



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA INTEGRAL GENERALIZADA DE
RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

ACTUARIA

P R E S E N T A :

CINTHYA MENDOZA GOYTIA



Tutor: M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Mendoza

Goytia

Cinthya

56078208

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

097584520

2. Datos del tutor

M en C

Agustín

Ontiveros

Pineda

3. Datos del sinodal 1

M en C

Alejandro

Bravo

Mojica

4. Datos del sinodal 2

Dr

Fernando

Brambila

Paz

5. Datos del sinodal 3

M en C

Emma

Lam

Osnaya

6. Datos del sinodal 4

M en C

María Lourdes

Velasco

Arregui

7. Datos del trabajo escrito

La integral generalizada de Riemann

48 p

2006

Dedico esta tesis a mi mamá,
por su apoyo incondicional
y su enorme paciencia.

Contenido

Dedicatoria.....	2
Introducción.....	4
1. La integral generalizada de Riemann.....	6
1.1 Definiciones previas.....	6
1.2 Calibrador.....	7
1.3 Definición y propiedades de la integral.....	20
1.4 Intervalos infinitos.....	26
2. Similitudes y diferencias entre las integrales de Riemann, generalizada de Riemann y de Lebesgue.....	32
2.1 Integrabilidad absoluta.....	32
2.2 Teorema Fundamental del Cálculo.....	35
3. Bibliografía adicional comentada.....	38
3.1 <i>On riemannian approach to integration</i>	38
3.2 <i>Norm-convergence and uniform integrability for the Henstock-Kurzweil integral</i>	41
3.3 <i>Approximation theorems for generalized Riemann integrals</i>	42
3.4 Comentario final.....	45
Conclusiones.....	46
Bibliografía.....	48

Introducción

Las integrales y derivadas ya eran conocidas antes de Newton (Inglaterra, 1642-1727) y Leibniz (Alemania, 1646-1716) pero, en general, se les da crédito a estos dos matemáticos por haber inventado el Cálculo alrededor de 1670, pues desarrollaron su Teorema Fundamental. Más tarde Cauchy (Francia, 1789-1857) estudió las integrales de las funciones continuas y, tiempo después, Riemann (Alemania 1826-1866) redefinió los conceptos de Cauchy e investigó sobre las integrales de funciones discontinuas.

La integral de Riemann es de más simple definición que cualquier otra de las integrales que vinieron después, por ejemplo la de Lebesgue (Francia, 1875-1941). Es la integral que se enseña en Licenciatura, incluso entre estudiantes que no son del área de Matemáticas, porque tiene muchas aplicaciones a problemas físicos. Pero no es del todo satisfactoria, pues muchas funciones importantes no son integrables según Riemann, ni siquiera después de ampliar esta clase de funciones a las integrales impropias. Los teoremas de convergencia necesarios, aún para las funciones integrables, son difíciles de demostrar usando sólo la herramienta de la teoría de integración de Riemann.

Así que, a finales del siglo XIX la Matemática ya había alcanzado un desarrollo tal, que resultaban insuficientes las formas de integración con que se contaba. La integral de Riemann era incapaz de trabajar con ciertas funciones, por ejemplo las del tipo Newton-Leibniz, quienes requieren -en primer lugar- que la función F sea diferenciable, luego que la derivada F' sea integrable y, por último, que la primitiva pueda ser evaluada en los extremos del dominio donde está definida la función. Es decir, funciones de la forma:

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

La integral de Riemann tampoco podía trabajar con sucesiones de funciones que son Riemann integrables pero cuyos límites no lo son.

Se inventaron, entonces, otras técnicas de integración. La más conocida y usada en investigación en la Matemática contemporánea es la de Lebesgue que amplía la clase de funciones integrables. Sin embargo requiere de un vasto conocimiento previo que se conoce como Teoría de la Medida. Con ella se logran mejores teoremas de convergencia, pero no logra dar solución al conjunto de funciones $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ pues, aunque F' exista, puede que no sea integrable según Lebesgue. Cabe mencionar que al compararla con la integral impropia de Riemann, no resulta ser estrictamente más general. Ninguna de estas dos integrales llevó a construir una teoría satisfactoria de antiderivadas.

Algunas nociones más generales de la integral y resultados un poco más satisfactorios se obtuvieron gracias a Denjoy (Francia, 1882-1974) y Perron (Alemania, 1880-1975,) cuyas definiciones fueron equivalentes pero muy complicadas.

En la década de 1950-1960, Ralph Henstock (Inglaterra 1923) y Jaroslav Kurzweil (Checoslovaquia, 1926) desarrollaron, de manera independiente, la que hoy se conoce como integral de Riemann generalizada. Dicha integral, permite trabajar con un número de funciones aún mayor que las Lebesgue integrables y es una formulación mucho más simple que la de Denjoy-Perron. En pocas palabras, las integrales de Riemann y Lebesgue son casos particulares de la integral generalizada de Riemann y basta con el Cálculo Diferencial e Integral, que se usa para entender la integral de Riemann, para poder estudiarla, pues el tratamiento de Henstock y Kurzweil es sólo ligeramente diferente al que dió Riemann en el siglo XIX.

1 La integral generalizada de Riemann

1.1 Definiciones previas

Comencemos por dar algunas definiciones básicas.

Definición 1.1.1

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado.

Al conjunto finito $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ de intervalos cerrados que no se traslapan donde $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\cup_{i=1}^n I_i = I$ y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ se le llama partición de I .

Los puntos x_i con $i = 0, \dots, n$ se llaman puntos de la partición.

Definición 1.1.2

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$.

Al tomar $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, \dots, n$ la partición se llama etiquetada y se denota como $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$.

Los puntos t_i se llaman etiquetas de la partición.

Definición 1.1.3

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$.

Para $i = 1, \dots, n$ se dice que $\max\{x_i - x_{i-1}\}$ es la norma de P y se denota como $\|P\|$.

Definición 1.1.4

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\overset{\circ}{P}$ una partición etiquetada de $[a, b]$.

$\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ es la suma de Riemann correspondiente a la función f y

a la partición etiquetada $\overset{\circ}{P}$ y se denota como $S(f, \overset{\circ}{P})$.

1.2 Calibrador

La parte central de la integral generalizada de Riemann es el calibrador, del cual hablaremos en esta sección.

Definición 1.2.1

Una función $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que si $x \in I$ entonces $\delta(x) > 0$ se llama calibrador en I .

Definición 1.2.2

Sea δ un calibrador en un intervalo I y sea $\overset{\circ}{P}$ una partición etiquetada.

Se dice que $\overset{\circ}{P}$ es δ -fina cuando para cada uno de sus subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ con $1 \leq i \leq n$ sucede que $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Llamaremos a $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ los intervalos generados por la etiqueta t_i y el calibrador δ evaluado en t_i .

La longitud de los subintervalos está controlada por el calibrador y la etiqueta. Este control se nota en el siguiente lema.

Lema 1.2.1

Sea $\overset{\circ}{P}$ una partición etiquetada δ -fina del intervalo cerrado I . Sea $x \in I$. Entonces existe t_i etiqueta de $\overset{\circ}{P}$ tal que $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

Demostración

Por hipótesis $x \in I$ así que existe el subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de $\overset{\circ}{P}$ tal que $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Como $\overset{\circ}{P}$ es δ -fina entonces

$$t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-1} \leq x \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i)$$

Restando t_i se tiene

$$-\delta(t_i) \leq x_{i-1} - t_i \leq x - t_i \leq x_i - t_i \leq \delta(t_i)$$

Por lo que

$$|x - t_i| \leq \delta(t_i)$$

Concluyendo así la demostración.

En la teoría de la integral de Riemann clásica el uso de calibradores es frecuente. Por ejemplo, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I y sea $\epsilon > 0$ dado. Para cada punto $t \in I$ existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ tal que si $|x - t| < \delta_\epsilon(t)$ y si $x \in I$ entonces $|f(x) - f(t)| < \epsilon$. Como δ_ϵ está definido y es estrictamente positivo en I entonces la función δ_ϵ es un calibrador en I . En la teoría de la integral de Riemann generalizada el uso de calibradores no constantes es esencial.

Mencionemos ahora algunos resultados sobre el calibrador.

Resultado 1.2.1

Si δ_1 y δ_2 son calibradores en el intervalo cerrado I y si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ $\forall x \in I$ entonces δ es calibrador en I

Demostración

Como δ_1 y δ_2 son calibradores en I entonces $\delta_1(x), \delta_2(x) > 0$ para $x \in I$ así que $\min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} > 0$ para $x \in I$.

Por lo tanto δ es calibrador en I .

Resultado 1.2.2

Si δ y γ son calibradores en el intervalo cerrado I tales que $0 < \delta(x) < \gamma(x)$ $\forall x \in I$ entonces cada partición $\overset{\circ}{P}$ etiquetada $\delta - fina$ es también $\gamma - fina$

Demostración

Sea $1 \leq i \leq n$

Tenemos $t_i - \delta(t_i) < t_i < t_i + \delta(t_i)$

Además, por hipótesis $\delta(x) < \gamma(x)$ así que $t_i + \delta(t_i) < t_i + \gamma(t_i)$ y $t_i - \gamma(t_i) < t_i - \delta(t_i)$

De las dos desigualdades anteriores se obtiene $t_i - \gamma(t_i) < t_i - \delta(t_i) < t_i < t_i + \delta(t_i) < t_i + \gamma(t_i)$

Por lo anterior podemos afirmar que $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subset [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)]$

Ya que $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ entonces $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)]$

Así que se concluye que $\overset{\circ}{P}$ es una partición $\gamma - fina$

Resultado 1.2.3

Si $\overset{\circ}{P}$ es una partición $\delta_1 - fina$ y $\delta_2 - fina$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $\overset{\circ}{P}$ es una partición $\delta - fina$

Demostración

Por hipótesis $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta_1(t_i), t_i + \delta_1(t_i)]$ y $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta_2(t_i), t_i + \delta_2(t_i)]$ para $1 \leq i \leq n$

Si $\delta_1 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $t_i - \delta_2(t_i) < t_i - \delta_1(t_i) < t_i < t_i + \delta_1(t_i) < t_i + \delta_2(t_i)$

Por lo tanto $[t_i - \delta_1(t_i), t_i + \delta_1(t_i)] \subset [t_i - \delta_2(t_i), t_i + \delta_2(t_i)]$

Y si $\delta_2 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $t_i - \delta_1(t_i) < t_i - \delta_2(t_i) < t_i < t_i + \delta_2(t_i) < t_i + \delta_1(t_i)$

Así que $[t_i - \delta_2(t_i), t_i + \delta_2(t_i)] \subset [t_i - \delta_1(t_i), t_i + \delta_1(t_i)]$

Como $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subset [t_i - \delta_1(t_i), t_i + \delta_1(t_i)]$ y $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subset [t_i - \delta_2(t_i), t_i + \delta_2(t_i)]$ por lo que se concluye que $\overset{\circ}{P}$ es una partición δ - fina

Notemos que la construcción anterior puede extenderse a un número finito de calibradores en I .

Veamos ahora algunos ejemplos de calibradores.

Ejemplo 1.2.1. Un calibrador δ y una partición δ - fina de $[0, 1]$.

Sean $I = [0, 1]$ y $\delta(t) = \frac{1}{4}$ para todo $t \in I$

Si $\overset{\circ}{P}$ es una partición etiquetada δ -fina entonces $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ con $i = 1, \dots, n$

Para I se tiene que $x_0 = 0$ y $x_n = 1$. Dividamos el intervalo en tres partes iguales. Así $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

Tomemos como primera etiqueta punto medio entre $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{1}{3}$

Sea $t_1 = \frac{1}{6}$ así que $t_1 \in [x_0, x_1]$ pues $\frac{1}{6} \in [0, \frac{1}{3}]$

Pero $[x_0, x_1] \not\subset [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)]$ porque $[0, \frac{1}{3}] \not\subset [\frac{1}{6} - \frac{1}{4}, \frac{1}{6} + \frac{1}{4}] = [-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}]$

Observemos que para $t_i < \delta(t_i)$ con $i = 1, \dots, n$ siempre sucederá que $t_i - \delta(t_i) < 0$ por lo que debemos tomar siempre etiquetas que cumplan con $t_i \geq \delta(t_i)$ para $i = 1, \dots, n$ ya que $x_0 = 0$

Sea $t_1 = \frac{1}{3} \geq \delta(t_1) = \frac{1}{4}$ y veamos que $t_1 \in [x_0, x_1]$ pues $\frac{1}{3} \in [0, \frac{1}{3}]$

Verifiquemos ahora que se cumple que $[x_0, x_1] \subset [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)]$

$[t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [\frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}] = [\frac{4-3}{12}, \frac{4+3}{12}] = [\frac{1}{12}, \frac{7}{12}]$

Por lo tanto $\frac{1}{3} \in [0, \frac{1}{3}] \subset [\frac{1}{12}, \frac{7}{12}]$

Sea t_2 el punto medio entre $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$ es decir $t_2 = \frac{1}{2} \geq \delta(t_2) = \frac{1}{4}$

Veamos que $t_2 \in [x_1, x_2]$ pues $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

Verifiquemos ahora que se cumple que $[x_1, x_2] \subset [t_2 - \delta(t_2), t_2 + \delta(t_2)]$

$[t_2 - \delta(t_2), t_2 + \delta(t_2)] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}] = [\frac{2-1}{4}, \frac{2+1}{4}] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

Por lo tanto $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

Para t_3 no podemos tomar el punto medio entre $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = 1$ pues, si lo tomáramos, se cumpliría que $t_3 \in [x_2, x_3]$ pero no que $[x_2, x_3] \subset [t_3 - \delta(t_3), t_3 + \delta(t_3)]$ porque $t_3 = \frac{5}{6}$ implica que $[\frac{2}{3}, 1] \not\subset [\frac{5}{6} - \frac{1}{4}, \frac{5}{6} + \frac{1}{4}] = [\frac{7}{12}, \frac{13}{12}]$.

Sea $t_3 = 1 \geq \delta(t_3) = \frac{1}{4}$ y veamos que $t_3 \in [x_2, x_3]$ pues $1 \in [\frac{2}{3}, 1]$

Verifiquemos ahora que se cumple que $[x_2, x_3] \subset [t_3 - \delta(t_3), t_3 + \delta(t_3)]$

$[t_3 - \delta(t_3), t_3 + \delta(t_3)] = [1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}] = [\frac{4-1}{4}, \frac{4+1}{4}] = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$

Por lo tanto $1 \in [\frac{2}{3}, 1] \subset [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$.

Así que con el calibrador $\delta(t) = \frac{1}{4}$ y el intervalo dado, construimos una partición y tomamos las etiquetas necesarias para que dicha partición fuera δ - fina.

Ejemplo 1.2.2. Un calibrador δ y una partición δ - fina de $[0, 1]$.

Sean $I = [0, 1]$ y $\delta(t)$ el calibrador definido por:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{para } t = 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{para } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Si \mathring{P} es una partición etiquetada δ -fina entonces $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ con $i = 1, \dots, n$

Como estamos trabajando en el intervalo $[0, 1]$ entonces t_1 debe ser mayor o igual a cero.

Tomemos cualquier número mayor a cero como la etiqueta $t_1 > 0$, por ejemplo, sea $t_1 = \frac{1}{4}$ y veamos que $\delta(t_1) = \delta(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$

Se tiene que $[t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [\frac{1}{4} - \frac{1}{8}, \frac{1}{4} + \frac{1}{8}] = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

0 debe ser el primer elemento de la partición y 1 el último, es decir $x_0 = 0$ y $x_n = 1$ donde n está por determinarse.

Veamos ahora si se cumple que $t_1 \in [x_0, x_1] \subset [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)]$.

$t_1 = \frac{1}{4} \in [0, x_1]$ sucede para $x_1 \geq \frac{1}{4}$, sin embargo nunca sucederá que $[0, x_1] \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

Es decir $\frac{1}{4} \in [0, x_1] \not\subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

De hecho, para cualquier número mayor a cero que se tome como etiqueta, se tendrá $[0, x_1]$ como primer intervalo de la partición y nunca se cumplirá que $[0, x_1] \subset [t_1 - \frac{1}{2}t_1, t_1 + \frac{1}{2}t_1] = [\frac{1}{2}t_1, \frac{3}{2}t_1]$ por lo tanto, nunca se tendría una partición etiquetada δ -fina.

Es por lo anterior, que la primera etiqueta debe ser $t_1 = 0$.

Así $\delta(t_1) = \delta(0) = \frac{1}{4}$ y $[t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}]$.

Por lo tanto $0 \in [0, x_1] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ como puede apreciarse en la siguiente figura:

Debemos elegir $x_1 \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ y que también sea estrictamente mayor a 0. Por ejemplo, tomemos $x_1 = \frac{1}{8}$.

Se cumple entonces que $0 \in [0, \frac{1}{8}] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

La segunda etiqueta debe ser estrictamente mayor a $\frac{1}{8}$ para no estar en $[0, \frac{1}{8}]$ pues los intervalos de la partición no deben traslaparse.

Sea $t_2 = \frac{1}{4}$ y calculemos $\delta(t_2) = \delta(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$.

Entonces debe suceder que $\frac{1}{4} \in [\frac{1}{8}, x_2]$.

Calculemos $[t_2 - \delta(t_2), t_2 + \delta(t_2)] = [\frac{1}{4} - \frac{1}{8}, \frac{1}{4} + \frac{1}{8}] = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

Debe suceder que $\frac{1}{4} \in [\frac{1}{8}, x_2] \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

Sea $x_2 = \frac{1}{4}$.

Se cumple entonces que $\frac{1}{4} \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$.

De nuevo, elijamos la tercera etiqueta de tal forma que no esté en $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ por ejemplo $t_3 = \frac{1}{2}$ y calculemos $\delta(t_3) = \delta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Se debe cumplir que $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{4}, x_3]$.

Hagamos ahora el cálculo de $[t_3 - \delta(t_3), t_3 + \delta(t_3)] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Tiene que cumplirse que $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{4}, x_3] \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Tomemos entonces $x_3 = \frac{3}{4}$.

Verifiquemos que se cumple $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Tomemos ahora $t_4 = \frac{3}{4}$ y apliquemos el calibrador a esa etiqueta $\delta(t_4) = \delta(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$.

Entonces podemos calcular $[t_4 - \delta(t_4), t_4 + \delta(t_4)] = [\frac{3}{4} - \frac{3}{8}, \frac{3}{4} + \frac{3}{8}] = [\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$.

Debe cumplirse $\frac{3}{4} \in [\frac{3}{4}, x_4] \subset [\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$.

Por ejemplo, tomamos como último punto de la partición $x_4 = 1$

Vemos entonces que se cumple que $\frac{3}{4} \in [\frac{3}{4}, 1] \subset [\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$.

Concluimos que la partición que se tomó es δ -fina pues $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ 'para todo $i = 1, \dots, n$

Ilustremos, con la siguiente figura, todo lo anterior.

y resumamos en la siguiente tabla los valores que tomaron las etiquetas, los elementos de la partición y los intervalos generados por las etiquetas y el calibrador.

t_i	$I_i = [x_{i-1}, x_i]$	$[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$
$t_1 = 0$	$I_1 = [0, \frac{1}{8}]$	$[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
$t_2 = \frac{1}{4}$	$I_2 = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$	$[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$
$t_3 = \frac{1}{2}$	$I_3 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$	$[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
$t_4 = \frac{3}{4}$	$I_4 = [\frac{3}{4}, 1]$	$[\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$

Con este ejemplo se ha mostrado cómo, dado un calibrador δ , pueden elegirse las etiquetas y los puntos de la partición para que cumplan con $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ con $i = 1, \dots, n$.

Veamos ahora otro ejemplo con otro calibrador, pero de nuevo usando una partición δ -fina.

Ejemplo 1.2.3. Un calibrador δ y una partición δ -fina de $[0, 1]$
Sean $I = [0, 1]$ y $\delta(x)$ el calibrador definido por:

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 0, 1 \\ \frac{x}{2} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Si $\overset{\circ}{P}$ es una partición etiquetada δ -fina entonces $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$
con $i = 1, \dots, n$

Como en el ejemplo anterior, sea $t_1 = 0$ así que $\delta(0) = \frac{1}{10}$ y hagamos
 $I_1 = [0, x_1]$

$$\text{Calculemos } [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10}]$$

$$\text{Propongamos } x_1 = \frac{1}{10} \text{ y verifiquemos que } t_1 = 0 \in [0, \frac{1}{10}] \subset [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$$

Ahora sea $t_2 = \frac{1}{10}$ y calculemos $\delta(\frac{1}{10}) = \frac{\frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{20}$ Hagamos $I_2 = [\frac{1}{10}, x_2]$

$$[t_2 - \delta(t_2), t_2 + \delta(t_2)] = [\frac{1}{10} - \frac{1}{20}, \frac{1}{10} + \frac{1}{20}] = [\frac{1}{20}, \frac{3}{20}]$$

$$\text{Si hacemos } x_2 = \frac{1}{8} \text{ podemos ver que } t_2 = \frac{1}{10} \in [\frac{1}{20}, \frac{3}{20}]$$

Para la tercera etiqueta tomemos $t_3 = \frac{1}{4}$, calculemos $\delta(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$ y sea
 $I_3 = [\frac{1}{8}, x_3]$

$$[t_3 - \delta(t_3), t_3 + \delta(t_3)] = [\frac{1}{4} - \frac{1}{8}, \frac{1}{4} + \frac{1}{8}] = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$$

$$\text{Para } x_3 = \frac{3}{8} \text{ se cumple que } t_3 = \frac{1}{4} \in [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}] \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$$

Sea $t_4 = \frac{1}{2}$ por lo que el calibrador para esta etiqueta es $\delta(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ y
 $I_4 = [\frac{3}{8}, x_4]$

$$[t_4 - \delta(t_4), t_4 + \delta(t_4)] = [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}] = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$

$$\text{Al hacer } x_4 = \frac{5}{8} \text{ sucede que } t_4 = \frac{1}{2} \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}] \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$

Hagamos $t_5 = \frac{3}{4}$ con lo que $\delta(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$ y $I_5 = [\frac{5}{8}, x_5]$

$$[t_5 - \delta(t_5), t_5 + \delta(t_5)] = [\frac{3}{4} - \frac{1}{8}, \frac{3}{4} + \frac{1}{8}] = [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$$

$$\text{Si } x_5 = \frac{7}{8} \text{ entonces } t_5 = \frac{3}{4} \in [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}] \subset [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$$

Tomemos ahora $t_6 = \frac{9}{10}$ con lo que $\delta(\frac{9}{10}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{9}{10}) = \frac{1}{20}$ y $I_6 = [\frac{7}{8}, x_6]$

$$[t_6 - \delta(t_6), t_6 + \delta(t_6)] = [\frac{9}{10} - \frac{1}{20}, \frac{9}{10} + \frac{1}{20}] = [\frac{17}{20}, \frac{19}{20}]$$

$$\text{Haciendo } x_6 = \frac{19}{20} \text{ se tiene } t_6 = \frac{9}{10} \in [\frac{17}{20}, \frac{19}{20}] \subset [\frac{17}{20}, \frac{19}{20}]$$

Como última etiqueta sea $t_7 = 1$ con lo que $\delta(1) = \frac{1}{10}$ y $I_7 = [\frac{19}{20}, x_7]$

$$[t_7 - \delta(t_7), t_7 + \delta(t_7)] = [1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}] = [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$$

Podemos tomar como último punto de la partición $x_7 = 1$ por lo tanto
 $t_7 = \frac{9}{10} \in [\frac{19}{20}, 1] \subset [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$

Situemos en la siguiente figura las etiquetas, los puntos de la partición y los intervalos de la forma $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

En resumen, con esto podemos definir una partición $\overset{\circ}{P}$ etiquetada δ -fina de $[0, 1]$ con los intervalos y etiquetas que se muestran en la siguiente tabla:

t_i	$I_i = [x_{i-1}, x_i]$	$[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$
$t_1 = 0$	$I_1 = \left[0, \frac{1}{10}\right]$	$\left[\frac{-1}{10}, \frac{1}{10}\right]$
$t_2 = \frac{1}{10}$	$I_2 = \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{20}, \frac{3}{20}\right]$
$t_3 = \frac{1}{4}$	$I_3 = \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$
$t_4 = \frac{1}{2}$	$I_4 = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
$t_5 = \frac{3}{4}$	$I_5 = \left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right]$
$t_6 = \frac{9}{10}$	$I_6 = \left[\frac{7}{8}, \frac{19}{20}\right]$	$\left[\frac{17}{20}, \frac{19}{20}\right]$
$t_7 = 1$	$I_7 = \left[\frac{19}{20}, 1\right]$	$\left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$

Con esta exposición acerca de los calibradores podemos concluir las razones por las que su uso en la integral generalizada de Riemann es tan adecuado y útil:

1. Un calibrador puede forzarnos a tomar cierto punto como etiqueta, lo cual resulta útil cuando algún punto causa dificultades, así que al tomarlo como etiqueta se está controlando dicha dificultad.

Recordemos los ejemplos 1.2.1., 1.2.2. y 1.2.3. En los tres casos vimos por qué tomar ciertos puntos como etiquetas.

2. El uso de calibradores hace surgir un Teorema Fundamental del Cálculo para la integral generalizada de Riemann 'mejorado' pues no se requiere la hipótesis de que $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ ni que $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$. Esto se expondrá en la sección 2 del capítulo 3.

Pero el uso de calibradores no se restringe a la integral generalizada de Riemann, si no que va mucho más allá. A continuación daremos algunos teoremas y definiciones que buscan dar una idea general de la afirmación anterior.

Recordemos que al trabajar con la integral de Riemann, en general se eligen primero los intervalos de longitud menor o igual que la constante δ y luego la etiqueta para éstos. No se cuestiona, siquiera, la existencia de la partición etiquetada puesto que, en realidad, no importa qué puntos se usen como etiquetas. Pero el calibrador δ hace que el proceso sea al revés: las etiquetas tienen que elegirse primero y luego los intervalos del tamaño adecuado para cada etiqueta,

de tal modo que se tenga una partición etiquetada $\delta - fina$. Por lo tanto para una función arbitraria δ hay que probar la existencia de una partición etiquetada $\delta - fina$.

Teorema 1.2.1

Si δ es un calibrador en $[a, b]$ entonces existe una partición etiquetada $\delta - fina$ en $[a, b]$

Demostración

Sea δ un calibrador en $[a, b]$ dado.

Supongamos que no existe alguna partición etiquetada $\delta - fina$ en $[a, b]$

Llamemos I_0 al intervalo $[a, b]$ y dividámoslo en dos partes iguales. En estas mitades no habrá una partición etiquetada $\delta - fina$ en I_0 .

Tomemos una de esas dos mitades y llamémosla I_1 . Si de nuevo la dividimos en dos partes de la misma longitud, tampoco habrá en ellas partición alguna que cumpla con ser $\delta - fina$ en I_1 .

Repetiendo el mismo proceso sucesivamente, tendremos una familia de intervalos $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

Entonces existe un único $x_0 \in [a, b]$ con $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^n} < \delta(x_0)$. El intervalo I_n posee la partición etiquetada $\delta - fina$ con etiqueta x_0 y extremos de I_n como elementos de la partición, lo cual es una contradicción.

La demostración de la existencia de particiones etiquetadas $\delta - finas$ hace uso directamente del Axioma del Supremo, que establece que todo conjunto de números reales acotado y no vacío posee supremo, lo cual es equivalente al teorema de los intervalos anidados.

El teorema anterior, relativo a los intervalos de particiones $\delta - fina$ dado un calibrador δ , puede usarse para demostrar los resultados más comunes sobre funciones continuas que involucran al Axioma del Supremo, tales como el Teorema del Valor Intermedio, el Teorema del Valor Extremo (conocido también como Teorema del Máximo-Mínimo) y el Teorema de Continuidad Uniforme. Las demostraciones que en general se dan a estos teoremas utilizan algunas propiedades de las sucesiones; las demostraciones usando particiones etiquetadas $\delta - finas$ no son ni más fáciles ni más difíciles, pero sirven para ilustrar otra forma de pensar respecto a estos teoremas.

Veamos estas dos definiciones.

Definición 1.2.3

Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$.

Se dice que f es continua en c si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ es un número que satisface $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Definición 1.2.4

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Se dice que la función f es uniformemente continua en A si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si $x, u \in A$ son números cualesquiera tales que $|x - u| < \delta_\epsilon$ entonces $|f(x) - f(u)| < \epsilon$

Hagamos uso de las definiciones anteriores para ver qué pasa en la demostración del Teorema del Valor Intermedio.

Teorema 1.2.2 (del Valor Intermedio)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$

Si L es un número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = L$

Demostración

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(a) < L < f(b)$

Suponiendo que $f(x) \neq L$ para todo $x \in [a, b]$ y tomando en cuenta que f es una función continua en $[a, b]$ entonces:

si $f(x) < L$ entonces existe $\delta(x) > 0$ tal que $f(t) < L$ para todo $t \in [a, b]$ que satisfice $|t - x| < \delta(x)$

Con esto se define una función positiva δ en $[a, b]$, es decir, un calibrador δ .

Sea $\{c_i, [x_{i-1}, x_i]\}$ para $1 \leq i \leq n$ una partición etiquetada δ -fina de $[a, b]$

Como $f(x_0) = f(a) < L$ entonces $f(x) < L$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Luego $f(x_1) < L$ entonces $f(x) < L$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Y así sucesivamente hasta llegar a que $f(x_n) = f(b) < L$ entonces $f(x) < L$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ lo cual es contradictorio, así que concluimos que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = L$

La demostración para $f(b) < L < f(a)$ es similar.

Notemos que, en la demostración del Teorema del Valor Intermedio, la existencia de un calibrador δ es una simple consecuencia de la definición de función continua, pero no proporciona un método para encontrar el punto c .

Demos ahora una definición, para luego ver algunos teoremas cuyas demostraciones, usando subsucesiones, son indirectas pero usando particiones etiquetadas δ -fina se vuelven más breves.

Definición 1.2.5

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Se dice que f tiene un máximo absoluto en A si existe un punto $y \in A$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo $x \in A$ y que y es un punto máximo absoluto de A .

Se dice que f tiene un mínimo absoluto en A si existe un punto $z \in A$ tal que $f(z) \leq f(x)$ para todo $x \in A$ y que z es un punto mínimo absoluto de A .

Teorema 1.2.3 (del Valor Extremo o del Máximo-Mínimo)

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

Demostración

Sea $M = \sup \{f(x) : x \in I\}$ y supongamos que $f(x) < M$ para todo $x \in I$. Es decir, siempre sucede que $|M - f(x)| > 0$.

Por hipótesis de continuidad, para cada $t \in I$ existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in I$ y si $|x - t| \leq \delta(t)$ entonces $f(x) < \frac{1}{2}(M + f(t))$.

Como δ es calibrador en I y si $\{t_i, I_i\}$ para $1 \leq i \leq n$ es una partición etiquetada δ -fina de I donde t_i son las etiquetas, hagamos $M = \frac{1}{2} \max \{M + f(t_1), \dots, M + f(t_n)\}$

Por el lema 1.2.1 afirmamos que, dado cualquier $x \in I$ existe i con $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$ de lo que se sigue que $f(x) < \frac{1}{2}(M + f(t_i)) \leq M$.

Al ser $x \in I$, entonces M es una cota superior de f en I , contradiciendo que $M = \sup \{f(x) : x \in I\}$ y demostrándose la existencia del máximo absoluto de I .

La demostración de la existencia del mínimo absoluto de I es similar.

Teorema 1.2.4 (del Acotamiento)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ entonces f es acotada en $[a, b]$

Demostración

Por hipótesis de continuidad para cada $x \in [a, b]$ existe un número positivo $\delta(x)$ tal que $|f(t) - f(x)| < 1$ para todo $t \in [a, b]$ que satisfaga $|t - x| < \delta(x)$. Esto define una función positiva δ en $[a, b]$

Sean $\{c_i, [x_{i-1}, x_i]\}$ tal que $1 \leq i \leq n$ una partición etiquetada δ -fina de $[a, b]$ y $M = \max \{|f(c_i)|\}$ tal que $1 \leq i \leq n$

Dado un punto $x \in [a, b]$ existe un índice j tal que $x \in [x_{j-1}, x_j]$ y así $|f(x)| \leq |f(x) - f(c_j)| + |f(c_j)| < 1 + M$

Esto demuestra que la función f está acotada por $1 + M$.

La demostración anterior revela que la hipótesis de continuidad es necesaria pero no suficiente. La continuidad de f en el punto x sólo se usa para obtener una cota local para la función f .

Teorema 1.2.5

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$

Demostración

Sea $\epsilon > 0$

Para cada $x \in [a, b]$ elijamos $\delta(x) > 0$ para que $|f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \in [a, b]$ que satisfaga $|t - x| < 2\delta(x)$

Esto define una función positiva δ en $[a, b]$, es decir, un calibrador.

Sea $\{c_i, [x_{i-1}, x_i]\}$ para $1 \leq i \leq n$ una partición etiquetada δ -fina de $[a, b]$ donde c_i son las etiquetas y sea $\delta_0 = \min \{\delta(c_i)\}$ para $1 \leq i \leq n$

Supongamos que $s, t \in [a, b]$ con $|t - s| < \delta_0$ y elijamos un índice j tal que $s \in [x_{j-1}, x_j]$

Notemos que $|s - c_j| < \delta(c_j)$ y que $|t - c_j| \leq |t - s| + |s - c_j| < \delta_0 + \delta(c_j) \leq 2\delta(c_j)$

Se sigue que $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(c_j)| + |f(c_j) - f(s)| < \epsilon$

Esto demuestra que la función f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Consideremos de nuevo $A \subset \mathbb{R}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La definición 1.2.3 establece que los siguientes enunciados son equivalentes:

i) f es continua en cada punto $u \in A$

ii) dados $\epsilon > 0$ y $u \in A$ existe $\delta(u, \epsilon) > 0$ tal que para cada x que cumpla $x \in A$ y $|x - u| < \delta(u, \epsilon)$ entonces $|f(x) - f(u)| < \epsilon$

Lo que aquí se quiere enfatizar, es que δ depende, en general, de $\epsilon > 0$ y $u \in A$. Esta última dependencia muestra el hecho de que la función f puede que cambie rápidamente sus valores cerca de ciertos puntos y lentamente cerca de otros. Así, el calibrador se adecuará según se necesite, como en la función $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ para todo $x > 0$ cuya gráfica se muestra a continuación

También habrá otras funciones para las cuales el calibrador δ pueda elegirse independientemente del punto $u \in A$ para así depender sólo de ϵ . Por ejemplo, considérese la función $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(u)| = 2|x - u|$$

Así que podemos elegir $\delta(\epsilon, u) = \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\epsilon > 0$ y $u \in \mathbb{R}$

Como otro ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$\text{entonces } |g(x) - g(u)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{u} \right| = \left| \frac{u-x}{ux} \right|$$

Si $u \in A$ está dado y si tomamos $\delta(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon \right\}$

entonces si $|x - u| < \delta(\epsilon, u)$ tenemos $|x - u| < \frac{1}{2}u$

así que $\frac{1}{2}u < x < \frac{3}{2}u$

y se sigue que $\frac{1}{x} < \frac{2}{u}$

Pero si $|x - u| < \frac{1}{2}u$ entonces $|g(x) - g(u)| = \frac{u-x}{ux}$

implica que $|g(x) - g(u)| \leq \frac{2}{u^2} |x - u|$

En consecuencia $|x - u| < \delta(\epsilon, u)$ y $\delta(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon \right\}$ junto con $|g(x) - g(u)| \leq \frac{2}{u^2}(x - u)$ implican que $|g(x) - g(u)| < \frac{2}{u^2} \frac{1}{2}u^2\epsilon = \epsilon$

Podemos ver que la elección de $\delta(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon \right\}$ funciona, en el sentido de que nos permite dar un valor δ que asegure que $|g(x) - g(u)| < \epsilon$ cuando $|x - u| < \delta$ y $x, u \in A$. Notemos que el valor de $\delta(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon \right\}$ depende del punto $u \in A$. Si deseáramos considerar todos los puntos $u \in A$, entonces $\delta(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\epsilon \right\}$ no nos conduciría a un solo valor $\delta(\epsilon) > 0$ que funcione para todo $u \in A$ pues $\inf \{ \delta(\epsilon, u) : u > 0 \} = 0$

Claro que hay otras opciones para δ , por ejemplo, podríamos tomar $\delta_1(\epsilon, u) = \inf \left\{ \frac{1}{3}u, \frac{1}{3}u^2\epsilon \right\}$ pero aún tendríamos $\inf \{ \delta_1(\epsilon, u) : u > 0 \} = 0$. De hecho, no existe una forma de tomar un valor δ que funcione para todo $u > 0$ para la función $g(x) = \frac{1}{x}$ porque, para una vecindad de $V_\epsilon(\frac{1}{2})$ donde $\frac{1}{2} = g(2)$ y $V_\epsilon(2)$ donde $2 = g(\frac{1}{2})$ los valores máximos correspondientes de δ son considerablemente diferentes. Conforme $u \rightarrow 0$, los valores posibles de δ tienden a cero, como puede apreciarse a continuación en la gráfica de $g(x) = \frac{1}{x}$.

Con estos teoremas y definiciones se espera haber dado una idea general de los alcances del uso de calibradores (consultar [8] para una exposición más amplia). Estos, junto con particiones etiquetadas δ - *fina*, son de gran utilidad tanto para la integral generalizada de Riemann como para temas fundamentales del Cálculo y el Análisis Matemático.

1.3 Definición y propiedades de la integral

Haciendo uso de lo anterior, podemos definir la integral de Riemann generalizada.

Definición 1.3.1

Sea f una función definida en $[a, b]$

Se dice que f es integrable en $[a, b]$ en el sentido generalizado de Riemann si $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ calibrador tal que si $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ es una partición etiquetada δ -fina de $[a, b]$ entonces $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - L \right| < \epsilon$.

Se denota como $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$

Como puede observarse, la definición de una función integrable en el sentido generalizado de Riemann difiere casi en nada de la definición de integral de Riemann clásica. Es sólo la introducción del calibrador lo que la hace diferente (y en consecuencia la elección de las etiquetas necesarias para trabajar con particiones etiquetadas δ -finas). Veamos en un ejemplo los cambios que éste conlleva.

Ejemplo 1.3.1

Sea la función de Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$D(x) \in \mathbb{R}_{[0,1]}^*$ y $\int_a^b D(x) dx = 0$

Sea $\epsilon > 0$ dado

Sea el calibrador $\delta(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} & x \in \{r_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ tales que } r_k \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$

Sea $\overset{\circ}{P}_{[0,1]}$ una partición etiquetada δ -fina en $[0, 1]$

Entonces

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1}) &< \delta(t_i) \\ D(t_i)(x_i - x_{i-1}) &\leq D(t_i)\delta(t_i) \\ \sum_{i=1}^n D(t_i)(x_i - x_{i-1}) &< \sum_{i=1}^n D(t_i)\delta(t_i) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(f, \overset{\circ}{P}) = \sum_{i=1}^n D(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ 0 &\leq S(f, \overset{\circ}{P}) = \sum_{i=1}^n D(t_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n D(t_i)\delta(t_i) < \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon \end{aligned}$$

Así que $D(x) \in \mathbb{R}_{[0,1]}^*$ y $\int_a^b D(x)dx = 0$.

Aunque en este trabajo no nos ocupamos de la integral de Lebesgue, cabe mencionar que la función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue y su integral también es cero, pero no es integrable según Riemann.

A continuación se exponen algunas de las propiedades de la integral de Riemann generalizada.

Propiedad 2.3.1

Sea $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$

Entonces $\int_a^b f = L$ con L único.

Demostración

Supongamos que $\int_a^b f = A_1$ y $\int_a^b f = A_2$

Por demostrar que $A_1 = A_2$

Sea $\epsilon > 0$

$\exists \delta_{A_1}(x) > 0$ y $\exists \delta_{A_2}(x) > 0$ tales

que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$

Sea $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ una partición etiquetada δ -fina

Tomemos $\delta = \min \{ \delta_{A_1}, \delta_{A_2} \}$ y calculemos

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= \left| A_1 - S(f, \overset{\circ}{P}) + S(f, \overset{\circ}{P}) - A_2 \right| \leq \left| A_1 - S(f, \overset{\circ}{P}) \right| + \left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A_2 \right| \\ &= \left| A_1 - S(f, \overset{\circ}{P}) \right| + \left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A_2 \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario entonces $A_1 = A_2$

y se concluye que el valor de la integral es único.

Propiedad 1.3.2

Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$

Entonces $f_1 + f_2 \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ construimos un calibrador δ_ϵ en $[a, b]$ tal que si $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ es una partición etiquetada δ_ϵ -fina en $[a, b]$ entonces $\left| S(f_1, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\left| S(f_2, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$

Tomamos $\delta_\epsilon = \min \{ \delta_{f_1}, \delta_{f_2} \}$

Como $S(f_1 + f_2, \overset{\circ}{P}) = S(f_1, \overset{\circ}{P}) + S(f_2, \overset{\circ}{P})$ entonces

$$\left| S(f_1 + f_2, \overset{\circ}{P}) - \left(\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \right) \right| \leq \left| S(f_1, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_1 \right| + \left| S(f_2, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_2 \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Al ser ϵ arbitrario se concluye que $f_1 + f_2 \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y que $\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

Propiedad 1.3.3

Sean $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $c \in \mathbb{R}$

Entonces $cf \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$

Demostración

Sean $A = \int_a^b f$ y $\epsilon > 0$ dado.

Consideremos $\frac{\epsilon}{|c|}$

Existe $\delta(x)$ calibrador en $[a, b]$ tal que si $\overset{\circ}{P}$ es una partición etiquetada δ -fina en $[a, b]$ entonces se cumple que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A \right| < \frac{\epsilon}{|c|}$

Sea $\delta_1(x) = \delta(x)$.

Si $\overset{\circ}{P}$ una partición etiquetada δ_1 -fina en $[a, b]$ entonces $\left| S(cf, \overset{\circ}{P}) - cA \right| = |c| \left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A \right| < \epsilon$

Entonces $cf \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$

Propiedad 1.3.4

Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ tales que $f_1 \leq f_2$

Entonces $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$

Demostración

Tomemos $\delta = \min \{ \delta_{f_1}, \delta_{f_2} \}$

Dado $\epsilon > 0 \exists \delta$ en $[a, b]$ tal que si $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ es una partición etiquetada δ -fina entonces $\left| S(f_1, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\left| S(f_2, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$

$\left| S(f_1, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $\int_a^b f_1 - \frac{\epsilon}{2} < S(f_1, \overset{\circ}{P})$ y $\left| S(f_2, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $\int_a^b f_2 - \frac{\epsilon}{2} < S(f_2, \overset{\circ}{P})$

Veamos que $-\frac{\epsilon}{2} < S(f_1, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_1 < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $\int_a^b f_1 - \frac{\epsilon}{2} < S(f_1, \overset{\circ}{P})$ y que $-\frac{\epsilon}{2} < S(f_2, \overset{\circ}{P}) - \int_a^b f_2 < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $S(f_2, \overset{\circ}{P}) < \int_a^b f_2 + \frac{\epsilon}{2}$

Y usando el hecho de que $S(f_1, \overset{\circ}{P}) < S(f_2, \overset{\circ}{P})$ entonces $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2 + \epsilon$ pues $\int_a^b f_1 - \frac{\epsilon}{2} < S(f_1, \overset{\circ}{P}) < S(f_2, \overset{\circ}{P}) < \int_a^b f_2 + \frac{\epsilon}{2}$

Y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario, se concluye que $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$

En particular, si $f_1 = 0$ entonces podemos concluir que $0 \leq \int_a^b f_2$

Propiedad 1.3.5 (Teorema de la aditividad)

Sea $c \in (a, b)$

Entonces $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^* \iff f \in \mathbb{R}_{[a,c]}^* \text{ y } f \in \mathbb{R}_{[c,b]}^*$ En este caso $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Demostración

\Leftarrow)

Sean $f_1 \in \mathbb{R}_{[a,c]}^*$ tal que $\int_a^c f_1 = L_1$ y $f_2 \in \mathbb{R}_{[c,b]}^*$ tal que $\int_c^b f_2 = L_2$

Dado $\epsilon > 0 \exists \delta_1$ en $[a, c]$ tal que si $\overset{\circ}{P}_1$ es una partición etiquetada δ_1 - fina

entonces $\left| S(f_1, \overset{\circ}{P}_1) - L_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$

Igualmente, $\exists \delta_2$ en $[c, b]$ tal que si $\overset{\circ}{P}_2$ es una partición etiquetada δ_2 - fina

entonces $\left| S(f_2, \overset{\circ}{P}_2) - L_2 \right| < \frac{\epsilon}{2}$

Definamos ahora el calibrador δ_ϵ en $[a, b]$ con la propiedad de que cualquier partición δ_ϵ - fina que contenga al punto c debe tenerlo como etiqueta

$$\delta_\epsilon = \begin{cases} \min \left\{ \delta_1(t), \frac{1}{2}(c-t) \right\} & \text{para } t \in [a, c) \\ \min \left\{ \delta_1(c), \delta_2(c) \right\} & \text{para } t = c \\ \min \left\{ \delta_2(t), \frac{1}{2}(t-c) \right\} & \text{para } t \in (c, b] \end{cases}$$

Demostremos ahora que para cualquier partición $\overset{\circ}{Q}$ en $[a, b]$ etiquetada δ_ϵ - fina

existen una partición etiquetada δ_1 - fina de $\overset{\circ}{Q}_1$ en $[a, c]$ y una partición

etiquetada δ_2 - fina de $\overset{\circ}{Q}_2$ en $[c, b]$ tales que $S(f, \overset{\circ}{Q}) = S(f_1, \overset{\circ}{Q}_1) + S(f_2, \overset{\circ}{Q}_2)$

Notemos que hay dos casos a considerar

Caso 1: $c \in \overset{\circ}{Q}$

Aquí c estaría en dos subintervalos de $\overset{\circ}{Q}$ de los que sería etiqueta

Si $\overset{\circ}{Q}_1$ es la parte de $\overset{\circ}{Q}$ que tiene subintervalos en $[a, c]$ entonces $\overset{\circ}{Q}_1$ es δ_1 - fina

Y si $\overset{\circ}{Q}_2$ es la parte de $\overset{\circ}{Q}$ que tiene subintervalos en $[c, b]$ entonces $\overset{\circ}{Q}_2$ es δ_2 - fina

Entonces queda claro que $S(f, \overset{\circ}{Q}) = S(f_1, \overset{\circ}{Q}_1) + S(f_2, \overset{\circ}{Q}_2)$

Caso 2: $c \notin \overset{\circ}{Q}$

Aquí c sería la etiqueta de algún subintervalo de la forma $[x_{i-1}, x_i]$

Supongamos que lo es del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y consideremos los subintervalos $[x_{k-1}, c]$ y $[c, x_k]$

Sean $\overset{\circ}{Q}_1$ y $\overset{\circ}{Q}_2$ las particiones etiquetadas de $[a, c]$ y $[c, b]$ resultantes

Como $f(c) = (x_k - x_{k-1}) = f(c)(c - x_{k-1}) + f(c)(x_k - c)$ entonces se cumple

que $S(f, \overset{\circ}{Q}) = S(f_1, \overset{\circ}{Q}_1) + S(f_2, \overset{\circ}{Q}_2)$

En ambos casos se tiene que

$$\begin{aligned} \left| S(f, \overset{\circ}{Q}) - (L_1 + L_2) \right| &= \left| (S(f, \overset{\circ}{Q}_1) + S(f, \overset{\circ}{Q}_2)) - (L_1 + L_2) \right| \\ &\leq \left| S(f, \overset{\circ}{Q}_1) - L_1 \right| + \left| S(f, \overset{\circ}{Q}_2) - L_2 \right| \end{aligned}$$

Como $\overset{\circ}{Q}_1$ es δ_1 -fina y $\overset{\circ}{Q}_2$ es δ_2 -fina se concluye que $\left| S(f, \overset{\circ}{Q}) - (L_1 + L_2) \right| < \epsilon$

\implies)

Supongamos que $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$

Dado $\epsilon > 0 \exists \gamma_\epsilon$ que satisface que dadas dos particiones $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ y $\overset{\circ}{Q}_{[a,b]}$ etiquetadas γ_ϵ -finas se tiene que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - S(f, \overset{\circ}{Q}) \right| < \epsilon$

Sean f_1 la función f restringida a $[a, c]$ y $\overset{\circ}{P}_1$ y $\overset{\circ}{Q}_1$ las particiones etiquetadas γ_ϵ -finas de $[a, c]$

Si agregamos puntos y etiquetas del intervalo $[c, b]$ podemos extender a $\overset{\circ}{P}_1$ y $\overset{\circ}{Q}_1$ hasta convertirlas en particiones $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ etiquetadas γ_ϵ -finas de $[a, b]$

Si se usan los mismos puntos y etiquetas agregados para $\overset{\circ}{P}_1$ y $\overset{\circ}{Q}_1$ en $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ entonces se tiene que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - S(f, \overset{\circ}{Q}) \right| = \left| S(f_1, \overset{\circ}{P}_1) - S(f_1, \overset{\circ}{Q}_1) \right|$

Como $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ son γ_ϵ -finas entonces $\left| S(f_1, \overset{\circ}{P}_1) - S(f_1, \overset{\circ}{Q}_1) \right| < \epsilon$

Así que $f_1 \in \mathbb{R}_{[a,c]}^*$

De forma similar, definimos f_2 como la función f restringida a $[c, b]$ y $\overset{\circ}{P}_2$ y $\overset{\circ}{Q}_2$ las particiones etiquetadas γ_ϵ -finas de $[c, b]$

Agregamos puntos y etiquetas de $[a, c]$ para extender $\overset{\circ}{P}_2$ y $\overset{\circ}{Q}_2$ y hacerlas $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ etiquetadas γ_ϵ -finas de $[a, b]$

Luego, al usar los puntos y etiquetas agregados a $\overset{\circ}{P}_2$ y $\overset{\circ}{Q}_2$ en $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ se tiene que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - S(f, \overset{\circ}{Q}) \right| = \left| S(f_2, \overset{\circ}{P}_2) - S(f_2, \overset{\circ}{Q}_2) \right| < \epsilon$ por ser $\overset{\circ}{P}$ y $\overset{\circ}{Q}$ γ_ϵ -finas

Y llegamos a que $f_2 \in \mathbb{R}_{[c,b]}^*$

Podemos concluir ahora que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Veamos ahora el siguiente teorema que nos muestra por qué la integral que se discute en esta tesis es una versión generalizada de la integral clásica de Riemann.

Teorema 2.3.1

Si $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ con integral L entonces $f \in \mathbb{R}_{[c,b]}^*$ con integral L .

Demostración

Sea $\epsilon > 0$

Existe $\delta > 0$ tal que para toda $\overset{\circ}{P}$ partición etiquetada de $[a, b]$ que cumpla $\left\| \overset{\circ}{P} \right\| < \delta$ sucede que $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - L \right| < \epsilon$

Sea $\delta^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ calibrador definido como sigue $\delta^*(t) = \frac{1}{4}\delta$ para $t \in [a, b]$

Ahora, sea $\overset{\circ}{P}$ una partición etiquetada δ^* - fina

Se tiene entonces que $x_i - x_{i-1} \leq \delta^*(t_i) = \frac{1}{4}\delta$ para $1 \leq i \leq n$

Así que $0 < x_i - x_{i-1} \leq \frac{\delta}{4} < \delta$ para $1 \leq i \leq n$

Entonces $\overset{\circ}{P}$ es tal que $\left\| \overset{\circ}{P} \right\| < \delta$ y $\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - L \right| < \epsilon$

1.4 Intervalos infinitos

En esta sección discutiremos la integración generalizada de Riemann en intervalos no acotados tales como $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, \infty)$.

Comencemos por recordar que para integrar -según Riemann- funciones con límites infinitos en algún punto $c \in [a, b]$ o funciones que oscilan demasiado en dicho punto, nos vemos obligados a calcular límites de integrales en subintervalos cuyos extremos tiendan a c .

Esto es, supongamos que se tiene la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[2]{x}} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dicha función no es acotada en una vecindad a la izquierda de $[0, 1]$ pero es integrable según Riemann en $[\gamma, 1]$ para $\gamma \in (0, 1]$. Sólo basta definir la integral impropia de f en $[0, 1]$ de la siguiente forma:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \int_{\gamma}^1 \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx$$

Luego calcular la integral de la forma usual y posteriormente el límite.

El cálculo de límites no es necesario cuando se trabaja con la integral generalizada de Riemann. Ilustremos esta afirmación con un ejemplo que involucra la función anterior.

Ejemplo 1.4.1

Sea $F(x) = 2\sqrt[2]{x}$ para $x \in [0, 1]$

Entonces $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = f(x)$ para $x \in (0, 1]$

Así que $f \in \mathbb{R}_{[0,1]}^*$ y $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$

es decir $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx = F(1) - F(0) = 2$

Como vimos, no se calcularon límites, simplemente se puede usar el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral generalizada de Riemann, que se expondrá en el siguiente capítulo, o el teorema que debemos al alemán Heinrich Hake, en el cual una función no acotada u oscilatoria cerca del extremo derecho del intervalo donde está definida, pertenece a la clase de las funciones \mathbb{R}^* y, lo más importante, evita el cálculo de límites para obtener su integral.

Antes de enunciar el teorema de Hake, demos una definición.

Definición 1.4.1

Sean $f : A \rightarrow B$ una función y $A_1 \subset A$

La función $f_1(x) : A_1 \rightarrow B$ donde $f_1(x) = f(x)$ para $x \in A_1$ se conoce como la restricción de f en A_1

A veces se denota como $f_1 = f \mid A_1$

Teorema 1.4.1 (Teorema de Hake)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ si y sólo si para cada $\gamma \in (a, b)$ la restricción de f en $[a, \gamma]$ pertenece a $\mathbb{R}_{[a,\gamma]}^*$ y $\lim_{\gamma \rightarrow b^-} \int_a^\gamma f = A \in \mathbb{R}$

En este caso $\int_a^b f = A$

La idea involucrada en este teorema, es -por un lado- construir una sucesión (γ_n) que converja a b para que $\mathbb{R}_{[a,\gamma]}^*$ y $\lim_n \int_a^{\gamma_n} f = A$ y -por otro- construir calibradores en $[a, b]$ para demostrar que $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ (construyendo calibradores adecuados para los intervalos $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$).

El Teorema de Hake implica que la integral generalizada de Riemann no se necesita 'extender' tomando límites, pues basta con examinar cómo se comporta la función a integrar en subintervalos de la forma $[a, \gamma]$ con $\gamma < b$.

Algo similar ocurre cuando en el extremo izquierdo del intervalo la función es no acotada o hay oscilaciones cerca de él. Así que pasemos, en seguida, a los casos en los que el dominio es un intervalo infinito.

1.4.1 El intervalo $[a, \infty)$

Al definir la integral generalizada de Riemann para una función f de $[a, \infty)$ en \mathbb{R} inmediatamente nos encontramos con un problema: si $\overset{\circ}{P}_{[a,\infty)}$ es una partición etiquetada tal que $\overset{\circ}{P}_{[a,\infty)} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ entonces se tendría que $x_0 = a$ y $x_{n+1} = \infty$. Además la suma de Riemann sería de la forma $S(f, \overset{\circ}{P}) = f(t_0)(x_1 - x_0) + f(t_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) + f(t_{n+1})(\infty - x_n)$ Su último término no tiene sentido en \mathbb{R} . De esto surge la necesidad, ya sea de asignarle un valor o de suprimirlo y dado que no encontramos una manera útil de darle un valor que no sea cero, elegimos suprimirlo. Hay dos formas de hacerlo, una es definiendo la suma de Riemann de tal forma que contenga sólo los primeros n términos y la otra es usando un procedimiento que nos permita manejar los extremos $\pm\infty$ de los intervalos infinitos, de tal forma que eliminemos el último término.

Para evitar el uso de los Reales Extendidos, se opta por utilizar la primera forma, es decir, hacemos que la suma de Riemann contenga sólo los n primeros términos de la suma anterior, como ha sido hasta ahora (ver Definición 1.1.4). En vez de manejar particiones de $[a, \infty)$ en un número finito de intervalos que no se translapan -pues uno de ellos necesariamente tiene longitud infinita-, manejaremos sólo subparticiones de $[a, \infty)$ que sean conjuntos finitos de intervalos

que no se traslapan y de longitud finita cuya unión esté propiamente contenida en $[a, \infty)$.

Definición 1.4.2

Definimos un calibrador en $[a, \infty)$ como el par ordenado (δ, d^*) formado por δ una función estrictamente positiva definida en $[a, \infty)$ y un número $d^* > 0$

Definición 1.4.3

Sea una subpartición etiquetada $\overset{\circ}{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, \infty)$ con etiquetas $\{t_k : 0 \leq k \leq n-1\}$

Se dice que $P_{[a, \infty)}$ es (δ, d^*) -fina cuando:

- i) $[a, \infty) = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \cup [x_n, \infty)$
- ii) $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para $i = 1, \dots, n$
- iii) $[x_n, \infty) \subset [\frac{1}{d^*}, \infty)$ o, equivalentemente que, $\frac{1}{d^*} \leq x_n$

Ahora definamos la integral generalizada de Riemann en $[a, \infty)$

Definición 1.4.4

Se dice que una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann generalizada integrable si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ_ϵ en $[a, \infty)$ tal que si $\overset{\circ}{P}$ es cualquier subpartición etiquetada δ_ϵ -fina en $[a, \infty)$ entonces

$$\left| S(f, \overset{\circ}{P}) - A \right| \leq \epsilon$$

En este caso $f \in \mathbb{R}_{[a, \infty)}^*$ y $\int_a^\infty f = A$

A continuación enunciaremos el Teorema de Hake correspondiente a este tipo de intervalo.

Teorema 1.4.2 (Teorema de Hake)

Si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $f \in \mathbb{R}_{[a, \infty)}^*$ si y sólo si para cada $\gamma \in (a, \infty)$ la restricción de f en $[a, \gamma]$ pertenece a $\mathbb{R}_{[a, \gamma]}^*$ y $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_a^\gamma f = A \in \mathbb{R}$

En este caso $\int_a^\infty f = A$

Utilicemos ahora el teorema en la resolución de los ejemplos de esta sección.

Ejemplo 1.4.2

Dados $\alpha > 1$ y $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in [1, \infty)$ demostrar que $f_\alpha \in \mathbb{R}_{[1, \infty)}^*$

Sea $\gamma \in (1, \infty)$ La restricción de f_α en $[1, \gamma]$ es continua, por lo que $f_\alpha \in \mathbb{R}_{[1, \gamma]}^*$

Además $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_1^\gamma f_\alpha = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_1^\gamma \frac{1}{x^\alpha} dx$

Por lo tanto $\int_1^\gamma \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^\gamma \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^\gamma \right] dx = \left[\frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{\alpha-1}} \right) \right]$

Y el límite es $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\gamma^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} 1 - 0 = \frac{1}{\alpha-1}$

Por el teorema de Hake concluimos que $\int_1^\infty f_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$ con $\alpha > 1$

1.4.2 El intervalo $(-\infty, b]$

Expondremos ahora la integración generalizada de Riemann en el intervalo $(-\infty, b]$

Definición 1.4.5

Sean $b \in \mathbb{R}$ y $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Un calibrador en $[-\infty, b]$ es un par ordenado (d_*, δ) que consta de un número $d_* > 0$ y una función δ estrictamente positiva en $(-\infty, b]$

Definición 1.4.6

Una subpartición etiquetada $\overset{\circ}{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ de $(-\infty, b]$ cuyas etiquetas son $t_k = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ es (d_*, δ) - fina si:

- i) $(-\infty, b] = (-\infty, x_0] \cup \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$
- ii) $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para $i = 1, \dots, n$
- iii) $(-\infty, x_0] \subset \left(-\infty, -\frac{1}{d_*}\right]$ o, equivalentemente que, $x_0 \leq -\frac{1}{d_*}$

Y podemos definir ahora la integral generalizada de Riemann en $(-\infty, b]$

Definición 1.4.7

Se dice que una función $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann generalizada integrable en $(-\infty, b]$ si existe $B \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ_ϵ en $[-\infty, b]$ tal que si $\overset{\circ}{P}$ es cualquier subpartición etiquetada δ_ϵ - fina en $(-\infty, b]$

entonces $\left|S(f, \overset{\circ}{P}) - B\right| \leq \epsilon$

En este caso $f \in \mathbb{R}_{[a, \infty)}^*$ y $\int_{-\infty}^b f = B$

1.4.3 El intervalo $(-\infty, \infty)$

Definición 1.4.8

Sea $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que va a integrarse sobre el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$

Un calibrador en $(-\infty, \infty)$ es una terna (δ, d_*, d^*) formada por la función δ estrictamente positiva en $(-\infty, \infty)$ y dos números d_* y d^* estrictamente positivos.

Definición 1.4.9

Una subpartición etiquetada $\overset{\circ}{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $(-\infty, \infty)$ con etiquetas $t_k = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ es (δ, d_*, d^*) - fina si:

- i) $(-\infty, \infty) = (-\infty, x_0] \cup \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \cup [x_n, \infty)$
- ii) $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para $i = 1, \dots, n$
- iii) $(-\infty, x_0] \subset \left(-\infty, -\frac{1}{d_*}\right]$ y $[x_n, \infty) \subset \left[\frac{1}{d^*}, \infty\right)$ o $x_0 \leq -\frac{1}{d_*}$ y $\frac{1}{d^*} \leq x_n$

Podemos ya definir la integral generalizada de Riemann en $(-\infty, \infty)$

Definición 1.4.10

Una función $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann generalizada integrable en $(-\infty, \infty)$ si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ_ϵ en $(-\infty, \infty)$ tal que si $\overset{\circ}{P}$ es cualquier subpartición etiquetada δ_ϵ -fina en $(-\infty, \infty)$ entonces $\left|S(f, \overset{\circ}{P}) - C\right| \leq \epsilon$

En este caso $f \in R_{(-\infty, \infty)}^*$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f = C$

De nuevo utilizaremos la definición de restricción de una función y el teorema de Hake.

Teorema 1.4.3 (Teorema de Hake)

Si $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $f \in R_{(-\infty, \infty)}^*$ si y sólo si para cada $\beta < \gamma \in (-\infty, \infty)$ la restricción de f en $[\beta, \gamma]$ pertenece a $R_{[\beta, \gamma]}^*$ y $\lim_{\beta \rightarrow -\infty, \gamma \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^{\gamma} f = C \in \mathbb{R}$

En este caso $\int_{-\infty}^{\infty} f = C$

Ejemplo 1.4.3

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$

Demostremos que $f \in R_{(-\infty, \infty)}^*$

f es continua en todo \mathbb{R} por lo que $f \in R_{(-\infty, \infty)}^*$

Sean $\beta < \gamma \in (-\infty, \infty)$

Según el teorema de Hake $\lim_{\beta \rightarrow -\infty, \gamma \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^{\gamma} f = \lim_{\beta \rightarrow -\infty, \gamma \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{x^2+1} dx$

$\int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) \Big|_{\beta}^{\gamma} = \arctan(\gamma) - \arctan(\beta)$

Calculemos ahora el límite

$\lim_{\beta \rightarrow -\infty, \gamma \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty, \gamma \rightarrow +\infty} \arctan(\gamma) - \arctan(\beta)$

Veamos ambos casos

$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \arctan(\gamma) - \arctan(\beta) = \arctan(\gamma) - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \arctan(\beta) = -\frac{1}{2}\pi$

$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \arctan(\gamma) - \arctan(\beta) = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \arctan(\gamma) - \arctan(\beta) = \frac{1}{2}\pi$

Así que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \pi$

1 Capítulo 2: Similitudes y diferencias entre las integrales de Riemann, generalizada de Riemann y de Lebesgue

1.1 Sección 1: Integrabilidad absoluta

Iniciemos hablando un poco de la integral de Lebesgue. Esta integral resuelve algunos problemas, por ejemplo, hace que todas las derivadas acotadas sean integrables y que la integración pueda usarse para expresar medidas. Sin embargo, la integral de Lebesgue no es tan constructiva como la de Riemann pero puede mostrarse con un enfoque descriptivo, un poco como la integral de Newton. Veamos:

Definición 2.1.1

Una función f es Newton integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe una función continua F tal que $F' = f$ en $[a, b]$

Definición 2.1.2

Una función f es Lebesgue integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe una función absolutamente continua F tal que $F' = f$ en casi todo $[a, b]$

Para la definición según Lebesgue la condición de continuidad se refuerza pero la condición de la derivada se debilita. La integral de Lebesgue incluye a la integral de Riemann pero no a la integral de Newton. En otras palabras, hay derivadas que no son Lebesgue integrables. Por ejemplo:

Ejemplo 3.1.1

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Así que } H'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$H'(x)$ no es Lebesgue integrable en $[0, 1]$ pues H no es absolutamente continua en $[0, 1]$.

Surge entonces un problema interesante: encontrar un proceso de integración que incluya tanto a la integral de Lebesgue como a la de Newton y es aquí cuando la integración no absoluta viene a colación. Una función f es Lebesgue integrable si y sólo si $|f|$ es Lebesgue integrable, pero hay derivadas tales como H' que no son absolutamente integrables. Así que cualquier integral que incluya tanto a la de Lebesgue como a la de Newton ha de ser no absolutamente integrable.

Existen tres soluciones a este problema. Una de ellas es la integral que Denjoy obtuvo en 1912 y que es, esencialmente, una integral de Lebesgue impropia.

Denjoy demostró que toda derivada tiene una integral impropia de Lebesgue pero el proceso necesario es transfinito y requiere algunos conceptos profundos.

Otra solución fue la que dió Perron en 1914 que no es ni descriptiva ni constructiva. Las demostraciones de las propiedades de la integral de Perron son tediosas a pesar de que la definición es sencilla. Y resultó ser que esta integral y la de Denjoy son equivalentes pero demostrar esto resulta tedioso y complicado.

La tercera solución fue dada por Kurzweil en 1957 en un artículo sobre ecuaciones diferenciales. En él introdujo una integral generalizada de Perron y, como caso especial, una integral generalizada de Riemann que no estudió a fondo, si no simplemente derivó sus propiedades para las aplicaciones que necesitaba. Por su parte, Henstock consideró en 1955 un concepto similar, pero fue a principios de 1960 cuando hizo un estudio sistemático al respecto, diseñando así una integral que incluyera todo tipo de integrales.

Llegamos así a la integral generalizada de Riemann que, como dijimos en el capítulo 1, se debe a los matemáticos Kurzweil y Henstock y, muchas veces, se refiere a ella con esos dos nombres. Y vemos que, en efecto, es una integral no absoluta como se muestra a continuación.

Definición 2.1.3

Se dice que una función integrable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente integrable en un intervalo I si $|f|$ también es integrable en I

Definición 2.1.4

Se dice que una función integrable en un intervalo I pero no absolutamente integrable en I es una función condicionalmente integrable en I

Definición 2.1.5

Una función $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ tal que $|f| \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$

Notación

La clase de las funciones Lebesgue integrables en $[a, b]$ se denota $L_{[a,b]}$

Veamos ahora qué integrales tienen esta propiedad.

Propiedad 3.1.1

Si $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ entonces $|f| \in \mathbb{R}_{[a,b]}$

Propiedad 2.1.2

Si $f \in L_{[a,b]}$ entonces $|f| \in L_{[a,b]}$

Propiedad 2.1.3

Existe $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ tal que $|f| \notin \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ para alguna f

Está claro que si $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ entonces $|f| = f$ así que $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ y $f \in L_{[a,b]}$ es decir, toda función no negativa $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^*$ pertenece a $L_{[a,b]}$. Lo anterior se puede ver claramente en la siguiente definición.

Definición 2.1.6

La clase de las funciones Lebesgue integrables en $[a, b]$ se define como $L_{[a,b]} = \left\{ f \in \mathbb{R}_{[a,b]}^* \text{ tales que } |f| \in \mathbb{R}_{[a,b]}^* \right\}$

Notemos la forma tan sencilla en que se relacionan las integrales de Lebesgue y generalizada de Riemann: una simple definición (integrabilidad absoluta) permitió derivar el resultado anterior.

Dado que la integral generalizada de Riemann no tiene esta propiedad, se dice que no es una integral absoluta. A pesar de esto logra integrar un conjunto mucho mayor de funciones. Para saber más sobre la integrabilidad no absoluta, se puede consultar [9].

1.2 Sección 2: Teorema Fundamental del Cálculo

Veamos ahora qué sucede con el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.) para cada una de las integrales de este capítulo.

Definición 2.2.1

Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se llama integrable según Riemann si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si \mathring{P} es una partición etiquetada δ -fina entonces $\left| \left(\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right) - L \right| < \epsilon$

Teorema 2.2.1 (T.F.C. para la integral de Riemann)

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable según Riemann y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces la integral de Riemann es $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Demostración

Sea P una partición de $[a, b]$

Si los subintervalos de P son $[x_{k-1}, x_k]$ entonces al aplicar a F el Teorema del Valor Medio en dichos subintervalos existe un punto $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ pues $F'(t_k) = f(t_k)$

Consideremos las sumas inferiores $L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ con $m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$ con $M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Como $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$ entonces $L(f, P) \leq \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq U(f, P)$

Notemos que $\sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1})$

$$\begin{aligned} &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Así que $L(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f, P)$

Al ser $L(f) = U(f)$ se concluye que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Como podemos ver, el Teorema del Valor Medio juega un papel muy importante en la demostración de este teorema.

Observemos que las hipótesis del teorema recién demostrado son dos: f integrable y $F'(x) = f(x)$. Veamos ahora cómo es el T.F.C. para la integral generalizada de Riemann.

Teorema 2.2.2 (T.F.C. para la integral generalizada de Riemann)

Sean $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en cada punto de $[a, b]$ y $f(x) = F'(x)$

Entonces f tiene una integral generalizada de Riemann $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Demostración

Sea $\overset{\circ}{P}_{[a,b]}$ una partición etiquetada de $[a, b]$

Tomemos $\sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$

Sea $\{c_k\}_{k=1}^n$ el conjunto de etiquetas de $\overset{\circ}{P}$

$$\begin{aligned} \text{Calculemos } F(b) - F(a) - S(f, \overset{\circ}{P}) &= \left| \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) - f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |(F(x_k) - F(x_{k-1})) - f(c_k)(x_k - x_{k-1})| \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$

Necesitamos construir un calibrador $\delta(c)$ tal que $F(b) - F(a) - S(f, \overset{\circ}{P}) < \epsilon$ $\forall \overset{\circ}{P}$ etiquetada $\delta(c)$ - fina.

Sean $c \in [a, b]$ y δ un calibrador en $[a, b]$

Existe $\delta(c) > 0$ tal que $\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| < \epsilon \forall 0 < |x - c| < \delta(c)$ pues F es diferenciable en todo $[a, b]$

$\delta(c)$ es el calibrador que buscamos.

Para algún $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ particular de $\overset{\circ}{P}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_k) - F(c_k)}{x_k - c_k} - f(c_k) \right| &< \epsilon \text{ para } 0 < |x_k - c_k| < \delta(c_k) \\ |F(x_k) - F(c_k) - f(c_k)(x_k - c_k)| &< \epsilon(x_k - c_k) \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c_k) - F(x_{k-1})}{c_k - x_{k-1}} - f(c_k) \right| &< \epsilon \text{ para } 0 < |c_k - x_{k-1}| < \delta(c_k) \\ |F(c_k) - F(x_{k-1}) - f(c_k)(c_k - x_{k-1})| &< \epsilon(c_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Ahora sumemos

$$\begin{aligned} |F(x_k) - F(c_k) - f(c_k)(x_k - c_k)| &< \epsilon(x_k - c_k) \\ &+ \\ |F(c_k) - F(x_{k-1}) - f(c_k)(c_k - x_{k-1})| &< \epsilon(c_k - x_{k-1}) \\ = |F(x_k) - F(x_{k-1}) - f(c_k)(x_k - x_{k-1})| &< \epsilon \end{aligned}$$

Y como $F(b) - F(a) - S(f, \overset{\circ}{P}) \leq \sum_{k=1}^n |(F(x_k) - F(x_{k-1})) - f(c_k)(x_k - x_{k-1})|$

entonces, por transitividad, se tiene que $F(b) - F(a) - S(f, \overset{\circ}{P}) < \epsilon$

es decir, f tiene integral generalizada de Riemann $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

La única hipótesis de este teorema es que F sea derivable, es decir, no necesitamos, en ningún momento en esta demostración, pedir que $F'(x)$ sea integrable,

pues al usar la integral generalizada de Riemann cada derivada es integrable y su integral puede evaluarse usando la antiderivada de la forma usual. Recordemos también que, en la demostración del T.F.C. para la integral clásica de Riemann, el Teorema del Valor Medio tiene un papel central, mientras que aquí, ni siquiera se mencionó.

Finalmente, veamos cómo es el T.F.C. para la integral restante.

Teorema 2.2.3 (T.F.C. para la integral de Lebesgue)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) f' existe c.d.q. en $[a, b]$

ii) $f' \in L'_{[a,b]}$

iii) f es absolutamente continua en $[a, b]$

Entonces $L - \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

Observemos que este teorema, para la integral de Lebesgue, consta de tres hipótesis, siendo el que más condiciones necesita.

La demostración de este teorema es algo complicada y, siendo otro el tema de esta tesis, se omitirá. Como ya se ha mencionado anteriormente, trabajar con la integral de Lebesgue requiere desarrollar una teoría previa, cosa que no se hará en este trabajo. La teoría necesaria para tratar con esta integral puede encontrarse en cualquier libro de Análisis avanzado.

La razón por la que se mencionó la forma del Teorema Fundamental, para cada una de las integrales mencionadas, es resaltar las hipótesis necesarias que éste presenta en cada caso y mostrar que para la integral generalizada de Riemann, sólo pide una hipótesis.

1 Capítulo 3: Bibliografía adicional comentada

En este capítulo se expondrán, de manera breve, algunos artículos relacionados con la integral generalizada de Riemann, para así mostrar el amplio alcance de ésta en la Matemática. No se discutirán a fondo pues los temas en ellos tratados requieren de un estudio más profundo de algunos temas no relacionados directamente con este trabajo de tesis.

1.1 1. On Riemannian approach to integration

Este interesante artículo, cuyo título en español es Sobre el enfoque riemanniano en la integración, está escrito por Jaroslav Kurzweil, creador junto con Ralph Henstock de la integral generalizada de Riemann, y formó parte del Simposio de Verano 2003 de la revista especializada Real Analysis Exchange.

Después de una brevísima introducción Kurzweil inicia la primera de nueve secciones exponiendo algunos conceptos básicos como medida de Lebesgue, particiones ϵ - *fina*, base de integración y figura. También involucra definiciones como la de integrabilidad según Young (Y) y menciona las equivalencias que se han probado entre las diferentes formas de integración. Por ejemplo, afirma que la integración Henstock-Kurzweil (HK) -bajo el nombre que también se conoce la integral generalizada de Riemann- es equivalente a la de Perron y que la integración L^* es equivalente tanto a la integración de Lebesgue como a la integración Y . Por último, en esta primera sección, expone algunos resultados elementales de las consecuencias de las equivalencias entre las integrales arriba mencionadas y expone los intervalos de integración con los que ha de trabajarse. Hace notar que se pondrá énfasis en el concepto de primitiva para evitar clases de funciones equivalentes.

Para la segunda sección, trata el tema de la convergencia en el conjunto Y - *integrable* de primitivas al que denomina P_Y . Incluye resultados, para este conjunto, de convergencia uniforme y convergencia controlada y, de nuevo, menciona las equivalencias entre ellas.

En la siguiente sección Kurzweil habla sobre la topologización del conjunto P_Y . Menciona las propiedades sobre la monotonía de bases de integración y en sus teoremas habla sobre las topologías inducidas por P_Y y la completez de éstas.

Ya en la cuarta sección expone las sucesiones convergentes de funciones de P_L y plantea el problema de extender los teoremas presentados en esta sección

a otras bases de integración, pues muestra que existe alguna $F \in P_Y$ para la cual los teoremas no se cumplen.

En la quinta sección el matemático checo expone el problema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que lo llevó a retomar el enfoque riemanniano en la integración y que es el siguiente:

Considérese la ecuación

$$\dot{u}(t) = g_1(u(t)) \epsilon^{-\beta} \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + g_2(u(t)) \epsilon^{-\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

donde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase $C^{(1)}$, $\beta \geq 0$ y $\epsilon > 0$ es pequeño

El lado derecho de la ecuación anterior

$$g(y, t, \epsilon) = g_1(y) \epsilon^{-\beta} \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + g_2(y) \epsilon^{-\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

oscila en t con una frecuencia de $\frac{2\pi}{\epsilon}$ que debería dar soluciones de $\dot{u}(t)$ casi constantes, es decir, cercanas a soluciones de $\dot{u}(t) = 0$

Pero por otro lado el factor $\epsilon^{-\beta}$ hace que la amplitud sea grande y, a primera vista, no permite saber qué tipo de comportamiento se puede esperar de las soluciones de $\dot{u}(t)$ para ϵ pequeño.

Considérese ahora lo siguiente:

Proposición 3.1.1

$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de $\dot{u}(t) = g_1(u(t)) \epsilon^{-\beta} \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + g_2(u(t)) \epsilon^{-\beta} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ si y sólo si para cada $[\sigma, \tau] \subset [a, b]$ y $\eta > 0$ existe $\xi : [\sigma, \tau] \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\left\| u(\tau) - u(\sigma) - \sum_{i=1}^k (G(u(t_i), x_i, \epsilon) - G(u(t_i), x_{i-1}, \epsilon)) \right\| \leq \eta$$

cuando $\{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}$ con $i = 1, 2, \dots, k$ es una partición ξ -fina HK de $[\sigma, \tau]$

Resulta que el papel de g en la proposición anterior es insignificante pues todo puede formularse en términos de la primitiva G . Esto lleva al concepto de Ecuación Diferencial Generalizada.

Definición 4.1.1

Sean $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

u se llama solución de la Ecuación Diferencial Generalizada $\dot{u}(t) = D_x F(u(t), x)$

si para $[\sigma, \tau] \subset [a, b]$ y $\eta > 0$ existe $\xi : [\sigma, \tau] \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\left\| u(\tau) - u(\sigma) - \sum_{i=1}^k (F(u(t_i), x_i) - F(u(t_i), x_{i-1})) \right\| \leq \eta$ cuando $\{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}$ con $i = 1, 2, \dots, k$ es una partición ξ -fina HK de $[\sigma, \tau]$

Nota.

D_x indica que, en condiciones clásicas, es equivalente a $\dot{u}(t) = f(u(t), t)$ donde $f(y, x) = \frac{d}{dx}F(y, x)$

Observemos que $\left\| u(\tau) - u(\sigma) - \sum_{i=1}^k (F(u(t_i), x_i) - F(u(t_i), x_{i-1})) \right\| \leq \eta$ es equivalente a $u(\tau) - u(\sigma) = (HK) \int_{[\sigma, \tau]} g(u(t)) dt$ si F es de la forma $F(y, x) = g(y)x$

En las dos secciones siguientes establece las hipótesis necesarias que le permiten demostrar un teorema que afirma la existencia de una solución u para la Ecuación Diferencial Generalizada.

En la penúltima sección define una función regulada y presenta dos teoremas. Uno afirma que si existe la integral de Kurzweil-N, que el autor abrevia KN (donde N es un sistema de subconjuntos con ciertas características que, en inglés, se nombra 'negligible', de ahí la N), entonces existe la integral HK (generalizada de Riemann) y ambas son iguales. El segundo teorema afirma que si existe la integral de Young entonces existe al integral KN y ambas son iguales. Aunque aquí no se mencionen, ambos teoremas tienen claramente definidos los intervalos de integración y las funciones a las que se aplican.

En la última sección define cuándo una base integrable es diferenciable en un punto y da numerosas notas -a manera de resultados- sobre diferenciability.

1.2 2. Norm-convergence and uniform integrability for the Henstock-Kurzweil integral

El artículo tiene por título en español Convergencia a una norma e integrabilidad uniforme para la integral de Henstock-Kurzweil. Lo escribió Charles Swartz de la universidad del estado de Nuevo Mexico. En él se propone mostrar que una sucesión, uniformemente integrable y convergente puntualmente, de funciones integrables según Henstock-Kurzweil converge a la norma de Alexiewicz.

Inicia diciendo que el Teorema de Convergencia Dominada (T.C.D.) para la integral de Lebesgue implica inmediatamente que la sucesión dominada es convergente con respecto a la norma L^1 . Sin embargo, como el T.C.D. para la integral de Henstock-Kurzweil (HK) permite la convergencia condicional de integrales, entonces dicho teorema no implica inmediatamente la convergencia de sucesiones dominadas con respecto a la norma de Alexiewicz en el espacio de funciones integrables HK . Argumenta que con el Lema Uniforme de Henstock, recientemente formulado por Lee, Chew y Lee, se puede establecer la convergencia a la norma de la sucesión dominada en el T.C.D. para la integral HK .

Denota con $I = [a, b]$ un intervalo en \mathbb{R} y con $HK(I)$ al espacio de todas las funciones integrables según HK en el intervalo I define varios conceptos:

Definición 3.2.1

Si $f \in HK(I)$ entonces la norma de Alexiewicz de f está definida por $\sup \{|\int_a^x f| : a \leq x \leq b\}$

Definición 3.2.2

Una sucesión $\{f_k\}$ en $HK(I)$ es uniformemente integrable (según HK) sobre I si para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador $\delta : I \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\left| \int_I f_k - \sum_{i=1}^m f_k(t_i) |I_i| \right| < \epsilon$ para cada k siempre que $D = \{(I_i, t_i) : 1 \leq i \leq m\}$ sea una partición etiquetada δ -fina de I y $|J|$ denota la longitud de un intervalo J

Para demostrar que se da dicha convergencia a la norma de Alexiewicz, el autor usa el siguiente hecho, así como un lema y dos teoremas que se exponen a continuación:

Si $\{f_k\} \subset HK(I)$ es uniformemente integrable sobre I y $\{f_k\}$ converge puntualmente a la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ entonces f es integrable sobre I y $\lim \int_I f_k = \int_I f$

Lema 3.2.1

Sean $f \in HK(I)$ y $\epsilon > 0$

Si δ es un calibrador en I tal que $\left| \int_I f - \sum_{k=1}^m f(t_k) |I_k| \right| < \epsilon$ para cada partición etiquetada δ -fina $D = \{(I_i, t_i) : 1 \leq i \leq m\}$ entonces $\left| \sum_{i=1}^m \left\{ f(t_i) |I_i \cap J| - \int_{I_i \cap J} f \right\} \right| \leq 3\epsilon$ y $\sum_{i=1}^m \left| f(t_i) |I_i \cap J| - \int_{I_i \cap J} f \right| \leq 6\epsilon$ para cada subintervalo J de I y para cada partición D etiquetada δ -fina de I

Teorema 3.2.1

Sea $\{f_k\} \subset HK(I)$ uniformemente integrable.

Si $\{f_k\}$ converge puntualmente a la función $f : I \rightarrow R$ entonces f es integrable y $\|f_k - f\| \rightarrow 0$

Teorema 3.2.2

Sean $\{f_k\} \subset HK(I)$ y $g \in HK(I)$ y $\{f_k\}$ convergente puntualmente a la función f en I

Si $|f_k - f_j| \leq g$ en I para cada k y j entonces f es integrable y $\{f_k\}$ es uniformemente integrable.

Se sigue del teorema anterior que la sucesión $\{f_k\}$ converge a f en la norma de alexiewicz, estableciendo el análogo de la conclusión en el T.C.D. para la integral de Lebesgue y la norma L^1 .

1.3 3. Approximation theorems for generalized Riemann integrals

El autor de este artículo es Jean-Christophe Feauveau, miembro del Instituto Preparatorio para los Estudios Científicos de Tunicia. Su título en español equivale a Teoremas de aproximación para integrales generalizadas de Riemann.

El contexto de este artículo es el de una integral generalizada de Riemann (que él mismo desarrolló y, que dice, es equivalente a la integral de McShane) en el que las funciones son evaluadas en una dimensión finita del espacio de Banach.

Veamos algunas definiciones preliminares.

Nota.

$(X, \|\cdot\|)$ denota el espacio de Banach.

Definición 3.3.1

Sea $[a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} donde $a < b$
 Un calibrador en $[a, b]$ es una función $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$

Definición 3.3.2

Una subdivisión del intervalo $[a, b]$ es una sucesión $x = (x_i)$ de $[a, b]$ con $0 \leq i \leq n$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y hacemos $\tau(x) = \max \{x_i - x_{i-1}\}$ con $1 \leq i \leq n$

Definición 3.3.3

Una subdivisión etiquetada es un par (x, c) tal que $x = (x_i)$ con $0 \leq i \leq n$ es una subdivisión y $c = (c_i)$ una sucesión de $[a, b]$ con $1 \leq i \leq n$

Definición 3.3.4

Una subdivisión libre etiquetada y subordinada a un calibrador δ es una subdivisión etiquetada (x, c) que satisface para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ la siguiente condición: $c_i - \delta(c_i) \leq x_{i-1} < x_i \leq c_i + \delta(c_i)$

Definición 3.3.5

Una subdivisión es acotada etiquetada y subordinada a un calibrador δ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ sucede que $c_i - \delta(c_i) \leq x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \leq c_i + \delta(c_i)$

Definición 3.3.6

Para una subdivisión etiquetada (x, c) de $[a, b]$ la suma de Riemann de $f : [a, b] \rightarrow X$ es $S_j = (x_\epsilon, c_\epsilon) = \sum_i (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$

Ahora veamos la definición, desarrollada por el autor, de una integral generalizada de Riemann.

Definición 3.3.7

Una función $f : [a, b] \rightarrow E$ es integrable si para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar un calibrador δ_ϵ tal que $\sum_i \left\| (x_i - x_{i-1}) \left(f(c_i) - f(c'_i) \right) \right\| \leq \epsilon$ cuando (x, c) y (x, c') son subdivisiones etiquetadas de $[a, b]$ subordinadas a δ_ϵ

Siendo f una función integrable, se dice que un calibrador que satisfaga $\sum_i \left\| (x_i - x_{i-1}) \left(f(c_i) - f(c'_i) \right) \right\| \leq \epsilon$ es ϵ - adaptado a f

Para cada familia de subdivisiones etiquetadas $((x_\epsilon, c_\epsilon))$ con $\epsilon > 0$ respectivamente subordinadas a (δ_ϵ) con $\epsilon > 0$, la función $\epsilon \rightarrow S_j(x_\epsilon, c_\epsilon)$ tiene límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y éste no depende de la sucesión elegida.

Por definición es la integral de f en $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$

Luego Feauveau establece algunos resultados sobre aproximación de funciones integrables usando funciones escalonadas.

Veamos ahora los teoremas de aproximación.

Teorema 3.3.1

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $\epsilon > 0$

Para un calibrador δ que sea ϵ -adaptado a f se tiene $\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|f(t) - f(c_i)\| dt \leq$

ϵ para todo $t \in [x_{i-1}, x_i]$

Teorema 3.3.2

Sean $f : [a, b] \rightarrow X$ una función integrable y $\epsilon > 0$

Para un calibrador δ que sea ϵ -adaptado a f se tiene $\sum_i \left\| (x_i - x_{i-1}) f(c_i) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right\| \leq$

ϵ cuando (x, c) es una subdivisión etiquetada libre y subordinada a δ

Teorema 3.3.3

Sea $f \in L^1([a, b], X)$

Para todo $\epsilon > 0$ existe una función escalonada f_ϵ tal que $\|f - f_\epsilon\| \leq \epsilon$

Teorema 3.3.4

Sea $f \in L^1([a, b], X)$

Para todo $\epsilon > 0$ existe una función f_ϵ tal que $\int_a^b \|f - f_\epsilon\| \leq \epsilon$

Teorema 3.3.5

Sea $f \in L^1([a, b], X)$

Para todo $\epsilon > 0$ existe η tal que $\|f - T(f, x)\| \leq \epsilon$ cuando $x = (x_i)$ con $0 \leq i \leq q$ es una subdivisión de $[a, b]$ que satisface $\tau(x) < \eta$

Estos resultados sobre aproximaciones conducen a los conceptos de calibradores y equiintegrabilidad para el espacio de la clase de funciones L^1 , conceptos que el autor usa para caracterizar las partes compactas de L^1 . Cabe aclarar que algunos teoremas pueden expresarse usando la Teoría de Lebesgue, mientras que otros requieren del formalismo de los calibradores. Finalmente, usa los teoremas de aproximación para demostrar la equivalencia de una integral generalizada de Riemann con las teorías de Lebesgue o Bochner.

1.4 4. Comentario final

Se espera que al haber leído estas breves sinopsis de algunos artículos relacionados con la integral generalizada de Riemann, se hayan podido percibir algunos de los alcances de ésta.

Las posibilidades de las aplicaciones de esta integral son tan grandes como las de cualquier otra integral que se haya desarrollado, con la ventaja de que ésta posee mucha de la sencillez de la integral clásica de Riemann.

Existe gran cantidad de artículos relacionados con la integral de esta tesis en las revistas especializadas de Matemáticas, en particular en las dedicadas al Análisis Matemático. Como puede observarse en la bibliografía, una de las fuentes más ricas en esta integral y sus avances recientes es Real Analysis Exchange.

Conclusiones

El punto central alrededor del cual gira la teoría de integración en el sentido generalizado de Riemann es el calibrador. La constante \pm que se usaba en la integral clásica de Riemann se cambia por una función positiva \pm y es a partir de aquí que se desarrolla, no sólo la integral de la que hablamos, sino una forma alternativa de demostrar teoremas básicos para el Cálculo y el Análisis.

Como se mencionó en el capítulo 3, las integrales de Perron y Denjoy son equivalentes y es fácil demostrar que la integral generalizada de Riemann es también equivalente a ellas. Así que esta integral incluye a las de Riemann, Lebesgue, Perron y Denjoy y su exposición, como se vió en esta tesis, no requiere más que los conocimientos para entender la integral clásica.

Uno puede preguntarse cómo es que, teniendo una definición tan sencilla y parecida a la integral clásica de Riemann ¿por qué no fue ‘descubierta’ mucho antes la integral generalizada de Riemann?. Parece haber varias razones. Para empezar, la definición no es descriptiva ni constructiva. Además, la definición rompe con la tradición de elegir primero las particiones y luego las etiquetas, cuestión que en este caso, podría decirse que ocurre al revés o, al menos, las etiquetas han de tomarse adecuadas para cada partición. También tomemos en cuenta que se habría cuestionado el hecho de que las particiones dependieran de \pm .

A favor se puede decir que, siendo tan parecida a la integral de Riemann, resulta una integral muy familiar para la cual no se necesita introducir primero la Teoría de la Medida. A la larga resulta una mejor integral pues integra todas las derivadas y hereda las características positivas de la integral de Lebesgue. Algunos dicen que se puede usar la integral generalizada de Riemann para desarrollar la Teoría de la Medida.

En contra se puede argumentar que la integral generalizada no se extiende fácilmente a otros ámbitos, que en muchos casos tales como los espacios \mathbb{R}^p en los que necesitamos que $\|f\|$ sea integrable cuando f lo es, esta integral coincide con la integral de Lebesgue y que, eventualmente, la Teoría de la Medida se necesita en la Teoría de Integración pues muchos de los resultados más avanzados de esta última teoría requieren de la anterior para que queden expresados claramente.

Y siguen surgiendo preguntas como, por ejemplo, si es cierto que la integral generalizada de Riemann puede usarse para desarrollar la Teoría de la Medida, ¿qué viene primero, área/medida o integración?, ¿la integración mide áreas o las define?. Recordemos que, en un principio, se asumía que el área era una propiedad que poseían las figuras bidimensionales y el problema era encontrar esta área. El Cálculo recorrió un largo camino para resolver esta cuestión, pero cuando empezaron a surgir regiones más extrañas la propiedad de área comenzó a parecer menos obvia. Algunos matemáticos piensan que el área ha de definirse en términos de la integral; Lebesgue definió primero medida y luego basó su Teoría de Integración en ella.

Lo cierto es que la integral generalizada de Riemann, que ahora parece llenar vacíos que otras integrales no lograron, hace surgir más preguntas que respuestas. Y hará también que se desarrollen otros conceptos que probablemente la sustituyan en algunas décadas pero, por lo pronto, no puede pasarse de largo la sencillez de su definición y la magnitud de su alcance.

Bibliografía

- [1] Bartle, R. and Sherbert, D.. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc.. United States of America. 2000.
- [2] Abbott, S.. *Understanding Analysis*. Springer-Verlag. New York, Inc.. United States of America. 2001.
- [3] Bartle, R.. *A modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 32. American Mathematical Society. United States of America. 2001.
- [4] De Pree, J. and Swartz, C.. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.. United States of America. 1988.
- [5] Bartle, R.. *Return to the Riemann integral*. The American Mathematical Monthly. October 1996. United States of America. 1996.
- [6] Schechter, E.. *An introduction to the Gauge integral*. Vanderbilt University. United States of America. 2005.
- [7] Lu, R. and Chew, T.S.. *The Riemann integral revisited*. National University of Singapur. Singapur.
- [8] Gordon, R.. *The use of tagged partitions in Elementary Real Analysis*. The American Mathematical Monthly. February 1998, volume 105, number 2. United States of America. 1998.
- [9] Gordon, R.. *Is nonabsolute integration worth doing?*. Real Analysis Exchange. Volume 22, number 1. 1996-1997.
- [10] Kurzweil, J.. *On riemannian approach to integration*. Real Analysis Exchange. 27th summer symposium conference reports. June 2003.
- [11] Swartz, C.. *Norm convergence and uniform integrability for the Henstock-Kurzweil integral*. Real Analysis Exchange. Volume 21, number 1. 1998-99.
- [12] Feaveau, J. C.. *Approximation theorems for generalized Riemann integrals*. Real Analysis Exchange. Volume 26, number 1. 2000-01
- [13] Lee, T., Chew, T. and Lee, P.Y.. *On Henstock integrability in Euclidean space*. Real Analysis Exchange. Volume 22, number 1, 1996-97.