UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“VALUACIÓN DE LOS DERECHOS CONTINGENTES SOBRE INGRESOS POR EXPORTACIONES PETROLERAS (VALUE RECOVERY RIGHTS) COMO OPCIONES SOBRE ACTIVOS DE CONSUMO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A

PEDRO OSCAR ARROYO ESPINOZA

Tutor: Jaime Vázquez Alamilla

2006

DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno
   Arroyo
   Espinoza
   Pedro Oscar
   52 68 97 19
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   095251554

2. Datos del tutor
   Act.
   Jaime
   Vázquez
   Alamilla

3. Datos del sinodal 1
   M. en C.
   Agustín
   Cano
   Garcés

4. Datos del sinodal 2
   Act.
   Gloria
   Roa
   Béjar

5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   Jaime Gerardo
   Hernández
   Aguilera

6. Datos del sinodal 4
   L.A.E.
   Juan Pablo del Sagrado Corazón
   Rivas
   Villanueva

7. Datos del trabajo escrito.
   Valuación de los Derechos Contingentes Sobre Ingresos por Exportaciones Petroleras (Value Recovery Rights) como Opciones sobre Activos de Consumo
   117 p
   2006

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres a quienes debo lo que soy y he logrado, con cariño para mis hermanos, cuñados y sobrinos de quienes estoy orgulloso y agradezco a Dios que estén conmigo.

A mi padre Pedro Arroyo, a quien admiro enormemente por su nobleza y su gran carácter para enfrentar la vida. A mi madre Odette Espinoza por sus consejos y la motivación que siempre me inspiro.

A mi gran compañera Ale, el amor de mi vida, por su cariño, apoyo y ánimo que me brinda día con día para alcanzar nuevas metas, tanto profesionales como personales.

A toda mi familia en especial a mis abuelos Tomás, Lucha, Elías y Teresa a quienes respeto y les agradezco todas sus atenciones, así como a mis tíos y primos.

A mis compañeros y grandes amigos de la universidad: Armando, Gaby, Liliana, Iván, Joaquín, Mariana, Memo, Oliver, Ray, Raúl y Víctor, con quienes he compartido momentos importantes en mi vida.

A mis amigos de toda la vida: Evert, Erick y Luis, que siempre han estado en las buenas y en las malas.

A las familias Okamoto Valdez y Parada Okamoto que me han recibido con cariño en sus hogares.

AGRADECIMIENTOS

En la realización de esta tesis he recibido el apoyo y la confianza de muchas personas a las que deseo expresar mi agradecimiento.

Mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis Jaime Vázquez Alamilla, a los sinodales Gloría Roa, Agustín Cano, Jaime Hernández y Juan Pablo Rivas, por poner a mi disposición todas las facilidades para desarrollarla.

Finalmente quisiera agradecer a todos quienes ayudaron de alguna manera a la realización de esta tesis y que no pudieron se incluidos por motivos de espacio.

A todos mi mayor reconocimiento y gratitud.

Lo mas importante no es "trabajar",
sino producir y disfrutar el fruto de nuestro trabajo.
Roger Patrón Luján

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar un procedimiento que permita obtener una estimación para todos los posibles pagos (y por consiguiente del precio) de los VRRs. La estimación se plantea sobre bases sólidas de la teoría de valuación de los instrumentos derivados sobre activos de consumo y mediante el análisis de las variables que determinan su valor, utilizando la teoría económica y estadística aplicable, mediante resultados importantes de los procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales y series de tiempo.

En el capítulo 1, se exponen las condiciones existentes durante la reestructura de la deuda externa de los Estados Unidos Mexicanos; las alternativas que se presentaron al gobierno mexicano; las implicaciones que resultaban de cada una de ellas; así como la descripción de las características principales de los bonos Brady. Es aquí donde surge la definición de los derechos contingentes de recuperación, incluidos en estos bonos, conocidos como VRRs. Así también se presenta la similitud de los VRRs con un tipo muy particular de instrumentos derivados y las variables involucradas en la determinación de pago, así como las cláusulas que limitan su valor.

En el segundo capitulo, se presenta la teoría de valuación de instrumentos derivados, empezando con derivados lineales (Futuros y Forwards), distinguiendo entre activos de inversión y los de consumo, planteando cuales son sus diferencias. Posteriormente se presenta la teoría de valoración de derivados no lineales, comenzando por las opciones simples “plain vanilla” para después seguir con una descripción de un tipo de opciones mas especializas, conocidas como opciones “exóticas” para finalmente llegar a un tipo específico de opciones exóticas conocidas como opciones asiáticas sobre activos de consumo.

El tercer Capítulo, realiza una presentación general de resultados importantes de la teoría de procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas, series de tiempo y de pruebas de hipótesis. Este capitulo se divide en tres secciones, en la primera se enfoca principalmente a la definición formal de los procesos estocásticos que sigue un activo subyacente bajo el supuesto de un mercado eficiente. Se consideran ejemplos de casos particulares de procesos estocásticos para modelar la evolución de los precios de los activos que finalmente dará lugar a considerar un caso particular de procesos estocásticos que se relacionan estrechamente con los supuestos del modelo de Black & Scholes. En la segunda sección se plantea la ecuación diferencial de Black & Scholes, estableciendo la importancia de esta ecuación, cuando se utiliza para verificar la validez de cualquier formula que se utilice para evaluar un derivado. En la tercera sección se enfoca a la teoría de las series de tiempo de manera general describiendo algunos de los modelos que las caracterizan. Finalmente se expone la aplicación de la prueba estadística (prueba de hipótesis) de Dickey Fuller, en el estudio de las series de tiempo.

En el capítulo cuarto, se realiza un análisis de las variables involucradas en la determinación del precio de los VRRs. Exponiendo los supuestos, para llegar a una aplicación de la formula de valoración de opciones sobre el precio promedio de un activo de consumo, con el fin de dar una estimación “aceptable” de los VRRs. Se realiza un planteamiento matemático que considere a las cláusulas que delimitan el valor de los VRRs, apoyado en una metodología que realiza las consideraciones teóricas para la valuación, utilizando los resultados y la teoría del segundo y tercer capítulo, donde finalmente se muestra una valuación de los instrumentos y se presenta una breve reseña de las situación actual de los VRRs.

En el anexo A, se expone el método de estimación de la volatilidad mediante datos históricos conocido como “Promedios Móviles Ponderado Exponencialmente”.

1

VALUE RECOVERY RIGHTS DE LOS BONOS BRADY

DESCRIPCIÓN

En la sección 1.1 se presentan las alternativas y la decisión tomada por el gobierno mexicano para reestructurar la deuda externa que tenía con los grandes bancos internacionales en los años 90's y de las condiciones que tuvo que aceptar para resolver los problemas de liquidez y garantizar el cumplimiento de su pago, para así sentar las bases del crecimiento económico del país.

En la sección 1.2 se describen los derechos de recuperación asociados a los bonos Brady emitidos por el gobierno mexicano, así como a las variables que se consideran para calcular su valor y la descripción de las cláusulas bajo las cuales se restringe su pago.

1.1 BONOS BRADY

Durante el gobierno de Carlos Salinas de Gortari, el Gobierno Mexicano, mantenía una deuda externa que se caracterizaba por tener diversas fechas de término y poca liquidez, dadas estas condiciones el gobierno tenía por objetivo mejorar las finanzas públicas y sentar las bases para recuperar el crecimiento económico del país. Fue así que para septiembre de 1989, por conducto de la

Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el gobierno mexicano optó por aceptar de sus acreedores, los bancos internacionales comerciales, alternativas para refinanciar la deuda externa.

Dadas estas condiciones, México ofreció a sus acreedores reestructurar sus adeudos buscando cambiar la composición de la deuda, misma que ascendía aproximadamente a 52 mil millones de dólares (m.m.d.), ofreciendo un paquete financiero que consistía en tres diferentes alternativas para refinanciar los créditos otorgados, dichas alternativas fueron:

1. Intercambio de deuda por un bono a descuento emitido el 28 de marzo de 1990 y con vencimiento el 31 de diciembre del 2019, el cual incluía una reducción del 35% del principal y pagar intereses a tasa LIBOR[1] de seis meses más una sobre tasa de 13/16 puntos base. El pago del principal se realiza al vencimiento del bono y éste se encuentra respaldado por completo con bonos cupón cero del Tesoro de los Estados Unidos. Por otro lado, también cuenta con colateral de instrumentos a corto plazo con alta calificación crediticia que garantiza algunos de los pagos de intereses.

2. Intercambio de deuda por un bono a la par emitido el 28 de marzo de 1990 y con vencimiento el 31 de diciembre del 2019. Sobre este bono se reconoció la totalidad del principal y paga una tasa de interés del 6.25%. El principal e intereses de este bono cuentan con características similares a las del bono a descuento descrito en el inciso anterior.

3. Otorgamiento de nuevos créditos, los cuales podrían adherirse a cuatro alternativas, las cuales contaban con diferentes términos, como son, monto prestado, tasa de interés cobrada y plazo.

Los bonos mencionados, tanto a la par como a descuento, son conocidos como bonos Brady, el nombre se debe a su creador Nicholas Brady, que para el momento de su implementación era el Secretario del Tesoro de los Estado Unidos quien en asociación con el Fondo Monetario Internacional, encontraron el mecanismo para la reestructura de la deuda soberana. Para principios de 1990 países como México, Venezuela, Nigeria y Uruguay optaron por la alternativa de emitir estos bonos, los cuales serían intercambiados por parte de su deuda.

Para México, la colocación de estos títulos fue por cerca de 37,000 millones de dólares en ese tiempo, está alternativa permitió resolver grandes problemas de liquidez y de cumplimiento de su pago. Sin embargo, estos bonos Brady también tenían integrados ciertos compromisos adicionales, para que el

[1] London Interbank Offering Rate (Tasa de oferta interbancaria de Londres)

país emisor pudiera garantizar el pago de los intereses y uno de ellos era contar con garantías determinadas a través de un colateral, es decir, que por cada dólar emitido en un bono Brady se tenían que dejar aproximadamente 42 centavos de dólar invertidos en instrumentos de alta liquidez y con bajo nivel de riesgo, como las características que cumplen los bonos del Tesoro de los Estados Unidos.

Además de lo anterior, algunos países debían contar con activos valiosos que pudieran garantizar el pago de la deuda y que al mismo tiempo les permitiera comprometerse a otorgar un cierto flujo de efectivo adicional, en caso de que el país se viera favorecido por posibles fluctuaciones positivas de dicho activo en el futuro. En el caso de México se optó por otorgar a los tenedores de los bonos "derechos" sobre los ingresos petroleros del país. Fue así que México emitió derechos contingentes sobre los ingresos por exportaciones petroleras, los cuales son llamados "Value Recovery Rights"[2] (VRRs). Los VRRs son instrumentos que proporcionan un valor de recuperación parcial y por los cuales el Gobierno Federal realiza pagos a los tenedores de los bonos Brady en el caso de que los precios del petróleo o el volumen de exportación de la mezcla mexicana se eleven de manera significativa respecto a sus niveles de 1989, de esta manera, los VRRs constituyeron el mecanismo que el Gobierno Federal pactó con sus acreedores en la reestructuración de 1990, a través del cual parte de las pérdidas en que incurrieran los acreedores al momento de la reestructura, pudiera ser compensada parcialmente en el futuro en caso de revertirse de manera importante uno de los factores que fueron una de las causas por la cual se solicitó la reestructura, es decir, el bajo precio internacional del petróleo.

El Gobierno emitió un VRR por cada dólar que los acreedores internacionales aceptaran intercambiar por bonos a la par o a descuento. Como ya se mencionó los bonos a descuento tienen una reducción de principal del 35% y los bonos a la par se emitieron por el monto adeudado, luego entonces, por cada dólar de un bono a la par emitido se asignó un VRR y de igual forma por cada 65 centavos de un bono a descuento. Es decir, por cada dólar de un bono a la par corresponde un VRR y por cada dólar de un bono a descuento corresponden 1/0.65 VRRs. Por ejemplo, si se tiene una inversión $ 1,000,000 de dólares en bonos a la par y otra por $ 650,000 dólares en bonos a descuento, entonces en cada una de estas se tendría un derecho en $ 1,000,000 de dólares en VRRs. Para los bonos Brady denominados en moneda diferente al dólar se estableció un tipo de cambio para calcular el numero de VRRs correspondientes por cada unidad de la moneda extranjera correspondiente, los datos de los bonos que tienen asociados VRRs su código ISIN[3] y el tipo de cambio respectivo son mostrados en le cuadro 1.1.

[2] Una traducción al castellano sería "Valor por Derecho de Recuperación"
[3] Código ISIN "International Securities Identification Number", código alfanumérico que identifica cualquier valor emitido por una organización o institución, tal como acciones o bonos.

CUADRO 1.1

“DESCRIPCIÓN DE LOS BONOS BRADY, ASOCIADOS CON VRRs”

Tipo	Moneda	Monto Emitido	Código ISIN	Factor # VRRs
Desc. A 123119	Dólar EUA	$ 2,487,043.00	XS0015157489	1/.65
Desc. B 123119	Dólar EUA	$ 2,476,107.00	XS0015157562	1/.65
Desc. C 123119	Dólar EUA	$ 2,476,117.00	XS0015157646	1/.65
Desc. D 123119	Dólar EUA	$ 4,067,627.00	XS0015157729	1/.65
Par A 123119	Dólar EUA	$ 17,874,818.00	XS0015157992	1
Par B 123119	Dólar EUA	$ 17,874,818.00	XS0015158024	1
Desc. 123119	Dólar Canadá	$ 162,496.00	XS0015158297	.8461/.65
Desc. 123119	Florín Holanda	$ 31,260.00	XS0015158370	.5224/.65
Par 123119	Florín Holanda	$ 332,470.00	XS0015158453	.5224
Desc. 123119	Franco Francia	$ 62,715.00	XS0015158537	.174/.65
Par 123119	Franco Francia	$ 8,237,550.00	XS0015158610	.174
Par 123119	Lira Italia	$1,198,527,572.83	XS0015158701	.000796603
Desc. 123119	Yen Japón	$ 1,732,500.00	XS0015158883	.006674525/.65
Par 123119	Yen Japón	$ 34,854,900.00	XS0015158966	.006674525
Par 123119	Franco Suiza	$ 351,364.00	XS0015159006	.6671
Desc. 123119	Marco Alemán	$ 166,154.00	DE0004002092	.5885/.65
Par 123119	Marco Alemán	$ 2,587,766.00	DE0004002084	.5885

* Todos estos Bonos tienen como fecha de inicio el 28 de marzo de 1990.
* Cifras en miles de la unidad monetaria indicada.

Al principio y durante algún tiempo las condiciones del mercado petrolero ocasionaron que los VRRs fueran ignorados o considerados con un valor prácticamente nulo, pero desde agosto de 1997 su análisis y valuación han cobrado mayor importancia dados los precios del petróleo registrados y la cercanía de los primeros pagos potenciales de los VRRs.

1.2 DESCRIPCIÓN VALUE RECOVERY RIGHTS

Los VRRs cuentan con 17 series (A-Q) y se encuentran asociados con los bonos Brady mostrados en el cuadro 1.1, además tienen asignadas diferentes fechas de separación de los bonos Brady, siempre y cuando el bono Brady correspondiente continúe vigente en esa fecha[4] y en tal caso, se asignarán el código ISIN correspondiente a cada serie de VRR, cuyas fechas de vencimiento ya se tienen previstas y se muestran en el cuadro 1.2.

[4] Se plantea esta posibilidad ya que en los últimos años, México ha venido realizando varias liquidaciones anticipadas de los bonos Brady

CUADRO 1.2

"FECHAS DE SEPARACIÓN Y PAGOS FINALES DE LOS VRRs"

Serie VRRs	**Fecha de Separación**	**Fecha de Pago Inicial**	**Fecha de Pago Final**
Serie A 063003	01/Julio/1992	30/Septiembre/1996	30/Junio/2003
Serie B 063004	01/Julio/1999	30/Septiembre/2003	30/Junio/2004
Serie C 063005	01/Julio/2000	30/Septiembre/2004	30/Junio/2005
Serie D 063006	01/Julio/2001	30/Septiembre/2005	30/Junio/2006
Serie E 063007	01/Julio/2002	30/Septiembre/2006	30/Junio/2007
Serie F 063008	01/Julio/2003	30/Septiembre/2007	30/Junio/2008
Serie G 063009	01/Julio/2004	30/Septiembre/2008	30/Junio/2009
Serie H 063010	01/Julio/2005	30/Septiembre/2009	30/Junio/2010
Serie I 063011	01/Julio/2006	30/Septiembre/2010	30/Junio/2011
Serie J 063012	01/Julio/2007	30/Septiembre/2011	30/Junio/2012
Serie K 063013	01/Julio/2008	30/Septiembre/2012	30/Junio/2013
Serie L 063014	01/Julio/2009	30/Septiembre/2013	30/Junio/2014
Serie M 063015	01/Julio/2010	30/Septiembre/2014	30/Junio/2015
Serie N 063016	01/Julio/2011	30/Septiembre/2015	30/Junio/2016
Serie O 063017	01/Julio/2012	30/Septiembre/2016	30/Junio/2017
Serie P 063018	01/Julio/2013	30/Septiembre/2017	30/Junio/2018
Serie Q 123119	01/Julio/2014	30/Septiembre/2018	31/Diciembre/2019

* Por acuerdo se tendrán VRRs de bonos a la par y de bonos a descuento.

Como se puede observar la serie A abarca 7 años (28 pagos), las series B a P cubren un año (4 pagos) y la serie Q el último año y medio (6 pagos). Para poder separar los VRRs de los bonos Brady y venderlos como instrumentos independientes, se tiene que anunciar la intención de hacerlo el 1o de julio del cuarto año anterior a la primera fecha de pago de la serie correspondiente.

Recientemente el gobierno mexicano ha efectuado pagos anticipados y recompras de los bonos Brady, lo que trae como consecuencia que algunos de los VRRs que se preveían fueran comercializados por separado en el futuro, ya han sido eliminados al amortizar la serie correspondiente en bonos. Estos bonos se encuentran depositados en Euroclear o Clear Stream que son custodios globales y estos mismos se encargaron de asignar los códigos ISIN específicos a los VRR's correspondientes a las series A, B, C, D y E, series que hasta la fecha han empezado a comercializarse como instrumentos independientes a los bonos, los códigos ISIN asignados hasta junio de 2003 son los mostrados en cuadro 1.3.

CUADRO 1.3

"CÓDIGOS ISIN ASIGNADOS A VRRs"

Series VRRs	Código ISIN
Serie A 063003	XS0038529110
Serie B 063004	XS0120364186
Serie C 063005	XS0120364343
Serie D 063006	XS0147497720
Serie E 063007	XS0147500028
Serie F 063008	XS0171141236

* Hasta julio de 2003

A continuación se presentan los montos nominales y reales de emisión de los Bonos Brady valorizados a Dólares EUA y la serie de VRRS asociada a cada emisión.

CUADRO 1.4

"MONTOS DE EMISION DE BONOS BRADY"

ISIN Bono	Monto Nominal	Monto Real	Serie VRRs
XS0015157489	$ 2,487,043.00	1,616,577.95	Serie A 063003
XS0015157562	$ 2,476,107.00	1,609,469.55	Serie B 063004
XS0015157646	$ 2,476,117.00	1,609,476.05	Serie C 063005
XS0015157729	$ 4,067,627.00	2,643,957.55	Serie D 063006
XS0015157992	$ 17,874,818.00	17,874,818.00	Serie E 063007
XS0015158024	$ 17,874,818.00	17,874,818.00	Serie F 063008
XS0015158297	$ 134,176.00	87,214.40	Serie G 063009
XS0015158370	$ 15,938.91	10,360.29	Serie H 063010
XS0015158453	148,543.13	148,543.13	Serie I 063011
XS0015158537	10,656.96	6,927.03	Serie J 063012
XS0015158610	1,377,848.20	1,377,848.20	Serie K 063013
XS0015158701	910,795.04	910,795.04	Serie L 063014
XS0015158883	11,285.88	7,335.82	Serie M 063015
XS0015158966	206,080.31	206,080.31	Serie N 063016
XS0015159006	207,793.04	207,793.04	Serie O 063017
DE0004002092	288,846.49	187,750.22	Serie P 063018
DE0004002084	1,465,257.04	1,465,257.04	Serie Q 123119
Totales	**52,033,751.02**	**47,845,021.63**	

* Cifras en Miles de Dólares. Fuente: Sistemas de Información Bloomberg

1.2.1 VARIABLES INVOLUCRADAS

Como ya se mencionó, los bonos Brady a la par y a descuento emitidos a cambio de la deuda externa, tienen una cláusula de pagos adicionales en función de los ingresos por exportaciones petroleras de México. Los pagos adicionales se realizarán trimestralmente entre el 1o de julio de 1996 y el 31 de diciembre de 2019 y son conocidos como VRRs. Cada uno de los posibles pagos trimestrales, para la totalidad de VRRs emitidos, se determina con base en la siguiente fórmula:

$$0.3*[Max(COP-ROP,0)]*CEV*91Días*PP \qquad (1.1)$$

Donde:

COP: Precio actual del petróleo (Current Oil Price) es el precio promedio diario del barril de exportación mexicano en el año anterior a la determinación del pago. Por ejemplo, el COP para septiembre de 1996 es igual al promedio diario del precio de exportación de la mezcla mexicana de septiembre de 1995 a septiembre de 1996.

ROP: Precio de referencia del petróleo (Reference Oil Price) es un precio de 14 dólares por barril, el cual es ajustado anualmente por la inflación estadounidense, considerando al GNP[5] Deflator, indicador que mide la inflación sobre cambios en la economía estadounidense. El referido ajuste por la inflación norteamericana empieza a partir del 30 de junio de 1990. Los 14 dólares por barril reflejan el precio de la mezcla mexicana durante el periodo de la renegociación de la deuda (1989).

CEV: Volumen actual de exportación (Current Export Volume) es el volumen promedio diario de exportación de petróleo durante el año anterior a la fecha en la que se determina el pago. Por ejemplo, el CEV para septiembre de 1996 es igual al promedio diario del volumen de exportación de petróleo de septiembre de 1995 a septiembre de 1996.

PP: Porcentaje de participación (Participation Percentage) es el porcentaje del principal de la deuda que podía ser renegociada dentro del paquete financiero propuesto en 1989 que fue intercambiado por bonos. Este porcentaje es cercano al 90%, ya que de los 52 m.m.d. de deuda gubernamental en poder de la banca comercial internacional, 47.8 m.m.d. fueron intercambiados por bonos a la par y a descuento (el monto exacto fue de USD $47,845,021,625).

El pago descrito por la ecuación (1.1) se realiza un trimestre después de que se determinan todas las variables correspondientes. Por ejemplo, el posible

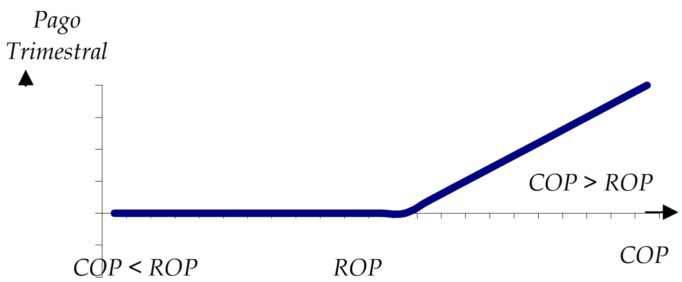
[5] Gross National Product

pago de diciembre de 1997 se determinó en función de los precios y volúmenes de exportación del petróleo hasta septiembre de dicho año.

A manera de ejemplificar la ecuación (1.1), ésta puede ser comparada con la ganancia de una opción europea tipo “call” sobre el precio promedio del petróleo y en este sentido se puede representar como que a su vez es multiplicada por el volumen de la exportación del petróleo (CEV) y otros términos. Esta interpretación de los VRRs se atribuye a que éstos pagan la diferencia entre las variables COP y ROP, pero sólo en el caso en que dicha diferencia sea positiva. Es decir, es como si el tenedor del VRR comprará el activo COP a cambio de pagar el activo ROP, pero sólo si dicha operación le resulta favorable, lo cual ocurre cuando COP es mayor a ROP. Para el caso de los VRRs, entre mayores sean los precios y los volúmenes de exportación de petróleo (los cuales determinan los ingresos derivados de la exportación petrolera), mayor será el pago correspondiente a los tenedores de los VRRs. La parte de los pagos trimestrales descritos por la ecuación (1.1) se puede ilustrar como:

GRÁFICA 1.1

PAGO FINAL VRRs



Otra característica particular de los VRRs es que estos derechos sobre los ingresos petroleros están limitados por diversas cláusulas, las cuales se mencionan a continuación.

1.2.2 LÍMITE RESPECTO A LOS INGRESOS TOTALES

En esta cláusula se limita el pago de los VRRs de acuerdo al ingreso bruto por exportaciones petroleras y tiene por objeto delimitar la participación de los tenedores de los VRRs en los ingresos petroleros que rebasen significativamente el nivel de ingresos que se tenía en 1989. Es decir, se buscó poner un límite a la ecuación (1.1) en función del ingreso base que registraba

Pemex en la fecha en la que se emitieron los bonos Brady, de acuerdo a la siguiente restricción.

El pago descrito en la ecuación (1.1) no podrá ser mayor a :

$$0.3*[Max(OER-BRA,0)]*PP \qquad (1.2)$$

Donde:

OER: Ingresos por exportaciones petroleras (Oil Export Revenue) es el ingreso bruto por exportaciones petroleras en los últimos 3 meses, medido como el promedio trimestral de los ingresos del último año. Por ejemplo, el OER para septiembre de 1996 es igual al ingreso trimestral promedio entre septiembre de 1995 y septiembre de 1996.

BRA: Ingresos por monto base (Base Revenue Amount) es el producto de 1.25 millones de barriles por 91 días por ROP, el precio de referencia del petróleo definido anteriormente. Este nivel de 1.25 millones de barriles diarios se determinó por ser una cifra cercana al promedio del volumen diario de exportación de petróleo en las fechas cercanas a la emisión de los bonos Brady.

1.2.3 LÍMITE DE PAGO MÁXIMO POR TRIMESTRE

En está cláusula se estipula que los pagos trimestrales máximos no podrán exceder el .75% del total de la deuda intercambiada por bonos, es evidente que tiene que tomarse con respecto al número de bonos en circulación al momento del cálculo, si suponemos que todos los bonos emitidos en marzo de 1990 siguen en circulación, lo cual implicaría que el Gobierno Federal no hubiera emprendido recompras de estos instrumentos. El pago máximo en un trimestre por todos los VRRs sería de $358.8 millones de dólares (.75%*$47,845.022 m.d.= $358.838 m.d.)

Adicionalmente, los VRRs tienen una cláusula por la cual aquellos montos determinados por la ecuación (1.1) que no rebasen el límite respecto a los ingresos totales pero que excedan el .75% del total intercambiado por bonos, se deberán acumular anualmente para ser pagados en los siguientes periodos en los que el pago de los VRRs correspondiente a dicho periodo no sobrepasen el referido límite. La cantidad máxima que puede acumularse anualmente en los términos antes descritos es del 3% del monto total de deuda intercambiada por bonos.

El objetivo de la cláusula descrita es el de limitar el monto absoluto de los pagos de los VRRs y además la capacidad de acumular el excedente para pagos futuros, de esta manera se evita la posibilidad de que en un trimestre se limite el pago por exceder este al .75%, y en el siguiente trimestre no se pague nada, razón por la cual, se determinó acumular anualmente los excedentes trimestrales.

Los VRRs son derechos contingentes trimestrales que vencen en el año 2019 y dado el papel tan importante que juega un activo como el petróleo actualmente, resulta interesante estimar el monto de sus posibles pagos. Cabe mencionar que algunas entidades como Bearn Sterns y JP Morgan dieron en su momento una estimación para los pagos más cercanos, estimando un rendimiento adicional de entre 5/8 y 7/8 puntos porcentuales para un bono a la par y de entre 1 1/8 y 1 3/8 para los bonos a descuento, sin incluir el pago trimestral contingente. Realizar una estimación adecuada de todos los pagos, requiere del planteamiento de un modelo teórico suficientemente sustentado para dar una valuación confiable de los VRRs.

Como ya se mencionó en la descripción del pago de los VRRs, estos instrumentos pueden entenderse como una opción de compra sobre el precio promedio del petróleo. Sin embargo será necesario realizar un análisis cuidadoso de las variables involucradas para poder utilizar alguna de las técnicas de valoración de derivados, basado en resultados de la teoría económica y estadística.

2

VALUACIÓN DE INSTRUMENTOS FINANCIEROS DERIVADOS

DESCRIPCIÓN

En la sección 2.1 se definen los precios forward y los precios futuros, y se establece una clasificación de acuerdo al tipo de activo subyacente, definiendo los conceptos del rendimiento de conveniencia y costo de mantenimiento.

En la sección 2.2 se describen a las Opciones financieras, su clasificación y su comportamiento dependiendo del activo que tengan como subyacente. Se exponen las variables que determinan su valor y sus formulas de valuación bajo el modelo de Black & Scholes explicando como se pueden ir adecuado los modelos de acuerdo al tipo de subyacente. Finalmente, se expone una clasificación de las opciones en simples (“plain vanilla”) y en exóticas.

2.1 MERCADO DE FUTUROS Y FORWARDS

A continuación, se analiza la relación y la diferencia entre un contrato a futuro y un contrato forward[1], se estudiarán algunos resultados clave para determinar los precios forward y se hará una importante distinción entre los activos que son utilizados únicamente para la inversión financiera por un número dado de

[1] Una traducción común es “contrato a plazo”, pero por ser un término poco usado en la literatura financiera, se referiría a este por su nombre en inglés.

inversionistas y los activos que son utilizados casi exclusivamente para el consumo. Se mencionará cómo la posibilidad de arbitraje permite que los precios forward y los futuros para activos financieros o de inversión[2] sean determinados en términos del precio forward y otras variables observables, lo cual no es posible para los precios forward y futuros en contratos sobre activos de consumo[3].

Un contrato futuro o forward es un acuerdo de comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio determinado, sin embargo, existen diferencias importantes entre ambos tipos de contratos, los contratos futuros se negocian en un mercado organizado y los términos del contrato están estandarizados por una Bolsa a diferencia de los contratos forward, que son acuerdos privados entre dos entidades financieras o entre una entidad financiera y una de sus empresas clientes, normalmente los contratos forward especifican una simple fecha de entrega, mientras que en los contratos de futuros hay un rango de posibles fechas de entrega. Los contratos forward no son ajustados al mercado diariamente como los contratos futuros, en los cuales se tiene una cuenta de garantía que es ajustada para reflejar las ganancias o pérdidas del inversionista.

2.1.1 DETERMINACIÓN DE PRECIOS FORWARDS Y FUTUROS

Primeramente, se definirán las variables y la notación que se utilizan en la valuación de un contrato forward ya que resulta ser mas fácil de analizar que un contrato futuro, dado que en el primero no existen liquidaciones diarias, es solo un único pago al vencimiento, posteriormente en 2.1.3 cuando se analicen los contratos de futuros, se probará que cuando el tipo de interés libre de riesgo es constante e igual para todos los vencimientos en el futuro, entonces el precio forward de un contrato con cierta fecha de entrega es igual al precio de un contrato futuro con la misma fecha de entrega y bajo este supuesto los resultados obtenidos para los precios forward son validos también para los contratos futuros.

En adelante se supondrán las siguientes hipótesis:

1.- Que no existen costos de transacción para los participantes.

2.- Que los beneficios o pérdidas netas de cualquier negociación están sujetos a la misma tasa.

3.- Que los participantes en el mercado pueden pedir prestado dinero al mismo tipo de interés libre de riesgo.

4.- Que los participantes en el mercado aprovechan las oportunidades de

[2] El término en inglés es “Investment assets”
[3] El término en inglés es “Consumption assets”

arbitraje[4] a medida que se presentan.

5.- Que el premio que se debe pagar al prestador de valores, al realizar ventas en corto es cero (o que al menos es tal, que el supuesto 4 se mantiene)

Cabe mencionar que no requerimos que estas hipótesis sean necesarias para todos los participantes, sino que al menos sean ciertas para algunos de ellos. La hipótesis número 4, la cual se da en la realidad, significa que los participantes están dispuestos a conseguir ventaja de las oportunidades de arbitraje y en consecuencia, estas desaparecerán casi tan pronto como se presenten, es decir, lo que se está suponiendo es que no hay oportunidad de arbitraje. A continuación se presenta la notación a utilizar de aquí en adelante:

T : Tiempo hasta la fecha de entrega del contrato, dado en años.

S_t : Precio del activo subyacente en el contrato al tiempo t, $0 < t \leq T$, para $t = 0$ se pondrá simplemente S y es conocido como precio de contado[5].

K : Es el precio de entrega en el contrato forward.

r : Es la tasa de interés libre de riesgo anual hoy, con capitalización compuesta continua para una inversión que vence en T.

F_t : Es el precio forward, al tiempo t, $0 < t \leq T$, y para $t = 0$ se escribirá simplemente F.

f : Es el valor del contrato forward largo[6] hoy.

Nótese que el precio forward F , es el precio de entrega que habría hecho que el contrato forward f , tuviese valor cero, cuando un contrato es iniciado, el precio de entrega es exactamente igual al precio forward de modo que $K = F$ y $f = 0$ y con el paso del tiempo F cambia.

2.1.2 PRECIO FORWARD SOBRE ACTIVOS DE INVERSIÓN

Un activo de inversión o financiero es aquel que se encuentra en poder de un número determinado de inversionistas y tienen la propiedad que bajo la hipótesis de arbitraje los precios forward y de los futuros son determinados exactamente en términos de los precios de contado y otras variables observables. Estos pueden clasificarse en tres tipos: uno puede ser un activo que no paga

[4] El arbitraje es una estrategia que combina la compra de un valor negociable que se considera subvaluado y la venta de otro considerado sobrevaluado vinculados a dos activos subyacentes relacionados, esperando obtener un beneficio libre de riesgo sin que medie una inversión.
[5] El término en inglés es “spot prices”.
[6] Se dice que los compradores tienen “posiciones largas” y los vendedores “posiciones cortas”.

ningún tipo de renta y que solo sufre cambios en su valor en cada periodo de tiempo, el otro es un activo que además de esto pague rentas conocidas previamente y un tercero es aquel que pague una cierta tasa de rendimiento previamente conocida; ejemplos de estos tres tipos de activos pueden ser respectivamente: acciones que no paguen dividendos[7], bonos con pagos de cupón e índices sobre acciones.

Para justificar la construcción de la formula para calcular el precio forward de un activo de inversión que no paga ningún tipo de renta, supóngase que se tiene un activo que no proporciona al poseedor ninguna renta (por ejemplo, una acción que no pagará dividendos en al menos T años con un precio de contado S), que la tasa de interés libre de riesgo en el mercado es r con composición anual y que un inversionista adopta la siguiente estrategia:

1.- Comprar una unidad del activo
2.- Firmar un contrato forward para su venta, a entregar en T años

Como al momento en que se celebra el contrato forward este tiene valor cero, entonces el costo inicial de la estrategia es S. Al estar corto en el forward, el precio de entrega es igual al precio forward (es decir $K = F$); por otro lado, como el activo no proporciona rentas, simplemente se está cambiando el valor de contado del activo S por el valor que tendría al tipo de interés libre de riesgo transcurrido el periodo T, que por definición es el precio forward F, es decir:

$$F = Se^{rT} \qquad (2.1)$$

Para demostrarlo, primero supóngase que el precio forward es mas alto es decir $F > Se^{rT}$, entonces se podría pedir prestada la cantidad de S unidades monetarias al tipo de interés libre de riesgo r, comprar la acción y tomar una posición corta en el contrato forward para vender la acción al cabo de los T años, con esto se recibe al final la cantidad F y para pagar el préstamo se necesitará la cantidad Se^{rT}, con lo cual se tendría un beneficio de $F - Se^{rT}$ unidades monetarias. La existencia de este arbitraje hace que se rechace que el precio forward sea mas alto. Análogamente, si se supusiera que $F < Se^{rT}$, implicaría la opción de vender en corto[8] un activo, invirtiendo los ingresos de la venta a la tasa r durante los T años y tomar una posición larga en un contrato forward, los ingresos de la venta ascenderán a Se^{rT} al cabo de los T años y obtiene un beneficio de $Se^{rT} - F$ unidades monetarias y la presencia de este arbitraje hace que se rechace que el precio forward es menor.

[7] A pesar de que este tipo de instrumentos no se den mucho en la práctica, son ejemplos de utilidad en el desarrollo de las ideas aquí tratadas.
[8] Vender en corto (“short selling”), significa vender activos que no se tienen en propiedad, pidiéndolos prestados a otro inversionista del mercado, los cuales serán devueltos después de un tiempo determinado más un premio pagadero al prestador de los valores.

Ahora considérese un contrato forward para el mismo activo financiero pero bajo el efecto de rentas conocidas, el cual es definido como sigue:

I : Es el valor presente de las rentas conocidas para un activo de inversión.

Y considérese que un inversionista adopta la estrategia de:

1.- Comprar una unidad del activo
2.- Firmar un contrato forward para su venta, a entregar en T años.

Donde dicho contrato tendrá fecha de entrega en T años, con un precio de contado S para el activo y con r la tasa de rendimiento libre de riesgo. El contrato forward tiene valor cero al momento en que se firma, con lo cual el costo inicial de la estrategia es el precio del título S. La estrategia proporciona al inversionista una renta con valor actual de I mas el valor actual del precio forward F. De este modo, si se iguala el costo inicial con el valor actual de los flujos a recibir al final de los T años, se obtiene que:

$$S = I + Fe^{-rT}$$

Lo que implica:

$$F = (S - I)e^{rT} \tag{2.2}$$

La prueba se obtiene de manera análoga a lo hecho en un activo que no paga rentas, solo con la salvedad de considerar la tasa libre riesgo que aplique para cada periodo de pago de rentas del activo y así comprobar que de ser mayor o menor el precio forward, implicaría que existe una oportunidad de arbitraje, lo cual, como ya se dijo no se presenta.

Las divisas y los índices sobre acciones son ejemplo de activos que proporcionan tasa de dividendo conocidas, una tasa de dividendo conocida significa que el ingreso, cuando se expresa como el porcentaje del precio del valor, es conocido previamente. Así entonces, se define la tasa de dividendo como sigue:

q : Es la tasa de dividendo previamente conocida y con capitalización compuesta continua anual para un activo de inversión.

Esto significa que el ingreso que proporciona el activo, se expresa como un porcentaje de su precio y que para conocer el pago anual basta con multiplicar la tasa q por el valor que tenga el activo. Aunque en la práctica los dividendos no se paguen continuamente, en muchas situaciones suponer una tasa de dividendo continua es una buena aproximación a la realidad.

Considérese un contrato forward para un activo financiero que paga una tasa de rendimiento conocida q, con un valor actual del activo de S, con tasa libre de riesgo r, fecha de entrega dentro de T años y que un inversionista adopta la siguiente estrategia:

1.- Comprar e^{-qT} unidades[9] del activo, siendo los ingresos procedentes del valor reinvertidos en el valor.

2.- Firmar un contrato forward para su venta, a entregar en T años.

El valor de la cartera crece a una tasa q por lo que $e^{-qT} * e^{qT}$, lo cual es exactamente una unidad del activo la que se tendrá en posición al cabo de T años y bajo los términos del contrato forward, el valor se vende en F al momento T. Por tanto esta estrategia conlleva a la salida inicial de dinero Se^{-qT} y a la salida final de F; por lo tanto, igualando los valores presentes de la entrada final y la salida inicial de dinero, se tiene:

$$Se^{-qT} = Fe^{-rT}$$

Lo que implica:

$$F = Se^{(r-q)T} \qquad (2.3)$$

Si $F < Se^{(r-q)T}$, un arbitrajista[10] puede tomar una posición larga en un contrato forward y vender en corto el activo para cerrar con beneficio sin riesgo. Si $F > Se^{(r-q)T}$, el arbitrajista puede comprar el activo y quedarse corto en un contrato forward y de igual forma obtener un beneficio sin riesgo.

Si la rentabilidad por dividendo varía durante la vida del contrato forward y es una función conocida del tiempo, puede probarse que la ecuación (2.3) sigue siendo correcta tomando q igual a la media de la tasa de rendimiento por dividendo durante la vida del contrato forward.

[9] A pesar de que este supuesto es irreal, ya que supone que el activo es divisible, se asume que siempre es posible multiplicar por potencias de 10 y el argumento básico continuará.
[10] Persona que se dedica a operaciones de arbitraje.

2.1.3 PRECIO FUTURO SOBRE ACTIVOS DE INVERSIÓN

A continuación, se demostrará que bajo el argumento de arbitraje cuando el tipo de interés libre de riesgo es constante e igual para todos los vencimientos, el precio forward de un contrato con cierta fecha de entrega es igual al precio del futuro para un contrato con la misma fecha de entrega, e incluso esta prueba puede extenderse para cubrir situaciones donde el tipo de interés es una función conocida del tiempo.

Supóngase un contrato de futuros con duración de T días y que F_t representa el precio del futuro al final del día t, con $0 < t < T$. Se define δ como el interés libre de riesgo diario supuesto constante y considérese la siguiente estrategia[11].

1.- Tomar una posición larga en futuros de e^{δ} al final del día cero, es decir al inicio del contrato.

2.- Incrementar sucesivamente la posición larga de la forma $e^{t\delta}$ al final del día t, para $0 < t < T$.

Al principio del día t, el inversionista tiene una posición de $e^{t\delta}$. El beneficio (pérdida) de la posición del día t es:

$$(F_t - F_{t-1})e^{t\delta}$$

Considérese que se capitaliza al interés libre de riesgo hasta el final del día T, de está manera su valor al final del día T, es:

$$(F_t - F_{t-1})e^{t\delta}e^{(T-t)\delta} = (F_t - F_{t-1})e^{T\delta}$$

El valor al final del día T de toda la estrategia de inversión es, por lo tanto:

$$\sum_{t=1}^{T} (F_t - F_{t-1})e^{T\delta}$$

Esto es:

$$[(F_T - F_{T-1}) + (F_{T-1} - F_{T-2}) + ... + (F_1 - F_0)]e^{T\delta} = (F_T - F_0)e^{T\delta}$$

[11] Esta estrategia fue propuesta por J. C. Cox, J. E. Ingersoll y S. A. Ross, “The relationship between forward prices and futures prices”, Journal of Financial Economics, 9 (Diciembre 1981), pp. 321-46.

Como F_T es igual al precio forward al tiempo T de un activo que vence en T, su valor es igual al precio final del activo, es decir S_T; y recordando que el valor F_0 se escribe solamente F, el valor final de la estrategia de inversión puede expresarse como:

$$(S_T - F)e^{T\delta} \qquad (2.4)$$

Una inversión de F en una obligación libre de riesgo combinada con la estrategia antes descrita producirá al momento T, una cantidad de:

$$Fe^{T\delta} + (S_T - F)e^{T\delta} = S_T e^{T\delta}$$

No es necesaria ninguna inversión en las posiciones largas de futuros mencionadas y con esto se sigue que una cantidad F, puede invertirse para dar una cantidad $S_T e^{T\delta}$, en el momento T.

Supónganse ahora que el precio forward al final del día cero es G. Invirtiendo la cantidad G en una obligación libre de riesgo y tomando una posición larga en cada plazo de $e^{T\delta}$ contratos forward, una cantidad $S_T e^{T\delta}$ también será garantizada en el momento T. De esta manera, hay 2 estrategias de inversión una con desembolso inicial F y otra con desembolso inicial G, ambas con rendimiento $S_T e^{T\delta}$ en el momento T. A ello se sigue que en ausencia de oportunidad de arbitraje $F = G$.

Es decir, los precios forward y los del futuro son idénticos, nótese que en esta demostración no se ha hecho el supuesto del periodo de tiempo de un día. El precio del futuro basado en un contrato con liquidaciones semanales es también igual al precio forward cuando se hacen las hipótesis correspondientes.

Cuando los tipos de interés varían de forma impredecible (como sucede en el mundo real), los precios a plazo y de los futuros teóricamente ya no serán iguales. Este caso puede ser entendido de manera natural si por ejemplo, se considera la hipótesis de que el precio del activo subyacente S está fuertemente correlacionado de forma positiva con los tipos de interés; así, de esta manera cuando S aumenta, un inversionista que tiene una posición larga en futuros obtiene inmediatamente beneficios debido al procedimiento de las liquidaciones diarias y este beneficio tenderá a ser invertido a un tipo de interés más alto que la media. De forma similar, cuando S disminuye, el inversionista sufrirá una perdida inmediata y estas tenderán a ser invertidas a un tipo de interés más bajo de la media. Sin embargo, un inversionista que tenga un contrato forward en vez de un futuro no se verá afectado por los movimientos de los tipos de interés.

De esto se sigue que si S está correlacionado fuertemente de forma positiva con los tipos de interés, los precios de los futuros tenderán a ser más altos que los precios forward. Cuando S esté correlacionado fuertemente de manera negativa con los tipos de interés, un argumento análogo demuestra que los precios forward tenderán a ser mas altos que los precios futuros.

Las diferencias teóricas entre los precios forward y los de los futuros, son en la mayoría de las circunstancias lo suficientemente pequeñas como para poder ignorarlas, excepto para los futuros y forwards de tasas (sobre todo en el largo plazo en donde $i_{j,k} < i_{j+1,k+1}$), se pueden presentar diferencias importantes por temas de convexidad. Además en la práctica existen muchos factores no reflejados en los modelos teóricos que pueden hacer que los precios forward y de los futuros sean diferentes, tales factores pueden ser: impuestos, costos de transacción, manejo de garantías, facilidad de negociación, etc. A pesar de todos estos puntos es razonable para la mayoría de los propósitos suponer que los precios forward y los futuros son iguales y de aquí en adelante será la hipótesis que se mantendrá y el símbolo F_t, será utilizado para representar tanto los precios forward como los precios de los futuros al tiempo t.

A continuación se hablará de un ejemplo de futuro que se da en la práctica y su símil con el forward correspondiente y por tanto se hará referencia a su respectiva formula para valuarse.

Por ejemplo, un índice sobre acciones es aquel que sigue los cambios en el valor de una cartera hipotética de acciones, donde las acciones se encuentran ponderadas por la proporción de la cartera invertida en ciertas acciones y las ponderaciones pueden ser constantes o variables después de algún momento a lo largo del tiempo. Los aumentos porcentuales en el valor del índice durante un intervalo de tiempo son definidos normalmente como igual al porcentaje en que se incrementa el valor total de las acciones incluidas en la cartera. Los contratos futuros sobre índices se liquidan por diferencias, es decir, no se entrega el activo subyacente, todos los contratos están ajustados al mercado al último día de operaciones y las posiciones están obligadas a cerrarse sin entrega.

Un índice sobre acciones puede ser considerado como el precio de un activo que paga dividendos conocidos. El activo es la cartera de acciones subyacentes al índice y los dividendos distribuidos por el título son los dividendos que habría recibido el propietario de esa cartera. Para una buena aproximación puede considerarse que las acciones subyacentes al índice proporcionan una rentabilidad continua por dividendos, si q es la tasa de rendimiento por dividendos la ecuación (2.3) proporciona el precio del futuro.

2.1.4 PRECIO FORWARD Y FUTURO DE ACTIVOS DE CONSUMO

Ahora se hablará acerca de los contratos futuros sobre productos o mercancías[12], que a diferencia de los activos hasta ahora mencionados estos se

[12] En inglés "commodities"

poseen principalmente para su consumo. Se pueden utilizar argumentos de arbitraje para tratar de obtener los precios exactos de los futuros en el caso de inversiones en mercancías, sin embargo, ocurre que solo pueden servir para dar un límite superior al precio del futuro en el caso de productos de consumo.

Se sabe que existe un significativo número de inversionistas que poseen oro y plata únicamente como inversión. Si los costos de almacenamiento son cero, pueden considerarse análogos a los activos de inversión que no proporcionan rentas. Entonces, utilizando la notación introducida, S el precio de contado actual del oro, r la tasa de interés libre de riesgo, T el plazo del contrato y F el precio del futuro al tiempo cero, éste estará dado como se muestra en la ecuación (2.1).

$$F = Se^{rT} \tag{2.5}$$

Si por otro lado se consideran costos de almacenamiento, pueden darse dos casos: El primero, donde los costos de almacenamiento se expresen como un flujo de efectivo previamente conocido y el segundo, donde los costos de almacenamiento son en todo momento proporcionales al costo del producto.

Para el primer caso se define a U como el valor actual de todos los costos de almacenamiento previstos durante la vida del contrato, entonces de este modo podría considerarse este como un activo que paga rentas negativas, y por tanto de la ecuación (2.2) se deduce que su precio futuro o forward esta dado por:

$$F = (S+U)e^{rT} \tag{2.6}$$

Para el segundo caso en donde los costos de almacenamiento son en todo momento proporcionales al valor del activo, entonces, este se puede considerar como un rendimiento negativo por dividendo, en este caso de la ecuación (2.3) se deduce que el precio futuro o forward esta dado por:

$$F = Se^{(r+u)T} \tag{2.7}$$

Donde u, es el costo de almacenaje anual expresado en proporción al precio de contado.

Para las mercancías que no se posean con el propósito principal de inversión y que por el contrario sean activos de consumo, los argumentos de arbitraje no necesariamente conducen a las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), como se verá a continuación:

Supóngase que se tiene la siguiente desigualdad:

$$F > (S+U)e^{rT} \tag{2.8}$$

Para obtener ventaja de esta situación, un arbitrajista debería ejecutar la siguiente estrategia:

1.- Pedir prestada la cantidad $S + U$ al tipo de interés libre de riesgo para comprar una unidad del activo y pagar los costos de almacenamiento.

2.- Vender en corto un contrato futuro sobre una unidad del activo.

Bajo el argumento de considerar un contrato a futuro como un contrato forward, la estrategia llevará a un beneficio cierto de $F-(S+U)e^{rT}$ en el momento T. Sin embargo a medida que los arbitrajistas actúan, tenderán a aumentar S y a disminuir F, hasta que la desigualdad (2.8) deje de ser cierta.

Ahora supóngase que:

$$F<(S+U)e^{rT} \qquad (2.9)$$

Se debería intentar sacar ventaja utilizando la estrategia análoga, sin embargo, esto implicaría vender el producto y que los costos de almacenamiento fuesen pagados a la persona con la posición corta, cosa que no es normalmente posible. Para productos o mercancías que no se poseen como inversión, sino que las personas o compañías que tienen el activo en existencia lo hacen debido a su valor de consumo, son renuentes a vender el producto y comprar contratos futuros, dado que los contratos futuros no pueden consumirse, y por tanto no hay nada que haga contradecir la desigualdad (2.9) y dado que la desigualdad (2.8) no podrá sostenerse, todo lo que se puede decir acerca del activo de consumo es:

$$F\leq(S+U)e^{rT} \qquad (2.10)$$

Razonando de manera análoga para activos con costos de almacenamiento que se expresan como proporción u del precio de contado, el resultado equivalente es:

$$F\leq Se^{(r+u)T} \qquad (2.11)$$

2.1.4.1 RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA

Cuando se presentan las desigualdades (2.10) y (2.11) los usuarios del producto deben creer que hay beneficios en la posesión física del producto, beneficios que no se obtienen siendo el propietario de un contrato futuro, estos beneficios pueden incluir la capacidad de solventar problemas temporales de suministros o la posibilidad de mantener un proceso de producción en marcha. Los beneficios obtenidos por este concepto son llamados rendimientos de conveniencia[13] del producto. Si los costos de almacenamiento son conocidos y tienen un valor actual U, el rendimiento de conveniencia δ se define como el rendimiento de capitalización continua que hace que se de la igualdad en (2.10) es decir:

$$Fe^{\delta T} = (S+U)e^{rT}$$

Entonces se tendría que:

$$F = (S+U)e^{(r-\delta)T} \qquad (2.12)$$

Si los costos de almacenamiento por unidad son una proporción constante u del precio de contado, el rendimiento de conveniencia δ se define como:

$$Fe^{\delta T} = Se^{(r+u)T}$$

Es decir:

$$F = Se^{(r+u-\delta)T} \qquad (2.13)$$

El rendimiento de conveniencia mide hasta qué punto el precio del futuro o forward es menor al lado derecho de las expresiones (2.10) y (2.11). Para activos de inversión el rendimiento de conveniencia debe ser cero, de otro modo existiría oportunidad de arbitraje. El rendimiento de conveniencia refleja las expectativas del mercado concernientes a la disponibilidad futura del producto. Una mayor probabilidad de que aparezcan problemas de abastecimiento durante la vida del contrato de futuros generará un mayor rendimiento de conveniencia. Si los usuarios del producto tienen existencias muy grandes, habrá una probabilidad pequeña de desabastecimiento en un futuro cercano y los rendimientos de conveniencia tenderán a ser bajos.

2.1.4.2 COSTO DE MANTENIMIENTO

La relación entre los precios de los futuros y los precios de contado puede resumirse en términos de lo que se conoce como costo de mantenimiento[14], este mide el costo de almacenamiento más el interés que se paga para financiar el

[13] En inglés “convenience yield”
[14] En inglés “cost of carry”

activo, es decir, $(r+u)$ menos las rentas generadas por el activo q, para una acción que no paga dividendos, el costo de mantenimiento es r, dado que no hay costo de almacenamiento y su propiedad no genera renta alguna, para un índice sobre acciones, es $(r-q)$ si el ingreso es una tasa q sobre el activo, para un producto con costo de almacenamiento con una proporción u del precio, es $(r+u)$ y así se pueden deducir los posibles casos.

Si se define el costo de mantenimiento como c para un activo de inversión, el precio del futuro es:

$$F = Se^{cT} \tag{2.14}$$

Para un activo de consumo es:

$$F = Se^{(c-\delta)T} \tag{2.15}$$

Donde δ es el rendimiento de conveniencia.

En lo que se refiere a la entrega del activo subyacente, en un contrato forward o futuro, normalmente puede especificarse la entrega o se puede dar a escoger a la parte de la posición corta la entrega en cualquier momento dentro de cierto periodo. Esto genera una complicación al determinar los precios de los futuros, a pesar de que la mayoría de los contratos de futuros se liquidan antes del vencimiento, es importante conocer cuando habría tenido lugar la entrega para calcular el precio teórico del futuro.

Si el precio del futuro es una función creciente del tiempo hasta el vencimiento, se puede observar que en la ecuación (2.15) los beneficios de mantener el activo (incluyendo el rendimiento de conveniencia y los costos netos de almacenamiento) son menores que el interés libre de riesgo, entonces normalmente es óptimo para la parte de la posición corta realizar la entrega lo antes posible. Esto es así porque el interés ganado sobre el dinero pesa más que los beneficios por conservar el activo un tiempo adicional, como regla general, el precio del futuro en estas circunstancias debería por lo tanto, calcularse suponiendo que la entrega va a tener lugar al principio del periodo de entrega, si por el contrario el precio del futuro es una función decreciente del tiempo, ocurrirá que los beneficios por conservar el activo son mayores que el interés libre de riesgo. En este caso normalmente lo óptimo para la parte de la posición corta es realizar la entrega lo más tarde posible y los precios futuros deberían, como regla general, calcularse considerando que la entrega tendrá lugar al final de periodo.

2.1.5 VALUACIÓN DE CONTRATOS FORWARD

El valor de un contrato forward en el momento en que se firma por primera vez es cero, en una fase posterior puede resultar un valor negativo o positivo (Minusvalía o Plusvalía). El resultado general aplicable a todos los contratos forward será el que da el valor de un contrato de compra forward[15] f en términos del precio de entrega originalmente negociado K y el precio forward al tiempo de valuación F_t. La idea natural para la construcción de la expresión que nos permita evaluar para todo $0 < t \leq T$ el valor del contrato, ya sea para un activo de inversión o de consumo, se plantea a partir de comparar un contrato forward con precio de entrega F y otro idéntico que tenga precio de entrega K. La diferencia entre los dos sólo esta en la cantidad que se pagará por el activo subyacente en el momento T, y por tanto, el desembolso sería igual a la diferencia de $F_t - K$ en el momento t, en donde el valor de K, se queda fijo y solo se calcula el precio forward al tiempo t, lo que se traduce en $(F_t - K)e^{-rT}$, al día de hoy. Así el contrato con precio de entrega F, es menor o mayor al contrato con precio de entrega K en una cantidad de $(F_t - K)e^{-rT}$, de aquí se puede ver que el valor del contrato, cuando el precio de entrega es F es igual a cero, a ello se sigue que cuando el valor de entrega es K, el valor del contrato se puede calcular como sigue:

$$f = (F_t - K)e^{-rT} \qquad (2.4a)$$

Nótese que con esta expresión y las definidas para calcular el precio forward para los tres tipos de activos de inversión vistos anteriormente, se pueden encontrar las expresiones para valuar el contrato forward del activo que se trate y es válida aún para las expresiones aplicables en activos de consumo.

2.2 MERCADO DE OPCIONES

Las opciones son, en su fundamento, diferentes de los contratos forward y de futuros. Una opción otorga a su propietario el derecho de hacer algo, sin estar obligado a ejercer ese derecho y por el contrario, en un contrato forward o futuro, las dos partes se han comprometido a hacer algo. Mientras que en un contrato forward o de futuros no se tiene costo alguno (excepto por los requisitos de las garantías en algunos casos), el pactar una opción requiere el cobre de una comisión o prima.

[15] De aquí en adelante se hará el análisis para la valuación de contratos forward de compra, y la aplicable para contratos forward de venta se puede obtener de manera análoga, pero con la salvedad de tomar los valores de las variables con signos contrarios.

2.2.1 DESCRIPCION DE LAS OPCIONES

Existen dos tipos básicos de opciones, la opción de compra “call” y la opción de venta “put”[16] y estas pueden ser de tipo europeo o americano. A continuación se mencionan algunas de las definiciones que serán de utilidad de aquí en adelante.

Opción call: Es un acuerdo en virtud del cual, se le da a la parte compradora de la opción el derecho de comprar un activo a un precio determinado en una fecha establecida a cambio de pagar una cierta cantidad monetaria.

Opción put: Es un acuerdo en virtud del cual, se le da a la parte compradora de la opción el derecho de vender un activo a un precio determinado en una fecha establecida a cambio de pagar una cierta cantidad monetaria.

Prima: Es la cantidad monetaria que la parte que actúa como comprador entrega al vendedor en la fecha en que se concertó la operación de opción, por el derecho de ejercicio que esta conlleva.

Precio de ejercicio[17]: Es el precio contractual al cual se puede ejercer el derecho convenido en la opción.

Fecha de ejercicio[18]: Se refiere al día (los días) en que (en los cuales) el comprador de la opción puede ejercer el derecho convenido.

Opción europea: Es el tipo de opción que establece que el comprador solo podrá ejercer su derecho en la fecha de ejercicio.

Opción americana: Es el tipo de opción que establece que el comprador podrá ejercer su derecho en cualquier momento hasta la fecha de ejercicio incluida.

Pago final[19]: Es el resultado que refleja el beneficio (o perdida) neto(a) de la operación de opción en la fecha de vencimiento.

En cada contrato de opciones hay dos partes, en una parte esta el inversionista que toma una posición larga (es decir, ha comprado la opción) y por la otra parte esta el emisor que ha tomado una posición corta (es decir ha vendido o emitido la opción). De acuerdo con esto existen cuatro tipos de posiciones en opciones:

1.- Posición larga en una opción de compra.

[16] Las palabras “call” y “put” carecen de traducción literal al castellano.
[17] Este término en la lengua inglesa se conoce como: “exercise price”, “strike price” o “strike”
[18] En inglés se conoce como: “expiration date”, “exercise date”, “strike date” o “maturity”
[19] En inglés: “pay off”

2.- Posición larga en una opción de venta.
3.- Posición corta en una opción de compra.
4.- Posición corta en una opción de venta.

El emisor de una opción recibe una entrada en efectivo y a cambio adquiere pasivos potenciales para más adelante, evidentemente su beneficio o pérdida es la contraria a la del comprador de la opción. La notación a utilizar de aquí en adelante, al hablar de opciones, será la siguiente.

T : Tiempo hasta la fecha de vencimiento del contrato de opción, en años.

S_t : Precio del activo subyacente del contrato al tiempo t, $0 < t \leq T$, para $t = 0$ se escribirá simplemente S y se denomina precio de contado[20].

X : Es el precio de ejercicio de una opción.

r : La tasa de interés libre de riesgo anual hoy con capitalización compuesta continua para una inversión que vence en T.

c : Es el valor de la prima de una opción de compra europea.

p : Es el valor de la prima de una opción de venta europea.

P : Es el pago final de la opción.

Resulta muy útil caracterizar a las opciones europeas en términos de su pago final o el pago final del inversionista al vencimiento.

Sea X el precio de ejercicio, T el tiempo hasta la fecha de ejercicio, S_T el precio final del activo subyacente, sea c el valor de la prima a pagar por la opción de compra y sea P el pago final de la opción. De esta manera el pago final de una posición larga en una opción de compra europea está dado por:

$$P = Max(S_T - X, 0) \qquad (2.16)$$

Lo cual refleja el hecho de que la opción será ejercida si $S_T > X$ y no será ejercida si $S_T \leq X$. Si por otro lado se tiene p, el valor de la prima de una opción de venta entonces el pago final de una posición larga en una opción de venta europea es:

$$P = Max(X - S_T, 0) \qquad (2.17)$$

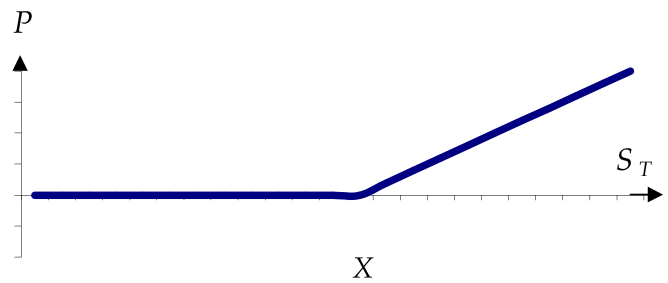
[20] El término en inglés es “spot prices”.

Los pagos finales de las posiciones cortas en una opción de compra y de venta se pueden obtener de las expresiones (2.16) y (2.17) tomando signo contrario en P.

En la siguiente grafica se puede observar el comportamiento del pago final P, de una opción de compra, el cual depende del valor que tome el activo al vencimiento S_T, considerando la expresión (2.16) como una función.

GRÁFICA 2.1

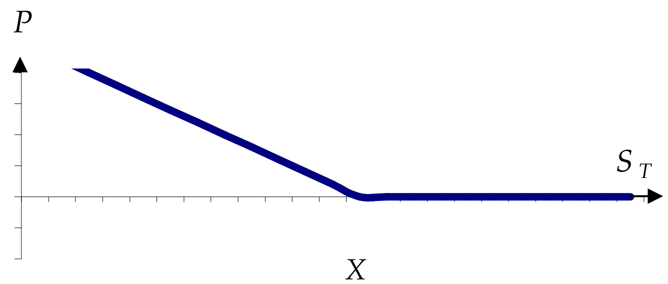
OPCIÓN DE COMPRA



De manera análoga, en la siguiente grafica se puede observar el comportamiento del pago final P, de una opción de venta, el cual depende del valor que tome el activo al vencimiento S_T, considerando la expresión (2.17) como una función.

GRÁFICA 2.2

OPCIÓN DE VENTA



En la actualidad existen opciones sobre acciones, opciones sobre divisas opciones sobre índices, opciones sobre tasas, opciones sobre futuros[21], opciones sobre swaps, etc.

Cuando el propietario de una opción de compra sobre futuros la ejerce, adquiere del emisor una posición larga en el contrato de futuros subyacente mas una cantidad en efectivo igual al exceso del precio futuro por encima del precio de ejercicio. Así mismo, cuando el propietario de una opción de venta la ejerce, adquiere del emisor una posición corta en el contrato de futuros subyacentes mas una cantidad en efectivo igual al exceso del precio de ejercicio por encima del precio del futuro. En ambos casos los contratos futuros tienen valor cero y puede cerrarse inmediatamente. Las opciones sobre futuros están disponibles sobre la mayoría de los activos para los cuales se negocian contratos futuros, siendo los más populares los contratos sobre maíz, petróleo, oro y otros.

A continuación se analizarán las características de las opciones sobre activos de inversión, en particular para aquellos activos financieros que no pagan ningún tipo de renta, para aquellos que paguen un dividendo previamente conocido y para los que paguen una tasa de rendimiento previamente conocida.

Las hipótesis a considerar son equivalentes a las hechas en la deducción de precios forward y futuros, y consiste en suponer que las condiciones del mercado cumplen con:

1.- Que no existen costos de transacción entre los participantes.
2.- Que los beneficios o pérdidas netas de cualquier negociación están sujetos a la misma tasa
3.- Que los participantes en el mercado pueden pedir prestado dinero al mismo tipo de interés libre de riesgo.
4.- Que los participantes en el mercado aprovechan las oportunidades de arbitraje a medida que se presentan.

2.2.2 LÍMITES PARA LAS OPCIONES Y LA PARIDAD PUT-CALL

Ahora se mostrará la relación que guardan las opciones de compra y venta así como los límites máximos y mínimos para un contrato de opción europeo sobre los distintos tipos de activos de inversión. Es importante señalar que si el precio de la opción está por encima del límite máximo o por debajo del límite mínimo, habrá oportunidades de arbitraje.

[21] En estas el activo subyacente es un contrato de futuros, el cual normalmente vence poco después de la expiración de la opción

2.2.2.1 EFECTO EN OPCIONES SOBRE ACTIVOS QUE NO PAGAN DIVIDENDOS

Dado que una opción de compra da a su propietario el derecho a comprar el activo a un cierto precio, no importa lo que suceda, la opción nunca puede tener más valor que el del activo mismo. De ahí que el precio del activo sea una cota superior del precio de la opción, esto es:

$$c \leq S \tag{2.18}$$

Si esta relación no es correcta un arbitrajista podría obtener un beneficio libre de riesgo comprando acciones y vendiendo la opción de compra.

Una opción de venta otorga a su propietario el derecho a vender un activo por X. No importa lo bajo que esté el precio del activo, la opción nunca puede tener un valor superior a X. De aquí que:

$$p \leq X \tag{2.19}$$

Para las opciones de venta (puts) europeas, las cuales dan a su comprador el derecho de vender el activo al precio X al tiempo T, no importa qué suceda, el valor final de la opción no puede tener menos valor que X. Incluso a valor presente.

$$p \leq Xe^{-rT} \tag{2.20}$$

Si esto no fuese cierto, un arbitrajista podría obtener un beneficio sin riesgo, emitiendo la opción e invirtiendo los ingresos de la venta al tipo de interés libre de riesgo.

Un límite mínimo para el precio de una opción europea de compra sobre un activo que no paga dividendos es:

$$Max(S - Xe^{-rT}, 0) \tag{2.21}$$

Para probar este hecho consideremos las dos carteras siguientes:

Cartera A: Una opción de compra europea mas una cantidad en efectivo igual a Xe^{-rT}.

Cartera B: Una unidad del activo subyacente.

En la cartera A, si el efectivo se invierte al tipo de interés libre de riesgo, ascenderá a X transcurrido los T años. Si $S_T > X$, la opción de compra se ejerce y la cartera A se valúa en S_T. Si $S_T < X$, la opción de compra vence a un valor menor y la cartera tiene un valor de X. De ahí que al momento T la cartera A tenga un valor dado por el $Max(S_T, X)$.

La cartera B tiene un valor de S_T en el momento T. De ahí que la cartera A siempre está tan valorada como B y a veces más, a ello se sigue que dada la ausencia de oportunidad de arbitraje esto también deber ser cierto en el presente, por lo tanto:

$$c + Xe^{-rT} > S$$

Es decir:

$$c > S - Xe^{-rT}$$

Dado que lo peor que puede pasar para quién adquirió la opción de compra es que esta expire sin valor alguno, su valor hoy debe ser positivo, por lo tanto se concluye que c, siempre es mayor que la cantidad expresada en (2.21).

Para una opción de venta europea para activos que no distribuyen dividendos el límite mínimo para el precio es:

$$Max(Xe^{-rT} - S, 0) \qquad (2.22)$$

Para comprobar esto, considérense las dos carteras siguientes:

Cartera C: Una opción de venta europea de precio de ejercicio X mas una unidad del activo subyacente.

Cartera D: Una cantidad de efectivo igual a Xe^{-rT}.

Al final del plazo T en la cartera C puede tenerse lo siguiente. Si $S_T < X$, la opción se ejercerá y la cartera tendrá un valor de X. Si $S_T > X$, la opción de venta vence con un valor menor y la cartera tiene un valor de S_T, de ahí que la cartera C tenga un valor de $Max(S_T, X)$.

La cartera D tendrá un valor de X al momento T después de invertirse a la tasa de interés libre de riesgo. De ahí que la cartera C siempre tiene tanto valor como la cartera D y a veces más y dada la ausencia de oportunidad de arbitraje, esto debe seguir cumpliéndose en el presente, por tanto:

$$p + S > Xe^{-rT}$$

Es decir:

$$p > Xe^{-rT} - S$$

A continuación se obtendrá una importante relación entre los valores de una opción de compra y una de venta. Considérense las carteras A y C, definidas anteriormente.

Ambas tienen un valor de $Max(S_T, X)$, a la expiración de las opciones y al ser opciones europeas deben tener al día de hoy valores idénticos, esto significa:

$$c + Xe^{-rT} = p + S \qquad (2.23)$$

Esta relación se conoce como la paridad put-call o ecuación fundamental de las opciones europeas para activos de inversión que no distribuyen dividendos, la cual muestra cómo el valor de una opción de compra europea con cierto precio y cierta fecha de ejercicio puede deducirse a partir del valor de una opción europea de venta con el mismo precio y misma fecha de ejercicio y viceversa.

2.2.2.2 EFECTO EN OPCIONES SOBRE ACTIVOS QUE DISTRIBUYEN DIVIDENDOS

Los resultados obtenidos hasta ahora, servirán de base para deducir los resultados análogos para activos de inversión que distribuyen dividendos, en ellos se utiliza a D para denotar al valor actual de los dividendos durante la vida de la opción. Los resultados de las opciones sobre estos activos solo se enunciaran ya que las demostraciones son análogas a las ya mencionadas para activos que no distribuyen dividendos, con la salvedad de considerar al valor presente de los dividendos D de estos activos.

Las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) muestran el límite inferior para call, put y paridad put-call para opciones de sobre activos de inversión que distribuyen dividendos respectivamente.

$$Max(S - D - Xe^{-rT}, 0) \qquad (2.24)$$

$$Max(Xe^{-rT} + D - S, 0) \qquad (2.25)$$

$$c + D + Xe^{-rT} = p + S \qquad (2.26)$$

2.2.2.3 EFECTO EN OPCIONES SOBRE ACTIVOS QUE DISTRIBUYEN TASA DE DIVIDENDOS CONOCIDA

Como ya se mencionó las divisas y los índices sobre acciones, son ejemplo de activos que proporcionan tasa de dividendo conocida, lo cual significa que el ingreso se expresa como el porcentaje del precio del valor y este es conocido previamente. Así entonces, la tasa de dividendo a considerar se define como sigue:

q : Es la tasa de dividendo previamente conocida y con capitalización compuesta continua, para un activo de inversión.

Los resultados ya obtenidos para activos que no distribuyen dividendos también pueden extenderse para obtener los respectivos para opciones sobre activos de inversión que pagan una tasa conocida de dividendo, si se considera que el pago de la rentabilidad continua por dividendo al tipo q, causa que el crecimiento de la tasa en precio de las acciones sea menor que el que habría sido en una cantidad q. Si con una rentabilidad continua de dividendo de q el precio de las acciones sube de S hoy a S_T en el momento T, entonces en ausencia de dividendos crecería de S hoy a $S_T e^{qT}$ en el momento T. Alternativamente, en ausencia de dividendos habría crecido de Se^{-qT} hoy hasta S_T al momento T.

Este argumento muestra que se consigue la misma distribución de probabilidades para el precio de los activos en el momento T en cada uno de los dos casos siguientes:

1. Los activos que no pagan dividendos que empiezan en un precio S y que proporcionan una rentabilidad continua por dividendo al tipo q.

2. Los activos que no pagan dividendos que empiezan en un precio Se^{-qT} y que no proporcionan una rentabilidad por dividendos.

Lo que conduce a la siguiente regla: cuando se valora una opción europea que vence en T sobre activos de inversión que proporcionan una rentabilidad conocida por dividendos al tipo q, se reduce el precio actual de las acciones de S a Se^{-qT} y entonces se valúa la opción suponiendo que los activos no distribuyen dividendos.

Bajo esta regla a continuación se muestran las expresiones que dan los límites inferiores para opciones de compra, venta y la paridad put-call dadas por las expresiones (2.27), (2.28) y (2.29) respectivamente, cuya prueba se reduce al caso opciones sobre activos que no pagan dividendos.

$$Max(Se^{-qT} - Xe^{-rT}, 0) \tag{2.27}$$

$$Max(Xe^{-rT} - Se^{-qT}, 0) \tag{2.28}$$

$$c + Xe^{-rT} = p + Se^{-qT} \tag{2.29}$$

2.2.2.4 EFECTO EN OPCIONES SOBRE CONTRATOS FUTUROS

Las opciones consideradas hasta ahora pueden ser clasificadas como opciones de contado[22], esto porque cuando se ejerce la opción la venta o la compra del activo en cuestión se realiza inmediatamente. A continuación se hablará de las opciones sobre contratos futuros, también conocidas como opciones de futuros. En estos contratos, el ejercicio de la opción da a su propietario el derecho de comprar o vender el activo al precio acordado en una fecha futura.

Estableciendo de manera más precisa la definición de una opción de futuros, se dice que es aquel contrato que otorga el derecho pero no la obligación de negociar un contrato de futuros a cierto precio futuro en una fecha determinada. Así entonces, una opción de compra supone el derecho de tomar una posición larga en un contrato de futuros a cierto precio y una opción de venta sobre un contrato de futuros es el derecho de asumir una posición corta en un contrato de futuros a cierto precio.

Cabe precisar que una vez que se ha ejercido la opción, además de que el beneficiado recibe la diferencia entre el valor del futuro correspondiente y el precio de ejercicio recibe también una cantidad en efectivo para reflejar que el inversionista firma el contrato al precio X y se puede escoger entre cerrar la posición de futuros o mantenerla, aunque el mantenerla puede obligar a proporcionar alguna garantía además del pago en efectivo mencionado anteriormente, así el pago final de una posición larga en una opción europea de compra sobre un contrato de futuros estará dado por:

$$Max(F_T - X, 0) \tag{2.30}$$

Donde F_T, es el precio del futuro del activo en la fecha de vencimiento de la opción. Para el caso de las opciones de venta sobre contratos futuros, cuando el inversionista adopta una posición larga en la opción de venta, al elegir ejercer la opción toma una posición corta en los contratos futuros mas la cantidad de efectivo que resulte de la diferencia del precio de ejercicio menos el precio del futuro acordado y dicha cantidad se descuenta de la cuenta de garantía de la

[22] En inglés "spot options"

contraparte, así el pago final de una posición larga en una opción de venta europea sobre un contrato futuro esta dado por:

$$Max(X - F_T, 0) \qquad (2.31)$$

Ya desde hace algunos años los contratos de opciones sobre futuros más populares son sobre obligaciones del Tesoro (CBOT)[23], eurodólares (CME)[24] y sobre mercancías o activos de consumo como el maíz, soja, harina y petróleo crudo este ultimo en (NYMEX)[25].

Las principales razones por las cuales se elige negociar opciones sobre contratos futuros que opciones sobre el activo subyacente, son porque son mas líquidos y fáciles de negociar que el propio activo subyacente, además de que el precio del futuro se sabe de inmediato por el mercado de futuros, mientras que el precio de contado del activo subyacente puede no estar disponible, esto principalmente hablando de activos de consumo.

Otro punto importante de las opciones sobre contratos futuros, es que el ejercicio de la opción normalmente no supone la entrega del activo subyacente, ya que en la mayoría de las circunstancias el contrato de futuros subyacente se cierra antes de la entrega, es decir, las opciones sobre futuros son normalmente pagadas en efectivo, lo que atrae a muchos inversionistas.

La paridad put-call para opciones sobre futuros, esta dada por:

$$c + Xe^{-rT} = p + Fe^{-rT} \qquad (2.32)$$

Esto se puede demostrar a partir de considerar 2 carteras de inversión definidas de la siguiente manera.

Cartera E: Una opción de compra europea de precio de ejercicio X sobre contratos futuros mas una cantidad en efectivo igual a Xe^{-rT}.

Cartera G: Una opción de venta europea de precio de ejercicio X sobre contratos futuros mas una cantidad en efectivo igual a Fe^{-rT}.

En la cartera E el efectivo puede invertirse al tipo de interés libre de riesgo r y crecer hasta X al tiempo T. F_T es el precio futuro al vencimiento de la opción. Si $F_T > X$, la opción de compra de la cartera E se ejerce y queda valuada en F_T. Si $F_T \leq X$, la opción no se ejerce y la cartera E tiene un valor de X. Por tanto el

[23] Chicago Board of Trade
[24] Chicago Mercantile Exchange
[25] El New York Mercantile Exchange

valor de la cartera es E es igual al $Max(F_T, X)$. En la cartera G el efectivo es invertido al tipo de interés libre de riesgo hasta ascender hasta F al momento T. La opción de venta proporciona un pago de $Max(X - F_T, 0)$. El contrato de futuros proporciona un pago de $F_T - F$. Por lo que el valor de la cartera G en el momento T es por tanto:

$$F + (F_T - F) + max(X - F_T, 0) = max(F_T, X)$$

Ya que las dos carteras tienen el mismo valor en el momento T y no hay oportunidades de ejercer antes del vencimiento concluimos que en el presente deben tener el mismo valor. Así el valor presente de la cartera E corresponde al lado izquierdo de la ecuación (2.32) y el lado derecho de la misma corresponde al valor presente de la cartera G.

De la ecuación de paridad put-call se pueden obtener los límites de las opciones de venta y de compra sobre futuros, esto a partir de considerar el hecho de que si el precio de la opción de compra y venta, es mayor que cero se llega a que los límites inferiores de una opción de compra y venta sobre futuros esta dado por (2.33) y (2.34) respectivamente, como se muestra a continuación:

$$Max((F - X)e^{-rT}, 0) \qquad (2.33)$$

$$Max((X - F)e^{-rT}, 0) \qquad (2.34)$$

Las opciones hasta ahora descritas son llamadas también “vainilla” o “estandarizadas”[26]. Desde principios de los 80’s los bancos y otras instituciones financieras han diseñado opciones “no estandarizadas” para satisfacer las necesidades de sus clientes. Algunas opciones no estandarizadas son simplemente portafolios de 2 o mas opciones vainilla y otras son mucho mas complejas. Las opciones no estandarizadas son también llamadas “opciones exóticas”[27] y más adelante se mencionarán algunos ejemplos y la teoría para valuar un caso particular de ellas. A continuación, se mencionara la teoría para valuar la opciones estandarizadas a utilizar en el presente trabajo.

2.2.3 VALUACIÓN DE OPCIONES

Debido a que el valor de los VRRs depende del precio spot (de contado) del petróleo, el rendimiento de conveniencia, la volatilidad del precio de contado

[26] En inglés “plain vanilla” o “standard”

[27] En inglés “exotic options”

del petróleo, la tasa de interés libre de riesgo, el volumen de exportación petrolera, etc. La teoría que a continuación se expone, tiene como fin profundizar en la teoría utilizada en la valuación de opciones.

La teoría de valuación de opciones ha promovido el nacimiento de varios modelos, los cuales pueden ser clasificados en relación a la hipótesis que se haga del proceso que sigue el activo subyacente. De acuerdo con esto, los modelos de valuación de opciones pueden clasificarse en cuatro familias:

1. Los modelos simples.
2. Modelos de salto.
3. Los modelos de proporción de interés no-constante.
4. Los modelos de volatilidad no constante.

Existen modelos más recientes que intentan combinar las características de algunas de estas familias.

A continuación se analizará la valuación de las opciones sobre activos, aplicable tanto para activos de inversión como de consumo y las ideas básicas que sustentan teóricamente al modelo de Black & Sholes, el cual cae dentro de la familia de modelos simples de acuerdo a la clasificación antes mencionada.

El trabajo seminal de Fischer Black y Myron Scholes en 1973, realizó un estudio científico de gran importancia para la valuación de opciones sobre activos de inversión. Esto ha tenido una enorme influencia en la manera en la que los participantes del mercado financiero fijan precios y se cubren con opciones, los cuales adoptan de manera fehaciente (o indiscutible) las hipótesis sobre las cuales esta basado este modelo. En ese sentido, a continuación se explican las hipótesis del modelo para posteriormente establecer el impacto que tendrán en la valuación de los VRRs.

2.2.3.1 HIPÓTESIS DEL MODELO DE BLACK & SCHOLES

Las hipótesis hechas en el modelo de valuación de Black & Scholes, cuando propusieron su fórmula para valuar opciones sobre activos fueron las siguientes:

1. El comportamiento del precio del activo de inversión[28] corresponde al modelo lognormal, considerando que su media y su varianza (volatilidad) constantes.

2. No hay costos de transacción y todos los activos son perfectamente divisibles.

[28] Lo que se aplica también para activos de consumo como el petróleo, solo con la salvedad de considerar al rendimiento de conveniencia respectivo como se vera mas adelante.

3. No hay dividendos del activo durante la vida de la opción.

4. No hay oportunidades de arbitraje.

5. La negociación de valores es continua.

6. Los inversionistas pueden invertir o prestar al mismo tipo de interés libre de riesgo.

7. El tipo de interés libre de riesgo r, es constante.

Cabe mencionar que algunos de estos supuestos pueden ser suavizados, por ejemplo se puede utilizar una variación del modelo de Black & Scholes cuando r y σ son funciones del tiempo o ajustarlo para tomar en cuenta el pago de dividendos.

A continuación se hará un análisis de los supuestos hechos en el modelo, para posteriormente plantear las formulas de valuación.

El primer punto es elegir (o definir) la hipótesis sobre cómo evolucionan los precios de activo que sobre el cual se hace la opción a lo largo del tiempo, (al cual se le ha venido dando el trato de activo subyacente). Es decir, elegir cuál es la distribución de probabilidad para el precio de un activo de inversión dentro de un día, de una semana, de un año, etc.

El supuesto del modelo de Black & Scholes es que el precio de un activo de inversión, sigue lo que se llama un recorrido aleatorio[29]. Esto significa que los cambios proporcionales en el precio de las activos en un "corto" periodo de tiempo se distribuyen normalmente, lo que implica, por otro lado, que el precio del activo en cualquier momento futuro tiene una distribución Lognormal o dicho de otra forma sigue un proceso lognormal. Se dice que una variable aleatoria tiene una distribución lognormal cuando el logaritmo natural de la variable tiene una distribución normal y dicha distribución es adecuada para modelar la no negatividad en el precio de un activo.

Más adelante, en 3.1 se definirá el concepto de proceso estocástico y posteriormente en 3.1.4 se argumentará el supuesto de que los precios del activo siguen un proceso estocástico lognormal y se analizarán las características de la lognormalidad vista como distribución de probabilidades. Por el momento basta con mencionar los dos parámetros clave que describen el comportamiento de la distribución lognormal, y lo que representan en cuanto a los precios del activo, dichos parámetros son:

[29] En Inglés "Random walk"

μ: Rendimiento esperado del activo, también llamado rentabilidad esperada, representa la rentabilidad media anual obtenida por un inversionista en un corto periodo de tiempo.

σ: Volatilidad del precio del activo, representa la media de la incertidumbre sobre los movimientos futuros o cambios proporcionales en el precio del activo anualmente.

Una variable aleatoria con distribución lognormal tiene la propiedad de que su logaritmo natural está distribuido normalmente. Por lo tanto, si se considera a S_T: Precio del activo subyacente en el contrato al tiempo *T*, como se ha venido manejádo, implica que $\ln(S_T)$ se distribuye normal e incluso puede demostrarse que su media, $\mu_{\ln}$ y su desviación estándar, $\sigma_{\ln}$, están dadas por:

$$\mu_{\ln} = \ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$$

$$\sigma_{\ln} = \sigma\sqrt{T}$$

Donde *S* es precio actual del activo, μ la rentabilidad media anual y σ la volatilidad anual del precio del activo definido previamente. De esta manera se expresará este resultado como:

$$\ln S_T \sim \Phi[\ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}] \qquad (2.35)$$

Donde $\Phi[m,s]$, denota una distribución normal con media m y desviación estándar *s*. De aquí se obtiene que el valor medio o esperado de S_T, $E(S_T)$, el cual está dado por:

$$E(S_T) = Se^{\mu T} \qquad (2.36)$$

Lo que corresponde con la definición de μ. La varianza de S_T, $Var(S_T)$, viene dada por:

$$Var(S_T) = S^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \qquad (2.37)$$

Por otro lado se define a la rentabilidad compuesta continua en un tiempo *T*, como el logaritmo natural del cociente del precio del activo al tiempo *T* entre el precio de activo de contado o actual y se puede mostrar a partir de (2.35) que esta sigue la distribución que a continuación se muestra:

$$\ln \frac{S_T}{S} \sim \Phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}] \quad (2.38)$$

La expresión (2.38) nos muestra que la rentabilidad compuesta continúa para un periodo T del activo, para T dada en años.

Cabe establecer la diferencia que existe entre μ y la media de $\ln S_T/S$ para $T = 1$, ya que la primera representa, como ya se dijo , el interés medio anual del activo y de la expresión (2.38) cuando $T = 1$, se puede ver que interés medio anual compuesto continuo es $\mu - \sigma^2/2$, lo cual no corresponde con la definición de μ, lo que sucede es que la media de las tasas de interés obtenidas en diferentes años no necesariamente es la misma que el interés medio anual durante varios años con capitalización compuesta anual, lo que equivale a decir que la media aritmética es siempre mayor a la media geométrica si los números promediados no son todos iguales. Así entonces, las dos estimaciones que se tienen son las siguientes:

1. La tasa de interés esperada en un periodo de tiempo muy corto.

2. La tasa de interés esperada compuesta continua durante un periodo de tiempo largo.

Con este hecho se pretende establecer en qué casos el término de rentabilidad o tipo de interés esperado puede ser ambiguo y de aquí en adelante se establece que el que se usará es el de μ.

Otro hecho importante como se verá a continuación es que al plantear la fórmula de valuación de Black & Scholes la rentabilidad esperada es irrelevante, a pesar de que se pudiera pensar que cuando esta aumenta, el valor de la opción de compra aumente y el de la de venta disminuya. La razón clave se debe a que la opción no se valúa en términos absolutos, sino que se calcula su valor en términos del precio del activo subyacente y la probabilidad del movimiento futuro en este ya está incorporada en su precio y es por eso que no es necesario tomarla en cuenta cuando se valúa la opción. Esto da la pauta a considerar que la rentabilidad esperada sobre todos los valores es el tipo de interés libre de riesgo.

Como ya se mencionó, la volatilidad del precio del activo subyacente se supone constante y como se verá más adelante este es uno de los parámetros incluídos en la formula para valuar opciones de Black & Scholes. En la práctica la volatilidad del precio del activo no puede observarse directamente, lo que motiva a utilizar algunos de los métodos de estimación que existen, siendo los más comunes el de volatilidad por datos históricos y volatilidad implícita.

Como ya se mencionó, la volatilidad es la medida de la incertidumbre sobre los movimientos futuros del precio del activo en estudio, y cuando esta aumenta la probabilidad de que el precio aumente o disminuya mucho, aumenta. Para el caso de opciones, esto conlleva a que los aumentos en la volatilidad reflejan aumentos en las opciones de compra y venta.

Las hipótesis acerca de la causa de la volatilidad, difieren de acuerdo al contexto en que se manejen, por ejemplo si se supone que el mercado es eficiente, lo que significa que la información del precio anual del activo contiene toda la información disponible sobre el mismo, entonces la volatilidad del precio del activo viene causada solamente por la llegada al azar de información sobre la rentabilidad futura del precio del activo. Otra hipótesis podría ser la de considerar que la volatilidad es causada en gran medida por las operaciones de negociación. Dicho esto, lo que agrega es que la hipótesis a considerar depende del problema, campo de aplicación y de los datos ó información que se tenga disponible.

Continuando con el análisis del modelo, consideremos que se establece una cartera libre de riesgo con posición en opciones y en el propio activo subyacente, en ausencia de arbitraje, el rendimiento de la cartera es el tipo de interés libre de riesgo r. De este modo, en cualquier periodo corto de tiempo el precio de la opción de compra está correlacionada de manera positiva con el precio del activo, y el precio de la opción de venta esta correlacionado de manera negativa con el precio del subyacente. En ambos casos se puede establecer una cartera apropiada con el activo y la opción sobre el mismo en donde la pérdida o ganancia en el activo siempre se compensa con la opción.

Es importante mencionar que teóricamente la posición que se establece libre de riesgo solo es por un instante, sin embargo, es cierto que la rentabilidad de una cartera libre de riegos en cualquier período corto de tiempo debe ser el interés libre de riesgo, elemento clave en los argumentos de Black & Scholes y que genera las fórmulas de los precios.

2.2.3.2 DETERMINACION DE PRECIOS PARA OPCIONES EUROPEAS

Las fórmulas para valuar opciones sobre activos que no pagan dividendos son las siguientes:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \qquad (2.39)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \qquad (2.40)$$

Dónde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Aquí la función *N(x)* representa a la función de probabilidad acumulada para una variable normal estandarizada, es decir, es la probabilidad de que una variable con distribución $\Phi[0,1]$, sea menor que x y las demás variables son la ya definidas previamente y al tomar valores extremos para algunas de esta variables se puede ver como las fórmulas nos dan los límites mínimos para opciones definidos previamente.

Como ya se había mencionado las fórmulas de valuación no involucran a la rentabilidad esperada μ. Cabe mencionar que el argumento antes mencionado acerca de μ es lo que se conoce como la valoración neutral del riesgo, la cual establece que la valuación de activos como las opciones, puede valuarse bajo el supuesto de que las preferencias al riesgo por parte de los inversionistas no tiene efecto sobre el valor de la opción, lo que lleva a considerar $r = \mu$.

Las expresiones para valuar opciones sobre activos que pagan dividendos se pueden deducir siguiendo la regla que ya se ha venido manejando, lo que equivale definir a D como el valor actual de los pagos de rentas futuras descontados con la tasa de interés libre de riesgo en interés continuo, definido por D, de esta forma se descuenta a S el valor D y así las expresiones a usar de estos activos estarán dadas por:

$$c = (S - D)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \tag{2.41}$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - (S - D)N(-d_1) \tag{2.42}$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln((S - D)/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln((S - D)/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

De manera análoga, al definir a q como la tasa de con capitalización compuesta continua, las fórmulas para valuar opciones sobre activos que pagan una tasa de dividendo previamente conocida, se obtienen descontando el valor de S a la tasa de interés compuesta continua q, lo que da como resultado:

$$c = Se^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \qquad (2.43)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - Se^{-qT} N(-d_1) \qquad (2.44)$$

Por otro lado:

$$\ln \frac{Se^{-qT}}{X} = \ln \frac{S}{X} - qT$$

Se tiene que d_1 y d_2 están dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

En un artículo publicado por Fischer Black en 1976, se extendió el modelo Black & Scholes para cubrir opciones sobre contratos futuros, partiendo del supuesto de que el precio futuro tiene la misma propiedad lognormal que se supuso para activos que no pagan dividendos y así demostró que el precio de la opción de compra y venta sobre futuros se puede obtener de sustituir en las expresiones (2.43) y (2.44) el valor de S reemplazado por F y tomando $q = r$.

$$c = e^{-rT}[FN(d_1) - XN(d_2)] \qquad (2.45)$$

$$p = e^{-rT}[XN(-d_2) - FN(-d_1)] \qquad (2.46)$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Para estas expresiones σ es la volatilidad del precio futuro. En situaciones en las que el costo de mantenimiento y el rendimiento de conveniencia son funciones sólo del tiempo, puede demostrarse que la volatilidad del precio futuro es igual a la volatilidad del activo subyacente. Nótese que la fórmula no necesita de los vencimientos del contrato de opciones y del contrato de futuros sean iguales.

De acuerdo al razonamiento aquí presentado, se pueden establecer de manera análoga las fórmulas para valuar opciones sobre activos de consumo, considerando el tipo de activo de consumo que trate, y estos pueden ser activos de consumo que involucren un costo de mantenimiento que puede ser considerado como una renta negativa y definir así el valor presente continuo del mismo, o si se trata de un activo de consumo que implique costos de almacenamiento proporcionales al valor del activo estableciéndolo como la tasa de comportamiento continuo correspondiente y por supuesto, considerar en ambos casos el rendimiento de conveniencia que caracteriza a este tipo de activos.

Ya se mencionó que es más común que en la práctica se negocien opciones sobre futuros de activos de consumo, ya que el futuro es mas fácil de negociar que el propio activo y además porque el precio del futuro está siempre disponible lo cual no siempre se tiene con las mercancías.

Como ya se dijo, las opciones que se han venido estudiando son llamadas opciones vainilla o estandarizadas, y existen otro tipo de opciones llamadas exóticas. A continuación se mencionarán algunos ejemplos de ellas y pondremos especial atención en las que su pago final depende del precio promedio del subyacente para un periodo determinado de tiempo.

Así, las opciones exóticas, pueden ser descritas como aquellas que tienen pagos finales más complicados a los de las opciones estandarizadas europeas y americanas de compra y venta. A continuación se describen algunas de las diferentes opciones exóticas que existen y serán clasificadas de acuerdo a los artículos escritos por Eric Reiner y Mark Rubistein en la revista “RISK” entre 1991 y 1992. Sin embargo, algunas de las adaptaciones realizadas a las formulas de valuación de opciones exóticas fueron hechas por Garman y Kohlhagen en 1983 y por Brenan y Schwartz en1985.

2.2.4 OPCIONES EXÓTICAS

A continuación se mencionan algunos de los tipos de opciones exóticas que se han diseñado a lo largo de la historia.

Opciones Bermuda[30]: Este tipo de contratos opcionales son de tipo americano y están restringidos a ciertas fechas de ejercicio durante la vida de la opción, que a diferencia de las opciones americanas estándares estas pueden ser ejercidas en cualquier momento durante la vida del contrato opcional. Un ejemplo de este tipo de contratos puede ser una opción sobre un bono que solo pueda ser ejercida en las fechas de pago de cupón.

[30] En inglés “bermudan options”

Otro tipo de opciones americanas no estandarizadas está dado por algunos tipos de “warrants”[31], en los cuales se establece que pueden ser ejercidos solo en fechas preestablecidas y algunas veces el precio de entrega se incrementa con el paso del tiempo. Por ejemplo, un warrant de 7 años donde las fechas de ejercicio están entre los años 3 y 7, el precio de entrega comienza en $30 al principio del 3° año, después del 4° al 6° año aumenta a $32 y durante el ultimo año se incrementa a $33.

Opciones de comienzo futuro[32]: Son opciones que su fecha de inicio está en alguna fecha futura. Los términos de este tipo de opciones usualmente especifican que la fecha de inicio será cuando el valor de la opción sea igual a cero.

Composición de opciones[33]: Estas son opciones sobre opciones. Existen de cuatro tipos: Un opción call sobre un call, una opción call sobre un put, una opción put sobre un call y una opción put sobre un put. En estas se tienen dos fechas de ejercicio y dos precios de entrega.

Opciones de elección[34]: Tienen la característica de que después de un periodo de tiempo específico, se podrá elegir si la opción sobre un subyacente especifico será de compra o de venta. Suponiendo que el periodo de tiempo será en T_1, el valor de la opción de elección estará dado por:

$$Max(c, p) \tag{2.47}$$

Donde c y p son el valor de la prima de una opción de compra y de venta respectivamente.

Opciones de barrera[35]: Son opciones donde el pago final de la opción depende de si el precio del activo subyacente alcanza un cierto nivel en un cierto periodo de tiempo y en algunos casos se especifica que su ejercicio será cierto tiempo después que supere dicho nivel.

Opciones retrospectivas[36]: En estas opciones el pago final depende del máximo o mínimo valor del precio de contado del activo alcanzado durante la vida de la opción, este tipo de opciones pueden ser de compra o de venta y darse en las dos siguientes modalidades:

---

[31] Warrants: Emisión de títulos opcionales a cargo de una compañía o institución financiera.
[32] En inglés “forward start options”
[33] En inglés “compound options”
[34] En inglés “chooser options”
[35] En inglés “barrier options”
[36] En inglés “lookback options”

a) *Opciones con precio de entrega fijo*[37]: Se caracterizan por tener un precio de entrega acordado previamente, definido por X, y el pago final P, está basado sobre el valor óptimo del activo alcanzado durante la vida de la opción. En el caso de una opción de compra el óptimo será el valor mas alto que alcance al activo durante la vida de la opción, defínase por $S_{\max}$, de ser así el pago final es igual al máximo entre: cero y la diferencia entre $S_{\max}$ y X, el cual es expresado en (2.48). En el caso de una opción de venta el óptimo será el valor mas bajo que alcance al activo durante la vida de la opción, defínase por $S_{\min}$, de ser así el pago final es igual al máximo entre: cero y la diferencia entre X y $S_{\min}$, el cual es expresado en (2.49).

$$P = Max(S_{\max} - X, 0) \tag{2.48}$$

$$P = Max(X - S_{\min}, 0) \tag{2.49}$$

b) Opciones con precio de entrega flotante[38]: Se caracterizan por tener un precio de entrega cuyo valor depende del valor óptimo alcanzado durante la vida de la opción, de este modo el pago final P, depende del óptimo del precio de entrega y el valor final del activo subyacente, S_T. En el caso de una opción de compra el óptimo del precio de entrega será el valor más bajo que alcance al activo durante la vida de la opción, defínase por $S_{\min}$, de ser así el pago final es igual al máximo entre: cero y la diferencia entre S_T y $S_{\min}$, el cual es expresado en (2.50). En el caso de una opción de venta el óptimo del precio de entrega será el valor más alto que alcance al activo durante la vida de la opción, defínase por $S_{\max}$, de ser así el pago final es igual al máximo entre: cero y la diferencia entre $S_{\max}$ y S_T, el cual se expresa en (2.51).

$$P = Max(S_T - S_{\min}, 0) \tag{2.50}$$

$$P = Max(S_{\max} - S_T, 0) \tag{2.51}$$

Opciones asiáticas[39]: También llamadas opciones promedio, son aquellas cuyo pago final está ligado al valor promedio del activo subyacente durante la vida de la opción y existen dos modalidades básicas:

[37] En Inglés "fixed strike lookback option"
[38] En inglés "floating strike lookback option"
[39] En inglés "asian options" o "average options"

a) *Opciones sobre precios promedio*: Opciones cuyo pago final está basado sobre la diferencia entre el valor promedio del subyacente durante la vida de la opción, defínase por S_{prom} y el precio de entrega X, así el pago final para una opción de compra está dado por (2.52) y para una opción de venta el pago final está dado por (2.53), las cuales están dadas por:

$$P = Max(S_{prom} - X, 0) \qquad (2.52)$$

$$P = Max(X - S_{prom}, 0) \qquad (2.53)$$

Cabe mencionar que el precio promedio del activo subyacente S_{prom}, es calculado sobre un periodo predeterminado.

b) *Opciones sobre precios de entrega promedio*: Opciones cuyo pago final tiene la estructura de calcularse con un precio de entrega definido como el precio promedio de dicho activo, S_{prom}. Así el pago final de una opción de compra esta dado por (2.54) y para una opción de venta esta dado por (2.55).

$$P = Max(S_T - S_{prom}, 0) \qquad (2.54)$$

$$P = Max(S_{prom} - S_T, 0) \qquad (2.55)$$

En la práctica este tipo de opciones son generalmente de tipo europeo y los promedios pueden ser calculados aritmética o geométricamente.

Fue en Tokio en donde por primera vez se desarrolló comercialmente una fórmula de precios de opciones ligadas con el precio promedio del petróleo, dado que esto fue en Asia, a este tipo de opciones que están referidas al valor promedio del precio del activo subyacente se les llama opciones asiáticas[40].Las opciones asiáticas son populares porque tienden a ser más baratas comparadas con las opciones vainilla de compra o de venta, esto es por que la volatilidad en el valor promedio de un subyacente tiende a ser menor que la volatilidad del valor del activo mismo. Cabe mencionar que no existen formulas analíticas para opciones sobre precios promedio cuando este es aritmético, esto es primeramente debido al hecho de que el promedio aritmético de un conjunto de variables aleatorias que suponen una distribución lognormal tiene una distribución intratable, en su lugar se utilizan aproximaciones analíticas propuestas por Turnbull y Wakeman (1991) y

[40] Ver Fallon, William and David Turner. “Evolutión of a Market, Managing Energy Price Risk”, London Risk Books.

Curran (1992) en donde se utilizan promedios geométricos sobre los precios del subyacente.

2.2.4.1 DETERMINACION DE PRECIOS PARA OPCIONES ASIÁTICAS

Las opciones sobre precios promedio son en muchas ocasiones más apropiadas para cubrir las necesidades de los inversionistas, por ejemplo, supóngase que una entidad financiera espera recibir una cierta cantidad en efectivo dentro de un año, en una moneda diferente a la utilizada en su país de residencia, la financiera por tanto, puede estar interesada en cubrirse con una opción que le garantice que el tipo de cambio promedio durante el tiempo que va a tardar en recibir el efectivo esté por encima de cierto nivel, lo cual puede lograrse de manera efectiva al cubrirse tomando una posición larga en una opción de venta sobre el valor promedio del tipo de cambio durante el periodo de tiempo establecido. En ese sentido se considera importante presentar cuáles son las expresiones analíticas para valuar opciones sobre precios promedio que tengan pagos finales como los expresados por (2.52) y (2.53) mediante una extensión del modelo Black & Scholes .

Si el comportamiento del precio del activo subyacente se supone que sigue una distribución lognormal, entonces al definir el nuevo activo subyacente S_{prom} (calculado como promedio geométrico), es posible contar con expresiones analíticas para valuar el precio de opciones europeas sobre este nuevo activo[41], esto se debe a que el promedio geométrico de un conjunto de variables aleatorias lognormal se distribuye también lognormal.

Para llegar a establecer una primera expresión para valuar una opción sobre el valor promedio geométrico de un activo, primero considérese que se hará sobre un activo de inversión que paga una tasa continua de dividendo, previamente conocida q y que el periodo durante el cual se calcula el promedio es igual al periodo que dura la opción[42]. Puede probarse también que la distribución de probabilidad del promedio geométrico del precio de contado del activo sobre un cierto periodo es igual al del precio de contado del activo en el periodo final, si se considera un rendimiento esperado que en conjunto es igual a $(r - q - (\sigma^2/6))/2$, (es decir considerando esta expresión como la tasa de dividendo previamente conocida en un activo de inversión) y con una volatilidad que en conjunto es igual a $\sigma/\sqrt{3}$ (en lugar de σ), por lo tanto el valor de la opción sobre el precio promedio

[41] Ver A. Kemna y A. Vorst, “A Pricing Method for Options based on Average Asset Values”, Diario de Banca y Finazas, 14 (March 1990), 113-129

[42] A pesar de que el periodo durante el cual se calcula el promedio del precio del activo, no siempre coincide con el de la duración de la opción, se considera este caso para establecer la ideas básicas y llegar de manera mas natural al resultado en donde el periodo de tiempo en donde se calcula el promedio es un subconjunto del periodo que dura la opción.

del activo puede obtenerse como el de una opción estandarizada sobre una activo de inversión que tenga una volatilidad de $\sigma/\sqrt{3}$ y una tasa de dividendo igual a:

$$r-\frac{1}{2}(r-q-\frac{\sigma^2}{6})=\frac{1}{2}(r+q+\frac{\sigma^2}{6}) \qquad (2.56)$$

Por lo tanto, las expresiones que valúan el precio de las opciones de compra y venta sobre el precio promedio de un activo, donde el periodo durante el cual se calcula el promedio es igual al de la duración de la opción, están dadas por:

$$c=Se^{-\frac{1}{2}(r+q+\sigma^2/6)T}N(d_1)-Xe^{-rT}N(d_2) \qquad (2.57)$$

$$p=Xe^{-rT}N(-d_2)-Se^{-\frac{1}{2}(r+q+\sigma^2/6)T}N(-d_1) \qquad (2.58)$$

y como

$$\ln\frac{Se^{-\frac{1}{2}(r+q+\sigma^2/6)T}}{X}=\ln\frac{S}{X}-\frac{1}{2}(r+q+\sigma^2/6)T$$

Se tiene que d_1 y d_2 están dados por:

$$d_1=\frac{\ln(S/X)+\frac{1}{2}(r-q-\sigma^2/6)T}{\sigma\sqrt{T/3}}$$

$$d_2=\frac{\ln(S/X)+\frac{1}{2}(r-q+\sigma^2/6)T}{\sigma\sqrt{T/3}}=d_1-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T/3}$$

Las expresiones (2.57) y (2.58) también pueden ser usadas para valuar el valor promedio de una opción sobre el valor promedio de un activo de consumo, con la salvedad de considerar que el rendimiento de conveniencia, δ, de un activo de consumo, juega un papel análogo al de la tasa de dividendo continua en un activo de inversión q, dicho esto basta con tomar $q=\delta$ en (2.57) y (2.58) para obtener las expresiones correspondientes para la valuación de las opciones sobre el valor promedio de un activo de consumo.

Cabe mencionar que cuando las opciones asiáticas están definidas en términos del promedio aritmético, las formulas analíticas no están disponibles.

Esto es porque la distribución del promedio aritmético, no tiene propiedades analíticas tratables. Sin embargo, la distribución es aproximadamente lognormal esto puede dar lugar a una aproximación analítica para el valor de la opción promedio mediante métodos numéricos a partir de calcular los 2 primeros momentos de la función de distribución de probabilidades del promedio aritmético y bajo el supuesto de neutralidad al riesgo se puede suponer que dicha distribución es lognormal.

A continuación se mostrará la expresión para calcular el valor de una opción de compra sobre el precio promedio de un activo de consumo para los siguientes casos:

1. Cuando el periodo de vida de la opción es mayor al periodo en el cual se calcula el promedio y este no ha comenzado aún.

2. Cuando el vencimiento de la opción es menor al periodo sobre el que se calcula el promedio y que este ya haya comenzado.

Las expresiones, que se presentarán a continuación han sido usadas por Ingersoll en 1995 y por Rubinstein en 1996 y se basan en supuestos acerca de las variables que se involucran, estos supuestos requerirán de justificaciones teóricas que nos permitan utilizarlo en apego a las hipótesis del mismo, que son prácticamente las expuestas en la sección 2.2.3.1 (hipótesis de modelo Black & Scholes) y se retomarán en al capítulo 4 después de presentar la teoría que puede llegar a justificar las hipótesis adicionales, en el capítulo 3, por ahora solo se exhibirán las fórmulas de valuación para mas adelante ser retomadas.

Supóngase que se quiere valuar el precio de una opción sobre el precio promedio de un activo de consumo, para el caso en que el periodo de vencimiento de la opción sea mayor al tiempo en que se realiza el periodo, es decir, cuando el lapso para el cual se promedia el valor del subyacente no ha comenzado aun, siendo así, su valor estará dado por:

$$c = Se^{-\delta T - g\tau} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \qquad (2.59)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - Se^{-\delta T - g\tau} N(-d_1) \qquad (2.60)$$

Donde d_1, d_2 y g están dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - \delta + \sigma^2/2)T - (g + \sigma^2/3)\tau}{\sigma\sqrt{T - 2\tau/3}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \delta - \sigma^2/2)T - (g - \sigma^2/3)\tau}{\sigma\sqrt{T - 2\tau/3}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - 2\tau/3}$$

$$g = \frac{1}{2}(r - \delta + \frac{\sigma^2}{6})$$

En donde los parámetros nuevos involucrados son:

δ : Rendimiento de conveniencia del activo de consumo subyacente.

τ : Tiempo durante el cual se promedia el activo subyacente.

Las demás variables involucradas ya fueron previamente definidas, y la volatilidad que supone la fórmula es la del logaritmo natural del precio del activo de consumo subyacente.

Ahora se definirá la expresión que valúa a la misma opción, pero ahora bajo el caso en el que el vencimiento de la opción es menor al período de tiempo en el que se calcula el promedio, es decir, cuando el periodo en el que se promedia la variable ya comenzó, dicho esto su valor estará dado por:

$$c = S^{\frac{T}{\tau}} G^{\frac{1-T}{\tau}} e^{-(\delta+p)T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \qquad (2.61)$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - S^{\frac{T}{\tau}} G^{\frac{1-T}{\tau}} e^{-(\delta+p)T} N(-d_1) \qquad (2.62)$$

Donde d_1, d_2 y p están dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(S^{\frac{T}{\tau}} G^{\frac{1-T}{\tau}} e^{-(\delta+p)T} / X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \frac{T}{\tau} \sqrt{T/3}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S^{\frac{T}{\tau}} G^{\frac{1-T}{\tau}} e^{-(\delta+p)T} \big/ X) + (r - \sigma^2 \big/ 2)T}{\sigma \frac{T}{\tau} \sqrt{T/3}} = d_1 - \sigma \frac{T}{\tau} \sqrt{T/3}$$

$$p = (r - \delta)(1 - \frac{T}{2\tau}) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{T}{\tau} (\frac{1}{2} - \frac{T}{3\tau})$$

El parámetro G agregado está dado por:

G: Promedio geométrico observado del precio del activo de consumo subyacente a la fecha de valuación de la opción.

3

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y ESTACIONARIEDAD EN EL MODELO DE BLACK & SCHOLES

DESCRIPCIÓN

En el presente capítulo se enuncian algunas propiedades del cálculo probabilístico y algunos resultados importantes de las ecuaciones diferenciales estocásticas, como el lema de Ito, resultado utilizado por Gibson y Schwartz en 1991 para dar una valoración de los activos que sean función del tiempo y del valor del petróleo, a partir de la hipótesis de que el precio del petróleo sigue un movimiento geométrico Browniano. También se presentará la ecuación diferencial de Black & Scholes, que junto con sus diferentes generalizaciones forman la base de la valoración de todos los instrumentos derivados que se pretendan valuar bajo los supuestos establecidos y que tendrá particular interés para el caso de los VRRs. En la parte final del capítulo se mencionan conceptos básicos, pero fundamentales, de las series de tiempo, que tiene por finalidad explicar y complementar algunos de los supuestos hechos en el modelo de Black & Scholes, el cual supone que solo se tiene una variable aleatoria que modela la evolución de los precios del activo subyacente y supone a las demás variables como determinísticas (la tasa de interés, volatilidad y en su caso el rendimiento de conveniencia), cuando en realidad no lo son y sin embargo, la metodología es comúnmente utilizada con el uso de la teoría de las series de tiempo y con ayuda de la prueba estadística de Dickey Fuller, se pretende justificar que el supuesto de considerar a estas variables como constantes deja de ser una aberración grave ya que al menos estas variables son estacionarias y la variable aleatoria a considerar para modelar el precio del activo es un proceso estocástico que sigue lo que se llama una caminata aleatoria.

En la sección 3.1 se presenta un poco de teoría de los procesos estocásticos y se mencionan algunos de los casos particulares, como los procesos Wiener y los procesos de Ito y se describe la eficiencia débil del mercado.

En la sección 3.2 se describe la ecuación diferencial de Black & Scholes y el uso que se le da para verificar la validez de cualquier fórmula que se utilice para valuar un derivado.

En la sección 3.3 se hace una introducción a la teoría de las series de tiempo y con esto presentar una prueba de hipótesis importante en la series de tiempo conocida como la prueba de Dickey Fuller

3.1 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Una variable cuyo valor evoluciona en el tiempo de manera aleatoria está siguiendo un proceso estocástico, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias cuando éstas se manifiestan como una función del tiempo o de un parámetro real. La variable puede ser el resultado de un juego de azar, el precio de un activo, la temperatura, etc. La definición formal de un proceso estocástico es la siguiente:

Proceso estocástico: Es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$.

Cuando en el proceso se toma fijo un valor $t_0 \in T$ entonces, a la variable aleatoria que resulta se le llama también estado del proceso estocástico. Por otro lado, cuando en el proceso estocástico se especifica como fijo un resultado w_0, en este caso el proceso estocástico se vuelve solo función del tiempo y se le llama realización del proceso o trayectoria del proceso[1].

Según los valores que pueda tomar la variable estocástica en cuestión, el proceso estocástico, puede clasificarse como de variable discreta o de variable continua dependiendo de los valores que toma la variable aleatoria. Análogamente, se dice que el proceso estocástico es de tiempo o índice, discreto

[1] El concepto de realización de un proceso estocástico, representa un papel importante en el estudio de las series de tiempo y puede llegar a utilizarse el término serie de tiempo para referirse tanto a los datos como al proceso del cual son una realización.

o continuo dependiendo de si el conjunto T es discreto o continuo. Un proceso de tiempo discreto es aquel cuya variabilidad no cambia constantemente de valor, sino que lo hace en ciertos momentos determinados, por ejemplo el valor obtenido al lanzar un dado, en donde el valor de la puntuación obtenida no cambia hasta que se vuelve a lanzar el dado. Un proceso de tiempo continuo es aquel que presenta cambios constantemente a través del tiempo, como por ejemplo el valor de la temperatura registrada en un termómetro, el cual consiste en una medición registrada que cambia continuamente a través del tiempo.

En general, todos los activos ya sean de inversión o de consumo, suelen seguir procesos de variable discreta, por ejemplo, el valor de los eurodólares que solo pueden variar en múltiplos de un punto base y aún así es frecuente tratar al precio de los activos como si fueran de variable continua porque en la práctica los movimientos mínimos permitidos son tan pequeños que importa poco la distinción y además el cálculo diferencial e integral continuo es mucho más fácil de tratar que el discreto. En cuanto al tiempo, puede decirse que los activos financieros siguen un proceso de tiempo discreto, ya casi todos los mercados cierran al menos una vez al día y en teoría, durante ese tiempo los precios no pueden variar. En la práctica los precios siguen cambiando aún cuando el mercado esté cerrado ya que el precio de apertura de un activo no tiene por que ser el mismo que el precio de cierre del día anterior, pero algunos autores han demostrado que los precios cambian menos cuando el mercado está cerrado[2] pero a pesar de que no cabe duda que cambian y por cuestión práctica, serán considerados en algunos casos como procesos de tiempo discreto. Dicho esto los procesos estocásticos con los que se trabajará serán procesos estocásticos de variables continuas a tiempo discreto con T, el conjunto de estados, un subconjunto de los enteros positivos a menos que se indique otra cosa.

3.1.1 PROCESOS DE MARKOV Y EFICIENCIA DÉBIL DEL MERCADO

Un proceso estocástico posee la propiedad de Markov, cuando su estado actual es la única variable necesaria para predecir su futuro, es decir, su estado anterior o la evolución histórica no afecta a las predicciones sobre el futuro.

La suposición convencional será que el precio de los activos financieros sigue un proceso de Markov y toda la información que afecta a su precio está contenida en su valor actual, esto es, si se conoce de manera exacta el presente entonces el conocimiento del pasado no tiene ninguna influencia en la estructura probabilística del futuro y no se pueden hacer predicciones sobre su evolución ni obtener información adicional sobre la forma de su distribución de probabilidades basándose en el pasado. La información histórica puede ser utilizada sólo para

[2] - Fama, E. “The Behaviour of Stock Market Prices”, Journal of Business 38 (1965), 34-105
- French, K.R. “Stock Returns and the Weekend Effect”, Journal of Financial Economics 8 (1980), 55-69

obtener información de naturaleza estadística, por ejemplo la desviación estándar, pero el camino exacto seguido por los precios hasta el presente no importa.

Lo mencionado en el párrafo anterior, formula lo que se conoce como la llamada “eficiencia débil” del mercado, hipótesis bajo la cual el precio de un activo contiene toda la información disponible sobre éste y por tanto ningún tipo de análisis de precios históricos dará ventajas para obtener rendimientos superiores a la media. Cabe señalar que si bien ningún tipo de estudio hasta la fecha ha demostrado la posibilidad de obtener ventajas mediante métodos de análisis técnico, por otra parte, tampoco se ha demostrado de manera concluyente la imposibilidad de hacerlo. La cuestión está aún por resolverse, pero aún así se tomará la hipótesis convencional de que el análisis técnico no aporta información importante sobre la evolución de los precios y esto tiene como ventaja adicional, que la teoría matemática es mas fácil si se puede suponer la aplicabilidad de la “eficiencia débil”, porque da la posibilidad de utilizar un enorme aparato matemático ya desarrollado en el mundo de la física.

3.1.2 PROCESOS DE WIENER

Un proceso de Wiener es un caso especial de un proceso estocástico de importante aplicación en finanzas. Se dice que Z_t, sigue un proceso de Wiener cuando los cambios en su valor ΔZ en un pequeño intervalo de tiempo Δt cumplen las dos siguientes propiedades:

1. $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, donde ε es una variable aleatoria con distribución normal con media cero y varianza igual a uno.

2. Los valores de ΔZ en dos intervalos de tiempo Δt son independientes, lo cual equivale a decir que el proceso es un proceso de Markov.

El proceso así obtenido en el limite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ es un proceso de Weiner.

La propiedad 1 implica que ΔZ tiene a su vez una distribución normal con media cero y desviación estándar de Δt.

Si se considera un intervalo mayor de tiempo también se puede calcular la desviación estándar y la varianza, porque todo intervalo de tiempo puede descomponerse en N intervalos menores Δt, por ejemplo, considérese intervalo comprendido en $[t_1, t_2]$ valores de T de manera que al sumar los incrementos ΔZ, se obtiene que:

$$Z_{t_2} - Z_{t_1} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (3.1)$$

De ahí que la media del incremento en Z de $t_1 - t_2$, será:

$$E[Z_{t_2} - Z_{t_1}] = \sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{N} E[\varepsilon_i] = 0$$

La varianza del incremento en Z de $t_1 - t_2$, estará dada por:

$$V[Z_{t_2} - Z_{t_1}] = \Delta t\sum_{i=1}^{N} V[\varepsilon_i] = t_2 - t_1$$

Este resultado proviene de la propiedad de la distribución normal, según la cual, toda variable aleatoria que es la suma de N variables normales independientes Z_i, es a su vez una variable normal cuya varianza es la suma de las varianzas de todas las Z_i y cuya media es la suma de las medias de las Z_i.

Al tomar el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ en la expresión $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, se obtiene el proceso de Wiener:

$$dZ = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{3.2}$$

Que a su vez se puede generalizar incluyendo un término que sea una función determinística del tiempo transcurrido y otro de varianza por unidad de tiempo, no necesariamente de uno. Si se considera a X_t un proceso estocástico con estas características, el proceso resultante es:

$$dX = adt + bdZ \tag{3.3}$$

Donde el término adt, representa la parte determinística de la evolución de X_t, a lo que se le llama "drift"[3] y que corresponde a la tendencia general del movimiento de X_t, misma que se esboza con la línea recta de la gráfica 3.1 y a la cual se referirá también por tasa de difusión. El otro término bdZ, representa la parte aleatoria y por tanto impredecible del movimiento de X_t, el "ruido" por así decirlo, presente en la señal. La constante b es la desviación estándar del término aleatorio.

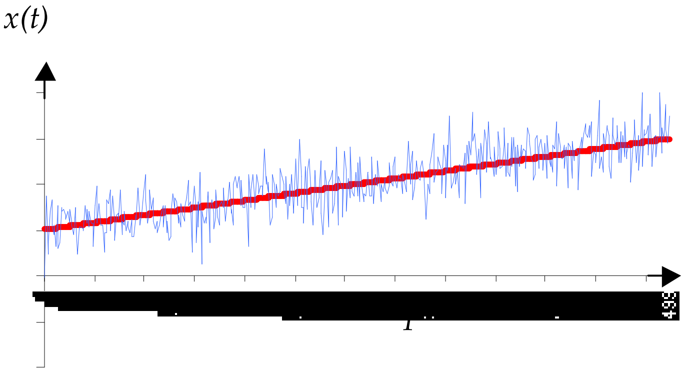
[3] Palabra que en castellano significa "deriva" y se utiliza para referirse a la tendencia del proceso.

A los procesos de Wiener se les puede considerar como el caso límite de ciertos procesos llamados paseos aleatorios o caminatas aleatorias, por ejemplo, considérese que un jugador tiene una cantidad de dinero D_0 y que comienza una serie de apuestas, en donde en cada una de ellas la probabilidad de ganar es p y la probabilidad de perder es $1-p$, sean $D_1, D_2, ..., D_t$, las cantidades de dinero obtenidas después de apostar $1,2,...,t \in T$ veces respectivamente, entonces la familia de variables D_t es un proceso estocástico markoviano, que a su vez es una caminata aleatoria unidimensional, considérese ahora que esa caminata aleatoria se realiza de tal manera que se pudiera tener la cantidad de dinero en cada instante de tiempo, de ser así, el proceso resultante es lo que se llama un proceso de Wiener.

Las trayectorias de los procesos de Wiener son curvas continuas, pero que no son derivables en ningún punto. A pesar de esto es posible considerar a los procesos estocásticos desde el punto de vista de las distribuciones, las cuales siempre tienen derivada y llegar a la conclusión de que la derivada de un proceso de Wiener, es un proceso Gaussiano Y_t (cuando ambos se consideran como proceso estocásticos generalizados) y que tiene la propiedad de que para todo $t \in T$ el valor esperado $E(Y_t)$, cumple que $E(Y_t)=0$.

Gráfica 3.1

PROCESO ESTOCASTICO



El encontrar la distribución de la variable X_t que sigue un proceso de Wiener, implica resolver la ecuación (3.3) sujeta a cierta condición inicial de la forma en $t=0,\ X_0 = x_0$, en estas condiciones lo que se tiene es un sistema dinámico estocástico en donde X_t es el proceso bajo estudio y los parámetros adt y bdZ juegan el papel ya definido. La solución de este tipo de problemas es tema de estudio de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas[4], que requiere del estudio de una integral estocástica, tema del cual solo se utilizarán los resultados ya conocidos.

Si se considera al proceso de Wiener (3.2) con condición inicial $Z_0 = 0$, y de varianza igual a uno, por un resultado de EDE, se puede concluir que Z_t tiene una distribución normal de media cero y varianza igual a t y se conoce como proceso de Wiener estándar. Para el caso de un proceso de Wiener con varianza σ^2 una constante, Z_t se distribuye como una normal de media cero y varianza igual a $\sigma^2 t$ y tal distribución está dada por la expresión siguiente.

$$f(z,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t\sigma^2}} \tag{3.4}$$

3.1.3 PROCESOS DE ITO

Los procesos de Ito son una generalización de los procesos de Wiener en donde los números a y b de (3.3), pueden ser a su vez funciones determinísticas del valor de X_t y del tiempo transcurrido t, es decir, su expresión es de la forma:

$$dX = a(x,t)dt + b(x,t)dZ \tag{3.5}$$

El proceso de Ito antes descrito, es un proceso de Wiener con tasa de difusión de a y varianza de b^2, el proceso dZ es un proceso de Wiener estándar.

Se tiene un resultado importante de la teoría desarrollada en EDE, conocido como el lema de Ito, el cual afirma que para cualquier $f(X,t)$ una función diferenciable de X y de t, esta sigue a su vez el proceso:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial X}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}bdz \tag{3.6}$$

Este nuevo proceso df, es también un proceso de Ito. El cual tiene como tasa de difusión:

[4] Al cual se hará referencia de aquí en adelante por la abreviación EDE

$$\frac{\partial f}{\partial X}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 + \frac{\partial f}{\partial t}$$

y su varianza esta dada por:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}b\right)^2$$

El lema de Ito es un resultado importante en el desarrollo de la teoría aquí presentada, cabe mencionar que este ya fue mencionado en el capítulo 1, aunque de manera menos rigurosa.

Al utilizar el lema de Ito, se obtiene que el proceso que sigue una función continua de un proceso de Ito es también un proceso de Ito. Supóngase que se tiene a S_T, un proceso de Ito y considérese:

$$f(S) = LnS$$

Una función del proceso y que tal proceso está dado por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \tag{3.7}$$

Con μ y σ constantes, al utilizar el lema de Ito, se obtiene que:

$$df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dZ$$

De acuerdo a otro resultado de EDE y tomando valor inicial de $f_0 = 0$ se concluye que f tiene una distribución normal con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{t}$ y si además se recuerda que, cuando una variable aleatoria cumple que la distribución de su logaritmo natural se distribuye normal entonces la distribución de dicha variable es lognormal, entonces se concluye que la distribución de la variable S_t, tiene distribución lognormal, hipótesis que como se mencionó en el capítulo uno, es el supuesto hecho sobre la distribución del precio del petróleo y que también coincide con la hipótesis hecha al modelo de Black & Scholes mencionada en el capítulo dos.

Al ser los parámetros de la distribución de f constantes es posible hacer un análisis para un periodo de tiempo largo, análogo al realizado en el proceso de Wiener, por ejemplo, para el periodo de tiempo comprendido en $[0,t]$.

$$f(S_t) - f(S_0) \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right), \sigma\sqrt{(t-0)} \right]$$

y como $f(S) = LnS$, entonces se puede escribir que:

$$Ln(S_t) - Ln(S_0) \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right), \sigma\sqrt{t} \right] \qquad (3.8)$$

Finalmente se puede expresar a (3.8), mediante:

$$Ln(S_t) \sim \Phi\left[Ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)t, \sigma\sqrt{t} \right] \qquad (3.9)$$

Esta expresión fue mostrada en el capítulo dos cuando se describieron los supuestos del modelo Black & Scholes e incluso se mostraron las expresiones de la media y la desviación estándar del proceso de interés, S_t, dichos parámetros se expresaron en (2.36) y (2.37) respectivamente.

3.1.4 El PROCESO DEL PRECIO DE LOS ACTIVOS

Los precios de los activos pueden modelarse mediante procesos estocásticos, pero antes de establecer un proceso cualquiera, de los múltiples que existen, cabe señalar las características que tienen en común los precios de los activos de inversión y de consumo. El manejo de las consideraciones que los diferencian ya fueron tratadas en el capítulo anterior y se aplicarán según se necesite mas adelante.

1. El precio de un activo no puede ser jamás negativo, por lo que el proceso que describa su evolución, debe ser tal que impida la aparición de valores negativos.

2. El movimiento en el precio del activo es, aproximadamente, proporcional a su valor, es decir, que si el valor del activo que hoy está,

supóngase a \$100.00, solo puede variar entre \$90.00 y \$110.00 en un mes, por ejemplo.

Dicho esto, evidentemente un proceso tan sencillo como el proceso de Wiener descrito en la expresión (3.3), no es el recomendado puesto que:

1. Admite valores negativos de X_t, si se comienza con valores de X_t muy cercanos a cero, con unos cuantos dZ negativos pronto se tendrá a X_t negativo.

2. La varianza b es independiente de X_t, por lo que sigue teniendo el mismo valor cuando X_t es casi igual a cero que cuando X_t toma un valor muy grande.

Un proceso un poco más complicado es el proceso de Ito dado por la ecuación (3.7), el cual también se puede denotar por:

$$\frac{dS}{S} = \mu \ dt + \sigma \ dZ \tag{3.10}$$

Este proceso de Ito satisface las condiciones requeridas. Al haber cambios en el valor de S hay cambios en su desviación estándar σS, por lo que la magnitud de las fluctuaciones estocásticas siempre es proporcional al valor de S y al disminuir el valor de S las fluctuaciones también disminuyen pero nunca pueden llegar a alcanzar valores negativos.

Este proceso es conocido como el proceso de movimiento geométrico Browniano y es el proceso mas habitual para describir la evolución del precio de un activo con las características ya mencionadas. Además este proceso es congruente con la hipótesis lognormal hecha al modelo Black & Scholes expuesta en el capítulo dos.

El término σ es la volatilidad de S, es decir, la desviación estándar de sus rendimientos, mientras que el término μ corresponde al rendimiento esperado en un periodo de tiempo muy corto y su comportamiento es el ya mencionado en el capítulo dos, donde se mencionó que el hecho de considerar a la rentabilidad esperada como la tasa de interés libre riesgo, es el resultado del supuesto del modelo de Black & Scholes conocido como la valoración neutral al riego.

El uso del enfoque de procesos estocásticos aquí descrito, está estrechamente ligado con la teoría de productos derivados descrita en el capítulo anterior, por lo que los resultados establecidos a partir de la teoría de derivados pueden ser deducidos bajo el enfoque de procesos estocásticos. Solo se necesita tener en cuenta el supuesto del proceso que siguen los precios del activo subyacente que se estudie y los supuestos que se hagan al instrumento derivado que se desea valuar. Por ejemplo, considérese que se quiere obtener una expresión del valor de un producto derivado, en donde la evolución de los valores de los precios del activo subyacente están dados por (3.10), pero con $\sigma = 0$ y que es un activo que no paga ningún tipo de rentas, lo que daría por resultado resolver la expresión:

$$\frac{dS}{S} = \mu \; dt$$

Que al integrar da como resultado que:

$$\int \frac{dS}{S} = \int \mu \; dt \;\; \Rightarrow \;\; S \propto e^{\mu . t}$$

Lo que corresponde al comportamiento del precio forward F, dentro de un periodo de t, para un subyacente que no paga rentas y con tasa de interés libre de riesgo r cuya expresión está dada por (2.1).

Por medio de un razonamiento análogo al presentado en la obtención de la expresión (3.8), se puede concluir que el logaritmo de los rendimientos esperados, también referidos como la rentabilidad compuesta en el capítulo dos, tienen una distribución normal que explícitamente se muestra en (2.38).

La distribución lognormal no es en absoluto la última palabra en cuanto a la evolución de los precios ya que es posible definir otras distribuciones como la distribución Pareto estable, las cuales son parte de una gran familia de distribuciones que incluyen a la distribución normal, muchas de las cuales tienen varianza infinita. También se pueden suponer distribuciones en las que la desviación estándar del precio (volatilidad) es a su vez volátil[5]. Sin embargo se utilizará la hipótesis lognormal ya que tiene la bondad de ser mas fácil de aplicar a situaciones prácticas y ser convencionalmente mas aceptada.

3.2 LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BLACK & SCHOLES

Si se cumplen las condiciones establecidas en el capítulo dos sobre los supuestos del modelo Black & Scholes, el precio de cualquier instrumento derivado, por extraña que sea la función de pagos del activo subyacente, debe cumplir la ecuación diferencial de Black & Scholes. Esta ecuación es por tanto, un resultado fundamental, ya que si se cree tener la fórmula para calcular el precio de

[5] Término que en inglés se conoce como Stochastic volatility.

una opción un tanto extraña, se puede aplicar la ecuación de Black & Scholes para verificar si dicha solución es válida. Es posible incluso modificar la ecuación para tratar casos de activos subyacentes con más restricciones, por lo que el campo de aplicación de la ecuación es realmente extenso.

Las condiciones necesarias para aplicar la ecuación son las siguientes:

1. El precio del activo subyacente sigue un proceso de Ito de tipo $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$ donde tanto μ como σ son constantes.

2. La venta en corto de activos está permitida sin restricciones sobre el uso del dinero así generado.

3. No existen costos de transacción ni impuestos.

4. Todos los activos son divisibles.

5. No existen oportunidades de arbitraje sin riesgo en el mercado.

6. La tasa de interés libre de riesgo r es constante y es la misma para todos los plazos.

7. No hay pagos de dividendos durante el plazo de la opción.

Se deducirá la ecuación de Black & Scholes, para esto considérese que se tiene el activo subyacente con un precio que satisface:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \qquad (3.11)$$

Supóngase que se tiene un instrumento derivado sobre el precio un activo S, cuyo precio o valor está dado por f y de acuerdo al lema de Ito este satisface la ecuación:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dZ \qquad (3.12)$$

Considérese la siguiente cartera de inversión:

Cartera A: Una posición larga en un título de la opción mas una posición corta de $\frac{\partial f}{\partial S}$ unidades del activo subyacente S.

Con esto se puede ver que el valor de la cartera A esta dado por:

$$A = f - \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Supóngase ahora que nos interesa conocer el cambio en el valor de la cartera, ΔA, cuando en un pequeño intervalo de tiempo Δt, el precio S del activo se mueve en una pequeña cantidad ΔS, lo cual se representa por:

$$\Delta A = f - \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \qquad (3.13)$$

Con esto y considerando la forma discreta de (3.11) y (3.12) de los pequeños cambios Δt y ΔS, sustituidos en (3.13) da como resultado:

$$\Delta A = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta Z - \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z)$$

En esta expresión, tanto los términos en ΔZ como los términos en $\mu\ \Delta t$ se cancelan mutuamente, y derivado de que la posición corta en el activo descrito ha neutralizado la variación en el valor de f. Por lo tanto, al cambiar el valor del precio del subyacente S, se obtiene:

$$\Delta A = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t$$

El hecho de que esta expresión no tenga ningún término en ΔZ significa que el valor de la cartera A es independiente, durante un pequeño instante de tiempo Δt, del riesgo de movimientos aleatorios en el valor de S. Durante ese pequeño instante de tiempo la cartera no tiene el menor riesgo, por lo que su rendimiento ha de ser r, la tasa de interés libre de riesgo del mercado, es decir:

$$\Delta A = rA\Delta t$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

Simplificando se obtiene la ecuación diferencial de Black & Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0 \qquad (3.14)$$

Cualquier activo derivado cuyo precio dependa del precio de un activo subyacente de consumo o de inversión, bajo las adecuaciones pertinentes, satisface la ecuación anterior.

Como muchas ecuaciones diferenciales la ecuación de Black & Scholes tiene muchas soluciones, las cuales dependen entre otras cosas de las condiciones que establezcan los diferentes instrumentos derivados. La solución que se utilice dependerá de las condiciones límite o condición de pagos que se establezcan en el derivado, un ejemplo de estos límites pueden ser los que establezca un contrato forward o una opción europea y en general las establecidas por cualquier instrumento derivado que se quiera definir.

Algunos ejemplos de condiciones límite o también llamadas de contorno pueden ser las siguientes:

$$C = Max(S_T - X, 0) \qquad (3.15)$$

$$P = S_T - X \text{ en } t = T \qquad (3.16)$$

En el caso de (3.16) se tiene como condición límite lo que corresponde al pago final de un contrato forward con fecha de entrega en T, para este caso la solución de la ecuación de Black & Scholes está dada por la expresión que proporciona el valor del contrato forward al tiempo t, está expresión se puede obtener, tal y como se dijo en el capítulo dos, sustituyendo la expresión (2.1) en (2.4), que da por resultado:

$$f = S - Ke^{-r(T-t)} \qquad (3.17)$$

Con esto se puede comprobar que (3.17) es una solución particular de (3.14) dadas las condiciones límite de (3.16). Por otra parte si se utilizara la condición límite que expresa (3.15), la cual representa el pago final de una opción de compra con precio de entrega X, se esperaría obtener la expresión que valora a este derivado, para eso, se tendría que plantear el resolver el valor esperado de (3.15) y descontarlo a la tasa de interés libre de riesgo del mercado, es decir, resolver:

$$C = e^{-rT} E[Max(S_T - X, 0)]$$

$$C = e^{-rT} E\int_k^{\infty} (S_T - X)\Psi(S_T)dS_T \qquad (3.18)$$

Donde:

$\Psi(S_t)$: Es la función de densidad lognormal

La cual está dada por:

$$\Psi(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(Ln(x) - E[\ln(x)])^2}{2\sigma^2}\right)$$

El resolver la expresión (3.18) implica el uso de la teoría de EDE, a un nivel que está fuera del alcance del presente trabajo, pero la solución está dada por la fórmula para valuar una opción europea de compra, resultado mostrado en el capítulo dos en (2.39).

3.3 SERIES DE TIEMPO

La teoría de las series de tiempo que a continuación se presenta, tiene como finalidad principal verificar y justificar las propiedades y características de las variables involucradas en la valuación de los VRRs, formalizando el modelo matemático que represente a los datos. Cabe mencionar, que si bien el objetivo del presente es utilizar esta teoría para que sea aplicada al caso particular de los VRRs, el enfoque presentado es de carácter general por lo que puede extenderse para cualquier derivado que se valúe bajo la metodología Black & Scholes .

Las series de tiempo son un conjunto de observaciones x_t, cada una observada al tiempo t, donde a cada una se le considera como el valor obtenido de una cierta variable aleatoria X_t. Luego entonces, la serie de tiempo es la realización de una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$. Esta consideración sugiere que los datos se modelen como una realización o parte de una realización de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$. La definición a considerar será la siguiente:

Serie de tiempo: Son las realizaciones de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ sobre un intervalo de tiempo, que ocurren en puntos regulares de tiempo.

De acuerdo a está definición las series de tiempo pueden ser de naturaleza discreta o continua dependiendo del proceso estocástico del cual sean realización, así también se puede identificar una componente estocástica o determinística y si por ejemplo, se tiene un proceso que solo es estocástico, entonces cada uno de los valores de la serie puede ser visto como una muestra de tamaño uno de la distribución de probabilidad de la población subyacente en cada punto del tiempo, en donde cada distribución tiene asociada su media y su varianza y para cada par de distribuciones se tiene su respectiva covarianza entre los valores observados. El supuesto que se hace en el estudio de estos conceptos es que el tamaño de las realizaciones tiende a infinito cuando la serie observada aproxime a la población o fenómeno que se esté estudiando, concepto que es conocido como la ergodicidad. Al igual que en caso de los procesos estocásticos, existen casos más generales de series de tiempo que contemplan componentes de tendencia o variabilidad determinística.

A continuación se mencionarán las características, definiciones y notación a utilizar en las series de tiempo y/o de los procesos estocásticos que las generan.

Para un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ se define a la función esperanza del proceso la cual esta dada por:

$$\mu_t = E[X_t]$$

La función varianza de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$, esta dada por:

$$\sigma_t^2 = E[(X_t - \mu_t)^2]$$

Función de Autocovarianza: Si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso estocástico tal que $\sigma_t^2 < \infty$ para cada $t \in T$ entonces dados $r, s \in T$ su función de autocovarianza $\varphi_X(r,s)$ está dada por:

$$\varphi_X(r,s) = E[(X_r - E[X_r])(X_s - E[X_s])]$$

Función de autocorrelación: La función de autocorrelación $\rho_X(\bullet,\bullet)$, de un proceso $\{X_t, t \in T\}$ para $r, s \in T$ se define como:

$$\rho_X(r,s) = \frac{\varphi_X(r,s)}{\sigma_r \sigma_s}$$

A continuación se definen dos operadores para variables aleatorias en un tiempo determinado del proceso, el primero es el operador "rezago"[6], el cual se simboliza por L, y al ser aplicado al valor de una variable al tiempo t, éste devuelve el valor de la variable al tiempo $t-1$, es decir:

$$LX_t = X_{t-1}$$

El otro operador es el operador "diferencia", denotado por Δ, y al ser aplicado al valor de la variable al tiempo t como resultado arroja la diferencia entre valor de la variable al tiempo t y su valor al tiempo $t-1$, es decir:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

[6] El término en inglés es "Lag".

Las series de tiempo pueden clasificarse como estacionarias y no estacionarias, las series de tiempo estacionarias se caracterizan por ser las que presentan mayor bondad estadística, ya que se equilibran alrededor de un nivel de media constante y presentan un nivel de dispersión alrededor de la media (varianza) también constante, además de que su estructura de autocovarianza permanece indiferente en puntos de referencia del tiempo. Dentro de las series estacionarias se pueden diferenciar a la estacionariedad en el sentido estricto y la estacionariedad débil, conceptos que se definen a continuación:

Serie de tiempo estrictamente estacionaria: Son las realizaciones de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ en el cual la medida de probabilidad $P(\bullet)$, del espacio de probabilidad en donde el proceso está definido, cumple que:

$$P(X_{t_1} = x_{t_1}, X_{t_2} = x_{t_2}, ..., X_{t_n} = x_{t_n}) = P(X_{t_1+k} = x_{t_1+k}, X_{t_2+k} = x_{t_2+k}, ..., X_{t_n+k} = x_{t_n+k})$$

En las series de tiempo estacionarias en el sentido estricto, las distribuciones unidimensionales son iguales e independientes en el tiempo y las distribuciones bidimensionales dependen de la diferencia entre los puntos del tiempo. Como consecuencia de esto, las funciones de esperanza y varianza del proceso del cual la serie es realización, no dependen de t al igual que las funciones de autocovarianza y autocorrelación, por lo que se cumple que:

i) $\mu_t = \mu < \infty$
ii) $\sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty$
iii) $\varphi_X(r,s) = \varphi_X(h)$
iv) $\rho_X(r,s) = \rho_X(h)$

Y la función de autocorrelación satisface las siguientes propiedades:

a) $\rho_X(0) = 1$
b) $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$
c) $|\rho_X(h)| < 1$

Los procesos estacionarios en el sentido estricto describen la variación en el tiempo de un fenómeno aleatorio tal que ninguno de los factores que tiene influencia sobre él cambian a lo largo del parámetro tiempo.

Serie de tiempo débilmente estacionaria: Son las realizaciones de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ donde T es un subconjunto de los números racionales y el proceso satisface las propiedades i) y ii) anteriores y además para $r,s,t \in T$ se tiene que:

$$\varphi_X(r,s) = \varphi_X(r+t, s+t)$$

De acuerdo a esto se sigue que si una serie de tiempo es estacionaria en el sentido estricto, entonces la serie es débilmente estacionaria, sin embargo, lo inverso no es necesariamente cierto. En lo sucesivo, cuando se diga que un proceso estocástico (o la serie de tiempo) es estacionario(a), deberá entenderse por débilmente estacionario(a), a menos que se especifique lo contrario.

3.3.1 MODELOS PARA LAS SERIES DE TIEMPO

Como ya se mencionó, se considera a las series de tiempo como la realización de un proceso estocástico. A continuación se enunciarán las componentes a identificar en una serie y posteriormente se mencionarán algunos modelos clásicos que representen a las series de tiempo de los cuales se presentarán sus características principales y precisar en qué casos se tiene un modelo de procesos estacionarios.

El primer paso en el estudio de las series de tiempo, es identificar a las componentes del modelo clásico para representar a los datos de la serie como la realización del proceso:

$$X_t = m_t + s_t + Z_t \qquad (3.19)$$

En el cual m_t es una función determinística llamada componente de tendencia, s_t es una función periódica a la que se le denomina componente de temporalidad y finalmente Z_t que es el componente de ruido aleatorio en el modelo, el cual es estacionario en el sentido de estacionariedad débil.

Una vez identificados los componentes, se debe verificar qué propiedades cumplen. Existen métodos que se encargan de transformar a las componentes para así adecuarlas al modelo (3.19), por ejemplo, si el componente de ruido aleatorio resulta no ser estacionario, se podría aplicar alguna técnica para transformarlo en estacionario y trabajar con la componente resultante.

Cuando el objetivo es modelar la serie, lo más común es proceder a remover la tendencia y el componente de temporalidad y después elegir el modelo apropiado para ajustar a los residuales estacionarios, haciendo uso de estadísticos y de la función de autocorrelación de la muestra[7]. En este caso, el objetivo del presente trabajo es el de usar una prueba estadística que determine si

[7] En el estudio más profundo de las series de tiempo el objetivo principal es llegar al “pronóstico” de la evolución de la serie de tiempo.

la serie es estacionaria, una vez que ya se estableció cuál es el modelo que sigue la componente de ruido aleatorio. A continuación, se definen algunos modelos clásicos usados para modelar a las series de tiempo.

Partiendo del hecho de que siempre es posible adoptar un procedimiento para remover la tendencia, es posible reducir el análisis a estudiar solo los modelos que no presentan tendencia, los cuales también son conocidos como modelos de esperanza cero.

3.3.1.1 PROCESO DE RUIDO IID

El modelo más simple para una serie de tiempo es aquel en el que no hay tendencia ni componente de temporalidad y además las observaciones son la realización de un proceso donde las variables son independientes e idénticamente distribuidas de esperanza cero, a un proceso de tales características se le denomina proceso de ruido IID.

Si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso de ruido IID tal que su función de varianza cumpla:

$$\sigma_t^2 = E[X_t^2] < \infty$$

Entonces por la independencia se tiene que:

$$\varphi_X(h) = \begin{cases} \sigma^2, h = 0 \\ 0, h \neq 0 \end{cases} \qquad (3.20)$$

Por lo que la función de autocovarianza no depende de t y por tanto, se tiene que el proceso de ruido IID en estas condiciones es estacionario y se le denomina proceso de ruido estacionario el cual se denota por $\{X_t\} \sim IIID(0,\sigma^2)$.

3.3.1.2 PROCESO DE RUIDO BLANCO

Considérese a una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas, cada una con media cero y varianza σ^2, entonces el proceso $\{X_t, t \in T\}$ así definido es un proceso estacionario cuya función de autocovarianza tiene la misma expresión que (3.20). Un proceso de tales características se le denomina proceso de ruido blanco y se denota por $\{X_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$.

Obsérvese que todo proceso $\{X_t\} \sim IIID(0,\sigma^2)$, es $\{X_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$, pero no la afirmación inversa.

3.3.1.3 PROCESO DE PROMEDIOS MOVILES

Considérese un proceso definido por:

$$X_t = Z_t + \theta . Z_{t-1} \qquad (3.21)$$

Donde $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\theta \in \Re$, al proceso así definido se le denomina proceso de promedios móviles o proceso MA(1).

Por su propia definición se desprende que un proceso MA(1) cumple que:

a) $\mu_t = 0$ para toda $t \in T$

b) $\sigma_t^2 = E[X_t^2] = \sigma^2(1+\theta^2) < \infty$

c) $\varphi_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), h = 0 \\ \sigma^2\theta, h = 1 \\ 0, |h| > 1 \end{cases}$

Estas características indican que un proceso de promedios móviles es estacionario.

3.3.1.4 PROCESO AUTORREGRESIVO

Considérese una serie estacionaria que satisface las siguientes condiciones:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t \qquad (3.22)$$

Donde $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\alpha \in \Re$ y Z_t es no correlacionado con X_s para cada $s < t$, al proceso así definido se le llama proceso autorregresivo o AR(1).

Las características de un proceso autorregresivo:

a) $\mu_t = 0$ para toda $t \in T$

b) $\sigma_t^2 = E[X_t^2] = \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$

c) $\varphi_X(h) = \alpha^h \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$

Para este tipo de procesos, se tiene que será un proceso estacionario si $|\alpha| < 1$ y en este caso se le denomina proceso autorregresivo estable, esto significa que es débilmente independiente o que no se correlaciona asintóticamente, es decir $\rho_X(t,t-h) \to 0$, cuando $h \to \infty$. Si por otro lado se tiene que $\alpha = 1$ entonces se dice que el proceso $\{X_t, t \in T\}$ tiene raíz unitaria. Cuando se considera el caso $|\alpha| > 1$ se dice que $\{X_t\}$ es explosiva ya que presenta una tendencia exponencial.

Se dice que una serie o proceso es de orden d, si tiene una representación estacionaria después de diferenciarla d veces, pero no es estacionaria si se le diferencia $d-1$ veces. De acuerdo a esto, se puede demostrar que el proceso autorregresivo de raíz unitaria, es un proceso autorregresivo de primer orden. Si una serie es de orden d entonces se representa por $I(d)$. Por ejemplo, el orden típico de integración de algunas series económicas es:

a) $I(2)$ Precios.
b) $I(1)$ PIB, Consumo, Inflación
c) $I(0)$ Tasa de interés, Balanza comercial.

CUADRO 3.1

PROPIEDADES DEL PROCESO AR(1)

	ESTACIONARIA	**NO ESTACIONARIA**
AR(1)	$\|\alpha\| < 1$	$\|\alpha\| \geq 1$
MEDIA	0	X_0
VARIANZA	$\sigma^2 / (1-\alpha^2)$	$t\sigma^2$

A continuación se presenta un resúmen de las características de las series de tiempo estacionarias y no estacionarias.

CUADRO 3.2

RESUMEN SERIES ESTACIONARIAS Y NO ESTACIONARIAS

CARACTERISTICAS	**SERIE ESTACIONARIA**	**SERIE NO ESTACIONARIA**
MEDIA	Constante	Dependiente de t
VARIANZA	Finita	Infinita
GRAFICO	Revierte a la Media	Se aleja de la Media
ORDEN	I(0)	I(1)

3.3.2 PRUEBA ESTADÍSTICA DE DICKEY FULLER

Al considerar a las series de tiempo como una realización de un proceso estocástico, es bien sabido que no es posible observar al proceso como tal, lo más que se puede esperar es que éste sea más o menos representado por la serie observada.

Uno de los problemas más importantes que se presentan en el estudio de las series de tiempo es como poder decidir si una serie es estacionaria o cuando no lo es, por lo que en muchos casos resulta útil contar con una prueba formal que lo justifique.

Considérese al modelo AR(1) definido por (3.22), donde $\{X_t\}$ está en función de los valores pasados, esto lo vuelve un proceso de memoria infinita en la medida que el valor de α sea mayor a la unidad pero también este impacto se disipa cuando α es en valor absoluto menor que uno. El valor de α, es por tanto fundamental para entender la memoria del proceso, hablando informalmente, los procesos de memoria corta suelen ser estacionarios, mientras que los procesos de memoria larga pueden ser no estacionarios.

Cuando el valor de alfa es uno, se dice que el proceso tiene una raíz unitaria, así el objetivo será el de presentar una prueba estadística que proporcione un criterio que indique cuándo se considera que una serie de tiempo es estacionaria o no.

La manera más simple de probar si hay una raíz unitaria, comienza con el modelo AR(1) mostrado en (3.22), en el cual X_0 es el valor inicial observado. Si $\{X_t\}$ sigue (3.22), tiene raíz unitaria si y sólo si $\alpha = 1$ y en este caso se dice que $\{X_t\}$ sigue una caminata aleatoria sin deriva o sin tendencia determinística. Cuando en (3.22) se agrega sumando al lado derecho de la igualdad el componente $m_t = a_0 + a_1 t$, se dice que es una caminata aleatoria con constante y con deriva. Un proceso de raíz unitaria con deriva se comporta de manera muy distinta a uno sin deriva, sin embargo, por convención es común dejar sin especificar m_t bajo la hipótesis nula, pero esto no significa que la prueba no sea modificada dependiendo del valor m_t . Por tanto, la hipótesis nula es que $\{X_t\}$ tiene una raíz unitaria, especificada como:

$$H_0 : \alpha = 1 \qquad (3.23)$$

En casi todos los casos el interés se centra en la alternativa unilateral:

$$H_1 : \alpha < 1 \qquad (3.24)$$

En la práctica esta última hipótesis significa que $0 < \alpha < 1$ ya que sería muy poco frecuente $\alpha < 0$ para una serie en la que se sospecha que tiene raíz unitaria. La alternativa $H_1 : \alpha > 1$ por lo regular no se considera ya que implica que $\{X_t\}$ es explosiva. Cuando $|\alpha| < 1$, es un proceso AR(1) estable, lo que significa que es débilmente dependiente o que no se correlaciona asintóticamente, por lo tanto probar (3.23) en el modelo (3.22), contra la alternativa dada por (3.24), es en realidad una prueba de si $\{X_t\}$ es $I(1)$ contra la alternativa de que es $I(0)$. La razón por la cual no se toma la hipótesis nula como $I(0)$ en está composición es porque $\{X_t\}$ es $I(0)$ para cualquier valor de α que se encuentre estrictamente entre -1 y 1, algo que las pruebas de hipótesis clásicas no manejan fácilmente. Hay pruebas en las que la hipótesis nula es $I(0)$ frente a la alternativa $I(1)$, pero adoptan un manejo distinto. (Ver por ejemplo Kwiatkowski, 1992)

La manera conveniente de realizar la prueba de raíz unitaria es tomando la primera diferencia, restando el valor X_{t-1} de ambos lados de (3.22), con lo que se obtiene:

$$\Delta X_t = (\alpha - 1) X_{t-1} + Z_t \qquad (3.25)$$

Este modelo es la forma básica de la prueba de Dickey Fuller, la distribución del estadístico de prueba, depende del tamaño de la muestra y de los términos o componentes se incluyan en el modelo, que para este caso particular (3.25) no incluye componente de tendencia ni de temporalidad. Por lo tanto, la aplicación de la prueba de Dickey Fuller depende del contexto donde se aplique, por lo cual el rezago dependerá de la variable que se contrasta. Un segundo modelo que se puede tener para una prueba de raíz unitaria, es para el caso en el que el modelo AR(1), tenga una tendencia determinística diferente de cero, $m_t \neq 0$, en el cual se consideran a otros valores críticos ya que de manera intuitiva suprimir la tendencia en un proceso de raíz unitaria, hace que éste se parezca más a un proceso $I(0)$, por lo que se necesita mayor magnitud en el valor del estadístico utilizado en la prueba, con el objeto de rechazar H_0.

Considérese el caso de prueba de hipótesis en el modelo (3.22), llamado también modelo autorregresivo sin constante, en el cual parece apropiado considerar las hipótesis (3.23) y (3.24), sin embargo, el problema es que el teorema de límite central en estás condiciones no se puede aplicar para garantizar que el estadístico t_{stat} tiene distribución normal, el cual esta dado por:

$$t_{stat} = \frac{\alpha - 1}{\sigma_\alpha} \qquad (3.26)$$

Y con una región de rechazo de H_0 dada por:

$$RR = \{|t_{stat}| > |t_{tablas}|\} \qquad (3.27)$$

Donde t_{tablas}, es el valor crítico del estadístico t de la distribución Dickey Fuller que se puede ubicar ya tabulado a diferentes niveles de significancia y diversos tamaños de muestra. La teoría con la que se obtienen estos valores críticos se trata en textos más avanzados sobre la econometría de las series de tiempo, por lo que en el presente trabajo se limitará solo a utilizar estos resultados. (Estos valores se pueden encontrar en Fuller 1976, tabla 8.5.2, pág. 373). Como en otras pruebas de hipótesis, cuando no se rechaza H_0 no se dice que se acepta, solo se concluye que los datos no proporcionan suficiente evidencia para rechazar H_0.

También es posible probar raíces unitarias en modelos con dinámicas más complicadas. Si $\{X_t\}$ sigue a (3.22) con $\alpha = 1$, entonces ΔX_t, no guarda correlación serial (Los valores críticos están recogidos en Fuller 1976, 8.5.2, pág. 373). Se puede suponer que $\{\Delta X_t\}$ sigue un modelo AR aumentado la ecuación (3.25) con nuevos rezagos, es decir:

$$\Delta X_t = (\alpha - 1)X_{t-1} + \gamma_1 \Delta X_{t-1} + Z_t \qquad (3.28)$$

Donde $|\gamma_1| < 1$. Esto asegura que bajo la hipótesis nula $\{\Delta X_t\}$ sigue un modelo AR(1). En la alternativa, es posible mostrar que $\{X_t\}$ sigue un modelo AR(2) estable. En general se pueden añadir p rezagos de $\{\Delta X_t\}$ para dar cuenta de la dinámica del proceso. La inclusión de nuevos rezagos no modifica el valor crítico de la prueba ni la regla de rechazo. Está versión ampliada se conoce como la prueba de Dickey Fuller Aumentada. La inclusión de los cambios rezagados, tiene por objeto eliminar cualquier correlación serial en $\{\Delta X_t\}$. Cuantos mas rezagos se incluyan más observaciones iniciales se pierden, de está manera la inclusión de muchos rezagos la prueba se ve afectada por poca potencia muestral de la prueba, si se incluyen pocos, el tamaño de la prueba será incorrecto ya que la validez de los valores críticos radica en que la dinámica aparezca por completo en el modelo. A menudo, la longitud de los rezagos está determinada por la frecuencia de los datos y por el tamaño de la muestra. Para datos anuales con uno o dos rezagos suele bastar, para los mensuales se suelen incluir hasta doce, pero no hay reglas estrictas que seguir en ningún caso.

Como ya se mencionó para las series que tienen tendencias temporales claras se tendría que modificar la prueba de raíz unitaria. A veces un proceso estacionario en tendencia (es decir, un proceso con tendencia lineal en su media pero que es $I(0)$ alrededor de su tendencia) puede ser tomado equivocadamente por un proceso de raíz unitaria si no se controla la tendencia temporal en la regresión de Dickey Fuller. En otras palabras, si se aplica la prueba Dickey Fuller habitual o aumentada en una serie con una componente de tendencia $m_t \neq 0$ pero que es $I(0)$, probablemente se tendría poca evidencia para rechazar una raíz unitaria. De acuerdo a esto se tendrían dos posibles alternativas: una sería contrastar una hipótesis nula conjunta mediante una prueba estadística distinta con tal propiedad u otra sería la de seguir tomando la hipótesis nula mencionada en (3.23) con valores críticos modificados. Esta última alternativa será la que se adopte ante el caso de que se presente una serie de tiempo con tendencia, que de modo intuitivo, al suprimir una tendencia de un proceso de raíz unitaria hace que parezca más un proceso $I(0)$, por lo tanto se necesitaran magnitudes mayores para el estadístico de prueba t_{stat} con el objeto de rechazar la hipótesis nula.

En general la modalidad de la prueba de Dickey Fuller que se decida utilizar dependerá én gran medida de la intuición o de las graficas de las series de tiempo para decidir si se incluye o no una tendencia en la prueba.

En la práctica, la prueba de Dickey Fuller ha sido empleada de manera satisfactoria en situaciones reales, sobre todo en el ámbito financiero, y puede proporcionar un criterio para verificar que las variables incluidas en modelo de Black & Scholes como determinísticas, al menos cumplan con la propiedad de ser variables estacionarías, lo que entre otras cosas garantiza que la variable mantiene un nivel de media y de varianza constante; que no se correlaciona asintóticamente y que presenta pocos efectos de movimientos bruscos ante innovaciones en el mercado, lo que reduce la gravedad de no incluirlas como variables aleatorias independientes al precio del activo subyacente, en el modelo de Black & Scholes.

4

VALUACION DE LOS VALUE RECOVERY RIGHTS

DESCRIPCIÓN

Como ya se mencionó los VRRs son derechos contingentes trimestrales cuyo valor depende del valor promedio del petróleo. En este capítulo se presenta la metodología que permite valuar todos y cada uno de los pagos.

En la sección 4.1 se plantea la herramienta teórica propuesta para la valuación de los VRRs, se propone darle un manejo cuidadoso a las variables involucradas en el modelo con el uso de la teoría financiera que puede ser llevada a la práctica y que al mismo tiempo justifique de manera formal que se cumplan los supuestos hechos en el modelo. Esta metodología estará sustentada con la base teórica presentada en los capítulos 2 y 3.

En la sección 4.2 se plantean las consideraciones y los supuestos que proponen las herramientas de la teoría financiera, así como el manejo que se le puede dar a las variables involucradas en el cálculo de una "buena" aproximación al valor de los VRRs y al mismo tiempo se justifica un modelo de valuación que pueda ser llevado a la práctica.

En la sección 4.3 se presentan los resultados de la valuación y en la 4.4 se menciona cuál es la situación actual de los Bonos Brady y de los VRRs.

4.1 ANÁLISIS DE LAS VARIABLES QUE DETERMINAN EL VALOR DE LOS VRRs

Los pagos que realizan los VRRs, tal como se describió en la ecuación (1.1), dependen de tres variables aleatorias:

a) El precio del petróleo de exportación (COP)
b) El volumen de exportación (CEV)
c) La inflación de Estados Unidos (que afecta la determinación de ROP).

Sin embargo, para facilitar el proceso de valuación de los VRRs se pretende buscar la manera de reducir el número de variables aleatorias que determinan su valor, de lo contrario el grado de complejidad y margen de error en la valuación aumentaría considerablemente, por esa razón a continuación se presentan las consideraciones a tomar en las variables que determinan el valor de los VRRs.

4.1.1 EL VOLUMEN ACTUAL DE EXPORTACIÓN (CEV)

Primero considérese al volumen de exportación del petróleo (*CEV*) como una variable aleatoria que afecta el valor de los VRRs, y supóngase que se debe aceptar uno y solo uno de los siguientes dos supuestos:

1. El volumen de exportación de petróleo es una variable aleatoria independiente del precio del petróleo.
2. El volumen de exportación de petróleo es una constante.

Al respecto se analizará el caso mexicano, de acuerdo a las cifras mostradas en el siguiente cuadro.

CUADRO 4.1

"VOLUMEN DE EXPORTACIÓN DEL PETROLEO CRUDO"

Año	Volumen Total	Por Región		
	Promedio 1/	América	Europa	Lejano Ote. 2/
1990	1277.1	770.6	350.8	155.8
1991	1368.7	834.1	388.3	146.3
1992	1367.8	914.2	361.4	92.2
1993	1337.1	970.5	286.2	80.4
1994	1307.4	1030.4	196.8	81.2
1995	1305.5	1094.2	134.0	77.2
1996	1543.8	1335.2	121.7	86.9
1997	1720.7	1469.5	175.9	75.0
1998	1741.2	1506.6	190.3	44.0
1999	1553.5	1329.9	176.5	47.0
2000	1652.1	1424.5	188.1	40.0
2001	1709.9	1484.8	181.2	43.9
2002	1664.4	1431.7	186.1	46.6
2003	1860*	1625.0	171.0	64.0

Fuente: Pemex y OPEP del Anual Statistical, * Primera Plana del Reforma del 20 de enero de 2004.

1/ En miles de barriles diarios

2/ Incluye otras regiones a partir de 1997

Considerando que desde principios de 1990 y hasta finales de 1993, el bajo precio del petróleo internacional y diversos factores ocasionaron un crecimiento lento en el volumen de exportación y que no fue sino hasta mediados de 1997 en donde se presentaron aumentos importantes, para posteriormente presentar un desacelere a principios de 1999 y finalmente mantener un crecimiento moderado del 2000 a la fecha, se decidió hacer un análisis de la media y desviación estándar del volumen de exportación petrolera tomando una división de cuatro periodos, mismos que se muestran a continuación:

CUADRO 4.2

"DESCRIPCIÓN NUMERICA DEL VOLUMEN DE EXPORTACIÓN"

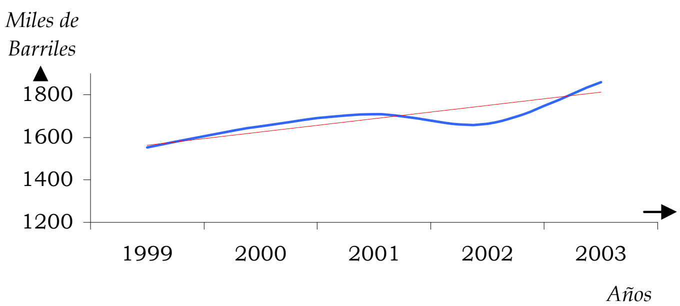
Periodo	Total	1	2	3	4
Años	**1990-2003**	**1990-1993**	**1994-1996**	**1997-1999**	**2000-2003**
Media	1,529.22	1,337.68	1,385.55	1,671.78	1,721.60
Desv. Estándar	197.95	42.97	137.05	102.99	95.56

* Cifras en miles de barriles diarios

De acuerdo a lo mostrado en el cuadro 4.2 se puede apreciar que el promedio de producción del petróleo de 1990 a 2003 ha sido de 1.529 millones de barriles diarios, con una desviación estándar que no excede los 198 mil barriles, con un incremento promedio de 41.6 miles de barriles por año. Si además de esto se toma en cuenta que la desviación estándar del periodo total se ve incrementada en gran medida por los movimientos severos suscitados en 1996 y 1999 debidos a diversos acontecimientos políticos y económicos que dan como resultado que en los periodos 2 y 3 sea donde se presente la mayor volatilidad de los últimos 14 años, es razonable pensar que ante condiciones estables como las observadas en los periodos 1 y 4 la volatilidad será notablemente menor. Finalmente, para el cierre del primer trimestre del presente año, el volumen total exportado ha sido de 1.862 millones de barriles al día en promedio, destinando al continente americano 1.653 millones de barriles, 167 mil se canalizaron al mercado europeo y 42 mil al continente asiático, el comportamiento grafico del volumen de exportación promedio del petróleo se muestra en la grafica 4.1.

GRÁFICA 4.1

VOLUMEN DE EXPORTACIÓN PETROLERA



De acuerdo a lo anterior y para efectos del modelo a utilizar para la valuación de los VRRs, se tomará como hipótesis el segundo supuesto, lo que equivale a suponer condiciones estables en el mercado del petróleo internacional y se considerará la cifra de *CEV* constante e igual 1.721 millones de barriles. La desviación estándar de los últimos cuatro años se tomará como la posible fluctuación del valor de *CEV*, por lo que también se presentará una valuación de los VRRs para valores de *CEV* iguales a 1.817 y 1.626 millones de barriles.

4.1.2 EL PRECIO DE REFERENCIA DEL PETRÓLEO (ROP)

Ahora se analizará el comportamiento de la variable *ROP* la cual, como ya se mencionó, se determina a partir de ajustar anualmente el precio del petróleo por la inflación estadounidense. En el siguiente cuadro se muestran los niveles inflacionarios que ha presentado Estados Unidos en lo últimos 7 años.

CUADRO 4.3

"NIVELES DE INFLACIÓN EN E.U.A"

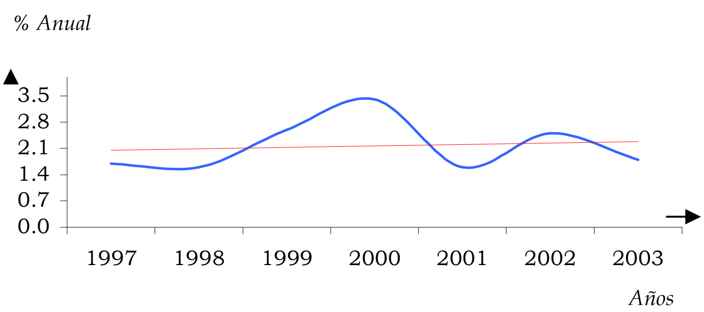
Años	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**
Inflación	1.7 %	1.6 %	2.6%	3.4 %	1.6 %	2.5 %	1.8 %

* Fuente: O.C.D.E

A continuación se presenta la gráfica de los porcentajes inflacionarios presentados en el cuadro 4.3, donde se puede apreciar que el porcentaje de inflación mayor de los últimos siete años se presentó a fines del 2000 con un valor del 3.4%. Resulta importante señalar que el nivel inflacionario de Estados Unidos del 2001 al 2003 fue del 1.96% en promedio, el cual coincide con la inflación promedio del periodo comprendido entre 1996 y 1999.

GRÁFICA 4.2

INFLACIÓN ESTADOUNIDENSE



Dicho lo anterior y con el fin de eliminar el proceso estocástico al que está sujeto el precio de referencia del petróleo (*ROP*) incluido en la ecuación (1.1), se considerará a la inflación de Estados Unidos como constante en un nivel de

2.17% anual para el lapso entre 2004 y el 2019. Dicho nivel inflacionario es igual al promedio de la inflación anual observada entre 1997 y 2003.

En estricto sentido, se tendría que considerar la inflación estadounidense y el volumen de exportación promedio del petróleo observado hasta el trimestre anterior a la posible fecha de pago del VRR. Para efectos del presente trabajo se considerarán:

1. Los volúmenes de exportación de cada posible fecha de pago iguales a los volúmenes de exportación del año correspondiente, para los pagos comprendidos entre 1996 y 2003. Por ejemplo, para las cuatro fechas de pago de 1997 se considerará un volumen de exportación promedio de 1,720.7 miles barriles, para pagos correspondientes del 2004 al 2019 se valuará con tres valores de *CEV*, 1.626, 1.721 y 1.817 millones de barriles.
2. Los niveles de inflación del año respectivo para ajustar el valor de $14.00 dólares y determinar ROP se tomarán a partir de los valores de inflación anual de junio de 1991 y hasta los conocidos para diciembre de 2003.

Las simplificaciones anteriores dan como resultado que el componente .3*Max(COP-ROP, 0) de la ecuación (1.1), se puede valuar como 3/10 de una opción de compra (call) sobre el precio promedio del barril de petróleo de exportación mexicano, a un precio predeterminado (14 dólares actualizados anualmente a la inflación estadounidense). Posteriormente, para encontrar el valor de cada uno de los pagos de los VRRs se multiplica el valor de la opción por el valor esperado del volumen de exportación del petróleo (CEV) y por los demás coeficientes incluidos en la ecuación (1.1).

4.1.3 LÍMITE RESPECTO A LOS INGRESOS TOTALES

Recordando la cláusula de los pagos máximos respecto de los ingresos totales, se puede deducir que dicho tope, al pago de los VRRs no se aplica más que en casos extremos, según los volúmenes de exportación de los últimos años. Para esto nótese que la ecuación (1.2), se puede reescribir de la manera siguiente:

$$0.3*[Max(OER - BRA, 0)]*PP \qquad (1.2)$$

$$\approx 0.3*[Max(COP*CEV*91 - ROP*1.25*91, 0)]*PP$$

$$\approx 0.3*[Max(COP*CEV - ROP*1.25, 0)]*91*PP \qquad (4.1)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (4.1), el ingreso bruto trimestral promedio del último año (OER - oil export revenue) se puede expresar como el producto del precio de exportación de petróleo promedio anual (COP) y el volumen diario de exportación promedio durante un año (CEV) por 91 días (para convertirlo en flujo trimestral). Por otro lado, la ecuación (1.1) que describe la función de pago de los VRRs se puede expresar de la siguiente manera:

$$0.3*[Max(COP*CEV-ROP*CEV,0)]*91*PP \qquad (4.2)$$

Al comparar las ecuaciones (4.1) y (4.2) se aprecia que ambas tienen el mismo activo subyacente (COP*CEV), la única diferencia entre ellas radica en el precio de ejercicio, siendo este igual a ROP*1.25 para la ecuación (4.1) y ROP*CEV para la ecuación (4.2), es decir, para verificar en que casos se tendría que considerar la expresión (1.2) como la que determine el valor de los VRRs se tendría que cumplir la siguiente desigualdad:

$$Max(COP*CEV-ROP*1.25,0)<Max(COP*CEV-ROP*CEV,0)$$

Como la expresión del lado derecho y del lado izquierdo siempre son mayores o iguales a cero se puede descartar el caso en alguna de las dos sea cero. Entonces primero considérese el caso en que al lado derecho de la desigualdad es mayor que cero, de esta manera se tendrá que:

$$COP*CEV-ROP*1.25<COP*CEV-ROP*CEV \qquad (4.3)$$

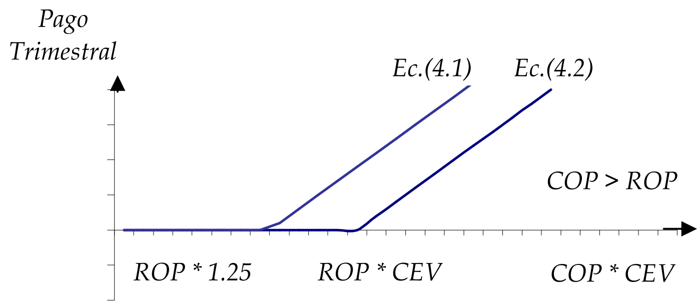
$$\Leftrightarrow 0<ROP*1.25-ROP*CEV$$

$$\Leftrightarrow 0<ROP(1.25-CEV)$$

Dado que *ROP* es siempre positivo, (4.3) se cumplirá si y sólo si, $1.25<CEV$, lo que significa que, para el valor esperado del volumen diario de exportación de petróleo promedio (CEV) superior a 1.25 millones de barriles, entonces el límite descrito en la ecuación (1.2) nunca se aplicaría. Esto se debe a que el activo subyacente de las opciones de la ecuación (4.1) y (4.2) es el mismo, pero el precio de ejercicio de la opción descrita en la ecuación (4.1) sería siempre menor a aquél de la ecuación (4.2). Esto se puede apreciar en la gráfica (4.3).

GRÁFICA 4.3

LÍMITE RESPECTO A INGRESOS TOTALES



Debido a que las cifras que se utilizarán como valores de *ROP* para efectos de valuación del presente trabajo, son todas mayores a 1.25 millones de barriles se puede prescindir de dicho límite sin ningún inconveniente. Cabe mencionar que dicho límite busca reducir los pagos de los VRRs en caso de que se presenten incrementos en el precio del petróleo y el volumen de exportación disminuya considerablemente.

4.1.4 LÍMITE DE PAGO MÁXIMO POR TRIMESTRE

El límite de pagos máximos por trimestre de los VRRs, se puede descomponer en dos partes: el tope máximo al pago en cada trimestre (.75% del total de deuda intercambiada por bonos), y el excedente sobre dicho tope que debe ser acumulado para complementar los pagos adicionales de aquellos trimestres en los que el pago trimestral sea inferior a dicho límite. El pago máximo por trimestre se puede modelar como un tope a la opción descrita en la ecuación (1.1), lo cual es equivalente a la venta de una opción tipo call, pero con un precio de ejercicio mayor al de la ecuación (1.1). Esta opción se puede describir de la siguiente manera:

$$0.3*[Max(COP-(ROP+X),0)]*CEV*91*PP \qquad (4.4)$$

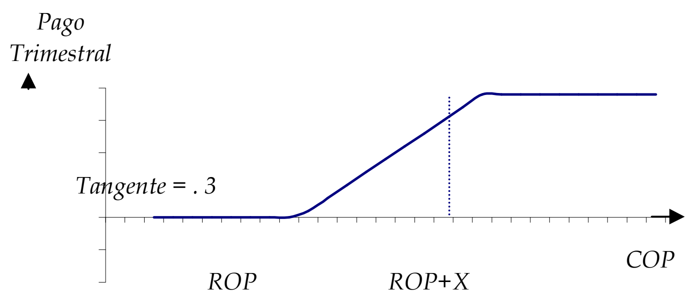
Donde:

X: Es la máxima diferencia entre COP y ROP (cantidad “in the money”), tal que el pago descrito por la ecuación (1.1) para un trimestre en particular no sea mayor al .75% del total de la deuda. Es decir, la diferencia máxima entre el activo subyacente y el precio de ejercicio, para que el pago de cada VRR no exceda el límite de .75% del total de deuda intercambiada por bonos. Por ejemplo, un excedente del activo subyacente sobre el precio de ejercicio de 9.53 dólares hace que el pago determinado por la ecuación (1.1) para cada VRR sea de .75%, para un volumen de exportación de petróleo de 1.5 millones de barriles y así la ecuación (1.1) tomaría un valor de: .3*9.53*1.5*91*(47.8/52) = $358.838 m.d = .75% del total de la deuda renegociada).

Para ilustrar el límite de pago máximo por trimestre en una posición de VRRs, se puede considerar una posición larga en la opción descrita en la ecuación (1.1) y una corta en la opción de la ecuación (4.4), lo cual se muestra en la gráfica (4.4).

GRÁFICA 4.4

LÍMITE DE PAGO TRIMESTRAL



El valor de la cláusula relativa a la acumulación del excedente sobre el pago máximo descrita anteriormente depende de la trayectoria del valor del activo subyacente (en este caso el precio del petróleo). Es decir, en una fecha determinada, el pago derivado de la acumulación del pago potencial excedente no depende del precio promedio del petróleo en dicha fecha, sino del precio promedio que se observó en periodos anteriores. Esta característica convierte a los VRRs en opciones que para su valuación no sólo se necesita la distribución de probabilidad del precio del petróleo al vencimiento de cada pago, sino también su trayectoria a través del tiempo. Esto último complicaría la valuación, ya que ésta se tendría que realizar mediante aproximaciones numéricas, las cuales están sujetas a posibles errores de especificación. Por otro lado, la acumulación que se puede dar en un periodo para ser pagada en otro periodo cuenta con un límite anual, lo que reduce su valor e importancia. Por lo anterior, se decidió no incluir la cláusula relativa a la acumulación de los excedentes de los pagos máximos en la valuación de los VRRs.

4.2 METODOLOGÍA Y CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Una vez descritas las consideraciones a las variables y las cláusulas que determinan el pago de los VRRs, ahora se procede a presentar la metodología teórica para valuarlos, detallando las herramientas analíticas y los supuestos a realizar. En ese sentido uno de los pasos más importantes será el identificar las variables aleatorias que afectan los pagos de los VRRs, tomando como base fundamental la teoría expuesta en los capítulos anteriores.

Con las consideraciones ya hechas se pretende facilitar el proceso de valuación de los VRRs, hasta el momento se puede establecer una analogía de los VRRs con una opción call sobre el precio promedio del petróleo, para valuar este tipo de opciones se requiere la distribución de probabilidad de los promedios aritméticos. Desafortunadamente, como ya se mencionó en el capítulo 2, la distribución de probabilidad del promedio aritmético de variables aleatorias que se distribuyen lognormal es un problema estadístico que no se ha resuelto. Sin embargo, la distribución de probabilidad del promedio geométrico de dichas variables aleatorias sí es conocido, por lo que para la valuación de los VRRs se supondrá que el promedio del precio del petróleo de exportación es geométrico en lugar de aritmético y se utilizarán las expresiones analíticas presentadas en el capítulo 3. Un promedio geométrico G, de n diferentes variables aleatorias se define como la raíz n-ésima de su producto, y el promedio aritmético A es la suma de n diferentes variables aleatorias entre n. Lo cual se puede expresar como:

$$G = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \ldots * x_n}$$

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Es importante señalar que el promedio geométrico es siempre inferior o igual al promedio aritmético, por lo que el error inducido por esta metodología en la valuación de los VRRs tenderá a subestimar su verdadero valor.

Como se mencionó en la sección 3.1.4, la práctica más común en la valuación de este tipo de instrumentos es suponer que el proceso estocástico del precio del activo subyacente sigue un proceso lognormal ya que esta distribución es adecuada para modelar la no negatividad en el precio del activo

Al igual que Gibson y Schwartz (1991), se considerará que los activos financieros ligados al precio del petróleo, como activo subyacente, están determinados por el precio del petróleo spot y por un rendimiento que ofrece el mantener inventarios petroleros, conocido como "convenience yield" o "rendimiento de conveniencia", ya que el petroleo es considerado un activo de consumo. Por tanto el mantener inventarios de petróleo ofrece la capacidad de beneficiarse de posibles periodos de escasez, beneficio que no recibe el comprador de un contrato a futuro sobre el petróleo. Este flujo de servicios o rendimiento neto de costos de almacenamiento, es lo que se conoce como el rendimiento de conveniencia por mantener petróleo.

Este rendimiento de conveniencia, como ya se mencionó, se puede entender como el beneficio de mantener inventarios petroleros, el cual aparece cuando se presentan choques que afectan en mayor medida los precios del petróleo spot o de corto plazo que a los precios de los futuros a mayor plazo. Este hecho se ve reflejado en el comportamiento tanto del precio del petróleo como de algunos otros activos, por ejemplo, los metales (ver Fama y French 1988). En dichos activos se ha encontrado que la volatilidad de los precios a futuro es menor que la de los precios spot. Estos resultados son consistentes con la teoría de inventarios y su acumulación, donde los choques de demanda u oferta afectan más a los precios spot que a los precios que se esperan en el futuro. Este comportamiento responde al hecho de que la oferta de este tipo de bienes responde a cambios en sus precios en el mediano y largo plazo ya que no se puede incrementar su oferta inmediatamente. En este sentido, el rendimiento de conveniencia puede ser visto como el pago de dividendos que recibe el que mantiene petróleo, pero no el tenedor de contratos a futuro u opciones sobre dicho producto. El rendimiento de conveniencia es lo que permite que en ocasiones se presenten precios de futuros menores a los precios spot, lo que se conoce como un mercado invertido o "backwardation" en el lenguaje anglosajón.

Para poder valuar un activo de vencimiento a largo plazo y que depende del precio del petróleo, es necesario utilizar el precio esperado del petróleo en el futuro y que éste no se vea afectado por choques que afectan únicamente al precio spot. Para poder valuar los VRRs que dependen del precio futuro del petróleo mexicano de exportación, se utilizará la información contenida en los futuros del petróleo y de acuerdo a Brenan-Schwartz (1985), se supondrá que el proceso estocástico del precio spot del barril de petróleo sigue un proceso geométrico Browniano, el cual se mostró en (3.9):

$$\frac{dS}{S} = \mu \ dt + \sigma \ dZ \tag{3.9}$$

Donde:

S: Es el precio spot del barril de petróleo.

μ : Es la media del proceso del precio spot del barril de petróleo.

σ : Desviación estándar instantánea del precio spot del barril de petróleo.

dz : Es el incremento de un proceso Wiener estándar.

dt : Es el incremento en la unidad de tiempo.

Si al anterior proceso estocástico del precio del petróleo se supone que:

1. Las tasas de interés no siguen un proceso estocástico.

2. Que el rendimiento de conveniencia es sólo una función del precio spot del petróleo (ver Brennan y Schwartz (1985)), y

3. Que no se tienen costos de almacenamiento por el producto.

Entonces el precio de un contrato a futuro al tiempo T sobre el precio del petróleo se puede obtener a partir de la expresión (2.12) (o análogamente de (2.13)) considerando el valor u (o el valor de U) igual a cero.

Siendo así, sea $F_t(S,T)$ el precio al tiempo en t de un contrato futuro que vence en T , cuya expresión para valuarlo estará dada por:

$$F_t(S,T) = S\ e^{(r-\delta)(T-t)} \tag{4.5}$$

Donde:

$F_t(S,T)$: El precio en t de un contrato a futuro que vence en T .

S : El precio spot del barril de petróleo.

r : La tasa de interés libre de riesgo compuesta de manera continua.

δ : El rendimiento de conveniencia neto, compuesto de manera continua.

La ecuación (2.7a) muestra que el precio a futuro de un barril de petróleo es igual al precio spot multiplicado por un término que refleja la diferencia entre el rendimiento del bono libre de riesgo y el rendimiento de conveniencia por mantener petróleo. Es decir, si el rendimiento del bono libre de riesgo es mayor que el rendimiento de conveniencia, el precio del barril de petróleo a futuro será mayor que el precio spot, ya que la tasa de interés jugará un papel muy importante. Si por el contrario, el rendimiento de conveniencia es mayor a la tasa de interés libre de riesgo, el precio del petróleo a futuro será menor que su precio spot, ya que el valor del dinero a través del tiempo no compensará por el rendimiento que representa mantener petróleo.

Aplicando el lema de Ito, el cual se expuso en la sección 3.1.3, (Igual que Gibson y Schwartz en 1991) para obtener el proceso seguido por una función de S y T sea, $P(S,T)$, donde S sigue el proceso estocástico de la ecuación (3.9) (recuérdese que S es la variable aleatoria que representa el precio del petroleo), y utilizando (2.7a), la solución para dicho activo tiene que satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$dP = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{\partial P}{\partial T} - rP = 0 \qquad (4.6)$$

Donde:

$\frac{\partial P}{\partial S}$: La derivada parcial del precio del activo P respecto al precio del petróleo S.

$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$: La segunda derivada parcial del precio del activo P respecto al precio del petróleo S.

$\frac{\partial P}{\partial T}$: Es la primera derivada parcial del activo P con respecto al tiempo.

El resto de las variables han sido previamente definidas.

Para desarrollar un poco de intuición sobre las ecuaciones presentadas, es importante destacar que la ecuación (4.6) se puede obtener de otra manera a la desarrollada por Gibson y Schwartz (1991). Lo anterior se logra si el proceso estocástico de la ecuación (3.9) se modela con un pago de dividendo (δ), lo cual es equivalente a que el proceso estocástico tenga un rendimiento esperado de (μ - δ) y no sólo de μ, y posteriormente se utiliza la condición de ausencia de arbitraje para llegar a que $\mu = r$ (ver Ingersoll (1987)). Este resultado demuestra que el rendimiento de conveniencia puede ser visto como un pago de dividendos al propietario de inventarios petroleros.

Por lo antes expuesto los VRRs, como cualquier activo $P(S,T)$, se valuarán como un paquete de opciones call sobre el precio promedio de exportación de la mezcla de petróleo mexicana, mediante las fórmulas de valuación (2.59) y (2.61) considerando que al mismo tiempo se debe satisfacer la ecuación diferencial (4.6), cuya expresión de pago final está dada por (2.52). En ese sentido para poder valuar los VRRs o cualquier otro instrumento cuyo valor depende del precio del petróleo como función de una sola variable aleatoria se deben cumplir las hipótesis del modelo Black & Scholes además de hipótesis adicionales que a continuación se enuncian.

4.2.1 HIPÓTESIS ADICIONALES AL MODELO

Una de las metodologías más utilizadas para valuar opciones, es la basada en la teoría desarrollada por Black y Scholes (1977), la cual supone que sólo existe una variable aleatoria, la cual representa el precio del activo subyacente, y que las demás variables como pueden ser la volatilidad del activo subyacente y las tasas de interés, son determinísticas. En realidad, ni la volatilidad del activo subyacente ni las tasas de interés son determinísticas, y sin embargo, la metodología desarrollada por Black y Scholes es comúnmente utilizada. Esto último puede deberse a que por lo menos estas variables son estacionarias, es decir, tienen una media y desviación estándar constantes a través del tiempo, lo cual reduce la gravedad de no incluirlas como variables aleatoria independientes. Por lo anterior, se considera necesario verificar los siguientes supuestos:

1. Si el rendimiento de conveniencia es una variable estacionaria

2. Si el proceso estocástico del precio del petróleo, activo subyacente de los VRRs, sigue lo que se conoce como una caminata aleatoria.

Con esto se pretende que los VRRs sólo dependan del precio spot del petróleo como variable aleatoria y que las demás variables sean determinísticas (la tasa de interés, la volatilidad del precio del petróleo spot y el rendimiento de conveniencia). Es común que algunos modelos sobre la valuación de opciones asuman que la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad del activo subyacente (en este caso el petróleo) son constantes, por lo que si se supusieran las hipótesis del modelo de Black & Scholes, solo restaría verificar que se cumplan las hipótesis 1 y 2 mencionadas.

4.2.2 ESTIMACION Y ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA

Para poder valuar los VRRs bajo las condiciones y límites antes descritos se utilizará la desarrollada teoría de opciones. Como se mencionó con anterioridad, para poder utilizar esta metodología se debe verificar que el precio del petróleo y algunos otros componentes que afectan el proceso de valuación cumplan con ciertas propiedades y características en cuanto a los procesos estocásticos que los generan, al respecto, en esta sección primeramente se realizará la estimación del rendimiento de conveniencia y posteriormente se verificará si cumple con ser una variable aleatoria estacionaria.

Como ya se mencionó en la sección 2.1.4.1, el rendimiento de conveniencia se considerará como el beneficio que recibe el tenedor de inventarios petroleros. En el presente trabajo al igual que Gibson y Schwarz (1991), se tomará la hipótesis de que el rendimiento de conveniencia tiene una curva de rendimiento y una estructura análoga a la de las tasas de interés. Por lo que se considerará la existencia de un rendimiento de conveniencia de corto, mediano y largo plazo y que a su vez se pueden obtener los rendimientos de conveniencia Forward o implícitos por su estructura de rendimiento.

La ecuación (4.5) muestra cómo se pueden determinar los precios de los futuros a partir de conocer: el precio spot del petróleo, el rendimiento de conveniencia y la tasa de interés libre de riesgo.

Cabe mencionar que según Brennan-Schwartz (1985) y Gibson-Schwartz (1991) no existe un verdadero precio spot para el petróleo, ya que lo que se considera como precio spot del petróleo contempla entregas físicas en un tiempo de hasta treinta días. Bajo el supuesto anterior, de la ecuación (4.5) no se puede despejar directamente al rendimiento de conveniencia ya que se desconoce el verdadero precio spot del petróleo. Por lo tanto, los autores mencionados estimaron el rendimiento de conveniencia forward entre dos contratos a futuro, es decir, el rendimiento de conveniencia implícito para el periodo de tiempo intermedio entre los dos contratos respectivos. Por ejemplo, para calcular el rendimiento de conveniencia implícito de un mes, el cual empieza en once meses, éste se obtiene del cociente del precio a futuro de doce meses entre el de once meses, es decir:

$$\delta_{11,12} = r_{11,12} - 12 * \ln(\frac{F(S,12)}{F(S,11)}) \qquad (4.7)$$

Si bien lo anterior es cierto, es importante destacar que Brennan y Schwartz (1985) tenían como objetivo valuar inversiones físicas en recursos naturales, por lo que en dicho caso es recomendable utilizar una aproximación del verdadero precio spot (como el propuesto por (4.7)).

Sin embargo, para el caso de los VRRs estos pagan en función del precio spot del petróleo observado y con entrega física máxima en treinta días, es decir, el valor de los VRRs no depende del verdadero precio spot del petróleo sino del observado en el mercado y que en realidad es un precio cuasi-spot y cuya entrega física no es inmediata.

Por lo anterior, la estimación del rendimiento de conveniencia se realizará despejando directamente de la ecuación (4.5), es decir, se calculará el rendimiento de conveniencia de manera diferente a como lo hicieron Gibson y Schwartz (1991), utilizando los siguientes datos:

1. Los precios de los futuros sobre el petróleo mezcla “West Texas Intermediate” denominados “Ligth, Sweet Crude Oil” que cotizan en NYMEX. Para los plazos equivalentes al de la tasa libre de riesgo a utilizar.

2. La tasa libre de riesgo será la del Tesoro de E.U.A[1].

3. El precio spot del petróleo, se tomará del observado para el “West Texas Intermediate” (WTI).

Es importante destacar que si bien los VRRs se valuarán como una opción sobre el precio de la mezcla de exportación de petróleo mexicana y no sobre el WTI, se supondrá que el rendimiento de conveniencia es igual para cualquier tipo de petróleo, ya que es una tasa de rendimiento y no tiene por qué ser distinta para diferentes mezclas de petróleo.

Como ya se mencionó el futuro sobre petróleo a utilizar se conoce como el “Light, Sweet Crude Oil” (LSCO) el cual es negociado en el “New York Mercantile Exchange” (NYMEX), cuyas características principales se muestran en el cuadro 4.4.

[1] Treasury Bills de 3, 6 y 12 meses y Treasury Notes para plazos de 2, 3 y 5 años.

CUADRO 4.4

"DESCRIPCIÓN DEL FUTURO LSCO"

Activo	Petróleo WTI
Tamaño del Contrato	1,000 Barriles[2]
Fechas de Entrega	De 31 a 36 meses consecutivos para cada día de negociación
Cotización de Precios	Dólar EUA, con fluctuación mínima de \$0.01 y máxima de \$10.00 por Barril (\$10.00 y \$10,000.00 por contrato)
Último día de Negociación	El día hábil más cercano a 3 días hábiles antes al día 25 del mes que preceda al mes de vencimiento del futuro.
Posiciones Límite	Para cualquier mes, no mayor a 20,000 contratos con 1,000 o menos para cada mes de entrega
Clave de Pizarra[3]	De la forma CLAAi, donde CL representa que se trata del LSCO y AAi al año y mes de entrega del futuro y el mes se representa dependiendo del valor $i=\{F,G,H,J,K,M,N,Q,U,V,X,Z\}$
Mercado de Negociación	NYMEX

* Fuente: Futuros Trading LLC.

De acuerdo al cuadro anterior se puede observar que para cada día hábil, el NYMEX cuenta con una gama de futuros sobre petróleo con fechas de vencimiento para los próximos 30-36 meses, mismos que se pueden identificar de acuerdo al símbolo correspondiente. Por ejemplo, si se tiene al símbolo CL00U éste corresponderá al futuro del LSCO que vence en septiembre del 2000 cuyo último día de negociación es el 22 de agosto de 2000.

La tasas de Treasury Bills, Treasury Notes y el precio del petróleo WTI se obtuvieron del sistema de información "Bloomberg" para el periodo comprendido del 03 de febrero de 2000 al 31 de diciembre de 2003, de donde se omitieron la serie de valores para el mes de junio de 2000 dado que para ese periodo no se obtuvieron datos del precio del LSCO, cuyos datos se obtuvieron de un base de datos publicada por Futuros Trading LLC, en su sitio de Internet.

Despejando de (4.5) al rendimiento de conveniencia se tiene que:

$$\hat{\delta} = r - \frac{Ln(F_t(S,T)/S_t)}{T-t} \qquad (4.8)$$

[2] Barril con capacidad de 42 galones.
[3] La clave de Pizarra es un código alfanumérico que permite identificar a cada futuro.

Con los datos descritos y la expresión (4.8) se realizó la estimación del rendimiento de conveniencia y los valores obtenidos son resumidos mediante las medidas estadistas media y varianza, agrupando en diferentes periodos y cuyos resultados se muestran en el cuadro 4.5.

CUADRO 4.5

"DESCRIPCIÓN DEL RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA"

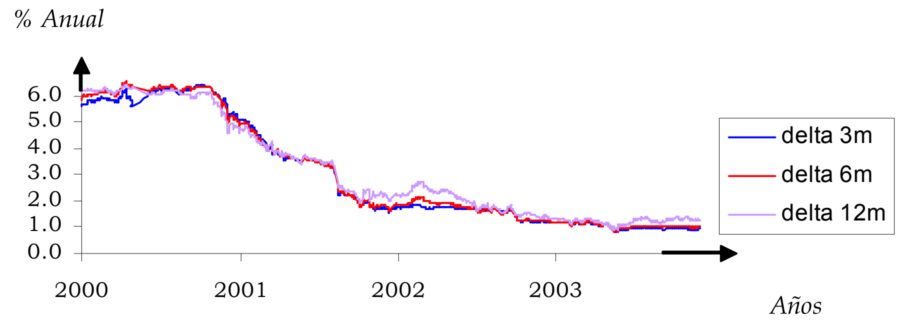
Curva de Rendimiento δ	Medidas Estadísticas	Toda la Muestra	2000	2001	2002	2003*
δ 3meses	μ	2.98%	6.25%	3.45%	1.65%	1.22%
	σ	2.01%	0.24%	1.22%	0.17%	0.22%
δ 6meses	μ	3.02%	6.31%	3.48%	1.75%	1.18%
	σ	2.01%	0.17%	1.11%	0.22%	0.13%
δ 1año	μ	3.10%	6.15%	3.52%	2.02%	1.29%
	σ	1.86%	0.21%	0.91%	0.37%	0.11%
δ 2años	μ	3.47%	6.24%	3.85%	2.65%	1.67%
	σ	1.73%	0.42%	0.71%	0.63%	0.22%
δ 3años	μ	3.76%	6.18%	4.10%	3.11%	2.11%
	σ	1.55%	0.44%	0.57%	0.72%	0.30%
δ 5años	μ	4.27%	6.10%	4.56%	3.82%	2.97%
	σ	1.22%	0.46%	0.38%	0.70%	0.35%

*El último dato utilizado es al 29 de diciembre de 2003.

Como siguiente paso en el análisis estadístico del rendimiento de conveniencia se presentaran las graficas de los datos estimados.

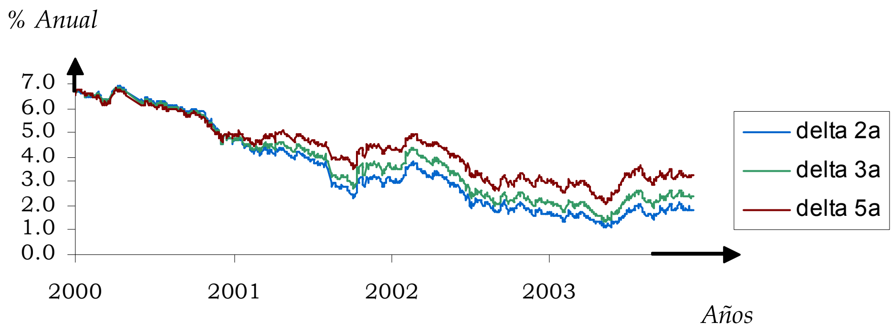
GRÁFICA 4.5

RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA DE CORTO PLAZO



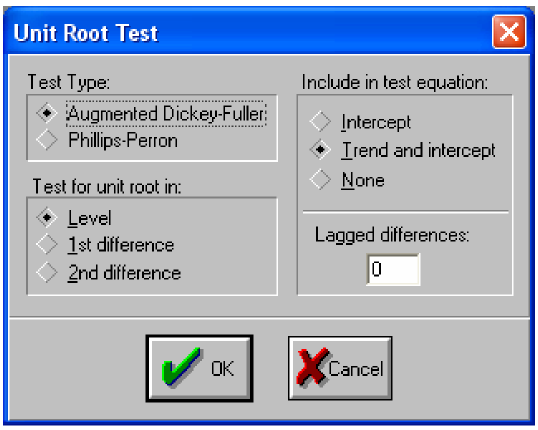
GRÁFICA 4.6

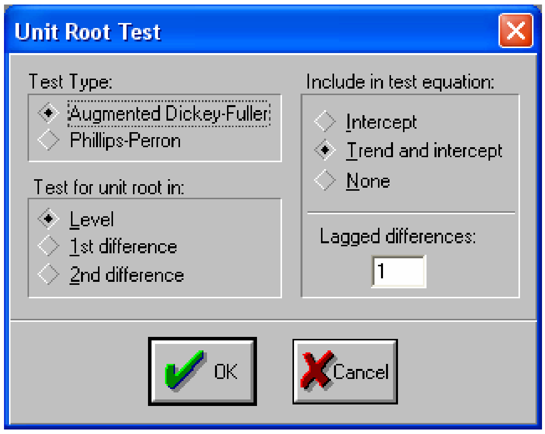
RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA DE LARGO PLAZO



Como se puede apreciar en la grafica (4.5), el rendimiento de conveniencia se comporta de manera similar para los plazos de 3, 6 y 12 meses además se observa un componente de tendencia a ser cada vez menor y de manera análoga se observa para el rendimiento de conveniencia de 2, 3 y 5 años de la grafica (4.6).

Una vez estimado el Rendimiento de Conveniencia, ahora se procederá a verificar si éste cumple con la característica estadística de estacionariedad. Como se mencionó en la sección 3.3.2, la prueba estadística de Dickey Fuller es una alternativa viable para comprobarlo. Para realizar esta prueba se utilizó el programa de análisis estadístico y econométrico "E-Views v.3.1". bajo los parámetros siguientes:





Es decir, se utilizó la prueba de Dickey Fuller Aumentada con constante y con deriva, considerando el caso sin rezagos y con un rezago, cabe mencionar que partiendo de las graficas de la series de tiempo del Rendimiento de Conveniencia se decidió incluir la tendencia temporal en la prueba, lo que tendrá como consecuencia que el resultado del estadístico de prueba obtenido se comparará con valores críticos de mayor magnitud.

Las ecuaciones a considerar en la prueba DFA, para cero y un rezagos son las siguientes respectivamente:

$$\Delta X_t = a_0 + a_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + Z_t \qquad (4.9)$$

$$\Delta X_t = a_0 + a_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + \gamma_1 \Delta X_{t-1} + Z_t \qquad (4.10)$$

Donde $H_0 : (\alpha - 1) = 0$, $H_1 : (\alpha - 1) < 0$, con $|\gamma_1| < 1$, $a_0, a_1 \neq 0$

Los resultados obtenidos son los siguientes:

CUADRO 4.6

"PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA DE DIKEY FULLER AUMENTADA PARA EL RENDIMIENTO DE CONVENIENCIA"

Curva del Rendimiento Conveniencia	Número de Rezagos Utilizados	Valor del estadístico de Prueba	Valores críticos de McKinnon			Resultado de la Prueba
			1%	5%	10%	
δ 3meses	Ninguno	-4.775801	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 99% de confianza
	Uno	-4.665326	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 99% de confianza
δ 6meses	Ninguno	-3.981584	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 95% de confianza
	Uno	-3.841848	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 95% de confianza
δ 1año	Ninguno	-3.892925	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 95% de confianza
	Uno	-3.622046	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 95% de confianza
δ 2años	Ninguno	-3.573704	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 95% de confianza
	Uno	-3.380095	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 90% de confianza
δ 3años	Ninguno	-3.402560	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 90% de confianza
	Uno	-3.288047	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 90% de confianza
δ 5años	Ninguno	-3.186541	-3.9981	-3.4291	-3.1377	Estacionaria al 90% de confianza
	Uno	-3.138345	-3.9983	-3.4292	-3.1378	Estacionaria al 90% de confianza

* Prueba realizada con constante y con deriva

Los resultados obtenidos muestran que para los Rendimientos de Conveniencia de 3 meses sin y con un rezago indican que la serie es estacionaria al 99% de confianza para el plazo de 6 meses y un año indica estacionariedad al 95% de confianza sin y con un rezago; en el Rendimiento de Conveniencia de 2 años resulta ser estacionaria al 95% de confianza sin rezagos y al 90% de confianza con un rezago; finalmente para el plazo de 3 y 5 años se tiene que las series son estacionarias al 90% de confianza sin y con un rezago. A partir de estas propiedades se puede concluir que el Rendimiento de Conveniencia no es una caminata aleatoria, y por ello, no considerarla como una variable aleatoria adicional en el modelo de valuación de los VRRs no sería una mala aproximación. Es importante destacar que el rendimiento de conveniencia ha tenido un comportamiento inusual durante los últimos años, lo cual se debe a los movimientos hacia la alza en los precios del petróleo, las cifras mostradas en el cuadro 4.5 ponen de manifiesto que en temporadas cuando el precio del petróleo es inusualmente elevado, la inclusión del rendimiento de conveniencia es importante, ya que es la única manera de ajustar el precio del petróleo hacia su valor de largo plazo, lo cual es especialmente importante para la valuación de los VVRs.

4.2.3 PROPIEDADES DEL PRECIO DEL PETRÓLEO

Los diversos tipos de petróleo se pueden clasificar de acuerdo con su densidad, la cual se expresa en una escala normalizada por el Instituto Estadounidense del Petróleo (American Petroleum Institute), mejor conocida como grados API. Bajo esta lógica, el petróleo se clasifica en: extrapesado, cuando su densidad es menor a 10° API; pesado, cuando se ubica entre 10.1 y 22.3 ° API; mediano, cuando está entre 22.4 y 31.1 ° API; ligero, entre 31.2 y 39 ° API; y superligero, cuando tiene una densidad superior a los 39 ° API.

Para propósitos comerciales y asegurar el valor económico de los hidrocarburos, México vende nacional e internacionalmente, aceites crudos, generalmente, mezclas de aceites de diferentes densidades como se muestra en la siguiente tabla:

CUADRO 4.6

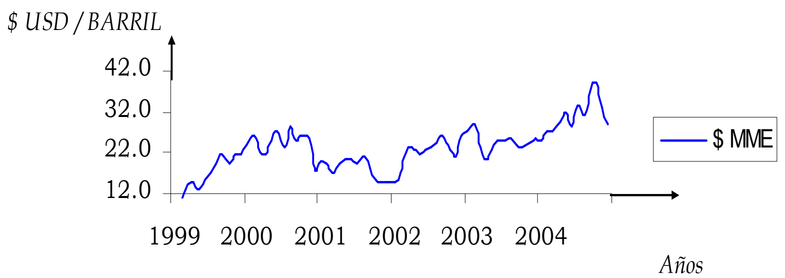
"CLASIFICACIÓN DEL PETROLEO MEXICANO"

Tipo de aceite	Clasificación	Densidad (°API)
Maya	Pesado	22
Istmo	Ligero	32
Olmeca	Superligero	39

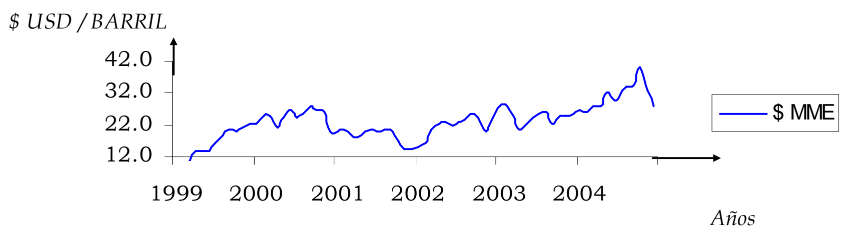
El precio de la Mezcla Mexicana de Exportación (MME) indica el valor promedio de las exportaciones totales de petróleo, por destino y tipo de crudo, en un periodo determinado. A continuación se presentan dos gráficas del comportamiento del precio Spot del Petróleo de la MME.

GRÁFICA 4.7

PRECIO SPOT MENSUAL DEL PETROLEO MME



PRECIO SPOT PROMEDIO MENSUAL DEL PETROLEO MME



En la gráfica 4.7 se presenta la grafica del precio de cierre mensual de la MME para el periodo de 1999 a 2004 y en la gráfica 4.8 el precio promedio diario del mes para el mismo periodo.

Como se mencionó con anterioridad, la teoría de valuación de opciones descansa sobre el supuesto de que el precio del activo subyacente tiene una caminata aleatoria como proceso estocástico, y esta será la hipótesis que se considerará y este será el valor que se utilizará para la valuación de los VRRs.

4.2.4 ESTIMACION Y ANALISIS DE LA VOLATILIDAD DEL PRECIO DEL PETRÓLEO

Como se mencionó anteriormente el modelo que se utilizará para valuar a los VRRS como un portafolio de opciones tipo Call sobre el precio promedio del petróleo será el de Black & Scholes en el cual se asume que la volatilidad del activo subyacente es constante durante la vida de la opción. Este supuesto está "lejos" de la perfección ya que en la práctica la volatilidad del precio del activo es una variable estocástica la cual, además, no es directamente observable. En la presente sección se utilizarán dos metodologías de cálculo de la volatilidad, las cuales se presentan en el Anexo A de este trabajo, mediante datos históricos que intentan mantener pista del nivel actual de volatilidad a partir del logaritmo natural de los cambios proporcionales del precio del activo entre el final del día $i-1$ y el final del día i .

Como se menciona en el Anexo "A", cuando la ponderación de estos cambios es la misma para todas las observaciones, es decir el modelo (A.1), se está hablando de una estimación de la volatilidad Homocedástica y esto se refiere a la volatilidad como un parámetro de una función de distribución de los rendimientos del activo en el que se parte de que la varianza de estos rendimientos no depende del tiempo, sino que se mantiene constante, este concepto teórico es importante de establecer, puesto que aún existiendo importantes evidencias empíricas a favor de la heterocedásticidad de la volatilidad, no es menos cierto que si se calcula la volatilidad homocedástica de manera diaria, se podría llegar a conclusiones muy similares a las que se hubiera llegado si se calculara mediante métodos heterocedásticos. Por el contrario, la volatilidad heterocedástica, como la que se estima a partir de (A.5), se calcula tomando como punto de partida la hipótesis de desviación típica no constante en el tiempo, sino por el contrario es un parámetro modernizable en sí mismo.

La varianza del precio del activo subyacente (cuya raíz cuadrada es la volatilidad) será calculada como el promedio ponderado por un factor de decaimiento exponencial como el que se menciona en (A.5) y una vez estimado su valor este se utilizará directamente en las expresiones (2.59) y (2.61) y con esto estimar el valor de los VRRs.

Una vez definido el modelo de volatilidad EWMA a utilizar, lo siguiente es definir qué valor debe tener del factor λ para determinar el valor de la volatilidad. De acuerdo al método de RiskMetrics, se menciona que el factor de decaimiento óptimo es aquel que minimiza las diferencias cuadráticas medias entre la estimación de la varianza y el retorno cuadrático actual en cada día. Bajo este método se puede mostrar que cada serie de tiempo (correspondiente para cada país y para cada activo subyacente) tiene un diferente factor de decaimiento óptimo diferente en los límites de 0.9 a 1. Además de que el valor óptimo de λ para estimar la volatilidad de más largo plazo es usualmente más grande que el óptimo de λ para pronosticar la volatilidad de un día. La conclusión de la discusión de RiskMetrics es que sobre el promedio de $\lambda = 0.94$ proporciona un buen pronóstico para la volatilidad diaria, mientras que $\lambda = 0.97$ proporciona una buena estimación para la volatilidad a un mes. Una razón importante de usar este modelo de estimación, es que, a pesar del número actual de observaciones utilizadas en la estimación de la volatilidad, el número de días efectivamente usados está limitado por el tamaño del factor, en otras palabras, el 99% de la información está contenida en los últimos $\log(0.001)/\log(\lambda)$ días por ejemplo para $\lambda = 0.94$ el 99% de la información esta contenida en los últimos 112 días.

El valor del factor estará dado por la siguiente expresión:

$$\lambda = e^{\ln(0.01/N-1)} \qquad (4.11)$$

Para efectos del presente trabajo, se tomaron $N = 100$ observaciones diarias del precio promedio del petróleo para el cálculo de la volatilidad de acuerdo a la metodología, con lo que se obtuvo una $\lambda = 0.954548457$.

4.3 VALUACIÓN DE LOS VRRs COMO OPCIONES ASIATICAS SOBRE ACTIVOS DE CONSUMO

La valuación de los VRRs se realizará como la valoración de un portafolio de opciones de compra (tipo Call) sobre la mezcla de exportación de la mezcla mexicana del petróleo mexicano. Es importante recordar que el valor de la opción se determina 3 meses antes de su pago por lo que la opción valuada en la fecha en la cual se determina su pago debe ser descontada por la tasa de interés del trimestre en el que se difirió su pago. Este cálculo es equivalente a descontar el valor de la opción que paga en la fecha en la cual se determina su pago, a la tasa de interés forward trimestral que existe entre la fecha en que se determina y en la que se realiza su pago.

La valuación de opciones de promedios geométricos de activos subyacentes que siguen un proceso estocástico geométrico Browniano tiene diferentes soluciones, dependiendo del tiempo en el que se calcule el promedio. Para los VRRs el tiempo para el cual se promedia el precio del petróleo corresponde al año anterior a la determinación del pago trimestral. Por lo tanto, para valuar las opciones que replican a los VRRs se utilizarán las expresiones mencionadas en el capítulo 2 en (2.59) y (2.61).

La construcción de la volatilidad diaria se realizó mediante la metodología expuesta en el anexo “A”, y como ya se mencionó tomando 100 observaciones. Para el rendimiento de conveniencia y la tasa de interés libre de riesgo se utilizó el método de interpolación alambrada para estimar los valores de la curva en cada fecha de pago de los VRRs a partir de considerar a los plazos (nodos principales) de 1, 90, 180, 360, 720, 1080 y 5400 días.

Como se mencionó en el Capítulo 1 y al inicio del presente, los VRRs contemplan cláusulas que limitan sus posibles pagos. De acuerdo a lo expuesto en 4.1.3 la cláusula de Ingresos Totales se aplicará si y sólo si el valor de CEV es menor a 1.25 millones de barriles, para evaluar los VRRs se consideró el promedio de exportación al mes de Marzo de 2005 el cual fue de 1.83880 millones de barriles por los que esta cláusula no se considerará en la valuación. Respecto a la cláusula "Pagos Trimestrales", se tiene que estimar el valor del precio de ejercicio de (4.4) que también depende del valor de CEV, una vez estimado este valor se procederá a valuar cada pago trimestral contemplado en los VRRs, como la valuación de un portafolio con una posición larga de la opción de compra descrita en (4.2) y una posición corta en la opción de compra dada por (4.4). Esta combinación de opciones es conocida en la teoria de estrategias de opciones como "Call Spred" y su esquema de pagos al vencimiento es como el que se muestra en la gráfica 4.4.

Es importante destacar que el valor de los VRRs, como cualquier portafolio de opciones, depende sensiblemente del precio del activo subyacente y de su volatilidad, sin embargo, mientras el vendedor o el emisor de una opción tiene teóricamente una pérdida potencial ilimitada, en este caso los VRRs (como se puede apreciar en la grafica 4.4), son instrumentos se construyeron con un "Techo" que si bien está dado por la variable BRA, ésta última depende del producto de ROP*1.25 y a su vez ROP dependerá del nivel de inflación estadounidense registrado al momento de la fecha de ejercicio, una variable que ha tenido un comportamiento poco volátil en los últimos tiempos como se expuso en 4.1.1, por lo que los pagos de los VRRs se pueden considerar limitados, al menos mientras se mantengan las condiciones de las variables como hasta ahora.

Como se mencionó anteriormente el Rendimiento de Conveniencia, es el mecanismo por el cual el mercado refleja sus diferentes expectativas sobre el comportamiento de los precios del petróleo spot y a futuro. Por ejemplo, un Rendimiento de Conveniencia elevado refleja que el mercado espera que los precios del petróleo se reduzcan en el futuro y viceversa por lo cual es importante que se considere en la valuación de los VRRs.

Los datos que se consideraron para realizar la valuación de los VRRs se resumen en el cuadro 4.7

CUADRO 4.7

"INSUMOS PARA LA VALUACIÓN DE LOS VRRs"

Insumo	**Valor**	**Cometarios**
Deuda Externa 1990	$ 52,033,751.02	Miles de USD
Deuda Renegociada 1990	$ 47,845,021.63	Miles de USD
Vol. Exportación Petróleo 1990	1,250.00	Miles de Barriles diarios
Inflación EUA	3.60 %	Anual
Precio Spot del Petróleo	USD $ 38.82	Por Barril
COP	USD $ 32.22	Prom. Geométrico Anual
CEV	1,838.80	Miles de Barriles diarios

ROP	USD $ 14.00	Por Barril
$X=$ Cantidad “in the money”	USD $7.77	Parámetro de (4.4)
Periodo para el promedio	252 días	Días para promediar
Volatilidad	14.1769 %	Anual método EWMA
# de VRRs en Circulación	47,522.51	Millones de VRRs
Nodos principales de la Tasa interés Libre de Riesgo.	2.5770% 1 día 2.7515% 90 días 3.0822% 180 días 3.1559% 360 días 3.9086% 720 días 4.1331%1080 días 4.6372%5400 días	A partir de estos valores se erpola por el método ımbrado las tasas del plazo e se necesite
Nodos principales del ndimiento de Conveniencia	2.3291% 1 día 2.5037% 90 días 3.0069% 180 días 3.1434% 360 días 3.9086% 720 días 4.1347%1080 días 4.6380%5400 días	A partir de estos valores se erpola por el método ımbrado las tasas del plazo e se necesite
Modelo de valuación	Laexpresión (2.59)	Pagos III, IV 2005 y I 2006
	Laexpresión (2.61)	Para el resto de los Pagos

* Insumos para la valuación de VRRS del Trimestre III de 2005 al Trimestre IV de 2019

Para evaluar los trimestres I y II de 2005 se utilizaron las expresiones de (4.2) y (4.4) y considerando un valor de COP igual a $ 30.56 USD para el 31 de diciembre de 2004, ya que como se expuso anteriormente la liquidación de los VRRs se realiza un trimestre después que se determina el valor de todas las variables.

CUADRO 4.8

“VALUACIÓN DE LOS VRRs COMO UN PORTAFOLIO DE OPCIONES SOBRE EL PRECIO PROMEDIO GEOMETRICO UN ACTIVO DE CONSUMO”

Trimestre		ISIN del Bono Brady Asociado	Serie VRR	# VRRs en Circulación	Valor del Pago Trimestral
I	2005	XS0015157646	Serie C 063005	2,476,117.00	USD $ 358,837.66
II					USD $ 356,359.12
III		XS0015157729	Serie D 063006	4,067,627.00	USD $ 356,352.76
IV					USD $ 353,298.63
I	2006				USD $ 362,578.85
II					USD $ 347,548.58
III		XS0015157992	Serie E 063007	17,874,818.00	USD $ 343,298.78

IV					USD $ 338,636.11
I	2007				USD $ 333,617.71
II					USD $ 328,498.07
III		XS0015158024	Serie F 063008	17,874,818.00	USD $ 323,301.24
IV					USD $ 318,120.64
I	2008				USD $ 312,648.70
II					USD $ 306,592.71
III		XS0015158297	Serie G 063009	134,176.00	USD $ 302,122.51
IV					USD $ 296,712.08
I	2009				USD $ 291,054.36
II					USD $ 285,825.55
III		XS0015158370	Serie H 063010	15,938.91	USD $ 274,685.11
IV					USD $ 271,064.65
I	2010				USD $ 267,708.98
II					USD $ 263,720.58
III		XS0015158453	Serie I 063011	148,543.13	USD $ 259,291.63
IV					USD $ 255,563.89
I	2011				USD $ 251,499.40
II					USD $ 247,965.63
III		XS0015158537	Serie J 063012	10,656.96	USD $ 243,822.29
IV					USD $ 238,653.18
I	2012				USD $ 235,635.13
II					USD $ 231,084.82
III		XS0015158610	Serie K 063013	1,377,848.20	USD $ 226,373.13
IV					USD $ 222,291.03
I	2013				USD $ 211,303.32
II					USD $ 209,413.73
III		XS0015158701	Serie L 063014	910,795.04	USD $ 207,568.38
IV					USD $ 205,010.02
I	2014				USD $ 201,904.94
II					USD $ 199,506.89
III		XS0015158883	Serie M 063015	11,285.88	USD $ 196,675.22
IV					USD $ 194,288.66
I	2015				USD $ 191,304.50
II					USD $ 187,371.00
III		XS0015158966	Serie N 063016	206,080.31	USD $ 185,393.57
IV					USD $ 181,974.05
I	2016				USD $ 178,327.59
II					USD $ 175,313.55
III		XS0015159006	Serie O 063017	207,793.04	USD $ 166,022.73
IV					USD $ 164,934.35
I	2017				USD $ 163,883.29
II					USD $ 162,163.86
III		DE0004002092	Serie P 063018	288,846.49	USD $ 159,925.63
IV					USD $ 158,248.01

I	2018				USD $ 156,207.16
II					USD $ 154,613.54
III		DE0004002084	Serie Q 123119	1,465,257.04	USD $ 152,352.86
IV					USD $ 149,316.24
I	2019				USD $ 147,938.23
II					USD $ 145,361.09
III					USD $ 142,508.66
IV					USD $ 140,234.23
TOTAL				**47,070,601.02**	**USD $13,578,631.99**

*Cifras en Miles.

En el cuadro anterior se considera que México no ha efectuado amortizaciones anticipadas de Bonos Brady y por lo tanto, en él se considera el número total de VRRs en circulación al momento de la reestructura de la deuda externa.

4.4 SITUACION ACTUAL DE BONOS BRADY Y LOS VRRs

El pasado 28 de julio de 2003, México puso fin al remanente de la deuda colocada en bonos Brady al amortizar anticipadamente 1,284.3 millones de dólares, evento que afecta directamente al comportamiento futuro de los VRRs ya que las separaciones que se tenían previstas de las series F-Q de VRRs para operarse como instrumentos independientes ya no tendrá lugar, en base a esto, solo resta hacer un análisis del comportamiento de los VRRs que a la fecha se operan como instrumentos independientes, los cuales son mostrados en el cuadro 1.3 y cuya fecha de vencimiento más lejana será el 30 de junio de 2007.

CONCLUSIONES

Los VRRs son instrumentos opcionales emitidos por el Gobierno Federal Mexicano (Warrants), que constituyeron el mecanismo que el Gobierno Federal pactó con sus acreedores en la reestructura de 1990, a través del cual parte de las pérdidas en que incurrieran los acreedores al momento de la reestructura, pudiera ser compensada parcialmente en el futuro en caso de revertirse de manera importante uno de los factores que fueron sustento para solicitar la reestructura: el bajo precio internacional del petróleo. Los VRRs son derechos sobre los ingresos petroleros, los cuales se determinan en función del precio promedio de exportación de la mezcla mexicana.

Los VRRs se valuaron como un portafolio de opciones sobre el precio promedio del petróleo, donde este activo subyacente es considerado como un activo de consumo por lo que se consideró incluir una variable más al modelo conocida como el Rendimiento de Conveniencia y dándole a este un trato al igual que lo hicieron Gibson y Schwartz, al suponerlo con una estructura similar a la de las tasas de interés y derivado de que los VRRs dependen directamente del precio del petróleo observado, se procedió a despejarlo directamente de la expresión del precio Forward.

A partir del modelo de Black & Scholes y de establecer los supuestos de éste para valuar opciones, se mencionó que se asume la existencia de sólo una variable aleatoria, la cual describe el comportamiento del precio del activo subyacente a través del tiempo y se considera a las demás variables como determinísticas, estas variables son: la volatilidad del activo, las tasas de interés y el rendimiento de conveniencia. En realidad ninguna de estas variables son determinísticas y sin embargo, la metodología de valuación es comúnmente utilizada y aceptada en la práctica. En ese sentido se procedió a utilizar la teoría básica de las series de tiempo para justificar de manera un poco mas formal desde el punto de vista estadístico el hecho de considerar como constante al Rendimiento de Conveniencia y se mostró que al menos es una variable estacionaria con un nivel de confianza de entre 90% y 99% de confianza mediante la prueba de Dickey Fuller.

Se presenta al Proceso de Ito, como el proceso estocástico que modela la evolución de los precios del activo subyacente en la valuación de opciones. Se presentó que el precio de cualquier instrumento derivado, por extraña que sea la función de pagos del activo subyacente, debe cumplir la ecuación diferencial de Black & Scholes y se presentó que a partir de está se puede verificar si la expresión que se tiene para valuar una opción, es una solución válida.

La metodología de valuación de los VRRs, puede adaptarse fácilmente a la valuación de opciones sobre activos de consumo, que puedan surgir como resultado del desarrollo de productos derivados en el Sistema Financiero Mexicano.

El utilizar la metodología Black & Scholes en la propuesta de valuación de los VRRs, tiene la ventaja de ser un modelo de gran aceptación en el ámbito financiero por ser fácilmente utilizada en casos prácticos, y que al ser complementado con la teoría de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas establece una herramienta que permite establecer cuándo la posible fórmula de valuación es correcta, en el sentido de las hipótesis que previamente se definen. Además se propone utilizar la función de distribución de probabilidades del promedio geométrico de variables aleatorias lognormales como aproximación a la distribución de los promedios aritméticos.

.

A lo largo de la historia, el mercado financiero se ha visto en la necesidad de diseñar nuevos instrumentos que le permitan desarrollarse y satisfacer las necesidades de los individuos que en él participan, en ese sentido las posibilidades de diseño de nuevos instrumentos son ilimitadas. El diseño de nuevos instrumentos requiere de la implementación de modelos que permitan estimar su comportamiento futuro y así establecer estrategias que puedan adoptar los participantes bajo ciertas circunstancias. La creación de nuevos instrumentos se da en mucha ocasiones como resultado de la evolución de otros que han existido en el pasado, que adicionan o disminuyen consideraciones que los adaptan a resolver las necesidades que en el momento se presentan. Es por esto que el establecer modelos de valuación y de estimación, aún para instrumentos que aparentemente solo serán utilizados por cierto periodo, tienen la utilidad de adecuarse a necesidades futuras que sean en esencia similares. Así mismo la banca de inversión siempre se encuentra desarrollando el diseño de nuevos derivados con técnicas cada vez más imaginativas para la satisfacción de sus clientes, derivados que usualmente no se negocian en mercados reconocidos, sino que se venden por medio de instituciones financieras a sus clientes o son incorporados a emisiones de acciones u obligaciones con el objeto de hacerlos más atractivos a los inversionistas. En el caso de los VRR´s son un activo derivado que se ofrece incorporado a la emisión de Bonos Brady, cuyo valor depende del valor promedio del subyacente de uno de los activos que ha sido de suma importancia para la humanidad, el petróleo.

ANEXO “A”

ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD

DESCRIPCIÓN

En este anexo se exhibirá el procedimiento empleado en el presente trabajo para la estimación de la volatilidad a partir de datos históricos que se utilizaron en la valuación de los VRRs. El modelo que se utilizará es conocido como “Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente” conocido como EWMA[1] por sus siglas en inglés.

La característica principal de este modelo es que la volatilidad no es constante bajo el principio de que durante algunos periodos la volatilidad puede ser relativamente pequeña, mientras que durante otros periodos ésta puede ser relativamente grande y el modelo guarda tentativamente pista de las variaciones de la volatilidad durante el tiempo.

Para estimar la volatilidad se puede utilizar un registro de los movimientos del precio del activo subyacente. El precio del activo, normalmente se observa a intervalos fijos de tiempo (por ejemplo cada día, cada semana, cada mes, etc.).

[1] ”Exponentially Weighted Moving Average”

Se define a σ_n como la volatilidad del precio del activo en el día n, la cual es estimada al final del día $n-1$. Al cuadrado de la volatilidad en el día n, σ_n^2, se le llama varianza.

La estimación más común para calcular a la volatilidad a partir de los datos históricos está dada por la expresión:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2 \qquad \text{(A.1)}$$

Con:

$$u_i = \ln\left(\frac{s_i}{s_{i-1}}\right)$$

Donde:

m: Es el número de observaciones

s_i: es el precio del activo subyacente al final del intervalo i con $(i = 0,1,2...m)$

T: Es la duración del intervalo de tiempo en años

$\bar{u}$: Es la media de u_i

Que de acuerdo a lo mencionado en la sección 2.2.3.1 sobre el supuesto de la distribución de los precios, se mencionó en la expresión (2.35) que la desviación estándar de la variable u_i es $\sigma\sqrt{T}$.

Si en la expresión (A.1) se toman los siguientes supuestos.

1.- Se asume a $\bar{u}$ como cero.[2]
2.- Se remplaza $m-1$ por m.[3]

Con lo que la fórmula de la varianza se vuelve:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_{n-i}{}^2 \qquad \text{(A.2)}$$

En la expresión (A.2) se les proporciona mismo peso para cada u_i^2's. Sin embargo, dado que el objetivo es monitorear el nivel actual de la volatilidad de manera natural, resulta más apropiado proporcionar un peso mayor, es decir, una

---

[2] Esta hipótesis usualmente tiene una diferencia poco significativa en la estimación de la varianza, porque el cambio esperado de la variable en un día es muy pequeño cuando se compara con los cambios de la desviación estándar.

[3] Este cambio significa cambiar del estimador Insesgado al estimador Máximo verosímil.

mayor ponderación a los datos mas recientes y el modelo que se obtiene estaría dado por:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \omega_i u_{n-i}{}^2 \qquad \text{(A.3)}$$

La variable ω_i es el ponderador del precio observado en el día i, es mayor que cero para toda i y cumple con.

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1 \qquad \text{(A.4)}$$

PROMEDIO MÓVIL PODERADO EXPONENCIALMENTE

El Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente es un caso particular del modelo (A.3) donde las ω_i decrecen exponencialmente conforme se toman datos más antiguos. Específicamente $\omega_{i+1} = \lambda\omega_i$ donde λ es una constante entre cero y uno. La fórmula esta dada por:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \qquad \text{(A.5)}$$

El estimador σ_n, de la volatilidad para el día n, (realizada al final del día $n-1$) es calculada a partir del de σ_{n-1}, (la estimación hecha un día anterior de la volatilidad para el día $n-1$) y u_{n-1} (la más reciente observación del cambio en la variable de mercado).

Una manera de ver mejor porqué la ecuación (A.5) corresponde a una ponderación con decaimiento exponencial, es sustituyendo en esta expresión el valor de σ_{n-1}^2 para obtener:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2] + (1-\lambda)u_{n-1}^2 \\ &= (1-\lambda)[u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2] + \lambda^2\sigma_{n-2}^2\end{aligned}$$

Sustituyendo de manera similar el valor de σ_{n-2}^2 se obtiene que:

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)[u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2] + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

Sustituyendo de manera continua se obtiene que:

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_0^2$$

De esta expresión se desprende que para valores suficientemente grandes de m el término $\lambda^m \sigma_0^2$ es suficientemente pequeño como para ser ignorado de la ecuación (A.5) y que las ponderaciones de para las u_i^2's disminuyen a la tasa λ a través del tiempo.

El modelo de Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente es un modelo que reconoce que la volatilidad no es constante través del tiempo (lo que se conoce como heterocedasticidad) y es posible demostrar que es un caso particular de los modelos GARCH[4] y proporciona una atractiva estimación de la volatilidad con las ventajas de sólo necesitar una relativa pequeña cantidad de datos almacenados. En cada momento del tiempo sólo se tienen que recordar la estimación actual de la varianza y la observación más reciente de la proporción de cambio del precio del activo subyacente y proporciona la capacidad de rastrear los cambios en la volatilidad a través del tiempo.

[4] Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brennan, M. y E. Schwartz, “Evaluating Natural Resource Investments,” Journal of Business, Vol. 58, No 2, 1985.

- Chung, San-Lin, “Efficient Quadratic Approximation of Floating Strike Asian Option Values”, USA, Mayo 2000.

- Clewlow, L. y C. Strickand, “Implementing Derivatives Models”, England, John Wiley & Sons, 1999, 478 pag.

- Cortazar, Gonzalo “Option Markets and Stochastic Behavior of Commodity Prices”, Pontificia Universidad Católica de Chile, 2001.

- Cummins, David “An Asian Option Approach to the Valuation of Futures Contracts”, University of Pennsylvania, 1993.

- Díaz, Alejandro, “Descripción y Valuación de los VRR’s de los Bonos Brady a la Par y a Descuento”, México, agosto, 1997

-Dickey, D.A. y Fuller, W.A. "Distributions of the Estimators for Autoregresive Time Series With a Unit Root" JASA, 1979, 431 pag.

- Gibson, R. y E. Schwartz, “Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims,” The Journal of Finance, Vol. XLV, No 3, 1990.

- Gibson, R. y E. Schwartz, “Valuation of Long Term Oil-Linked Assets,” Lund, D. y B. Oksendal (editors), 1990, 532 pag.

- Gibson, R y E. Schwartz, “Stochastic Models and Option Values,” Applications to Resources, Environment and Investment Problems, Elsevier Science Publishers, 1991. 325 pag.

- Hull, John, “Introducción a los Mercado de Futuros y Opciones”, España, Prentice Hall, 1995, 475 pag.

- Hull, John, “Option, Futures & Other Derivatives”, EUA, Prentice Hall, 2000, 683 pag.

- Nikolaos, T. “Prices Spread and Convenience Yield Behaviour in the International Oil Market”, Journal of Financial, Vol. 11, No 23, 2001.

- Schwartz, Eduardo “Valuing Long-Term Commodity Assets”, Financial Managements, Vol.27, No1, 1998.

- Yaffee, Robert, “Time Series Analysis and Forecasting”, EUA, Academic Press Inc, 2000, 490 pag.

REFERENCIAS DE INTERNET

- Trade Association for Emerging Markets, "EMTA'S Primer on México Value Recovery Rigths", www.emta.org.

- Bloomberg, "Energy Price", www.bloomberg.com

- Risk Metrics Group, "Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard", www.riskmetrics.com/techdoc.html