)$ , donde  $u$  es el capital inicial,  $c$  es la tasa de ingreso vía prima,  $\lambda$  es el parámetro Poisson,  $dist$  es el número correspondiente a la distribución a utilizar que se detallará en el anexo;  $p1$ ,  $p2$  y  $p3$  son los parámetros de dicha distribución,  $t$  determina el intervalo de

análisis del proceso de riesgo y  $m$  es el número de iteraciones. Cabe señalar, que si se desea estimar la probabilidad de ruina con horizonte finito, donde los montos de siniestro tienen una distribución con un parámetro, los otros parámetros se tienen que igualar a cero para evitar problemas de declaración de las variables en el programa.

Además, se incorpora en cada tabla el cálculo de la aproximación a la probabilidad de ruina con horizonte infinito dada en (4.25).

### Caso lognormal

La media de esta distribución está dada por  $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$  y su varianza se obtiene de la siguiente forma  $e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ .

En la siguiente gráfica, podemos observar algunas trayectorias del proceso de riesgo cuando la distribución de los montos de siniestro corresponden a una distribución lognormal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , hay que aclarar que para la utilización del programa los parámetros que se deben introducir son la media y la desviación estándar,  $\mu$  y  $\sigma$ .

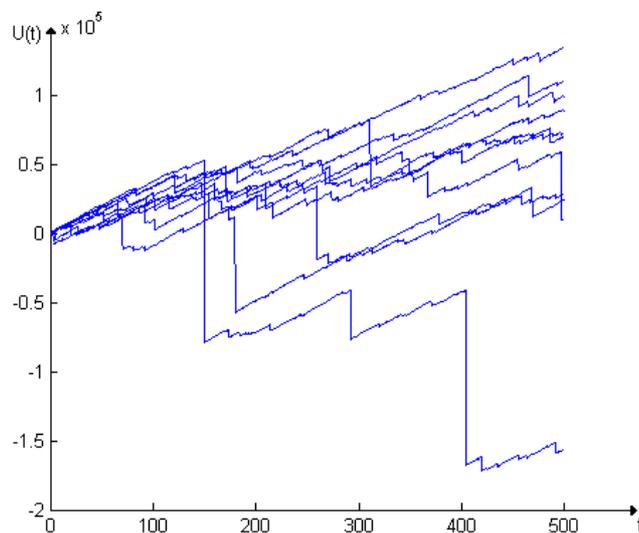


Figura 4.2: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso lognormal.

u	$\lambda$	$\mu$	$\sigma$	$c$	$\rho$	$\hat{\psi}(u, 500)$	$\psi(u)$
900	6.5	0.8	2.4495	300	0.0325	0.6970	1
512	4	3.4	1	220	0.1133	0.1060	0.083903
637	3	1	2.8284	480	0.0781	0.8782	1
50000	2	1.9	4	40203	0.0086	0.4006	0.768612
279	8	2	0.5	70	0.0450	0.0260	0
368	1.5	2.5	1.5	102	0.8121	0.1528	0.131571
200000	7	6.3	2.65	128003	0.0140	0.9926	1
250	10	0	1.2	25	0.2169	0.0008	0.000368
7500	13	5.1	1.3	5800	0.1684	0.2626	0.128465
15000	1	9	1	20000	0.4970	0.4630	0.699230

Tabla 4.1: Algunos resultados en el caso lognormal.

Estas trayectorias pertenecen a la distribución lognormal con parámetros  $\mu = 1$  y  $\sigma^2 = 8$  y el número de siniestros está dado por la distribución Poisson con tasa  $\lambda = 3$  por unidad de tiempo. El número de ocurrencias es pequeño, pero aunque se tienen parámetros “pequeños” para los tamaños de siniestros se obtienen reclamaciones muy grandes en algunos casos, por otro lado también encontramos trayectorias con reclamaciones similares en magnitud que no alteran demasiado el capital a lo largo del periodo de estudio.

En la Tabla 4.1, se resumen algunas corridas del programa para este caso, se mencionan los parámetros utilizados y la probabilidad de ruina estimada con horizonte finito ( $t = 500$ ), así como la aproximación a la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

Podemos apreciar que en algunos casos la diferencia es demasiada. Recordemos que para que se de la aproximación (4.25), esto es

$$\psi(u) \approx \rho^{-1} \bar{F}_I(u),$$

se requiere que  $u \rightarrow \infty$  por lo que esto causa malas aproximaciones a la probabilidad teórica, otra posible causa se debe a que el factor de recargo de la prima  $\rho$  es muy pequeño por lo que el ingreso vía prima no es suficiente para cubrir todos los posibles siniestros. También es muy importante la varianza que tiene la distribución ya que afecta de manera directa al proceso de riesgo.

## Caso Pareto

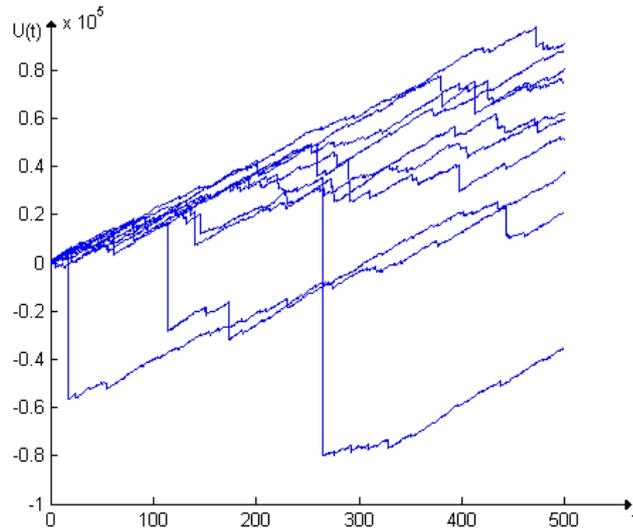


Figura 4.3: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso Pareto.

En la Figura 4.3 se observan algunas trayectorias del proceso de riesgo bajo la suposición de que los tamaños de reclamación se distribuyen Pareto con parámetros  $\alpha = 1.25$  y  $\beta = 12$  con lo que se tiene una media de 60 y por el parámetro  $\lambda = 7$  obtenemos un valor medio para el agregado de siniestros de 420 unidades monetarias por unidad de tiempo. Con lo anterior, se estableció una tasa de ingreso vía prima,  $c = 430$ , y por lo tanto un factor de recargo  $\rho = 0.0238$ , el periodo de análisis fue de 500 unidades de tiempo.

En la Tabla 4.2, se muestran los parámetros utilizados en las corridas de la simulación, cabe aclarar que el valor de la tasa de ingreso vía prima se determinó a partir de la media de tal forma que  $c > \lambda\mu$ .

Recordemos que la media de los montos de siniestros bajo estos supuestos se calcula como  $\mu = \beta/(\alpha - 1)$  para  $\alpha > 1$ , en caso contrario no existe, por lo que está determinada en gran medida por el valor de  $\beta$ . Cuando el valor de  $\alpha$  es muy cercano a uno la media se magnifica más que con valores grandes para  $\alpha$ , y como consecuencia se tendrán números generados aleatoriamente grandes. Hay que señalar que la distribución Pareto tiene varianza finita cuando el

u	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	c	$\rho$	$\hat{\psi}(u, 500)$	$\psi(u)$
38	0.5	1.5	7	13	0.8571	0.2902	0.4601392
50	16	3	3	30	0.2500	0.0287	0.0128160
9	4	9	30	21	0.4000	0.1506	0.3772600
900	7	1.25	12	490	0.4583	0.6950	0.7389491
25	13	10	8	21	0.8173	0.0648	0.1642193
800	26	2.9	18	400	0.6239	0.0086	0.0195534
26	50	1.1	0.01	9	0.8000	0.3166	0.6713150
1000	32	2	14	675	0.5067	0.3306	0.8912889
33	11	4	22	88	0.0909	0.8836	0.7040000
90	3	1.8	8.9	64	0.9176	0.3894	0.5966066

Tabla 4.2: Algunos resultados del caso Pareto.

parámetro  $\alpha$  es mayor a dos, la cual se calcula como  $\alpha\beta^2/((\alpha - 1)^2(\alpha - 2))$ .

Podemos observar que hay grandes diferencias entre la probabilidad estimada y la probabilidad teórica en la mayoría de los casos, debido principalmente a que el capital inicial es pequeño en comparación con la tasa de ingreso vía prima en un periodo de tiempo igual. Lo anterior aunado a que el factor de recargo de la prima es menor a uno, nos dan una mala aproximación a la probabilidad de ruina en tiempo infinito.

### Caso Burr

Esta distribución se puede ver como una generalización de la distribución Pareto ya que cuando  $\kappa = 1$  estaríamos trabajando con la distribución Pareto con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Si el parámetro  $\kappa$  es pequeño magnifica la media, además de las mismas consideraciones que se te tuvieron para el caso anterior.

La media para esta distribución está dada por

$$\frac{\kappa\Gamma(1/\alpha)\Gamma(\kappa - 1/\alpha)\beta^{1/\alpha}}{\alpha\Gamma(\kappa + 1)}.$$

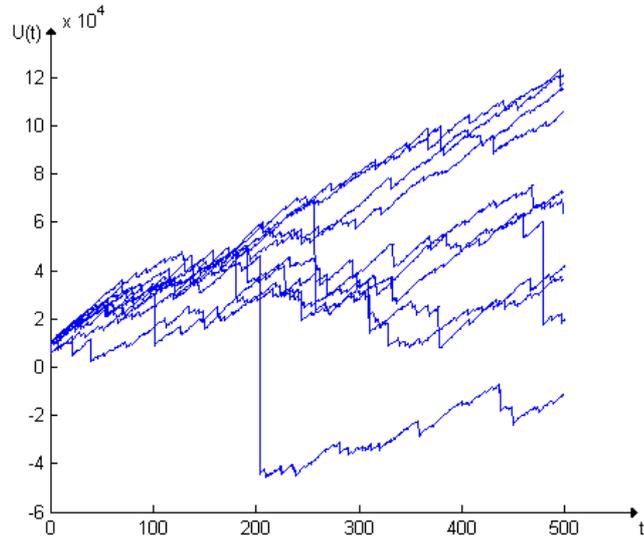


Figura 4.4: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso Burr.

$u$	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$	$c$	$\rho$	$\hat{\psi}(u, 500)$	$\psi(u)$
0.8	1	50	5	24	1.1	0.2380	0.5682	0.378421
15	2	1.2	2	1.5	6.5	0.2510	0.4862	0.497548
10	3	1.2	1.5	1	38	0.6889	0.4778	0.965894
1	4	7	5	9	4	0.0863	0.7924	0.237934
1	5	2.9	3.5	4.25	6	0.1951	0.6488	0.638890
250000	6	2	10	0.57	3100	0.5254	0.6806	0.702159
30	7	1.5	20	2	45	0.4375	0.0906	0.024983
11	8	15	13	1	14.5	0.9519	0.0002	0.000197
40	9	1	8	2	51	0.2754	0.2390	0.163156
14700	10	16	15	0.25	400	0.0785	0.7816	0.821249

Tabla 4.3: Algunos resultados del caso Burr.

En la figura anterior se presentan algunas trayectorias del proceso de riesgo, en donde los montos de las reclamaciones tienen distribución Burr con parámetros  $\alpha = 16$ ,  $\beta = 15$  y  $\kappa = 0.25$  con los que se generan números aleatorios de miles de unidades monetarias, se considera un capital inicial de  $u = 1000$  con lo que se obtuvo una probabilidad de ruina con un horizonte de  $t = 500$ .

En la Tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos en la simulación utilizando el método Monte Carlo para las diferentes corridas realizadas. En general, podemos apreciar diversos valores del capital inicial donde se puede apreciar que conforme va creciendo la diferencia entre la probabilidad de ruina estimada se va acercando a la teórica. También tenemos distintos factores de recargo de la prima que afectan directamente a la probabilidad estimada y la aproximación por Cramér-Lundberg.

### Caso Weibull

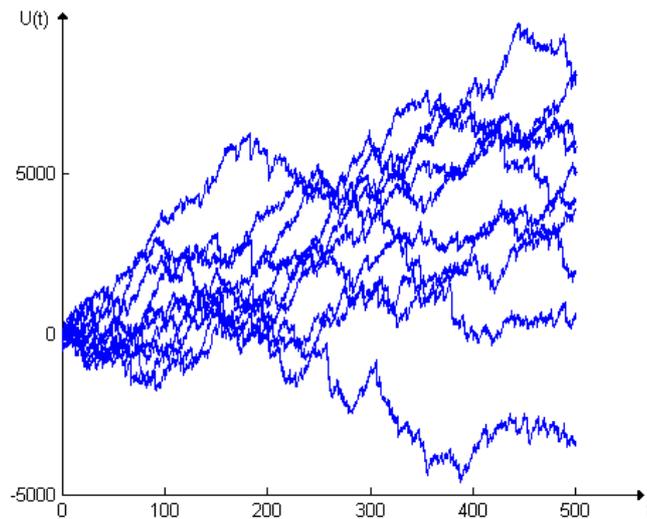


Figura 4.5: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso Weibull.

Como ya se mencionó esta distribución tiene cola pesada cuando el parámetro de forma es menor que uno. Recordemos que su media es igual a  $\Gamma(\frac{r+1}{r})b^{-1/r}$

u	$\lambda$	$r \leq 1$	b	c	$\rho$	$\hat{\psi}(u, 500)$	$\psi(u)$
2.8	1	0.5	3	0.4	0.8000	0.0888	0.049701
0.015	39	0.2	18	0.003	0.2113	0.4970	0.537246
0.15	3	0.8	41	0.2	5.1046	0.0002	0.000048
15	4	0.5	1	9	0.1250	0.7856	0.810716
237	5	0.7	0.1	180	0.0601	0.3684	0.395103
58000	6	0.05	11	0.035	0.6130	0.8592	0.909192
0.7	7	0.35	10	0.05	0.0222	0.2680	0.264287
0.001	8	0.1	31	0.00000005	0.4117	0.1000	0.131722
118	9	0.05	14	0.0005	0.9106	0.6872	0.736951
6.5	10	0.43	1.5	14	0.3044	0.5181	0.687886

Tabla 4.4: Algunos resultados en el caso Weibull.

y varianza  $\left(\Gamma\left(\frac{r+1}{r}\right) - \Gamma^2\left(\frac{r+2}{r}\right)\right) b^{-2/r}$ .

Los parámetros que se utilizaron para generar la gráfica anterior son  $r = 0.7$ ,  $b = 0.1$ , la tasa del número de siniestros por unidad de tiempo es de 5; a partir de los que se obtuvo una tasa de ingreso vía prima igual a 180, dándonos un factor de recargo de 6.01%, y por último, el capital inicial de 7 unidades monetarias. Para este caso se estimó una probabilidad de ruina muy cercana a uno, por el hecho de considerar un capital inicial más pequeño que la media del agregado de siniestros.

La mayoría de esas trayectorias toman valores negativos en un periodo muy corto de tiempo a partir del punto de inicio, lo que se refleja directamente en la probabilidad de ruina en tiempo finito estimada que nos da 0.9328.

En general, si los valores que toma el parámetro escalar  $b$  son grandes tendremos un valor esperado del agregado de siniestros pequeño como en la mayoría de los resultados que se presentan en la Tabla 4.4, y también las tasas de ingreso vía prima serán pequeñas. Conforme disminuyen los valores que toma el parámetro  $b$  la media del agregado de siniestros crece, así como la tasa de ingreso vía prima. Por último, cuando los dos parámetros son menores que uno se tendrán valores grandes para dicha tasa.

De manera similar al capítulo anterior, es necesario cambiar el orden de los

parámetros al introducirlos en la instrucción para realizar una corrida, esto es primero se considera al parámetro escalar,  $b$ , y después el de forma,  $r$ .

Las probabilidades de ruina estimadas para algunos valores de los parámetros se encuentran en la Tabla 4.4. Donde podemos apreciar claramente lo dicho antes, por ejemplo con los parámetros de la Figura 4.5, se obtiene una media del agregado de siniestros de 169.79, mientras que si consideramos los valores  $r = 0.8$ ,  $b = 41$  y  $\lambda = 3$  la media del acumulado de siniestros es de 0.0328.

De igual forma que en los casos anteriores, la probabilidad de ruina en tiempo finito dista mucho de la teórica, por las mismas razones.

### Caso loggama

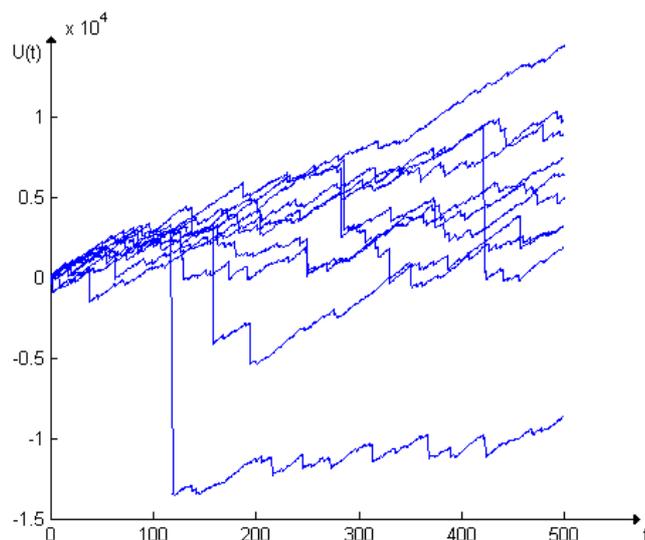


Figura 4.6: Trayectorias del proceso de riesgo  $U(t)$  en el caso loggama.

El paquete no maneja un generador de números aleatorios para esta distribución, puesto que tiene un propósito general, por lo que se utilizó la transformación que se indica en la primera sección de este capítulo y el programa se anexa al final de este trabajo.

u	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	c	$\rho$	$\hat{\psi}(u, 500)$	$\psi(u)$
3	1	1	0.1	2	0.8000	0.0448	0.043767
2	2	0.2	0.5	3	0.3058	0.3688	0.149920
100	3	2.9	0.8	350	0.0963	0.4450	0.066541
20	4	4	0.3	19	0.1405	0.4516	0.114030
51	5	2.3	0.7	83	0.0411	0.6562	0.485091
25	6	20	0.05	29	0.7327	0.8764	1
30	7	3	0.35	51	1.0008	0.0280	0.006913
45	8	15	0.1	46	0.1839	0.9090	1
33	9	6	0.26	83	0.5143	0.1102	0.010576
250	10	10	0.43	2850	0.0318	0.8278	0.912370

Tabla 4.5: Algunos resultados en el caso loggama.

La media para esta distribución es  $\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^\alpha$  para  $\beta < 1$ , en caso contrario no existe. Y la varianza existe para  $\beta < 1/2$  y está dada por  $\left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^\alpha$ .

De manera similar al caso lognormal, podemos observar en las trayectorias que se muestran en la siguiente figura, cómo en algunas de ellas ocurren eventos de gran magnitud y en otras el comportamiento es más estable.

La gráfica se obtuvo con los siguientes valores para los parámetros:  $\alpha = 2.3$ ,  $\beta = 0.7$  y  $\lambda = 5$ , con lo que calculamos la media esperada para el agregado de siniestros que es de 79.7244 por unidad de tiempo, a partir de la cual se establece una tasa  $c = 83$  y  $\rho = 4.11\%$  y un capital inicial de 51 unidades monetarias.

Algunos resultados para diferentes valores de los parámetros se resumen en la Tabla 4.5.

# Conclusiones

Como hemos visto, el modelo Cramér-Lundberg es una simplificación de la realidad, ya que no considera, entre otros aspectos, gastos de administración ni el tiempo que se tarda la compañía aseguradora en pagar los siniestros reportados, pero nos ofrece una buena aproximación sobre la solvencia (no ruina) de una compañía aseguradora.

En la parte de la simulación corroboramos que la probabilidad de ruina depende directamente del factor de recargo de la prima y del capital inicial, en el primero se incluye la media de la distribución de los montos de siniestros y el parámetro Poisson.

Además, los resultados gráficos obtenidos por medio de la simulación vía método Monte Carlo nos ayudan a visualizar lo que se ha tratado teóricamente, en la mayoría de los casos. Dentro de estos gráficos, se pudieron observar las diferencias que existen, cuando se tratan de distribuciones con colas ligeras y en el caso con colas pesadas para los montos de las reclamaciones. Entre las más importantes se encuentran, que en el primero se puede ver una ligera tendencia hacia la baja, así como un aumento en el número promedio de ocurrencias, antes de que ocurra la ruina. Mientras que para el supuesto de cola pesada no se puede detectar alguna tendencia, depende solamente de los grandes saltos que se tengan como reclamaciones, esto se puede observar en las gráficas del capítulo 4. Esto nos puede ser de gran utilidad para fines pedagógicos.

Para las distribuciones de cola ligera se tienen probabilidades estimadas muy cercanas a las dadas por la cota de Cramér-Lundberg. Mientras que para las distribuciones de cola pesada se observa que existe una gran variabilidad entre las probabilidades estimadas y las dadas por la aproximación teórica,

debido en gran magnitud a que se requiere un capital inicial que tienda a infinito.

Después de algunas modificaciones ligeras, los programas desarrollados pueden utilizarse para la estimación de la probabilidad de ruina cuando los montos siguen cualquier otra distribución de interés, sea ésta teórica o empírica.

Una posible aplicación puede darse con datos reales del sector asegurador mexicano donde se tiene que considerar un monto que corresponda al capital mínimo de garantía que se establece por ley dentro del capital inicial de la compañía aseguradora.

# Apéndice A

## Algunos conceptos utilizados

En este apartado se presentarán algunas definiciones y teoremas que fueron utilizados para la demostración del Teorema 1 en el capítulo 3, así como algunas características de las funciones directamente Riemann integrables. Comencemos con las definiciones de las transformadas.

### A.1 Transformadas

**Definición 18** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa con función de distribución  $H$ . La transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  o de  $H$  es la función definida en  $(0, \infty)$  por

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Para valores de  $s$  no negativos,  $\hat{h}(s)$  siempre es finita, y dependiendo del comportamiento de  $\bar{H}(x)$  para  $x$  grande,  $\hat{h}(s)$  podría ser finita para algunos valores de  $s$  negativos. En general,  $\hat{h}(s) < \infty$  para  $s > -\gamma$ , donde  $0 \leq \gamma < \infty$  se conoce como la abcisa de convergencia para  $\hat{h}(s)$ , para mayores detalles ver Embrechts [6].

**Definición 19** La transformada de Esscher<sup>1</sup> sobre la función de distribución  $F_I$  es

$$F_{I,R}(x) = \int_0^x e^{Rx} d(\alpha F_I(x)), \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>También conocida como "exponentially tilted".

donde  $R$  es el exponente que aparece en la condición (3.2).

## A.2 Procesos de renovación

Ahora enunciaremos algunos resultados acerca de los procesos de renovación, cuya demostración puede encontrarse en Feller [7] y Grimmett [9], los cuales nos serán de utilidad para la demostración del Teorema 1.

**Definición 20** *Un proceso de renovación  $(N(t))_{t \geq 0}$  es un proceso tal que*

$$N(t) = \sup\{n : T_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,t]}(T_n) \quad (\text{A.3})$$

donde  $T_0 = 0$ ,  $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$  para  $n \geq 1$ , y  $(Y_i)_{i \geq 1}$  es una sucesión de v.a.i.i.d. no negativas con función de distribución común  $F$  y media finita dada por  $E[Y_1] = \lambda^{-1} < \infty$ .

También se le conoce como *proceso de renovación puro* ya que  $T_0 = 0$  y en caso contrario se trata de un *proceso de renovación con retraso*, en este trabajo consideramos el primero por simplicidad. Podemos pensar que  $N(t)$  representa el número de ocurrencias de algún evento en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , como pueden ser, por ejemplo, arribos de personas. Por otra parte, es de gran interés el valor esperado de  $N(t)$ , para lo cual se define la función de renovación de la siguiente manera:

**Definición 21** *La función de renovación  $V$  está dada por*

$$V(t) = E[N(t)]. \quad (\text{A.4})$$

Además, es fácil encontrar una expresión de la función de renovación en términos de las convoluciones de  $F$ .

**Lema 12** *La función de renovación se puede expresar como*

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t). \quad (\text{A.5})$$

Una aproximación alternativa a la función de renovación es por medio de la esperanza condicional y la *ecuación de renovación*. Primero notemos que  $V$  es la solución a la siguiente ecuación integral.

**Lema 13** *La función de renovación  $V$  satisface la ecuación de renovación,*

$$V(t) = F(t) + \int_0^t V(t-x)dF(x). \quad (\text{A.6})$$

La ecuación de renovación se puede expresar en términos de convolución, como  $V(t) = F(t) + F * V(t)$ .

El caso más general es la *ecuación del tipo de renovación* que tiene la siguiente forma

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x), \quad t \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Enseguida se enunciará la definición de una función aritmética, que es necesaria para presentar dos teoremas límite de los procesos de renovación.

**Definición 22** *La función de distribución  $F$  de una v.a.  $X$  es aritmética con alcance  $\lambda > 0$  si  $X$  toma valores en un conjunto  $\{k\lambda : k = 0, \pm 1, \dots\}$  con probabilidad 1.*

**Teorema 11** *(Teorema elemental de renovación)*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = \lambda. \quad (\text{A.8})$$

**Teorema 12** *(Teorema clave de renovación de Smith)*

*Considere un proceso de renovación con  $E[Y_1] = \lambda^{-1} < \infty$ , la función de renovación asociada con la función de distribución  $F$  no aritmética,  $V(t) = E[N(t)]$ , y una ecuación del tipo de renovación como en (A.7).*

*i) Si  $h$  es directamente Riemann integrable, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x)dV(x) = \lambda \int_0^\infty h(x)dx. \quad (\text{A.9})$$

*ii) Si  $h$  es localmente acotada, entonces la única solución está dada por*

$$g(t) = \int_0^t h(t-x)dV(x), \quad t \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

*Además, si  $h$  es directamente Riemann integrable, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lambda \int_0^\infty h(x)dx. \quad (\text{A.11})$$

A continuación veremos algunos resultados para distribuciones defectuosas que nos es de gran ayuda para la conclusión de la demostración del Teorema 1 en el capítulo 3.

Denotaremos  $L$  a la distribución defectuosa con  $L(0) = 0$  y  $L(\infty) = L_\infty < 1$  para los tiempos (defectuosos) inter-arribo  $Y_k$ , en que el defecto  $1 - L_\infty$  representa la probabilidad de una terminación. El origen del eje del tiempo cuenta como la época de renovación número cero, y  $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$  es la  $n$ -ésima época de renovación; es una variable defectuosa con distribución  $L^{n*}(\infty) = L_\infty^n$ . El defecto  $1 - L_\infty^n$  es la probabilidad de extinción antes de la  $n$ -ésima época de renovación. Nuevamente se hace

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_\infty^{n*}(t). \quad (\text{A.12})$$

De igual manera  $V(t)$  es el número esperado de épocas de renovación dentro de  $(0, t)$ , sin embargo, en esta ocasión el número esperado de épocas de renovación que alguna vez ocurren es finito, o sea,

$$V(\infty) = \frac{1}{1 - L_\infty}. \quad (\text{A.13})$$

La probabilidad que la  $n$ -ésima época de renovación  $T_n$  sea la última  $y \leq x$  es igual a  $(1 - L_\infty)L_\infty^{n*}(x)$ . Por lo tanto, se tiene el

**Teorema 13** *Un proceso de renovación transitorio que comienza en el origen termina con probabilidad uno. La época de terminación  $M$  (o sea, el máximo logrado por la sucesión  $0, T_1, T_2, \dots$ ) tiene la distribución propia*

$$P[M \leq x] = (1 - L_\infty)V(x). \quad (\text{A.14})$$

La probabilidad de que la  $n$ -ésima época de renovación sea la última es igual a  $(1 - L_\infty)L_\infty^n$ , de manera que el número de épocas de renovación tiene una distribución geométrica.

Es posible manejar estos resultados en función de la *ecuación de renovación (defectuosa)*

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dL(x), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.15})$$

pero con una  $L$  defectuosa la teoría es trivial. Nuevamente suponiendo que  $h(t) = 0$  para  $t \leq 0$  la única solución está dada por

$$g(t) = \int_0^t h(t-x)dV(x), \quad (\text{A.16})$$

y evidentemente

$$g(t) \rightarrow \frac{h(\infty)}{1-L_\infty} \quad (\text{A.17})$$

siempre que  $h(t) \rightarrow h(\infty)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

En las aplicaciones, por lo general  $h(t)$  tiende a un límite  $h(\infty)$ , y en este caso  $g(t)$  tiende al límite  $g(\infty)$  dado por (A.17). Frecuentemente es importante obtener estimaciones asintóticas para la diferencia  $g(\infty) - g(t)$ . Esto se puede lograr por un método de extensa aplicabilidad en la teoría de caminatas aleatorias. Depende de la suposición de que existe un número  $\kappa$  tal que

$$\int_0^\infty e^{\kappa x} dL(x) = 1. \quad (\text{A.18})$$

Obviamente esta raíz es única, y ya que la distribución  $L$  es defectuosa,  $\kappa > 0$ . Ahora se define una distribución de probabilidad *propia*  $L^\#$  mediante

$$dL^\#(x) = e^{\kappa x} dL(x), \quad (\text{A.19})$$

y con cada función  $f$  se asocia una nueva función  $f^\#$  definida por

$$f^\#(x) = e^{\kappa x} f(x).$$

Partiendo de (A.15) se puede apreciar que la ecuación de renovación

$$g^\#(t) = h^\#(t) + \int_0^t g^\#(t-x)dL^\#(x), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.20})$$

es válida. Luego, si  $g^\#(t) \rightarrow a \neq 0$ , entonces  $g(t) \sim ae^{-\kappa t}$ . De acuerdo con ello, si  $h^\#$  es directamente integrable (en cuyo caso  $h(\infty) = 0$ ) el teorema de renovación implica que,

$$e^{-\kappa t} g(t) \rightarrow \frac{1}{\mu^\#} \int_0^\infty e^{\kappa t} h(x) dx, \quad (\text{A.21})$$

donde

$$\mu^\# = \int_0^\infty x e^{\kappa x} dL(x). \quad (\text{A.22})$$

En (A.21) se tiene una buena estimación para  $g(t)$  para  $t$  grande.

### A.3 Funciones directamente Riemann integrables

Por último, hablemos acerca de algunas definiciones y características de las funciones directamente Riemann integrables, las demostraciones se pueden encontrar en Resnick [14] y Feller [7].

Sea  $[a, b]$  un intervalo finito de los reales, y sea una función acotada  $f$  sobre  $[a, b]$ . Consideremos particiones en subintervalos de longitudes iguales  $h = (b - a)/n$ . Se definen para  $k \geq 1$

$$\overline{m}_k(h) = \sup_{(k-1)h \leq x < kh} f(x), \quad (\text{A.23})$$

$$\underline{m}_k(h) = \inf_{(k-1)h \leq x < kh} f(x). \quad (\text{A.24})$$

Las sumas superior e inferior de Riemann para un alcance dado  $h$  están definidas por

$$\overline{\sigma}(h) = h \sum_{k=1}^n \overline{m}_k(h), \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{\sigma}(h) = h \sum_{k=1}^n \underline{m}_k(h). \quad (\text{A.26})$$

Observe que  $\underline{\sigma}(h)$  es no decreciente cuando  $h$  decrece a 0, y  $\overline{\sigma}(h)$  es no creciente cuando  $h$  decrece a 0. Se define que  $f$  es Riemann integrable si

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \rightarrow 0 \quad (\text{A.27})$$

conforme  $h \rightarrow 0$ , y, en este caso,

$$\int_a^b f(y)dy = \lim_{h \downarrow 0} \overline{\sigma}(h). \quad (\text{A.28})$$

Un factor importante es que  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es acotada y continua sin saltos.

La definición de integrabilidad de Riemann en funciones sobre  $[0, \infty)$  significa que  $f$  es Riemann integrable sobre  $[0, a]$  para toda  $a > 0$  y existe

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(y)dy,$$

tal que

$$\int_0^\infty f(y)dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(y)dy. \quad (\text{A.29})$$

Para la integración directa de Riemann, tomamos  $\overline{m}_k(h)$ ,  $\underline{m}_k(h)$  como en (A.23) y (A.24), pero las sumas superior e inferior se definen como sigue

$$\overline{\sigma}(h) = \sum_{k=1}^{\infty} h \overline{m}_k(h), \quad (\text{A.30})$$

$$\underline{\sigma}(h) = \sum_{k=1}^{\infty} h \underline{m}_k(h). \quad (\text{A.31})$$

Entonces  $f$  es directamente Riemann integrable si  $\overline{\sigma}(h) < \infty$  para toda  $h$  y

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)) = 0. \quad (\text{A.32})$$

De la definición de funciones directamente Riemann integrables tenemos las siguientes observaciones:

1. Si  $f$  tiene soporte compacto entonces la integral de Riemann es directamente Riemann integrable.
2. Si  $f$  es directamente Riemann integrable entonces  $f$  es Riemann integrable sobre  $[0, \infty)$  y

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\sigma}(h) = \lim_{h \downarrow 0} \underline{\sigma}(h) = \int_0^\infty f(y)dy,$$

donde la integral del lado derecho es la integral de Riemann.

3. Si  $f \geq 0$  es no decreciente entonces  $f$  es directamente Riemann integrable si y sólo si  $f$  es Riemann integrable.
4. Si  $f$  es Riemann integrable sobre  $[0, a]$  para toda  $a > 0$  y  $\overline{\sigma}(1) < \infty$ , entonces  $f$  es directamente Riemann integrable.
5. Si  $f$  es Riemann integrable sobre  $[0, \infty)$  y  $f \leq g$  donde  $g$  es directamente Riemann integrable, entonces  $f$  es directamente Riemann integrable.

# Apéndice B

## Código de programas

El siguiente es el código del programa para generar el número de reclamaciones en el intervalo  $[0, t]$ , y está basado en un algoritmo presentado en Ross [16]. Este algoritmo consiste en generar números aleatorios con distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  y el número de reclamaciones en  $[0, t]$  se define como en la Definición 1. Sin embargo, existe otra forma alternativa que se puede consultar en Ross [17].

```
function[Y,T,n]=ocurrencia(lambda,t)
% Esta función determina el número de siniestros donde
% "lambda" es el parámetro del proceso Poisson
% Generamos los tiempos de reclamación
a=50000;
Y = exprnd(1/lambda,a,1);
T = cumsum(Y);
%Definimos el número de reclamaciones
n = 0;
for j=1:a
    if(T(j)<=t)
        n=j;
    elseif(T(j)>t)
        n=n;
        break;
    end
end
end
```

En el programa anterior se tomó a igual a 50000 ya que con este valor es poco probable que el número de reclamaciones en todos los intervalos  $[0, t]$  utilizados en la simulación excedan ese valor.

El código que sigue es para el programa que calcula el proceso del agregado de siniestros y el de riesgo, el cual hace referencia del programa anterior para la determinación de los tiempos de ocurrencia de las reclamaciones. Este programa concentra los casos para distribuciones de colas ligeras y de colas pesadas. Los valores que se introducen son: el capital inicial  $u$ , la tasa de ingreso vía prima  $c$ , el parámetro Poisson  $\lambda$ , el número que le corresponde a la distribución bajo estudio, los parámetros de dicha distribución, y por último, la longitud del periodo de estudio. En caso de que la distribución tenga un parámetro, como por ejemplo una exponencial con media  $\mu$ , en las posiciones de los otros parámetros se coloca cualquier valor pero sin dejarlos vacíos.

```

funcion[U,x,n]=riesgo(u,c,lambda,dist,p1,p2,p3,t)
% Esta función determina el proceso del agregado de siniestros
% para las siguientes distribuciones siniestros: 1-exponencial,
% 2-gama, 3-normal, 4-Weibull, 5-lognormal, 6-Pareto, 7-Burr y
% 8-loggama, donde p1, p2 y p3 son los parámetros de cada
% distribución a utilizar y t es el periodo de análisis.
clc
[Y,T,n]=ocurrencia(lambda,t);
%Calculamos el proceso del agregado de siniestros
if(n==0)
    S=0
elseif(n>0)
    %Definimos la distribución de los montos de reclamación
    if(dist==1)
        X = exprnd(p1,n,1);
    elseif(dist==2)
        X = gamrnd(p1,p2,n,1);
    elseif(dist==3)
        X = abs(normrnd(0,1,n,1));

```

```

elseif(dist==4)
    X = weibrnd(p1,p2,n,1);
elseif(dist==5)
    X = lognrnd(p1,p2,n,1);
elseif(dist==6)
    [X] = parrnd(p1,p2,n,1);
elseif(dist==7)
    [X] = burrrnd(p1,p2,p3,n,1);
elseif(dist==8)
    [X] = loggrnd(p1,p2,n,1);
end
S = zeros(2*n+2,1);
S(1)=0;
S(2)=0;
for k=2:n+1
    S(2*k-1)=S(2*k-2)+X(k-1);
    S(2*k)=S(2*k-1);
end
x = zeros(2*n+2,1);
for a=1:n
    x(2*a)=T(a);
    x(2*a+1)=x(2*a);
end
x(2*n+2)=T(n+1);
end
%Calculamos el proceso de riesgo
if(n==0)
    U = u+c*t;
elseif(n>0)
    U = zeros(2*n+2,1);
    U(1)=u;
    for i=1:n
        U(2*i)=U(2*i-1)+c*Y(i);
        U(2*i+1)=U(2*i)-X(i);
    end
    U(2*n+2)=U(2*n+1)+c*Y(n+1);
x;
S;

```

```

U;
return
end

```

Los datos que se utilizaron para realizar las gráficas presentadas en los dos primeros capítulos se obtuvieron al correr el programa anterior, quitándole el punto y la coma a los tres antepenúltimos renglones ya que de esta manera se nos muestra la información almacenada en las matrices  $x$ ,  $S$  y  $U$ .

El siguiente código corresponde al programa para calcular la probabilidad de ruina con horizonte finito, ésta se calcula como el cociente del número de trayectorias que en algún momento fueron negativas y la longitud de la corrida. Cabe señalar que una trayectoria se considera negativa en el primer instante en el que es menor o igual a cero, por lo que en el programa cuando se tiene esta situación se incrementa en una unidad el contador y se continúa con el análisis de la siguiente trayectoria, de esta manera se contabilizan una sola vez.

Se basa en el programa *riesgo(u,c,lambda,dist,p1,p2,p3,t)*, y se le incluye el número de iteraciones o trayectorias que se desean contabilizar. Además, genera una figura donde se grafican todas las trayectorias realizadas.

```

function prruina(u,c,lambda,dist,p1,p2,p3,t,m)
cn=0;
for j=1:m
    [U,x,n]=riesgo(u,c,lambda,dist,p1,p2,p3,t);
    for i=1:2*n+2
        if(U(i)>0)
            cn=cn;
        elseif(U(i)<=0)
            cn=cn+1;
            break
        end
    end
end
plot(x,U)
title('Proceso de riesgo')

```

```

        xlabel('t')
        ylabel('U(t)')
        hold on
end
hold off
pr=cn/m;
disp('La probabilidad de ruina con horizonte finito es:'),pr

```

Las gráficas presentadas en los capítulos tercero y cuarto, en la sección de los resultados de la simulación, así como las estimaciones de la probabilidad de ruina en tiempo finito, se obtuvieron al correr el programa antes descrito.

Los siguientes tres códigos corresponden a los programas para la generación de números aleatorios con distribución Burr, loggama y Pareto. Comenzaremos con el código para la distribución Burr:

```

function[X]=burrnd(alpha,beta,kappa,n,m)
% Esta función genera números aleatorios con distribución Burr
A = rand(n,m);
X = ((beta./((1-A).^(1/alpha)))-beta).^(1/kappa);

```

El siguiente es el código para el programa de generación de números aleatorios con distribución loggama:

```

function[X]=loggrnd(alpha,beta,n,m)
% Esta función genera números aleatorios con distribución loggama
A = gamrnd(alpha,beta,n,m);
X = exp(A);

```

Por último, el código del programa para generar números aleatorios con distribución Pareto se presenta a continuación:

```

function[X]=parrnd(alpha,beta,n,m)
% Esta función genera números aleatorios con distribución Pareto
A = rand(n,m);
X = zeros(n,m);
X = beta./((A).^(1/alpha))-beta;

```

Para la simulación por medio de la fórmula Pollaczek-Khinchine se utilizó el programa que tiene el siguiente código:

```
function pr(u,c,lambda,mu,m)
clc
cn = 0;
p = 1-(lambda*mu)/c;
N = geornd(p,m,1);
for j=1:m
    n = 0;
    n = N(j);
    if(n>0)
        X = exprnd(mu,n,1);
        X1 = cumsum(X);
        if(X1(n)>u)
            cn=cn+1;
        elseif(X1(n)<=u)
            cn=cn;
        end
    elseif(n==0)
        cn=cn;
    end
end
pr=cn/m;
disp('La probabilidad de ruina con horizonte infinito es:'),pr
```

Se basa en la fórmula Pollaczek-Khinchine para calcular la probabilidad de ruina con horizonte infinito para el caso exponencial.

# Bibliografía

- [1] Asmussen Soren. *Ruin probabilities*. Advanced series on statistical science and applied probability, vol. 2. World Scientific.
- [2] Bartle Robert G. *The Elements of Integration*. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [3] Beard R. E., Pentikäinen T. y Pesonen E. *Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance*, second edition. Chapman and Hall, London, 1979.
- [4] Beard R. E., Pentikäinen T. y Pesonen E. *Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance*, third edition. Chapman and Hall, London, 1984.
- [5] Daykin C. D., Pentikäinen T. y Pesonen M. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman and Hall, Monographs on Statistics and Applied probability 53, London, 1995.
- [6] Embrechts P., Klüppelberg C. y Mikosch T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability 33, U. S. A., 1999.
- [7] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume II, second edition. John Wiley and Sons, New York, 1971.
- [8] Gerber H. U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S. S. Huebner Foundation Monograph No. 8, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1979.
- [9] Grimett G. R. y Stirzaker D. R. *Probability and Random Processes*, third edition. Oxford University Press, 2001.
- [10] McLaughlin M. P. *Regress+, Appendix A. A Compendium of Common Probability Distributions*. Versión 2.3, 2001.

- [11] Melnikov A. *Risk Analysis in Finance and Insurance*. Chapman and Hall /CRC, 2004.
- [12] Mikosch T. *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*. Springer, 2004.
- [13] Mood A. M. y Graybill F. A. *Introduction to the Theory of Statistics*, tercera edición. Mc Graw Hill, 1974.
- [14] Resnick S. I. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [15] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. y Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley and Sons, England, 1999.
- [16] Ross S. M. *Simulation*, third edition. Academic Press, University of California, California, 2002.
- [17] Ross S. M. *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, U. S. A., 1983.
- [18] Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros, 2006.
- [19] Circular S-13.1. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 2003.