Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

Aspectos Geométricos del Efecto Aharonov-Bohm

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Físicas

como requisito parcial para la obtención del grado

Maestría en Ciencias con Especialidad en Física

por

María Alicia López Osorio

asesorada por

Dr. Miguel Socolovsky

México, D.F.

Agosto 2006

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco al CONACyT por otorgarme una beca para realizar estudios de maestría durante el período marzo 2003 a febrero 2005. De igual forma agradezco a la DGEP por otorgarme la beca complemento para estudios de posgrado en la UNAM.

México D.F., México — María Alicia López Osorio
Agosto, 2006

Índice general

Resumen

En mecánica cuántica, para partículas escalares, cargadas, en presencia de campos electromagnéticos, Aharonov y Bohm predijeron un efecto de interferencia debido al movimiento de partículas cargadas en regiones donde **E** y **B** son nulos, pero no el potencial de norma. Se tienen generalizaciones del efecto a los casos en que el grupo de norma es no abeliano, es decir en teorías de Yang-Mills. Aquí se analiza la clasificación de los haces fibrados principales correspondientes a dicho efecto en los casos en que el grupo de norma es $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$.

Introducción

En mecánica clásica, la interacción de partículas cargadas con el campo electromagnético es local, a través del acoplamiento de la carga eléctrica de las partículas con los campos eléctrico **E** y magnético **B**, lo cual está expresado en la fuerza de Lorentz ($\hbar$, $c = 1$):

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

que es la fuerza sobre una partícula de carga q debida a un campo electromagnético.

Los campos eléctrico y el magnético se relacionan con los potenciales vector **A** y el escalar ϕ por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

A y ϕ son consideradas cantidades auxiliares, en términos de las cuales **E** y **B** son expresadas de forma invariante ante transformaciones de norma:

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda \tag{1}$$

con $A_0 = \phi$ y Λ una función del espacio-tiempo escalar, real y diferenciable (al menos de clase C^2). Por eso es usual decir que el único efecto físico de un campo electromagnético sobre una carga es la fuerza de Lorentz y ésta solo existe en regiones donde **E** y/o **B** no son cero.

En mecánica cuántica, para partículas escalares, cargadas, en presencia de campos electromagnéticos, las ecuaciones son escritas en términos de los potenciales y no de los campos. Y ya que la invariancia de norma se mantiene en el caso cuántico, se pensó que los potenciales eran cantidades simplemente auxiliares como en el caso clásico. Pero Aharonov y Bohm predijeron un efecto de interferencia debido al movimiento de partículas cargadas en regiones donde **E** y **B** son nulos, pero no **A** y ϕ, lo que significa un efecto no local invariante de norma, que en el caso magnético, depende del flujo del campo en una región inaccesible para las partículas.

A lo largo del tiempo se han hecho extensiones al caso en que los campos de norma se transforman bajo un grupo no abeliano, es decir en las teorías llamadas de Yang-Mills.

Una parte importante que hay que recalcar es que tanto en el caso abeliano, como en los de Yang-Mills, los efectos toman parte en una región del espacio que es múltiplemente conexa, lo que implica usar la parte de las matemáticas concerniente a la topología para lograr una buena descripción de dichos efectos.

En los siguientes capítulos se va a dar una noción general, tanto del efecto abeliano, como de los no abelianos y determinar la clasificación, por isomorfismos, de los haces fibrados principales correspondientes. Razón por la cual, dichos capítulos se estructuran de la siguiente forma:

Capítulo 1 Se establecen algunas definiciones matemáticas útiles para desarrollar la teoría de haces fibrados necesaria en los dos capítulos siguientes.

Capítulo 2 Se estudia el caso del efecto abeliano, determinando la clasificación de los haces fibrados principales sobre el espacio base correspondiente.

Capítulo 3 Se explican aspectos muy generales de las teorías de Yang-Mills, para después describir un poco el efecto en este tipo de teorías y, por último, se hace la clasificación de los haces fibrados principales correspondientes a los casos en que los grupos de norma son $SU(2)$ y $SU(3)$.

Capítulo 1

Definiciones principales

La geometría diferencial se ha convertido en una herramienta cada vez más usada en la física teórica lo que ha llevado a una mayor simplicidad y a un entendimiento más fundamental de la física. Las dos teorías donde se hace más evidente el uso de dicha herramienta es en relatividad general y en las teorías de norma.

En este capítulo se establecen las definiciones matemáticas básicas para entender desde otro punto de vista los espacios utilizados en la física, simetrías, campos de norma y algunos términos ya familiares como vector, tensor y campo vectorial.

1.1. Relación de Equivalencia

1. Una relación R sobre un conjunto X es un subconjunto de $X \times X$. Se dice que $x \in X$ está relacionado a $y \in X$ (denotado xRy) si el par (x, y) pertenece a $R \subset X \times X$.

2. Una relación R sobre un conjunto X se llama **relación de equivalencia** si es:

   - Reflexiva: $xRx, \quad \forall\, x \in X$.
   - Simétrica: si $xRy \Rightarrow yRx, \quad \forall\, x, y \in X$.
   - Transitiva: si xRy y $yRz \Rightarrow xRz, \quad \forall\, x, y, z \in X$.

3. Sea X un conjunto donde existe una relación de equivalencia, la **clase de equivalencia** de $x \in X$ para la relación R es el conjunto:

$$E(x, R) = \{y \in X |\ x R\, y\} .$$

Las clases de equivalencia tienen las siguientes propiedades:

- Todo $E(x, R) \neq \emptyset$.
- $y \in E(x, R) \Leftrightarrow x \in E(y, R)$ con $x, y \in X$.
- $E(x, R)$ y $E(y, R)$ o son idénticos o no tienen elementos en común.

4. Sea $\mathcal{F}$ una familia de clases de equivalencia, entonces:

- Todo conjunto de $\mathcal{F}$ es no vacío.
- Todo $x \in X$ pertenece a uno y solo un conjunto de la familia.
- x está relacionado con y si y solo si x y y pertenecen al mismo conjunto de la familia $\mathcal{F}$.

1.2. Espacio Topológico

1. Una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las tres condiciones:

- $d(x, y) = d(y, x)\,, \quad \forall\ x,\ y \in X$.
- $d(x, y) \geq 0$, e igual a cero $\Leftrightarrow x = y\,, \quad \forall\ x,\ y \in X$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\,, \quad \forall\ x,\ y,\ z \in X$.

2. Un conjunto X junto con su métrica se dice que es un espacio métrico.

3. La colección de todos los conjuntos abiertos τ_i en un espacio métrico X es llamada la topología τ asociada al espacio y posee las siguientes propiedades:

- $\emptyset$ y $X \in \tau$.
- $\forall\ \tau_1, \tau_2 \in \tau, \quad \tau_1 \bigcup \tau_2 \in \tau$.
- $\forall\ \tau_1, \tau_2 \in \tau, \quad \tau_1 \bigcap \tau_2 \in \tau$.

4. El conjunto X junto con la topología τ es un **espacio topológico**.

5. Un espacio topológico es de *Hausdorff* si $\forall\ x, y \in X$ siempre existen dos abiertos τ_x y τ_y, conteniendo a x y a y respectivamente, tales que $\tau_x \bigcap \tau_y = \emptyset$.

6. Un espacio topológico se dice que es conexo si no puede ser escrito como la union de dos conjuntos abiertos disjuntos.

7. Sean dos espacios topológicos X y Y. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si:
   - f es biyectiva.
   - f y f^{-1} son continuas.

8. Un espacio topológico se dice que es conexo si no es una unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.

9. Un espacio topológico X se dice que es arco-conexo si dados dos puntos cualesquiera p, $q \in X$ existe una función continua f del intervalo $[0, 1]$ a X que cumple $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

1.3. Variedad Diferenciable

Se dará por hecho que M es un espacio topológico de Hausdorff conexo.

1. Una carta coordenada $m-$dimensional en un espacio topológico M es un par (U, ϕ), donde U es un subconjunto abierto de M y ϕ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

2. Un atlas de dimensión m sobre M es una familia de cartas coordenadas $m-$dimensionales, (U_i, ϕ_i) tales que:
   - M es cubierto por toda la familia, es decir: $M = \bigcup_i U_i$.
   - Cada función de transición $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \bigcap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \bigcap U_j)$ es de clase C^∞.

3. Una **variedad diferenciable** M es un espacio topológico que está equipado con un atlas.

4. Un punto $p \in U \subset M$, respecto a la carta (U, ϕ), tiene asociado el punto $\big(x^1(p),\, x^2(p),\, \ldots,\, x^m(p)\big) \in \mathbb{R}^m$, donde las funciones $x^\mu : U \to \mathbb{R}$ (con $\mu = 1, \ldots, m$) están definidas en términos de los operadores de proyección $u^\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como:
$$x^\mu(p) = u^\mu\left(\phi(p)\right).$$
A los números $x^\mu(p)$ se les llama las coordenadas de p.

5. Una función $f : M \to N$, con M y N dos variedades diferenciables, es un difeomorfismo si:
   - f es biyectiva.
   - f y f^{-1} son de clase C^∞.

6. Una **curva** γ sobre una variedad M es una función de clase C^∞ que va de un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ a M.

7. Una derivada en un punto $p \in M$ es una función $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definida por[1]:
$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$
(con γ una curva sobre M con parámetro λ y λ_0 el punto donde $\gamma(\lambda_0) = p$) tal que:
   - $v(af + g) = av(f) + v(g)\,, \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M)$ y $a \in \mathbb{R}$.
   - $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)\,, \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M)$.

8. El **espacio tangente** a M en el punto $p \in M$, denotado T_pM, es el conjunto de todas las derivadas en p, que es un espacio vectorial real con las definiciones:
$$\begin{aligned}(v_1 + v_2)(f) &:= v_1(f) + v_2(f)\\ (av)(f) &:= av(f)\end{aligned}$$
$\forall\, v_1, v_2 \in T_pM,\ f \in C^\infty(M)$ y $a \in \mathbb{R}$.

[1] $C^\infty(M)$ es el espacio de todas las funciones de M a $\mathbb{R}$ infinitamente diferenciables.

9. El conjunto de m derivadas en un punto $p \in M$, para una carta $(U,\, \phi)$, definidas como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \equiv (\partial_\mu)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu}\, f \circ \phi^{-1}\Big|_{\phi(p)} \quad ; \quad \mu = 1, \ldots, m$$

forma una base para T_pM.

10. Si $v \in T_pM$, entonces

$$v = \sum_{\mu=1}^{m} v^{\,\mu}\, (\partial_\mu)_p$$

donde las componentes $v^{\,\mu}$ de la derivada $v \in T_pM$ respecto al sistema coordenado $\left\{x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^m\right\}$ están definidas como:

$$v^{\,\mu} := v(x^\mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,(x^\mu \circ \gamma)(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} .$$

11. Sean M y N dos variedades, sea si $h : M \to N$ y sea $v \in T_pM$, la función "push forward" h_* toma valores en T_pM y los lleva a $T_{h(p)}N$. Una propiedad de la función h_* es que es lineal.

12. Un vector cotangente en un punto $p \in M$ es una función $k : T_pM \to \mathbb{R}$, lineal, cuyo valor al actuar sobre T_pM se escribe $k(v)$.

13. El **espacio cotangente** en $p \in M$ es el conjunto T_p^*M que consta de todas las funciones lineales de T_pM a $\mathbb{R}$, es decir, es el espacio vectorial dual de T_pM. La base dual se denota $\left\{(\mathrm{d}x^1)_p\,,\, \ldots,\, (\mathrm{d}x^m)_p\right\}$ y se define por:

$$(\mathrm{d}x^\mu)_p\,((\partial_\nu)_p) := \delta^{\,\mu}_{\,\nu}$$

$\forall\, \mu,\, \nu = 1,\, \ldots,\, m$. Entonces cualquier $k \in T_p^*M$ se puede expandir como:

$$k = \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_p\,, \quad \text{con } \ k_\mu = k\left((\partial_\mu)_p\right).$$

14. La función $h^* : T^*_{h(p)}N \to T_p^*M$ es el dual de h_*.

1.4. Campos Vectoriales y Formas Diferenciales

1. Un **campo vectorial** X en una variedad M es una función de $C^\infty(M)$ a $C^\infty(M)$ que es lineal. La imagen de $f \in C^\infty(M)$, $X(f)$, está definida por:

$$(X(f))(p) := X_p(f) \in \mathbb{R},$$

con $X_p \in T_pM$. De este modo se dice que el campo vectorial X asigna un vector tangente a cada punto $p \in M$. El campo X tiene las siguientes propiedades:

- $X(af + g) = aX(f) + X(g) \quad \forall\, f,\, g \in C^\infty(M)$ y $a \in \mathbb{R}$.
- $X(fg) = fX(g) + gX(f) \quad \forall\, f,\, g \in C^\infty(M)$.

Entonces X es como una derivada de funciones en $C^\infty(M)$. Al conjunto de todos los campos vectoriales sobre M se le denota $\mathrm{Vect}(M)$.

2. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre M y $a \in \mathbb{R}$, definiendo:

$$(aX + Y)f := aX(f) + Y(f)$$

$\forall\, f \in C^\infty(M)$, $\mathrm{Vect}(M)$ adquiere la estructura de espacio vectorial real, denotado $\mathrm{Vfld}(M)$.

3. Sean X y Y campos vectoriales sobre M y $g,\, h \in C^\infty(M)$, se puede definir un nuevo campo $gX + hY$ mediante:

$$(gX + hY)f(p) := g(p)X_p(f) + h(p)Y_p(f)$$

$\forall\, p \in M$ y $f \in C^\infty(M)$ con lo que se tiene un módulo de campos sobre el anillo $C^\infty(M)$.

4. Sea $(U,\, \phi)$ una carta en M, entonces $\forall\, p \in U$:

$$X(f)(p) = \left(\sum_{\mu=1}^{m} X^\mu \partial_\mu \right)(f)(p) = \sum_{\mu=1}^{m} X(x^\mu)(p)\, (\partial_\mu)_p\, f$$

A las funciones X^μ se les llama las componentes del campo vectorial X. Los campos $\{\partial_\mu\}$ son linealmente independientes y forman una base para $\mathrm{Vfld}(M)$.

5. Se define el conmutador de dos campos vectoriales como:

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

que es lineal y es un campo vectorial[2], cuyas componentes son:

$$[X, Y]^\mu := [X, Y](x^\mu) = \sum_{\nu=1}^{m} X^\nu \partial_\nu Y^\mu - \sum_{\nu=1}^{m} Y^\nu \partial_\nu X^\mu$$

y que satisface:

- $[X, Y] = -[Y, X]$.
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

$\forall\ X, Y, Z$ campos sobre M.

6. Una **1-forma** ω sobre una variedad M es una función de $\mathrm{Vect}(M)$ a $C^\infty(M)$ que es lineal sobre $C^\infty(M)$, y está definida por:

$$\omega(X)(p) := \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$$

es decir, es una asignación suave de un vector cotangente ω_p a cada punto $p \in M$.

7. Sean ω y κ dos 1-formas sobre M y $a \in \mathbb{R}$, definiendo:

$$\begin{aligned} (\omega + \kappa)X &= \omega(X) + \kappa(X) \\ (a\omega)X &= a\omega(X) \end{aligned}$$

$\forall\ X \in \mathrm{Vect}(M)$, el conjunto de todas las 1-formas sobre M (denotado $\Omega^1(M)$) adquiere la estructura de espacio vectorial real. Si ahora se define la multiplicación de una 1-forma por una función suave como sigue:

$$(f\omega)X = f\omega(X)$$

$\Omega^1(M)$ adquiere la estructura de modulo sobre $C^\infty(M)$. La base $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ para las 1-formas, en una representación de coordenadas locales, se define por:

$$\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$$

[2]La composición está definida como: $X \circ Y = X(Y)$ y es lineal, pero no es un campo vectorial.

con lo que cualquier 1-forma se puede escribir como:

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{m} \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu \,, \quad \text{con} \quad \omega_\mu := \omega\left(\partial_\mu\right).$$

8. Se puede generalizar la noción de vector cotangente al caso en que tome valores en T_pM y los lleve a un espacio vectorial real general V. Una $1-$forma que asigna este tipo de vectores se llama una $1-$forma $V-$evaluada.

9. Si ω es una $1-$forma sobre N, el "pull-back"de ω es la $1-$forma $h^*(\omega)$ sobre M definida por:

$$h^*(\omega)(X)(p) = (h^*(\omega))_p(X_p) := (\omega)_{h(p)} h_*(X_p)$$

para todos los puntos $p \in M$ y todos los vectores tangentes $X_p \in T_pM$.

10. El producto tensorial $V \otimes W$ de dos espacios vectoriales reales V y W es el espacio vectorial formado por todas las funciones bilineales del tipo $v \otimes w : V^* \times W^* \to \mathbb{R}$ (con $v \in V$, $w \in W$ y V^* y W^* los espacios duales de V y W, respectivamente) definidos por:

$$\left(v \otimes w\right)\left(k, l\right) = k(v)l(w)$$

con $k \in V^*$ y $l \in W^*$.

11. Un tensor de tipo $(r,\, s)$, con $r,\, s \geq 0$, en un punto $p \in M$ es un elemento del espacio producto tensorial[3]:

$$T_p^{r,s}M := \otimes^r T_pM \otimes \otimes^s T_p^*M$$

es decir, es un mapeo multilineal:

$$\times^r T_p^*M \times \times^s T_pM \to \mathbb{R}.$$

Como casos especiales se tienen: $T_p^{0,1}M = T_p^*M$ y $T_p^{1,0}M = T_pM$.

12. Un **campo tensorial** $(r,\, s)$ es una función:

$$\times^r \Omega^1(M) \times \times^s \mathrm{Vfld}(M) \to C^\infty(M)$$

que asigna un tensor del tipo $(r,\, s)$ a cada $p \in M$.

[3] $\otimes^r V$ significa multiplicar (con el producto tensorial) r veces el espacio V

13. Una $n-$**forma** es un campo tensorial ω del tipo $(0, n)$, $0 \leq n \leq \mathrm{dim}M$, que es totalmente antisimétrico, es decir, que para cualquier permutación P de los índices $1, 2, \ldots, n$:

$$\omega(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n) = (-1)^{\mathrm{deg}P}\omega(X_{P(1)},\, \ldots,\, X_{P(n)})$$

donde X_i (con $i = 1, \ldots n$) son campos vectoriales arbitrarios sobre M y $\mathrm{deg}P$ es el grado de permutación P, es decir 0 si P es par y 1 si P es impar. El conjunto de todas las $n-$formas sobre M se denota $\Omega^n(M)$, con $\Omega^0(M)$ el espacio de las funciones en $C^\infty(M)$.

14. Se pueden construir $n-$formas a partir del **producto wedge** de n $1-$formas, el cual se define:

- Para dos $1-$formas ω_1 y ω_2 como la $2-$forma

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1$$

- Para tres $1-$formas ω_1, ω_2 y ω_3 como la $3-$forma

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad &:= \quad \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3 + \omega_2 \otimes \omega_3 \otimes \omega_1 + \omega_3 \otimes \omega_1 \otimes \omega_2 \\ &- \quad \omega_2 \otimes \omega_1 \otimes \omega_3 - \omega_3 \otimes \omega_2 \otimes \omega_1 - \omega_1 \otimes \omega_3 \otimes \omega_2 \end{aligned}$$

- Para n $1-$formas como la $n-$forma

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n := \sum_{\text{permutaciones P}} (-1)^{\mathrm{deg}P}\omega_{P(1)} \otimes \omega_{P(2)} \otimes \ldots \otimes \omega_{P(n)}$$

15. Siendo $\{\mathrm{d}x^\mu\}$una base para $\Omega^1(M)$, una base para $\Omega^n(M)$ es

$$\{\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n}\}$$

que consta de $C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ elementos (con $m = \mathrm{dim}M$). En esta base una $n-$forma se puede escribir

$$\omega = \frac{1}{n!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_n}\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n} = \frac{1}{n!}\omega_{[\mu_1\ldots\mu_n]}\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n}$$

donde $\omega_{[\mu_1\ldots\mu_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\text{permutaciones } P}(-1)^{\mathrm{deg}P}\omega_{P(\mu_1)\ldots P(\mu_n)}$.

16. Si $\omega \in \Omega^n(M)$ y $\kappa \in \Omega^p(M)$, la $(n+p)-$forma $\omega \wedge \kappa$:

- $\omega \wedge \kappa \equiv \frac{1}{(n+p)!}(\omega \wedge \kappa)_{[\mu_1 \ldots \mu_n \nu_1 \ldots \nu_p]} \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n} \wedge \mathrm{d}x^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_p}$
- $(\omega \wedge \kappa)_{[\mu_1 \ldots \mu_n \nu_1 \ldots \nu_p]} = C_n^{n+p} \omega_{[\mu_1 \ldots \mu_n} \kappa_{\nu_1 \ldots \nu_p]}$
- $\omega \wedge \kappa = (-1)^{np} \kappa \wedge \omega$

17. Se define la **derivada exterior** como el conjunto único de mapeos:

$$\mathrm{d} : \Omega^n(M) \to \Omega^{n+1}(M)$$

tal que las siguientes propiedades se cumplen:

- $\mathrm{d} : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ para cualquier función $f \in \Omega^0(M)$ es:

$$\mathrm{d}f(X) = X(f)\,.$$

- $\mathrm{d}(c\omega + \kappa) = c\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\kappa \;\forall\; \omega,\, \kappa \in \Omega^n(M)$ y $c \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{d}(\omega \wedge \kappa) = \mathrm{d}\omega \wedge \kappa + (-1)^n \omega \wedge \mathrm{d}\kappa$ para toda $\omega \in \Omega^n(M)$ y $\kappa \in \Omega^p(M)$.
- $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ para toda $\omega \in \Omega^n(M)$.

1.5. Homotopía

1. Sean M y N dos espacios topológicos y sean $f,\, g : M \to N$ dos funciones continuas. f **es homotópica a** g [4] (se denota $f \sim g$) si existe una función continua $h : M \times [0,1] \to N$ tal que para todo $p \in M$:

$$\begin{aligned} h(p,0) &= f(p) \\ h(p,1) &= g(p) \end{aligned}$$

2. Sean f y g dos funciones continuas del espacio M al N y sea U un subconjunto de M, f es homotópica a g relativa a U ($f \sim g \;\mathrm{rel}\, U$) si $f \sim g$ y si para $h : M \times [0,1] \to N$:

$$h(p_0, \lambda) = f(p_0) = g(p_0)$$

$\forall\; \lambda \in [0,1]$ y $p_0 \in U$.

[4] *Homotopía* es una relación de equivalencia y puede usarse para dividir espacios en clases de equivalencia llamadas clases de homotopía.

3. La función constante $c : M \to N$, con $c(p) = q_0$ para un q_0 particular y toda p, siempre se puede definir y cualquier función homotópica a c se dice homotópica a una constante.

4. Para un espacio M si la función identidad, $i : M \to M$, $i(p) = p$ es homotópica a una contante, se dice que M es contraíble.

5. Dos espacios M y N se dicen del mismo tipo homotópico[5] si existen funciones $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que:

    - $g \circ f : M \to M$ es homotópica a la identidad en M.
    - $f \circ g : N \to N$ es homotópica a la identidad en N.

6. Una **trayectoria** en una variedad diferenciable M es una función:

$$\alpha : [0,1] \to M$$

de clase C^∞, con $\alpha(0)$ el inicio y $\alpha(1)$ el final.

7. Una trayectoria se dice cerrada si $\alpha(0) = \alpha(1)$ (a este punto se le llama punto base).

8. La inversa de una trayectoria es la función $\alpha^{-1} = \alpha(1 - \lambda)$ con $\lambda \in [0,1]$.

9. La trayectoria α, se llama nula si $\alpha(\lambda) = p_0$ para algún $p_0 \in M$ y $\forall\ \lambda \in [0,1]$.

10. Dadas dos trayectorias α y β tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, la trayectoria producto se define como:

$$\alpha * \beta : [0,1] \to M$$

$$(\alpha * \beta)(\lambda) = \begin{cases} \alpha(2\lambda) & 0 \le \lambda \le \frac{1}{2} \\ \beta(2\lambda - 1) & \frac{1}{2} \le \lambda \le 1 \end{cases}$$

11. Dos trayectorias α y β son homotópicas si $\alpha \sim \beta$ rel $\{0,1\}$.

[5]La relación *mismo tipo homotópico* es de equivalencia y por lo tanto hay clases de tipo homotópico para espacios.

12. Las trayectorias cerradas sobre un espacio M y con punto base p_0 se dividen en clases de equivalencia bajo homotopía relativa, las cuales forman un grupo, el **grupo fundamental**, que se denota $\pi_1(M, p_0)$, con el producto entre clases definido por:

$$[\alpha]\,[\beta] = [\alpha * \beta].$$

    El elemento identidad es la clase de una trayectoria nula y el inverso de una clase es la clase de la trayectoria inversa. En el caso de un espacio arco-conexo M el grupo $\pi_1(M, p_0)$ es independiente del punto base p_0 y se denota simplemente $\pi_1(M)$.

13. Un espacio arco-conexo para el cual $\pi_1(M)$ consta solo de la identidad, se dice que es simplemente conexo.

14. Sea $M_n := C(S^n, M)$ el conjunto de mapeos continuos de la $n-$esfera, S^n, a un espacio topológico M. Decimos que M es $n-$**conexo** si M_n (con su topología estándar) es conexo por trayectoria.

1.6. Grupos de Lie

1. Un **grupo de Lie**, real, G es un conjunto que es:

    - Un grupo en el sentido algebraico usual (con la operación $*$):
        - Cerrado.
        - Asociativo.
        - $\exists e \in G$ tal que $\forall\, g \in G : \quad g * e = e * g = g$.
        - $\exists\, g^{-1} \in G$ tal que $\forall\, g \in G : \quad g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
    - Una variedad diferenciable con las siguientes propiedades:
        - Tomar el producto de dos elementos es una operación suave, es decir, la función $\mu : G \times G \to G$, definida por

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$$

          es de clase C^∞.

- Tomar el inverso de un elemento del grupo es una operación suave, es decir, la función $\iota : G \to G$, definida por:

$$g \mapsto g^{-1}$$

  es de clase C^∞.

2. Un grupo de Lie es compacto si como espacio topológico lo es [6].

3. Un **álgebra de Lie** se define como un espacio vectorial real $\mathcal{L}$ con una función bilineal $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, denotada $(A, B) \mapsto [AB]$, que satisface para todo A, B y C en $\mathcal{L}$:

   - Antisimetría: $[AB] = -[BA]$.
   - Identidad de Jacobi: $[\,A\,[BC]\,] + [\,B\,[CA]\,] + [\,C\,[AB]\,] = 0$.

4. La traslación izquierda de un elemento de un grupo es la función l_g definida por $l_g(g') = gg'$. Similarmente la traslación derecha se define por $r_g(g') = g'g$.

5. Sean M y N dos variedades, sea $h : M \to N$, y sean X y Y dos campos vectoriales sobre M y N, respectivamente. Se dice que X y Y están $h-$relacionados, si para todos los puntos $x \in M$: $h_*(X_p) = Y_{h(p)}$. En el caso de que las variedades son un grupo de Lie G, y la función sea la traslación derecha o izquierda de G, se dice que un campo vectorial sobre G es invariante por izquierda, si está l_g-relacionado con él mismo para todo g en G: $l_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'}$.

6. El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G es un espacio vectorial real.

7. Existe un isomorfismo entre el espacio tangente al elemento identidad de G, T_eG, y el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre G: $A \mapsto X^A$ donde $A \in T_eG$ y X^A es un campo vectorial sobre G, definido por $L_g^A := l_{g*}A$, para todo $g \in G$. T_eG se conoce como el **álgebra de Lie de** G, $\mathfrak{g}$.

[6]Un espacio topológico es compacto si es de Hausdorff y si de cualquier cubierta de él es posible seleccionar una cubierta con un número finito de conjuntos.

8. Sea G un grupo bajo $*$ y V un espacio vectorial. Una representación ρ del grupo G sobre V es un homomorfismo entre grupos, de G a G_V, donde G_V es un subconjunto de transformaciones lineales de V a V. Si G es un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra, dada la representación $\rho : G \to G_V$, existe $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_V$, donde $\mathfrak{g}_V$ es el álgebra de Lie asociada a G_V.

9. La representación adjunta de un grupo de Lie G es la representación de G sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ (el álgebra de Lie de G).

10. La representación fundamental de un grupo de Lie es la representación no trivial, de menor dimensión, de dicho grupo.

11. Un grupo G tiene una **acción izquierda** sobre un conjunto M si hay un homomorfismo $g \mapsto \gamma_g$ de G al grupo de biyecciones de M (denotado $\mathrm{Perm}(M)$). Entonces:

    - $\gamma_e(p) = p\,, \quad \forall\, p \in M.$
    - $(\gamma_{g_2} \circ \gamma_{g_1})(p) = \gamma_{g_2 * g_1}(p)\,, \quad \forall\, g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$ [7].

12. Una acción izquierda de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M es un homomorfismo de G a $\mathrm{Diff}(M)$ (con $\mathrm{Diff}(M)$ el grupo de difeomorfismos de M) con la propiedad de que la función $\Gamma : G \times M \to M$ definida por:

$$(g, p) \mapsto \gamma_g(p)$$

    es una función suave que va de la variedad diferenciable $G \times M$ a M. En términos de la función Γ, la acción izquierda queda dada por las condiciones:

    - $\Gamma(e, p) = p\,, \quad \forall\, p \in M.$
    - $\Gamma(g_2\,,\, \Gamma(g_1, p)) = \Gamma(g_2 * g_1,\, p)\,, \quad \forall\, g_2, g_1 \in G.$

13. La acción de G (también llamada $G-$acción) es libre si $\forall\, p \in M$,

$$\{g \in G \,|\, \gamma_g(p) = p\} = \{e\}$$

[7] En una acción derecha se tiene un anti homomorfismo (en lugar de un homomorfismo) de G a $\mathrm{Perm}(M)$, es decir, $\gamma_{g_2} \circ \gamma_{g_1} = \gamma_{g_1 * g_2}$.

Esto quiere decir que dados dos puntos p y q en M o no existe un $g \in G$ tal que $\gamma_g(q) = p$ o solo hay un único $g \in G$ tal que $p = \gamma_g(q)$.

14. La **órbita** O_p de la $G-$acción a través de $p \in M$ es el conjunto de todos los puntos en M que pueden ser conectados a partir de p:

$$O_p := \{q \in M \mid \exists\, g \in G \ \text{ con } q = \gamma_g(p)\}.$$

15. Dada una $G-$acción sobre una variedad M, una relación de equivalencia en M es que dos puntos se dicen equivalentes si y solo si están en la misma órbita. Las clases de equivalencia que así se obtienen son las órbitas. El conjunto de clases de equivalencia se llama el **espacio órbita** de la $G-$acción sobre M y se denota M/G.

1.7. Haces Fibrados

1. Un **haz** ξ es un conjunto $(E,\, \pi,\, M)$ donde E y M son variedades diferenciales y $\pi : E \to M$ es una función de clase C^∞. E se llama el *espacio total*, M el *espacio base*, π la *proyección* y su preimagen E_p es la *fibra* sobre $p \in M$. Una sección transversal de un haz $(E,\, \pi,\, M)$ es una función $s : M \to E$ tal que la imagen de cada punto $p \in M$ cae en la fibra E_p sobre p.

2. Un haz fibrado es un haz donde las fibras E_p son todas difeomorfas a un espacio común F llamado la fibra del haz.

3. El haz producto está definido como $(M \times F,\, \mathrm{pr}_1,\, M)$ donde F es la fibra (llamada fibra estándar) y $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$ la proyección definida por:

$$\mathrm{pr}_1 : (p, f) \mapsto p\,, \qquad \text{con } p \in M \text{ y } f \in F.$$

4. Una función entre haces $(E,\, \pi,\, M)$ y $(E',\, \pi',\, M')$ es un par de funciones $(u,\, \varphi)$ donde $u : E \to E'$ y $\varphi : M \to M'$ tal que:

$$\pi' \circ u = \varphi \circ \pi$$

Esto implica que $(u,\, \varphi)$ transforma fibras en fibras.

5. Un isomorfismo entre haces (E, π, M) y (E', π', M') es una función (u, φ) donde u y φ son biyectivas.

6. Dados dos haces con el mismo espacio base (aunque no mismo espacio total ni proyección) la función (u, id_M) es llamada una $M-$función de haces, con id_M la identidad en M.

7. Un haz fibrado es trivial si es $M-$isomorfo al haz producto.

8. Dado $\xi = (E, \pi, M)$ y $N \subseteq M$ una subvariedad de M. Se define la restricción de ξ a N como el haz con espacio total:

$$E|_N = \{q \in E \mid \ \pi(q) \in M\}$$

espacio base N y π restringida a N.

9. Se dice que un haz (E, π, M) es localmente trivial con fibra estándar F si para cada $p \in M$ existe una vecindad U alrededor de p y un isomorfismo entre $(E|_U, \pi|_U, U)$ y $(U \times F, \pi, U)$, mandando cada fibra E_p a la fibra $p \times F$.

10. Sea Ξ el conjunto de haces fibrados sobre M [8] con fibra F. Una relación de equivalencia R entre esos haces es que sean $M-$isomorfos. La clase de equivalencia llamada clase de isomorfismos sobre M es el conjunto:

$$\tau_\xi = \{\eta \in \Xi | \xi R \eta\}$$

El conjunto de clases de isomorfismos de haces sobre M con fibra F se denota $B_F(M)$.

11. Sea P una variedad y G un grupo de Lie. Un **haz fibrado principal**, denotado por $(P, \pi, M)_G$, diferenciable, sobre M, con grupo de estructura G, consiste de una variedad P y una acción de G sobre P que satisface las siguientes condiciones:

    - G actúa libremente sobre P por la derecha: $P \times G \to P$ es denotado por $(u, a) \mapsto ua$.

[8] Con *haz sobre* M se quiere decir que el haz tiene a M como espacio base.

- M es el espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G, $M = P/G$, y la proyección canónica $\pi : P \to M$ es diferenciable.
- P es localmente trivial, esto es, cada punto $x \in M$ tiene una vecindad U tal que la preimagen de π en U, $\widetilde{\pi}(U)$ es isomorfa a $U \times G$ en el siguiente sentido: existe un difeomorfismo $\psi : \widetilde{\pi}(U) \to U \times G$ tal que $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, donde φ es una función de $\widetilde{\pi}(U)$ a G que satisface $\varphi(ua) = \varphi(u) \cdot a$ para toda $u \in \widetilde{\pi}(U)$ y $a \in G$.

12. El haz $(M \times G,\, \mathrm{pr}_1,\, M)$ es un haz fibrado principal, bajo la acción derecha de G: $(p, g_1)\gamma_g = (p, g_1 * g)$ y se le llama el haz producto.

13. Una sección transversal (global) de un haz fibrado principal, es una función, s, del espacio base al espacio total, tal que $\pi(s(x)) = x \; \forall x \in M$.

14. Sean U_α y U_β dos abiertos de M, una función de transición es un mapeo $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$. Tales funciones, cumplen que para todo x en la intersección $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$:

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)\psi_{\gamma\beta}(x).$$

    Esta condición se llama condición de cociclo.

15. Cualquier conjunto de funciones de transición definido para una cubierta $\{U_\alpha\}$ de M, que satisface la condición de cociclo, determina de forma única un haz fibrado principal.

1.8. La forma de conexión

1. Sea $\xi = (P, \pi, M)_G$ un haz fibrado principal. Sea T_pP el espacio tangente a $p \in P$. El subespacio vertical V_pP de T_pP se define como:

$$\begin{aligned} V_pP &:= \{\tau \in T_pP | \pi_* = 0\} \\ \dim V_pP &= \dim \mathfrak{g} = \dim G. \end{aligned}$$

2. Una conexión es una asignación suave de un subespacio H_pP de T_pP en cada $p \in P$ tal que:

$$\begin{aligned} T_pP &= V_pP \oplus H_pP \quad \forall\, p \in P \\ \gamma_{g*}(H_pP) &= H_{\gamma_g(p)}P \quad \forall\, g \in G \end{aligned}$$

3. Una 1-forma de conexión sobre P es una 1-forma evaluada en el álgebra de Lie de G, que satisface:

$$\begin{aligned} \omega(X^A) &= A \quad \forall\, A \in \mathfrak{g} \\ \gamma_g^*(\omega) &= \mathrm{ad}_{g^{-1}*}\omega\,, \quad \text{es decir,} \quad (\gamma_g^*\omega)(X) = \mathrm{ad}_{g^{-1}*}\omega(X) \end{aligned}$$

donde $\mathrm{ad}_g : G \to G$ está definido por $\mathrm{ad}_g g' = gg'g^{-1}$ y ad_{g*} es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ a si mismo.

4. Un vector horizontal se define entonces como:

$$v \in H_pP \Leftrightarrow \omega_p(v) = 0.$$

5. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de M, sean σ_α un conjunto de secciones en el haz ξ, definidas por $\sigma_\alpha(x) = \gamma_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}(p)$, donde $x \in U_\alpha$, p pertenece a la preimagen de U_α bajo la proyección π, $\widetilde{\pi}(U_\alpha)$, $\varphi_\alpha : \widetilde{\pi}(U_\alpha) \to G$, y $\varphi_\alpha^{-1}(p) \in G$ es el elemento inverso de $\varphi_\alpha(p)$. Y sean $\psi_{\alpha\beta}$ las correspondientes funciones de transición. Para cada α, se define una 1-forma sobre U_α evaluada en $\mathfrak{g}$, por:

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(\omega).$$

6. Sea M de cuatro dimensiones, con coordenadas locales x_μ en U_α. Sea ω una 1-forma sobre U_α, que se puede escribir en sus componentes como: $\omega_\alpha = \sum_\mu A_{\alpha\mu}(x)\mathrm{d}x^\mu$. La sección σ_α se transforma por la acción de una función $g : M \to G$ de la siguiente forma:

$$\sigma'_\alpha(x) = \gamma_{g(x)}\sigma_\alpha(x)$$

entonces:

$$\omega'_\alpha = A'_{\alpha\mu}\mathrm{d}x^\mu$$

Y se tiene:

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu\, g + g^{-1}\partial_\mu\, g$$

Si se relaciona la transformación y el cambio de sección en el haz fibrado principal, el potencial de norma naturalmente se convierte en las componentes de un objeto geométrico: una forma de conexión sobre P.

7. El "lift" $\widetilde{X}$ de un campo vectorial X sobre M es el campo horizontal sobre P que se proyecta sobre X:

$$\pi_*(\widetilde{X}_u) = X_{\pi(u)} \quad \forall\, u \in P.$$

8. Sean x^μ las coordenadas locales en una vecindad U_α, sea σ_α una sección sobre U_α, el campo ∂_μ sobre U_α tiene un lift $\widetilde{\partial}_\mu$ sobre $\tilde{\pi}(U_\alpha)$:

$$\widetilde{\partial}_\mu|_u = \sigma_{\alpha *}\partial_\mu - X^{A_{\alpha\mu}},$$

donde $X^{A_{\alpha\mu}(x)}$ denota el campo asociado a $A_{\alpha\mu}(x) \in \mathfrak{g}$ y $u = \sigma_\alpha$. Identificando $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu$ con ∂_μ y $X^{A_{\alpha\mu}}$ con A_μ, se tiene la derivada covariante usual, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, que es una notación corta para el lift de ∂_μ en el punto $\sigma_\alpha(x)$.

9. Se puede calcular $[\widetilde{\partial}_\mu,\, \widetilde{\partial}_\nu]$ usando la expresión local $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, obteniéndose $[\mathcal{D}_\mu,\, \mathcal{D}_\nu] = -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu])$. El lado derecho de la ecuación es un campo vectorial sobre el espacio total escrito como un elemento del álgebra de Lie, denotado por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu]$$

que es el campo de norma usual definido en U_α. Entre U_α y U_β se tiene $F_{\beta\mu\nu} = \mathrm{ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1} *} F_{\alpha\mu\nu}$.

10. Sea un conjunto de 2-formas:

$$F_\alpha = \frac{1}{2} F_{\alpha\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

evaluadas en el álgebra, usando las funciones φ_α de $\widetilde{\pi}(U_\alpha)$ a G se construye una 2-forma sobre el espacio total con valores en el álgebra:

$$F = \mathrm{ad}_{\varphi_\alpha^{-1} *}(\pi^* F_\alpha)$$

esta 2−forma es la llamada **forma de curvatura**, que en términos de la forma de conexión se escribe:

$$F = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\, \omega].$$

11. Sean X y Y campos sobre P, $F(X,\, Y) = \mathrm{d}\omega(X,\, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X),\, \omega(Y)] = \mathrm{d}\omega(X_h,\, Y_h)$, donde X_h y Y_h son las partes horizontales de los campos.

12. Sea ϕ una r−forma sobre P, entonces $D\phi$ es la $(r+1)$−forma sobre P tal que:

$$D\phi(X_1,\, \ldots,\, X_{r+1}) = \mathrm{d}\phi(X_{h\,1},\, \ldots,\, X_{h\,r+1}).$$

D es llamada la **derivada covariante exterior**. Nótese que $D^2 \neq 0$, aunque $\mathrm{d}^2 = 0$.

13. Usando la derivada covariante exterior, se tiene que $F = D\omega$, y aunque $D^2 \neq 0$, siempre se cumple que $DF = 0$ para cualquier conexión. Ésta es la llamada identidad de Bianchi.

14. Sea ξ el haz asociado a $(P, \pi, M)_G$ con fibra estándar $\mathfrak{g}$, sobre la cual actúa G a través de la acción adjunta. Sea $\Gamma(\xi)$ el conjunto de secciones de ξ. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre M, los lifts $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ son dos campos vectoriales, invariantes por derecha, sobre P, entonces $F(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ es una función de P a $\mathfrak{g}$, con la propiedad de que

$$F(\widetilde{X}, \widetilde{Y})|_{ua} = \mathrm{ad}_{a^{-1}*} F(\widetilde{X}, \widetilde{Y})|_u$$

Y se le puede asociar[9] una sección s de ξ. Se puede asociar a cualquier conexión sobre P una 2-forma sobre M con valores en $\Gamma(\xi)$ por:

$$R(X, Y) = s.$$

15. El producto de dos q−formas α y β, está definido por

$$(\alpha, \beta) = \int_M \mathrm{tr}(\alpha \wedge \star\beta),$$

[9]Sea ξ un haz fibrado principal con espacio base M, espacio total P y grupo de estructura G. Sea F una variedad sobre la cual actúa G. Hay una correspondencia uno a uno entre secciones transversales del haz asociado a ξ (con espacio total E y fibra F) y las funciones $\varphi : P \to F$ que tienen la propiedad: $\varphi(ua) = a^{-1}\varphi(u)\ \forall\, u \in P$ y $a \in G$.

y en particular se tiene el producto

$$(R, R) = \int_M \mathrm{tr}(R \wedge \star R).$$

Pero en términos de componentes $(R, R) = \int F^2$, es decir (R, R) es la acción del campo de norma.

Notas bibliográficas

La mayoría de las definiciones en este capitulo se encuentran en el libro *Modern Differential Geometry for Physicists* de Chris Isham, World Scientific, 1999. Esto abarca las secciones de Relación de Equivalencia, Espacio Topológico, Variedad Diferenciable, Campos vectoriales y tensoriales, parte de Grupos de Lie y parte de haces. Lo referente a formas diferenciales se puede encontrar en *Gauge Fields, Knots and Gravity* de J. Baez y P. Munian, World Scientific, 1994. De las últimas dos secciones, los haces fibrados principales y la forma de conexión fueron extraídos de *The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type* escrito por M. Daniel y C. M. Viallet, Rev. Mod. Phys., **52**, 175, 1980.. La parte de homotopía se encuentra en *Techniques and applications of path integral integration* de L. S. Schulman, Wiley N.Y., 1989, y en *Topology and geometry for physicists* por C. Nash y S. Cen, Academic Press, 1983.

Capítulo 2

El haz del efecto Aharonov-Bohm (abeliano)

2.1. Campos electromagnéticos (caso clásico)

El movimiento de partículas cargadas en presencia de campos electromagnéticos está gobernado por la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento mecánico de la partícula con carga eléctrica q, masa m y velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se miden en el punto $\mathbf{x}$ al tiempo t donde se encuentra la partícula. La ecuación 2.1 es la ecuación de Euler-Lagrange para la Lagrangiana $L = L_0 + L_{\text{int}}$, donde:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2}mv^2 \\ L_{\text{int}} &= \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi. \end{aligned}$$

La acción clásica correspondiente a una trayectoria dada es:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tL = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t(L_0 + L_{\text{int}}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tL_0 + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tL_{\text{int}} = S_0 + S_{\text{int}}.$$

Hay que notar que S es invariante de norma.

Si se define la 1-forma $A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ (con $\mathrm{d}x^0 = c\mathrm{d}t$), entonces las componentes de la 2-forma:

$$F = \mathrm{d}A = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

son precisamente los campos eléctrico y magnético. La ecuación

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}^2 A = 0$$

es una identidad, pero escrita en términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ da las ecuaciones homogéneas de Maxwell que son obedecidas por los campos:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$
$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

así que estas ecuaciones tiene un origen geométrico. El segundo par de ecuaciones es dinámico y a partir de la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{4\pi}{c^2}A_\mu J^\mu$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento para los campos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\nu,$$

o usando que la 4-corriente es $J^\mu = (c\rho, -\mathbf{J})$:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\\ \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}.\end{aligned}$$

2.2. Campos electromagnéticos (caso cuántico)

En mecánica cuántica (no relativista), el movimiento de partículas cargadas en presencia de campos electromagnéticos externos, está gobernado por la ecuación de Schrödinger o por la integral de trayectoria de Feynman. En ambos casos es el potencial de norma el que aparece en las ecuaciones y no $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Considerando partículas escalares cargadas, la ecuación de Schrödinger se obtiene de la hamiltoniana clásica:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + q\phi = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\phi$$

con $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}$ el momento canónico. Si se toma $\mathbf{P} \mapsto -i\hbar\nabla$ y $H \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, la ecuación de Schrödinger queda:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{q^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 + \frac{i\hbar q}{2mc}\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{i\hbar q}{mc}\mathbf{A}\cdot\nabla + q\phi\right)\psi. \tag{2.2}$$

La función de onda se transforma como:

$$\psi'(t,\, \mathbf{x}) = e^{-\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\, \psi(t,\, \mathbf{x}) \tag{2.3}$$

y junto con la transformación de norma: $A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$, son una simetría de (2.2), es decir A'_μ y ψ' también obedecen (2.2). En cada $(t,\, \mathbf{x})$, $e^{-\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}$ pertenece a $U(1)$.

Desde el punto de vista de integral de trayectoria, el propagador $K(t', \mathbf{x}'; t, \mathbf{x})$ (que da la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague del punto $(t, \mathbf{x})$ al punto $(t', \mathbf{x}')$, con $t < t'$) está dado por:

$$K(t', \mathbf{x}'; t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(t')=\mathbf{x}'} D\mathbf{x}(\tau) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_0 + S_{\text{int}})\right] \tag{2.4}$$

$$= \int_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(t')=\mathbf{x}'} D\mathbf{x}(\tau) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\phi\right)\right] \tag{2.5}$$

$$= \int_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}}^{\mathbf{x}(t')=\mathbf{x}'} D\mathbf{x}(\tau) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2\right) \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\int_t^{t'} A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right) \tag{2.6}$$

donde la integral $\int D\mathbf{x}(\tau)\cdots$ es sobre todas las trayectorias continuas en el espacio tiempo que unen los puntos $(t, \mathbf{x})$ y $(t', \mathbf{x}')$. Una vez conocido el propagador y si se conoce la función de onda en $(t, \mathbf{x})$, se puede entonces conocer en $(t', \mathbf{x}')$ de la siguiente forma:

$$\psi(t', \mathbf{x}') = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\; K(t', \mathbf{x}'; t, \mathbf{x})\, \psi(t, \mathbf{x}).$$

Restringiendo todo a campos magnéticos estáticos, es decir, a $\phi = 0$ y $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x_0}$ un punto de referencia arbitrario, la integral $\int_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}')\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}'$ es independiente de la trayectoria de integración de $\mathbf{x_0}$ a $\mathbf{x}$ y si ψ_0 es una solución de:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0 = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi_0$$

se puede mostrar que

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\int_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}')\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}'\right)\psi_0(t, \mathbf{x}) \tag{2.7}$$

es una solución de (2.2).

La condición de independencia de trayectoria lleva a la condición de que no haya ningún campo magnético presente, ya que si $\int \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$ dependiera de la trayectoria, entonces para un par de trayectorias γ y γ'de $(t, \mathbf{x})$ a $(t', \mathbf{x}')$,

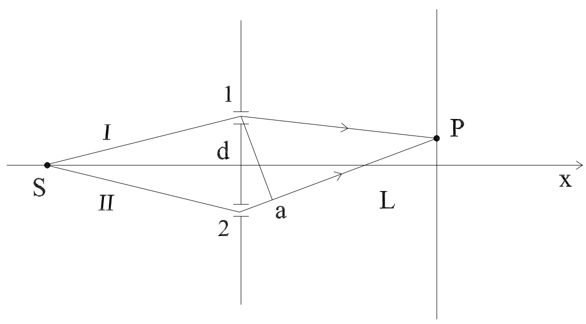
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\gamma'} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{-\gamma'} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_{\gamma \cup (-\gamma')} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma \cdot \mathbf{B} = \Phi \neq 0\end{aligned}$$

donde Σ es cualquier superficie con frontera $\gamma \cup (-\gamma')$. Entonces la suposición (2.7), para resolver (2.2) sólo se puede aplicar en regiones simplemente conexas sin campo magnético presente.

2.3. El efecto Aharonov-Bohm

En 1959, Aharonov y Bohm propusieron un experimento para probar en mecánica cuántica, el acoplamiento de cargas eléctricas con campos electromagnéticos a través de una interacción local con el potencial electromagnético A_μ, pero no con los campos. Como se vio antes no puede existir efecto físico, a menos que existan campos eléctricos y/o magnéticos en algún lugar, aunque no se interpongan necesariamente a la función de onda de las partículas.

Considérese el experimento de doble rendija con electrones:



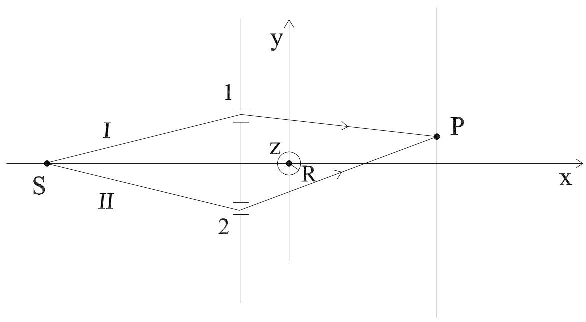
S es la fuente, P es el lugar donde inciden los electrones, L es la distancia que separa la pantalla de las rendijas de la pantalla de incidencia. La distancia entre las rendijas 1 y 2 es d. El plano que se muestra es el plano $x - y$.

Debido a la naturaleza de onda de los electrones, como no se puede detectar por donde pasan, producen un patrón de interferencia característico. Si la longitud de onda es λ, la diferencia de fase de las dos rendijas es:

$$\delta = 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

si $x \ll L \Rightarrow a = \frac{x}{L}d$ entonces $\delta = 2\pi \frac{xd}{L\lambda}$, teniéndose el máximo cuando $\delta = 2\pi n$ y el mínimo en $(2n+1)\pi$.

La idea de Aharonov y Bohm fue introducir un pequeño solenoide detrás de la pared entre las rendijas:



Hay líneas de campo magnético **B** dentro del solenoide pero no afuera, así que mientras el solenoide tenga un radio lo suficientemente pequeño, los electrones viajan en una región libre de campo.

El campo magnético que se requiere es:

$$\text{dentro}: \begin{cases} B_r = B_\varphi = 0 \\ B_z = B \end{cases}$$
$$\text{fuera}: \begin{cases} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

en coordenadas cilíndricas.

La forma de **A** que da dicho campo es:

$$\text{dentro}: \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\varphi = \frac{Br}{2} \end{cases}$$
$$\text{fuera}: \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\varphi = \frac{BR^2}{2r} \end{cases}$$

donde R es el radio del solenoide.

Por otro lado, la función de onda del electrón en el espacio libre es:

$$\psi = |\psi| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) \equiv |\psi| \exp(i\alpha)$$

y el efecto de un campo electromagnético es cambiar:

$$\mathbf{p} \;\to\; \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

donde e es la carga del electrón. La fase α de la función de onda entonces cambia como:

$$\alpha \;\to\; \alpha - \frac{e}{\hbar}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$$

y el cambio en la fase sobre una trayectoria entera es:

$$\Delta\alpha = -\frac{e}{\hbar}\int_{\text{trayectoria}} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

sobre las trayectorias I y II entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_I &= -\frac{e}{\hbar}\int_I \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \\ \Delta\alpha_{II} &= -\frac{e}{\hbar}\int_{II} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}$$

y el cambio en la diferencia de fase δ es

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \Delta\alpha_I - \Delta\alpha_{II} \\ &= \frac{e}{\hbar}\oint_{II-I} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar}\int_{II-I} \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \frac{e}{\hbar}\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{e}{\hbar}\Phi \end{aligned}$$

donde Φ es el flujo de campo magnético a través del solenoide. El patrón de interferencia entonces se mueve por:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{2\pi d}\Delta\delta = \frac{L\lambda}{2\pi d}\frac{e}{\hbar}\Phi$$

El efecto neto es que la presencia del solenoide causa un corrimiento en el patrón de interferencia, aunque los electrones solo se muevan en regiones donde no hay campo magnético.

2.4. El haz

En el experimento anterior, la idea de un solenoide infinitamente largo hace el problema bidimensional. Que el solenoide se suponga impenetrable para los electrones, corresponde matemáticamente a una región que no es simplemente conexa. Y desde el punto de vista de integral de trayectoria, la función de onda está compuesta principalmente de dos partes: las clases de homotopía correspondientes a las trayectorias I y II, denotadas $[\gamma]$ (para I) y $[\gamma']$ (para II). Si la función de onda en la fuente S es ψ_S, en el punto P está dada por:

$$\begin{aligned}\psi_P &= \left[\int_{[\gamma]} D\mathbf{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\gamma)} e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}\int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}} + \int_{[\gamma']} D\mathbf{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\gamma')} e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}\int_{\gamma'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}}\right]\psi_S \\ &= e^{-\frac{i|e|}{\hbar c}\int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}}\left[\psi_P^0(I) + e^{-2\pi i\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi_P^0(II)\right]\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\psi_P^0(I) &= \int_{[\gamma]} D\mathbf{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\gamma)}\psi_S \\ \psi_P^0(II) &= \int_{[\gamma']} D\mathbf{x}\, e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\gamma')}\psi_S \\ \oint_{\gamma\cup(-\gamma')} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{x} &= \int_\Sigma d\sigma\cdot\mathbf{B} = \Phi \\ \Phi_0 &= 2\pi\frac{\hbar c}{|e|}.\end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de encontrar al electrón en P es proporcional a:

$$|\psi_P|^2 = |\psi_P^0(I)|^2 + |\psi_P^0(II)|^2 + 2\mathbb{R}e\left(e^{2\pi i\frac{\Phi}{\Phi_0}}\psi_P^0(I)\psi_P^{0*}(II)\right)$$

lo que muestra un efecto de interferencia desplazado con respecto a aquel sin el campo magnético. Éste es el efecto Aharonov-Bohm, que es:

- Invariante de norma, ya que $\mathbf{B}$ y Φ lo son.
- No-local, ya que depende del campo dentro del solenoide, donde no pueden penetrar los electrones.
- Cuántico, ya que clásicamente las ecuaciones de movimiento solo involucran a los campos.

- Topológico, ya que los electrones no se mueven en una región del espacio que no es simplemente conexa.

El grupo de norma del electromagnetismo es el grupo de Lie abeliano $U(1)$. En el límite de un solenoide infinitamente delgado, e infinitamente largo, se tiene el plano menos un punto (llamado $\mathbb{R}^{2*}$), que es del mismo tipo homotópico que el circulo S^1.

Por otro lado, la clasificación, por isomorfismos, de haces fibrados principales con grupo de estructura G sobre esferas S^n está en correspondencia uno a uno con las clases de homotopía de mapeos de S^{n-1} a S^n, donde S^{n-1} es el ecuador de S^n.

Haciendo uso de esta afirmación, se tiene que el conjunto de clases de isomorfismos de haces $U(1)$ sobre $\mathbb{R}^{2*}$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de homotopía de mapeos de S^0 a S^1 que consta de un solo punto, como se muestra a continuación.

Sean f y g dos funciones arbitrarias de S^0 a S^1 dadas por:

$$\begin{aligned} f(1) &= e^{i\phi_1} \quad , \quad f(-1) = e^{i\phi_2} \\ g(1) &= e^{i\theta_1} \quad , \quad g(-1) = e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

entonces $H : S^0 \times [0,1] \to S^1$ dada por:

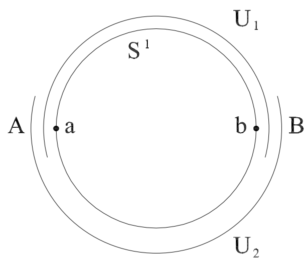
$$\begin{aligned} H(1,\, t) &= e^{i[(1-t)\phi_1 + t\theta_1]} \\ H(-1,\, t) &= e^{i[(1-t)\phi_2 + t\theta_2]} \end{aligned}$$

es una homotopía entre f y g.

Entonces el conjunto de clases de homotopía de funciones de S^0 a S^1 tiene un solo elemento. Por lo tanto, hasta isomorfismos, el haz relevante para el efecto Aharonov-Bohm es el haz producto:

$$\xi_{A-B} = (\mathbb{R}^{2*} \times U(1),\, \pi,\, \mathbb{R}^{2*}).$$

Se pueden construir las funciones de transición de este haz tomando al espacio base como S^1 y tomando dos casquetes U_1 y U_2 como su cubierta, de tal forma que $U_1 \cap U_2$ conste de dos regiones abiertas, A y B, homotópicas a un punto, digamos a y b, respectivamente:



Entonces se tiene una función de transición $\psi_{1\,2} : \{a, b\} \rightarrow U(1)$, que se puede escribir en forma general como $\psi_{1\,2}(a) = g_a$ y $\psi_{1\,2}(b) = g_b$, con g_a y g_b dos elementos del grupo $U(1)$. La clasificación de las funciones de transición por homotopía se hace de la siguiente manera. Supongamos que existe otra función de transición llamada $\psi'_{1\,2}$ definida por $\psi'_{1\,2}(a) = g'_a$ y $\psi'_{1\,2}(b) = g'_b$, con g'_a y g'_b dos elementos de $U(1)$, distintos de los anteriores. Sea $H : \{a, b\} \times [0, 1] \rightarrow U(1)$ dada por:

$$\begin{aligned} H(a,t) &= \gamma(t) \\ H(b,t) &= \gamma'(t) \end{aligned}$$

donde $\gamma(t)$ y $\gamma'(t)$ son dos curvas continuas en $U(1)$, que siempre se pueden construir porque el grupo es arcoconexo, y que pasan por g_a, g'_a, g_b y g'_b de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= g_a \\ \gamma(1) &= g'_a \\ \gamma'(0) &= g_b \\ \gamma'(1) &= g'_b \end{aligned}$$

Usando esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} H(a,0) = \gamma(0) = g_a = \psi_{1\,2}(a) \\ H(a,1) = \gamma(1) = g'_a = \psi'_{1\,2}(a) \\ H(b,0) = \gamma'(0) = g_b = \psi_{1\,2}(b) \\ H(b,1) = \gamma'(1) = g'_b = \psi'_{1\,2}(b) \end{aligned}$$

Lo que nos dice que ψ_{12} y ψ'_{12} son dos funciones homotópicas. Entonces el conjunto de clases de homotopía de estas funciones solo tiene un elemento. Pero el conjunto de clases de isomorfismos de haces fibrados principales está en biyección con el conjunto anterior. Entonces el conjunto de clases de isomorfismos de haces tiene un elemento, que es la clase del haz trivial, lo cual está en perfecto acuerdo con lo que se había mencionado.

Notas bibliográficas

Los temas relacionados con campos electromagnéticos, casos clásico y cuántico, así como la demostración de que el haz del efecto Aharonov Bohm es trivial, se puede consultar en *Aharonov-Bohm effect*, de Miguel Socolovsky en Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier, Oxford, 2006. La descripción que se hizo del efecto, en la tercera sección, se encuentra en el libro *Quantum field theory* de L. Ryder. Y por último una descripción detallada del efecto, tanto teórica como experimentalmente, (que no se trata aquí), se puede encontrar en *The Aharonov-Bohm Effect* de M. Peshkin y A. Tonomura, Springer-Verlag, 1989.

Capítulo 3

El efecto Aharonov-Bohm en teorías de Yang-Mills

3.1. La teoría de Yang-Mills como teoría de norma

Una teoría de norma debe pensarse como una donde las variables dinámicas son especificadas con respecto a un cuadro de referencia cuya elección es arbitraria en cada instante de tiempo. Las variables físicas importantes son las independientes de la elección del marco de referencia. Una transformación de las variables inducida por un cambio en el marco de referencia arbitrario es llamada transformación de norma. Las variables físicas se dicen entonces invariantes de norma.

En una teoría de norma, las ecuaciones de movimiento no determinan todas las variables dinámicas para todos los tiempos aunque sean dadas las condiciones iniciales, porque siempre se puede cambiar el marco de referencias en el futuro manteniendo las condiciones iniciales y se tendrá una evolución en el tiempo diferente. Entonces una propiedad de las teorías de norma es que la solución general de las ecuaciones de movimiento contiene funciones del tiempo arbitrarias. De lo cual se implica que las variables canónicas no son todas independientes, hay relaciones entre ellas llamadas constricciones. Entonces un sistema de norma es siempre un sistema con hamiltoniano con constricciones. Aunque un sistema hamiltoniano con constricciones no siempre es un sistema con invariancia de norma.

Las teorías con un conjunto de campos vectoriales cuya lagrangiana es invariante bajo transformaciones de norma no abelianas son las llamadas teorías de Yang-Mills.

La información contenida en las siguientes tres secciones fue, en su mayoría, extraída de [1]. Algunas definiciones, aunque se encuentran en [1], fueron transcritas de [2] por ser más claras.

3.2. Formas de conexión y transformaciones de norma

Se considera al espacio-tiempo como el espacio euclidiano tetradimensional $\mathbb{R}^4$. Entonces se tratan teorías de norma de Yang-Mills definidas en $\mathbb{R}^4$.

En una teoría de norma, una rotación del espacio interno en cualquier punto del espacio-tiempo, que afecta a los potenciales de norma y a los campos, lleva a una descripción de una misma realidad física. Un cambio de este tipo es representado por una asignación suave de un elemento del grupo de norma G no abeliano a cualquier punto del espacio-tiempo, esto es, una función: $\mathbb{R}^4 \to G$. Las gráficas de estas funciones viven en el espacio $P = \mathbb{R}^4 \times G$, sobre el cual actúa G libremente.

La acción de G sobre P define una relación de equivalencia entre puntos de P: $p \sim p' \Leftrightarrow \exists\, a \in G$ tal que $p' = pa$. Las clases de equivalencia se pueden etiquetar por los puntos de $\mathbb{R}^4$.Tambien se define una proyección canónica: $\pi : P \to \mathbb{R}^4$, definida por $\pi(x, \mathrm{g}) = x$.

El conjunto $(P,\, G,\, \pi)$ forma un haz fibrado principal sobre $\mathbb{R}^4$, con grupo de estructura G y proyección π. La fibra es la preimagen de π y es isomorfa a G.

Imagínese, en cada punto del espacio-tiempo, un espacio vectorial V_x, es decir, un espacio representación de G. En dicho espacio vectorial se puede elegir un marco de referencia y hacer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de marcos y el grupo: los elementos del grupo toman el marco de referencia original y lo llevan a otro. Esta es la misma situación con la fibra sobre x: una vez elegido un punto en la fibra, se puede obtener cualquier otro punto sobre la misma fibra por la acción de un elemento del grupo.

El potencial de norma es dado, usualmente, como funciones, A_μ, evaluadas en el álgebra de Lie, sobre $\mathbb{R}^4$. Pero siempre es posible considerar a $A_\mu(x)$ como las componentes de una forma de conexión sobre el haz trivial con espacio total $P = \mathbb{R}^4 \times G$. Se define primero $A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ como una 1-forma sobre $\mathbb{R}^4$. Y se define en P la forma de conexión, única, tal que $\omega_\sigma = \sigma^*(\omega)$. ω es una forma de conexión sobre P pero claramente depende de la elección de σ. Esta libertad está relacionada con la libertad de norma.

La noción de transformación de norma es la de una función $\gamma : \mathbb{R}^4 \to G$ que determina las rotaciones de isoespín en cada punto del espacio tiempo.

Supóngase que existe una sección global en el haz fibrado principal $(P, \pi, M)_G$. Sea σ' una sección sobre dicho haz definida por $\sigma'(x) = \sigma(x)\gamma(x)$. De $A_\mu(x)$ y σ uno puede construir ω. Pero del mismo $A_\mu(x)$ pero usando σ' se puede construir otra forma de conexión ω', con:

$$\sigma^*(\omega) = \sigma'^*(\omega').$$

Se dice que ω' es la transformación de norma de ω por γ^{-1} y se denotará como ${}^{\gamma^{-1}}\omega$. Note que las componentes de ω, con respecto a σ, se transforman de acuerdo con:

$$A'_\mu = \mathrm{ad}_{\gamma *} A_\mu + \gamma \partial_\mu \gamma^{-1}.$$

Con esta definición, la transformación de norma se puede ver como una transformación de la sección σ a otra sección sobre P, lo cual induce una transformación las conexiones.

Una transformación de norma en P es una función continua $f : P \to P$ tal que:

1. $\forall\, u \in P,\ \exists\, g \in G | f(u) = ug(u)$.

2. $g(ua) = a^{-1} g(u) a$.

Se dice que f es equivariante.

La acción de la transformación de norma sobre una forma de conexión es inducida por el "pull back"de P. La función g está dada por $\gamma = g(\sigma(x))$. La equivariación de f es equivalente a la suposición de que, para $\Gamma : M \to G$,

$$\Gamma(x) = \varphi^{-1}(x)\gamma(x)\varphi(x).$$

El requerimiento de que la acción $\int tr\mathrm{F}^2$ sea finita, lleva a un conjunto restringido de conexiones, que posee una topología no trivial.

Supóngase que una sección σ de P es conocida. Ya que:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu]$$

el problema es estudiar el conjunto de A's que verifican:

$$\int \mathrm{tr}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu])^2 < \infty,$$

esto se hace por medio de una aproximación.

3.3. El grupo de transformaciones de norma

Se puede definir el producto de dos transformaciones de norma como la composición de funciones de P a P. Esta composición da una transformación de norma, y el conjunto $\mathcal{G}$ de transformaciones de norma adquiere la estructura de grupo.

Cualquier transformación de norma $f : P \to P$ puede ser descrita por una función $\gamma : P \to G$. La operación de grupo en $\mathcal{G}$, si $f_1(u) = u\gamma_1(u)$ y $f_1(u) = u\gamma_1(u)$, da el siguiente producto puntual para las γ's:

$$f_2 \circ f_1(u) = u(\gamma_1\gamma_2)(u).$$

Éstas se pueden expresar en términos de una familia de funciones locales $\gamma_\alpha : U_\alpha \to G$ con relaciones de compatibilidad:

$$\gamma_\beta(x) = \psi^{-1}_{\alpha\beta}(x)\,\gamma_\alpha(x)\,\psi_{\alpha\beta}(x) \quad \forall\, x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Sea $\mathfrak{B}$ el haz asociado al de P, con fibra estándar G (G actuando sobre si mismo bajo la función adjunta[1]). Tomando en cuenta la correspondencia uno a uno entre las funciones γ y las secciones de $\mathfrak{B}$, el grupo de transformaciones de norma $\mathcal{G}$ puede ser identificado con el conjunto $\Gamma(\mathfrak{B})$ de secciones de $\mathfrak{B}$.

Sea s la sección unidad constante del haz $\mathfrak{B}$. Se puede identificar cada fibra de este haz con el grupo G, y se pueden tener vectores tangentes a la fibra

[1] $\mathrm{ad}_g(g') = gg'g^{-1}\ \forall\, g,\, g' \in G$

en todos los puntos que se obtienen a través de s. La operación de grupo y su diferencial lineal permiten transportar estos vectores a cualquier punto del espacio total de $\mathfrak{B}$, y definir campos vectoriales. La restricción de dichos campos a la fibra sobre $x \in U_\alpha$ se puede identificar con un elemento A_α del álgebra de Lie de G (el conjunto de campos vectoriales sobre G invariantes por izquierda). Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, el mismo campo vectorial sobre la fibra sobre x, puede identificarse con otro elemento A_β, pero están relacionados por:

$$A_\beta = \mathrm{ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha.$$

Como consecuencia se puede ver al campo vectorial sobre el espacio total de $\mathfrak{B}$, como una sección del haz asociado a (P, π, M), (E, π_E, M), con el álgebra de Lie de G como la fibra estándar, con la acción adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$.

Sean $\Gamma(E)$ el conjunto de secciones del haz (E, π_E, M). $\Gamma(E)$ es el álgebra de Lie de $\mathcal{G} = \Gamma(\mathfrak{B})$.

Cualquier sección de $\mathfrak{B}$ se puede escribir como $\exp(\sigma)$, donde $\sigma \in \Gamma(E)$.

3.4. Ecuaciones de movimiento de la teoría pura de Yang Mills

Las ecuaciones clásicas de movimiento de los potenciales de norma son las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas al minimizar la acción:

$$s = \int \mathrm{tr} F^2 \mathrm{d}^4 x.$$

Supóngase un $G-$haz principal $\xi = (P, \pi, S^4)$. La acción es una funcional definida sobre el conjunto de conexiones sobre P.

Las soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento son puntos críticos de la funcional s.

Note que la búsqueda de puntos críticos de una función usualmente lleva al estudio de la topología del espacio sobre la cual está definida. De todas formas el espacio de conexiones sobre P ,$\mathfrak{c}$, es un espacio afín, y por lo tanto contraíble y con una topología trivial.

Sea ω una forma de conexión en P y sea ω' su transformación de norma.

Entonces:

$$a(\omega') = a(\omega)$$

a está entonces definido sobre el cociente $\mathfrak{c}/\mathfrak{g}$.

La ecuación de movimiento se puede calcular localmente de la expresión de $s = \int \mathrm{tr} F_{\mu\nu}^2$. Estas ecuaciones son:

$$\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

donde $\mathcal{D}_\mu$ es la derivada covariante actuando sobre $F_{\mu\nu}$. La forma global de estas ecuaciones es:

$$\star \mathcal{D} F = 0$$

o equivalentemente $\mathcal{D} \star F = 0$

3.5. Efectos Aharonov-Bohm no abelianos

Se estudia a una partícula moviéndose en una región que es una variedad M multiplemente conexa, bajo la influencia de un potencial de norma asociado a un grupo de norma G. Tal potencial de norma está dado por $A = A_\mu^a T_a \mathrm{d}x^\mu$, donde T_a son los generadores de G. Debe de notarse que la posición de la partícula es descrita en M, el tiempo se trata aparte. Se supone también que el potencial de norma tiene curvatura cero, es decir, $F = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] = 0$. Éste es el caso en el cual una partícula se encuentra en una región del espacio donde las intensidades de campos están confinadas.

3.5.1. El efecto

La forma de la suma de Feynman para el propagador no relativista para el movimiento de una partícula bajo la influencia de las componentes espaciales de un potencial de norma $A_i^a T_a \mathrm{d}x^i$ (la componente espacial $A_0^a T_a$ se supone cero), es:

$$K(x', t'; x, t) = \int_{x,t}^{x',t'} \mathcal{D}\Gamma \exp\left(\int_\Gamma A_i^a T_a \mathrm{d}x^i\right) \exp iS(\Gamma) \qquad (3.1)$$

que es la suma sobre todas las trayectorias $\Gamma : [t, t'] \to M$ de x a x', donde S es la acción clásica de la partícula libre y

$$\exp\left(\int_\Gamma A_i^a T_a \mathrm{d}x^i\right) \tag{3.2}$$

es el factor de fase de Yang. Siempre se considera que está ordenado en el tiempo. El propagador satisface:

$$\begin{aligned} K(x', t'; x, t) &= \delta_M(x', x) \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t'} - H\right) K(x', t'; x, t) &= 0, \quad t' > t, \end{aligned}$$

donde δ_M y H son la función delta y el operador hamiltoniano, respectivamente, sobre M, actuando sobre la variable x'. Se puede reescribir el propagador, de acuerdo con Schulman, de la siguiente forma:

$$K(x', t'; x, t) = \sum_{[\Gamma]\in\mathcal{T}} \int_{x,t}^{x',t'} \mathcal{D}_{[\Gamma]}\Gamma \exp\left(\int_\Gamma A_i \mathrm{d}x^i\right) \exp(iS(\Gamma)) \tag{3.3}$$

donde $\mathcal{T}$ es la colección de las clases de homotopía de las trayectorias $\Gamma : [t, t'] \to M$, con $\Gamma(t) = x$ y $\Gamma(t') = x'$, $A_i = A_i^a T_a$. $\mathcal{D}_{[\Gamma]}$indica suma sobre las trayectorias que se encuentran en la clase $[\Gamma]$. Para el caso de curvatura cero, de acuerdo con Sundrum y Tassie, si $\Gamma' \in [\Gamma]$, entonces

$$\exp\left(\int_{\Gamma'} A_i \mathrm{d}x^i\right) = \exp\left(\int_\Gamma A_i \mathrm{d}x^i\right)$$

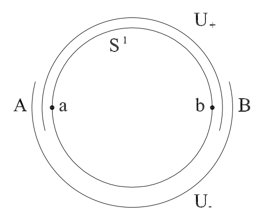
y se define el propagador de hotopía de la clase $\mathfrak{f}$ como:

$$K^{\mathfrak{f}}(x', t'; x, t) = \int_{x,t}^{x',t'} \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}\Gamma \exp(iS(\Gamma))$$

Entonces el efecto Aharonov-Bohm se obtiene multiplicando el propagador de homotopía por los factores de fase de norma. En general estos factores varían para diferentes clases de homotopía, permitiendo que $|K|^2 \neq |K_0|^2$ (donde $|K_0|^2$ es el propagador para el caso en que el potencial de norma es cero), y produciendo un efecto observable.

3.5.2. Caso $SU(2)$

Como anteriormente, se toman potenciales de Yang-Mills estáticos A_i, con $F_{ij} = 0$. En este caso, la variedad (espacio base) donde se lleva a cabo el efecto, de acuerdo con [4], es $M = \mathbb{R}^{2*}$. Esta variedad es del mismo tipo homotópico que el circulo S^1. El conjunto de clases de isomorfismos de haces $SU(2)$ sobre $\mathbb{R}^{2*}$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de homotopía de las funciones de transición que van del espacio base al grupo. La construcción de estas funciones la hacemos tomando en cuenta que el espacio base es del mismo tipo homotópico que S^1, que se puede dividir en dos abiertos: el casquete superior denotado U_+ y el inferior denotado U_-. Su única intersección es en dos segmentos del circulo, que son del mismo tipo homotópico que un punto:



Entonces las funciones de transición quedan definidas, en la forma más general posible, por

$$\begin{aligned} \psi : \{a, b\} &\rightarrow SU(2) \\ a &\mapsto g_1 \\ b &\mapsto g_2 \end{aligned}$$

donde g_1 y g_2 son dos elementos de $SU(2)$

Sean ψ y ψ' dos funciones de transición dadas por:

$$\psi,\, \psi' : \{a, b\} \rightarrow SU(2)$$
$$\psi(a) = g_1 \qquad \psi'(a) = g_1'$$
$$\psi(b) = g_2 \qquad \psi'(b) = g_2'$$

con g_1, g_2, g_1', $g_2' \in SU(2)$.

Sea $H : \{a, b\} \times [0, 1] \to SU(2)$ dada por:

$$\begin{aligned} H(a,t) &= \gamma(t) \\ H(b,t) &= \gamma'(t) \end{aligned}$$

donde γ, γ' son dos curvas continuas que van de un abierto en $\mathbb{R}$, que contiene al $[0, 1]$, a $SU(2)$ y son tales que $\gamma(0) = g_1$, $\gamma(1) = g'_1$, $\gamma'(0) = g_2$ y $\gamma'(1) = g'_2$[2]. Usando que en las variables a y b, H es continua[3], y que por ser γ y γ' continuas en t, H también lo es, lo que se tiene es que:

$$\begin{aligned} H(a,0) = \gamma(0) = g_1 = \psi(a) \qquad & H(b,0) = \gamma'(0) = g_2 = \psi(b) \\ H(a,1) = \gamma(1) = g'_1 = \psi'(a) \qquad & H(b,1) = \gamma'(1) = g'_2 = \psi'(b) \end{aligned}$$

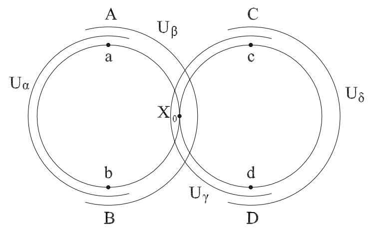
entonces $H(s, 0) = \psi(s)$ y $H(s, 1) = \psi'(s)$, entonces ψ y ψ' son homotópicas. Por lo tanto solo hay una clase de homotopías de funciones de transición, lo que implica una sola clase de haces $SU(2)$ sobre $\mathbb{R}^{2*}$. El haz trivial siempre existe en la clasificación de haces, por lo que la única clase de isomorfismos da haces es la correspondiente a la del haz trivial.

3.5.3. Caso $SU(3)$

Los potenciales de Yang-Mills A_i se toman estáticos, con $F_{ij} = 0$. Descartando la dimensión espacial z, tomamos como espacio base al plano $\mathbb{R}^2$ menos dos puntos [5], que es donde se colocan las líneas de flujo magnético no abeliano. Esta variedad es del mismo tipo homotópico que dos círculos (en en mismo plano) con un punto en común [7]: $S^1 \vee S^1$. El conjunto de clases de isomorfismos de haces $SU(3)$ sobre $S^1 \vee S^1$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de homotopía de las funciones de transición que van del espacio base al grupo, al igual que en el ejemplo anterior. El espacio base (partimos de tomar como espacio base a $S^1 \vee S^1$) lo dividimos en cuatro abiertos como se muestra en la figura:

[2]Estas curvas se pueden construir porque SU(2) es simplemente conexo y arcoconexo [6].

[3]Porque una función $f : X \to Y$, con X y Y dos espacios topológicos, es continua si dado un abierto en la topología de Y, su preimagen bajo f está en la topología de X [3]. En este caso $X = \{a, b\}$ y su topología es la discreta, entonces la preimagen de los conjuntos $\{\gamma(s)\}$ y $\{\gamma'(s)\}$ son $\{a\}$ y $\{b\}$ respectivamente, que están en la topología de X



Las intersecciones que se tienen son:

$$
\begin{aligned}
U_\alpha \cap U_\beta &= A \cup B \simeq \{a, b\} \\
U_\alpha \cap U_\gamma &= \varnothing \\
U_\alpha \cap U_\delta &= \varnothing \\
U_\beta \cap U_\gamma &= \{x_0\} \\
U_\beta \cap U_\delta &= \varnothing \\
U_\gamma \cap U_\delta &= C \cup D \simeq \{c, d\}
\end{aligned}
$$

donde A, B, C, D son abiertos homotópicos a un punto, a saber, a, b, c, d respectivamente; x_0 es el punto donde se intersecan los dos círculos. Entonces las funciones de transición son:

$$
\begin{aligned}
\psi_{\alpha\beta} : \{a, b\} &\to SU(3) \\
\psi_{\beta\gamma} : \{x_0\} &\to SU(3) \\
\psi_{\gamma\delta} : \{c, d\} &\to SU(3),
\end{aligned}
$$

como en el ejemplo anterior, la forma más general en que se pueden escribir es::

$$
\begin{aligned}
\psi_{\alpha\beta}(a) &= g_a \\
\psi_{\alpha\beta}(b) &= g_b \\
\psi_{\beta\gamma}(x_0) &= g_0 \\
\psi_{\gamma\delta}(c) &= g_c \\
\psi_{\gamma\delta}(d) &= g_d
\end{aligned}
$$

donde g_a, g_b, g_0, g_c, g_d son elementos de $SU(3)$.

Supongamos la existencia de otro conjunto de funciones de transición $\psi'_{\alpha\beta}$, $\psi'_{\beta\gamma}$, $\psi'_{\gamma\delta}$, dadas por:

$$\begin{aligned}
\psi'_{\alpha\beta}(a) &= g'_a \\
\psi'_{\alpha\beta}(b) &= g'_b \\
\psi'_{\beta\gamma}(x_0) &= g'_0 \\
\psi'_{\gamma\delta}(c) &= g'_c \\
\psi'_{\gamma\delta}(d) &= g'_d
\end{aligned}$$

diferentes de las anteriores. Sean $H_{\alpha\beta}$, $H_{\beta\gamma}$ y $H_{\gamma\delta}$ definidas por:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha\beta}(a,t) &= \gamma_1(t) \\
H_{\alpha\beta}(b,t) &= \gamma'_1(t) \\
H_{\beta\gamma}(x_0,t) &= \gamma_0(t) \\
H_{\gamma\delta}(c,t) &= \gamma_2(t) \\
H_{\gamma\delta}(d,t) &= \gamma'_2(t)
\end{aligned}$$

donde γ_1, γ'_1, γ_0, γ_2, γ'_2 son curvas continuas de un abierto (que contiene a $[0,1]$) a $SU(3)$ (que siempre se pueden construir por ser arcoconexo) y son tales que:

$$\begin{array}{cc}
\gamma_1(0) = g_a & \gamma_1(1) = g'_a \\
\gamma'_1(0) = g_b & \gamma'_1(1) = g'_b \\
\gamma_0(0) = g_0 & \gamma_0(1) = g'_0 \\
\gamma_2(0) = g_c & \gamma_2(1) = g'_c \\
\gamma'_2(0) = g_d & \gamma'_2(1) = g'_d.
\end{array}$$

Vemos de la explicación del ejemplo anterior que las funciones $H_{\alpha\beta}$, $H_{\beta\gamma}$ y $H_{\gamma\delta}$ son continuas en a, b, x_0, c y d (según corresponde) y además en t por ser γ_1, γ'_1, γ_0, γ_2, γ'_2 continuas. Al evaluar las H en 0 y 1 se obtiene, para $H_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha\beta}(a,0) &= \gamma_1(0) = g_a = \psi_{\alpha\beta}(a) \\
H_{\alpha\beta}(a,1) &= \gamma_1(1) = g'_a = \psi'_{\alpha\beta}(a) \\
H_{\alpha\beta}(b,0) &= \gamma'_1(0) = g_b = \psi_{\alpha\beta}(b) \\
H_{\alpha\beta}(b,1) &= \gamma'_1(1) = g'_b = \psi'_{\alpha\beta}(b)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi_{\alpha\beta}$ y $\psi'_{\alpha\beta}$ son homotópicas. Para $H_{\beta\gamma}$ se tiene:

$$H_{\beta\gamma}(x_0, 0) = \gamma_0(0) = g_0 = \psi_{\beta\gamma}(x_0)$$
$$H_{\beta\gamma}(x_0, 1) = \gamma_0(1) = g'_0 = \psi'_{\beta\gamma}(x_0)$$

Por lo que $\psi_{\beta\gamma}$ y $\psi'_{\beta\gamma}$ son homotópicas. Para $H_{\gamma\delta}$ se tiene:

$$H_{\gamma\delta}(c, 0) = \gamma_2(0) = g_c = \psi_{\gamma\delta}(c)$$
$$H_{\gamma\delta}(c, 1) = \gamma_2(1) = g'_c = \psi'_{\gamma\delta}(c)$$
$$H_{\gamma\delta}(d, 0) = \gamma'_2(0) = g_d = \psi_{\gamma\delta}(d)$$
$$H_{\gamma\delta}(d, 1) = \gamma'_2(1) = g'_d = \psi'_{\gamma\delta}(d)$$

por lo tanto $\psi_{\gamma\delta}$ y $\psi'_{\gamma\delta}$ son homotópicas.

Con base en los cálculos anteriores, se puede afirmar que $\psi_{\alpha\beta}$ $\psi_{\beta\gamma}$ y $\psi_{\gamma\delta}$ son únicas hasta homotopías. O de otra forma, que el conjunto de clases de homotopía de funciones de transición consta de un solo elemento. Esto nos dice que el conjunto de clases de isomorfismos de haces principales sobre $S^1 \vee S^1$ con grupo de estructura $SU(3)$ solo tiene un elemento: el correspondiente al haz trivial.

Nota

Hemos definido el efecto Aharonov-Bohm no abeliano con la condición de que G lo sea. Sin embargo Sundrum y Tassie exigen que también lo sea el subgrupo que consiste en la holonomía [5] asociada al efecto.

3.6. Generalización a un grupo de norma conexo arbitrario

Es posible mostrar que el efecto Aharonov-Bohm con cualquier grupo de norma G, conexo, donde se cuenta con n lineas de flujo magnético paralelas en $\mathbb{R}^3$, el haz fibrado principal correspondiente es equivalente al haz trivial $(M \times G,\ \pi,\ M)_G$ [8].

Conclusiones

Hemos revisado que el efecto Aharonov-Bohm de los potenciales de norma en una región libre de campos magnéticos, abelianos o no abelianos, es descrito por los propagadores de homotopía, y que está íntimamente relacionado con la topología del espacio base. Es necesario tener una región múltiplemente conexa para poder observar dicho efecto.

Se construyó una forma alternativa de mostrar que, en el caso abeliano, el único elemento del conjunto de clases de isomorfismos de haces fibrados principales es el correspondiente al haz trivial.

Para los dos ejemplos donde los grupos de estructura son no abelianos, se construyeron las funciones de transición, lo que nos permitió mostrar que, al igual que en el caso abeliano, los conjuntos de clases de isomorfismos de haces fibrados principales tienen como único elemento a la clase correspondiente al haz trivial.

Notas bibliográficas

En este capítulo se usan resultados que se pueden consultar en las siguientes referencias:

1. *The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type* de M. Daniel y C. M. Viallet, Rev. Mod. Phys., **52**, 175, 1980.

2. *Foundations of differential geometry vol. 1* de Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu, Wiley, 1963.

3. *Undergraduate topology*, W. B. Saunders Company, 1971.

4. *Non-abelian Aharonov-Bohm effect* de P. A. Horváthy, Phys. Rev. D **33**, 407, 1986.

5. *Non-abelian Aharonov-Bohm effect, Feynman paths, and topology* de Raman Sundrum y L. J. Tassie, J. Math Phys. **27**, 1566, 1986.

6. *Group Structure of gauge theories* de L. O'Raifeartaigh, Cambridge University Press, 1986.

7. *Topology and geometry for physicists* de C. Nash y S. Cen, Academic Press, 1983.

8. *On the geometry of the Aharonov-Bohm effect* de R.S. Huerfano, M.A. López y M. Socolovsky, en preparación.