



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMACIÓN DE GRUPOS EN
REDES SOCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

NICOLÁS PALMA ARAMBURU

DIRECTOR DE TESIS: DR. DENIS PIERRE BOYER



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Palma
Aramburu
Nicolás
56391676
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
2. Datos del tutor
Doctor
Denis Pierre
Boyer
3. Datos del sinodal 1
Doctor
Gustavo
Martínez
Mekler
4. Datos del sinodal 2
Doctor
Raúl Mauricio
Rechtman
Schrenzel
5. Datos del sinodal 3
Doctor
Octavio
Miramontes
Vidal
6. Datos del sinodal 4
Doctor
Hernán
Larralde
Ridaura
7. Datos del trabajo escrito
Formación de grupos en redes sociales
31 pág.
2006

Índice general

1. Introducción	4
2. Antecedentes: modelos de dinámica de opiniones	6
3. Percolación	8
4. Modelos	11
4.1. Modelo I	12
4.2. Modelo II	14
4.3. Modelo III	15
4.4. Modelo IV	15
5. Resultados y Análisis	17
5.1. Modelo I	17
5.2. Modelo II	20
5.3. Modelo III	25
5.4. Modelo IV	26
6. Conclusiones	28
Appendices	28
A. Conteo del tamaño de los cúmulos	29

Capítulo 1

Introducción

En los últimos 20 años, la descripción cualitativa y cuantitativa de los fenómenos sociales ha atraído el interés de muchos físicos, promoviendo la migración de métodos físicos al estudio de fenómenos sociales. A grandes rasgos, existen dos tipos de simulaciones de modelos sociales; los del punto de vista de los sistemas dinámicos de naturaleza continua (es decir, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales o no, parciales, estocásticas, etc) [1] y los de índole estadística que buscan encontrar las configuraciones más probables de un sistema de muchos agentes dadas algunas reglas de interacción entre ellos. En el segundo enfoque se utilizan herramientas de la física estadística como lo son: autómatas celulares, percolación, modelos inspirados en el modelo de Ising, métodos de Monte Carlo.

Las áreas donde estos métodos han sido usados son de lo más diversas e incluyen estudios como: esparcimiento de enfermedades [2] o rumores [3], autoorganización en sociedades (ya sean humanas o de animales), dinámica de opiniones y formación de consenso, etc. En particular, nos es de interés para este trabajo la manera en que cambian las convenciones o prácticas en una sociedad.

Hay que enfatizar que el espectro de la modelación de opiniones es muy amplio pero trabajos como los de las referencias [4-9] tienen un carácter general. Sin embargo, estos modelos no dan importancia a la forma en la que es transmitida la interacción entre agentes. Ya que consideran a los agentes en redes regulares o interactuando al azar.

Son las redes las que se encargan de transmitir las interacciones y queda claro que la topología de redes sociales tiene fuerte influencia en el comportamiento global de un sistema. En términos de modelación social, unas redes que asemejan mejor las conexiones sociales son las de “mundo pequeño”. Este término describe la idea que dos individuos en una red social pueden estar separados por pocos nodos, incluso si el sistema es muy grande.

En el modelo de Watts-Strogatz [10], los enlaces entre nodos ubicados en una red cristalina son reconectados hacia otros individuos con cierta probabilidad, p . Este tipo de red interpola entre una estructura regular (a nivel local) y una estructura

aleatoria (a escalas más grandes) que acorta la distancia entre nodos. Otros modelos de redes sociales consisten en modificaciones de las redes aleatorias, ver[11].

La motivación de este trabajo es la de estudiar la formación de grupos en una red social y se encuentra inspirado en un conflicto de intereses entre dos grupos que buscan tener una posición dominante en un campo económico y social. Un ejemplo de grupos en conflicto que ha sido estudiado con mucho detalle [12] fueron los formados por los productores de vino de un lado y los comerciantes de vino del otro lado en la región de Borgoña a principios del siglo XX. Los primeros querían que el vino adquiriera mayor categoría al tener denominación de origen, aumentando sus ganancias, pero los comerciantes siempre habían obtenido mayores ganancias al comprar más barato el vino a granel y venderlo como un vino de menor calidad. Los productores lograron que el vino adquiriera denominación de origen al expandirse y ganar consenso sobre varios sectores de la sociedad francesa, como el político y cultural. Al lector interesado en ese conflicto se le recomienda [12, 13].

El presente trabajo se encuentra centrado en la presentación de un modelo de opiniones semejante a un problema de percolación y de los resultados obtenidos de las simulaciones computacionales. Pero antes hablaremos un poco de algunos modelos conocidos en la dinámica de opiniones.

Capítulo 2

Antecedentes: modelos de dinámica de opiniones

Dentro del enfoque de la física estadística vale la pena hacer una breve mención a modelos, ya clásicos, sobre modelación de opiniones y formación de consenso en una población de individuos (o agentes).

- Deffuant et al. [4] modelaron la dinámica de opiniones de manera que los individuos pueden o no influir sobre los demás agentes, buscando siempre un punto de mutuo acuerdo. Cada agente del sistema posee una opinión inicial distribuida aleatoriamente entre $[0, 1]$. Dados dos agentes con opiniones diferentes estos modifican su opinión acercándose uno al otro en una cantidad proporcional a su diferencia de opiniones, siempre que esa diferencia de opiniones no exceda cierta cantidad fija (rango de tolerancia). Se realizan sucesivas iteraciones de Monte Carlo hasta tener una configuración final estacionaria.

El número total de agentes y la capacidad de los agentes para encontrar un compromiso no afectan en el resultado final sino en el tiempo que transcurre para que los individuos alcancen consenso. En cambio, variar la tolerancia permite observar diferentes regímenes: uno donde los agentes se pueden dividir en un número discreto de grupos con opiniones distintas, otro donde se puede observar una única opinión para todos los agentes del sistema.

- El modelo de Sznajd [5] es un modelo del tipo Ising que consiste en una cadena unidimensional de individuos con opiniones que pueden tomar valores 1 y -1 (A y B). Tiene dos reglas de interacción: la primera es que dada una pareja de agentes que son primeros vecinos, sus otros primeros vecinos toman la misma opinión que ellos siempre que los dos agentes tengan la misma opinión; la segunda es que en caso de las opiniones difieran los otros primeros vecinos toman la opinión opuesta a su vecino. El sistema evoluciona, a través del método de Monte Carlo, hacia dos posibles configuraciones: democrático (con

50% de A y B), con A y B ordenados alternadamente; o dictatorial, cuando una opinión, A o B , se extiende sobre todo el sistema.

Los cambios de opinión en este modelo se producen por medio de avalanchas (de manera análoga al modelo de Bak et al. [14] de criticalidad autoorganizada) por lo que la distribución de probabilidad del tiempo de espera para que un agente cambie de opinión satisface una ley de potencia.

En una segunda parte del modelo introdujeron ruido (“temperatura social”) dándoles a los agentes una probabilidad de no seguir las reglas de interacción. Ese parámetro introduce desorden al sistema y cuando esa probabilidad excede cierto umbral el sistema deja de ser ordenado (es decir, el sistema no evoluciona hacia ninguna de las dos posibles configuraciones previas).

- Un aspecto que también ha sido estudiado es cómo las minorías pueden vencer a la mayoría. El modelo de Galam [6] consiste de agentes repartidos en dos opiniones (a favor o en contra de una reforma). El modelo considera que los individuos tomados aleatoriamente en la población forman pequeños grupos, donde discuten y cambian su opinión. Los agentes de un grupo adquieren la opinión de la mayoría del grupo, en caso de empate todo el grupo cambia de manera que se oponga a la reforma.

La probabilidad de estar a favor de una opinión o de rechazarla cambia en cada iteración y el sistema tiende a una configuración que presenta tres puntos fijos. El primero es que los individuos se oponen; el segundo es todos se muestran a favor; el tercero es inestable y depende tanto de la distribución de las agrupaciones como del número de agentes. Sólo cuando la concentración inicial de individuos a favor supera la concentración del punto inestable el sistema evoluciona en favor de la propuesta, sino será la minoría la que logre la mayoría. Una modificación de este modelo [7] consiste en introducir individuos contrarios, que cambian de opinión, una vez que su grupo ha alcanzado consenso. Existe un valor crítico para el cual el punto inestable del modelo anterior se vuelve estable y el sistema tiende a un estado de polarización de 50/50.

Un aspecto poco realista de los modelos anteriores es que los agentes cambian constantemente de opinión en el tiempo. En el presente estudio, se considera agentes que toman una opinión una única vez, en un modelo de tipo percolación.

Además, como ya se dijo anteriormente, la estructura o topología de la red de los modelos tiene una gran influencia en éstos, ya que son susceptibles de cambiar su comportamiento, teniendo así un alto impacto en un sistema de estudio. En nuestro caso se trata de una red bidimensional, una red de mundo pequeño y una red regular con algunos agentes con muchas conexiones. Recordaremos a continuación algunas propiedades de los fenómenos de percolación.

Capítulo 3

Percolación

Los fenómenos de percolación han tenido mucho impulso desde su origen, lo cual se debe a que tiene un amplio espectro de aplicaciones. Inicialmente la percolación surgió motivada por el estudio del flujo de un fluido a través de medios porosos, pero ahora se pueden encontrar muchas menciones a ella en distintas áreas de la física (materia condensada, mecánica de fluidos, sistemas complejos, etc) [15, 16, 17].

La forma simple de visualizar la percolación es pensar en una malla cuadrada en dos dimensiones. Hay distintos tipos de percolación. Cuando los nodos de la malla son ocupados con cierta probabilidad fija, este problema se conoce como percolación de sitio. Si se establecen vínculos entre nodos que son primeros vecinos con cierta probabilidad fija se denomina percolación de vínculo.

Los tipos de percolación mencionados tienen una motivación física. En el caso de la percolación de sitio se modela un fluido moviéndose a través de un medio; la percolación de vínculo tiene aplicaciones en materia condensada, donde por ejemplo es usada para modelar el comportamiento magnético de materiales según la orientación que toman los espines de los átomos; otro tipo de percolación, de invasión, surgió en los modelos de desplazamiento de un fluido por otro en un medio [18].

Los espacios son ocupados, según cada tipo de percolación, con cierta probabilidad p . En la malla se observa la aparición de cúmulos (de sitios o de vínculos). Cuando la probabilidad es pequeña los cúmulos tienen un tamaño promedio finito. Para valores grandes de p existe un cúmulo, llamado gigante, que atraviesa todo el sistema.

La probabilidad de que un sitio cualquiera, en un sistema de dimensión L , pertenezca al cúmulo más grande se denota como $P_N(p)$, con $N = L \times L$ (en dos dimensiones). De tal forma que la probabilidad de percolación, $P_\infty(p)$, se define como

$$P_\infty(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(p) \quad (3.1)$$

El sistema experimenta una transición de fase al incrementar p . La transición se manifiesta con la aparición de un cúmulo gigante. El valor de p para el cual eso

sucede por primera vez se conoce como la probabilidad crítica, p_c . Mejor definida como

$$p_c = \sup\{p \mid P_\infty(p) = 0\}. \quad (3.2)$$

$P_\infty(p)$ es conocido como el parámetro de orden del sistema. El comportamiento de esta función es $P_\infty(p) = 0$ si $p \leq p_c$ y $P_\infty(p) \neq 0$ si $p > p_c$. Es continua, de tal forma que el sistema sufre una transición de segundo orden en p_c . La transición puede ser descrita a través de varios exponentes críticos.

Existe una ley de potencia que indica de qué forma decrece la probabilidad de pertenecer al cúmulo gigante conforme nos aproximamos a p_c .

$$P_\infty(p) \propto (p - p_c)^\beta, \quad p > p_c \quad (\beta > 0) \quad (3.3)$$

Además, el número de celdas agrupadas en el cúmulo más grande, $M(L)$, muestra distintos comportamientos según el valor de p para un sistema con dimensión espacial E . Cuando $p > p_c$ se esperaría que $M(L) \simeq P_N \times L^E$ que tiende a $P_\infty(p)L^E$, cuando $L \rightarrow \infty$. Por otro lado cuando $p < p_c$ es de esperar que $M(L)/L^E \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow \infty$ ya que $P_\infty(p < p_c) = 0$. Se encuentran los comportamientos siguientes [17]

$$M(L) \sim \begin{cases} \ln L, & p < p_c, \\ L^D & p = p_c, \\ L^E & p > p_c. \end{cases} \quad (3.4)$$

Se conoce a D como un exponente no trivial ($D < E$), llamado la dimensión fractal del cúmulo gigante en el punto crítico (un ejemplo puede ser visto en la figura(4.1(b))).

Se conoce a n_s como el número promedio por sitio de cúmulos que ocupan s sitios en la malla. La probabilidad de que un sitio pertenezca a un cúmulo de tamaño s es $n_s s$. Por lo que la probabilidad de seleccionar un sitio que pertenezca a cualquier cúmulo es p , es decir

$$\sum_s n_s s = p \quad (p < p_c). \quad (3.5)$$

La probabilidad de que un sitio ocupado pertenezca a un cúmulo de tamaño s es $w_s = n_s / \sum_s n_s s$. De lo anterior se sigue que el número de celdas medio de los cúmulos es

$$S(p) = \sum_s w_s s = \sum_s \frac{n_s s^2}{\sum_s n_s s}. \quad (3.6)$$

El tamaño o el número de celdas promedio de los cúmulos diverge según $p \rightarrow p_c$ y lo hace siguiendo una ley de potencia, que permite identificar otro exponente crítico

$$S(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma} \quad (\gamma > 0) \quad (3.7)$$

Otra cantidad de interés es la longitud de correlación, $\xi(p)$, definida como el promedio de la raíz cuadrática media de la distancia al cuadrado entre dos sitios ocupados que pertenecen al mismo cúmulo. Esta cantidad diverge conforme $p \rightarrow p_c$

$$\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad (\nu > 0) \quad (3.8)$$

En un sistema de tamaño finito, $\xi \sim L$ para $p \simeq p_c$. Se pueden combinar las ecuaciones (3.3) y (3.8) para obtener

$$P_\infty(p \simeq p_c) \propto L^{-\beta/\nu}, \quad (3.9)$$

que se conoce como relación de análisis de tamaño finito y permite obtener el cociente β/ν a través de simulaciones numéricas.

Por último hay dos exponentes más relacionados con la distribución de probabilidad de los tamaños de los cúmulos, $n(s)$. Cerca del punto crítico, esa función tiene la forma

$$n(s) \propto s^{-\tau} \Phi(cs) \quad \text{con} \quad c \propto |p - p_c|^{\frac{1}{\sigma}} \quad (3.10)$$

De tal forma que en el punto crítico la distribución de tamaños se comporta como una ley de potencia. La función $\Phi(x)$ decrece rápidamente hacia cero para $x \gg 1$ y actúa como una función de corte. Cuando $p < p_c$ los cúmulos tienen un tamaño promedio finito (ajustándose la ecuación (3.10)). Para $p > p_c$, los cúmulos (excepto el más grande) también tienen un tamaño medio finito.

Capítulo 4

Modelos

La intención de este trabajo no dar una visión absoluta de la modelación social sino un enfoque desde un punto de vista físico, que nos permita dar una pequeña mirada al complejo mundo de las interacciones sociales y en especial a la formación de grupos durante un conflicto que opone agentes con intereses opuestos.

El fenómeno que queremos describir es la formación de un grupo de presión, cuyo poder va a depender del tamaño que alcance en una red social existente. Uno de los aspectos más característico de los modelos aquí presentados es que los individuos poseen un interés intrínseco. En una primera aproximación de los modelos, los individuos se encuentran en una malla y cada uno tiene cuatro primeros vecinos que son con los únicos con los que se puede vincular. La vinculación de dos vecinos depende de que tan próximos son sus intereses y de un nivel de tolerancia. El interés de los individuos está distribuido aleatoriamente y una vez dado no cambia, inclusive una vez que dos personas queden vinculadas. Sin embargo, un individuo recién conectado adquiere la opinión del grupo (1 ó -1, que no cambia).

No se conoce una ley empírica de la distribución de intereses que siguen los individuos para realizar conexiones entre si, lo cual se puede deber a una gran variedad de factores como la desconfianza, deshonestidad y apatía. A su vez, los modelos presentan una gran simplificación que es que los individuos no tienen un interés multivaluado sino uno único sobre un solo conflicto. También hay que considerar que la decisión de vincularse puede tomar por dos razones; ya sea por los intereses individuales o por los del grupo (que pueden ser contradictorios). En general, los individuos toman sus decisiones de tal forma que sean benéficas tanto para ellos como para el grupo. Al lector se le podrían ocurrir un sinnúmero de casos donde las decisiones individuales dominan sobre las grupales. Lo importante es que hay que hacer énfasis en que el alcance de los modelos aquí presentados sólo consideran decisiones individuales tomadas a través de un interés univaluado sobre un único conflicto y con interacciones únicamente entre pares.

Uno de los aspectos más importantes es que los agentes tienen cierto grado de individualidad y es esa heterogeneidad la que les permite tomar una decisión más

acorde con sus propios intereses. Muchos modelos de sociofísica (como los mencionados en la sección de antecedentes) consideran las opiniones de los agentes como dos posibles estados que cambian en el tiempo al ser afectados por los demás agentes (en algunos casos dan un toque de individualidad añadiendo desorden al sistema). Un modelo que presenta agentes con intereses fijos puede ser una opción interesante en algunos casos, uno de ellos puede ser cuando se habla de interés económico donde los individuos saben lo que quieren y son difícilmente disuadidos. Queda claro que los modelos sociofísicos no pueden dar un aporte completo, ya que las sociedades reales son extremadamente complejas y siempre tienen excepciones. Sin embargo, sí permiten dar un acercamiento a ciertos fenómenos sociales no muy intrincados.

Sabemos que es difícil que dos personas se vinculen, ya que las amistades tardan tiempo en consolidarse y requieren renovación constante. Los individuos en las sociedades reales tienen más de cuatro vecinos con los que interactúan. Al contrario, en los modelos físicos de percolación los nodos tienen pocos vecinos y las interacciones son más fuertes. En el futuro se considerarán extensiones de estos modelos a redes más complejas que las presentadas aquí.

Se presentan cuatro modelos: el primero sirve como base preliminar del segundo, ya que muestra la manera en la que se lleva a cabo la interacción entre agentes heterogéneos; el segundo es el modelo central de este trabajo y nos permite simular, de manera simplificada, el crecimiento de dos grupos en conflicto uno con el otro; el tercero es una modificación del segundo y marca la pauta hacia futuras investigaciones en redes complejas; el cuarto es un acercamiento al problema de los vinos y consiste en la presencia de un par de individuos altamente conectados en la red del segundo modelo.

4.1. Modelo I

Este modelo está hecho para estudiar cómo se realiza la formación de vínculos. Consiste en una red cuadrada bidimensional donde cada individuo se encuentra ubicado en un nodo y tiene cuatro vecinos (los de las diagonales no cuentan). Se le asigna un interés, I , fijo a cada nodo de manera aleatoria y siguiendo la ley de distribución de probabilidad dada por ecuación(4.1):

$$P(I) = \frac{1}{2}e^{-|I|}, \quad -\infty < I < \infty \quad (4.1)$$

El sistema consiste en N agentes e I_n es el interés (que no cambia en el tiempo) asociado al n -ésimo individuo de la malla. El sistema contiene desorden fijo (que corresponde a la distribución de intereses en la red) a diferencia de la percolación de vínculo (donde los sitios de la red quedan unidos con la misma probabilidad fija). En este modelo se establece que todos los pares de agentes vecinos, (n, m) , de la malla quedan enlazados acorde de que tan cercanos son sus intereses, por lo que la

probabilidad de que dos individuos se vinculen está propuesta por la ecuación(4.2).

$$P_{n,m} = e^{-b|I_n - I_m|} \quad (4.2)$$

Independientemente de que los intereses de dos vecinos sean muy próximos el parámetro b (que es real y siempre positivo) juega un papel importante, ya que éste determina que tan tolerante o flexible es un individuo a vincularse con un agente con interés distinto. Dado que b es el mismo para todas las personas de la red se le puede interpretar como un factor externo. Puede ser considerado como constante sobre un período corto de tiempo (año electoral, crisis política, revoluciones, etc) o sobre un lapso largo de tiempo (transiciones socioculturales, económicas, etc).

Es obvio que para $b = 0$, independientemente de cuán diferentes sean los intereses, cualesquiera dos vecinos se encuentran enlazados (formando un cúmulo o grupo que abarca todo el sistema). Conforme b es mayor, es decir, según disminuye la flexibilidad, cada vez es más difícil formar un grupo y para parámetros grandes lo único que se observa son pequeños grupos con intereses muy parecidos pero ninguno forma un grupo mayoritario. Hay que hacer énfasis en que la interpretación de los resultados de este modelo social puede variar si se cambia el significado de b , por ejemplo, si se considera que b es el grado de libertad bajo la que se encuentran los individuos de la red. De esta forma $b = 0$ significa que no hay individuos libres capaces de vincularse de acuerdo a sus propios intereses (y son anexados independientemente de que el grupo siga sus intereses o no).

En la figura(4.1) se da una muestra de posibles configuraciones para el grupo más grande (los otros grupos no están representados) formado en un sistema de dimensiones $L = 1000 \times 1000$. Para valores con poca flexibilidad se observa uno que otro cúmulo aislado con pocos individuos pero conforme la flexibilidad aumenta se hace cada vez más grande el grupo dominante hasta expandirse sobre todo el sistema (de lado a lado). La figura de en medio corresponde al mínimo valor de la tolerancia para el cual aparece grupo que percola a través del sistema.

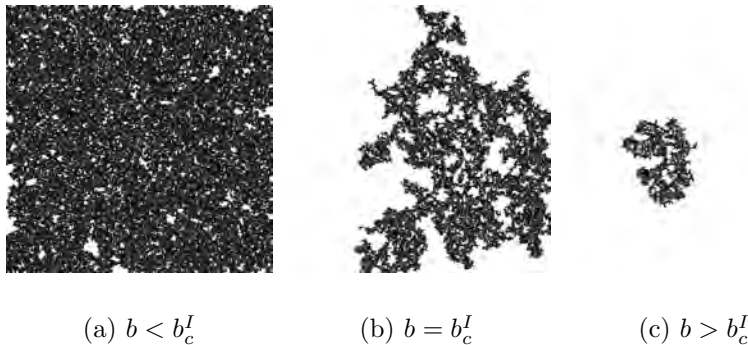


Figura 4.1: Tres posibles configuraciones, para distintos valores de b .

4.2. Modelo II

Este modelo es una extensión del modelo I (y pretende dar un acercamiento más real). Los individuos se encuentran en una red cuadrada, sus opiniones siguen la ley de distribución dada por la ecuación(4.1) y los vecinos pueden quedar vinculados a través de la misma ecuación(4.2) que en el modelo I. La primera diferencia consiste en que el sistema de N agentes contiene inicialmente dos individuos especiales o “semillas” ubicados en la red aleatoriamente y que poseen un interés radical de 4 y -4 respectivamente. Hay que enfatizar que existe poca probabilidad de encontrar individuos en la malla que posean intereses afines o mayores (en valor absoluto), lo que los hace escasos. Los dos individuos radicales están en conflicto, y se les asigna una opinión 1 y -1 respectivamente. Inicialmente, todos los demás individuos están ajenos al conflicto y no tienen opinión.

El elemento más característico es que el crecimiento de los cúmulos se origina a partir de los individuos radicales, es decir, en cada iteración son anexados más personas al grupo, hasta que no crezca más. Para esto se realiza una prueba sobre cada vecino de la semilla (siguiendo la ecuación(4.2)) para ver si pueden vincularse. Teniendo éxito o no, la prueba sólo se hace una vez para cada par de individuos. Cada elemento anexado a uno de los dos cúmulos toma la opinión del grupo (que por simplicidad es 1 ó -1, correspondiéndose con el signo de la semilla generadora). Cada individuo asociado se convierte en una semilla, susceptible de agregar a sus vecinos. De esta forma el cúmulo crece siempre que encuentre nuevos adeptos pero jamás adhiere a los elementos del otro grupo. El tamaño promedio que alcanza un grupo depende del parámetro b y, eventualmente, de la competencia con el bando opuesto (el cúmulo que se originó del otro individuo radical).

Al tener una configuración final el siguiente paso es saber qué cúmulo tuvo mayor convocatoria. Hay que enfatizar que hay muchas posibles configuraciones finales para un mismo parámetro b e inclusive el comportamiento cerca del umbral de percolación puede cambiar en cada iteración, tal como se muestra en la figura(4.2).

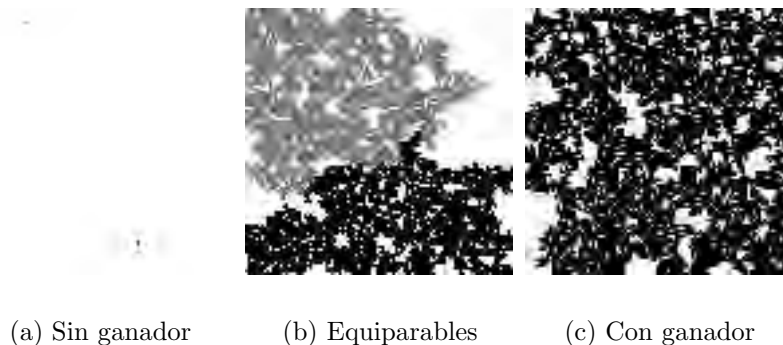


Figura 4.2: Tres posibles configuraciones para los dos grupos ($b = 0.62$)

Este proceso modeliza la formación de un par de cúmulos de individuos con intereses cercanos sobre una red preexistente. Se genera así una red de influencias sobre la malla.

4.3. Modelo III

Este modelo es una extensión del modelo II. La única diferencia que presenta es que los individuos están colocados en una red de mundo pequeño, y por lo tanto pueden tener más de cuatro vecinos. Este modelo de red fue introducido por Watts y Strogatz [10] y consiste en que además de sus cuatro vecinos a cada individuo le es agregado un nuevo vecino, elegido al azar sobre toda la red, con una probabilidad p_{sw} . Una mayor conectividad entre agentes da al modelo III un mayor aproximación a las sociedades reales ya que algunos agentes están vinculados por conexiones de largo alcance. Las propiedades de la percolación sobre la red de mundo pequeño han sido estudiadas por Newman y Watts, ver [20], y han sido utilizados en modelación social [21].

Al igual que en el modelo II los cúmulos en conflicto se originan en las semillas. Pero ahora las interacciones de largo alcance permiten a los grupos expandirse a otros dominios del sistema, impidiendo que un grupo aisle a otro más fácilmente. En la figura(4.3) se muestran tres posibles configuraciones para un mismo valor de b (cerca del punto crítico) y de $p_{sw} = 0.05$.

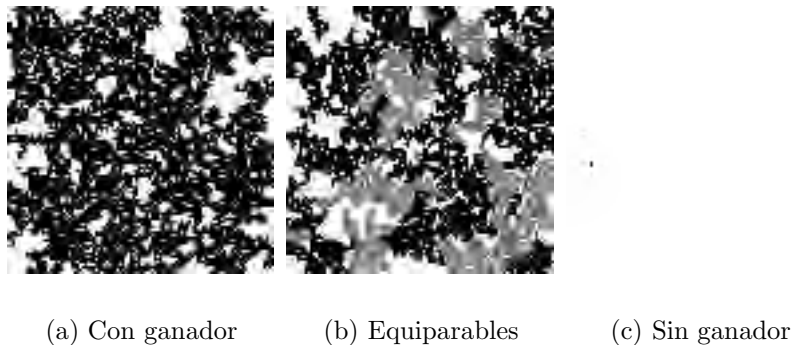


Figura 4.3: Tres posibles configuraciones finales obtenidos para los mismos parámetros $b = 0.675$ y $p_{sw} = 0.05$.

4.4. Modelo IV

Este modelo representa de mejor forma el problema de los vinos mencionado en la introducción. Por un lado el crecimiento de los grupos en conflicto se genera a

partir de las semillas pero ahora en la red se encuentran dos individuos elegidos al azar altamente conectados. El interés de estos individuos como los del resto de la malla sigue la ley de distribución dada por (4.1) y quedan vinculados, al igual que los modelos anteriores, siguiendo la ecuación (4.2).

En el caso del conflicto entre los productores de vino y los comerciantes de la región de Borgoña la presencia de individuos altamente conectados fue determinante en el desenvolvimiento de los eventos. Los productores de vino ganaron el conflicto al expandirse sobre varios sectores de la sociedad francesa, cosa que hubiera sido más complicada sin el alcalde de Dijon, que les permitió alcanzar sectores como el económico, político, social y cultural en su red de influencia.

Capítulo 5

Resultados y Análisis

5.1. Modelo I

Este modelo se caracteriza por una transición de fase conforme el parámetro b disminuye y alcanza un punto crítico. El punto crítico se puede obtener de varias formas. Una de ellas es la de graficar la curva de la probabilidad de encontrar un cúmulo que atraviesa todo el sistema, p_{av} , en función de b . Esta probabilidad se obtiene calculando el cociente del número de veces en que aparece una isla que une ambos extremos (ya sean el superior con el inferior o el izquierdo con el derecho) sobre el número total de realizaciones (que fueron 100) para cada valor de b . Luego, se hace un análisis de tamaño finito, que consiste en calcular p_{av} para distintos tamaños del sistema. Para un sistema infinito, $p_{av} = 0$ si $b > b_c$ y $p_{av} = 1$ si $b < b_c$. Para un sistema finito se espera que se cumpla la ley de escalamiento $p_{av}(b, L) = \tilde{p}(L/\xi_b)$, con ξ_b el tamaño característico del mayor cúmulo en el sistema infinito. Todas las curvas de p_{av} para distintas dimensiones del sistema deben intersectarse en $b = b_c$ cuando $\xi_b = \infty$ y $p_{av} \simeq \tilde{p}(0)$ [19]. El punto crítico se encontró al intersectar varias curvas de p_{av} para distintas dimensiones de la malla ($L = 300, 400, 500, 600, 800, 1000$). En la figura(5.1) se muestra un par de intersecciones. De todas las posibles combinaciones de intersecciones se obtuvo el valor del punto crítico de b , $b_c^I = 0.66 \pm 0.01$.

En términos de la conectividad promedio (el valor esperado de la probabilidad de conexión entre pares, promediada sobre los intereses I e I'), dada por la ecuación (5.1), el valor en el punto crítico de $p_{c_I}^*$ es 0.48 que es menor que 0.5, el valor crítico de la conectividad en el problema de percolación de vínculo sin desorden sobre una red cuadrada[15]). Esto quiere decir que la aparición de un cúmulo gigante en el modelo I se realiza ligeramente con mayor facilidad, debido al desorden fijo.

$$p^* = \langle e^{-b|I-I'|} \rangle_{\{I, I'\}} \quad (5.1)$$

La vinculación de los individuos en la presencia de desorden muestra en el punto crítico que la distribución de los tamaños de los cúmulos, $n(s)$, sigue una ley de

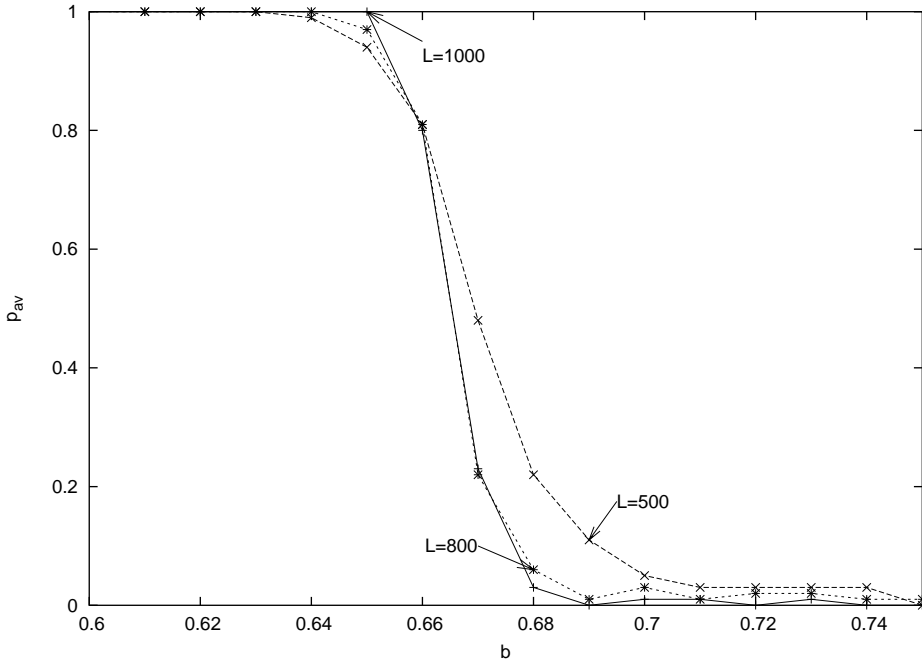


Figura 5.1: Intersección de las curvas p_{av} para $L = 1000, 800, 500$

potencia $n(s) \sim s^{-\tau_I}$, ver figura(5.2). El valor que se obtuvo fue $\tau_I = 1.93 \pm 0.02$ que no discrepa en gran medida del valor sin desorden $\tau = 2.05$, ver [15]. También se buscó obtener la dimensión fractal del sistema pero los resultados obtenidos no fueron concluyentes. En la figura(5.3) se muestra el comportamiento de D_I (dimensión fractal para el modelo I) para tres valores en la vecindad del punto crítico. Cabe notar que los tres valores obtenidos engloban el comportamiento cualitativo de la dimensión fractal dado por la ecuación(3.4). Con $b_c^I \simeq 0.66$ se obtuvo $D_I \simeq 1.99 \pm 0.01$ (que es la dimensión euclidiana del sistema) en cambio para $b = 0.67$ no se obtiene una ley de potencia y se espera que $M(L) \sim \ln(L)$. Para $b = 0.665$ se encontró una ley de potencia con $D_I \simeq 1.80 \pm 0.01$ (hay que recordar que en el caso sin desorden $D = 1.89$, ver [15]). No se considera a este valor como representativo de la dimensión fractal ya que es necesario conocer a b_c^I con un mayor número de cifras significativas y realizar el análisis de τ_I y D_I para valores de L mucho más grandes.

Es de esperar que un análisis más detallado de los exponentes críticos muestre que éstos son los mismos en los casos con y sin desorden.

Ahora nos enfocaremos en la distribución de intereses I_n en el cúmulo más grande (que no necesariamente para todo b atraviesa todo el sistema). En la figura(5.4) se muestran tres casos para la distribución de intereses; antes, después y en el punto crítico, considerando $b_c^I \simeq 0.66$. En $b = 0$ se recupera la distribución exponencial de intereses (dada por la ecuación(4.1)) y para b mucho mayor que b_c^I es esperada una función más angosta que sigue una ley exponencial decreciente, ver figura(5.4) y (5.5). También se puede apreciar que es despreciable la contribución de individuos con intereses mayores a 4 o menores a -4, para cualquier b mayor que b_c , aspecto

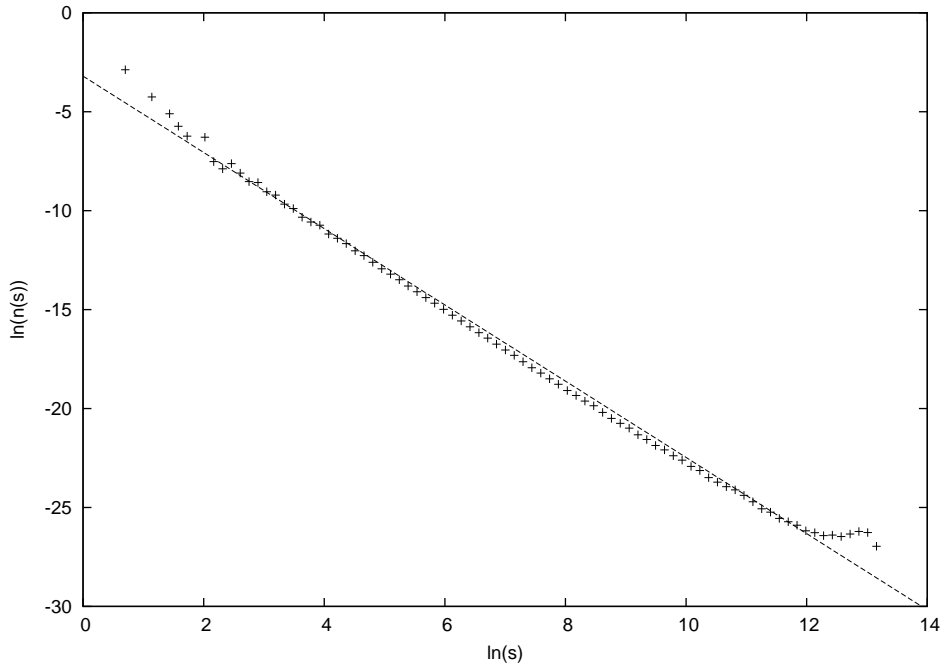


Figura 5.2: Distribución de cúmulos en $b_c^I \simeq 0.66$ para 2000 realizaciones con $L = 1000$. Los intervalos se encuentran separados exponencialmente.

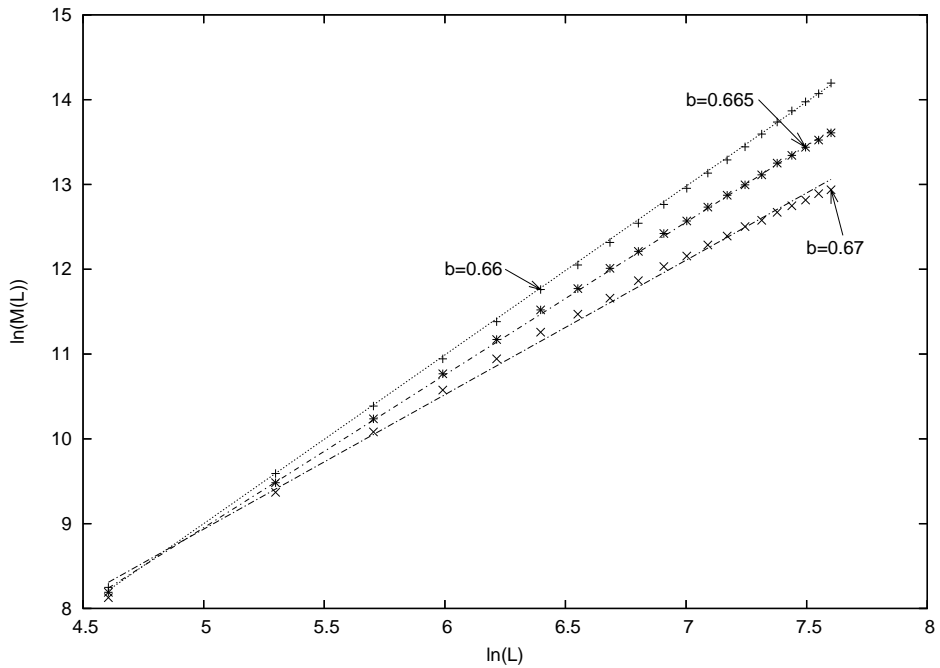


Figura 5.3: Comportamiento para tres valores de la dimensión fractal del cúmulo gigante en la vecindad del punto crítico.

importante para la formulación del modelo II. Hay cierta selectividad en la formación del cúmulo más grande ya que los vínculos se hacen evitando a los individuos extremistas.

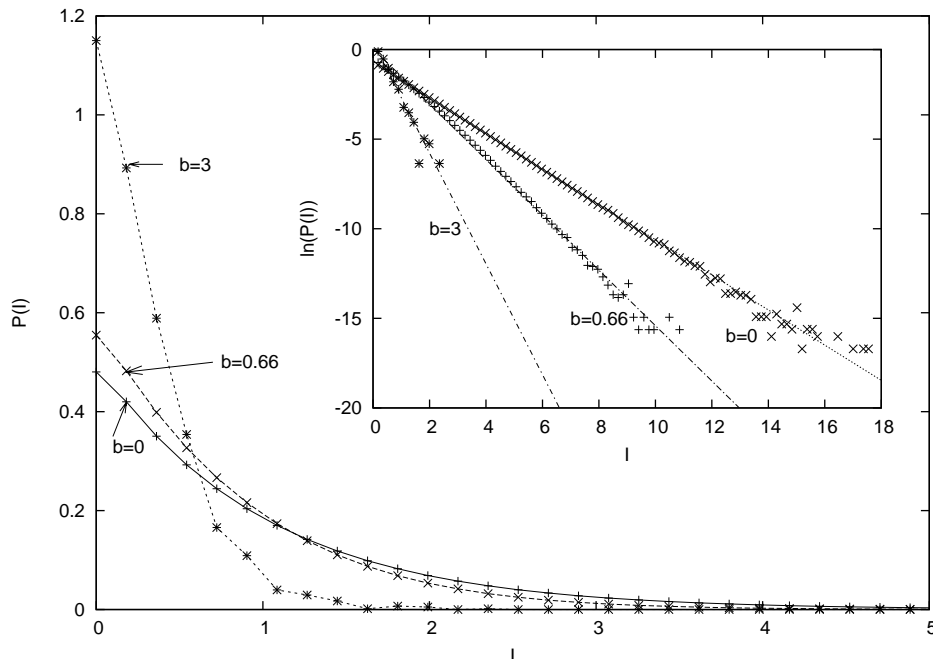


Figura 5.4: Distribución de intereses para $b = 0$, $b = 0.66$ y $b = 3$ con $L = 1000$ para 100 realizaciones. Las curvas son simétricas por lo que sólo se gráfica el intervalo positivo. En el recuadro se graficó $\ln(P(s))$ vs I , las líneas continuas corresponden a las mejores aproximaciones lineales.

La figura(5.5) muestra la varianza de la distribución de intereses en el cúmulo más grande, promediada sobre 100 realizaciones para cada b . Se observa un aumento de la selectividad (los intereses se vuelven más afines) conforme incrementa b . Por otro lado también se corroboró que el interés promedio de cada cúmulo es cero para cualquier b (no se incluye gráfica).

El modelo I muestra que la formación de los vínculos se traduce en que los cúmulos más grande están conformados por centristas (el promedio de los intereses de todos los individuos es cero), como se puede ver en la figura (5.4), y que no hay ningún interés favorecido (no aparecen máximos secundarios).

5.2. Modelo II

En el modelo I se estudió la formación de un grupo mediante vínculos entre individuos y ahora haremos el análisis de dos cúmulos originados por dos semillas

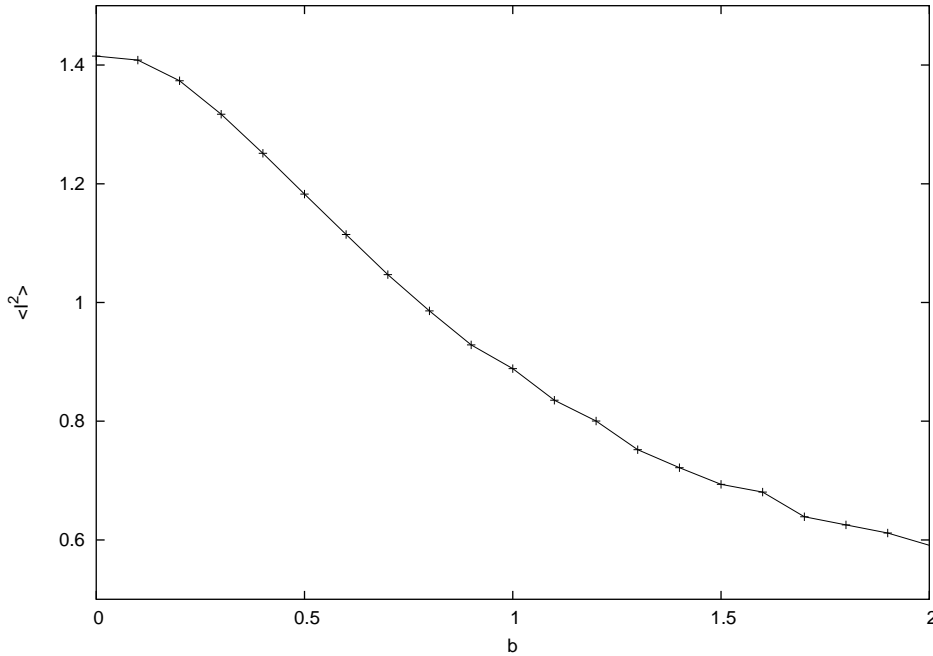


Figura 5.5: Comportamiento de $\langle I^2 \rangle$ en función de b para 100 realizaciones con $L = 1000$

ubicadas aleatoriamente en la red. En sí, cada semilla trata de expandirse y generar un grupo ganador sobre la red preexistente. En la figura(5.6) se muestra la probabilidad de un individuo arbitrario de pertenecer a cualquiera de los dos grupos cuando el sistema presenta semillas “centristas” (interés de 1 y -1, respectivamente) y semillas “extremistas” (con valores de 4 y -4). Los datos que corresponden a la curva sin semilla son los obtenidos para la probabilidad de pertenecer al cúmulo más grande del modelo I. Se puede ver que mientras más extrema sea la semilla más chica es la probabilidad de pertenecer a cualquiera de los dos cúmulos. Sabemos que existe un cúmulo gigante para b pequeño para este problema, pero no se pudo establecer de manera precisa el punto de transición. Es posible que el análisis de tamaño finito necesite correcciones. Encontramos un valor aproximado $b_c^{II} \sim 0.62 < b_c^I$.

A pesar de que ambas semillas se vinculan de manera equivalente (no hay ningún tipo de sesgo ni interacción privilegiada) éstas son colocadas de manera aleatoria sobre una red heterogénea, por lo que pueden o no tener mayor poder de convocatoria. En cada realización se obtuvo el número total de individuos en cada cúmulo, N_+ y N_- respectivamente. Definimos $\Delta = N_+ - N_-$. El análisis de las configuraciones más probables consistió en calcular la distribución de diferencias, Δ , para 10000 realizaciones.

En la figura(5.7) se muestra la distribución de las diferencias, $P(\Delta)$. Se puede observar la aparición de dos máximos secundarios para valores de b menores a 0.62, aproximadamente. Es decir, que la aparición de un grupo mucho más grande que el otro no es despreciable.

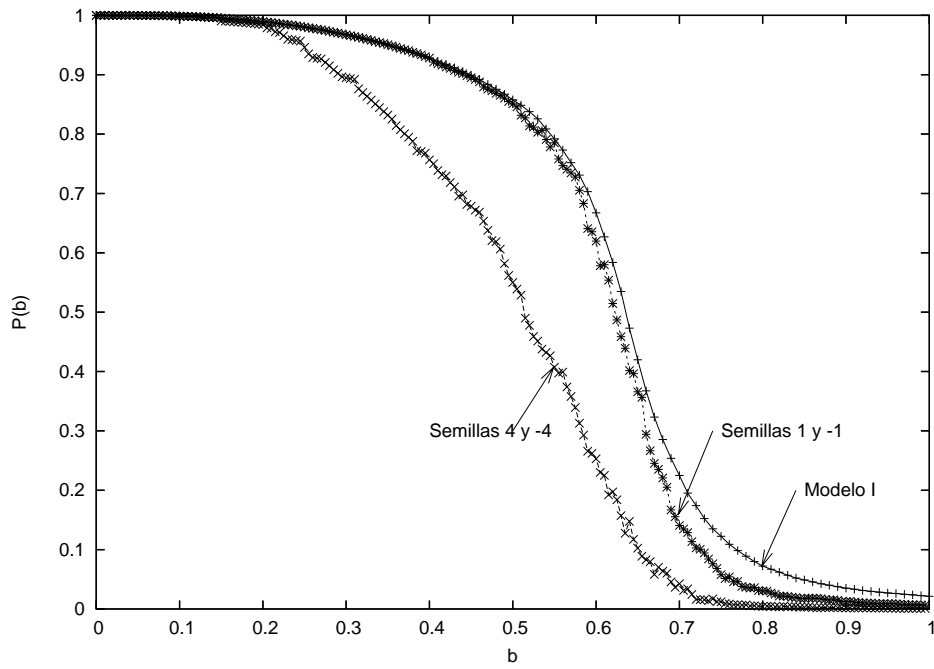


Figura 5.6: Probabilidad de pertenecer a uno de los cúmulo en función de b con $L = 100$ para 200 realizaciones

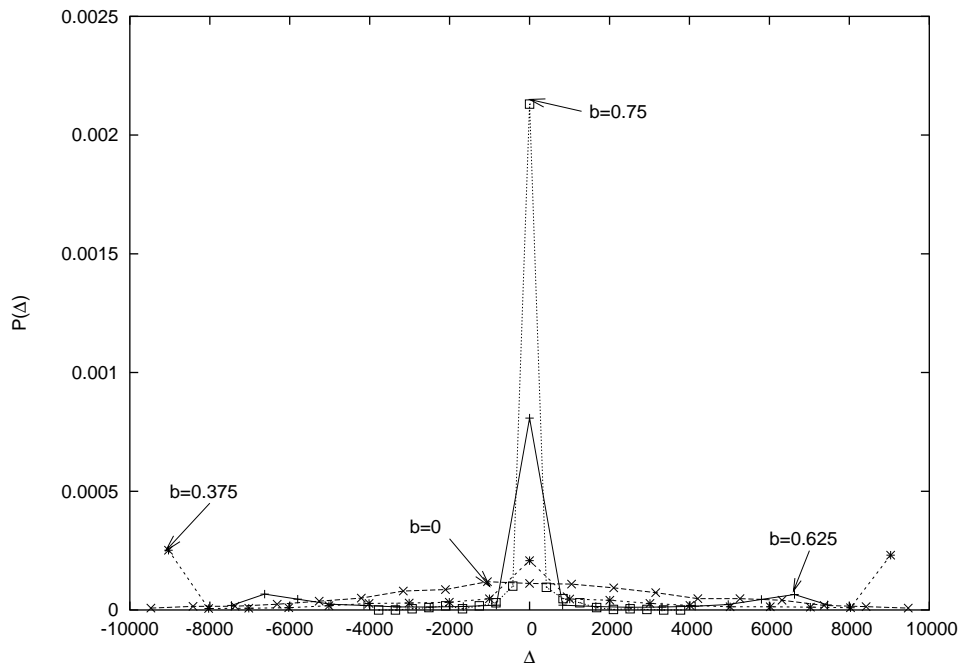


Figura 5.7: Distribución de Δ para $b = 0$, $b = 0.375$, $b = 0.75$ y $b = 0.625$ con $L = 100$ sobre 10000 realizaciones

Independientemente del parámetro para el cual se haya calculado la distribución de diferencias siempre se observó un pico central en la figura(5.7) que se traduce como una equipartición de fuerzas. En este caso los cúmulos son parecidos en tamaño o del mismo orden, por lo que su suma es muy cercana a cero. Sin embargo, al variar b se observa un cambio en el comportamiento de la distribución de Δ observándose un par de máximos secundarios siempre que $0 < b \leq b_c^{II}$.

Una forma de entender esa distribución es pensando en que para cada realización para un mismo b (con $b \leq b_c^{II}$) existe un cúmulo gigante “virtual” (que es el que se obtendría conectando todos los nodos según las reglas del modelo I). De tal forma que al colocar las semillas iniciales estas podrían caer dentro o fuera de este cúmulo virtual, así que hay tres casos: 1) los dos individuos semillas están afuera (ningún cúmulo percola y se observan dos cúmulos pequeños); 2) el segundo es que las dos semillas están adentro del cúmulo gigante (los grupos se dividen el cúmulo gigante, no necesariamente en partes iguales y en ocasiones muy disparejas); 3) en el último caso una semilla está adentro y el otra afuera (la de adentro crea un grupo que percola sobre todo el cúmulo gigante y el de afuera se vincula con muy pocas personas). Esos tres casos se muestran en el figura(4.2) para $b_c^{II} \simeq 0.62$. Recordemos que en la fase de percolación, los cúmulos diferentes al cúmulo gigante tienen un tamaño típico finito, que explica los casos 1) y 3).

No es sorpresa que $b_c^{II} < b_c^I$ ya que los individuos radicales tienen menor capacidad de vinculación y por eso necesita un ambiente con mayor tolerancia para percolar. Mientras más grande sea el valor del radical mayor restricciones pondrá sobre el cúmulo gigante virtual, una muestra de esto es la figura(5.6).

En cierta forma, los casos que corresponden a ambas semillas fuera o dentro del cúmulo gigante son casos parecidos ya que los tamaños de los cúmulos son del mismo orden (o muy cercano) de tal forma que Δ es mucho menor que la dimensión del sistema (y de ahí se explica el pico central). Cuando $0 < b \leq b_c^{II}$ existe la probabilidad de que una de las semillas caiga fuera del cúmulo gigante virtual y es por eso que se observan en la figura(5.7) un par de crestas secundarias que indican que no es despreciable la aparición de un grupo mayoritario con alguna opinión. Cuando $b \rightarrow 0$ ambas semillas siempre caen en la isla infinita por lo que desaparecen los máximos secundarios en la distribución de Δ . De lo anterior concluimos que si los vínculos se realizan con mayor facilidad, es más difícil que una opinión se imponga de manera nítida. Cerca de b_c^{II} hay alta probabilidad de que ambas caigan fuera, por lo que existe un valor intermedio de b que equilibra esas dos probabilidades haciendo que una caiga adentro y la otra afuera, maximizando la probabilidad de la aparición de un cúmulo abrumadoramente mayoritario. En la figura(5.11) se graficó la altura de los máximos secundarios para la distribución de diferencias. Esta altura, h , está relacionada con la probabilidad de encontrar un cúmulo abrumadoramente grande sobre el otro (es decir, no es despreciable la aparición de un cúmulo con opinión mayoritaria). Este mecanismo puede favorecer los cambios sociales, como los ocurridos en el conflicto de los vinos.

Hay que hacer énfasis en que la aparición del par de máximos secundarios en la distribución de diferencias no es producido en esencia por el desorden sino por las semillas, o mejor dicho a su posibilidad de ser colocadas en el cúmulo virtual gigante. Para analizar el papel que juega el desorden en este resultado se hizo el mismo análisis cuando no hay desorden. Ese caso está relacionado con el modelo de percolación de vínculo cuyo punto crítico es bien conocido, $p_c = 0.5$. Lo que se hizo fue colocar las dos semillas (que no tenían interés alguno) en la malla y con probabilidad p (constante) trataban de vincularse con sus vecinos, de tener éxito convertían a sus vecinos en semillas adquiriendo estos el signo de la semilla original (que análogamente, por simplicidad era 1 o -1). Los cúmulos crecen siempre que encuentren nuevos adeptos. En la figura(5.8) se muestra el comportamiento de la distribución de diferencias para tres datos (antes, después y en la vecindad del punto crítico). Las distribuciones son parecidas a las de la figura(5.7), pero los máximos secundarios, cuando existen, son menos pronunciados. El comportamiento puede ser mejor visto en la figura(5.11) donde se muestra el comportamiento de las alturas de los máximos secundarios en función de la conectividad promedio, ecuación (5.1). Se exhibe un comportamiento análogo al caso con desorden, pero con menor intensidad.

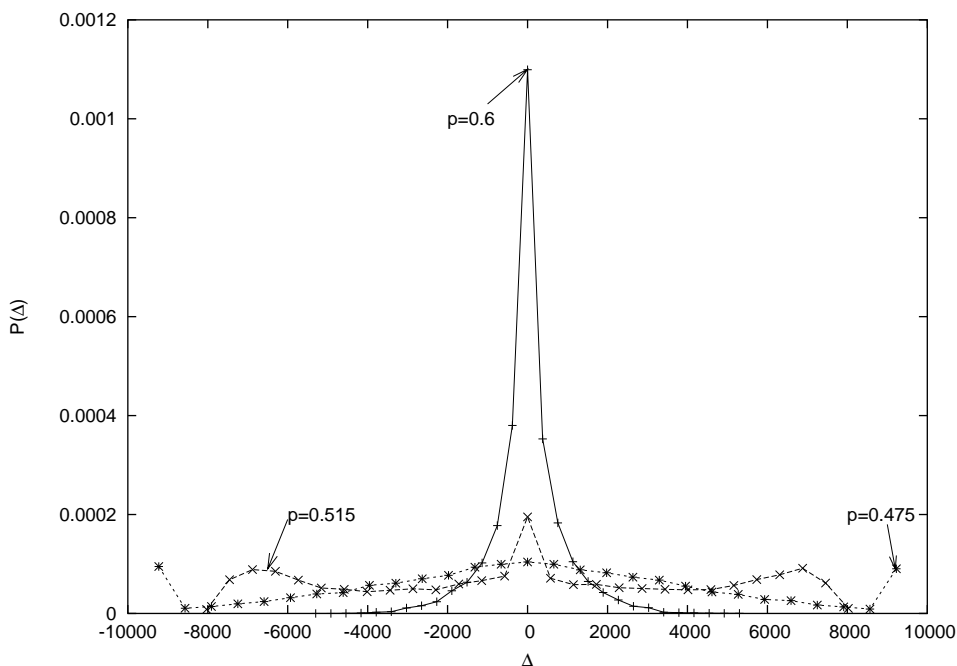


Figura 5.8: Distribución de diferencias para $p = 0.6$, $p = 0.475$ y $p = 0.515$ en el caso sin desorden con $L = 100$, sobre 10000 realizaciones.

La figura(5.11) es más representativa del comportamiento de las alturas de los máximos secundarios respecto a los casos en que hay desorden y orden, en términos

de la conectividad promedio. Aunque la aparición de los máximos secundarios en la figura(5.7) como en la figura(5.8) es una propiedad que surge del modelo (o específicamente de la inserción de las semillas), el desorden amplifica y prolonga su aparición, ver figura (5.11).

5.3. Modelo III

La introducción del parámetro de mundo pequeño, p_{sw} , amplía las posibilidades de análisis del modelo. En principio se esperaría la existencia de dos valores b^{max} y p_{sw}^{max} que maximizan la posibilidad de que exista un cúmulo ganador. Sin embargo esta sección se reduce al análisis de tres valores de p_{sw} .

Se realizó el análisis de distribución de diferencias, $P(\Delta)$, para un parámetro de mundo pequeño cercano a cero, $p_{sw} = 0.05$ (los resultados obtenidos para $p_{sw} = 0.0005$ y $p_{sw} = 0.1$ son cualitativamente similares y del mismo orden). Se encontró un valor aproximado de $b_c^{III} \sim 0.67 > b_c^{II}$. Como es de esperar la introducción de vínculos de largo alcance facilita el crecimiento de los grupos y disminuye el valor de la conectividad crítica [20]. Este modelo también presenta los dos máximos secundarios, ver figura(5.9). Sin embargo, su comportamiento es prácticamente igual al caso $p_{sw} = 0$, caso límite donde el modelo III se reduce al modelo II, ver figura(5.11).

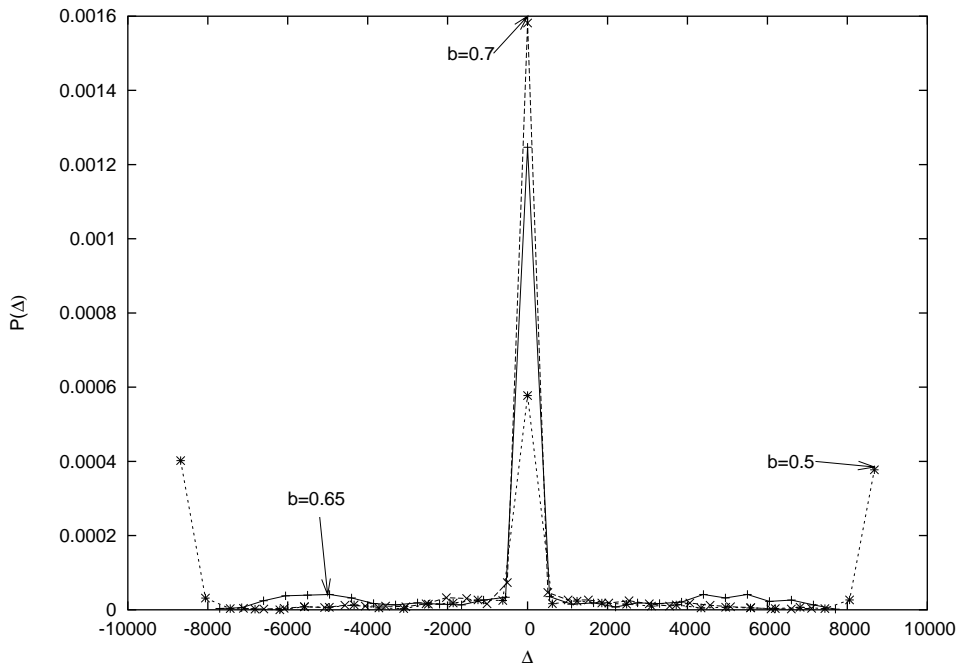


Figura 5.9: Distribución de Δ para $b = 0.5$, $b = 0.65$ y $b = 0.7$, con $p_{sw} = 0.05$ y $L = 100$ para 10000 realizaciones.

5.4. Modelo IV

Ahora el análisis se centra en el comportamiento de la distribución de diferencias, $P(\Delta)$, cuando en la red del modelo II son colocados al azar dos individuos altamente conectados (con 100 conexiones cada uno hacia nodos elegidos aleatoriamente en la red). $P(\Delta)$ tiene diferencias respecto a los modelos anteriores. A pesar de que su comportamiento exhibe el par de máximos secundarios, ver figura(5.10), éstos están presentes para un intervalo mayor de valores de b . Lo más importante que aporta este modelo es que la aparición de un cúmulo mayoritario es un evento que ocurre con mucha mayor probabilidad para el modelo IV que para los modelos II y III, tal como se puede ver en la figura(5.11).

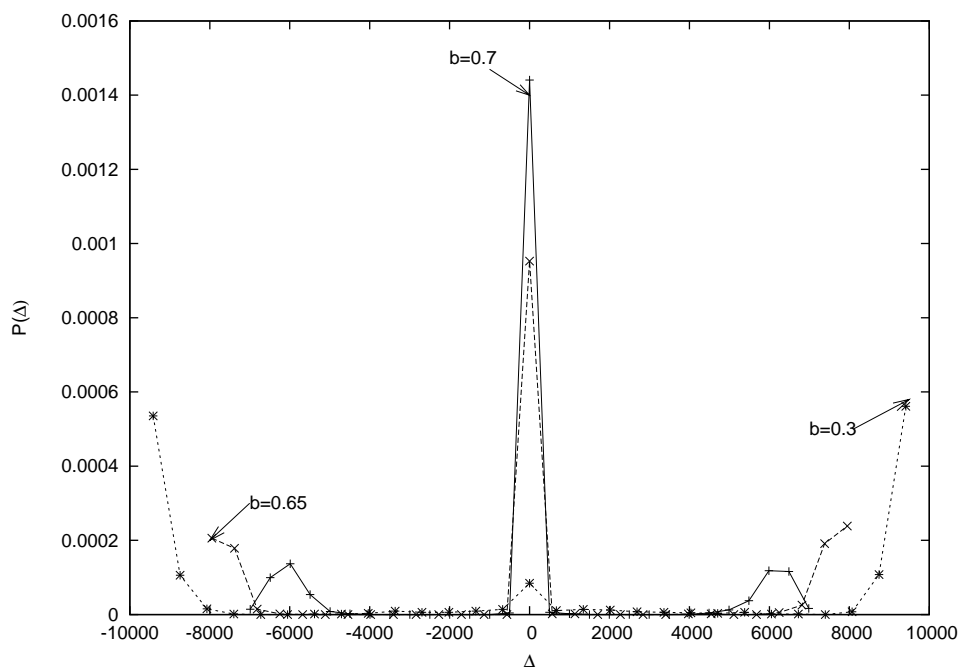


Figura 5.10: Las distribuciones de diferencias, $P(\Delta)$, para $b = 0.3$, $b = 0.6$ y $b = 0.7$ con $L = 100$.

Los valores de h en el modelo III reflejan el mismo comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo. Si pensamos en el caso particular de $p_{sw} = 0.05$ en el modelo III el sistema presenta 500 conexiones en promedio extra, en cambio en el modelo IV sólo son agregadas 200. La gran diferencia del valor de h de los modelos III y IV observado en figura(5.11) no está relacionado con el número de conexiones agregadas (ya que en $p_{sw} = 0.1$ y $p_{sw} = 0.0005$ las alturas son del mismo orden) sino en la topología de la red. La concentración de conexiones en pocos individuos favorece la aparición de grupos mayoritarios

Tanto el modelo III como el IV son extensiones del modelo II a redes complejas

y dejan claro que los comportamientos cualitativos pueden cambiar según el tipo de red con la que se trabaja. La gran diferencia entre estos dos modelos es que la aparición de un cúmulo abrumadoramente mayoritario se hace más evidente cuando el sistema presenta pocos individuos altamente conectados (modelo IV) que cuando estas conexiones están distribuidas entre pares elegidos al azar, es decir, muchos individuos tienen pocas conexiones extra (modelo III).

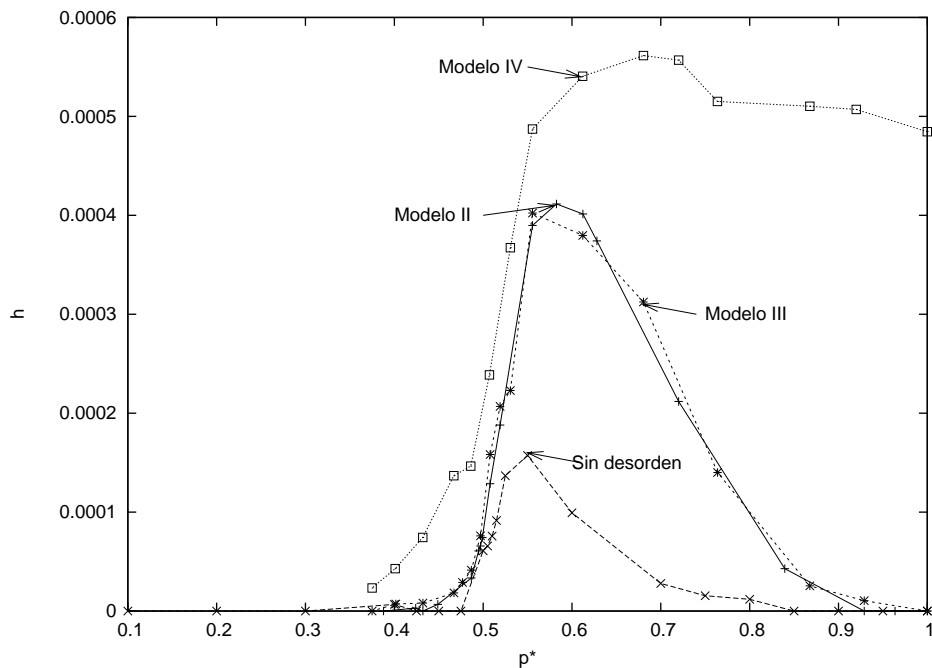


Figura 5.11: Comportamiento de h en los casos con desorden (Modelos II, III ($p_{sw}=0.05$) y IV) y sin desorden.

Capítulo 6

Conclusiones

En términos de modelación social los modelos aquí presentados reproducen, de manera simplificada, la lucha de dos opiniones en conflicto por esparcirse sobre una población de individuos. De tal forma que el resultado más importante es que existe una probabilidad no despreciable de que un grupo con determinada opinión sea abrumadoramente mayoritario en el sistema. Inicialmente esta propiedad había sido encontrada en el caso con desorden (agentes heterogéneos, modelo II) pero se encontró que la propiedad es lo suficientemente robusta tal que el caso sin desorden como el caso con desorden espacial (modelo III, para $p_{sw} \ll 1$ y modelo IV) también la exhiben. El desorden tiene un papel importante ya que incrementa la probabilidad de la aparición de una mayoría.

En futuras investigaciones se planea estudiar qué es lo que sucede para parámetros grandes de p_{sw} en el modelo III, si es que la probabilidad de encontrar un grupo abrumadoramente mayoritario se hace despreciable o no. Por lo que es de interés encontrar el parámetro bajo el cual esta propiedad se pierde o verificar la existencia de parámetros que la maximizen. También es de interés analizar el comportamiento del modelo IV para distintas densidades de individuos altamente conectados.

Es posible que redes muy heterogéneas favorezcan la probabilidad de un grupo abrumadoramente mayoritario. Por eso resultaría interesante hacer extrapolaciones de este modelo hacia redes que representen de mejor manera las interacciones sociales, como las redes libres de escala de Albert-Barabási [22], y verificar que tan robusto es el modelo aquí presentado y si existe una probabilidad no despreciable de encontrar un grupo abrumadoramente mayoritario.

Apéndice A

Conteo del tamaño de los cúmulos

Una vez dispuestos los enlaces en la malla corre una subrutina que numera y almacena en una lista la posición de los nodos que tienen al menos un enlace, asignándoles un número de cúmulo igual a cero.

La subrutina escoge al primer nodo de la lista como perteneciente al cúmulo número uno. Después busca sus vecinos y luego a los vecinos de sus vecinos. Cada nuevo nodo encontrado es almacenado en un vector llamado “buffer” que tiene “bufferzise” componentes (que aumentan en cada iteración al anexar nuevos nodos conectados). Cada vez que se buscan los vecinos de un nodo en particular se incrementa el tamaño del cúmulo en uno y es elimina al nodo de la lista, reduciendo “bufferzise” en una unidad. Se hace recorriendo los lugares del vector de la forma $buffer(k) = buffer(k + 1)$. El programa incrementa el número de cúmulo en un una unidad cuando $bufferzise = 0$ entonces la subrutina regresa al primer nodo de la lista al que no se le ha asignado un número de cluster. La subrutina acaba cuando no existe ningún nodo al que se le asocie un número de cúmulo igual a cero. En la figura(A.1) se muestra un diagrama de flujo simplificado.

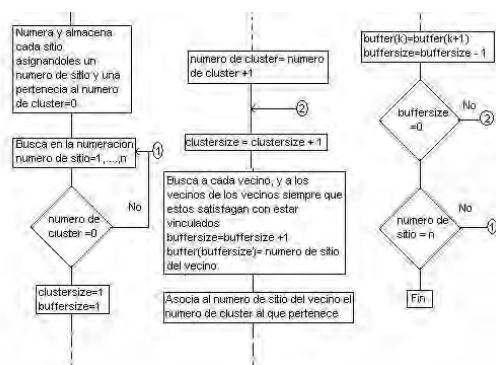


Figura A.1: El índice k está relacionado con las iteraciones de búsqueda de los vecinos

Bibliografía

- [1] Solow, R.M. *A contribution to the theory of economic growth*. Quaterly Journal of Economycs, Feb (1956).
- [2] Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*. Phys. Rev. E. 63, 066117 (2001).
- [3] Zanette, D.H. *Critical behavior of propagation on small-world networks*. Phys.Rev. E 64, R050901 (2001).
- [4] Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F. y Weisbuch, G. *Mixing beliefs among interacting agents*. Advances in Complex Systems 3, 87-98 (2000).
- [5] Sznajd-Weron, K y Sznajd, J. *Opinion evolution in closed community*. Int. J. Mod. Phys. C 11, 1157-1166 (2000).
- [6] Galam, S. *Minority opinion spreading in random geometry*. Eur. Phys. J. B 25, 403-406 (2002)
- [7] Galam, S. *Contrarian Deterministic Effect: the “Hung Elections Scenario”*. cond-mat/0307404 (2003).
- [8] Hegselmann R. y Krause, M. *Journal of Articial Societies and Social Simulation*. 5, 3 (2002).
- [9] Stauffer, D. *How to convince others ?*.cond-mat/0307133 (2003).
- [10] Watts, D.J y Strogatz, S.H. *Collective dynamics of “small-world” networks*. Nature 393, 440-442 (1998).
- [11] Newman, M.E.J, Watts, D.J y Strogatz, S.H. *Random graph models of social networks*. PNAS 99, 2566-2572 (2002).
- [12] Boyer, D. *Un (deuxième) modèle de formation de réseaux à travers différents champs sociaux: le cas du problème du vin en Bourgogne au début du XXe siècle*. (no publicado)

- [13] Boyer, D y Boyer, R. *Analyses et formalisations du basculement des normes de qualite: L' exemple du secteur du vin* (no publicado)
- [14] Bak, P. Tang, C y Wiesenfeld, K. *Self-Organized Criticality*. Phys. Rev. A. Vol 38 (1988).
- [15] Stauffer, D y Aharony, A. *Introduction to Percolation Theory*. Ed. Taylor and Francis. 2 ed. pág. 1-69 (1994).
- [16] Solé, R y Manrubia, S. *Orden y caos en sistemas complejos*. Ed. UPC. Barcelona. pág. 271-304. (1996).
- [17] Feder, J. *Fractals*. Ed. Plenum Press. Nueva York. pág 104-148 (1989).
- [18] Wilkinson, D. J and Willemsen, J. *Invasion percolation: a new form of percolation theory*. J. Phys. A, 16, 3365 (1983)
- [19] Binder, K y Heermann, D.W *Monte Carlo Simulations in Statistical Physics: An Introduction*. 4 ed. Ed. Springer-Verlag. Berlin. pág. 39-41
- [20] Newman, M.E.J y Watts, D.J *Scaling and percolation in the small-world network model*. Phys.Rev. E 60, 7332 (1999).
- [21] Boyer, D y Miramontes, O *Interface motion and pinning in small-word networks*. Phys. Rev. E 67, 035102 (2003).
- [22] Albert, R y Barabási, A.L *Statistical mechanics of complex networks*. Rev. Mod. Phys. 74, 1 ene (2002).