UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Introducción a la Estadística y Probabilidad. Memorias de desempeño laboral del curso de Estadística y Probabilidad de la Escuela Nacional Preparatoria. Teoría y Práctica

Actividad de apoyo a la Docencia

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA

ALEJANDRO HERNÁNDEZ RIVERA

ASESOR:
M. EN C. SARA CAMACHO CANCINO

JUNIO, 2006

Agradecimientos

A todos aquellos que utilicen mis memorias como ayuda en su trabajo.

Quiero expresar un gran sentimiento de gratitud a las siguientes personas:

A mi maestra y asesora Sara Camacho Cancino
Por haber dedicado amablemente parte de su tiempo en la asesoría del presente trabajo, mi eterna gratitud por sus acertados comentarios, usted es una de las personas más brillantes que la vida pudo poner en mi camino.

A mis primos Gustavo, Jaime y Ricardo
Por ser para mi los hermanos mayores que siempre quise.

A mi amiga
Mat. Claudia Elizabeth Gómez Amaral
Por las innumerables revisiones y el aliento a la creación de este material.

A mis amigos profesores
Ing. Carlos González Romero, Mtro. Arturo Hernández Sánchez, Act. Giselle Ochoa Hoffman, Dr. Fernando Piña Soto, Ing. José Ángel Valdivieso Montero.
Por la asesoría complementaria, aportación y revisión brindada en este trabajo.

A mis alumnos
A aquellos que son mi obra maestra, no los miraré con ceño adusto, sino comprenden todavía, tendré paciencia. Mi esfuerzo, conocimiento, pensamiento y acción son mi legado, y por todos ustedes que son parte de mi pasado, presente y futuro, no temeré a la muerte pues es la oportunidad que me da la vida de ser inmortal.

Gracias a todos porque ahora comprendo uno de los significados de las palabras
“Por Mi Raza Hablará el Espíritu”

Dedicatoria

A mi padre Luciano

Por tu apoyo incondicional en todas las situaciones de mi vida, gracias por todas tus enseñanzas padre, mi admiración por tu sabiduría y juicio, soy lo que soy por ti y espero algún día ser mejor de lo que tú eres.

A mi madre Maria

Por estimularme a ser una persona mejor, por toda tu infinita paciencia, alegría, amor, dulzura, bondad, amistad, apoyo, comprensión. Por enseñarme lo útil, lo verdadero, lo bello y por siempre creer en mí. Aunque no siempre sepa mostrártelo, te amo mucho, eres el ángel que Dios puso en la Tierra para cuidarme.

A Nathalie

Deseo de todo corazón que mi triunfo profesional lo sientas como tuyo. Por tu amor, cariño, ternura, paciencia y por compartir la vida como mi amiga, mi novia, mi gran amor. La fe es la certeza de lo que se espera, gracias por confiar en mí. Con todo amor para ti.

INDICE

Introducción………………………………………………………………………………….. III

Capítulo I Estadística Descriptiva………………………………………………………. 3

1.1. Introducción………………………………………………………………………… 3
1.1.1 Orígenes de la estadística………………………………………………….. 3
1.1.2 Definición de estadística…………………………………………………… 6

1.2. Variables……………………………………………………………………...... 9
1.2.1 Clasificación de variables………………………………………………… 9
1.2.2 Las escalas de medición…………………………………………………… 11
1.2.3 Etapas de un análisis estadístico………………………………………… 12
1.2.4 Instrumentos de medición………………………………………………… 16
1.2.5 Observaciones……………………………………………………………… 16
1.2.6 Encuesta……………………………………………………………………. 17
1.2.7 Entrevista…………………………………………………………………….. 23

1.3. Datos……………………………………………………………………………… 25
1.3.1 Definición de dato………………………………………………………….. 25

1.4. Clasificación y construcción de bloques estadísticos………………………….. 26
1.4.1 Representación de tronco y hoja…………………………………………. 27
1.4.2 Gráfico circular o de pastel………………………………………………….. 28

1.5. Organización de los datos por medio de tablas…………………………........... 34
1.5.1 Frecuencia absoluta……………………………………………………….. 34
1.5.2 Frecuencia relativa………………………………………………………… 34
1.5.3 Frecuencia absoluta acumulada………………………………………….. 35
1.5.4 Frecuencia relativa acumulada…………………………………………… 35
1.5.5 Distribución de frecuencias……………………………………………….. 35
1.5.6 Amplitud del intervalo……………………………………………………… 36
1.5.7 Marca clase………………………………………………………………… 36

1.6. Tipos de gráficas……………………………………………………………… 37
1.6.1 Diagrama de barras………………………………………………………….. 37
1.6.2 Diagrama de frecuencias acumuladas…………………………………… 38

1.7. Introducción a la sumatoria…………………………………………………….. 42
1.7.1 Unión e intersección…………………………………………………………. 42
1.7.2 El operador sigma…………………………………………………………….. 44

1.8. Análisis de datos de una variable:
medidas de tendencia central y de localización……………………………………. 48
1.8.1 Media geométrica…………………………………………………………….. 48
1.8.2 Media armónica……………………………………………………………… 49
1.8.3 Media aritmética……………………………………………………………… 51
1.8.4 Mediana……………………………………………………………………….. 55
1.8.5 Moda…………………………………………………………………………… 57
1.8.6 Fractiles………………………………………………………………………... 58

1.9. Medidas de dispersión o variabilidad………………………………………………… 62
1.9.1 Recorrido y rango…………………………………………………………… 62
1.9.2 Recorrido intercuartílico…………………………………………………… 62
1.9.3 Desviación estándar………………………………………………………… 62
1.9.4 Varianza……………………………………………………………………… 63
1.9.5 Regla empírica……………………………………………………………… 64
1.9.6 Coeficiente de variación de Pearson……………………………………… 69
1.9.7 Variable tipificada…………………………………………………………… 69

1.10. Análisis descriptivo de datos bivariados: correlación………………………… 75
1.10.1 Covarianza………………………………………………………………… 75
1.10.2 Distribuciones conjuntas………………………………………………… 77
1.10.3 Representaciones gráficas……………………………………………… 78
1.10.4 Regresión lineal…………………………………………………………… 78
1.10.5 Independencia estadística……………………………………………… 85

Capítulo II Conjuntos……………………………………………………………………… 97

2.1 Conjuntos…………………………………………………………………………… 97
2.1.1 Idea Intuitiva (por extensión y por comprensión)………………………… 99
2.1.2 Conceptos Básicos y Simbología………………………………………… 103
2.1.3 Subconjuntos……………………………………………………………… 104
2.1.4 Conjunto Universal………………………………………………………… 107
2.1.5 Conjunto Nulo o Vacío…………………………………………………… 108

2.2 Operaciones con Conjuntos…………………………………………………… 110
2.2.1 Unión……………………………………………………………………… 110
2.2.2 Intersección……………………………………………………………… 112
2.2.3 Diferencia………………………………………………………………… 114
2.2.4 Complemento…………………………………………………………… 116
2.2.5 Intervalos………………………………………………………………… 119
2.2.6 Desigualdades…………………………………………………………… 112
2.2.7 Diagramas de Venn……………………………………………………… 124

2.3 Cardinalidad de la unión, de la intersección y del complemento…………… 125

Capítulo III Probabilidad………………………………………………………………… 141

3.1 Espacio Muestral…………………………………………………………………… 150

3.2 Experimentos y eventos…………………………………………………………… 151
3.2.1 Experimento……………………………………………………………… 151
3.2.2 Evento…………………………………………………………………… 152
3.2.3 Observación……………………………………………………………… 153

3.3 Principio fundamental del Conteo……………………………………………… 154
3.3.1 Principio fundamental de la adición……………………………………… 154
3.3.2 Principio fundamental de la multiplicación……………………………… 155

3.4 Análisis Combinatorio………………………………………………………… 156
3.4.1 Factorial……………………………………………………………….. 157
3.4.2 Permutaciones………………………………………………………… 157
3.4.3 Ordenaciones…………………………………………………………. 158
3.4.4 Combinaciones……………………………………………………….. 160

3.5 Concepto de Probabilidad…………………………………………............ 176
3.5.1 Probabilidad………………………………………………………….. 176

3.6 Eventos…………………………………………………………………….. 179
3.6.1 Tipos de eventos independientes………………………………… 181

3.7 Teoremas de la Probabilidad…………………………………………… 189

3.8 Variables aleatorias: Discretas y Continuas……………………………. 191
3.8.1 Variable aleatoria……………………………………………………. 191
3.8.2 Variable aleatoria discreta………………………………………….. 192
3.8.3 Variable aleatoria continua…………………………………………. 193
3.8.4 Función de distribución acumulada……………………………….. 194

3.9 Funciones de distribución para variables aleatorias
Continuas y discretas……………………………………………………… 195
3.9.1 Modelos de distribución de probabilidad de variables discretas……….. 196
3.9.2 Modelos de distribución de probabilidad de variables continuas……… 196

Conclusiones y Recomendaciones…………………………………………….. 225

Anexo 1……………………………………………………………………………. 231
Anexo 2……………………………………………………………………………. 241

Bibliografía……………………………………………………………………….. 247

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La Universidad Nacional Autónoma de México (en adelante: UNAM) es una institución líder en el continente americano, heredera de una rica tradición que se remonta a 1551, año en el que se expide la Cédula Real sobre la Fundación de la Universidad de México. En función de su historia y sus logros, esta institución ha marcado la pauta de la actividad intelectual, científica, humanística y tecnológica, constituyéndose en el centro de educación superior de mayor relevancia en el país.

La UNAM tiene como misión impartir educación superior para formar profesionales, investigadores, profesores universitarios y técnicos útiles a la sociedad, organizar y realizar investigaciones, principalmente acerca de las condiciones y los problemas nacionales y extender con la mayor amplitud posible los beneficios de la cultura.

Ofrece educación de calidad a miles de alumnos, forma profesionales con una preparación académica de calidad, así como con un amplio sentido de responsabilidad y compromiso social. De igual manera, crea y difunde conocimientos que permiten, por un lado, entender mejor la naturaleza y al hombre para aprovechar óptimamente nuestros recursos y, por otro, valorar nuestra historia y cultura, así como entender los complejos problemas económicos, políticos y sociales que enfrenta el país, contribuyendo a su solución al vincularse con la sociedad de formas diversas.

A la UNAM le corresponde asumir el compromiso que tiene con la sociedad, de conservar, generar y transmitir el conocimiento científico, humanístico, artístico y tecnológico mediante la docencia, la investigación y la difusión de la cultura. En su larga historia, la Universidad ha experimentado cambios profundos. De un conjunto de escuelas diseminadas, se ha transformado en un sistema universitario; dicho sistema académico hoy día cuenta con cuatro niveles educativos: el bachillerato, el técnico, la licenciatura y el posgrado; donde se posee un amplio y diversificado campo de disciplinas.

Para llevar a cabo sus funciones sustantivas: la docencia, la investigación y la difusión de la cultura, cuenta con instalaciones en todo el territorio mexicano: 23 espacios universitarios en la zona metropolitana e instalaciones en 26 entidades federativas, además de tres Escuelas de extensión, dos en Estados Unidos de América – San Antonio, Texas y Chicago, Illinois – y otra en Hull, Canadá.

En el campo de la docencia, la UNAM representa la opción educativa más importante a nivel nacional, desde la educación media superior hasta el posgrado.

Cuenta con una planta de personal académico de más de 30,000; alrededor de una tercera parte es personal de carrera, y de ésta aproximadamente el 60 por ciento posee estudios de posgrado. El 30 por ciento de los miembros del Sistema Nacional de Investigadores son académicos de la UNAM.

Su planta académica, la gama de carreras profesionales, los servicios de apoyo y sus instalaciones, son los recursos de una Universidad de Excelencia. Pertenecer a la UNAM es un privilegio.

El bachillerato universitario está conformado por la Escuela Nacional Preparatoria (en adelante: ENP), la cual es parte de la institución desde su creación en 1867, y por el Colegio de Ciencias y Humanidades, creado en 1971; ambos cuentan con planes de estudio recientemente modificados con el objeto de mejorar la formación de sus estudiantes.

La UNAM le permite al estudiante contar con una formación que abarca desde el bachillerato – incluyendo Iniciación Universitaria, que se imparte en el plantel 2, “Erasmo Castellanos Quinto”, de la Escuela Nacional Preparatoria - , la licenciatura y el posgrado. El bachillerato es el antecedente inmediato para los estudios de licenciatura: puede cursarse en la Escuela Nacional Preparatoria o en el Colegio de Ciencias y Humanidades. Los estudios son técnicos y propedéuticos.

En la ENP se imparte educación básica y media superior (Bachillerato Propedéutico) como preparación previa a la educación profesional. El plan de estudios es de tres años de Iniciación Universitaria (equivalente a secundaria) y tres de preparatoria. Sus finalidades consisten en formar la personalidad del alumno y prepararlo para una carrera determinada. Pretende el desarrollo integral de sus facultades para hacer de él un hombre cultivado; propiciar la formación de una disciplina intelectual que lo dote de un espíritu científico, de una cultura general que le dé una escala de valores, de una conciencia cívica que le defina sus deberes frente a su país y frente a la humanidad, y de una preparación especial para abordar una determinada carrera profesional.

La Universidad Nacional Autónoma de México como la máxima casa de estudios de nuestro país, comprometida con el avance y desarrollo del mismo, ha tenido que responder a los cambios que le demanda la modernización y el progreso, el esfuerzo de superación ha estado de manifiesto en cada uno de los que formamos, pertenecemos y amamos a esta gran institución educativa.

Es por tal motivo que surge la inquietud de elaborar este trabajo cuyo principal objetivo es proporcionar, en la medida de sus posibilidades, una herramienta útil para profesores y alumnos pertenecientes a la Escuela Nacional Preparatoria, ya que se apega al programa de la materia de Estadística y Probabilidad del actual plan de estudios, los apuntes del curso serán auxiliados con diagramas, dibujos, cuadros sinópticos, mapas mentales, propuestas de ejercicios, anécdotas matemáticas con el objeto de lograr una mejor comprensión de la materia.

La información fue elegida con base a la experiencia docente adquirida como profesor de asignatura “A” interino desde diciembre del 2001 a la fecha, adscrito a los colegios de Matemáticas e Informática en la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM Plantel 5 “José Vasconcelos” y Plantel 1 “Gabino Barreda”, y con el correspondiente fundamento bibliográfico, así como, varias horas de investigación (en lo relativo a las reseñas históricas, anécdotas, problemas planteados entre matemáticos de distintas épocas). Con lo relacionado a la experiencia se observo que el alumno necesita una motivación constante y ser inducido con temas de su interés hacia la enseñanza de la matemática.

De tal manera que la intención principal de este material es educar el pensamiento científico cuya importancia aumenta ante los ojos del hombre contemporáneo. A pesar de no hacerlo de un modo escolar exclusivamente pues el lector no ha de ser forzosamente el estudiante. Ni tampoco simplemente de conocimientos y técnicas, aunque no será poca la información de esta clase que recogerá del presente; a lo largo del curso lo que se busca en el lector es sensibilizarlo ante el hecho de que lo importante es instalar el razonamiento más no la memorización de un procedimiento.

Las corrientes actuales y el marco que vive la educación en México nos llevan a un proceso enseñanza-aprendizaje donde educar es la parte fundamental a través de una serie de aprendizajes significativos, es en este punto donde cualquier trabajo que se desarrolle en pro de un esfuerzo para ayudar a la mejor y más rápida comprensión de los cambios en los programas tendrá alguna justificación.

La Escuela Nacional Preparatoria desde su creación y hasta la fecha, ha experimentado cambios apegados a los requerimientos de una población joven, como es la mexicana, que demanda más y mejor educación a nivel medio superior. Uno de los problemas a lo que se enfrenta la ENP es la actualización y elaboración de programas de estudio, tarea muy importante en el difícil trabajo de la docencia.

La UNAM año con año realiza Seminarios de Análisis y Desarrollo de la Enseñanza, en los cuales se permite concretar las diversas concepciones teóricas e ideológicas que sobre el acto educativo sustentan las personas que integran la institución. Dichos seminarios al ser realizados por los docentes responsables de cada unidad de enseñanza (los docentes a cargo son los Jefes de Colegio adscritos a la Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria), tratan de actualizar el PROGRAMA DE ESTUDIOS, ya que es la herramienta fundamental del trabajo que realiza el docente y está íntimamente relacionado con los problemas y con la intencionalidad que caracteriza a la práctica docente. La elaboración de los programas de estudio proporciona una visión mas profunda de la problemática que se afronta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un curso específico.

La participación del profesorado en la realización de los programas de estudio de los cursos que se imparten, refuerza la idea de formación didáctica de un profesor, el cual debe centrarse en el aprendizaje de técnicas de enseñanza y así mismo, en el análisis de la disciplina, la orientación pedagógica e ideológica, etc. Además de que somos nosotros los profesores que al enfrentarnos al alumno podremos contribuir con varias y valiosas aportaciones e ideas que fortalezcan esta difícil tarea.

Hoy en día el uso de la matemática se ha extendido a la sociología, la administración, las finanzas, la ingeniería, la economía y la medicina, entre otras disciplinas, con esta base es posible lograr un modelo lógico el cual permita la planeación del desarrollo económico y social así como de proyectos y procesos de ingeniería, control de calidad y obras en equipos multidisciplinarios, el diseño y desarrollo de modelos matemáticos que sustenten el análisis y la toma de decisiones capaces de contribuir al avance de estos campos del quehacer humano, incidiendo así en la solución de problemas que directa o indirectamente afectan a la sociedad en su conjunto.

A través del tiempo el hombre ha sentido la necesidad de realizar cálculos (contabilizar el número de personas, animales, bienes, fuentes de ingreso, censos de tierras, etc.), entonces se cree que las primeras operaciones aritméticas que realizó, tales como adiciones y substracciones sencillas, pudieron llevarse a cabo con la ayuda de objetos simples como piedrecillas, palitos o con sus dedos, sin embargo cuando las cantidades aumentaron, el hombre creó nuevas técnicas. Los caldeos, babilonios y egipcios, utilizaron cotidianamente números, cuentas y representaciones aritméticas. Los mayas tenían una tabla que era más exacta porque utilizaban el 0 (cero). Los árabes introdujeron el sistema decimal, desarrollando así el álgebra, trigonometría, geometría, estadística, cálculo diferencial, probabilidad y otras materias que son utilizadas como herramienta principal de los científicos e inventores modernos. Los antiguos incas (siglos XII al XVI) en el continente americano desarrollaron un sistema de conteo en donde todos los datos relacionados con las operaciones aritméticas, estudios astronómicos, registro de impuestos, gastos, estadísticas poblacionales, actividades económicas y demográficas se guardaban en el quipú, que estaba hecho de cuerdas de diferentes largos. El color, los nudos y el orden de sucesión servían para registrar y trasmitir información. En Europa, junto con las monarquías absolutas, Jean Bodin (siglo XVI) en Francia resalta la importancia de los censos, y 50 años más tarde Galileo presenta por primera vez todos los datos en tablas de tablas de distribución. En Estados Unidos de Norte América un estadista de nombre Herman Hollerith (siglo XIX) siguiendo el ejemplo de las tarjetas perforadas similares a las placas del francés Joseph Marie Jacquard, crea máquinas tabuladoras para procesar datos. Consiguió compilar la información estadística destinada al censo de población de 1890 de Estados Unidos, mediante la utilización de un sistema que hacía pasar tarjetas perforadas sobre contactos eléctricos, teniendo un gran éxito en tan sólo dos años y medio. De 1890 a 1940 estas máquinas fueron desarrolladas y dotadas de otras funciones que las hicieron más veloces.

Actualmente la "sociedad de la información" proporciona gran cantidad de informaciones que a menudo se presentan como precisas, científicas y en diverso grado ciertas. No obstante en la vida diaria nos enfrentamos a resultados de elecciones inciertos, puentes que se desmoronan, caídas de la bolsa, predicciones del tiempo poco fidedignas, predicciones desafortunadas del crecimiento de la población, modelos económicos que no funcionan bien y muchas otras demostraciones de probabilidad del mundo donde vivimos.

La estadística y probabilidad está pensada para sugerir dos temas relacionados: los datos y el azar. Estos dos fenómenos son su objeto de estudio matemático, respectivamente. Las recientes recomendaciones relativas a los currículos escolares son unánimes al sugerir que la estadística y la probabilidad deberían ocupar un lugar más importante del que han tenido en el pasado. Actividades y conceptos matemáticos de esta área son la relación de datos, el análisis y la presentación-visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

Es por ello que se requiere de una alfabetización o competencia matemática, la cual se refiere a la capacidad para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando se enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos. La competencia matemática no se limita al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque lógicamente se incluyen, tampoco a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con ciertos métodos. La competencia matemática implica la combinación de estos elementos para satisfacer las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

La palabra estadística suele utilizarse en primer término para referirse a la información, y en segunda instancia a un conjunto de técnicas y métodos que se emplean para analizarla. Son varias las imágenes mentales que las personas se forman y estas pueden ser, entre otras más, la existencia de grandes volúmenes de información; sin embargo y sin temor a equivocarse, se puede decir que es una ciencia tan antigua como la humanidad misma, y es a su vez un auxiliar de todas las ramas del conocimiento o de la actividad humana, pues los mercados bursátiles, la ingeniería, los gobiernos, las empresas y cualquier otra institución, simplemente no podrían existir sin ella, pues tanto los ejecutivos como los administradores, sin información vital no podrían desarrollar sus funciones.

En mi desempeño como docente, la necesidad de un entendimiento del conocimiento, la alfabetización matemática y la compilación de mi material de clase –mismo que he probado en los cursos que he impartido– , me llevaron al análisis y propuesta de un criterio sobre la forma que debe tener la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en la Escuela Nacional Preparatoria.

El presente trabajo está planeado de una manera en la cual se proporcione al lector los aspectos introductorios, el desarrollo de los apuntes basados en el programa, ejemplos y ejercicios propuestos para poner en práctica. Se sabe de los muchos y variados trabajos por otros autores que existen al respecto, sin embargo estos apuntes no pretenden competir con ellos, más bien unirse al constante esfuerzo de superación que significa la enseñanza a nivel medio superior.

CAPÍTULO I ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

CAPÍTULO 1 Estadística Descriptiva

"Hay gente que utiliza la estadística como un borracho utiliza el poste de la luz; más para apoyarse que para iluminarse"

Andrew Lang

"Llegará el día en el que la estadística será una condición tan necesaria para la convivencia como la capacidad de leer y escribir"

Anónimo

"El estadístico es aquella persona que se ocupa de los números y las gráficas pero que no tiene vocación para convertirse en contable"

Anónimo

"Si tu experimento necesita estadística, deberías haber hecho uno mejor"

Ernest Rutherford

Objetivo: Que el alumno sea capaz de diferenciar, organizar, representar gráficamente e interpretar el significado que un conjunto de datos tiene en relación con un fenómeno relativo a su entorno social, para vincular la estadística con su realidad.

Temas desglosados:

1.1 Introducción
1.2 Variables
1.3 Datos
1.4 Clasificación y construcción de bloques estadísticos
1.5 Organización de los datos por medio de tablas
1.6 Tipos de gráficas
1.7 Introducción a la sumatoria
1.8 Análisis de una variable: medidas de tendencia central y de localización
1.9 Medida de dispersión o variabilidad
1.10 Análisis descriptivo de datos bivariados: correlación.

1.1 Introducción

1.1.1 Orígenes de la Estadística

La estadística empieza con los grandes imperios de la antigüedad. Se han descubierto tablillas de arcilla de la civilización babilónica (5000a.C.), escritas en notación sexagesimal, que contienen listas de personas, bienes y cantidades de alimentos traídos como ofrendas.

Del Egipto de los faraones se tienen datos mucho más exactos: listas de familias, de soldados, de casas, de jefes de familia y de profesiones. Existen documentos del siglo VI a.C. que muestran que todo individuo tenía la obligación de declarar, cada año, bajo pena de muerte, su profesión y sus fuentes de ingreso.

Según la Biblia, Moisés recibió la orden de contar la comunidad de los hijos de Israel, tribu por tribu, familia por familia.

Entre los Chinos, la tradición es muy lejana, es conocido el censo de tierras y gentes ordenados por el emperador Yu, en el año 2238 a.C.

En la India se publicó, en siglo IV a.C., un verdadero tratado de ciencia política y economía: el Arthasátra (de sástra, ciencia y artha, ganancia) su autor, Kautilya, hace sugerencias a su rey para aumentar su poder y su riqueza y recomienda un gobierno centralizado que dirija y controle todo lo relacionado con el reino.

En Grecia fueron famosos los métodos usados por Jerjes para contar a sus soldados: los hacía pasar a un recinto donde cabían 10000 soldados muy apretados. También se sabe que en el año 310 a.C., un censo efectuado bajo el reinado de Demetrio dio una población de 120000 personas libres y 400000 esclavos.

Los romanos eran buenos administradores y hacían censos (cuyo nombre viene del latín) cada cinco años. Todo ciudadano debía declarar su fortuna, edad, nombre de la esposa, hijos, etc.; al final del censo de realizaba una ceremonia religiosa, el “lustrum conditum” (de donde viene nuestra palabra lustro para indicar un termino de 5 años).

En el continente americano, los incas desarrollaron un sistema de estadística muy perfeccionado: todos los datos relacionados con las actividades económicas y demográficas se conservan en los “quipus”, unas cuerdas gruesas de las cuales colgaban varios hilos de distintos colores según el objeto que representaban, amarillo para las piezas de oro, rojo para los soldados, blanco para las construcciones, etc. En los hilos se hacían nudos que representaban distintas cantidades; en la parte inferior de los nudos indicaban las unidades, más arriba decenas, centenas y así sucesivamente hasta las 10000 unidades. El uso de los quipus estaba reservado a los iniciados y todavía hoy no se han aclarado todas sus características.

Durante la Edad Media, en Europa, la iglesia empieza a mantener registros civiles, pero la estadística progresa realmente a partir del siglo XVI junto con las monarquías absolutas y su poderosa estructura administrativa centralizada. También, empiezan a aparecer las primeras obras de estadística que son más bien descriptivas; una de las más influyentes fue la de Jean Bodin (Francia, 1530-1596), que explica así la importancia de los censos: "…se conocerá el oficio de cada uno, se podrá expulsar a los vagabundos, los holgazanes, y los ladrones; en cuanto al registro de bienes, es indispensable para determinar el impuesto que todos tienen que pagar; se evitarán así disturbios, levantamientos populares y guerras civiles".

La estadística da un gran salto cualitativo a mediados del siglo XVII. Por un lado los datos estadísticos empiezan a ser utilizados por los bancos y por las nacientes compañías de seguros, por otro lado, se inventa en Inglaterra el concepto de "aritmética política" y se empiezan a "mate matizar" otras disciplinas que eran, hasta entonces, puramente descriptivas, tales como la demografía, la economía y las ciencias sociales, que a su vez se transforman al contacto con la matemática.

Las citas siguientes muestran el entusiasmo de algunos escritores de aquella época:

J. F. Melon: "Todo puede reducirse a números, hasta las cosas puramente morales".

Mirabeau: "La matemática es para la ciencia de la economía lo que los huesos para el cuerpo humano".

Lord Kelvin: "Si se puede medir y expresar con números las cosas de las que uno habla, se sabe algo de ellas; pero si no se pueden expresar con números, el conocimiento que de ellas se tiene es escaso e insuficiente".

Otro hecho importante que dio a la estadística su justificación teórica y sus métodos propios fue el progreso del cálculo de probabilidades, el que, junto con la estadística, permite estudiar los problemas donde intervienen fenómenos aleatorios.

Hoy, la estadística, junto con el cálculo de probabilidades, constituye una rama independiente de la matemática con aplicaciones en casi todas las actividades humanas: física, astronomía, biología, genética, medicina, agricultura, psicología y otras; en todas estas ciencias se hacen predicciones, encuestas, controles de calidad, etc. Es claro que la lista no es exhaustiva, también se aplican los métodos de la estadística al estudio de fenómenos “no medibles”, tales como la lingüística y la literatura.

La estadística está ligada con los métodos científicos, en la toma organización, recopilación, presentación y análisis de datos, tanto para la deducción de conclusiones como para tomar decisiones razonables de acuerdo con tales análisis.

En un sentido más estricto dicha expresión se utiliza para denotar los mismos términos, datos, números que se derivan de ellos, por ejemplo, promedios. Así se habla de estadística de empleo, de accidentes, estadística de mortandad, etc.

La estadística en la actualidad es una herramienta que cada día se vuelve más imprescindible; los periódicos, los noticieros, las revistas y prácticamente todos los medios de comunicación muestran diariamente datos o resultados obtenidos a través de ella.

1.1.2 Definición de estadística

Esta ciencia es una rama de la matemática que se encarga de recopilar, organizar, analizar, representar, en algunos casos de forma gráfica, la información para tratar de predecir un resultado, y llevar un control de datos numéricos. Ayuda en la presentación de manera óptima de una gran cantidad de datos numéricos.

Es la ciencia que utiliza los números para el estudio de las leyes que dependen del azar. Tratando de descubrir mediante el razonamiento inductivo la causa general a la que obedece el modelo particularmente analizado.

Es importante señalar que el término en cuestión se adoptó en el siglo XVIII por Godofredo Achenwall (1719-1772), profesor de la Universidad de Gotinga, quien lo extrajo del término italiano “statista” (estadística), el cual tiene, a su vez, una raíz remota en el término latino “status” que significa estado o situación; etimología que aumenta el valor intrínseco de la palabra, por cuanto la estadística revela el sentido “cuantitativo” de diversas situaciones.

Dado que el proceso de investigación y extensión o desarrollo de aplicaciones a diversos problemas de la existencia humana continuó hasta tener en la actualidad el concepto de estadística que formalmente se ha dividido, para su estudio, en dos grandes ramas: la descriptiva y la inferencial.

La estadística descriptiva consiste en todo lo relacionado con la presentación de datos, tanto en forma de tabla como de gráfica y su propósito principal es resumir o describir los mismos sin factores pertinentes adicionales, esto es, investiga, analiza o concluye aspectos y características relacionadas con una población a partir de la muestra que conforman las observaciones que se han analizado.

La estadística inferencial consiste en los procedimientos que se aplican para plantear inferencias (es decir, sacar conclusiones, hacer predicciones, tomar decisiones) con respecto a las características del conjunto de datos a partir de la información contenida en una muestra tomada de esa población.

El presente trabajo sólo estudia los elementos necesarios para hacer estadística descriptiva, así como para mostrar la importancia de llevar un buen análisis de la información.

La estadística descriptiva se encuentra presente en diversas actividades de la vida diaria, por ejemplo:

- En el proceso riguroso de selección que se llevó en el examen único de ingreso al bachillerato. Debido a que hay un estándar de selección dependiendo del número de aciertos obtenidos.
- En una encuesta realizada por parte de la dirección del plantel; para ver la necesidad de los alumnos y cubrirlos para mejorar la cantidad y calidad de los servicios.
- En las encuestas que realiza el gobierno por parte del INEGI (Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática), donde a través de censos de población y vivienda se tiene información sobre la población mexicana.
- En la evaluación educativa, la cual ha cobrado recientemente particular importancia. Una muestra de ello es la atención que suscita la difusión de los resultados de evaluaciones tanto nacionales como internacionales.
- Los datos que se presentan en los noticieros sobre los nacimientos, las muertes, los impuestos, los registros educativos, las exportaciones, las importaciones, el tipo de cambio de la moneda, etc.

Los métodos estadísticos en la ciencia requieren conocer conceptos y herramientas para su aplicación, por lo que es importante definir conceptos tales como son: población, muestra, unidad de observación, variables y sus clasificaciones, entre otros.

Población

La población es una colección de objetos, entes, sujetos, cosas de los cuales se van a obtener datos ya que poseen la característica o características en las que el investigador está interesado.

Muestra

Es un subconjunto, es decir, una parte de la población en estudio.

Unidad de Observación

Es el objeto que se observa para determinar las mediciones de las características que tienen un interés para el investigador.

1.2 Variables

Definición de variable

Son las cantidades literales, es decir, las letras que representan números, usados para indicar los valores posibles de una cantidad en una expresión matemática. Una variable es una función que asocia a cada elemento de la población la medición de una característica, particularmente de la característica que se desea observar.

En estadística es cualquier rasgo, atributo, dimensión o propiedad capaz de adoptar más de un valor o magnitud.

Siendo una variable la característica que se quiere medir, se requiere de indicadores para realizar su medición (ejemplo: accesibilidad).

Estudiaremos dos tipos de variables; variables cualitativas y variables cuantitativas.

En los estudios estadísticos que se realizan se busca investigar acerca de una o varias características de la población observada.

Para un correcto manejo de la información, estas características deben ser tomadas en cuenta de acuerdo a su tipo para poder hablar de la aplicación de alguna de las operaciones que más adelante se llevarán a cabo.

1.2.1 Clasificación de variables

De acuerdo a los valores que toma la variable y a la característica que se desea estudiar se tiene la siguiente clasificación (tabla 1.2.1.1):

- Variables
  - Categóricas (cualitativas)
    - Nominales
    - Ordinales
  - Numéricas (cuantitativas)
    - Discretas
    - Continuas

Tabla 1.2.1.1 clasificación de variables

1.2.1.1 Variables Categóricas

Las variables categóricas son aquellas cuyos valores no toman valores numéricos, describen cualidades y son del tipo categórico, es decir, que indican categorías o etiquetas alfanuméricas, a su vez se clasifican en:

a) *variables categóricas nominales*: son las variables que, además de sus posibles valores son mutuamente excluyentes entre si, no tienen alguna forma natural de ordenación, por ejemplo cuando sus posibles valores son si o no nunca sucede, la mitad de las veces, siempre, sucede, la mitad de las veces, siempre, sucede, etc. A esta variable le corresponde las escalas de medición ordinal.
b) *variables categóricas ordinales*: son las variables que tienen algún orden o jerarquía, por ejemplo cuando sus posibles valores son: nunca asiste, la mitad de las veces asiste, siempre asiste, etc. A este tipo de variable le corresponde las escalas de medición ordinal. Un ejemplo puede ser la asistencia de un alumno a la clase.

1.2.1.2 Variables Cuantitativas

Estas variables toman valores numéricos y se utilizan si el carácter que queremos valorar es susceptible a la medida. A estas le corresponden las escalas de medición de intervalo y a su vez se clasifican en:

a) *variables numéricas discretas*: son las variables que únicamente toman valores enteros numéricamente fijos, por ejemplo: las ocasiones que ocurre un suceso, la cantidad de pesos que se gastan en una semana, los barriles de petróleo producidos por un determinado país, los puntos con que cierra diariamente la bolsa de valores.
b) *variables numéricas continuas*: llamadas también variables de medición; son aquellas que toman cualquier valor numérico ya sea entero, fraccionario o incluso irracional. Este tipo de variable se obtiene de mediciones y está sujeto a la precisión de los instrumentos de la medición. Por ejemplo: el tiempo que un corredor tarda en correr una distancia (depende de la precisión del cronometro

usado), la estatura de los alumnos de una clase, la cantidad exacta que despacha una bomba de combustible (¿para qué? Para efectos de regulación y fiscalización y depende de la precisión del instrumento para medir volúmenes.)

1.2.2 Las escalas de medición

Son el conjunto de los posibles valores que una cierta variable puede tomar. Por esta razón los tipos de escalas de medición están íntimamente ligados con los tipos de variable. Su clasificación es:

1.2.2.1 Escala de medición nominal: es la que influye los valores de las variables nominales que no tienen un orden preestablecido y son valores mutuamente excluyentes: ¿Haces deporte? Si o no

1.2.2.2 Escala de medición ordinal: es la que incluye los valores de las variables ordinales que pueden ser ordenadas, aunque la distancia entre cada uno de los valores es muy difícil de determinar ya que dependen de la perspectiva del observador.

1.2.2.3 Escala de medición intervalo: es a la que corresponden los valores numéricos, en esta escala de medición se encuentran un orden establecido y la distancia de cada uno de los valores puede ser determinada con exactitud. Es posible observar que cada uno de dichos intervalos mide exactamente lo mismo.

Ejercicio Propuesto:

A modo de enterarse un poco más acerca de sus alumnos y con el fin de saber un poco más de ellos, realice una encuesta en grupo a modo de crear una tabla que contenga las siguientes variables

Variable1 nombre - Variable categórica ordinal
Variable2 edad - Variable numérica discreta
Variable3 estatura - Variable numérica continua
Variable4 peso - Variable numérica continua
Variable5 calzado - Variable numérica discreta

Variable6 familia - Variable numérica discreta

Variable 7 deporte - Variable numérica nominal

Nombre	estatura	peso	calzado	Integrantes familia	deporte
Alejandro	174cm	75kg	28	3	sí
Aurelio	175cm	70kg	27	5	no
Oscar	172cm	80kg	26	4	sí

Ordenar de manera ascendente la variable de familia y peso en forma descendente.

Por lo general la información puede surgir de plantearse un problema de investigación, es por eso que lo que se explicará a continuación es una serie de pasos de cómo realizarla.

1.2.3 Etapas de un análisis estadístico

1. Planteamiento del problema
2. Determinación de los objetivos
3. Planteamiento de las hipótesis
4. Definición de la unidad de información
5. Definición de las unidades de medida
6. Determinación de la población
7. Determinación de la muestra
8. Recolección de la información
9. Revisión de la información
10. Tabulaciones
11. Análisis de la información
12. Publicación del reporte

1. *Planteamiento del problema*

Al realizar una investigación deberá tenerse muy claro qué es lo que se va a investigar y las causas que responderán a esta búsqueda. Habrá que establecer explícitamente lo que se desea resolver, para esto deberán tener presente ciertas actividades necesarias como: revisar el material bibliográfico que exista sobre el tema, la accesibilidad del mismo, el contacto con personas informadas o expertas sobre el tema o problema a analizar, con los cuales ubicar ciertas líneas o condiciones de la investigación, consideraciones de colegas de la misma u otra institución, búsqueda en Internet u otro medio equivalente que provea más información; de tal forma que con todos estos puntos se pueda establecer una ubicación histórica y teórica del problema.

2. *Determinación de los objetivos*

Hay que fijar o definir los objetivos, es decir, especificar la profundidad que se quiere lograr en el tema. Lo anterior se debe hacer de la manera más clara y precisa posible, para evitar confusiones y divagaciones del tema. Debe también establecerse la temporalidad de ellos, es decir, deben quedar claro los objetivos de corto y largo alcance, además hay que especificar los recursos con que se cuente, la región o zona donde se piensa implantar, entre otras cosas.

3. *Planteamiento de las hipótesis*

Hay que entender que una hipótesis es una explicación provisional o conjetura acerca de los hechos y que depende del conocimiento que el investigador tenga sobre el problema de estudio. La hipótesis anterior deberá “traducirse” en otra hipótesis, excepto que ahora será estadística, la cuál deberá ser posible de probar para su aceptación o rechazo, representándose a través de medidas que sean susceptibles de obtenerse.

4. *Definición de la unidad de información*

Ésta se entiende como la identificación o especificación de todos y cada uno de los elementos que componen la población a estudiar, puede estar constituida por uno o varios individuos, puede ser real o utópica, finita o infinita, entre otras cosas. El criterio de su determinación debe ser único y manejado de igual a igual en toda la investigación.

5. *Definición de las unidades de medida*

Deben ser previamente definidas y unificadas, ya que serán el cómo se medirán las características a observar, adicionalmente se deberá decidir con que se medirá.

6. *Determinación de la población*

La población es definida como un conjunto de individuos o de objetos que poseen una o varias características del problema de estudio. Cabe aclarar que no tiene porque referirse a seres humanos necesariamente, ya que puede considerar notas de archivos, fichas, registros, actas, etc.

7. *Determinación de la muestra*

Es un subconjunto de la población de estudio al que se le observará, preguntará o medirá las características de interés de la misma. Éste sería el fin deseable, pero para inferir sobre toda la población se requiere de técnicas específicas que lo permitan, usualmente se obtienen muestras que únicamente dan información sobre este subconjunto y no es apropiado extender las conclusiones al resto de la población.

8. *Recolección de la información*

Este punto se refiere a la forma en que se recabará la información a estudiar, esto puede hacerse a través de cuestionarios, de cédulas de entrevistas, de recopilar información de anuarios estadísticos, etc. No es tarea fácil y si no se desarrolla correctamente la investigación podría fracasar, ya que es esta la que proporciona los datos del problema.

9. *Revisión de la información*

Después de que se ha reunido toda la información del problema es necesario depurarla para su análisis. Con esto se refiere uno a “limpiar” la información, es decir, que todos los registros contengan los mismos puntos investigados, que efectivamente se hayan medido con el mismo instrumento y unidad de medida, establecer si hubo “blancos o carencia de información” en algunos elementos muestrales o bien hubo repetición de otros. Este punto se considera importante porque de información incorrecta lo único que se puede obtener son conclusiones erróneas.

10. Tabulaciones

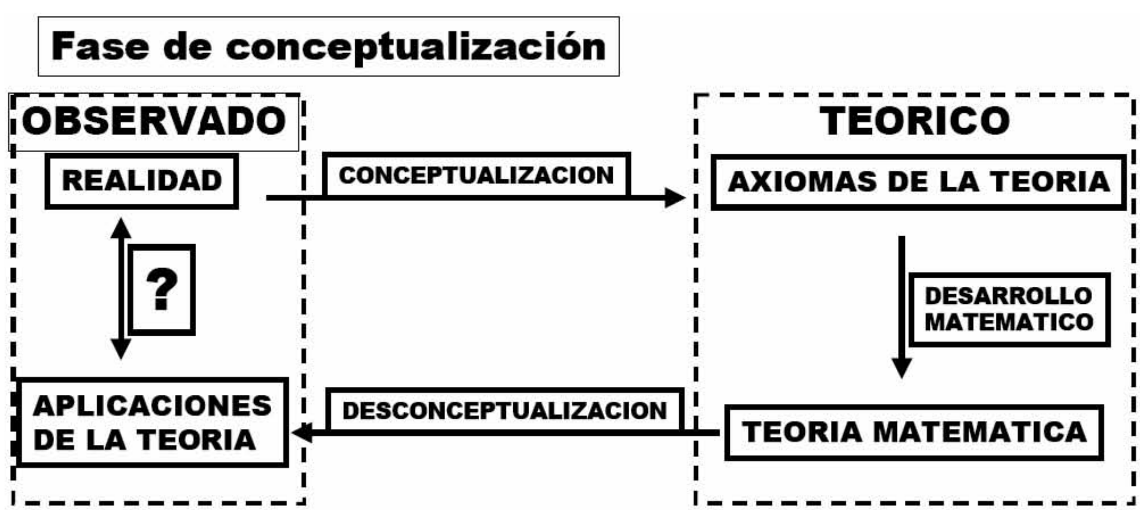
Una tabulación es una tabla que resume la información de una o más variables del estudio; debe ofrecer al lector la información de manera clara y entendible. Es recomendable definir de antemano los posibles cuadros de resultados.

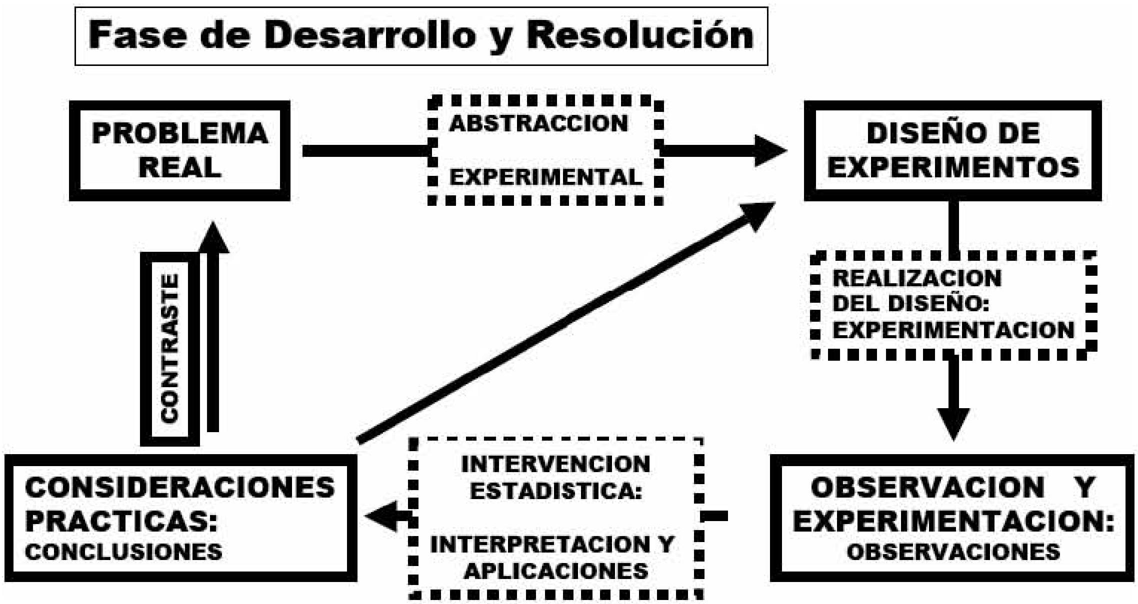
11. Análisis de la información

Son los métodos que permiten resumir y presentar los datos de manera clara y concisa. En el caso que se está por desarrollar a lo largo de este trabajo, se trata de medidas de posición, de tendencia y de dispersión, que permiten considerar el comportamiento básico del fenómeno en estudio.

12. Publicación del reporte

Presentar por escrito el contenido del análisis de la información a través de los tabulados, gráficas y medidas básicas.





Estas etapas no constituyen una propuesta que deba seguirse invariablemente, lo cual implica que puede ser modificada según las necesidades de la investigación o del trabajo que uno quiera desarrollar.

Es importante señalar en este apartado que la información a estudiar aplicando este método forzosamente proviene de una población y lo que usualmente se observa es una parte de ella.

1.2.4 Instrumentos de Medición

Los instrumentos de medición son las herramientas que se utilizan para llevar a cabo las observaciones. De acuerdo a lo que se desea estudiar, la característica a observar, sus propiedades y factores relacionados con el ambiente, los recursos humanos y económicos entre otros.

Existen diversas formas de recolectar datos entre las cuales podemos citar básicamente tres: la observación, la encuesta y la entrevista.

1.2.5 Observaciones

Es la técnica de estudio por excelencia y se utiliza en todas las ramas de la ciencia. Su uso está guiado por alguna teoría y ésta determina los aspectos que se van a observar.

Sugerencias al realizar observaciones

1.- Con respecto a las condiciones previas a la observación

El observador debe estar familiarizado con el medio, se deben realizar ensayos de la observación, previos a la observación definitiva.

2.- Con respecto al procedimiento en la observación

Las notas deben ser registradas lo más rápido posible y deberán incluir las acciones realizadas por el observador.

3.- Con respecto al contenido de las notas

Deberán contener todos los datos que permitan identificar el día, lugar y la hora de la observación, así como las circunstancias, descripción de los hechos, los actores y todo lo que estuvo involucrado.

4.- Con respecto a la ordenación de las notas

Las notas deberán ser revisadas y corregidas a la brevedad posible, asimismo serán clasificadas y ordenadas para permitir un manejo más ágil.

1.2.6 Encuesta

Esta herramienta es la más utilizada en la investigación de las Ciencias Sociales. A su vez, esta herramienta utiliza los cuestionarios como medio principal para allegarse de la información. De esta manera, las encuestas pueden realizarse para que el sujeto encuestado plasme por sí mismo las respuestas en el papel.

Es muy importante que el investigador sólo proporcioné la información indispensable, la mínima para que sean comprendidas las preguntas. Más información o información innecesaria puede derivar en respuestas no veraces. De igual manera, al diseñar la encuesta y elaborar el cuestionario hay que tomar en cuenta los recursos humanos y/o materiales de los que se disponen, tanto para la recopilación, como para la lectura de la información, para así lograr un diseño funcionalmente eficaz.

1.2.6.1 Razones para usar una encuesta

Prácticamente todo fenómeno social puede ser estudiado a través de las encuestas, podemos considerar las siguientes cuatro razones para sustentar esto:

1. Las encuestas son una de las escasas técnicas de que se dispone para el estudio de las actitudes, valores, creencias, motivos entre otros.
2. Las técnicas de encuestas se adaptan a todo tipo de información y a cualquier población.
3. Las encuestas permiten recuperar información sobre sucesos acontecidos a los entrevistados.
4. Las encuestas permiten estandarizar los datos para un análisis posterior, obteniendo gran cantidad de datos a un proceso bajo y en un periodo de tiempo corto.

1.2.6.2 Tipos de Encuesta

Las encuestas se pueden clasificar atendiendo al ámbito que abarcan, a la forma de obtener los datos, al contenido, de la siguiente manera:

1.2.6.2.1 Encuestas exhaustivas y parciales

Las encuestas exhaustivas son las que abarcan todas las unidades estadísticas que componen el universo, población o conjunto estudiado. Cuando una encuesta no es exhaustiva, se denomina parcial.

1.2.6.2.2 Encuestas directas e indirectas

Se denomina encuesta directa cuando la unidad estadística se observa a través de la investigación propuesta registrándose en el cuestionario. Será encesta indirecta cuando los datos obtenidos no corresponden al objetivo principal de la encuesta, pretendiendo averiguar algo distinto, o bien son deducidos de los resultados anteriores de las investigaciones estadísticas.

1.2.6.2.3 Encuestas sobre hechos y encuestas de opinión.

Las encuestas de opinión tienen por objetivo averiguar lo que el público en general piensa acerca de una determinada materia o lo que considera debe hacerse en una circunstancia concreta. Se realizan con un procedimiento de muestreo y son aplicadas a una parte de la población, ya que una de sus ventajas es la enorme rapidez con que se obtienen resultados.

No obstante, las encuestas de opinión no indican necesariamente lo que el público piensa del tema, sino lo que pensaría si le planteásemos una pregunta a ese respecto, ya que hay personas que no tienen una opinión formada sobre lo que se les pregunta y contestan con lo que dicen los periódicos y las revistas.

A veces las personas encuestadas tienen más de una respuesta a una misma pregunta dependiendo del marco en que se le haga la encuesta y por consecuencia las respuestas que se dan no tienen porque ser sinceras.

Las encuestas sobre hechos se realizan sobre acontecimientos ya ocurridos, hechos materiales.

Los cuestionarios pueden ser:

Cuestionario Individual

Es aquel donde el encuestado contesta de forma individual por escrito y sin que intervenga para nada el encuestador.

Cuestionario de lista

Dicho cuestionario es preguntado al encuestado en una entrevista por uno de los especialistas de la investigación.

Como los cuestionarios están formados por preguntas, consideremos las características que deben reunir, pues deben ser excluyentes y exhaustivas, lo que se refiere a que una pregunta no produzca dos respuestas, y simultáneamente, tenga respuesta.

Por otro lado una manera de clasificar a las preguntas es por la forma de sus respuestas:

Preguntas cerradas

Consisten en proporcionar al sujeto observado una serie de opciones para que escoja una como respuesta. Tienen la ventaja de que pueden ser procesadas más fácilmente y su codificación se facilita; pero también tienen la desventaja de que si están mal diseñadas las opciones, el sujeto encuestado no encontrará la opción que él desearía y la información se viciaría. Una forma de evitar esto es realizar primero un estudio piloto y así obtener las posibles opciones para las respuestas de una manera más confiable. También se consideran cerradas las preguntas que contienen una lista de preferencias u ordenación de opciones, que consisten en proporcionar una lista de opciones al encuestado y éste las ordenará de acuerdo a sus intereses, gustos, etc.

Preguntas abiertas

Consisten en dejar totalmente libre al sujeto observado para expresarse, según convenga. Tienen la ventaja de proporcionar una mayor riqueza en las respuestas; sin embargo, puede llegar a complicar el proceso de tratamiento y codificación de la información. Una posible manera de manipular las preguntas abiertas es llevando a cabo un proceso de categorización, el cual consiste en estudiar el total de respuesta abiertas obtenidas y clasificarlas en categorías de tal forma que respuestas semejantes entre sí queden en la misma categoría.

Es importante mencionar que el objetivo de la investigación es el que determina el tipo de preguntas a utilizar.

Según Lilián S. Cadoche, Georgina Stegmayer, Juan Pablo Burioni y Marcelo De Bernardez, en su Material del Seminario de Encuestas en Educación impartido en 1998, las preguntas pueden ser clasificadas de acuerdo a su contenido como:

Preguntas identificación

Sirven para recopilar, edad, sexo, profesión, nacionalidad, etc.

Preguntas hecho

Referidas a acontecimientos concretos. Por ejemplo: ¿terminó la educación básica?

Preguntas de acción

Referidas a actividades de los encuestados. Por ejemplo: ¿ha tomado algún curso de capacitación?

Preguntas información

Sirven para conocer los conocimientos del encuestado. Por ejemplo: ¿sabe qué es un hipertexto?

Preguntas intención

Sirven para conocer la intención del encuestado. Por ejemplo: ¿utilizará algún programa informático para su próxima clase?

Preguntas opinión

Son útiles para conocer el sentir o acuerdo del encuestado. Por ejemplo: ¿qué carrera cursarás después del bachillerato?

Otra clasificación propuesta es según la función que las preguntas desarrollen dentro del cuestionario

Preguntas filtro

Son aquéllas que se realizan previamente a otras para eliminar a los que no les afecte. Por ejemplo: ¿tiene usted coche? ¿Piensa comprarse uno?

Preguntas de trampa o de control

Son las que se utilizan para descubrir la intención con que se responde. Para ello se incluyen preguntas en diversos puntos del cuestionario que parecen independientes entre sí, pero en realidad buscan determinar la intencionalidad del encuestado al forzarlo a que las conteste coherentemente (ambas y por separado) en el caso de que sea honesto, pues de lo contrario caería en contradicciones.

Preguntas de introducción o rompe hielo

Son utilizadas para comenzar el cuestionario o para enlazar un tema con otro.

Preguntas muelle, colchón o amortiguadoras

Son preguntas sobre temas peligrosos o inconvenientes, formuladas suavemente.

Preguntas en batería

Es el conjunto de preguntas encadenadas unas con otras complementándose.

Preguntas embudo

Son las que empiezan por cuestiones generales hasta llegar a los puntos esenciales. (Generalización a particularización).

Para la realización de un cuestionario eficaz y útil, *Cadoche y su equipo* (mencionado anteriormente) proponen 17 reglas fundamentales para su elaboración:

1) Las preguntas deben ser pocas (no más de treinta).
2) Las preguntas deben ser preferentemente cerradas y numéricas.
3) Redactar las preguntas con lenguaje sencillo.
4) Formular las preguntas de forma concreta y precisa.
5) Evitar utilizar palabras abstractas y ambiguas.
6) Formular las preguntas de forma neutral.
7) En las preguntas abiertas no dar ninguna opción alternativa.
8) No hacer preguntas que obliguen a esfuerzos de memoria.
9) No hacer preguntas que obliguen a consultar archivos.
10) No hacer preguntas que obliguen a cálculos numéricos complicados.
11) No hacer preguntas indiscretas.
12) Redactar las preguntas de forma personal y directa.
13) Redactar las preguntas para que se contesten de forma directa e inequívoca.
14) Redactar preguntas que no levanten prejuicios en los encuestados.
15) Redactar las preguntas limitadas a una sola idea o referencia
16) Evitar preguntas condicionales que conlleven una carga emocional grande.
17) Evitar estimular una respuesta condicionada. Es el caso de preguntas que presentan varias respuestas alternativas y una de ellas va unida a un objetivo tan altruista que difícilmente puede uno negarse.

Así mismo, hay que considerar que no todas las preguntas, o todas las formulaciones posibles, son aquellas que se pueden utilizar. Algunos ejemplos de las preguntas que no deben hacerse son:

Preguntas de intelectuales

Por ejemplo: ¿Qué aspectos particulares del actual debate positivista-interpretativo le gustaría ver reflejado en un curso de psicología del desarrollo dirigido a una audiencia de maestros?

Preguntas complejas

Por ejemplo: ¿Cuándo prepara su clase prefiere consultar un libro determinado incorporando la terminología que éste propone o escoge varios libros de los que extrae un poco de cada uno pero que explica con sus propias palabras para hacerlos más accesibles a sus alumnos y no confundirlos?

Preguntas o instrucciones irritantes

Por ejemplo: ¿Ha asistido alguna vez en tiempo de servicio a un curso de cualquier clase durante su carrera entera de maestro? Si tiene mas de 40 años y nunca ha asistido a un curso, ponga una marca en la casilla rotulada NUNCA y otra en la casilla rotulada VIEJO.

Preguntas que emplean negaciones

Por ejemplo: ¿Cuál es su sincera opinión sobre que ningún maestro debería dejar de realizar cursos de perfeccionamiento durante su ejercicio profesional?

Preguntas demasiado abiertas

Por ejemplo: Use las páginas 5, 6 y 7 respectivamente para responder cada una de las cuestiones acerca de sus actitudes respecto a los cursos de actualización en general y a sus opiniones acerca de su valor en la vida profesional del maestro.

1.2.7 Entrevista

Es muy utilizada en investigación social, y sus características son similares al cuestionario, siendo la principal diferencia que el encuestador u observador es quien anota las respuestas a las preguntas.

La utilización de este instrumento conlleva una mayor habilidad por parte del encuestador en conducir el tema de la entrevista, debido a que las respuestas son por lo general abiertas y permiten implementar nuevas preguntas no contempladas por el encuestador inicialmente. Esto proporciona la ventaja de explotar temas no contemplados o ahondar en el tema.

Una de las ramas de la estadística más accesible a la mayoría de la población es la descriptiva. Esta parte se dedica única y exclusivamente al ordenamiento y tratamiento mecánico de la información para su presentación por medio de tablas y de representaciones gráficas, así como la obtención de algunos parámetros útiles para la explicación de la información.

Podemos decir que a grandes rasgos el proceso para utilizar y escoger alguno de estos instrumentos de medición es el siguiente:

Definir el objeto de la encuesta: formulando con precisión los objetivos a conseguir, desmenuzando el problema a investigar, eliminando lo superfluo y centrando el contenido de la encuesta, delimitando si es posible las variables que intervienen y diseñando la muestra. Se incluye la forma de presentación de resultados así como los costos de la investigación.

La formulación del cuestionario: el cual se utilizará; los puntos a observar y el cuestionario son fundamentales en el desarrollo de una investigación debiendo ser realizado meticulosamente y comprobando antes de pasarlo a la muestra representativa de la población.

El trabajo de campo consiste en la obtención de los datos: para ello será preciso seleccionar a los entrevistadores, formarlos a distribuirles el trabajo para que se realiza de forma homogénea.

Obtener los resultados, es decir: procesar, codificar y tabular los datos obtenidos para que luego sean presentados en el informe y que sirvan para posteriores análisis.

Ejemplos Propuestos:

Se desea construir un distribuidor vial para evitar la congestión de tránsito, se hace un plebiscito dentro de los ciudadanos para saber si están a favor o en contra de dicho proyecto. Obviamente hay algunos que les beneficiará para no demorar al llegar a su trabajo y otros que no están a favor pues tendrán que desalojar su casa porque está próxima al lugar de construcción

Población: Todos los ciudadanos pertenecientes al poblado en cuestión.

Muestra: Los ciudadanos que participan en la encuesta

Se desea saber cuáles materias son las de más alto índice de reprobación dentro de la Escuela Nacional Preparatoria. Para ello se hacen encuestas a los alumnos del plantel 5 “José Vasconcelos”.

Población: Todos los alumnos pertenecientes a la ENP.

Muestra: Los alumnos que asisten a la ENP Plantel 5 “José Vasconcelos”.

A un alumno le interesa saber sobre el artista favorito de una niña que le gusta, pero a la cual no le habla, para ello le pregunta a todas sus amigas sobre sus artistas musicales preferidos para poder tener idea de los más escuchados por la misma.

Población: Todos los artistas musicales.

Muestra: La relación de los artistas que escuchan las amigas.

1.3 DATOS

El material esencial para hacer Estadística es la “información cruda”, entendiéndose por esto al conjunto de datos de una población o de un fenómeno o de una secuencia de eventos entre otras cosas; todo lo cual, a su vez, se expresará en números obtenidos a partir de tratarlos, ordenarlos y analizarlos.

1.3.1 Definición de dato

Un dato es la unidad o cantidad mínima de información no elaborada, sin sentido en sí misma, pero que convenientemente tratada se puede utilizar en la realización de cálculos o toma de decisiones. En otras palabras son los correlatos directos de hechos o fenómenos cuya existencia material los hace directamente perceptibles e interpretables, pero no tienen predeterminado un significado y mucho menos un sentido (personal, grupal, organizacional y social), pueden dar lugar a la información una vez procesados, ya que se basan en la observación y experimentación. Es de empleo muy común en el ámbito informático o matemático.

Información en bruto que generalmente se expresa en forma numérica y se utiliza para el procesamiento posterior empleando métodos matemáticos; así como la forma convencional que forma dicha información cuando se trata con la computadora. Todo antecedente necesario para el conocimiento exacto de las cosas o para deducir consecuencias legitimas de un hecho o los principios que le sirven de base de razonamiento o punto de partida a una ciencia o investigación.

Algunos ejemplos de datos numéricos son: fecha de nacimiento, calificaciones parciales, contenido de una botella, anotaciones de un jugador de soccer en cada partido, cds de música que cada alumno tiene, etc.

La estadística descriptiva es la parte que conocemos desde los cursos de educación primaria que se enseña en los siguientes niveles y que por lo general no pasa a ser un análisis más profundo de la información. Es un primer acercamiento a la información y, por esa misma razón, es la manera de presentar la información ante cualquier lector, ya sea especialista o no. Sin embargo, lo anterior no quiere decir que carezca de metodología o algo similar, si no que al contrario, por ser un medio accesible a la mayoría de la población humana, resulta de suma importancia considerar para así evitar mal entendidos, o errores.

Ejercicio Propuesto

Existen diferentes temas de interés para los alumnos por tal motivo para seguir conociendo mas sobre sus gustos, pida que realicen una encuesta de 10 preguntas (de las vistas en clase) sobre un tema del cual estén interesados.

1.4 Clasificación y construcción de bloques estadísticos

Como hemos visto existen diferentes categorías de datos de tal manera que necesitamos ordenarlos y agruparlos dado las condiciones que caracterizan la cantidad y la calidad de ellos. Estos datos los podemos clasificar en bloques discretos / continuos, y empleando las escalas de medición usadas en la Estadística, a saber: nominal, ordinal y de intervalos.

Una vez recopilados y organizados los datos, el principal interés consiste en observar cuál es su comportamiento, a continuación veremos algunas tablas y bloques estadísticos.

1.4.1 Representación de tronco y hoja

Un método para iniciar el análisis exploratorio de los datos, previo al uso de los métodos estadísticos tradicionales, y que además proporciona información rápida y visual, es la representación: tronco y hoja. Esta representación se basa en la ordenación de los datos a manera de grafico, pero sin llegar a ello, utilizando las decenas y las unidades. Puede usarse tanto con datos categóricos como con datos numéricos. Es de uno de los bloques estadísticos mas fáciles de usar y que además de ordenar datos los procesa en información (tabla 1.4.1.1).

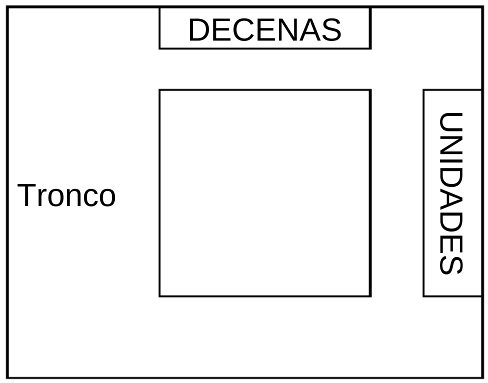


Tabla 1.4.1.1 representación tronco y hoja

Ejemplo Propuesto

Utilizando la tabla de variables del grupo realizar una representación de tronco y hoja para unas de las variables con que se cuenta (peso, estatura, edad).

Datos de la variable numérica “peso”.

78, 93, 61, 100, 70, 83, 88, 74, 97, 72, 66, 73, 76, 81, 83, 64, 91, 70, 77, 76

	DECENAS	UNIDADES
	6	1 4 6
	7	0 2 3 4 7 6 7 8
Tronco	8	1 3 6 8
	9	1 3 7
	10	0

Ejemplo Propuesto

Datos de la variable categórica “película de estreno”.

Un grupo de alumnos es ganador de un pase doble para asistir a la Premier de una película, al final de la proyección se les pide su opinión para la crítica que será publicada al día siguiente en las mamparas de la sala de cine.

Se muestran a continuación las opiniones proporcionadas: 2 opinan que es muy buena, 37 piensan que es buena, 15 están indecisos, a 16 alumnos les pareció mala, 1 dijo que es muy mala.

Como vemos es difícil interpretar la información obtenida, para poder tener una mejor idea sobre la calidad de la proyección se ordenan los datos en un gráfico de tronco y hoja como el siguiente:

	DECENAS	UNIDADES
	muy buena	II
	buena	IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII II
Tronco	indecisos	IIIII IIIII IIIII
	mala	IIIII IIIII IIIII I
	muy mala	I

En realidad una representación de troncos y hojas presenta la misma información que la lista original de datos pero de una manera mucho más compacta y manejable.

Sin embargo la información más compleja resulta un poco más difícil de manejar, por lo que en ocasiones conviene redondear sus datos. Ignorar sus partes principales o utilizar las centenas u otras posiciones de los números para los troncos. Si aún así resulta difícil interpretar la información es necesario utilizar gráficos circulares, diagramas de barras, diagramas de líneas, diagramas de puntos, etc.

1.4.2 Gráfico circular o de pastel

Esta gráfica proporciona el porcentaje a través de sectores en un círculo. Recordando que a todo el círculo le corresponden 360^0, de tal modo que la apertura del sector se hará en base a una regla de 3 (figura 1.4.2.1).

Figura 1.4.2.1 Gráfico circular

Ejemplo Propuesto 1.

Si la señora María tiene una tabla de la PROFECO como la que se muestra a continuación, ¿cómo puede construir una gráfica de barras, para ver cuál es la diferencia entre los precios de las licuadoras?

Marca	Precio
Philips	$229
Man lpv9014	$310
Man lpv9002	$310
Moulinex	$550
Black & Decker	$360
Taurus lp7	$199
Taurus lp3n	$169

Las gráficas de barras se construyen con dos ejes: uno horizontal, al que se le conoce como “x”, y uno vertical, al que se le conoce como “y”, véase el siguiente ejemplo (figura 1.4.2.2).

Figura 1.4.2.2 Eje de coordenadas

En el eje de las “x” se señalan los objetos o cosas a describir, en el eje de las “y” se marca una escala en la que se puedan observar los datos de los objetos o cosas descritas.

Las cosas a describir, en este caso, son las diferentes licuadoras, por lo que se ubican en el eje de las “x”. Como el precio más alto es de 550 pesos, la escala del eje de las “y” deberá, por lo menos, contener esa cantidad.

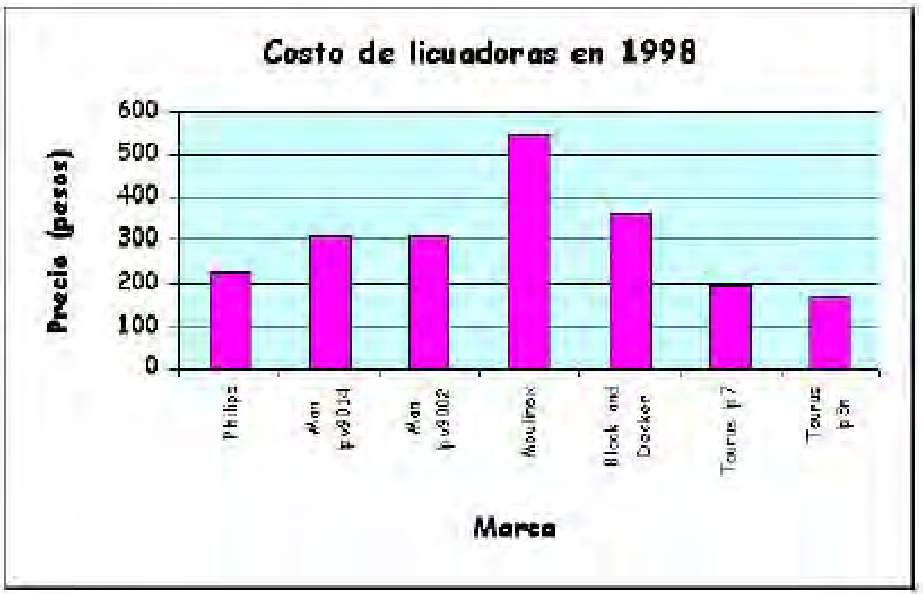
Esto quiere decir que las marcas son las “x”, y las “y” son los precios.

X	Y
Marca	Precio
Philips	$229
Man Ipv9014	$310
Man Ipv9002	$310
Moulinex	$550
Black & Decker	$360
Taurus Ip7	$199
Taurus Ip3n	$169

Con la tabla anterior se puede construir una gráfica de acuerdo a los siguientes pasos.

I. Ordene los datos en una tabla en la que en su primera columna claramente se establezcan los conceptos, nombres, cosas o artículos que va a describir, y en la segunda, la información que los describe.

II. Dibuje el eje horizontal o de las “x”, y el vertical o de las “y”.
III. En el eje de las “x” coloque los nombres de los artículos, cosas o personas que desea describir.
IV. En el eje de las “y” coloque la escala que incluya el dato más grande de los que va a describir; en este caso es de 550.
V. Arriba de cada uno de los nombres de lo que va a describir dibuje una barra del tamaño de los datos.



Con la gráfica que construyó la señora María, de manera sencilla se puede distinguir que la licuadora más cara es la Moulinex y la más barata es la Taurus lp3n.

Recuerde que la clave para construir una gráfica siempre será conocer lo que se quiere describir y tener los datos que lo describen.

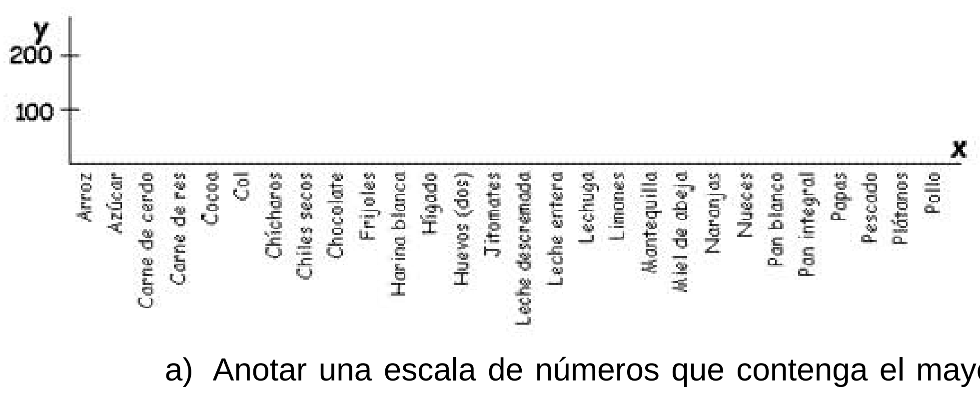
Ejemplo Propuesto 2.

En el Instituto Nacional de Nutrición a la señora Elena le dieron una tabla del poder calórico de algunos alimentos, como la que se muestra a continuación.

Alimento	Calorías	Alimento	Calorías
Arroz	350	Leche descremada	38
Azúcar	400	Leche entera	65
Carne de cerdo	150	Lechuga	18
Carne de res	140	Limones	44
Cocoa	497	Mantequilla	733
Col	41	Miel de abeja	63
Chícharos	91	Naranjas	51
Chiles secos	312	Nueces	464
Chocolate	552	Pan blanco	261
Frijoles	345	Pan integral	245
Harina blanca	353	Papas	85
Hígado	128	Pescado	122
Huevos (dos)	148	Plátanos	99
Jitomates	23	Pollo	143

¿Cómo puede la señora Elena construir una gráfica con la información que obtuvo?

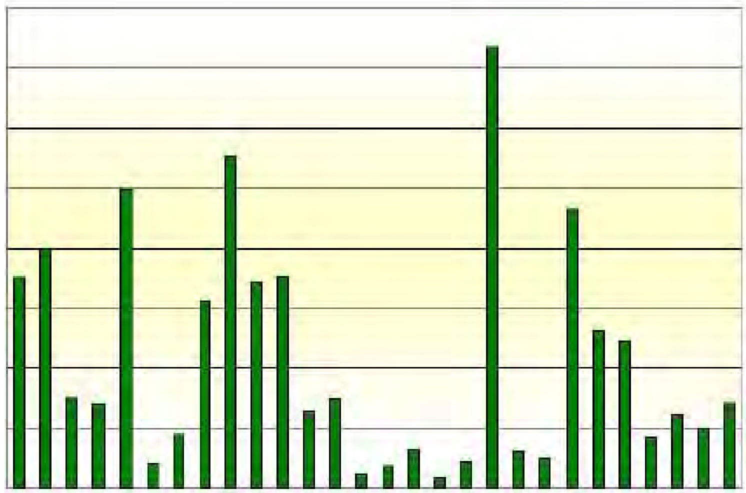
a) Definir lo que quiere describir y los datos que lo describen.
b) Construir los ejes horizontal (x) y vertical (y).
c) Escribir el nombre de lo que se representa en el eje de las "x" (horizontal), en este caso es el nombre de los alimentos.



a) Anotar una escala de números que contenga el mayor dato de calorías de los alimentos, en este caso es 733 de la mantequilla.

b) Sobre cada nombre de alimento dibuja una barra del tamaño que le corresponde.

Con lo anterior, le queda una gráfica como la siguiente: VALOR CALÓRICO DE 100 g DE ALIMENTOS FRESCOS



Ejercicio Propuesto.

La señora Guadalupe es muy ordenada y lleva la cuenta de cuánto gasta cada mes; con sus datos hace una tabla como la que se muestra a continuación.

Mes	Gastos
Enero	$4,560
Febrero	$4,900
Marzo	$4,800
Abril	$4,750
Mayo	$5,050
Junio	$4,900
Julio	$5,250
Agosto	$4,950
Septiembre	$5,100
Octubre	$5,000
Noviembre	$4,900
Diciembre	$6,100

¿Cómo podría representar gráficamente estos datos por medio de una gráfica de barras la señora Guadalupe?

Ejercicio Propuesto.

Marcela va a comprar pollo entero; para hacer su mejor compra compara los precios, y hace una tabla como la que se muestra a continuación.

Tienda	Precio
Gigante	\$15,50
Aurrera	\$16,50
Walmart	\$17,80
El surtidor	\$17,10

¿Cómo puede construir una gráfica de barras la señora Marcela?

1.5 Organización de los datos por medio de tablas

Frecuencias

1.5.1 Frecuencia Absoluta (F.A. o n_i)

Es el número de veces que se repite un valor de una variable. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número de individuos del grupo:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = N$$

1.5.2 Frecuencia Relativa (F.R. o f_i)

Es la razón entre la frecuencia absoluta y el número de elementos del conjunto.

$$f_{i=\frac{n_i}{N}}$$

Notas:

- $0 \leq f_i \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

1.5.3 Frecuencia Absoluta Acumulada (F.A.A. o N_i)

Es la suma de las frecuencias absolutas hasta un valor determinado (i).

1.5.4 Frecuencia Relativa Acumulada (F.R.A. o F_i)

Es la suma de las frecuencias relativas hasta un determinado valor (i).

1.5.5 Distribución de frecuencias

Es el conjunto de todos los valores que ha tomado la variable estadística acompañados de sus correspondientes frecuencias.

Según cómo estén agrupados los datos tendremos dos tipos de distribuciones:

1.5.5.1 Distribuciones no agrupadas

Una vez recopilada la información, esta se dispone asociando a cada valor de la variable sus correspondientes frecuencias. Se representan en una tabla como la que sigue (tabla 1.5.5.1.1):

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
..	..	..	..	..
x_n	n_n	f_n	N_n	F_n
	N	1		

Tabla 1.5.5.1.1 representación de datos no agrupados

1.5.5.2 Distribuciones agrupadas

Los datos se agrupan en intervalos cuando el número de valores que ha tomado la variable estadística es lo suficientemente grande.

Se agrupan para optimizar el tratamiento de la información. El número de intervalos está generalmente, entre 4 y 15, no siendo nunca superior al 10% de los datos.

Una regla muy utilizada para elegir el número de intervalos es tomar el entero más próximo a $\sqrt{n}$, siendo *n* el número de datos.

Se representa en una tabla como la siguiente (tabla 1.5.5.2.1):

$L_i \rightarrow L_{i+1}$	n_i	f_i	N_i	F_i
$L_0 \rightarrow L_1$	n_1	f_1	N_1	F_1
$L_1 \rightarrow L_2$	n_2	f_2	N_2	F_2
..	..	..	..	..
$L_{n-1} \rightarrow L_n$	n_n	f_n	N_n	F_n
			N	1

Tabla 1.5.5.2.1 representación de datos agrupados

Nota: Los intervalos son cerrados por la derecha y abiertos por la izquierda, es decir, $[*,*)$.

Ejemplo Propuesto:

a) La siguiente tabla muestra a la variable x_i como el número de materias reprobadas por los alumnos y n_i la cantidad de alumnos que deben ese número de materias:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	1	1/36	1	1/36
1	19	19/36	20	20/36
2	11	11/36	31	31/36
3	2	2/36	33	33/36
4	3	3/36	36	1

1.5.6 Amplitud del Intervalo (c_i)

Es la diferencia entre el valor límite superior y límite inferior de un intervalo.

$$c_i = L_{i+1} - L_i$$

1.5.6.1 Tipos de intervalos

- Uniformes

  Tienen el mismo rango de clases.
- Desiguales

  No tienen el mismo rango de clases.
- Abiertos

  El límite inferior del intervalo es igual a α y el límite superior del intervalo es igual a α.

1.5.7 Marca clase (x_i)

Hace referencia al punto medio del intervalo. Se utiliza para calcular la media de la distribución.

$$x_i = \frac{L_{i+1} + L_i}{2}$$

Integrantes de la familia	Frecuencia absoluta	Frecuencia Absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia Relativa acumulada
2	1	1	1/33	1/33
3	2	3	2/33	3/33
4	10	13	10/33	13/33
5	12	25	12/33	25/33
6	4	29	4/33	29/33
7	2	31	2/33	31/33
8	1	32	1/33	32/33
9	0	32	0/33	32/33
10	1	33	1/33	33/33

1.6 Tipos de gráficas

Gran parte de la utilidad que tiene la estadística descriptiva es la de proporcionar un medio para informar basado en los datos recopilados. La eficacia con que se pueda realizar tal proceso de información dependerá de la presentación de los datos, siendo la forma gráfica uno de los más rápidos y eficientes, aunque también es uno de los que más pueden ser manipulados o ser malinterpretados si no se tienen algunas precauciones al realizar las gráficas.

Los tipos pueden ser:

1.6.1 Diagrama de barras

Se utiliza para variables discretas y en general para distribuciones no agrupadas (figura 1.6.1.1).

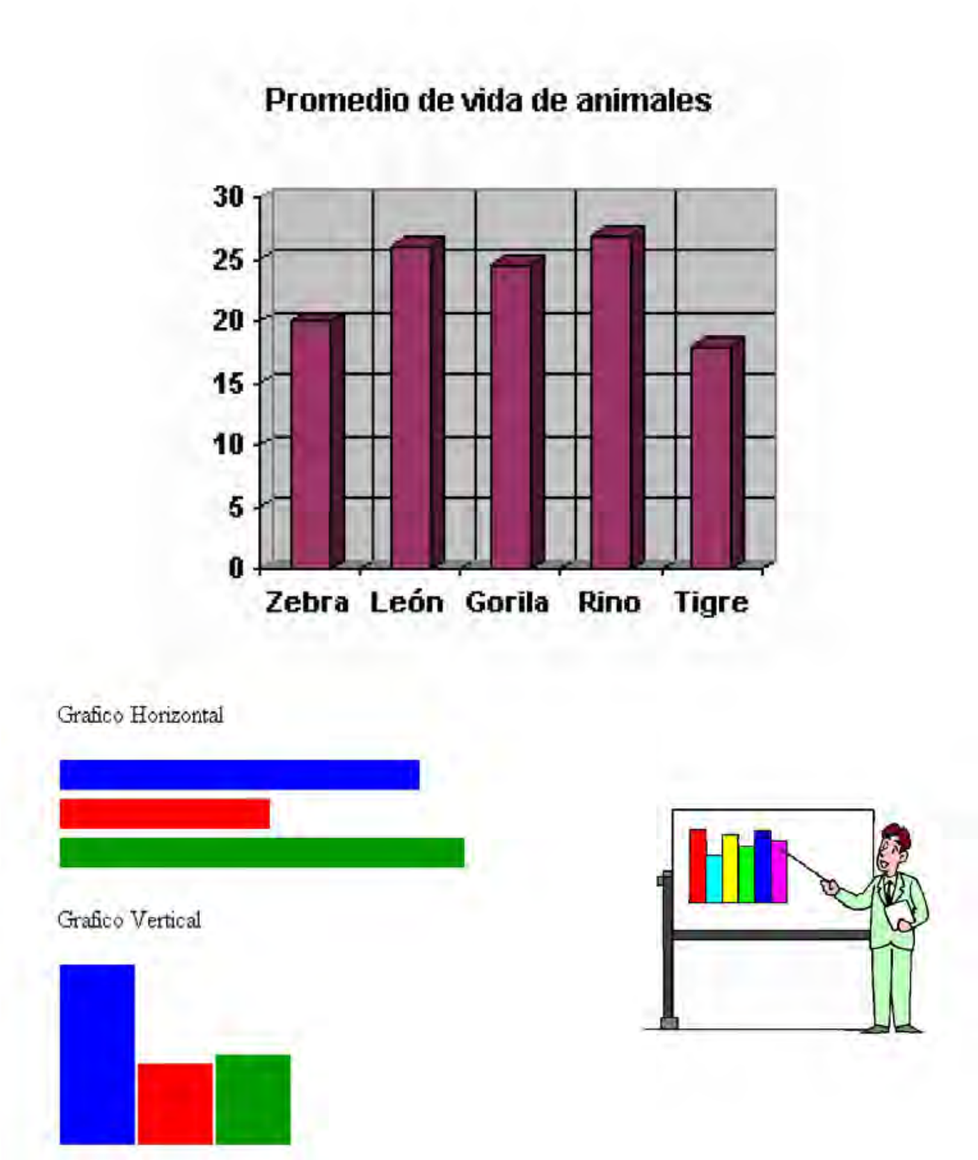


Figura 1.6.1.1 ejemplos de diagramas de barras

1.6.2 Diagrama de frecuencias acumuladas

Se representan las frecuencias acumuladas en el eje de las ordenadas (y) y los valores que toma la variable en el eje de las abscisas (x).

1.6.2.1 Histograma de frecuencias

Se utiliza para datos agrupados y se construye levantando sobre cada intervalo un rectángulo de área proporcional a la frecuencia absoluta (n_i) correspondiente a ese intervalo.

Dependiendo si los intervalos son o no uniformes se procederá de la siguiente forma:

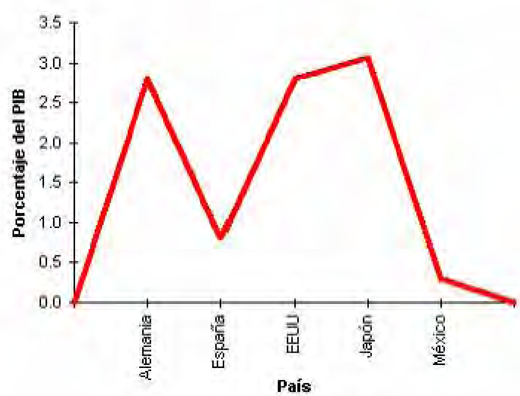
- Intervalos uniformes (igual amplitud): en este caso las alturas de los rectángulos serán igual a las frecuencias absolutas, ya que al ser las bases de los rectángulos iguales, las áreas sólo dependerán de las alturas, y por tanto de la frecuencia absoluta.
- Intervalos no uniformes (distinta amplitud): tendremos que calcular las distintas alturas, ya que las bases de los rectángulos son diferentes.

El cálculo de la altura lo haremos obteniendo la densidad de frecuencia (d_i), a través de la fórmula $d_i = \frac{n_i}{c_i}$

1.6.2.2 Polígono de Frecuencias Absolutas

También dependerá de si los datos están o no agrupados.

- Datos no agrupados: el polígono se construye uniendo los puntos más altos del diagrama de barras.
- Datos agrupados: en este caso se construye calculando primeramente la marca de clase de cada intervalo, luego unimos los puntos obtenidos con el primer valor del intervalo inicial y el último del intervalo final.

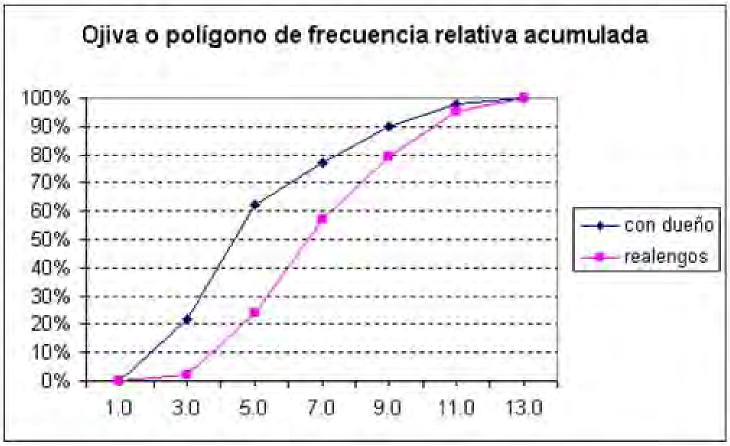


1.6.2.3 Ojiva o polígono de frecuencias acumuladas

El gráfico será siempre ascendente por el hecho de ser frecuencias acumuladas. Se utiliza para distribuciones agrupadas.

Ejemplo Propuesto:

El siguiente gráfico muestra la frecuencia relativa de los animales con dueño y los animales realengos (callejeros). Cabe señalar que los animales realengos carecen de atención y por tanto no están vacunados y constituyen un problema de salud pública.



Ejemplo Propuesto:

Utilizando la tabla de datos anterior (donde se les pregunto a los alumnos edad, peso, estatura, integrantes de la familia, calzado, etc.) Integrantes de la familia

Límite superior = 10

Limite inferior = 2

Rango = limite superior - limite inferior = 10 – 2 = 8

Recorrido= rango + 1 = 8 + 1 = 9

Obtenemos los múltiplos de rango y recorrido

8 → 1, 2, 4, 8

9 → 1, 3, 9

2	1
3	2
4	10
5	12
6	4
7	2
8	1
9	0
10	1

intervalos de clase	Intervalos de clase	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada.	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
2 → 4	1.5 → 4.5	3	13	13	13/33	13/33
5 → 7	4.5 → 7.5	6	18	31	18/33	31/33
8 →10	7.5 → 10.5	9	2	33	2/33	33/33

Ejemplo Propuesto

Utilizando los datos recabados anteriormente usamos la tabla de peso para obtener:

Limite Inferior = 48

Limite superior = 80

Rango = limite superior – limite inferior = 80 – 48 = 32

Recorrido = rango + 1 = 32 + 1 = 33

Creación de intervalos en la tabla de dispersión de datos

Por medio del rango obtenemos los múltiplos que podrán ser el intervalo adecuado de clase, recordando evitar frecuencias de cero en dichos intervalos

32 →1, 2, 4, 8, 16, 32

33 →1, 3, 11, 33

Otro método es sacar la raíz cuadrada a los valores de rango y recorrido y ambos se redondean, de este modo también se obtiene un buen estimador para saber cómo quedan los intervalos de clase

Rango = 32 $\sqrt{32}$ =5.6→6

Recorrido = 33 $\sqrt{33}$ =5.7→7

Limite inferior	Frecuencia	Limite inferior	Frecuencia	Limite inferior	Frecuencia
48	1	61	0	74	0
49	0	62	2	75	1
50	5	63	2	76	0
51	2	64	0	77	0
52	4	65	1	78	0
53	2	66	0	79	0
54	1	67	0	80	1
55	1	68	4		
56	1	69	0		
57	1	70	0		
58	0	71	0		
59	1	72	0		
60	3	73	0		

1.7 Introducción a la sumatoria $\sum$

En este punto nos referimos brevemente a un tipo especial de símbolos relacionados con los conjuntos de los números naturales y el de los enteros. Los operadores sigma, pi, unión e intersección.

a) Sigma $\sum$

b) Pi $\prod$

c) Unión $\bigcup$

d) Intersección $\bigcap$

1.7.1 Unión e Intersección

En la vida real, un operador puede ser el conductor de un camión, un cirujano o el encargado de operar un sistema telefónico. Desde un punto de vista matemático un operador es un símbolo que altera el significado de una expresión matemática. Conoces y has utilizado algunos de ellos. Por ejemplo los operadores logarítmicos *ln* (logaritmo natural) y log (logaritmo base 10), los operadores trigonométricos sen, cos, tan, sec, ctg, csc.

En general los operadores se usan para abreviar repeticiones de una misma operación.

Antes de la época de las computadoras, por dar un ejemplo, se utilizó mucho la transformación de producto en suma de logaritmos para simplificar operaciones aritméticas, es decir:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Ejemplos Propuestos:

Sea la expresión matemática de la forma

$$\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$$

Es la repetición de un enunciado de la forma *f(i)* afectado varias veces por la misma operación *O*. Cada vez que se repite la forma *f(i)* en la expresión del operador, la variable independiente *i* toma sucesivamente los valores que se le especifican al lado derecho o abajo y arriba del operador *O*.

a) Si tenemos un conjunto A = {2, 5, 7,11}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = 2i

Tendremos:

2i *O* 2i *O* 2i *O* 2i, ya que son 4 lo elementos que conforman al conjunto, es decir

i=2, i=5, i=7, i=11

2(2) *O* 2(5) *O* 2(7) *O* 2(11)

Lo que nos da como resultado: 4 *O* 10 *O* 14 *O* 22

b) Si tenemos un conjunto B = {1, 2, 3, 4, 5}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = 2i - 1

Tendremos:

2i-1 *O* 2i-1 *O* 2i-1 *O* 2i-1 *O* 2i-1, ya que son 5 los elementos que conforman al conjunto, es decir

i=1, i=2, i=3, i=4, i=5

2(1)-1 *O* 2(2)-1 *O* 2(3)-1 *O* 2(4)-1 *O* 2(5)-1

Lo que nos da como resultado: 1 *O* 3 *O* 5 *O* 7 *O* 9

c) Si tenemos un conjunto C = {1, 3, 5, 7, 9}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = 3i / 2

Tendremos:

3i / 2 *O* 3i / 2 *O* 3i / 2 *O* 3i / 2 *O* 3i / 2, ya que son 5 los elementos que conforman al conjunto, es decir

i=1, i=3, i=5, i=7, i=9

3(1)/2 *O* 3(3)/2 *O* 3(5)/2 *O* 3(7)/2 *O* 3(9)/2

Lo que nos da como resultado: 1.5 *O* 4.5 *O* 7.5 *O* 10.5 *O* 13.5

Ejercicios Propuestos:

Exprese los elementos al desarrollar el operador con la función dada

a) Si tenemos un conjunto C = {0, 1, 2}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = sen 2i

b) Si tenemos un conjunto C = {0, 1, 2, 3}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = $i^2 - 1$

c) Si tenemos un conjunto C = {1, 3, 5}, y el operador matemático $\underset{i=1}{\overset{n}{O}} f(i)$

Donde *f(i)* = $3i^2 + 4i - i$

1.7.2 El operador sigma

La primera operación a la que nos referimos es la de la suma. Cuando queremos abreviar una suma, cuyos sumandos son todos de la misma forma, usamos el operador sigma: $\sum$

Ejemplos Propuestos:

$\sum_{i=1}^{5} x_i$ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

$\sum_{i=1}^{3} 2x_i$ = 2(1) + 2(2) + 2(3) = 2 + 4 + 6 = 12

$$\sum_{i=3}^{8}\left(i^2+2\right)=\left(3^2+2\right)+\left(4^2+2\right)+\left(5^2+2\right)+\left(6^2+2\right)+\left(7^2+2\right)+\left(8^2+2\right)=211$$

Últimamente se ha difundido la lectura $\sum x_i$ como "la Sumatoria de las x_i" aunque debemos considerar a esta última forma de leer a la expresión como errónea, ya que la palabra sumatorio o sumatoria es en castellano un adjetivo y en este caso la estamos usando como sustantivo.

A veces es conveniente introducir el símbolo infinito ∞ como limite superior de una suma, de esta manera hacemos notar que la suma que nos interesa tiene una infinidad de sumandos, es decir, que no existe un sumando que podamos considerar que sea el último o que el conjunto indicador es un conjunto infinito.

El uso del símbolo infinito ∞ como límite superior se lee "hasta el infinito".

1.7.2.1 Propiedades de la Sumatoria

Propiedad 1

Sea c una constante, $\sum cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$

Ejemplo propuesto:

$\sum_{i=1}^{5} 8x_i$, puede ser resuelto como

(8*1)+(8*2)+(8*3)+(8*4)+(8*5)=8+16+24+32+40=120

Usando la propiedad 1 sería

8(1+2+3+4+5)=8(15)=120

Propiedad 2

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Ejemplo propuesto:

Sea $\sum(x_i + y_i)$, donde, $x_i = 1,3,5,7,9$, $y_i = 2,4,6,8,0$.

(1+2)+(3+4)+(5+6)+(7+8)+(9+0)=3+7+11+15+9=45

Usando la propiedad 2 quedaría

(1+3+5+7+9)+(2+4+6+8+0)=(25)+(20)=45

Propiedad 3

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \gamma y_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \gamma\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Ejemplo propuesto:

Sea $\begin{matrix}\lambda = 2 \\ \gamma = 3\end{matrix}$, $\sum_{i=1}^{5}(\lambda x_i + \gamma y_i) = 2\sum_{i=1}^{5} x_i + 3\sum_{i=1}^{5} y_i$

[2(1)+2(2)+2(3)+2(4)+2(5)]+[3(1)+3(2)+3(3)+3(4)+3(5)]=

[2+4+6+8+10]+[3+6+9+12+15]=[30]+[45]=75

Usando la propiedad 3

2(1+2+3+4+5)+3(1+2+3+4+5)=2(15)+3(15)=30+45=75

Propiedad 4

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i$, siempre y cuando $1 \le m \le n$

Ejemplo propuesto:

Sea $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i$ con m=6 y n=35, quedaría representado

$$\sum_{i=1}^{35} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i + \sum_{i=7}^{35} x_i$$

Propiedad 5

$\sum_{i=1}^{0} x_i = 0$, es decir, si n=0

Ejercicios Propuestos:

1. $\sum_{i \in A} i^2 + 5$ donde A= {-1, -3, -5}

2. $\sum_{k=2j} k^2 + 2k + 1$ donde $3 < j \leq 6$

3. $\sum_{i \in A} a^{i-2}$ donde a= {3, 6, 12}

4. La siguiente tabla de datos muestra las calificaciones del examen diagnóstico de ingreso a facultad.

2.0	2.3	2.9	2.7	2.6	2.7
3.1	2.6	3.0	2.5	2.8	2.8
1.9	3.1	2.7	2.4	2.5	2.2
2.5	2.5	2.5	3.0	2.7	2.7
1.9	2.1	2.4	3.4	2.9	2.1

a) Obtener límite superior, límite inferior, rango y recorrido.
b) Construya la tabla de dispersión de datos con intervalos.
c) Elabore la tabla de distribución de datos.
d) Dibuje el Histograma correspondiente según la tabla de distribución.
e) Calcule la ecuación de la línea recta para el primer par de marcas de clase.

Ejemplo Propuesto:

Existe un viejo problema planteado a los hombres en la antigüedad en cual consiste en dividir 100 panes entre 5 personas según una progresión aritmética, de modo que la suma de las dos primeras sea $\frac{1}{7}$ de la suma de las 3 últimas.

Se toma 5 $\frac{1}{2}$ como diferencia de la progresión aritmética; se tiene así 23, 17$\frac{1}{2}$, 12, 6$\frac{1}{2}$, 1; se aumentan esos números en la proporción 1 $\frac{2}{3}$ y se obtienen las partes que corresponden a cada persona.

1.8 Análisis de datos de una variable: medidas de tendencia central y de localización

Las medidas de tendencia central, son parámetros estadísticos que permiten observar entre otras cosas el comportamiento de los datos recopilados, para una mejor comprensión analizaremos el siguiente ejemplo. Un estudiante de bachillerato perteneciente a la ENP presentará 1 examen final al término del ciclo escolar, es posible que presente 2 exámenes finales, probablemente sean 3 exámenes finales, pero no sería tan normal que presente 7 o más exámenes finales.

Como podemos observar, este pequeño análisis se puede llevar a cabo, ya que se contaba con el promedio de exámenes que presenta un estudiante año con año en su vida escolar, a continuación se verán algunas de estas medidas de tendencia central y como localizarlas.

1.8.1 Media geométrica

Es una medida de posición menos usual que la media aritmética, pero cuya aplicación es especialmente útil, por ejemplo para datos que tienen un comportamiento geométrico, como el crecimiento de una población, las tasas de interés en un banco, los interese generados en una tarjeta de crédito, etc. La media geométrica de n valores es igual a la raiz n-+esima del producto de esos valores.

Para una variable que puede tomar n valores x_1, x_2,…,x_n la fórmula correspondiente sería:

Media Geométrica. $G=\sqrt[n]{x_1 * x_2 * ... * x_r}$

En donde $n=\sum_{i=1}^{k} a_i$

- Distribuciones unitarias

$$G=\sqrt[N]{x_1 * x_2 * ... * x_r}=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{r} x_i}$$

- Distribuciones no unitarias , agrupadas ó no

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} * x_2^{n_2} * \ldots * x_r^{n_r}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}}$$

Propiedad

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} n_i \log x_i$$

1.8.1.1 Ventajas y limitaciones

Análogamente a la media aritmética, esta media tiene la ventaja de que en su elaboración intervienen todos los valores de la variable, no obstante, presenta un gran inconveniente, y es que a veces queda no determinada. Esto es cuando la variable toma valores negativos.

Por otro lado, basta con que alguna observación sea cero para que, con independencia del resto de los valores, la media geométrica valga cero. Esto es un inconveniente, ya que esta medida no estaría teniendo en cuenta el resto de las observaciones.

1.8.2 Media armónica

La definición de esta medida es algo más difícil sin recurrir a una fórmula. Su significado intuitivo y los casos en los que puede aplicarse se comprenderán mejor a través de los siguientes ejemplos propuestos.

a) Un estudiante hace todos los días el recorrido de su casa a la Universidad, es decir, metro UAM-I – metro C.U. El viaje de ida lo realiza a una velocidad media de 80km/h, y el de regreso, a una velocidad media de 40km/h. ¿Es posible concluir que la velocidad media ha sido del viaje completo de 60km/h?

Para responder a esta pregunta debemos tener en cuenta la definición de velocidad, que dice: $velocidad = \frac{espacio}{tiempo}$

Si la distancia metro UAM-I – metro C.U. es de 70km, el tiempo que ha tardado en la ida es $t = \frac{70km}{80km/h}$, es decir 7/8.

El tiempo utilizado en el regreso fue: $t = \dfrac{70km}{40km/h}$ = 7/4.

El tiempo total consumido en la ida y vuelta es 7/8 + 7/4 = 21/8h, en un recorrido total de 140km. Como la velocidad media es la distancia dividida por el tiempo, entonces tenemos que:

$$\frac{espacio}{tiempo} = \frac{140km}{\frac{21}{8}h} = 140 * \frac{8}{21} = 53.3km/h$$

Luego, la respuesta es que la velocidad media no fue de 60km/h, sino de 53.3km/h.

¿Por qué la media aritmética no es adecuada en este ejemplo propuesto? La razón está en que velocidades diferentes se mantienen sobre recorridos iguales, pero no durante el mismo tiempo. Si los tiempos fueran los mismos, entonces la media aritmética sería idónea.

b) A dos mecanógrafas se les encarga que copien un informe, la que escribía rápido hace el encargo en dos horas; la otra, en tres horas. ¿Es posible con estos datos concluir que el tiempo promedio que tardan las secretarías en hacer el escrito es 5/2h, es decir 2 horas y media?

Para responder esta pregunta debemos considerar el tiempo y el trabajo que realiza cada una en ese lapso de tiempo, es decir:

Sea x el tiempo que se tardan en terminar el trabajo ambas secretarías, podemos determinar qué parte del trabajo realiza en una hora cada mecanógrafa, donde vemos que la mecanógrafa más rápida realiza la mitad del trabajo en una hora, mientras que la otra, en una hora sólo realiza una tercera parte del mismo. Si trabajaran juntas realizarían $\left(\dfrac{1}{x}\right)$del trabajo en una hora, entonces tenemos que:

$\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}t_1 + \dfrac{1}{3}t_2 = \dfrac{5}{6}$, donde t_1 es el trabajo realizado por la secretaria rápida y t_2 es el trabajo realizado por la otra. De aquí se deduce:

$$\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{6} \rightarrow 6*1 = 5*x \rightarrow x = \frac{6}{5} = 1.2horas$$

Luego, la respuesta es que el tiempo medio es 2.4h o sea 2 horas 24 minutos y no 2 horas 30 minutos como pensábamos al principio.

En general, la media armónica es igualmente adecuada cuando se trata de promediar variables que por su propia definición son cocientes, tal es el caso de: (velocidad, espacio, tiempo), (precio por unidad), (rendimiento por hectárea), etc.

Para una variable que presenta n valores distintos la fórmula de la media armónica (*H)* sería:

$$M.A. = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} \right)}$$

Si existen valores repetidos:

$$M.A. = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + ... + \frac{n_k}{x_k}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n_i}{x_i} \right)}$$

1.8.2.1 Ventajas y limitaciones

Como ventajas de esta medida, cabe destacar que en su elaboración intervienen todos los valores de la variable. Aunque, si algún valor de la variable es cero, la media armónica también es cero. Además, cuando aparecen valores próximos a cero pierde representatividad, ya que lo inversos de ellos se hacen muy grandes y disminuye la importancia de los valores altos de la distribución.

1.8.3 Media aritmética

Es la media más conocida y utilizada en la vida diaria. Hay tres formas de calcularla; estas tres formas se corresponden con los tres tipos de distribuciones de frecuencias conocidas.

a) Media aritmética simple

Supongamos que en una clase de 8 alumnos, las calificaciones en el segundo parcial en la asignatura de estadística fueron: 4, 6, 5, 2, 7, 9, 8,1.

Una forma de resumir y caracterizar estos resultados es obtener la nota media de este pequeño grupo de alumnos. Para ello dividimos la suma de todas calificaciones por el número de alumnos, en este caso es:

$$\frac{1+4+6+5+2+7+9+8}{8}=5.25$$

La media aritmética simple es la suma de valores de una variable dividida por el número de ellos, es decir:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

b) Media aritmética ponderada

Lo normal sería que en una clase haya más de 8 alumnos y que dos o más obtengan las mismas calificaciones. Por ejemplo, digamos que en clase hay 30 alumnos y sus calificaciones en estadística fueron las que se observan en la siguiente tabla (tabla 1.8.3.1).

Calificaciones Obtenidas En el curso	Alumnos que obtienen esa calificación
2	4
3	2
4	7
5	9
6	3
8	5

Tabla 1.8.3.1 tabla de calificaciones de alumnos

$$\frac{(2*4)+(3*2)+(4*7)+(5*9)+(6*3)+(8*5)}{30}=4.83$$

El concepto de media aritmética ponderada se aplica cuando no todos los valores de la variable tienen la misma importancia.

La media aritmética ponderada se define como la suma de los productos de los valores de la variable por sus frecuencias absolutas dividido por el número total de valores, esto es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{n}$$

Donde:
k=es el número de valores distintos de la variable(x_1, x_2, x_3,…,x_k)
n=es el número de veces que se repite cada x_i, también puede interpretarse como la ponderación de cada x_i.

c) Media aritmética en distribuciones agrupadas en intervalos

Para determinar la media aritmética en estas distribuciones se utiliza la misma fórmula que para la media ponderada, con la única diferencia de que aquí la columna x_i son las marcas de clase. El procedimiento para calcular es el siguiente:

- Se forma una nueva columna, que será de las marcas de clase o puntos medios de los intervalos (x_i).
- Se elabora una cuarta columna, que será la correspondiente a los productos de las frecuencias absolutas por las marcas de clase correspondiente a cada intervalos (x_i, n_i).
- Se suma la cuarta columna, y este resultado se divide por n. Este cociente es precisamente la media aritmética de la distribución agrupada.

De manera resumida, la fórmula para la media aritmética de una distribución agrupada en *k* intervalos es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{n}$$

donde x_i son ahora las marcas de clase.

1.8.3.1 Propiedades de la media aritmética

Las propiedades más destacables de esta medida son:

1) La suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto a su media es cero.
2) Si un conjunto de valores se puede descomponer en dos o más subconjuntos, la media aritmética de todo el conjunto se relaciona con las medias aritméticas de los diferentes subconjuntos disjuntos.

1.8.3.2 Relación entre las medias aritmética , geométrica y armónica :

$$H \leq G \leq \overline{x}$$

Ejercicio Propuesto:

Se comparan muchas veces 2 computadoras procesando diversos programas de "referencia" y registrando la diferencia en tiempo que requiere el CPU (Central Process Unit) para completar el mismo programa. Seis programas de referencia, procesados en 3 computadoras, produjeron los siguientes tiempos de CPU en minutos:

Programas de Referencia

Computadora	1	2	3	4	5	6	$\sum x_i$
SONY	1.12	1.73	1.04	1.86	1.47	2.1	
TOSHIBA	1.15	1.72	1.10	1.87	1.46	2.15	

A través de estos datos:

a) obtenga el valor medio del tiempo individual de cada computadora.

b) ¿Cuál seria la recomendación si fuese a comprar alguno de estos dos equipos? ¿Por qué?

Ejercicio Propuesto:

Obtener la media de la variable de integrantes de la familia

1.8.4 Mediana (Me)

Es el valor de los datos que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan según su tamaño.

Se representa por $\tilde{x}$ (se lee como “x tilde” o “mediana de la muestra”)

1.8.4.1 Procedimiento para obtener la mediana:

Paso 1: Se ordenan los datos del valor menor al valor mayor registrado. Es decir, la mediana es el valor que ocupa el lugar central si el número de observaciones es impar. Si el número de datos es par, podrá decirse que existen dos valores medianos y, en tal caso se calcula la media de los valores medianos. Por ejemplo:

- {1, 2, 3, 4, 5} Me=3
- {1, 2, 3, 4, 5, 6} Me=$\frac{3+4}{2}=3.5$

Paso 2: Se determina la profundidad (o posición) de la mediana, la cual se encuentra al sumar los números de posición de los valores de los datos más pequeños y más grandes, y al final se divide el resultado entre r (n es el mismo número que la cantidad de porciones de los datos).

La profundidad (número de posiciones a partir de cualquier extremo) o posición de la mediana se determina con la siguiente fórmula:

$$D(x)=n+\frac{1}{2}$$

Paso 3: Se determina el valor de la mediana. Con la profundidad de la mediana se cuenta desde un extremo en los datos ordenados, localizando el dato que está en la *D(x)*-ésima posición.

La mediana será la misma sin importar a partir de cuál extremo de los datos (máximo o mínimo) ordenado se cuente. De hecho, contar desde ambos extremos sirve como una comprobación.

La mediana puede definirse también como el valor que tiene una distribución acumulada igual a $\frac{N}{2}$. Para calcularla distinguiremos de nuevo si los datos están o no agrupados.

La fórmula para obtener la mediana en distribuciones agrupadas en clases quedaría:

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} * c_i$$

Ejemplo Propuesto:

a) Encuentre el valor de la mediana del conjunto de datos siguiente: {6, 3, 8, 5, 3}. Me=5
b) En la tabla

x_i	n_i	N_i
0	2	2
1	3	5
2	4	9
3	1	10

$\bar{x} = \frac{14}{10} = 1.4$

$Me = \frac{1+2}{2} = 1.5$ porque $\frac{N}{2} = N_i \rightarrow \frac{10}{2} = 5$

1.8.5 Moda

La moda de un conjunto de datos se define como el valor de x (la variable) que se repite u ocurre más frecuentemente. Debido a que los datos pueden agruparse de manera arbitraria –en el caso de la distribución continua– la moda no es la mejor medida de tendencia central. Para ejemplificar la moda, en el conjunto de datos del ejemplo anterior 3, 3, 5, 6, 8, la moda es 3 ya que es el dato que más veces se repite. En la muestra 6, 7, 8, 9, 9,10 la moda es 9. Si 2 valores de una muestra están empatados en cuanto a mayor frecuencia (número de ocurrencias) se dice que es bimodal, si existen tres datos con la mayor frecuencia se dice que es trimodal, si se tiene más de tres modas se le conoce como multimodal. Por ejemplo en la muestra 3, 3, 4, 5, 5, 7, tanto el 3 como el 5 aparecen un número igual de veces. No hay ningún valor que aparezca con más frecuencia.

En el caso de datos agrupados la fórmula para obtener la moda es:

$$Moda = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} w$$

donde:

L=límite inferior de la clase modal

d_1=diferencia entre la frecuencia de la clase modal y frecuencia de la clase anterior.

d_2=diferencia entre la frecuencia de la clase modal y frecuencia de la siguiente clase.

w=amplitud del intervalo

Ejemplo Propuesto.

El número de automóviles por departamento que pertenecen a una muestra de propietarios en un gran complejo es: 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 2 ¿cuál es la moda? Vemos que el dato que tiene mayor frecuencia es 2, es decir, la moda es 2.

1.8.5.1 Rango medio

Número que está exactamente a la mitad del camino entre un dato con menor valor y un dato con mayor valor (máximo y mínimo). Se encuentra sumando estos valores y dividiéndolos entre 2.

Ejercicio Propuesto

Todos los alumnos llevan a clase un Yakult y se toman las mediciones en relación al contenido en una probeta graduada, con ello se prueba el control de calidad que siguen las empresas a la hora de envasar sus productos.

Datos:

Sujeto = 1 pieza de Yakult (yogurt para beber a base de lacto bacilos).

Contenido neto reportado en el envase = 80ml.

a) Obtener media, moda, mediana, promedio
b) Comparar las medidas de tendencia central obtenidas. Inferir una conclusión y justificarla según:
    1. Vendedor
    2. Consumidor
    3. PROFECO (procuraduría federal del consumidor)
c) ¿Consideras que el instrumento de medición con la lectura que se realizó fue la más precisa para el caso?
d) Hacer tabla de dispersión de datos
e) Dibujar el Histograma

1.8.6 Fractiles

Son valores de la distribución que la dividen en partes iguales. Dependiendo en cuantas partes dividan a la distribución reciben varios nombres, cuarteles (4), deciles (10), percentiles (100).

Así como la mediana marca la mitad de los valores mayores que ella, los cuartiles permiten identificar valores ubicados en diferentes posiciones.

1.8.6.1 Cuartiles

Los cuartiles son medidas estadísticas que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales. Aún cuando el conjunto de datos queda dividido en cuatro partes iguales como se mencionó, los cuartiles son tres, Q_1, Q_2, Q_3, los cuartiles (primeros segundo, tercero) señalan el valor que están al 25%, 50%, 75% respectivamente de la totalidad de los datos, el segundo cuartil equivale a la media, y se calculan de la siguiente manera

$$Q_1 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{4}\right)1 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el cuartil 1.}$$

$$Q_3 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{4}\right)3 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el cuartil 3.}$$

Notas: El subíndice de Q marca el cuartil que se desea obtener.

l_i es el límite inferior del intervalo de clase real donde se encuentra el porcentaje buscado por ese cuartil dentro de la información.

El cociente de n esta dado por las partes en las que dividimos los fractiles, 4 para los cuartiles, 10 para los deciles y 100 para los percentiles.

h es el tamaño del intervalo de los datos.

n es el número total de los datos.

1.8.6.2 Deciles

Los deciles (del primero al noveno) marcan los valores ubicados al 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 % respectivamente de los datos, el quinto decil es la mediana.

$$D_6 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{10}\right)6 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el decil 6.}$$

$$D_8 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{10}\right)8 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el decil 8.}$$

1.8.6.3 Percentiles

Los percentiles del 1 al 99 indican el valor que esta al 1, 2, 3,…, 98 y 99% de los datos.

$$P_{31} = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{100}\right)31 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el percentil 31.}$$

$$P_{64} = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{100}\right)64 - f_{k-1}}{f_k} \right) h \text{ para el percentil 64.}$$

Ejemplo Propuesto:

Con la tabla en kilogramos del peso de los alumnos

Intervalo de clase	Clase real	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
45—53	44.5—53.5	49	5	5
54—62	53.5—62.5	58	9	14
63—71	62.5—71.5	67	11	25
72—80	71.5—80.5	76	6	31
81—89	80.5—89.5	85	7	38

Calcular Q_1, Q_3, D_7, P_{48}

$$Q_1 = 53.5 + \left(\frac{\left(\frac{38}{4}\right)1 - 5}{9} \right) 9 = 58.8182$$

Que representa dónde se encuentra el 25% de la información.

$$Q_3 = 71.5 + \left(\frac{\left(\frac{38}{4}\right)3 - 25}{6} \right) 9 = 76.75$$

El valor encontrado se ubica en el 75% de nuestra información.

$$D_7 = 71.5 + \left(\frac{\left(\frac{38}{10}\right)7 - 25}{6} \right) 9 = 73.9$$

Con este valor encontramos el 70% de los datos.

$$P_{48} = 62.5 + \left(\frac{\left(\frac{38}{100}\right)48 - 14}{11} \right) 9 = 65.9691$$

Dicho valor nos ubica donde se encuentra el 48% de nuestra información.

1.8.6.4 Fractiles de datos individuales

La fórmula para obtener la posición del fractil i en una tabla de datos individuales es:

$$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{4} \text{ para el caso de cuartiles.}$$

$$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{10} \text{ para el caso de deciles.}$$

$$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{100} \text{ para el caso de percentiles.}$$

Ejemplo Propuesto:

Encontrar el valor del tercer cuartil, del cuarto decil y del decimoséptimo percentil de los datos siguientes:

3, 5, 6, 11, 14, 18, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 31, 33, 34, 36, 44, 45, 47, 48, 50, 50, 52.

$$fractilQ_3 = 1 + \frac{i(n-1)}{4} = 1 + \frac{3(25-1)}{4} = 19$$

$$fractilD_4 = 1 + \frac{i(n-1)}{10} = 1 + \frac{4(25-1)}{10} = 10.6$$

$$fractilP_{17} = 1 + \frac{i(n-1)}{100} = 1 + \frac{17(25-1)}{100} = 5.08$$

1.9 Medidas de dispersión o variabilidad

1.9.1 Recorrido y Rango

Será la diferencia entre el valor máximo y mínimo de la distribución

1.9.2 Recorrido Intercuartilico

Será la diferencia entre el mayor y el menor cuartil

Ejemplo R1=Q3-Q1

1.9.3 Desviación Estándar

Esta medida indica que tan centrados o dispersos están los datos del modelo con relación a la media. Su fórmula es la siguiente:

1. Cuando los datos representan una muestra:

$$S_x = +\sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)n_i}{n-1}}$$

La desviación estándar de los datos de una muestra se definió con $(n-1)$ en lugar de *n,* porque así el valor resultante representa un mejor estimador de la población de la que fue extraída la muestra. Para valores grandes de *n* (n>30) prácticamente no hay diferencia entre hacer esta transformación o no.

2. Cuando se toma en cuenta una población:

$$S_x = +\sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{N}}$$

1.9.3.1 Propiedades de la desviación estándar

- $S_x \geq 0$

- Si a todos los valores de la variable les sumamos una constante, es decir, hacemos un cambio de origen, la desviación típica no se ve afectada. $S_{x'} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x'_i - \overline{x'}\right)^2 n_i}{N}}$
- Si a todos los valores de la variable les multiplicamos por una constante, la desviación típica queda afectada por la constante, concretamente multiplicada por la constante. $S_{x'} = kS_x$

1.9.4 Varianza

Es una medida de dispersión de los valores de la variable con respecto a la media.

Por lo que se refiere a la varianza de un conjunto de datos, sucede lo mismo que con la desviación estándar, ya sean datos poblacionales o muestrales, con la misma diferencia en sus fórmulas

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{N}$$

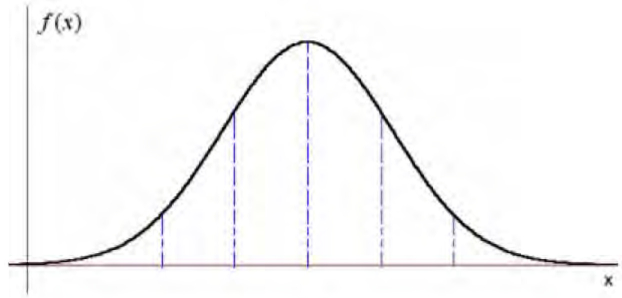
1.9.4.1 Propiedades de la Varianza

- $S_x^2 \geq 0$
- Si a todos los valores de la variable les sumamos una constante, es decir hacemos un cambio de origen la varianza no se ve afectada. $x_i \rightarrow \overline{x}; x_i' = x_i + k$
- Si a todos los valores de la variable les multiplicamos por una constante, la varianza queda afectada por la constante, concretamente multiplicada por la constante al cuadrado. $S_x^2 = k^2 S_x^2$

Las medidas de dispersión miden la variabilidad que existe en un conjunto de datos con respecto a la media aritmética, y pueden en la medida de sus posibilidades evaluar la calidad de los datos, sin embargo, la regla empírica, el teorema de Tchebycheff y el coeficiente de variación ayudan a comprender mejor el significado de la variabilidad.

1.9.5 Regla Empírica

La regla empírica sirve si y sólo si, los datos se aproximan a una forma acampanada, es decir, si el histograma toma la forma siguiente (figura 1.9.5.1):

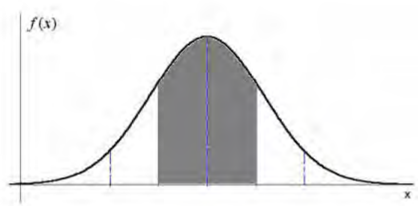


$\overline{X}$

Figura 1.9.5.1 campana de Gauss

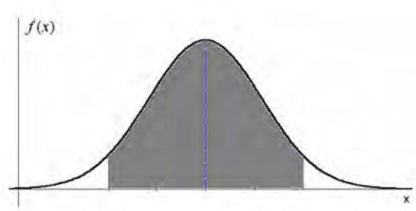
La regla empírica será una buena herramienta, ya que se cumple que:

1. En el intervalo que se forma al restar y sumar a la media aritmética una vez el valor de la desviación estándar ($\overline{X}-S$, $\overline{X}+S$), se encuentran aproximadamente el 68% de los datos.



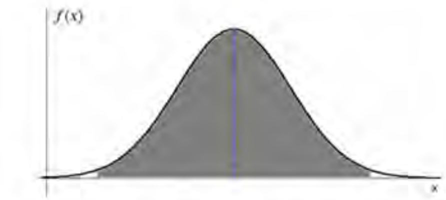
($\overline{X}-S$, $\overline{X}$, $\overline{X}+S$)

2. En el intervalo que se forma al restar y sumar a la media aritmética dos veces el valor de la desviación estándar ($\overline{X}-2S$, $\overline{X}+2S$), se encuentran aproximadamente el 95% de los datos.



($\overline{X}-2S$, $\overline{X}$, $\overline{X}+2S$)

3. En el intervalo que se forma al restar y sumar a la media aritmética tres veces el valor de la desviación estándar ($\overline{X}-3S$, $\overline{X}+3S$), se encuentran aproximadamente el 99% de los datos



($\overline{X}-3S$, $\overline{X}$, $\overline{X}+3S$)

Ejemplo Propuesto

El juego de dominó consta de 28 fichas rectangulares y cada una está dividida en 2 partes del mismo tamaño en cada uno de los cuales tiene un valor asignado que van desde el 0 hasta el 6, si el mismo valor está en ambas caras esa ficha es llamada mula, por tanto se tienen 6 fichas que llamamos mulas, (mula de cero, mula de uno, mula de dos,…, mula de seis).

Utilizando la tabla de distribución de frecuencias para la suma de los puntos en una ficha de dominó, es fácil comprobar la regla empírica de la siguiente manera.

Distribución del Dominó

x_i		x_iF_i	$x_i-\overline{X}$	$F\left(x_i-\overline{X}\right)$	$F\left(x_i-\overline{X}\right)^2$
0	1				
1	1				
2	2				
3	2				
4	3				
5	3				
6	4				
7	3				
8	3				
9	2				
10	2				
11	1				
12	1				

Donde

n =28 fichas del dominó

x =la suma de los puntos en una ficha

F =el número de fichas que suman el mismo valor de puntos

$\bar{X}$ =el valor de la media aritmética

Siguiendo el llenado de las siguientes columnas según la fórmula en el encabezado de cada una de ellas para obtener las medidas de variabilidad tenemos:

x_i	F_i	x_iF_i	$x_i - \bar{X}$	$F\left(x_i - \bar{X}\right)$	$F\left(x_i - \bar{X}\right)^2$
0	1	0			
1	1	1			
2	2	4			
3	2	6			
4	3	12			
5	3	15			
6	4	24			
7	3	21			
8	3	24			
9	2	18			
10	2	20			
11	1	11			
12	1	12			

Donde la suma de la columna x_iF_i dividida entre el total de fichas corresponde a la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{0+1+4+6+12+15+24+21+24+18+20+11+12}{28} = 6$$

x_i	F_i	x_iF_i	$x_i - \overline{X}$	$F\left(x_i - \overline{X}\right)$	$F\left(x_i - \overline{X}\right)^2$
0	1	0	-6	-6	
1	1	1	-5	-5	
2	2	4	-4	-8	
3	2	6	-3	-6	
4	3	12	-2	-6	
5	3	15	-1	-3	
6	4	24	0	0	
7	3	21	1	3	
8	3	24	2	6	
9	2	18	3	6	
10	2	20	4	8	
11	1	11	5	5	
12	1	12	6	6	

Vemos que la suma de los valores de la columna $F\left(x_i - \overline{X}\right)$ entre las piezas totales corresponde a:

$$Desviación\ Media = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(X_i - \overline{X})}{n} = \frac{0}{28} = 0$$

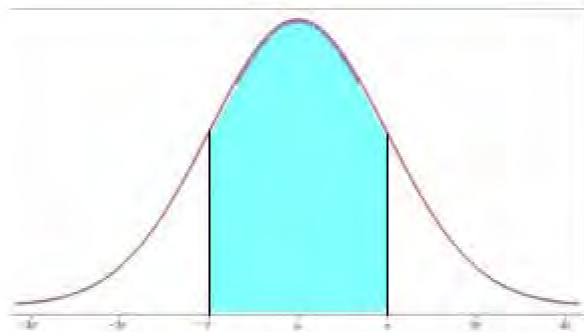
x_i	F_i	x_iF_i	$x_i - \overline{X}$	$F\left(x_i - \overline{X}\right)$	$F\left(x_i - \overline{X}\right)^2$
0	1	0	-6	-6	36
1	1	1	-5	-5	25
2	2	4	-4	-8	32
3	2	6	-3	-6	18
4	3	12	-2	-6	12
5	3	15	-1	-3	3
6	4	24	0	0	0
7	3	21	1	3	3
8	3	24	2	8	12
9	2	18	3	8	18
10	2	20	4	8	32
11	1	11	5	5	25
12	1	12	6	6	36

Por último la suma de los valores de las columnas $F\left(x_i - \overline{X}\right)$ y $F\left(x_i - \overline{X}\right)^2$ son útiles para obtener:

$$Varianza = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(X_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{252}{28} = 9$$

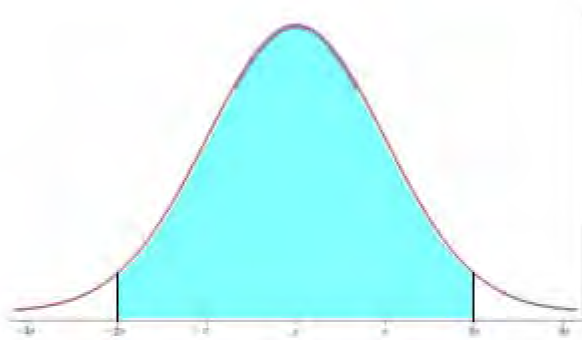
$$Desviación\ Estándar = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{F(X_i - \overline{X})^2}{n}} = \sqrt{9} = 3$$

Gráficamente tenemos



$$(\overline{X} - S = 3,\ \overline{X} = 6,\ \overline{X} + S = 9)$$

Donde en el intervalo nos queda un rango de confiabilidad del 68%.



$$(\overline{X} - 2S = 0,\ \overline{X} = 6,\ \overline{X} + 2S = 12)$$

Vemos que el intervalo resultante de sumar y restar 2 desviaciones estándar al valor de la media nos da los límites posibles en la suma de los puntos de la ficha de dominó, que mediante la regla empírica debería ser un intervalo con 99% de confiabilidad, pero es sólo eso, una regla empírica, aunque es muy fácil de utilizar con fines prácticos.

1.9.6 Coeficiente de Variación de Pearson (c.v)

Es el resultado de la razón entre la desviación estándar y la media aritmética.

$$C.V. = \frac{Sx}{\overline{x}}$$

Servirá para averiguar cuál es la dispersión relativa de una variable. Es adimensional, y por tanto, servirá para comparar la dispersión de 2 o más distribuciones con diferentes unidades de medida. No se puede utilizar si el valor de la media es nulo.

1.9.7 Variable tipificada Z_i

Se denota z_i y se obtiene de la siguiente forma:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S_x}$$

1.9.7.1 Propiedades

- $\overline{z} = 0$
- $S_z^2 = 1$
- $S_z = 1$

Ejemplo Propuesto:

Consideramos una variable estadística, cuya media aritmética es 70, y cuya desviación típica es 10, sea el valor de la variable en la observación i-ésima igual a 90

a) calcular el valor tipificado e interpretar su significado.

$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S_x} = \frac{90 - 70}{10} = 2$ el valor de la variable está dos veces la desviación típica por encima de la media.

b) calcular ahora para una observación i-ésima igual a 60.

$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S_x} = \frac{60 - 70}{10} = -1$ el valor de la variable está una vez la desviación típica por debajo de la media.

Ejemplo Propuesto:

Un estudiante obtiene en matemáticas una nota de 8.5, siendo 7.8 la nota media de la asignatura y con una desviación típica de 1.3. En estadística la calificación media es de 6.3 y la desviación estándar 1.65, el estudiante obtiene una nota de 7.2

a) ¿En qué asignatura obtiene la mejor puntuación relativa?

$z_{Mat} = \frac{8.5-7.8}{1.3} = 0.538$, $z_{Est} = \frac{7.2-6.3}{1.65} = 0.545$,por tanto, la mayor puntuación relativa la obtiene en Estadística.

b) ¿En cuál de las dos asignaturas presenta la calificación una mayor dispersión relativa?

$C.V._{Mat} = \frac{S_x}{\overline{\overline{x}}_{Mat}} = \frac{1.3}{7.8} = 0.167$, $C.V._{Est} = \frac{S_x}{\overline{\overline{x}}_{Est}} = \frac{1.65}{6.3} = 0.262$, por tanto la mayor dispersión se obtiene también en Estadística.

Ejemplo Propuesto:

Un fabricante de tubos de televisión dispone de dos tipos de tubos, A y B. los tubos tienen una duración media de 1495h y 1875h respectivamente. Las desviaciones típicas son 280 para A y 310 para B.

Determinar qué tubo presenta mayor dispersión absoluta y cuál presenta mayor dispersión relativa.

$\overline{A} = 1495$

$S_A = 280$

$\overline{B} = 1875$

$S_B = 310$

Podemos decir directamente que el tubo tipo B presenta mayor dispersión absoluta, ya que la desviación típica es una medida de dispersión.

Para ver la dispersión relativa debemos calcular el coeficiente de variación de Pearson:

$C.V._A = \frac{S_A}{A} = \frac{280}{1495} = 0.187$, $C.V._B = \frac{S_B}{B} = \frac{310}{1875} = 0.165$, por tanto, será el tubo A el que presente mayor dispersión relativa.

Ejercicio Propuesto:

De la tabla de distribuciones del peso de los alumnos de 6to que cursan esta materia.

Calcule

a) Media Aritmética para distribución de frecuencia agrupada
b) Varianza
c) Desviación estándar
d) Coeficiente de variación de Pearson

Ejercicio Propuesto

A continuación se muestra una tabla de los sueldos de los empleados de una empresa

\$1,025	\$3,591	\$5,125	\$3,380	\$4,028
\$3,234	\$1,534	\$2,532	\$1,025	\$3,678
\$4,028	\$1,620	\$3,400	\$4,028	\$2,347
\$5,873	\$2,345	\$4,028	\$3,281	\$2,321

OBTENGA:

a) Tabla de distribución de Frecuencia
b) Histograma
c) Media, mediana, moda
d) Varianza, desviación estándar, coeficiente de variación de PEARSON
e) A partir del análisis de estadística, ¿qué puede decir de la situación laboral en esa empresa?

Ejercicio Propuesto

Los siguientes datos fueron recabados al terminar un examen parcial de Estadística, se refieren al tiempo (horas/minutos) que necesitaron los alumnos para concluir el parcial

Obtenga:

a) Tabla de distribución de frecuencias
b) Histograma, ojiva
c) Mediana, media, moda, Varianza, desviación estándar, coeficiente de PEARSON

d) Si tu completas el examen en un tiempo de 1’ 23’’, ¿qué significado estadístico tiene, qué elementos justificarían tu respuesta?.

e) Tu mejor amigo completó el examen en un tiempo de 1’24’’ y tú en 1’23’’ ¿qué significa? ¿Existe diferencia significativa?

1’20’’-1	1’24’’-1	1’28‘’-4
1’21’’-4	1’25’’-2	1’29’’-3
1’22’’-4	1’26’’-3	1’30’’-3
1’23’’-2	1’27’’-3	

CLASE POR TODOS LOS PUNTOS DOMINÓ

Algunos fenómenos aleatorios que podemos observar fácilmente se distribuyen en cuanto a su frecuencia, de forma semejante a las sumas de los puntos de las fichas del dominó que se vio anteriormente. Algunos de estos fenómenos son discretos y otros continuos. A continuación se presentan ejemplos de cada una de los dos casos.

Discretos	Continuos
Suma de puntos de las fichas de dominó	Edad
Promedio de nacimiento de varones	Temperatura
Número de águilas al lanzar 10 volados	Peso
Estatura de las personas	

Ejercicio Propuesto

En busca de la luz

1.-Realiza un boceto de lo que tu consideres que sería la gráfica de las frecuencias del gasto mensual de luz por casa en una colonia

2.-¿Podría pensarse que se asemeja a la distribución de las sumas de los puntos en las fichas del dominó?

3.-Supongamos que en cierta colonia se realiza un estudio del gasto mensual de luz por casa, y se obtiene una media de 198kwh y una desviación estándar de 12kwh. Aplicando la regla empírica calcula la probabilidad de que al elegir al azar una casa de esa colonia se observe un abasto mensual:

a) mayor a 210 kwh
b) menor a 162kwh
c) de 200kwh
d) mayor a 150 Kwh.
e) 219.92kwh

Ejercicio Propuesto: Fórmula uno

¿Quién es el mejor piloto de la historia de fórmula Uno? Algunos dicen que fue Juan Manuel Fangio y otros que Michael Schumacher. Aquí hay algunos datos que tal vez nos sirvan para deducirlo meramente sobre bases estadísticas, hasta la temporada 2002.

Fangio corrió en la categoría entre 1950 y 1958 (y no compitió en 1952). Compitió por ocho temporadas; corrió en cuatro diferentes equipos; participó en 51 carreras; su mejor temporada en puntos fue la de 1954, con 57.14 puntos acumulados; su mejor temporada en victorias fue la de 1954 con seis en total de ocho carreras; ganó un total de 24 carreras, llegó diez veces en segundo lugar, una en tercero, seis en cuarto, ninguna en quinto, ninguna en sexto, y tres de séptimo hacia atrás; tuvo 29 arrancadas en la primera posición; acumuló 277.14 puntos en su carrera; corrió un total de 3383 vueltas; obtuvo cinco campeonatos del mundo (marca en Fórmula Uno, compartida con Schumacher).

Schumacher ha estado compitiendo en la categoría desde 1991 (en 1999 perdió una buena parte de la temporada – seis carreras de dieciséis – por una lesión). Ha competido en doce temporadas, incluida la del 2002; ha corrido en tres diferentes equipos; ha participado en 179 carreras; su mejor temporada en puntos ha sido la del 2002, con 144 puntos acumulados (marca en Fórmula Uno); su mejor temporada en victorias ha sido la del 2002 con once en total de diecisiete (marca en Fórmula Uno), ha llegado 34 veces en segundo lugar, 16 en tercero, siete en cuarto, seis en quinto, cuatro en sexto, y cinco en séptimo hacia atrás; ha tenido 49 arrancadas en la primera posición; ha acumulado 945 puntos en su carrera (marca en Fórmula Uno); ha corrido un total de 9733 vueltas; ha obtenido cinco campeonatos del mundo (marca en Fórmula Uno, compartida con Fangio).

Con los datos anteriores resuelva lo siguiente:

1. Presenten los datos que se dan acerca de Fangio del modo en que consideren más claro (pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente).

2. Presenten los datos que se dan acerca de Schumacher del modo en que consideren más claro (pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente).

3. Presenten los datos de los dos pilotos de manera conjunta, de forma tal que pueda decirse quien es el mejor de acuerdo a las estadísticas (pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente).

4. Presenten los datos, o alguno de ellos de manera que estadísticamente se demuestre que Fangio fue mejor que Schumacher (pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente).

5. Presenten los datos o alguno de ellos de manera que estadísticamente se demuestre que Schumacher fue mejor que Fangio (pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente).

1.10 Análisis descriptivo de datos divariados: correlación

1.10.1 Covarianza

Intuitivamente pensamos en la dependencia de variables aleatorias x_1 y x_2; en el caso de una variable x_1 crece o decrece, en el caso de x_1, x_2 cambia.

Consideraremos los siguientes gráficos para analizar 2 medios de dependencia, la covarianza y el coeficiente simple de correlación.

Las figuras mostradas corresponden a 3 muestras aleatorias.

a) En la figura 1 se observa que si x crece y también crece; por lo que se ve una dependencia de x, y lo que indica que son variables dependientes.
b) En la figura 2 no se muestra ninguna dependencia.
c) En la figura 3 vemos una dependencia donde x crece y y crece.

x y y dada por: $Cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$

Desafortunadamente es difícil utilizar la covarianza como una medida absoluta de medición, por consiguiente es difícil determinar si una covarianza en particular es grande a simple vista. Se puede eliminar ese problema al estandarizar su valor utilizando el coeficiente de correlación lineal:

$$\rho = \frac{Cov(x, y)}{S_x S_y}, \text{ donde } -1 \le \rho \le 1$$

S_x y S_y, son las desviaciones estándar de x y y respectivamente. Puede demostrarse que el coeficiente de correlación ρ, está entre -1 y 1, implica que todos los puntos están sobre una recta, el valor del coeficiente $\rho = 0$, implica que una covarianza es igual a cero y no existe correlación.

El coeficiente de correlación depende de la covarianza, indica que x crece cuando y crece y x indica que y decrece cuando x crece.

Ejemplo propuesto:

Sea la siguiente tabla de datos

X	5	6	7	8	9	10
Y	15	18	21	24	27	30

1) Obtener la media de $\overline{X}$ y de $\overline{Y}$

$\overline{X}$ = 7.5

$\overline{Y}$ = 22.5

VarX=σ x^2=$\frac{1}{\cap} \sum_{l=l}^{n}$ (x$_{1-}$ $\overline{X}$)=$\frac{1}{6}$ [(5-7.5)^2+(6–7.5)^2+(7–7.5)^2+(8–7.5)^2+(9–7.5)^2+(10–7.5)^2]

VarY=σ y^2=$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}$ (y$_{1-}$ $\overline{Y}$)=$\frac{1}{6}$ [(15-22.5)^2+(18-22.5)^2+(21-22.5)^2+(24-22.5)^2+(27-22.5)^2+(30-22.5)^2]

Covarianza

σ x^2=2.91

σ y^2=26.25

Desviación estándar

γ X=1.7

γ Y= 5.12

Covarianza: $Cov(x,y)=\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)$

$$\frac{1}{6}\left[(5-7.5)(15-22.5)+(6-7.5)(18-22.5)+(7-7.5)(21-22.5)+\right]$$

$$+(8-7.5)(24-22.5)+(9-7.5)(27-22.5)+(10-7.5)(30-22.5)=8.75$$

$$\rho(x,y)=\frac{Cov(x,y)}{S_xS_y}=\frac{8.75}{(1.7)(5.12)}=1.0052$$

Hemos visto como estudiar una característica de un determinado conjunto. Ahora trataremos la idea de poder estudiar a la vez dos características de ese conjunto, que podrán ser cualitativas o cuantitativas.

1.10.2 Distribuciones conjuntas

Por el hecho de trabajar con dos características tendremos que utilizar dos variables. Hay que tener en cuenta que las frecuencias serán también bidimensionales, para representar los valores de las variables utilizaremos la tabla de doble entrada o tabla de distribución conjunta.

Las frecuencias absolutas las representaremos con dos subíndices de la siguiente forma (tabla 1.10.2.1):

x\y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_k	n_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}		n_{1k}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}		n_{2k}	$n_{2.}$
…	…	…		…		…	…
x_i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{ik}	$n_{i.}$
…	…	...		…		…	…
x_h	n_{h1}		…	n_{hj}	…	n_{hk}	$n_{h.}$
$n_{,j}$	$n_{,1}$	$n_{,2}$	…	$N_{,j}$	…	$n_{,k}$	N

Tabla 1.10.2.1 tabla de distribuciones conjuntas

Donde *i* corresponde a la variable *x*, y *j* a la variable *y*

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} n_{ij} = N$$

1.10.3 Representaciones gráficas

La más utilizada es la nube de puntos. En caso de tener los datos agrupados, representaremos las marcas de clase en el eje de abscisas (figura 1.10.3.1)

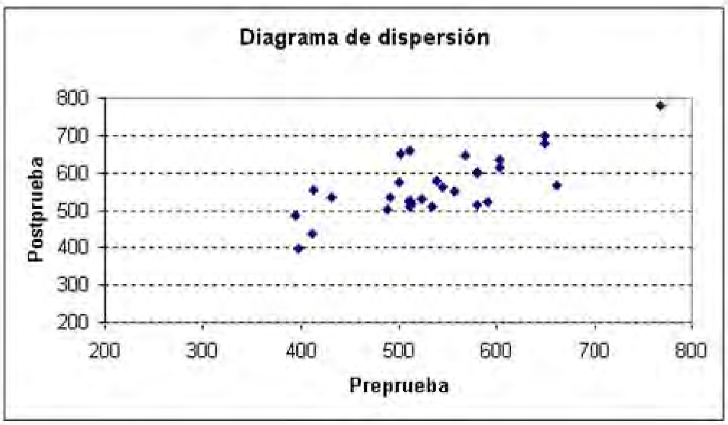


Tabla 1.10.3.1 gráfica de nube de puntos

1.10.4 Regresión lineal

El objetivo es buscar una función (*y=f(x))* que relacione las dos variables, de modo tal de observar la dependencia que tienen x e y, y la forma en la que se relacionan. Esta función deberá aproximar a una recta la representación de la nube de puntos.

Podemos estudiar la regresión de dos maneras:

I. Regresión: consiste en analizar la forma de las dependencias entre las dos variables.
II. Relación: consiste en analizar el grado de dependencia de las dos variables.

Nos enfocaremos en la regresión, a través de un método matemático, que es la aproximación a una línea recta.

Ejemplo:

Dados un conjunto de datos de la forma

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_n	y_n

Estos se pueden representar mediante la ecuación de una línea recta (forma punto pendiente).

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 = punto,\ \ a_1 = pendiente$$

Donde

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = punto \text{ , y}$$

$$a_1 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = pendiente$$

El coeficiente de correlación nos índica el por ciento de exactitud que nosotros podemos tener al utilizar esta ecuación. El coeficiente de correlación (r) se puede determinar mediante:

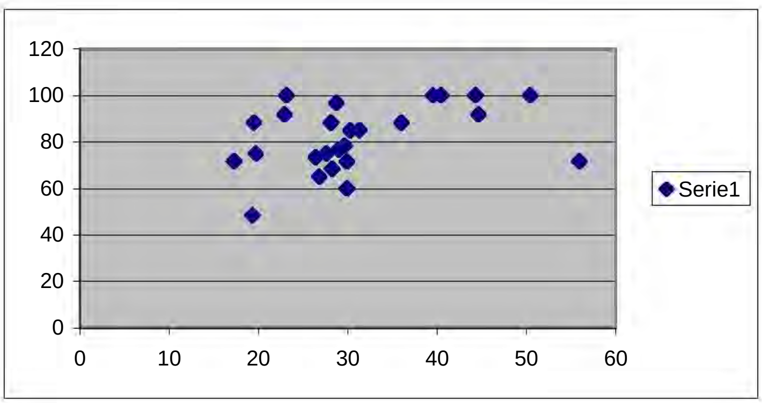
$$r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Ejemplo Propuesto:

Encontrar la recta de mejor ajuste para la tabla que contiene los siguientes datos.

x	y	x	y	x	Y
17.3	71.7	28.1	88.3	36	88.3
19.3	48.3	28.2	68.3	39.5	100
19.5	88.3	28.7	96.7	40.4	100
19.7	75	29	76.7	44.3	100
22.9	91.7	29.6	78.3	44.6	91.7
23.1	100	29.9	60	50.4	100
26.4	73.3	29.9	71.7	55.9	71.7
26.8	65	30.3	85		
27.6	75	31.3	85		

Graficando con los pares ordenados *x* y *y* tenemos la siguiente nube de puntos



Proseguimos y calculamos las sumatorias de x_i, y_i, x_i^2, x_iy_i.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{25} X_i = 778.7$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)^2 = (778.7)^2 = 606373.69$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{25} X_i^2\right) = 26591.63$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{25} y_i = 2050$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{25} x_i y_i = 65164.04$$

Sustituyendo en las fórmulas para el punto y la pendiente tenemos:

$$a_0 = \frac{2050(26591.63) - (65164.04)778.7}{25(26591.63) - (778.7)^2} = 64.529$$

$$a_1 = \frac{25(65164.04) - (778.7)2050}{25(26591.63) - (778.7)^2} = 0.560$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$\therefore y = 64.52 + 0.56x$$

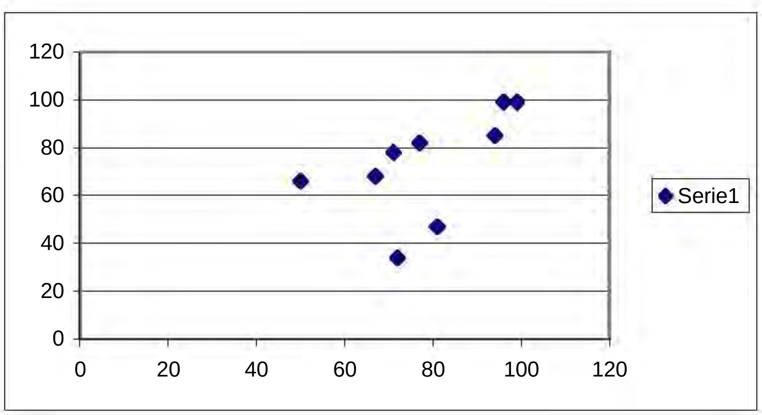
Que es la recta de mejor ajuste por el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo Propuesto:

Dados los datos en la siguiente tabla encuentre la línea recta de mejor ajuste por el método de los mínimos cuadrados

x	y	x	y
77	82	94	85
50	66	96	99
71	78	99	99
72	34	67	68
81	47		

Con el correspondiente grafico de nube de puntos.



Ahora necesitamos calcular los valores de las sumatorias para poder sustituir en a_0 y a_1

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{9} X_i = 707$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right)^2 = (707)^2 = 499849$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{9} X_i^2\right) = 57557$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{9} y_i = 658$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 53258$$

Sustituimos los valores encontrados para obtener la ecuación de la línea.

$$a_0 = \frac{658(57557)-(53258)707}{9(57557)-(707)^2} = 12.062$$

$$a_1 = \frac{9(53258)-(707)658}{9(57557)-(707)^2} = 0.777$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

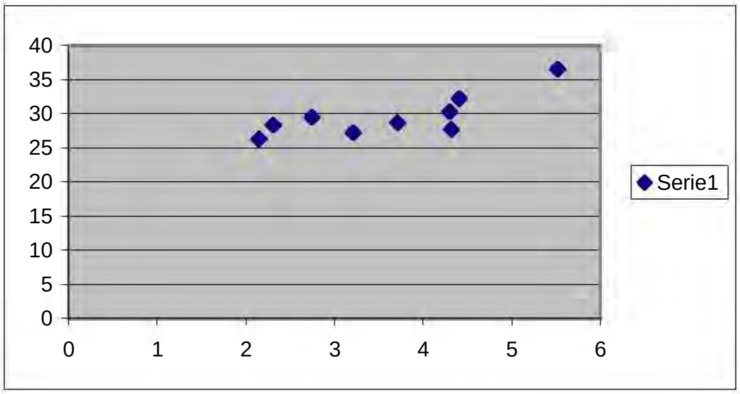
$$\therefore y = 12.06 + 0.77x$$

Resultando ser la ecuación de la línea recta solicitada.

Ejemplo Propuesto:

Calcule la ecuación de la línea recta de mejor ajuste para el grupo de datos que se muestra a continuación

x	y	x	y
2.75	29.5	4.32	27.7
2.15	26.3	2.31	28.3
4.41	32.2	4.3	30.3
5.52	36.5	3.71	28.7
3.21	27.2		



Calculando los datos necesarios tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{9} X_i = 32.68$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right)^2 = (707)^2 = 1067.9824$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{9} X_i^2\right) = 128.6602$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{9} y_i = 266.7$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 990.268$$

$$\overline{X} = 3.6311$$

Calculando los coeficientes de la ecuación de la línea recta

$$a_0 = \frac{266.7(128.66) - (990.268)32.68}{9(128.66) - (32.68)^2} = 21.69$$

$$a_1 = \frac{9(990.268) - (32.68)266.7}{9(128.66) - (32.68)^2} = 2.186$$

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$\therefore y = 21.69 + 2.18x$$

Siendo esta la ecuación de mejor ajuste.

Ejemplo Propuesto. ”La mejor opción”

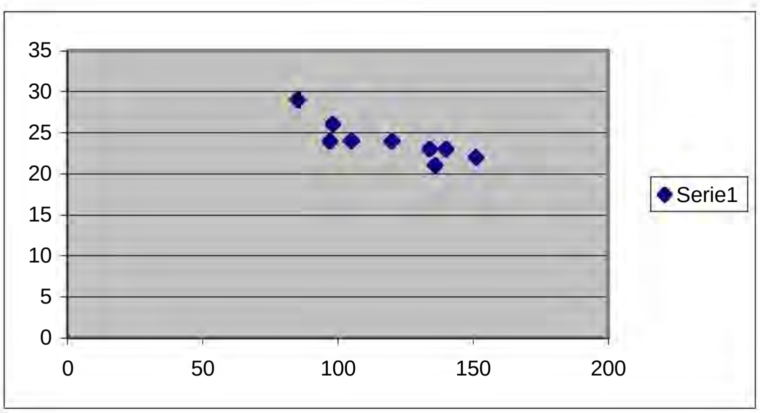
En la siguiente tabla se muestra la clasificación combinada de número de millas por galón y el volumen del motor para 9 automóviles subcompactos con transmisión automática, de cuatro cilindros y que utilizan gasolina. El tamaño del motor se da en pulgadas cúbicas.

Totales cilindrada. En base a estos datos.

a) ¿cuál de los 9 autos sería la mejor opción de compra?

Vw rabbit	97	24
Datsun 210	85	29
Chevette	98	26
Dodge ovni	105	24
Mazda 626	120	24
Oldsmobile starfire	151	22
Mercury capri	140	23
Toyota celica	134	23
Datsun 810	136	21

b) Elabore una gráfica donde se muestre la comparación de los vehículos a partir de 2 variables



1.10.5 Independencia Estadística

Se dice que 2 variables son estadísticamente independientes cuando su frecuencia relativa conjunta es igual al producto de las frecuencias marginales.

$$\frac{F_i}{j}$$

$$\frac{N_{ij}}{N} = \frac{N_i}{N} * \frac{N_j}{N}$$

Ejercicio Propuesto.

Hallar la ecuación de la recta de mejor ajuste para la siguiente tabla de datos.

x	Y
2.75	29.5
2.15	26.3
4.41	32.2
5.52	36.5
3.21	27.2
4.32	27.7
2.31	28.3
4.30	30.3
3.71	28.7

Ejercicio Propuesto

La gran mayoría de las truchas que encontramos en los ríos y lagunas de México, son peces que nacieron en un criadero. Realmente existen pocos ríos con truchas 100% salvajes. Incluso en países como E.U. y Canadá, los ríos tienen un alto porcentaje de truchas de criadero (Stocked Trout).

Estas truchas, una vez que son trasplantadas del criadero a los lagos, tienen que aprender a encontrar su alimento, tal y como lo harían de forma salvaje, muchas veces siendo muy selectivas en lo que comen.

En México existe por ejemplo el club de pesca de Arco Iris. Este club de pesca ubicado en Tlahuapan, Puebla, a sólo 10 km. adelante de río frío, funciona de marzo a septiembre. Cuenta con 25 acres de bosques, lago y montañas, donde se distingue un restaurante y un criadero de truchas (el más antiguo de México y hoy, el de mayor capacidad). Paraje visitado en su mayoría por poblanos y capitalinos.

A continuación se presentan las longitudes (en milímetros) de 100 truchas cafés que estaban en el estanque de dicho criadero:

15.0	15.3	14.4	10.4	10.2	11.5	15.4	11.7	15.0	10.9
13.6	10.5	13.8	15.0	13.8	14.5	13.7	13.9	12.5	15.2
10.7	13.1	10.6	12.1	14.9	14.1	12.7	14.0	10.1	14.1
10.3	15.2	15.0	12.9	10.7	10.3	10.8	15.3	14.9	14.8
14.9	11.8	10.4	11.0	11.4	14.3	15.1	11.5	10.2	10.1
14.7	15.1	12.8	14.8	15.0	10.4	13.5	14.5	14.9	13.9
10.1	14.8	13.7	10.9	10.6	12.4	14.5	10.5	15.1	15.8
12.0	15.5	10.8	14.4	15.4	14.8	11.4	15.1	10.3	15.4
15.0	14.0	15.0	15.1	13.7	14.7	10.7	14.5	13.9	11.7
15.1	10.9	11.3	10.5	15.3	14.0	14.6	12.6	15.3	10.4

A partir de los datos recabados obtenga la información requerida.

a) Construya el diagrama de árbol (tronco y hoja)
b) Construya la tabla de dispersión de datos
c) Realice la tabla de distribución de frecuencias

Intervalo de Clase	Intervalo Clase Real	Marca De clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa Acumulada

d) Dibuje el Histograma
e) Encuentre la ecuación de la línea recta correspondiente a los primeros pares ordenados (marcas de clase) del Histograma, compruebe encontrando el punto de intersección (x_m , y_m)
f) A partir del análisis estadístico realizado infiera las conclusiones.

Ejercicio Propuesto

En un estudio sobre el número de prácticas necesarias antes de poder ejercer profesionalmente como licenciado(a) en derecho, y litigar adecuadamente, se obtuvieron los siguientes datos después de hacer una encuesta a 25 estudiantes de la carrera de derecho en la UNAM:

4, 0, 3, 0, 0, 4, 4, 2, 2, 0, 2, 3, 3, 0, 0, 6, 7, 1, 0, 0, 4, 3, 1, 0, 2

a) Ordene de manera ascendente los datos, construya la tabla de dispersión y realice la tabla de distribución de frecuencias.
b) Obtenga el valor de:
    I. Media aritmética simple $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$
    II. Media aritmética en distribuciones agrupadas en intervalos $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_i X_i$
    III. ¿Son iguales los valores de las medias? ¿Sí, no? ¿Por qué?
    IV. Profundidad de la mediana $d(x) = \frac{n+1}{2}$ y mediana x "tilde"
    V. Moda
    VI. ¿Son iguales los valores de las medidas de tendencia central?¿Sí, no?¿Qué significa?

c) Construya el histograma y señale las marcas correspondientes a las medidas de tendencia central obtenidas.
d) Después de haber realizado el análisis estadístico infiera las conclusiones acerca del estado en el que se encuentran actualmente los estudiantes de la carrera de derecho en México, sea coherente y justifique sus palabras.

Ejercicio Propuesto.

Afore es una administradora de fondos para el retiro. Las afores son empresas financieras debidamente autorizadas por la SHCP, y supervisadas por la CONSAR, que se especializan en el manejo de los ahorros para el retiro de los trabajadores.

AFORE	Porcentaje anual sobre el saldo (25 años) COMISIONES	Saldo Proyectado a 25 años
Actinver	0.52	289,327
Azteca	0.53	288,834
Inbursa	0.62	284,063
Banamex	0.62	283,964
Ixe	0.67	281,807
XXI	0.67	281,687
ING	0.70	280,221
Bancomer	0.72	279,106
Santander Mexicano	0.72	278,943
Principal	0.75	277,660
HSBC	0.84	272,931
Banorte Generali	0.93	268,487
Profuturo GNP	1.00	265,299

Menores comisiones, Mayor Saldo
y Pensión

La cuenta individual es la cuenta personal y única de cada trabajador administrada por la Afore. En ésta, durante la vida laboral del trabajador, se acumulan las cuotas y aportaciones que realizan:

1. El patrón.
2. El gobierno.
3. El propio trabajador

A su vez, la cuenta individual que administra tu AFORE está conformada de tres grandes sub-cuentas:

a. Retiro, cesantía y vejez (RCV)
b. Aportaciones voluntarias
c. Vivienda

Esta información es un cálculo basado en la estructura de comisiones vigente y rendimientos estimados. No se garantiza que estos resultados se mantendrán en el futuro. Las comisiones y los rendimientos de las AFORES pueden variar. Saldo proyectado de la subcuenta de retiro, cesantía en edad avanzada y vejez (RCV) con las comisiones vigentes de cada AFORE. Supuestos: Tasa de rentabilidad de 5% anual en términos reales, periodo de cotización de 25 años, un nivel de ingreso igual a 3 veces el salario mínimo, un saldo inicial de $ 33,505.49, crecimiento real del salario de 0% y 7 años cumplidos de permanencia. El saldo de los recursos acumulados no incluye la subcuenta de vivienda administrada por el INFONAVIT. ("Cifras al cierre de Nov 2004").

¿En qué aspectos habrá que fijarse a la hora de elegir una AFORE?, ¿Cuál AFORE será la mejor a elegir?

Para elegir una afore se deben tomar en consideración tres factores:

a) Comisiones. Cada una de las afores cobra distintos niveles de comisiones y es importante que sepas que existen diferencias entre lo que cobra una y otra afore. Las comisiones que cobran las afores es una variable muy importante porque la diferencia entre la comisión que cobra una u otra afore, directamente incidirá en el monto de tu pensión.

b) Rendimientos. Asimismo, cada afore te ofrece rendimientos / intereses por el manejo de tus recursos. Es importante destacar que las afores han ofrecido rendimientos muy atractivos. Cada afore ofrece rendimientos diferentes y por ello es importante que te informes, ya que este aspecto también influye directamente en el monto de tu pensión.

c) Servicios. Cada afore puede ofrecerte servicios adicionales a los que está obligada, por ejemplo enviarte más estados de cuenta, opción de consultar tu saldo, contar con más sucursales y hacer descuentos a las comisiones que cobra por antigüedad, entre otros.

¿Cuál es la diferencia actual en pesos de las afores citadas?

¿Cuál es la diferencia en porcentaje?

¿Cuál es el promedio de comisiones que cobran?

Ejercicio Propuesto.

La siguiente tabla corresponde a la magnitud de barras de cobre (en centímetros) que se producen en una empresa:

Intervalo de clase	Intervalo de clase real	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
100 – 102	99.5 – 102.5	101	5	
103 – 105		104	10	
106 – 108		107	7	
109 – 111		110	4	
112 – 114		113	3	
115 – 117		116	4	
118 – 120		119	2	
121 – 123		122	1	
124 – 126		125	3	
127 – 129		128	3	
130 – 132		131	1	
133 – 135		134	1	
136 – 138		137	6	
139 – 141		140	8	
142 – 144		143	3	
145 – 147		146	7	
148 – 150		149	15	
151 – 153		152	12	
154 – 156		155	4	
157 – 159	156.5 – 159.5	158	1	

a) Obtenga la media, la moda, la mediana.
b) Calcule la desviación estándar
c) Calcule los Cuartiles Q_1, Q_3
d) Calcule el Percentil P_{60}

Ejercicio Propuesto.

Un fabricante de tubos de televisión dispone de dos tipos de tubos, A y B. Los tubos tienen una duración media de 1495 horas y 1875 horas respectivamente. Las desviaciones estándar son 280 para A y 310 para B.

a) Determinar qué tubo presenta mayor dispersión absoluta.
b) Determinar cuál presenta mayor dispersión relativa

Ejercicio Propuesto.

A partir de la siguiente tabla con 2 variables diga:

a) ¿Cuál es el peso y la estatura ideal cuando se tiene 8 años?
b) ¿Con este análisis se puede hacer una estimación para otra edad distinta?

Alumno	Estatura	Peso	Alumno	Estatura	Peso	Alumno	Estatura	Peso
n	x	y	n	x	y	n	x	y
Alumno 1	1,25	32	Alumno 11	1,25	33	Alumno 21	1,25	33
Alumno 2	1,28	33	Alumno 12	1,28	35	Alumno 22	1,28	34
Alumno 3	1,27	34	Alumno 13	1,27	34	Alumno 23	1,27	34
Alumno 4	1,21	30	Alumno 14	1,21	30	Alumno 24	1,21	31
Alumno 5	1,22	32	Alumno 15	1,22	33	Alumno 25	1,22	32
Alumno 6	1,29	35	Alumno 16	1,29	34	Alumno 26	1,29	34
Alumno 7	1,30	34	Alumno 17	1,30	35	Alumno 27	1,30	34
Alumno 8	1,24	32	Alumno 18	1,24	32	Alumno 28	1,24	31
Alumno 9	1,27	32	Alumno 19	1,27	33	Alumno 29	1,27	35
Alumno 10	1,29	35	Alumno 20	1,29	33	Alumno 30	1,29	34

Como se puede observar el objetivo de esta unidad al tratar los temas de variables, datos, construcción de bloques estadísticos, medidas de tendencia central, dispersión y variabilidad, es presentar una introducción concisa a la estadística, promoviendo el aprendizaje inductivo y deductivo, la comprensión y la motivación, mediante el uso de experiencias personales para la presentación de esta rama de la ciencia. Estos conocimientos proporcionarán las herramientas para saber qué hacer con la información obtenida de una muestra, como es el reducirla a unas cuantas cifras que condensen o concentren la información más importante, así como el poder abordar los conceptos y la metodología de la siguiente unidad.

CAPÍTULO II CONJUNTOS

CAPÍTULO 2 Conjuntos

“Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio: puede ser el principio del conocimiento, pero apenas has avanzado en tus pensamientos a la etapa de ciencia”

William Thomson Kelvin

“No entiendes realmente algo a menos que seas capaz de explicárselo a tu abuela”

Albert Einstein

“La Matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las Matemáticas”

Carl Friedrich Gauss

“Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione”

John Von Neumann

Objetivo: Que el alumno reafirme los conocimientos sobre conjuntos y sus operaciones básicas, previamente adquiridos, para que los aplique en problemas de análisis combinatorio y probabilidad.

Temas desglosados:

2.1 Conjuntos

- 2.1.1 Idea Intuitiva (por extensión y por comprensión)
- 2.1.2 Conceptos Básicos y Simbología
- 2.1.3 Subconjuntos
- 2.1.4 Conjunto Universal
- 2.1.5 Conjunto Vacío

2.2 Operaciones con Conjuntos

2.3 Cardinalidad de la unión, de la intersección y del complemento

2.1 CONJUNTOS

El lenguaje de la matemática se internacionaliza cada vez más, haciéndose más preciso, más exacto y menos propenso a ambigüedades. El simbolismo perfeccionado y la nomenclatura, aceptados por todos, hacen realidad el hecho de que se pueda leer un texto matemático sin apenas conocer la lengua de expresión de su autor, sea cual fuese.

La teoría de conjuntos se encuentra en los fundamentos de la matemática, la cual proporciona la herramienta y el lenguaje de operación, que explicita o implícitamente, en todas sus ramas, utiliza conceptos de la citada teoría, tales como los de función y relación, o bien, que sirven para las aplicaciones en el análisis combinatorio y en la teoría de probabilidades. Dicha teoría de conjuntos, es una teoría axiomática lo suficientemente potente como para formalizar cualquier razonamiento matemático. En su seno se demuestran resultados sobre números, sobre geometría, sobre juegos de azar, sobre el movimiento de los planetas, sobre fluidos, sobre electrones y rayos de luz, etc.

Es necesario que se comprenda la teoría de conjuntos y las operaciones entre ellos, para ser capaz de resolver problemas del entorno. El concepto de conjunto ha sido utilizado de forma tan generalizada en toda la matemática moderna, que es preciso su conocimiento por parte de todo estudiante de nivel universitario.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor fue el primero en hallar una respuesta acertada a los problemas que surgían del estudio de los conjuntos infinitos. Vio la luz primera en Rusia en 1845, pero emigró junto con su familia a Alemania cuando él tenía 11 años. Su padre trató de persuadirlo, sin lograrlo, de que no estudiara Ingeniería, Cantor obtuvo su doctorado en Ciencias en 1867 en la Universidad de Berlín.

Entre 1874 y 1884 publicó los artículos donde aparecieron sus aportaciones más importantes a la matemática, en ellos ponía en tela de juicio los aspectos básicos de los conjuntos infinitos, aspectos que trataban acerca de la esencia misma del análisis matemático.

Por desgracia. Cantor nunca obtuvo el reconocimiento que se merecía por su trabajo, nunca se cumplió su deseo de impartir una cátedra de su especialidad en Berlín. En lugar de ello desarrolló su carrera en una institución de poco prestigio, e incluso ahí, no llegó a ser profesor de tiempo completo, sino hasta 1879.

Como resultado de la falta de reconocimiento y aceptación de su trabajo, sufrió una serie de colapsos y murió en una institución para enfermos mentales en 1918.

2.1.1 Idea Intuitiva (por extensión y por comprensión)

Según Georg Cantor (1845 – 1918), el matemático que desarrolló la teoría de conjuntos, *“un conjunto es una agrupación de objetos simples en un todo”.*

2.1.1.1 Definición de Conjunto

Es una colección bien determinada de elementos u objetos agrupados que cumplen con ciertas propiedades o reglas, a esos objetos se les llama miembros o elementos del conjunto, para pertenecer a ese grupo deben estar bien definidos, es decir que no exista la ambigüedad al preguntar si un objeto pertenece a la colección.

Un conjunto se puede formar de una manera sencilla, por ejemplo con:

- Los libros de una biblioteca
- Los alumnos de una escuela
- Los meses del año
- Los colores del arco iris
- Los planetas del sistema solar

En un conjunto ningún elemento se cuenta más de una vez.

Por ejemplo, si un conjunto está formado por las letras de la palabra ferrocarril, entonces el conjunto tiene 8 elementos: *f, e, r, o, c, a, i, l* (la letra r aparece cuatro veces, pero sólo se cuenta una vez).

En un conjunto no se toma en cuenta el orden de los elementos.
Por ejemplo, el conjunto de letras de la palabra casa se puede disponer de distintas formas (c, a, s; a, s, c; s, a, c) y cada una se refiere al mismo conjunto.
Ejemplos Propuestos:

- Los 5 últimos presidentes de México (DEFINIDO)
- Los 5 últimos peores presidentes de México (AMBIGÜO)

Los conjuntos se representan con letras mayúsculas y los elementos son los objetos que contiene el conjunto y en el caso que sean letras se representan con letras minúsculas

Ejemplos Propuestos:

- A= {a, e, i, o, u}
- B= {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
- C= {los alumnos del grupo}

2.1.1.2 Cardinalidad

La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos del conjunto y lo denotamos como n(A) o #A. Si el número de elementos es un entero no negativo, decimos que el conjunto es finito. Cuando un conjunto no es finito, se dice que es infinito. Cuando dos conjuntos finitos A y B tienen la misma cardinalidad, decimos que los conjuntos son equivalentes y escribimos $A \sim B$. En este caso también decimos que entre los dos conjuntos existe una correspondencia biunívoca, en ocasiones llamada también uno a uno. Puesto que los conjuntos tienen el mismo número de elementos, entre ellos se puede establecer una relación que asocie a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.

2.1.1.3 Relación de Pertenencia

La relación que existe entre los elementos y conjuntos se representa con el símbolo $\in$, que significa: “es elemento de”, “es miembro de”, “está en”. Cuando el símbolo aparece tachado $\notin$ se niega su significado.

Ejemplo Propuesto:

Sea el conjunto A= {a, e, i, o, u}

¿El elemento "b" Є a A?

No, el elemento no pertenece a A.

¿El elemento "i" $\in$ a A?

Sí, el elemento i $\in$ A.

Una vez que sabemos la manera en que se denota un conjunto y la relación que presentan los elementos de ese conjunto es necesario señalar que los conjuntos se pueden representar por Extensión y por Comprensión.

2.1.1.4 Extensión

Esta forma de representar de forma tabular los conjuntos es a través de la enumeración de todos y cada uno de los elementos que pertenezcan al conjunto separando cada uno de ellos mediante comas.

Ejemplos Propuestos:

A= {1, 2, 3}

Se lee: "A es el conjunto de los elementos 1, 2, 3", el conjunto tiene tres elementos, pero de no utilizarse las comas sólo tendría uno, el número 123.

A= {Vicente Fox, Ernesto Zedillo, Carlos Salinas}

A= {Águila, Sol}

A= {1, 2, 3, 4, 5}

A= {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}

A = {1, 2, 3}

B= {3, 4, 5}

B= {primavera, verano, otoño, invierno}

2.1.1.5 Comprensión

Esta forma de representar en forma constructiva a los conjuntos es por medio de describir una propiedad de sus elementos, de tal modo que no sea necesario escribir todos los elementos que lo conforman, es utilizado mayoritariamente, dado que una ventaja constituye al reducir la escritura sobre todo cuando se tienen conjuntos muy grandes.

Ejemplos Propuestos:

A= {xIx es día de la semana}

Se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es día de la semana". La letra x representa un elemento cualquiera del conjunto y el símbolo "I" se "lee tal que".

A= {xIx son los últimos 3 presidentes de la República Mexicana}

B= {xIx es un alumno el grupo 431}

Esta notación se leería de la siguiente manera. El conjunto B que contiene a los elementos "x" tales que "x" es un alumno del grupo 431.

E= {xIx es un lado de la moneda}

A= {xIx es un lado al lanzar dado}

F= {xIx es un estado físico de la materia}

A= {xIx $\in$ N, $0<x<6$}

El conjunto que contiene a los elementos "x" tales que "x" pertenecen al conjunto de los números naturales, mayores a cero y menores a 6, a su vez al representarlo por extensión tendríamos:

A= {1, 2, 3, 4, 5}

Ejercicios Propuestos:

Definir por extensión o por comprensión cada uno de los conjuntos siguientes.

A= {xIx es vocal}

B= {xIx es número dígito}

C= {xIx es estación del año}

D= {xIx es estado civil de una persona}

E= {xIx es letra de la palabra matemáticas}

F= {xIx es sentido del cuerpo humano}

G= {xIx es número de un reloj}

H= {xIx es estado de la República Mexicana que limita con los EUA}

I= {xIx es mes cuyo nombre tiene la letra r}

J= {xIx es nota de la escala musical}

K = {aries, tauro, géminis, cáncer, leo, virgo, libra, escorpión, sagitario, capricornio, acuario, piscis}

L= {tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro}

M= {decámetro, hectómetro, kilómetro, miriámetro}

N= {rojo, azul, amarillo}

O= {peón, torre, alfil, caballo, rey, dama}

P= {+, -, *, /}

Q= {líquido, sólido, plasma, gaseoso}

R= {1, 3, 5, 7, 9}

S= {prensa, radio, cine, televisión}

T= {oído, vista, tacto, gusto, olfato}

2.1.2 Conceptos Básicos y Simbología

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman elementos. Si x es un elemento y A un conjunto, escribimos $x \in A$ para decir que x pertenece a A. Para señalar que un objeto x no es elemento del conjunto A, escribimos $x \notin A$. Usamos letras mayúsculas para denotar a los conjuntos y minúsculas para denotar a los elementos.

Algunos conjuntos se pueden describir listando sus elementos entre llaves (definición por extensión). Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como:

A = {l, 2, 3, 4, 5, 6}

También podríamos escribir A en notación constructiva de conjuntos (definición por comprensión) en la forma:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 7\}$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero, mayor que 0 y menor que 7".

2.1.3 Subconjuntos

Para dos conjuntos A y B, escribimos, $A \subset B$ si todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B, y en este caso decimos que A es subconjunto de B. Cuando no se cumple que $A \subset B$, es decir, cuando al menos un elemento de A no pertenece a B, escribimos $A \not\subset B$. Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, o sea si $A \subset B$ y $B \subset A$. En este caso escribimos $A = B$.

La unión de A y B es el conjunto $A \cup B$ constituido por todos los elementos que están en A o en B (o en ambos). La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B$ formado por todos los elementos que están tanto en A como en B. En otras palabras $A \cap B$ es la parte común de A y de B. Si los conjuntos A y B no tuvieran elementos comunes su intersección sería igual al conjunto vacío $\varnothing$.

Los elementos que pertenecen al conjunto B pero no a A, forman el complemento del conjunto A con respecto al conjunto B y se escribe $B \setminus A$, (también se le conoce como la diferencia de B y A). Si el conjunto B estuviera representando el conjunto universal U (aquél que se toma como referencia y que contiene a todos los conjuntos que intervienen en una discusión en particular) escribimos A’ en vez de $U \setminus A$.

Un conjunto A es subconjunto de un Conjunto B si todo elemento de A pertenece a B. La relación así establecida se denota:

$$A \subset B$$

Que se lee: “A es subconjunto de B”, o bien: “A está contenido en B”.

Para indicar que el conjunto A no es subconjunto de B se escribe:

$$A \not\subset B$$

Por definición:

I. Todo conjunto es subconjunto de si mismo.
II. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos Propuestos:

a) Si A= {2, 4, 6} y B= {1, 2, 3, 4, 5, 6}; entonces $A \subset B$, ya que los elementos 2, 4 y 6 de A pertenecen al conjunto B.
b) Sean los conjuntos A= {Canadá, Brasil, EUA} y B= {xIx es país del continente americano}, entonces: $A \subset B$ pero $B \not\subset A$.
c) Sean los conjuntos A= {xIx es letra del alfabeto español}, V= {xIx es vocal} y C= {xIx es consonante} entonces: $V \subset A$; $C \subset A$; $V \not\subset C$; $C \not\subset V$.

Ejercicios Propuestos:

a) Sean los conjuntos D= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, P= {xIx es dígito par} e I= {xIx es dígito impar}.
   Anote la relación entre: P y D, I y D, P e I, I y P.

b) Sean los conjuntos A= {1, 2, 3, 4} y B= {2, 3, 4, 5, 6, 7}, anota la relación de A y B así como de B y A.

2.1.3.1 Conjunto Potencia

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama conjunto potencia. Se le designa por 2^a. Si un conjunto A es finito, digamos que A tiene n elementos, entonces el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos.

Ejemplo Propuesto:

Sea el conjunto A= {1, 2, 3}, vemos que n=3 ya que son tres los elementos que conforman al conjunto por tanto: $2^n = 2^3 = 8$

La familia de los subconjuntos que pueden estar contenidos en el conjunto dado A son ocho y serían:

1. A= {}
2. A= {1}
3. A= {2}
4. A= {3}

5. A= {1, 2}
6. A= {1, 3}
7. A= {2, 3}
8. A= {1, 2, 3}

2.1.3.2 Subconjunto Propio

Un conjunto A es subconjunto propio de B si se cumplen las siguientes condiciones:

I. $A \subset B$ (A es subconjunto de B)
II. $A \neq B$ (A y B no son iguales)

La segunda condición nos indica que la cardinalidad del conjunto B es mayor que la de A, es decir n(B)>n(a)

Ejemplos Propuestos:

a) Si A= {0, 2, 4, 6, 8} y B= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A es subconjunto propio de B porque B tiene elementos que no pertenecen a A.
b) Si A= {a, b, c, d} y B= {a, b, c, d, e}, A es subconjunto propio de B porque B tiene un elemento que no pertenece a A.
c) Si A= {xIx es un número primo dígito} y B= {xIx es un número dígito}, A es subconjunto propio de B porque B tiene varios elementos que no pertenecen a A.

2.1.3.3 Subconjunto Impropio

Si todo elemento de B también es elemento de A, entonces se dice que A es subconjunto impropio de B. Dicho en otras palabras, los símbolos A y B representan al mismo conjunto; por lo tanto, los conjuntos A y B son iguales (A=B), si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ejemplos propuestos:

a) Si A= {a, e, i, o, u} y B= {a, e, i, o, u}, A es subconjunto impropio de B y B es subconjunto impropio de A porque A y B tienen los mismos elementos, es decir, A=B.

b) Si A= $\{x \in N \mid x$ es primer número primo$\}$ y B= $\{ x \in N \mid x$ es primer número par$\}$, A=B porque ambos tienen como único elemento el número 2, por lo tanto A es subconjunto impropio de B y viceversa.
c) Sea A= $\{ x \in N \mid 3 \leq x \leq 15\}$ y B= $\{ x \in Z \mid 3 \leq x \leq 15\}$. Los dos conjuntos tienen los mismos elementos, A es igual a B, por consiguiente cada uno es subconjunto impropio del otro.

Algunos autores utilizan los símbolos $\subset$ y $\subseteq$ para denotar subconjunto propio e impropio, respectivamente.

2.1.4 Conjunto Universal

Es un conjunto que se determina arbitrariamente para un problema en particular, pero de tal manera que todos los conjuntos bajo estudio estén contenidos en él. Al elegir un conjunto universal se debe considerar que no es único, varía según la naturaleza del problema que se analiza, y para un mismo problema podemos ampliarlo o reducirlo según convenga.

Si lo que se desea analizar está relacionado por ejemplo con estudiantes que cursan la educación media superior en México, el conjunto universal se puede formar, según la naturaleza, con los bachilleres:

- De un grupo determinado.
- De un grado específico.
- De todo el plantel.
- De todo el estado.
- De todo el país.
- De una edad establecida.
- De cierta calificación promedio.
- De un nivel socioeconómico, etc.

Si el problema está relacionado con números, el conjunto universal (Ω) puede formarse con el conjunto de números en el cual se pueda encontrar la solución:

N → números naturales.

Z → números enteros.

Q → números racionales.

Q' → números irracionales.

R → números reales.

I → números imaginarios.

C → números complejos.

Donde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2.1.5 Conjunto Nulo o Vacío

Es un conjunto que cuenta con ningún elemento y se denota por {} ó Φ.

Ejemplos propuestos:

a) En un grupo escolar la lista de los alumnos, ordenada alfabéticamente por apellidos, empieza con la letra *p* y termina con la letra *z*. Si queremos formar el conjunto *A* con los alumnos del grupo cuyo apellido empieza con la letra *a*, entonces el conjunto *A* no tiene elementos: A= {}.
b) Las edades de los alumnos están comprendidas entre los 15 y 17 años; por tanto, los alumnos del grupo que tienen 14 años de edad forman un conjunto E sin elementos: E= ∅= {}.

Es necesario señalar que {} $\neq$ {0}, pues el {} no tiene elemento, mientras que {0} tiene un elemento: el cero.

Ejercicios Propuestos:

a) A= {xIx es cada persona viviente mayor de 300 años}
b) B= {xIx + 3 = 3}
c) C= {xIx^2 = 9 y 2*x=4}

2.1.5.1 Conjunto Unitario

Es un conjunto que tiene un sólo elemento.

Ejemplos Propuestos:

a) Sea el conjunto S= {xIx es satélite natural de la Tierra}. El conjunto S sólo tiene un elemento: la Luna.
b) Sea el conjunto L= {xIx es estrella de nuestro sistema planetario}. El conjunto L sólo tiene un elemento: el Sol; recordamos que una estrella es un astro con luz propia.
c) Sea el conjunto W= $\{x \in Z \mid -1 < x < 1\}$. El conjunto W sólo tiene un elemento: el cero.

2.1.5.2 Conjunto Finitos

Son aquellos en los cuales el proceso de contar sus elementos tiene fin.

Ejemplos Propuestos:

a) El conjunto formado por los meses del año.
b) El conjunto de los estados de la República Mexicana.

2.1.5.3 Conjuntos Infinitos

En los cuales el proceso de contar sus elementos nunca termina.

Ejemplos Propuestos:

a) El conjunto de los números naturales.
b) El conjunto formado por los números pares.

2.1.5.4 Conjuntos Equivalentes

Cuando dos conjuntos finitos A y B tienen la misma cardinalidad (n(a)=n(B)), se dice que los conjuntos son equivalentes y se denota como A~B. En este caso también se dice que entre los dos conjuntos existe una correspondencia biunívoca, en ocasiones llamada también uno a uno. Es decir, puesto que los conjuntos tienen el mismo número de elementos, entre ellos se puede establecer una relación que asocie a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.

2.1.5.5 Conjuntos Iguales

Dos conjuntos son iguales si ambos tienen los mismos elementos. Para representar dicha igualdad se utiliza el símbolo =.

2.2 Operaciones con Conjuntos

En aritmética se suma, resta, multiplica y divide, es decir, a cada par de número *a* y *b* se le asigna un número *a+b* llamado suma de *a* y *b*, un número *a+b* llamado diferencia de *a* y *b*, un número *a*b* llamado producto de *a* y *b* y un número *a/b* llamado cociente de *a* y *b.* Estas asignaciones se llaman operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números. A continuación se definen las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos, es decir, se van a asignar o hacer corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos *A* y *B.*

2.2.1 Unión

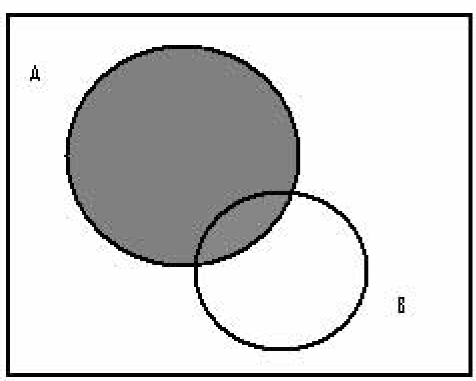
La unión de conjuntos *A* y *B*, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *A* o a *B* o a ambos conjuntos. Su representación por comprensión quedaría de la siguiente manera:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

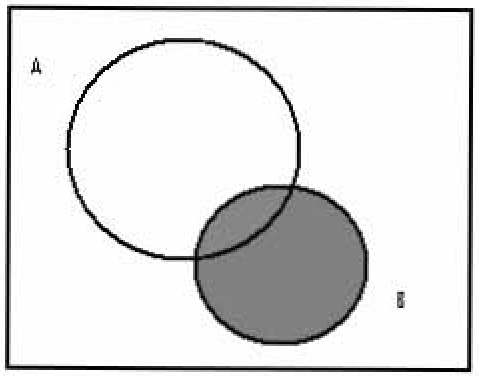
Algunos libros señalan la unión de conjuntos *A* y *B* como *A+B* y se le llama suma conjuntista de *A* y *B* o simplemente A más B.

Representación gráfica de la Unión

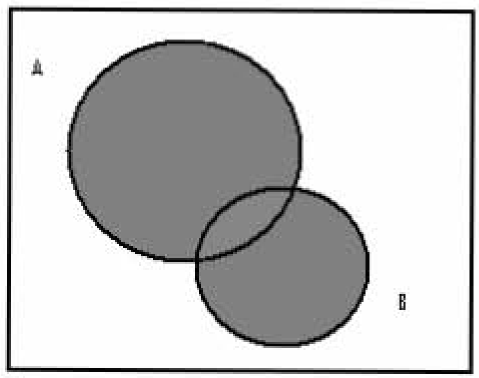
Sea el conjunto A



Y el conjunto B



La unión de los conjuntos A y B denotada como queda representada con el diagrama de Venn siguiente:



Ejemplos Propuestos:

a) Dados *A*= {a, e, i, o, u} y *B*= {a, b, c, d , e}, la unión de *A* y *B* queda determinada como: *A*U*B*= {a, b, c, d, e, i, o, u}
b) Dados *A*= {2, 4, 6, 8} y *B*= {0, 8, 10}, la unión de *A* y *B* quedaría representada *A*U*B*= {0, 2, 4, 6, 8, 10}

2.2.1.1 Propiedades de la unión de conjuntos:

Sí A, B y C son subconjuntos de un conjunto universo U, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. Propiedad Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
II. Propiedad Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
III. Propiedad de Identidad:
   a. $A \cup \varnothing = \varnothing$
   b. $A \cup U = U$

Además, para cualquier pareja de conjuntos A y B se cumple:

- $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.
- Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$.
- Si $A = B$ entonces $A \cup B = A = B$.
- Si $x \in A \cup B$ entonces sucede alguno de los siguientes hechos:
  1. x pertenece a A.
  2. x pertenece a B.
  3. x pertenece a ambos.

2.2.2 Intersección

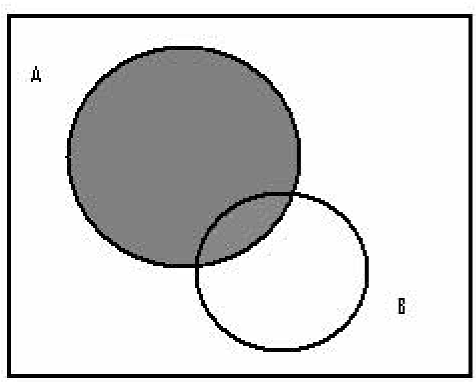
La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a ambos, es decir, aquellos elementos que pertenecen al conjunto A y que también pertenecen a B. Dicha operación se denota por la expresión $A \cap B$, que se lee "A intersección B". Su representación por comprensión quedaría de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ , } x \in B\}$$

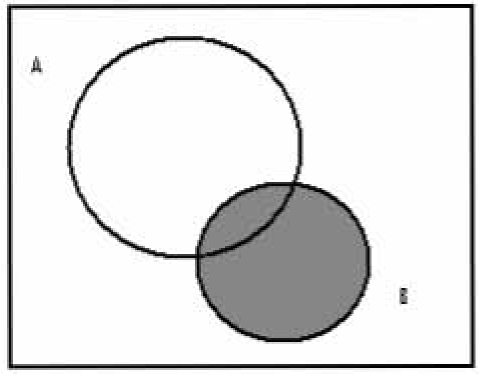
Aquí la coma tiene el significado de "y".

Representación gráfica de la Intersección

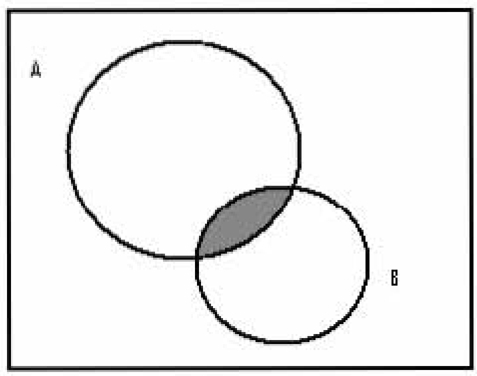
Sea el conjunto A



Y el conjunto B



La intersección de los conjuntos A y B denotada como queda representado con el diagrama de Venn siguiente:



Ejemplos Propuestos:

a) Si M= {4, 6, 8, 12, 16, 20} y N= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, la intersección de M y N denotada como $M \cap N$ seria {4, 8}.
b) Si A= {a, e, i, o, u} y B= {a, b, c}, los elementos en común en ambos conjuntos resultan ser la intersección $A \cap B$= {a}

2.2.2.1 Propiedades de la intersección de conjuntos:

Sí A, B y C son subconjuntos de un conjunto universo U, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. Propiedad Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
II. Propiedad Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
III. Propiedad de Identidad:
    c. $A \cap U = A$
    d. $A \cap \varnothing = \varnothing$

Además, para cualquier pareja de conjuntos A y B se cumple:

- $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.
- Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$.
- Si $A = B$ entonces $A \cap B = A = B$.
- Si $x \in A \cap B$ entonces x pertenece a A y x también pertenece a B.

2.2.2.2 Conjuntos ajenos o disjuntos

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir $A \cap B = \varnothing$, decimos que ambos son conjuntos ajenos o disjuntos entre sí.

Por ejemplo si A= {1, 3, 5, 7, 9} y B= {0, 2, 4, 6, 8}, se observa que $A \cap B = \varnothing$, por lo tanto dichos conjuntos son ajenos o disjuntos entre sí.

2.2.3 Diferencia

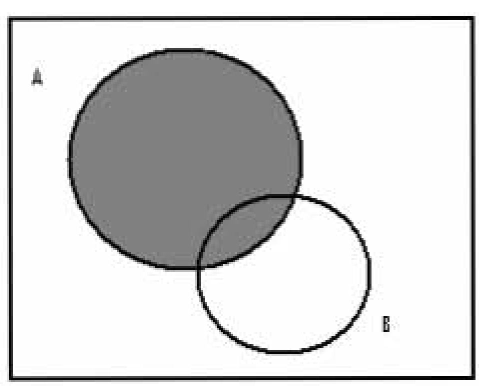
La diferencia de dos conjuntos *A* y *B*, denotada por *A – B*, es el conjunto de todos los elementos de *A* que no pertenecen a *B*. Su representación por comprensión quedaría de la siguiente manera:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

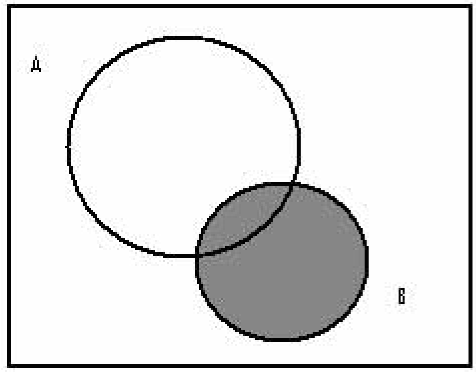
Otra manera de expresar la diferencia de los elementos que pertenecen a un conjunto B pero no a A es, $\{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$ como $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$. Cuando $A \subset B$, entonces $B \setminus A$ es el complemento del conjunto A con respecto al conjunto B, o simplemente el complemento de A con respecto a B.

Representación gráfica de la Diferencia

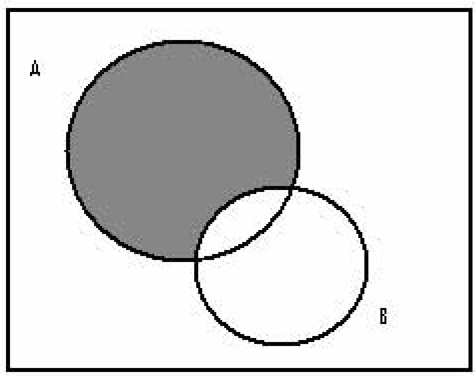
Sea el conjunto A



Y el conjunto B



La diferencia de los conjuntos A y B denotada como queda representada con el diagrama de Venn siguiente:



Ejemplo Propuesto:

a) Dados A= {3, 6, 9, 12, 15, 18} y B= {12, 15, 18, 21, 24}, la diferencia de A y B quedaría representada como A – B= {3, 6, 9}.

b) Si A={1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$} y B= {$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, -1}. B\A, es decir, los elementos que están en B y no están en A son: {$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$, -1}.

2.2.3.1 Propiedades de la diferencia de conjuntos:

I. A – A= $\varnothing$

II. A - $\varnothing$= A

III. A – B= A\B si B$\subset$A

IV. A – B= A$\cap$B’

Además, para cualquier pareja de conjuntos A y B se cumple:

- El conjunto A contiene al A – B como subconjunto, esto es: $(A - B) \subset A$.
- Los conjuntos (A – B), $A \cap B$ y (B – A) son mutuamente disjuntos, es decir, la intersección de dos cualesquiera es vacía.

2.2.4 Complemento

Dados el conjunto universal U y otro conjunto A, donde A es subconjunto de U, definimos el complemento de A, denotado por A' o A^c, como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a U pero que no pertenecen a A. Su representación por comprensión podría ser de cualquiera de las siguientes maneras:

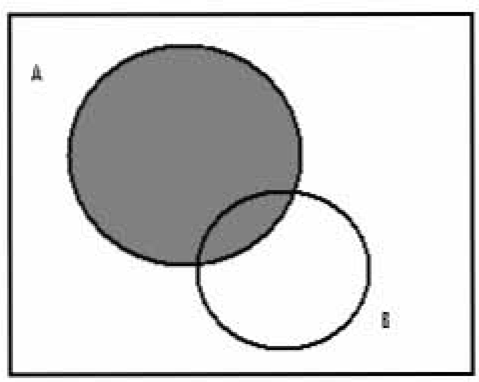
$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

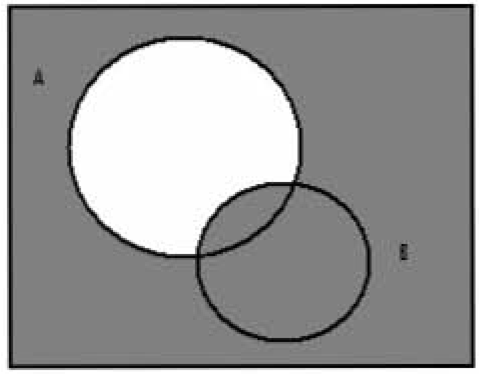
De acuerdo con lo anterior, A'= U – A.

Representación gráfica del Complemento

Sea el conjunto A



El complemento de A denotado como queda representado con el diagrama de Venn siguiente:



Ejemplo Propuesto:

a) Dados U= {a, b, c, d, e, f, g} y A= {a, b, c, d}, el complemento de A quedaría representado como A'= {e, f, g}, ya que estos elementos están en U pero no en A.

2.2.4.1 Propiedades del complemento de un conjunto.

Si U es un conjunto universal y los conjuntos A y B son subconjuntos de U, entonces:

I. $U^c = \varnothing$
II. $\varnothing^c = U$
III. $(A^c)^c = A$
IV. $A \cup A^c = U$
V. $A \cap A^c = \varnothing$
VI. $A \cap B^c = A - B$

Conjuntos

Concepto	*Definición en lenguaje común*	*Definición simbólica*
Igualdad	Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A.	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$
Unión	La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A o x pertenece a B.	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ o $x \in B\}$
Intersección	La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A y x pertenece a B.	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$
Diferencia	La diferencia $A - B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.	$A - B = \{x \mid x \in A$ y $x \notin B\}$
Complemento	El complemento de un conjunto A es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.	$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = U - A$

Tabla 2.2.4.1.1 Tabla de resumen de conjuntos

2.2.5 Intervalos

La notación de Intervalos es una forma conveniente de representar algunos conjuntos importantes de números reales. Por ejemplo, si a < b, entonces el intervalo abierto desde a hasta b está integrado por todos los números entre a y b y se denota (a, b). Utilizando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

Note que los puntos extremos, a y b, no están incluidos en este intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis ( ) en la notación de intervalos y por los círculos en blanco de la gráfica del intervalo.

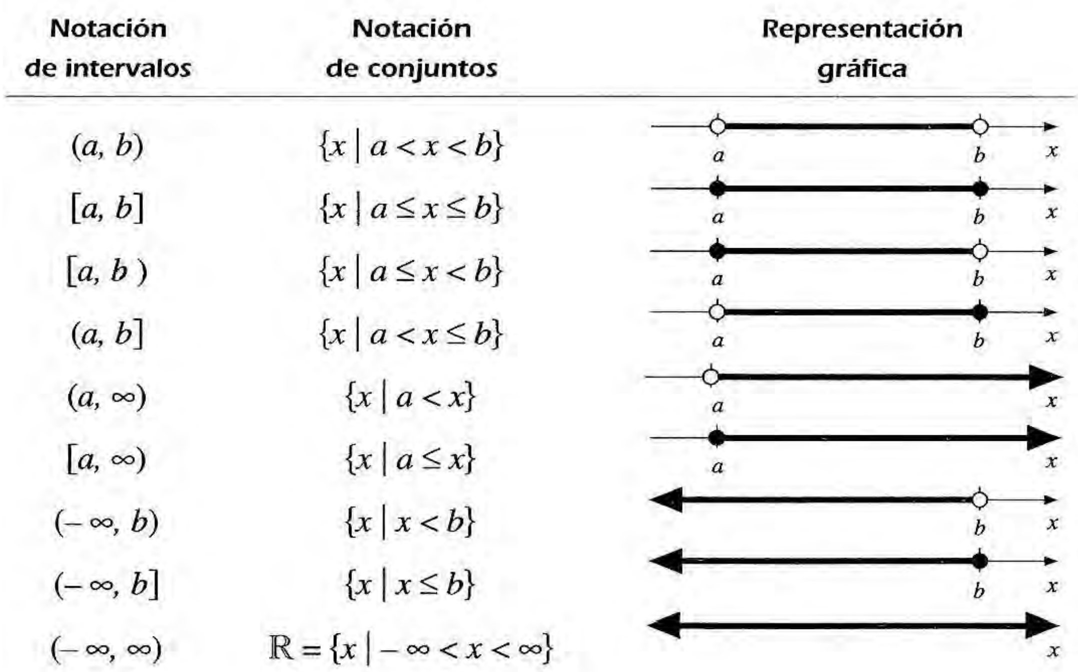
El intervalo cerrado desde a hasta b es el conjunto $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

Aquí los puntos extremos del intervalo han quedado incluidos. Esto se indica mediante corchetes [ ] en la notación de intervalos y con los círculos sólidos de la gráfica del intervalo.

Un intervalo que contiene un extremo pero no el otro se llama semiabierto (aunque también se le podría llamar semicerrado).

Además de los intervalos con extremos finitos, se usa el símbolo infinito, ∞, para indicar que un intervalo se extiende en forma infinita. Se dice que ese intervalo es no acotado. . El intervalo $(-\infty, \infty)$, que representa al conjunto de todos los números reales, no tiene cota inferior ni superior.

En general, un paréntesis rectangular indica que el número junto a él pertenece al intervalo, y uno redondo indica que no pertenece. Los símbolos ∞ y $-\infty$ sólo son símbolos, y no representan números reales.



Notación de intervalos	Notación de conjuntos	Representación gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$	

Tabla 2.2.5.1 tabla de intervalos

Determinación de uniones e intersecciones de intervalos

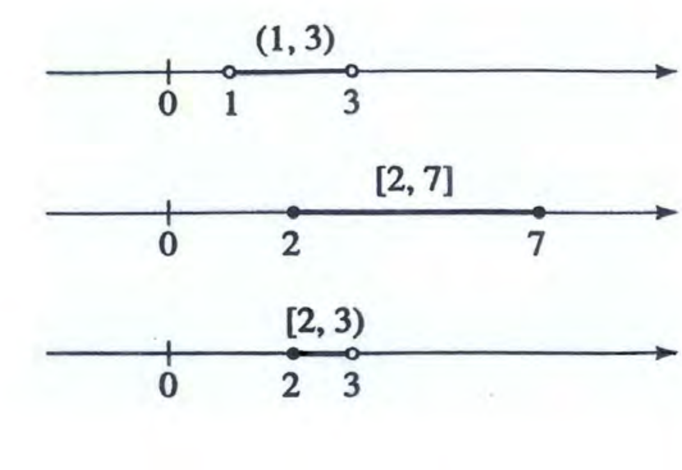
1. Grafique $(1, 3) \cap [2, 7]$.

Solución:

La intersección de dos intervalos está formada por los números que se encuentran en ambos.

Por lo tanto:

$$(1,3) \cap [2, 7] = \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\} = \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)$$



2. Si A = $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$ y B = $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{2} < x < 6\}$ hallar $A \cap B$.

Solución:

Observamos que los elementos de A corresponden a los puntos del segmento que va de -3 a 4, incluyendo sus extremos, y los elementos de B son los que corresponden al segmento que va de 7/2 a 6, sin incluir sus extremos. Los puntos que están en ambos segmentos son los que están en el segmento que une a 7/2 con 4, excluido el extremo inicial e incluido el extremo final.

Entonces: $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{2} < x \leq 4\}$.

3. Si A = $\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq 7\}$ y B = $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < \frac{22}{3}\}$ encontrar $A \cup B$.

Solución:

Recordemos que $-\pi \leq x \leq 7$ significa $-\pi < x$ y $x \leq 7$.

Puesto que:

$-\pi < -3$ y $7 < \frac{22}{3}$, entonces: $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x < \frac{22}{3}\}$.

2.2.6 Desigualdades

Propiedades con ejemplos propuestos:

I. Si a, b, y c son números reales, entonces
II. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Por ejemplo: $2 < 3$ y $3 < 8$, de modo que $2 < 8$.
III. Si $a < b$, entonces $a + e < b + e$. Por ejemplo: $-5 < -3$, por lo que $-5 + 2 < -3 + 2$; es decir, $- 3 < -l$.
IV. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. Por ejemplo: $-5 < - 3$ y $2 > 0$, de modo que $(-5)(2) < (-3)(2)$; es decir $-10 < -6$.
V. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. Por ejemplo: $- 2 < 4$ y $- 3 < 0$, de modo que $(-2)(-3) > (4)(-3)$; es decir, $6 > -12$.

Se cumplen otras propiedades similares si cada signo de desigualdad $<$ entre a y b se remplaza por $\leq$, $\geq$ o $>$.

Un número real es una solución de una desigualdad en una variable si se obtiene un enunciado verdadero al remplazar la variable por dicho número. El conjunto de todos los números reales que satisfacen una desigualdad es el conjunto solución. A las desigualdades que contienen variables se les llama inecuaciones.

Para resolver una desigualdad hacemos lo siguiente:

Igual que una ecuación, excepto en que se invierte el signo de la desigualdad cuando:

a) se multiplican ambos lados por un número negativo.

b) se toman los recíprocos en ambos lados de la desigualdad.

Ejemplos Propuestos

1. Determine todos los números reales que satisfacen $2x - 1 < 4x + 3$

Para determinar los números x que satisfacen la desigualdad, se despeja la x aplicando las propiedades de las desigualdades.

Primero se suma -3 a ambos lados para obtener $2x - 4 < 4x$

Ahora se suma $- 2x$ a cada lado y se obtiene $- 4 < 2x$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $\frac{1}{2}$ nos queda $- 2 < x$

Esta solución también se puede escribir en la forma $x > -2$ o bien $(-2,\infty)$

Graficando: -2 0 x

2. Determine todos los números reales x que satisfacen $- 1 < 2x + 3 \leq 5$.

Esta relación de desigualdad es una forma compacta de expresar que se tienen las relaciones $-1< 2x+3$ y $2x + 3 \leq 5$

Procediendo como en el ejemplo 1, sumamos -3 a ambos lados de cada desigualdad para obtener $-4 < 2x$ y $2x \leq 2$

Multiplicando ambas desigualdades por $\frac{1}{2}$ se obtiene $-2<x$ y $x\leq 1$

Este último conjunto de desigualdades se puede expresar en la forma compacta $-2 < x \leq 1$ o bien $(-2,1]$

Graficando: 2 -1 0 1 x

3. Resolver la desigualdad $-1 \leq 2x - 5 < 7$

Se suma 5 a cada miembro de la doble desigualdad: $4 \leq 2x < 12$

A continuación se multiplica cada miembro de la desigualdad resultante por 1/2: $2 \leq x < 6$

La solución es el conjunto de todos los valores de x que están en el intervalo [2,6).

4. Resolver 2x + 7 < 5x – 8

-5x + (2x + 7) < (5x - 8) - 5x

-3x + 7 < -8

-3x + 7 - 7 < -8 -7

-3x < -15

$-\frac{1}{3}(-3x) > -\frac{1}{3}(-15)$

Se observa que al multiplicar por un número negativo se cambió de < a > dando como resultado:

$$x > 5$$

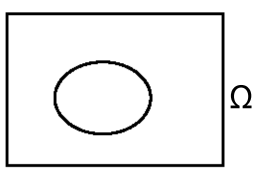
Por lo tanto, la solución es: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ o bien $(5,\infty)$

2.2.7 Diagramas de Venn Euler

Una forma adicional para representar de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos es por medio de un gráfico al cual se le conoce como Diagrama de Venn-Euler, o de Venn.

Su origen nace de una necesidad al representar conjuntos en una forma gráfica dado la naturaleza de ser más simple lo gráfico y visual.

Consta de:

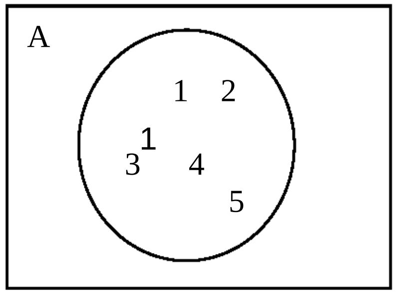


Un área de trabajo en forma rectangular que representa el Universo total de los elementos que existen.

Una serie de óvalos o círculos que representan los conjuntos y dentro de los cuales se enlistan los elementos.

Un ejemplo de un diagrama de Venn Euler quedaría representado de la siguiente forma:

A= {1, 2, 3, 4, 5}



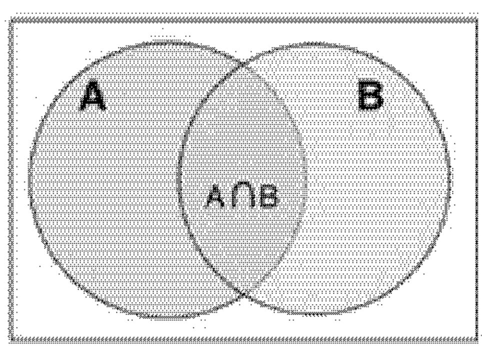
2.3 Cardinalidad de la unión, de la intersección y del complemento

Como habíamos visto la cardinalidad indica el número o la cantidad de los elementos constitutivos de un conjunto. Es interesante destacar que este concepto nos será de gran utilidad en la siguiente unidad, pues en él se basa la noción de probabilidad.

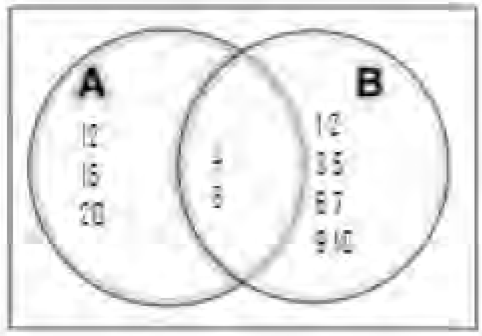
A continuación ejemplificaremos con conjuntos y diagramas la cantidad de elementos (ninguno, algunos o todos) que pertenecen a una operación dada entre conjuntos.

Ejemplo Propuesto:

Si M={4, 8, 12, 16, 20} y N={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, el conjunto solución $M \cap N$ es:

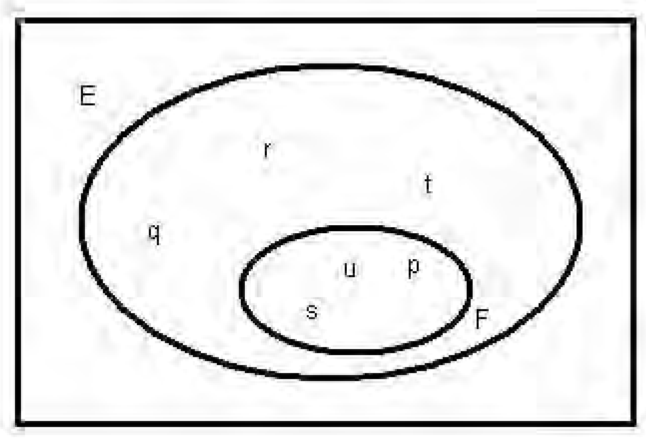


Expresado con los elementos comunes a los conjuntos M y N: $M \cap N = \{4, 8\}$



Ejemplo Propuesto:

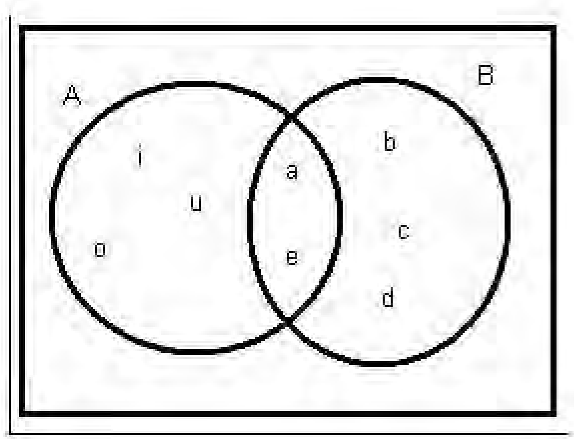
Sean los conjuntos E={p, q, r, s, t, u} y F={p, s, u} de tal manera $E \cup F$ es:



$$E \cup F = \{p, q, r, s, t, u\} = E$$

Ejemplo Propuesto:

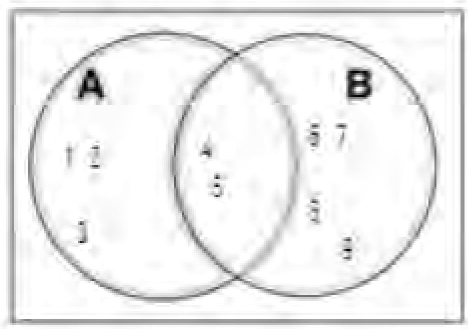
Dados A={a, e, i, o, u} y B={a, b, c, d, e} la operación $A \cup B$ quedaría representada por:



$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$$

Ejemplo Propuesto:

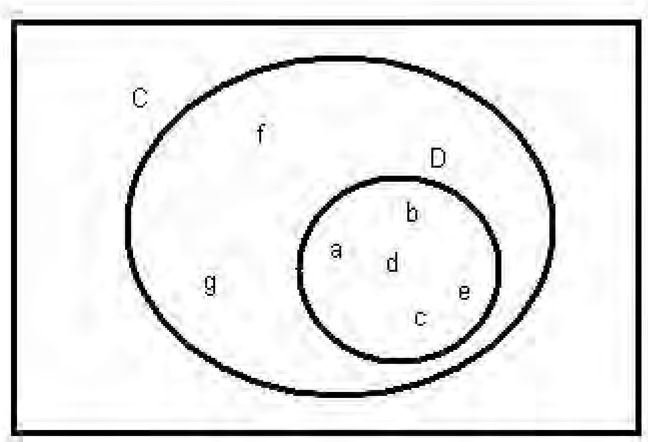
Sean los conjuntos A={1, 2, 3, 4 ,5} y B={4, 5, 6, 7, 8, 9}, el conjunto $A \cap B$ por consiguiente es:



$$A \cap B = \{4,5\}$$

Ejemplo Propuesto:

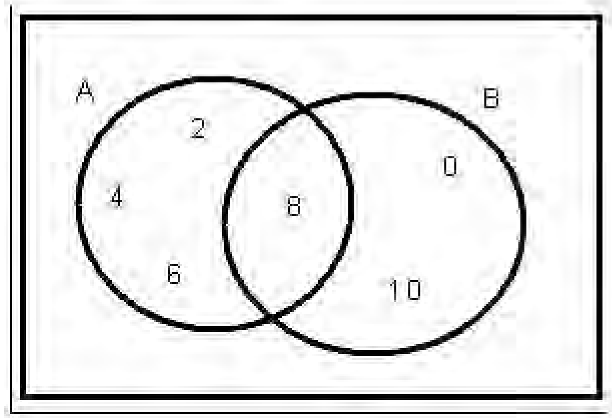
Sean los conjuntos C={a, b, c, d, e} y D={a, b, c, d, e, f, g} entonces $C \cap D$ es:



$$C \cap D = \{a,b,c,d,e\} = C$$

Ejemplo Propuesto:

Dados A={2, 4, 6, 8} y B={0, 8, 10}, la solución de $A \cup B$ sería:

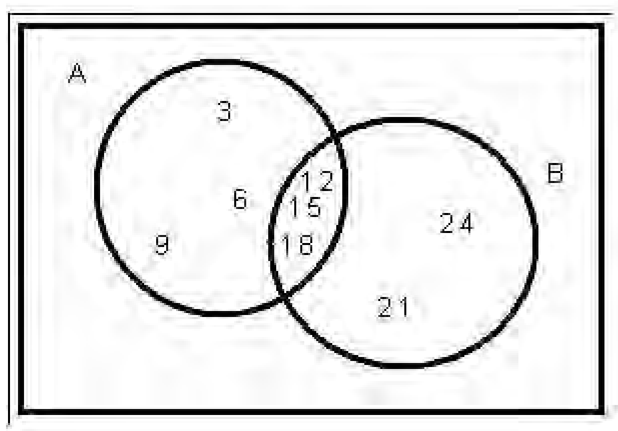


$$A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Ejemplo Propuesto:

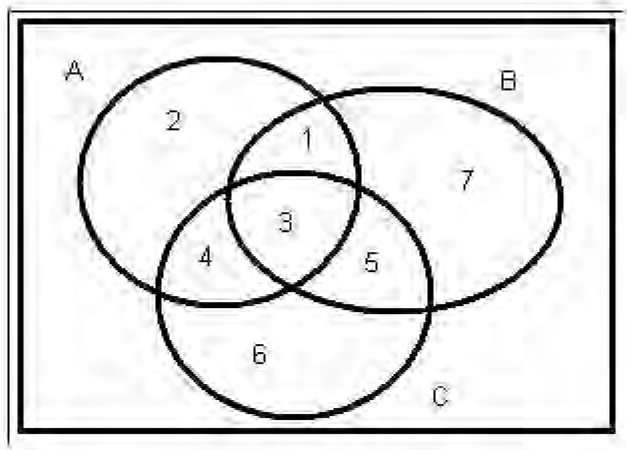
Dados A={3, 6, 9, 12, 15, 18} y B={12, 15, 18, 21, 24}, el conjunto que muestra $A - B$ es:

$A - B = \{3, 6, 9\}$ que son los elementos que están en A pero no en B



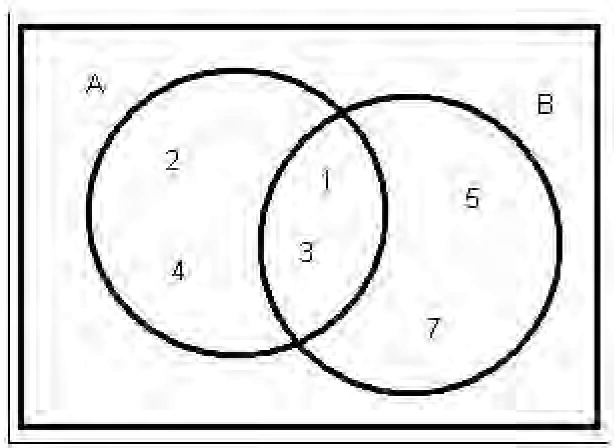
Ejemplo Propuesto:

Sean los siguientes conjuntos A={1, 2, 3, 4}, B={1, 3, 5, 7} y C={3, 4, 5, 6} representados por el diagrama siguiente



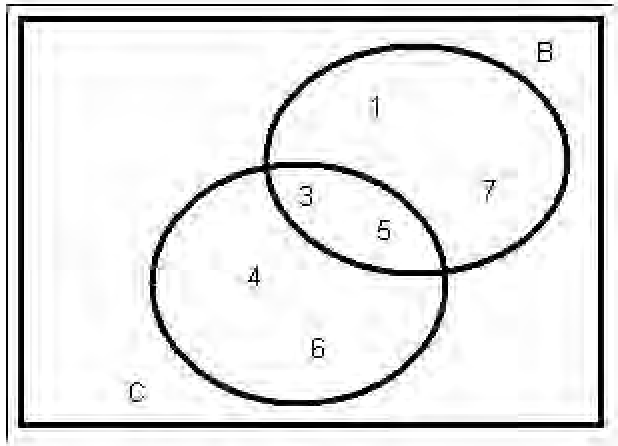
De modo tal que:

- $A - B$ sería



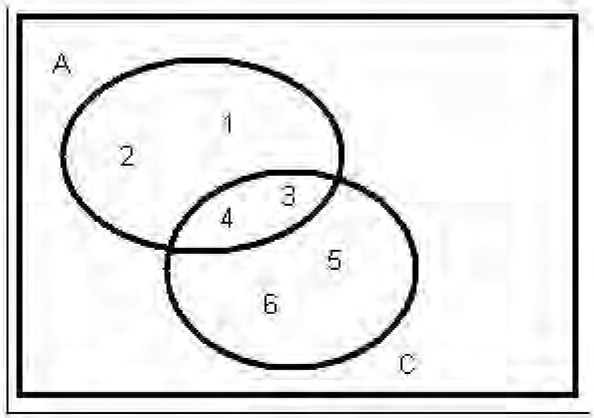
$$A - B = \{2, 4\}$$

- $B - C$ está dado por



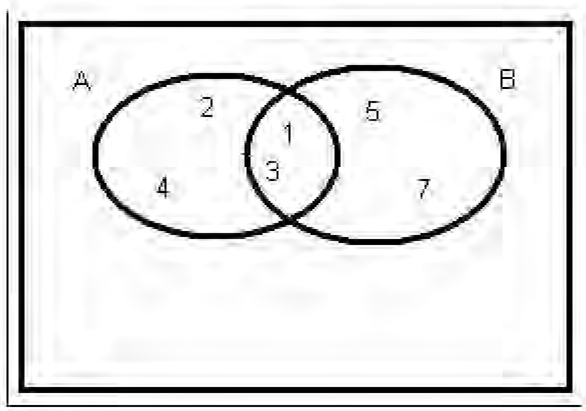
$$B - C = \{1,7\}$$

- $C - A$ queda representado como



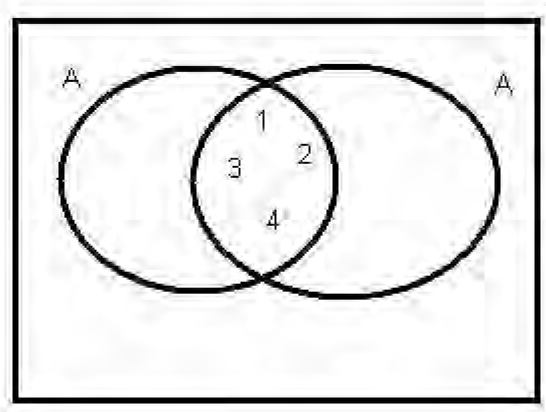
$$C - A = \{5,6\}$$

- $B - A$



$$B - A = \{5,7\}$$

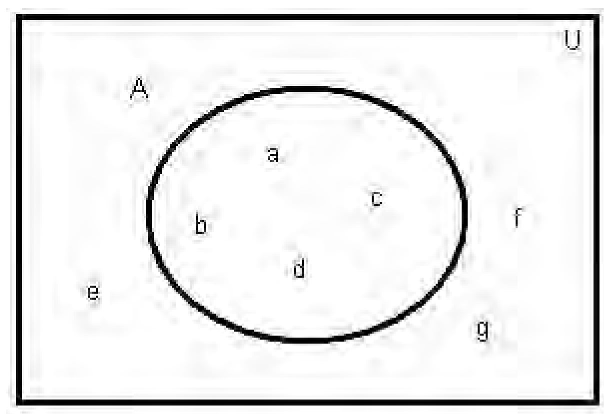
- $A - A$



$A - A = \phi$

Ejemplo Propuesto:

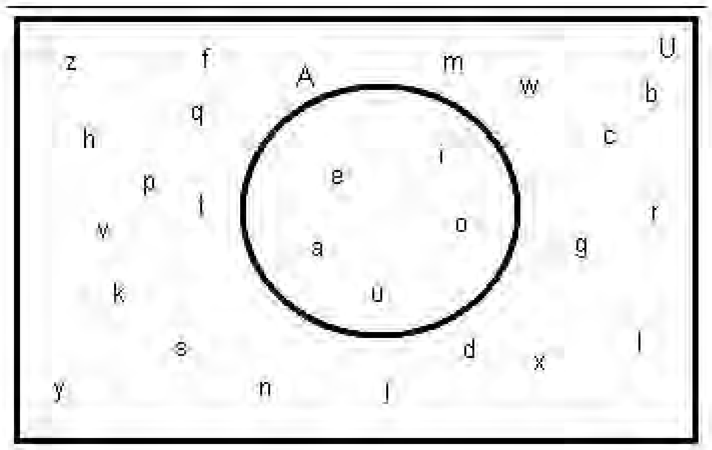
Dados $\mho = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a, b, c, d\}$ el conjunto solución que representa A' es:



$A' = \{e, f, g\}$, los elementos que están en el universo $\mho$ pero no en *A*

Ejemplo Propuesto:

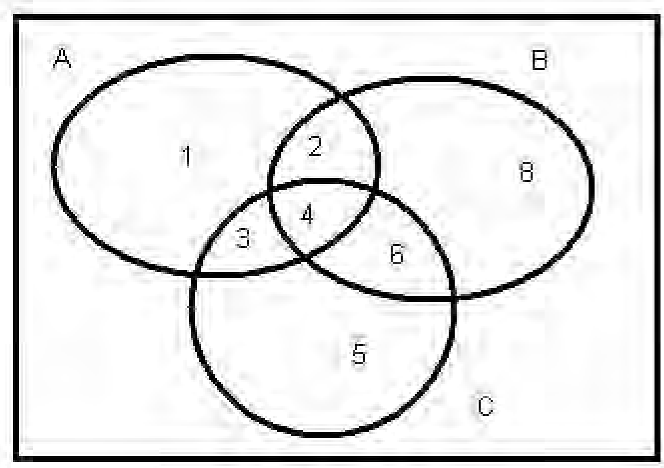
Dados los conjuntos $\mho = \{x / x \text{ } es \text{ } una \text{ } letra \text{ } del \text{ } alfabeto\}$ y $A = \{a, e, i, o, u\}$ representados por el diagrama



Llamamos $A' = \{x / x \text{ } es \text{ } una \text{ } consonante \text{ } del \text{ } alfabeto\}$

Ejemplo Propuesto:

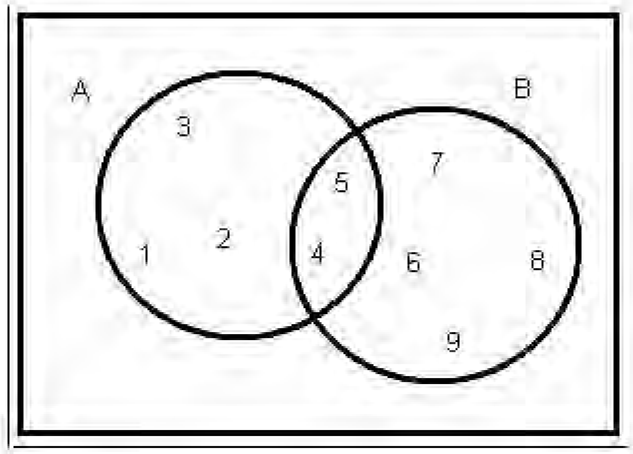
Sean los conjuntos A={1, 2, 3, 4}, B={2, 4, 6, 8} y C={3, 4, 5, 6} representados por medio del diagrama de Venn siguiente



De tal manera que: $A - B = \{1,3\}$, $B - C = \{2,8\}$, $C - A = \{5,6\}$, $B - A = \{6,8\}$, $A - A = \phi$

Ejemplo Propuesto:

Sean los conjuntos A={1, 2, 3, 4, 5} y B={4, 5, 6, 7, 8, 9} entonces $A \cup B$ es:

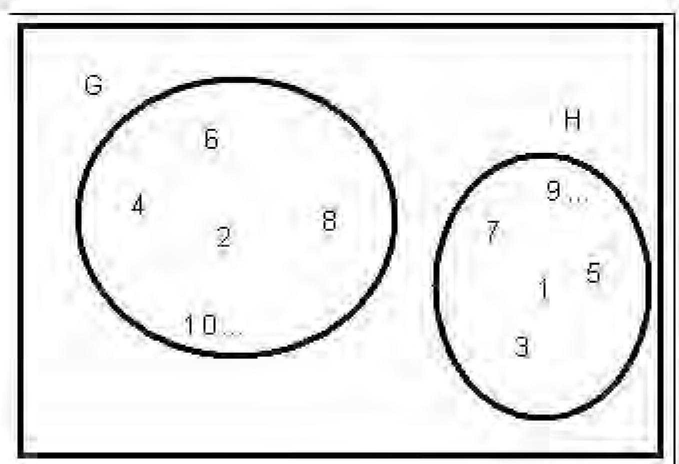


$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Además, $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$

Ejemplo Propuesto:

Sean los conjuntos $G = \{x \in \mathbb{N} / x\ es\ \ par\}$ y $H = \{x \in \mathbb{N} / x\ es\ impar\}$ entonces $G \cup H$:



$$G \cup H = \mathbb{N}$$

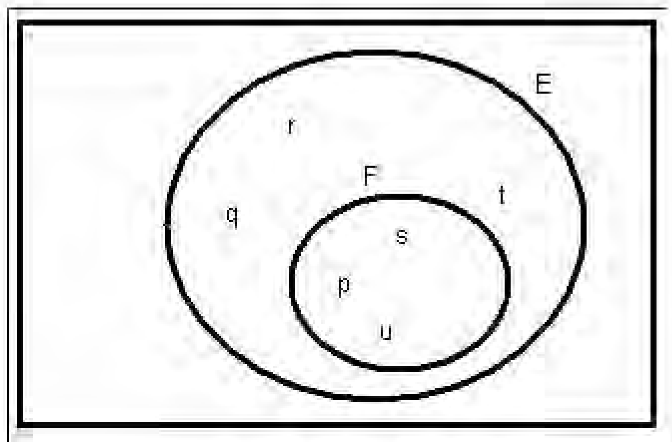
Ejemplo Propuesto:

Dados los conjuntos V={a, b, c, d, e, f, h, i, j, k}, X={a, e, i, o, u}, Y={f, g, h ,i a, e}, Z={o, u, p, q, a, e}, y al conjunto universal $\mho$={el abecedario}, el complemento de V será:

$$V' = V^c = \{ch, g, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Ejemplo Propuesto:

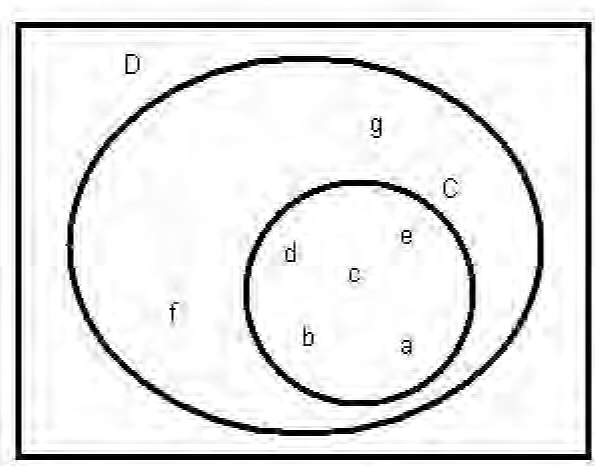
Sean los conjuntos E={p, q, r, s, t, u} y F={p, s, u} de tal manera $E \cap F$ es:



$$E \cap F = \{p, s, u\} = F$$

Ejemplo Propuesto:

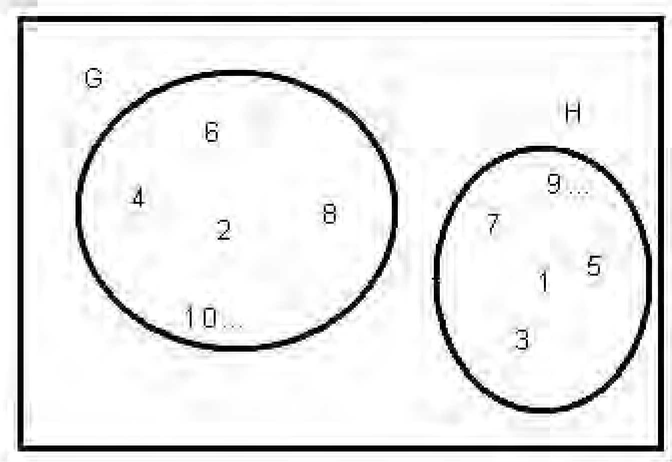
Sean los conjuntos C={a, b, c, d, e} y D={a, b, c, d, e, f, g} entonces $C \cup D$ es:



$$C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g\} = D$$

Ejemplo Propuesto:

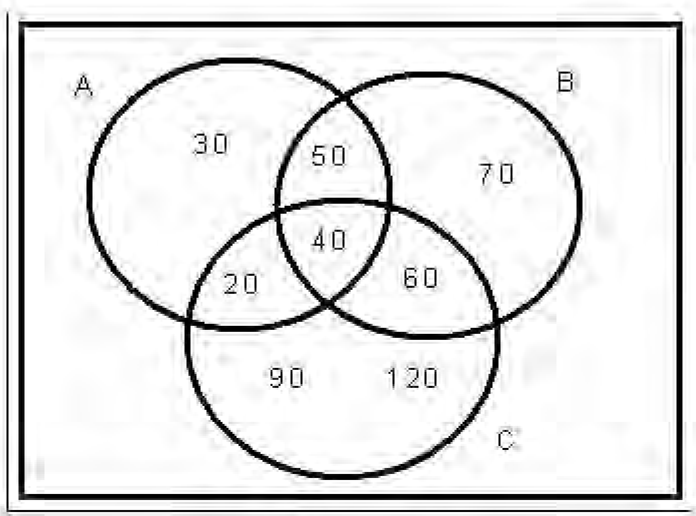
Sean los conjuntos $G=\{x\in\mathbb{N}/x\ es\ par\}$ y $H=\{x\in\mathbb{N}/x\ es\ impar\}$ entonces $G\cap H$:



$G\cap H=\phi$

Ejemplo Propuesto:

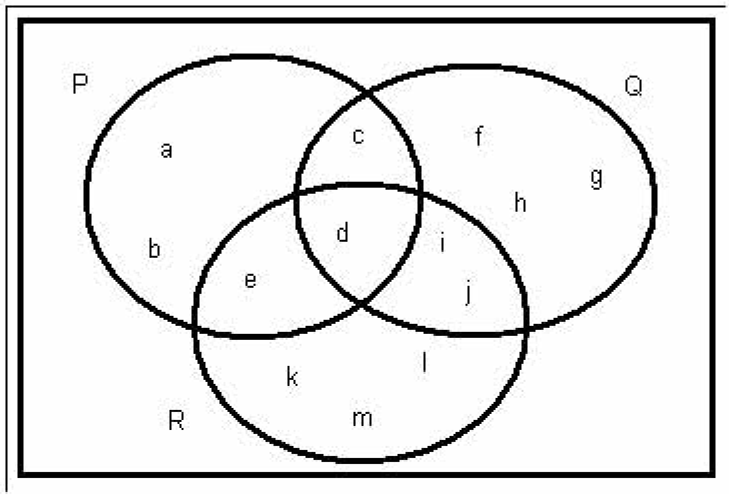
Sean los conjuntos A={20, 30, 40, 50, 60, 70}, B={20, 30, 40, 50, 60, 90, 120}, C={20, 40, 50, 60, 70, 90, 120} representados como:



Por tanto: $A\cap B=\{40,50\}$, $A\cap C=\{20,40\}$, $B\cap C=\{40,60\}$ .Además $A\cap B\cap C=\{40\}$

Ejemplo Propuesto:

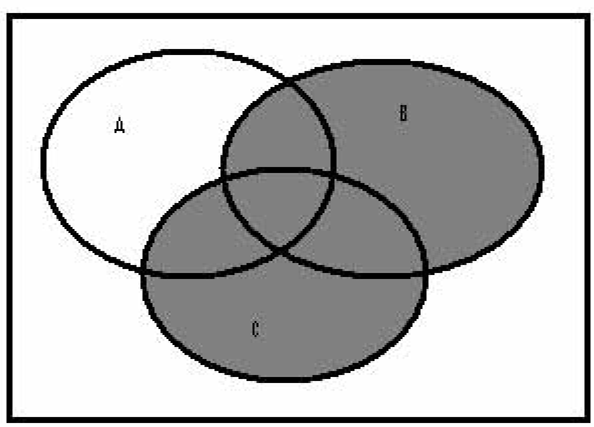
Sean los conjuntos P={a, b, c, d, e}, Q={c, d, f, g, h, i, j} y R={d, e, i, j, k, l, m}, entonces su diagrama de Venn quedaría:



De tal modo que: $P \cup Q \cup R = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m\}$, $P \cap Q = \{c,d\}$, $P \cap R = \{d,e\}$, $Q \cap R = \{d,i,j\}$, además $P \cap Q \cap R = \{d\}$

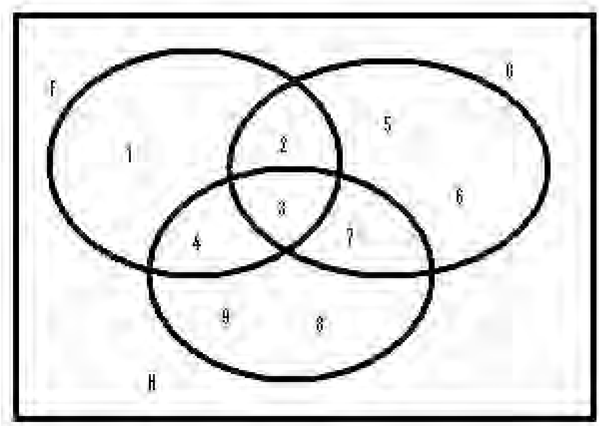
Ejemplo Propuesto:

Sombrear en un diagrama de Venn la proposición $A \cap (B \cup C)$



Ejemplo Propuesto:

Sean los conjuntos F={1, 2, 3, 4}, G={2, 3, 5, 6, 7}, H={3, 4, 7, 8, 9} representados a través del siguiente diagrama:



Entonces: $F \cup G = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $F \cup H = \{1,2,3,4,7,8,9\}$, $G \cup H = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

y $F \cup G \cup H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

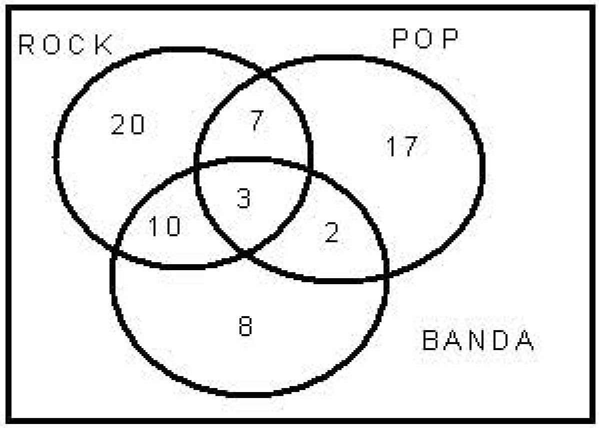
Así como: $F \cap G = \{2,3\}$, $F \cap H = \{3,4\}$, $G \cap H = \{3,7\}$, por último $F \cap G \cap H = \{3\}$

Ejemplo Propuesto:

Un estudio de mercado dio como resultado la siguiente información:

Número de estudiantes	Genero de su preferencia
29	Pop
23	Banda
40	Rock
10	Rock y Pop
13	Banda y Rock
5	Pop y Banda
3	Rock, Pop y Banda

Si el total de estudiantes encuestados fueron 70 representados a través del siguiente diagrama de Venn

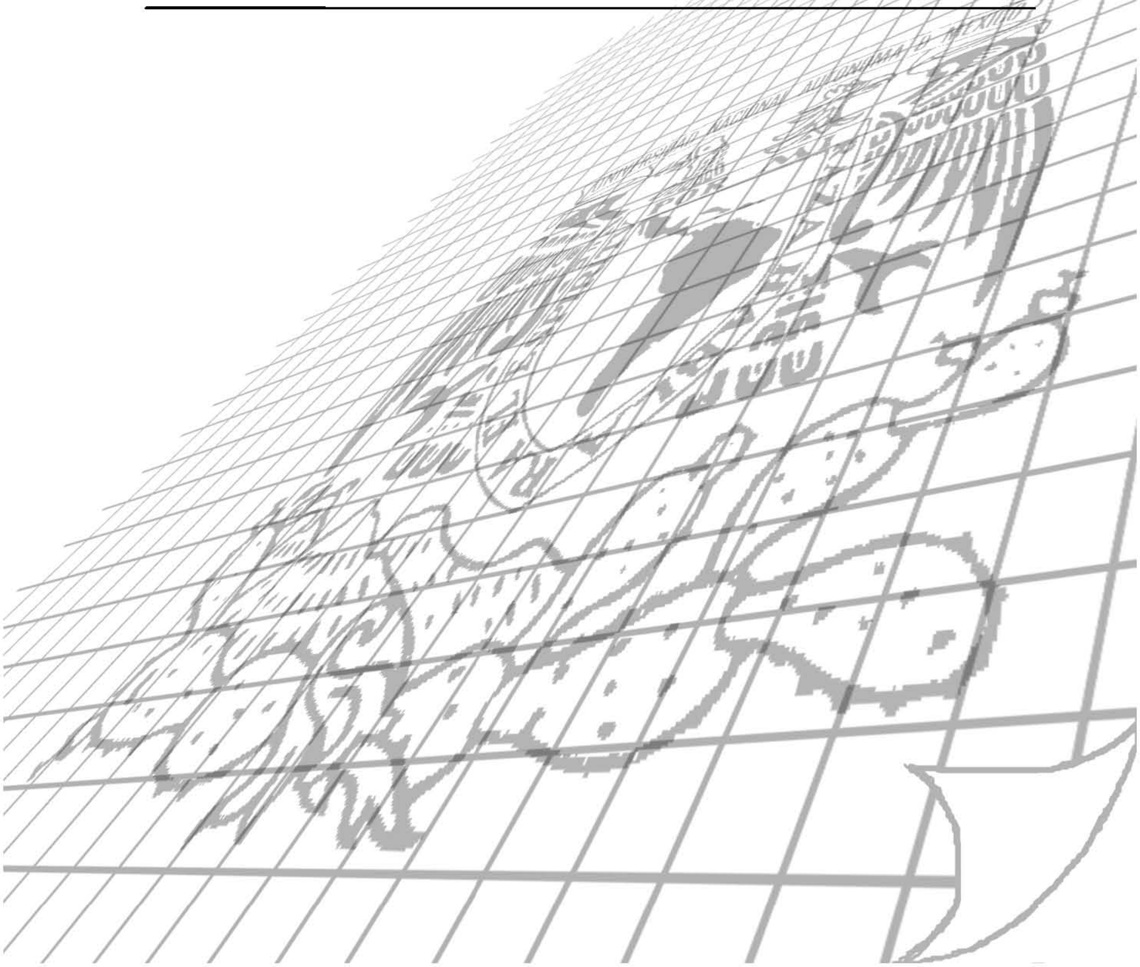


Podemos calcular lo siguiente:

a) El número de estudiantes que sólo les gusta el Pop son 17.
b) El número de estudiantes que les gusta el Rock y la Banda, pero no el Pop son 38.
c) El número de estudiantes que no les gusta ninguno de los géneros musicales de la encuesta fueron 3.

Como se pretende mostrar, con los conocimientos desarrollados durante esta unidad, los cuales abarcan tipos de conjuntos, simbologías, operaciones con conjuntos, representaciones gráficas, cardinalidad, entre otros, es posible que el alumno, profundizando y aplicando los conceptos vistos y estudiados, aplique su conocimiento con el fin de solucionar problemas probabilísticos, los cuales implican llegar a una mayor dificultad, pues por medio de procesos y métodos que llevan de lo complejo a lo simple, es capaz de llegar a una solución de los mismos.

CAPÍTULO III PROBABILIDAD



CAPÍTULO 3 Probabilidad

"Debemos creer en la suerte. Porque, ¿De qué otra manera se explica el éxito de las personas que no nos gustan?"

Jean Cocteau

"Usted cree en un Dios que juega a los dados, y yo, en la ley y el orden absolutos en un mundo que existe objetivamente, y el cual, de forma insensatamente especulativa, estoy tratando de comprender [...]. Ni siquiera el gran éxito inicial de la teoría cuántica me hace creer en un juego de dados fundamental, aunque soy consciente de que sus jóvenes colegas interpretan esto como un síntoma de debilidad" [Carta dirigida a Max Born.]

Albert Einstein

"La necesidad de jugar es tan apremiante y su práctica tan placentera, que supongo que debe ser pecado"

Heywood Broun

"Dios no sólo juega a los dados: a veces los tira donde no se pueden ver"

Stephen William Hawking

Objetivo: Que el alumno sea capaz de identificar a la probabilidad como un instrumento confiable en la inferencia y toma de decisiones.

Temas Desglosados:

3.1 Espacio Muestral

3.2 Experimentos y eventos

3.3 Principio fundamental del Conteo

3.4 Análisis Combinatorio

3.5 Concepto de Probabilidad

3.6 Eventos

3.7 Teoremas de la Probabilidad

3.8 Variables aleatorias: Discretas y Continuas

3.9 Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas

Orígenes del cálculo de probabilidades

Desde la antigüedad más remota, los juegos de azar y de suerte han interesado al hombre; se sabe que el uso de tablas es tan viejo como la humanidad misma y parece ser el antecesor de los dados y de la ruleta. El primer dado conocido es de arcilla cubierta de cuero, fue encontrado al norte de Irak y data de principios del tercer milenio a.C.

Los griegos, que tenían una diosa de la suerte llamada Tique, de origen egipcio, construyeron dados poliédricos que recordaban los sólidos platónicos, algunos se conservan en el museo de Louvre en París.

Según la Biblia, unos 1000 años a.C., los israelitas eligieron un rey por sorteo (Samuel 10:20-24).

Pero el cálculo de probabilidades entró muy lentamente a formar parte del campo de las matemáticas, El primer documento conocido donde se analizan los juegos de azar en forma sistemática es el *Liber de ludo aleæ* (manual sobre juegos de azar), escrito por Gerolamo Cardano alrededor de 1550, pero publicado cien años después de su muerte. El gran Galileo también se interesó por lo juegos de azar y escribió un folleto titulado Sopra le scopere dei dadi (Descubrimiento sobre los juegos de azar con dados) publicado en 1718.

A continuación, muestro algunos de los problemas concretos y prácticos que he empleado en mi experiencia docente a partir de los cuales se fue creando poco a poco el modelo matemático que es hoy el cálculo de probabilidades.

El problema del duque de Toscana (1560)

El duque de Toscana fue un jugador empedernido, y había observado que en un juego en el que se tiran tres dados y se suman los puntos, el 10 aparecía más veces que el 9.

Sin embargo, según el duque, ambos números se pueden obtener de las seis maneras que se lista abajo.

1+2+6=9	1+3+6+10
1+3+5=9	1+4+5+10
1+4+4=9	2+2+6+10
2+2+5=9	2+3+5+10
2+3+4=9	2+4+4+10
3+3+3=9	3+3+4+10

Cardano fue consultado y estudió el problema, pero no encontró respuesta satisfactoria. Fue Galileo quien encontró la solución 50 años más tarde, para ello contó todos los casos posibles y, por primera vez, presentó los datos en tablas de distribución, como la siguiente, que corresponde al problema anterior:

El obtiene 9 de las siguientes maneras: (6,1,2), (6,2,1), (5,1,3), (5,2,2), (5,3,1), (4,4,1),…,(1,6,2). En total, hay 25 maneras de obtener 9.

El 10 se obtiene de 27 maneras diferentes: (6,1,3), (6,2,2), (6,3,1), (5,1,4), (5,2,3), (5,3,2),…

Por lo tanto, es normal que el 10 ocurra con más frecuencia que el 9.

Suma de los puntos con 3 dados	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de maneras de obtenerlos	1	3	6	10	15	21	25	27
Suma de los puntos con 3 dados	11	12	13	14	15	16	17	18
Número de maneras de obtenerlos	27	25	21	15	10	6	3	1

Los problemas del Caballero de Méré (1651)

Antoine de Gambaud, Chevalier de Méré, fue jugador, hombre de letras y cortesano muy conocido en la corte del rey Luis XVI de Francia. Su primer problema es parecido al del duque de Toscana: ¿Cómo puede ser que el 11 ocurra más veces que el 12 cuando tiran tres dados, si ambos números se pueden formar de seis maneras distintas? El Caballero de Méré consultó a su amigo Blaise Pascal quien, mediante ese problema, empezó a interesarse por las probabilidades y resolvió este mismo problema (utilizó el mismo método que Galileo) y muchos más.

Para el segundo problema del Caballero de Méré, Pascal pidió la opinión de Fermat y escribió (1654): “El Caballero de Méré es muy talentoso, pero no es matemático y eso, Usted lo sabe bien, es un gran defecto”. Este es el problema:

Dos personas, A y B, participan en un juego donde las dos tienen la misma probabilidad de ganar (o sea ½; por ejemplo, lazando una moneda). El primero que gane cinco veces cobra el premio de 4200 franco franceses. Desgraciadamente, después de lanzar la moneda siete veces hay que suspender la contienda; en ese momento A ha ganado 4 veces y B 3 veces.

¿Cómo tiene que dividirse el premio entre los dos jugadores?

Se propusieron varias soluciones:

a) Dividir el premio proporcionalmente 4 y 3, puesto que el torneo terminó de esa forma; o sea, A cobrará 2400 FF y B cobraría 1400 FF.
b) Dividir el premio proporcionalmente a (5-3) y (5-4), o sea 2 y 1

En este caso, A cobraría 2800 FF y B cobraría 1400 FF.

Ninguna de las soluciones presentadas convencían a los jugadores, hasta que Pascal y Fermat propusieron un esquema que tomaba en cuenta el hecho de que A tenía la ventaja de haber ganado ya 4 partidas. El análisis que hicieron inició el estudio de la "probabilidad condicionada", y el método que usaron se aplica hoy a muchas situaciones que van desde negocios hasta medicina. Un diagrama de árbol facilita la representación visual del problema:

$$A \text{ ganó } 4 \text{ partidas} \left\{ \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ gana } 5 \text{ a } 3 \right\}$$

$$B \text{ ganó } 3 \text{ partidas} \left\{ \frac{1}{2} \Rightarrow B \text{ gana} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ gana } 5 \text{ a } 4 \\ \frac{1}{2} \Rightarrow B \text{ gana } 5 \text{ a } 4 \end{array} \right\} \right\}$$

Octava partida novena partida

Probabilidad de que *A* gane:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\surd$$

Por lo tanto A debe cobrar: $\frac{4200*3}{4}=3{,}150FF$

Probabilidad de que B gane:

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto B debe cobrar: $\frac{4200*1}{4}=1{,}050FF$

El error de d'Alembert (Siglo XVIII)

Jean Le Ronde d'Alembert fue un famoso matemático francés del siglo XVIII; es también famoso por haberse equivocado en el siguiente problema que le fue planteado en 1754:

¿Cuál es la probabilidad de que salga cara por lo menos una vez cuando lanzan las dos monedas? (cara-cruz equivale a águila-sol).

D'Alembert analizó el problema diciendo que existían tres posibilidades:

Cara en el primer lanzamiento
Cara en el segundo lanzamiento
Ninguna cara

Como hay tres casos posibles y dos favorables la probabilidad buscada es 2/3.

El análisis correcto es observar que hay 4 casos posibles: cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, cruz-cruz; en tres de estos casos por lo menos una vez, la probabilidad buscada es por lo tanto ¾ .

La paradoja de San Petersburgo (Siglo XVIII)

En 1725, Daniel y Nicolás Bernoulli enseñaban matemáticas en la academia (que Pedro el Grande de Rusia acababa de crear) de la ciudad de San Petersburgo, Nicolás había propuesto en los Commontarii de dicha academia el problema siguiente, conocido como la paradoja de San Petersburgo.

El juego consiste en lanzar una moneda hasta que salga cara.

- Si sale cara la primera vez, Daniel paga una corona a Nicolás.
- Si sale cruz primero y cara en el segundo lanzamiento (Cr, C), Daniel paga dos coronas.
- Si cale cara por primera vez en el tercer lanzamiento (Cr, Cr, C), Daniel paga 4 coronas.
- Si la sucesión es (Cr, Cr, Cr, C), Daniel paga 8 coronas.
- Si la sucesión es Cr, Cr, Cr,…, Cr, C, con *n* lanzamientos, Daniel paga 2^{n-1} coronas.

En otras palabras:

La probabilidad de que Nicolás cobre 1 corona es ½

La probabilidad de que Nicolás cobre 2 coronas es ¼

La probabilidad de que Nicolás cobre 4 coronas es ⅛

Etc…

El problema es: ¿Cuánto tiene que pagar Nicolás a Daniel para jugar si quiere que el juego sea equitativo?

Lo que puede ganar Nicolás (su esperanza matemática) es:

$$\frac{1}{2}1+\frac{1}{2^2}2+\frac{1}{2^3}2^2+\frac{1}{2^4}2^3+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

una suma infinita; por lo tanto, en teoría, tendría que pagar una suma infinita de dinero para que el juego sea equitativo. Sin embargo, el sentido común sugiere que sólo hay que pagar una pequeña cantidad.

Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, un conocido naturalista francés (1701-1788), hizo una prueba empírica: contrató un niño para que lanzara la moneda al aire muchas veces (no había entonces computadoras para hacer experimentos simulados). El niño lanzó la moneda 2084 veces y encontró que Nicolás tendría que pagar a Daniel 10057 coronas, un promedio de 5 coronas por partida, no la suma infinita dada por la teoría (en el experimento simulado, se pagó, en 1061partidas, 1 corona; en 494 partidas, se pagaron 2 coronas etc..).

El conde Buffon fue el primero en subrayar la importancia de la verificación de una teoría con experimentos reales.

Se ha tratado de explicar la paradoja de San Petersburgo de varias maneras. Daniel Bernoulli inventó el principio de “Esperanza Moral”, y describió una nueva función que denominó “función utilitaria”: el valor de una pequeña cantidad de dinero no es el mismo para un rico que para un pobre (definió la “esperanza moral” como la esperanza matemática del logaritmo de la fortuna).

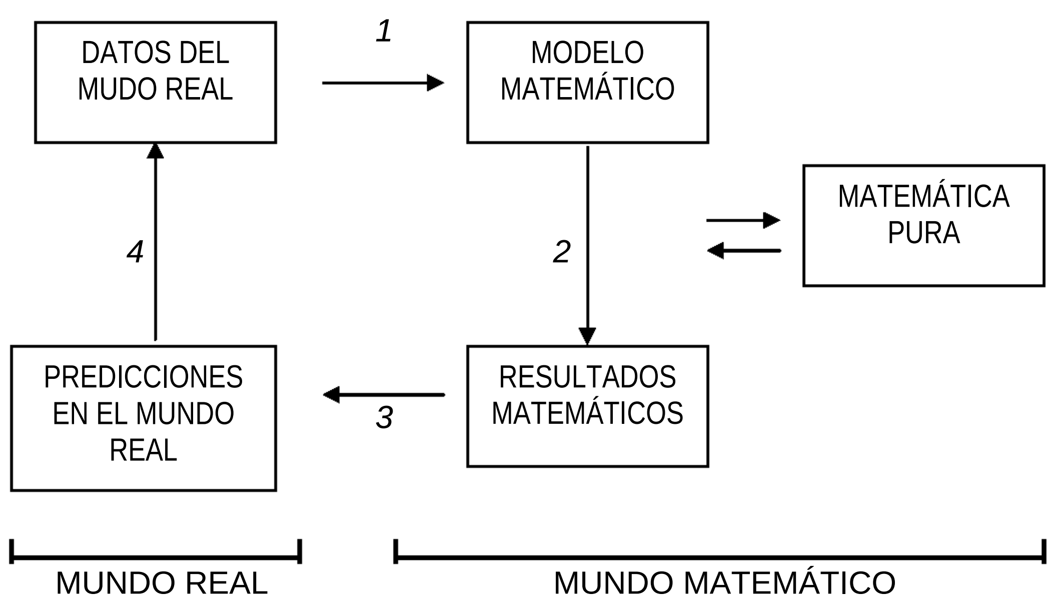
Otra explicación consiste en decir que, siendo finita la fortuna de Nicolás, es imposible que éste pueda pagarle a Daniel si la cara tarda mucho en salir. Dicho de otra manera, la “esperanza matemática infinita” se explica por el hecho de que existe la posibilidad, aunque muy remota, de ganar una suma enorme (infinita) si ocurre una larga racha de caras.

En resumen, la paradoja de San Petersburgo es un caso particular del problema general de "doblar" la apuesta en los juegos de azar; sistema con el cual, en teoría, no se puede perder (puesto que en algún momento saldrá cara); pero en el que se pierde siempre en la práctica, ya que la cantidad de dinero de que dispone el jugador es siempre finita y casi siempre inferior a la de la banca. Para asegurar más todavía su probabilidad de no perder, los casinos fijan una cantidad máxima para todas las apuestas.

El conocido matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752) explica que la fortuna de la banca, aunque puede ser muy grande, es siempre limitada. Suponiendo que el capital de la banca sea de $\$2^{24}$, el jugador tiene la probabilidad $1/2^n$ de recibir $\$2^{n-1}$ cuando es menor n que 25, pero después sólo podrá recibir $\$2^{24}$. Su esperanza matemática es entonces $13, lo cual es bastante razonable. Este es el cálculo que hacía Crarmer:

$$\sum_{1}^{24}\frac{2^{n-1}}{2^n}+\sum_{25}^{\infty}\frac{2^{24}}{2^n}=12+1=13$$

Las matemáticas y el mundo real



Este cuadro representa sucintamente las relaciones entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, puras y aplicadas. Las distintas flechas se explican a continuación.

1. Inducción

A partir de cierto número de observaciones y de datos, se construye un modelo matemático, una conjetura, una hipótesis, una traducción al idioma matemático, o sea, se trata de mate-matizar el mundo real.

Este proceso es siempre difícil, requiere creatividad, ingenio y capacidad de invención. La formulación y la construcción de modelos abstractos inspirados por situaciones reales es lo que hace progresar la ciencia teórica. Veamos un ejemplo en la astronomía.

Ptolomeo, a mediados del siglo II, construye un “modelo” que describe “actualmente” el movimiento de los planetas. Durante 1500 años, ese modelo satisface las necesidades prácticas y teóricas de la humanidad.

Nicolás Copérnico (Polonia, 1473-1543) simplifica el modelo anterior poniendo un sol estacionario en el centro del sistema solar.

Johannes Kepler (Alemania, 1571-1630), unos cien años después, utiliza sus propias observaciones además de los datos astronómicos de Tycho Brahe (Dinamarca, 1546-1601) y propone su propio modelo: los planetas describen una elipse y el Sol uno de los focos.

Unos noventa años después, Isaac Newton, con su ley de gravitación universal, explica las leyes de Kepler y otras.

Finamente, Albert Einstein (Alemania-E.U.A., 1879-1955) propone, en 1905, su teoría de relatividad, otra explicación del movimiento de los planetas más “exacta” que las de sus predecesores.

¿Quién vendrá después? No se sabe todavía. Sí se sabe que ninguna de esas teorías es verdadera o falsa; cada una es un nuevo modelo que permite predecir mejor la órbita de los planetas.

Sir Arthur Eddington (Inglaterra, 1882-1944), en un ejemplo famoso, pregunta: “¿Cuánto tiempo tarda un elefante de dos toneladas en deslizarse por una colina cubierta de hierba con 60 grados de pendiente?" Y contesta: "Si se elimina la 'poesía' del problema, queda una 'partícula' rodando por un plano inclinado.

Bertrand Russell, en su Introducción a la filosofía matemática (1911), dice: "Tienen que haber pasado muchísimos siglos antes de que el hombre pudiera descubrir que una pareja de faisanes y un par de días son dos ejemplos distintos del número dos, no es nada fácil llegar a tan alto grado de abstracción".

2. Deducción

Mediante el razonamiento deductivo, se derivan algunas conclusiones acerca del modelo matemático construido, el cual es preferido para la enseñanza de la matemática en las escuelas.

Aquí se demuestran teoremas y se hacen predicciones matemáticas, sin preocuparse demasiado del mundo real. Las otras etapas, que implican interacciones con otras asignaturas o con el problema de la vida real, generalmente no se mencionan en los programas de matemáticas o, si se mencionan, pocas veces se tratan.

Dice el físico matemático inglés Sir Arthur Eddington: "La parte introductoria de una teoría es la más difícil, ahí, tenemos que usar constantemente el cerebro; después podemos usar las matemáticas".

3. Interpretación

Las conclusiones matemáticas no pueden transferirse al mundo real automáticamente. En esta etapa del proceso, los resultados matemáticos se interpretan, se describen y se explican en relación con el problema real que se estudia; también se hacen algunas predicciones.

En esta etapa se explica las conclusiones matemáticas a los no-matemáticos y aquí es donde el uso de las matemáticas puede ser abusivo. Muchas veces se han utilizado argumentos matemáticos para justificar una teoría; para intimidar y confundir, consciente o inconscientemente, a los analfabetos matemáticos, no para esclarecer los problemas.

4. Verificación

Las predicciones se comparan con los datos iniciales y se determina el grado de exactitud del modelo que (provisionalmente) se acepta, se rechaza o se ajusta. Y vuelve a empezar el ciclo.

3.1 Espacio Muestral

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un proceso o experimento, se denota como *E o S.* Éste concepto es fundamental para el estudio de la probabilidad, porque define todos los eventos que pueden resultar de un fenómeno aleatorio. Según la cantidad de elementos que posea el Espacio Muestral puede ser:

- Finito: “Se lanza un dado y se anota la cara superior”.
- Infinito Numerable: “Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos” {10, 11, 12, 13....}.
- Infinito No Numerable: “Se anota la duración de una lámpara” $\{T/T \geq 0\}$.

Ejemplos Propuestos:

a) Para el lanzamiento de una moneda al aire: *E*= {cara, cruz}
b) Para el lanzamiento de un dado: *E*= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
c) Para el lanzamiento de dos monedas al aire E= {(cara, cara), (cruz, cruz), (cara, cruz), (cruz, cara)}
d) En una caja hay ocho focos de los cuales tres están fundidos, si se sacan uno a uno los focos y nos fijamos en el número de focos que quedan en la caja hasta encontrar los 3 fundidos el espacio muestral sería *E*= {3, 4, 5}.
e) Un juego consiste en lanzar una moneda hasta obtener 3 águilas o realizar 15 volados lo que pase primero, el espacio muestral se denotaría como *S*= {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}.

3.2 Experimentos y eventos

Muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud desde antes por diversas razones, pues la mayoría de los hechos están influidos por los factores externos. Además, existen aquellos sucesos que están directamente influidos por el azar, es decir, por procesos que no se está seguro de lo que va a pasar. Sin embargo. La probabilidad nos permite acercarnos a esos sucesos y estudiarlos, ponderando las posibilidades de ocurrencia y proporcionando métodos para tales ponderaciones.

Precisamente, algunos de esos métodos proporcionados por la probabilidad nos llevan a descubrir que algunos sucesos tienen una mayor o menor probabilidad de ocurrir que la ponderación asignada a través del sentido común. Nuestros sentidos, la información previa que poseemos, nuestras creencias, posturas, nuestras inclinaciones, son algunos de los factores que intervienen para no permitirnos hacer ponderaciones reales y sistemáticas. La probabilidad nos permitirá estudiar los eventos de una manera sistemática y más cercana a la realidad, retribuyéndolos con información mas precisa y confiable y por tanto más útil para las disciplinas humanas

3.2.1 Experimento

Es aquella acción que se considera con propósito de análisis y que tiene como fin último determinar la probabilidad de uno o de varios resultados.

Un experimento también es llamado fenómeno y se denota como ε. Existen 2 tipos de fenómenos.

I. Deterministas: Cuando al realizar un experimento en las mismas condiciones, siempre obtenemos el mismo resultado.
II. Aleatorios: Cuando al realizar un experimento en las mismas condiciones nunca podemos predecir el resultado. Este a su vez tiene tres características:
    a. Es posible repetirlo en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones.

b. Podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
c. Al repetir el experimento un gran número de veces aparece un patrón definido.

Ejemplos Propuestos:

a) Experimento – Se lanza una moneda al aire, donde el espacio muestral sería el total de formas en como puede caer la moneda.
b) Experimento – Se lanza un dado, aquí el espacio muestral serían las posibles caras hacia arriba que pueden presentarse.
c) Experimento – Registramos el grupo sanguíneo de una persona. Los 4 posibles resultados son A, B, AB, O.

3.2.2 Evento

Un evento *A* (respecto de un espacio muestral *S* asociado a un experimento ε) es un conjunto de resultados posibles ($A \subset S$).

Definición: Dos eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos. Expresamos esto escribiendo $A \cap B = \phi$.

Es el resultado posible, o grupo de resultados posibles, de un experimento o proceso observado, y es la mínima unidad de análisis para efectos de cálculo de probabilidades. Es un subconjunto de resultados posibles considerados previamente en el espacio muestral y se denota comúnmente con las letras mayúsculas A, B, C. A los eventos también se les conoce como sucesos.

Ejemplos Propuestos:

a) Sea A el evento de que al nacer un bebé, éste sea niña.
b) Sea B el evento de que un alumno bachillerato, termine en cuatro años el nivel medio superior.
c) Sea C el evento de que al seleccionar sin ver una carta de una baraja, salga un rey.
d) Al lanzar un dado de 6 caras, que obtengamos un número par.

3.2.3 Observación

Un resultado concreto de un experimento es un elemento del espacio muestral asociado al experimento, conceptualmente evento (suceso) y resultado son dos cosas distintas. Los resultados de un experimento se suelen representar con letras minúsculas, los eventos con letras mayúsculas.

Ejemplo Propuesto:

a) Si en una caja hay diez manzanas y dos de ellas están podridas, al seleccionar tres manzanas ¿Cuántas manzanas buenas se pueden obtener?

Tenemos que el espacio muestral es *E= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}* y el evento *A= {1, 2, 3},* ya que el peor de los casos sería sacar las dos manzanas podridas y obtendríamos sólo una manzana buena, así como que el caso más favorable sería que al seleccionar las tres manzanas no obtuviéramos ninguna de las dos podridas dando un total de tres manzanas buenas.

Frecuencia Relativa

Si se repite n veces el experimento ε y sea *A* y *B* dos eventos asociados a él. Sea n_A y n_B el número de veces que ocurrió el evento *A* y el *B* respectivamente de las n repeticiones, llamaremos a $f_A = \frac{n_A}{n}$ frecuencia relativa del evento *A* en las n repeticiones del experimento ε. La f_A tiene las siguientes propiedades:

i) $0 \leq f_A \leq 1$.

ii) $f_A = 1$ si y sólo si *A* ocurre cada vez en las n repeticiones.

iii) $f_A = 0$ si y sólo si *A* nunca ocurre en las n repeticiones.

iv) Si *A* y *B* son eventos mutuamente excluyentes entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

v) f_A, basada en las n repeticiones de ε y considerada para una función de n, converge en cierto sentido probabilístico a P(*A*) cuando n→ ∞.

3.3 Principio fundamental del conteo

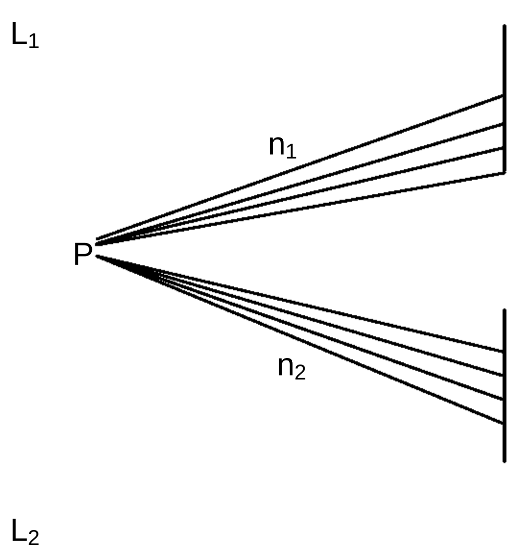
Debido a que algunos experimentos se pueden generar en etapas y el espacio muestral se puede mostrar en un diagrama de árbol, donde cada nivel sucesivo de ramificación en el árbol corresponderá a un paso necesario para generar el resultado final, es muy importante por tanto entender que en todo problema probabilístico, se deben encontrar tanto el número de elementos que pertenecen al espacio muestral *S*, como el número de elementos que determinan a cualquier evento *A, B, C*, para saber cuál es el valor de la probabilidad.

Si en un experimento, un primer ensayo puede ocurrir de n_1 maneras diferentes, y si continuando el experimento, un segundo ensayo puede ocurrir de n_2 maneras diferentes, y si continuando el experimento un tercer ensayo puede ocurrir de n_3 maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número de formas como puede ocurrir el experimento nos lleva al principio fundamental de la adición y al principio fundamental de la multiplicación.

3.3.1 Principio fundamental de la adición

Para ir de un punto p a la recta L_1 hay n_1 maneras, y para ir de P a la recta L_2 hay n_2 maneras. Entonces, para ir de el punto P a cualesquiera de las rectas hay:

$$n_1 + n_2 \text{ maneras}$$



Ejemplo Propuesto:

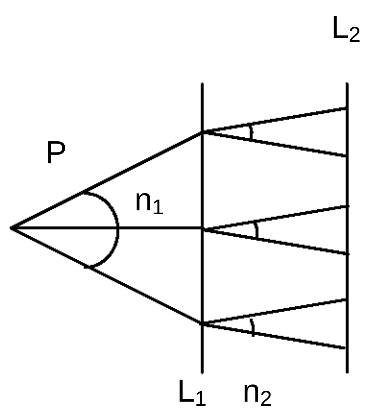
Un profesor quiere ir de vacaciones de verano, él tiene 5 ofertas para viajar en crucero, 3 ofertas para viajar en avión y 2 para viajar por tren. ¿Cuántos viajes diferentes puede realizar el profesor?

$$Viajes = 5crucero + 3avión + 2tren = 10$$

3.3.2 Principio fundamental de la multiplicación

Para ir del punto P a la recta L_1 hay n_1 maneras, y para ir de L_1 a L_2 hay n_2 maneras. Entonces para ir de P a L_2 hay:

$$n_1 * n_2 \text{ maneras.}$$



Ejemplo Propuesto:

Si tengo 4 trajes (negro, azul marino, gris, verde) y dos corbatas (lisa, estampada). ¿Cuántas maneras distintas de atuendo me dan mis trajes con mis corbatas?

$$formas = 4trajes \cdot 2corbatas = 8$$

Ejemplo Propuesto:

Un estudiante desea saber cuántas rutas puede tomar para llegar a casa de su novia, él sabe que para lograr su objetivo, necesita pasar por 2 estaciones intermedias, y sabe por experiencia personal que de su casa a cualquiera de las 2 estaciones intermedias, hay tres caminos diferentes que puede tomar, y al final de cualquiera de estas estaciones sólo hay un camino que lo conduce a casa de su novia. ¿Cuál es el número de rutas que el estudiante puede seguir?

Por lo tanto las rutas que puede seguir son:

$$total = 3caminos \cdot 2rutas = 6$$

3.4 Análisis Combinatorio

En ocasiones el trabajo de enumerar los posibles sucesos que ocurren en una situación se convierte en algo difícil de lograr o simplemente tedioso. El análisis combinatorio ó cálculo combinatorio permite enumerar tales casos o sucesos y así obtener la probabilidad de eventos más complejos. En el caso de que existan más de un suceso a observar habría que contar el número de veces que pueden ocurrir todos los sucesos que se desean observar, para ellos se utiliza el principio fundamental de conteo.

Si un suceso se puede presentar de n_1 formas y otro se puede presentar de n_2 formas, entonces el número de formas en que ambos sucesos pueden presentarse en ese orden es de $n_1 * n_2$.

En otras palabras, basta multiplicar el número de formas en que se pueden presentar cada uno de los sucesos a observar.

Este principio nos remite automáticamente al factorial de un número natural, que se puede pensar como una función con su dominio en los números naturales, junto con el cero y el codominio de los números naturales. En el análisis combinatorio se definen también las permutaciones (con o sin repetición) y las combinaciones (con o sin repetición).

3.4.1 Factorial

El factorial de un número entero, se define como, el producto de ese número por todos sus números menores enteros y se denota *n!*, es decir:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1 \text{ si } n>0$$

por definición, cuando n=0, queda determinado como 0!=1.

En el caso de que *n* sea muy grande, el proceso de cálculo se vuelve muy cargado de operaciones, incluso para una computadora, por lo que se utiliza la aproximación de Stirling a *n!* la cual se define como:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$$

donde $e \approx 2.71828\ldots$, que es la base de los logaritmos neperianos.

3.4.2 Permutaciones

Agrupar (ó permutar) n objetos es equivalente a ponerlos en algún orden específico, en una caja de n lugares. La primera casilla se puede llenar de cualesquiera de las n maneras, la segunda de (n-1) maneras.....y así obtendremos, por el principio de la multiplicación, que la caja se puede llenar de $n(n-1)(n-2)\ldots 1$ maneras.

1	2	3	4	....	N

3.4.2.1 Permutaciones sin repetición

Entonces el número de formas diferentes en que se pueden permutar los n objetos diferentes cuando se toman de uno en uno es el factorial de n. Las permutaciones sin repetición de *n* elementos se definen como las distintas formas de ordenar todos esos elementos distintos, por lo que la única diferencia entre ellas es el orden de colocación de sus elementos.

El número de estas permutaciones será:

$$P\binom{n}{n} = n!$$

3.4.2.2 Permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes (repetición)

En el método hasta ahora enunciado suponíamos que los objetos son distintos (distinguibles). Supongamos ahora que de los *n* objetos hay n_1 de una clase, n_2 de otra... y así hay *k* clases, donde $n_1+n_2+...+n_K = n$. Entonces el número de permutaciones está dado por: $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_K!}$.

Generalizando tenemos $PR\binom{n}{a,b,c,...,x} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot ...\cdot x!}$

3.4.3 Ordenaciones

Las permutaciones son también conocidas como ordenaciones, y de hecho toman este nombre por que son ordenaciones de r objetos de n dados.

Si en cambio lo que se quiere es elegir *r* de esos *n* objetos $(0 \le r \le n)$ y permutarlos, recurriremos nuevamente a la caja de n compartimientos. Así el primer compartimiento se puede llenar de *n* maneras, el segundo de (n-1)... y el *r*-ésimo compartimiento con $n-(r-1)$ maneras y así, usando el principio de la multiplicación encontramos que hay $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ maneras.

3.4.3.1 Ordenación sin repetición

Las ordenaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *r* en *r* se definen como las distintas agrupaciones formadas con *r* elementos distintos, eligiéndolos de entre los *n* elementos de que disponemos, considerando una ordenación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

El número de ordenaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$O\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

3.4.3.2 Ordenación con repetición

Las ordenaciones con repetición de n elementos tomados de r en r se definen como las distintas agrupaciones formadas con r elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una ordenación distinta a otra tanto si difieren en algún elemento como si están situados en distinto orden.

El número de ordenaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$OR\binom{n}{r} = n^r$$

3.4.3.3 Ordenación cíclica

Este tipo de arreglo es una forma especial en la que pueden presentarse los objetos o los eventos, y en la que el orden de aparición es muy importante. Sólo lleva una pequeña modificación a la fórmula antes vista, de tal modo tenemos:

$$OC\binom{n}{n} = (n-1)!$$

3.4.4 Combinaciones

1	2	...	r	....	n

Consideremos nuevamente *n* objetos diferentes. Esta vez queremos contar cuantas maneras hay de escoger *r* de esos *n* objetos, pero sin que nos importe el orden. Sea *C* el número de maneras de escoger *r* objetos sin orden, sabemos que hay *r*! maneras de permutarlos, entonces:

$$O! = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow C = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Las dos propiedades fundamentales son:

1- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

2- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

3.4.4.1 Combinación sin repetición de elementos

Las combinaciones sin repetición de *n* elementos tomados de *r* en *r* se definen como las distintas agrupaciones formadas con *r* elementos distintos, eligiéndolos de entre los *n* elementos de que disponemos, considerando una combinación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, (no influye el orden de colocación de sus elementos).

El número de combinaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

3.4.4.2 Combinación con repetición (n+r-1)

Las combinaciones con repetición de *n* elementos tomados de *r* en *r* se definen como las distintas agrupaciones formadas con *r* elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los *n* elementos de que disponemos, considerando una combinación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, (no influye el orden de colocación de sus elementos).

El número de combinaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la variación de la fórmula:

$$CR\binom{n}{r} = C\binom{n+r-1}{r} \rightarrow C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Arreglo	circular	repite	ordena	fórmula	Restricción
Permutación	no	no	si	$P\binom{n}{n} = n!$	n = r
Permutación con repetición	no	si	si	$P\binom{n}{a,b,c,\ldots,x} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots\cdot x!}$	n=r tomados de *a* en *a*, de *b* en *b*, de *c* en *c*, etc.
Ordenación	no	no	si	$O\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	n > r
Ordenación con repetición	no	si	si	$OR\binom{n}{r} = n^r$	n ≥, ≤ r
Ordenación cíclica	si	no	si	$OC\binom{n}{n} = (n-1)!$	n = r
Combinación	no	no	no	$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	n ≥ r
combinación	no	si	no	$CR\binom{n}{r} = C\binom{n+r-1}{r}$	n ≥, ≤ r

Ejemplo Propuesto:

Una manera para hacer notar la diferencia que existe entre ordenar y combinar, sin repetición o con repetición, es utilizar el juego de las sillas.

Este juego consiste en acomodar de manera circular un número de sillas *r* para un número de participantes *n,* de modo que *r=n-1*, el objetivo es que cuando se escuche la indicación de “alto” todos tomen una silla y pierde quien se quede de pie (vemos que *n*>*r*), y así se prosigue eliminando concursantes hasta tener un ganador.

Aquí se muestra un claro ejemplo de que no importa el orden, es decir, no importa que silla ocupe mientras no me quede parado para no perder. También vemos que no es posible ocupar 2 o más sillas con la misma persona, ya que no me puedo repetir y ocupar mas que un sólo lugar.

Ejemplo Propuesto:

Para mostrar las diferencias del orden a la hora de anotar los elementos según vayan apareciendo, con los dígitos usados para las evaluaciones.

Acomodando pelotitas de unicel que tengan rotulado un dígito del 0 al 9, se le deja escoger sin ver a cada alumno 2 pelotitas, aquí se nota la diferencia con relación al orden, no es lo mismo sacar un 0 y un 1 que un 1 y un 0, el primer caso me dice que estoy reprobado mientras el segundo me hace un alumno de excelencia.

Ejemplo Propuesto:

a) ¿Cuántas palabras de dos letras se pueden obtener si A= {a, b, c, d}? Se pide formar permutaciones u ordenaciones de dos letras cuando el total de letras es 4, en este caso r=2 y n=4. En general, si se toman r objetos de n, la cantidad de permutaciones u ordenaciones con repetición obtenidas son $OR_{(n,r).}$

aa, ab, ac, ad

ba, bb, bc, bd

ca, cb, cc, cd

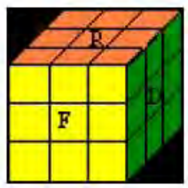
da, db, dc, dd

b) ¿Cuántas son las posibles permutaciones (ordenaciones) sin repetición en las 27 letras del alfabeto acomodándolas en grupos de letras?

$\frac{27!}{(27-3)!} = \frac{27!}{24!}$ = 27x26x25= 17550 permutaciones.

Ejemplo Propuesto:

Se tiene un cubo de madera pintado de un sólo color, y rebanado, haciendo un total de 27 cubeletes (cada uno de los cubitos que conforman el cubo) de los cuales:



8 piezas tienen 3 caras pintadas

12 piezas tienen 2 caras pintadas

6 piezas 1 tienen cara pintada

1 pieza tiene 0 caras pintadas

¿De cuántas formas es posible armar el cubo de tal manera que siempre muestre la totalidad de las caras pintadas?

Ejemplo Propuesto:

Se lanzan 6 monedas balanceadas ¿cuántos resultados de interés existen?

Como en el lanzamiento de una moneda sólo existen 2 posibles resultados de interés, por el principio fundamental del conteo, cada lanzamiento de una moneda es equivalente a un ensayo, se tiene que el evento puede ocurrir como se muestra

Número de formas	2	2	2	2	2	2	=64
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	

Esto es, al lanzar la primera moneda sólo hay 2 resultados posibles de interés, lo mismo pasa con la segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta moneda, en consecuencia, el número de formas en que puede ocurrir el experimento es $2^6=64$ formas o resultados posibles.

Ejemplo Propuesto:

Se lanzan tres dados, el primer ensayo n_1, consiste en lanzar el primer dado, n_2 correspondería a lanzar el segundo dado y n_3 a lanzar el tercero, quedando todas las posibilidades del lanzamiento así:

	dado 1	dado 2	dado 3	
Número de formas	6	6	6	$=6^3=216$
	n_1	n_2	n_3	

Ejemplo Propuesto:

En la ronda de clasificación de un campeonato de alto rendimiento de Squash cada participante debe jugar contra todos los demás un solo partido. Participan 23 jugadores. ¿Cuántas partidas se disputarán?

Es indispensable notar que lo que se busca es formar parejas donde cada pareja representa un partido, además no es posible jugar contra uno mismo, es decir no hay repetición y el orden no influye, ya que no hay diferencia entre Jugador1 v.s. Jugador2 o Jugador2 v.s. Jugador1 ya que se trata del mismo partido, por tanto resolvemos de la siguiente manera:

$$C\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{23!}{2!(23-2)!}=\frac{23!}{2!(21!)}=253$$

Que es el total de partidos a disputar.

Ejemplo Propuesto:

En un estado de la República Mexicana, se pretenden elaborar placas para automóviles que contengan tres letras y cuatro números, se permite que las letras sólo puedan comenzar con A, B o C, y se supone un total de 26 letras en el alfabeto español. Otra restricción es que los números no pueden comenzar en cero. La incógnita es saber cuántas placas pueden formar.

Así mismo, se pretende implantar el programa *"hoy no circula"* y se tiene la experiencia de asignar cinco colores y la terminación de dos dígitos en los números para el control y la aplicación de esta medida. Como segunda cuestión es el número de placas que pueden formar por color.

Por último el Sr. Agustín un contribuyente muy cumplido, desea saber que probabilidad tiene su automóvil de descansar los lunes ya que ese día él no trabaja.

Este problema es de la vida real, se puede resolver fácilmente utilizando el principio fundamental del conteo.

¿Cuántas placas se pueden formar si se tienen 26 letras y diez dígitos?

Tomando en cuenta las restricciones que se tiene para la formación de las placas, por ejemplo el hecho de que las letras tengan que empezar con A, B o C es decir tres formas diferentes (que además sería equivalente al primer ensayo n_1), así como los números no pueden comenzar con cero. Obviamente, para utilizar el principio fundamental del conteo en este caso, se deben adaptar éste a las condiciones del problema, esto es:

Número de placas

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1er número	2º número	3er número	4º número
3	26	26	9	10	10	10
n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7

$$=(3)(26)(26)(9)(10)(10)(10)=18,252,000\,placas$$

¿Cuántas placas corresponden a cada color?

Se mencionó con anterioridad, que se toman 5 colores en él, para implementar el programa (azul, rosa, rojo, verde y amarillo), y que a cada color se le asignan dos números, esto hace que el número de placas por color sea el mismo en todos los casos.

Programa “Hoy no circula”

Lunes	martes	miercoles	jueves	viernes
5—6	7--8	3--4	1--2	9--0

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1er número	2º número	3er número	4º número
3	26	26	9	10	10	2
n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7

$$=(3)(26)(26)(9)(10)(10)(2)=3,650,400\,placas$$

Por lo tanto, el número de placas para el día lunes o color azul, es de 3650400 de un total de 18252000. Haciendo esto que la probabilidad de que el auto del Sr. Agustín descanse el día lunes sea de $\frac{3,650,400}{18,252,000}=0.2$

Ejemplo Propuesto:

Se va a celebrar la final de salto de longitud en un torneo de atletismo. El número de atletas que contienden son 8, ¿De cuántas formas pueden repartirse las 3 medallas: oro, plata y bronce?

Los aspectos más relevantes son que el orden en el medallero si influye, no se pueden repetir los elementos dado que un atleta no puede llevarse más de una medalla, por tanto:

$$O\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336\,formas$$

Ejemplo Propuesto:

En el extranjero el sistema de matrículas de vehículos consiste en un número de 4 dígitos, seguido de un bloque de 3 letras consonantes. Con base a este sistema ¿Cuántas placas se pueden formar?

Como vemos, el bloque numérico consiste en formar grupos de 4 dígitos elegidos de entre los 10 posibles y el bloque de letras consiste en formar grupos de 3 letras de entre las 22 consonantes, lo que expresamos como:

$$OR\binom{10}{4} = 10^4 = 10,000$$

$$OR\binom{22}{3} = 22^3 = 10,648$$

$$n_1 \cdot n_2 = 10,000 \cdot 10,648 = 106,480,000 \text{ placas}$$

Ejemplo Propuesto:

Tomando solamente los dígitos impares, ¿cuántos números de 5 cifras distintas sin repetir es posible formar?

Observamos que se dispone de 5 números (1, 3, 5, 7, 9) y queremos hacer agrupaciones de 5 elementos cada una, en donde el orden en que coloquemos los dígitos marca la diferencia de una cifra con otra, y además, según el enunciado, se exige que sean dígitos distintos. Usando todos los elementos nos queda:

$$P\binom{n}{n} = n! = P\binom{5}{5} = 5! = 120$$

Ejemplo Propuesto:

En nuestro cuarto contamos con una repisa donde vamos a ordenar los 7 libros que tenemos de donde: 4 son de matemática, 2 de astronomía y 1 de física (los de una misma materia son iguales). Se desea averiguar cuantas formas tenemos para ordenarlos en el estante.

Si llamamos a los libros {m, m, m, m, a, a, f} el número de formas de ordenarlos es igual al número de permutaciones de esos 7 elementos tomados de 4 en 4, de 2 en 2 y de 1 en 1, es decir, el caso especial de:

Permutaciones CON repetición

Llamamos a las permutaciones con repetición de *n* elementos tomados de *a* en *a*, de *b* en *b*, de *c* en *c*, etc, cuando en los *n* elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece *a* veces, otro *b* veces, otro *c* veces, etc) verificándose que *a+b+c+...=n.*

El número de estas permutaciones será:

$$P\binom{a, b, c, \ldots, x}{n} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \ldots \cdot x!}$$

$$P\begin{pmatrix} 4,2,1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)(2\cdot 1)(1)}$$

$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{(2\cdot 1)(1)} = \frac{310}{2} = 105$$

Las cuales son:

mmmmaaf, mmmmafa, mmmmfaa, mmmamaf, mmmamfa, mmmaamf, mmmaafm, mmmafma, mmmafam, mmmfmaa, mmmfama, mmmfaam, mmammaf, mmammfa, mmamamf, mmamafm, mmamfma, mmamfam, mmaammf, mmaamfm, mmaafmm, mmafmma, mmafmam, mmafamm, mmfmmaa, mmfmama, mmfmaam, mmfamma, mmfamam, mmfaamm, mammmaf, mammmfa, mammamf, mammafm, mammfma, mammfam, mamammf, mamamfm, mamafmm, mamfmma, mamfmam, mamfamm, maammmf, maammfm, maamfmm, maafmmm, mafmmma, mafmmam, mafmamm, mafammm, mfmmmaa, mfmmama, mfmmaam, mfmamma, mfmamam, mfmaamm, mfammma, mfammam, mfamamm, mfaammm, ammmmaf, ammmmfa, ammmamf, ammmafm, ammmfma, ammmfam, ammammf, ammamfm, ammafmm, ammfmma, ammfmam, ammfamm, amammmf, amammfm, amamfmm, amafmmm, amfmmma, amfmmam, amfmamm, amfammm, aammmmf, aammmfm, aammfmm, aamfmmm, aafmmmm, afmmmma, afmmmam, afmmamm, afmammm, afammmm, fmmmmaa, fmmmama, fmmmaam, fmmamma, fmmamam, fmmaamm, fmammma, fmammam, fmamamm, fmaammm, fammmma, fammmam, fammamm, famammm, faammmm.

Ejemplo Propuesto:

Se tiene las letras a, b, c, d y e y se quieren formar “palabras” de dos letras, ¿cuántas “palabras” podrán formarse?

Es importante subrayar que algunas de las palabras que se construyan no tendrán sentido y que una letra podrá ser repetida. Puede observarse que las “palabras” que se pueden considerar en total son las siguientes.

$$\begin{matrix} aa & ab & ac & ad & ae \\ ba & bb & bc & bd & be \\ ca & cb & cc & cd & ce \\ da & db & dc & dd & de \\ ea & eb & ec & de & ee \end{matrix}$$

En este caso como sólo se planteó tratar con 5 letras, es posible revisar el número de “palabras” construidas, pero si las letras fueran todas las del alfabeto (26letras) o alguna otra consideración, ya no sería tan fácil, por lo que se hace necesario considerar como manera más sencilla de determinar el número total de “formas” como “algo” puede ocurrir, de tal manera, en el caso que se está considerando, se tiene que son 5 letras u objetos y se quieren ver “palabras” de 2 dichos elementos, por lo tanto se tiene que:

$$OR\binom{5}{2} = 5^2 = 25$$

Ejemplo Propuesto:

Con base al ejemplo anterior, pero en el caso de que las letras no puedan ser repetidas, ¿cuántas palabras se podrán formar?

Se puede observar fácilmente que la palabra “de” no tiene el mismo sentido que “ed” lo que demuestra que se debe llevar orden para contar, y como no es posible repetir letra, las palabras aa, bb, cc, dd y ee no podrán ser consideradas, por lo que se obtendrá el resultado por medio de las ordenaciones sin repetición o permutaciones de 5 letras tomas 2 a la vez.

$$O\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20\,palabras$$

Haciendo una comparación con el ejemplo antes visto, prácticamente serían todos los elementos, excepto aquellas en que las letras se repiten, que a continuación se marcan con un circulo y que no pertenecen al número de formas de las ordenaciones; son repetición de 5 números tomados 2 a la vez, quedando sólo 20.

$$\begin{array}{ccccc} \odot & ab & ac & ad & ae \\ ba & \odot & bc & bd & be \\ ca & cb & \odot & cd & ce \\ da & db & dc & \odot & de \\ ea & eb & ec & de & \odot \end{array}$$

Ejemplo Propuesto:

El arquitecto Alemán está construyendo una serie de departamentos y tiene la necesidad de numerarlos, él sugiere que éstos tengan cuatro dígitos de los siguientes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 ¿cuántas casas podrán numerar?

Es posible observar que el número 1111 tendría sentido toda vez que no está limitada su posibilidad, lo que indica, que los números pueden ser repetidos y por lo tanto, se puede llegar al resultado con las ordenaciones con repetición de 9 números tomados cuatro a la vez, y queda resuelto como:

$$OR\binom{9}{4} = 9^4 = 6{,}561 \textit{números}$$

Ejemplo Propuesto:

En un cajero automático de un banco, se encuentran formados en una fila 10 personas, el tiempo de espera de cada persona para poder ser atendida es de 5 minutos aproximadamente, se desea saber de cuántas maneras es posible formar esa fila.

Es importante hacer ciertas observaciones en este ejemplo, en primer lugar ¿Qué técnica de conteo se debe utilizar para este caso? ¿Son ordenaciones? Y si son ordenaciones, ¿Éstas son con repetición o sin repetición?, ¿Le resulta a la persona en la fila lo mismo estar hasta delante de la fila o hasta atrás?, es decir, ¿Es lo mismo ser atendido de inmediato que ser atendido después de tres horas y media? La repuesta debería ser un rotundo no, por lo que importa mucho el orden en como estén formadas las personas, pues en ese orden serán atendidas. Por otra parte es obvio que una persona por si misma no puede ocupar varios lugares en la fila, por lo que se convierte en una ordenación donde es posible repetir de 10 personas tomadas todas a la vez, de tal modo nos resulta:

$$O\binom{10}{10}=\frac{10!}{(10-10)!}=\frac{10!}{0!}=\frac{10!}{1}=3,628,800$$

Ejemplo Propuesto

Un sindicato desea formar su mesa directiva de entre 200 socios, en la cual habrá un presidente, un secretario y un tesorero. Los comicios, se prevé, serán muy reñidos, pues todos los socios quieren pertenecer a dicha mesa directiva ya que esto, además de darles prestigio, les dará mejores ingresos económicos según sea el puesto dentro de la mesa directiva. ¿Cuántas maneras existen de conformarla?

Como todos los socios quieren pertenecer a la mesa directiva, se supone que en primera instancia se disputará el puesto de presidente, el cual será escogido de entre 200 socios, en segunda instancia, se luchara electoralmente por el puesto de secretario, el cual deberá ser elegido de entre 199 socios, puesto que ya deberá de haber sido elegido un presidente. Por último, para el puesto de tesorero podrá ser elegido entre 198 socios. Hay que tener en cuenta que una sola persona no podrá ocupar los tres puestos a la vez. Este ejemplo resulta sencillo si se aplica la fórmula de las ordenaciones sin repetición de 200 socios tomados de tres en tres, quedando:

$$O\binom{200}{3}=\frac{200!}{(200-3)!}=\frac{200!}{197!}=7,880,400\ \textit{formas}$$

Ejemplo Propuesto:

Se tienen los colores blanco, azul, verde, rojo, café y amarillo y se quieren formar banderas de tres colores continuos y verticales.

- ¿Cuántas banderas se pueden formar?

Para resolver este ejemplo, es necesario entender que una bandera tiene sentido si se visualiza puesta en un asta, es decir, una bandera azul, blanca y roja será diferente a una roja, blanca y azul. Como se pide colores continuos y verticales aplicamos la formula de ordenaciones con repetición de 6 colores tomados de tres en tres lo cual nos queda expresado como:

$$O\binom{6}{3}=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120 banderas$$

- ¿Cuántas banderas comienzan con color rojo?

Se observa que si la bandera principia exclusivamente con el color rojo, sólo tendrá una forma de empezar y además, si se pone rojo como primer color, éste no podrá ser repetido, pues si así fuera, la bandera sería de un solo color. Utilizando el principio fundamental del conteo tenemos que:

Número de Banderas

1	5	4
n_1	n_2	n_3

=20

Ejemplo Propuesto:

Se tienen las letras a, b, c y d ¿cuántas combinaciones se pueden formar con dos de estas letras?

En este ejemplo, es necesario recordar que en combinaciones no importa el orden, por lo que ab es la misma combinación que ba, de manera que las combinaciones de 4 letras tomadas 2 a la vez son:

$$C\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6 combinaciones$$

Ejemplo Propuesto:

Supóngase una urna que contiene 15 bolas de billar, donde 10 son blancas y 5 rojas. Si se toman tres bolas al azar ¿de cuántas formas se pueden extraer?

I) tres bolas

$$C\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$$

II) tres bolas blancas

$$C\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$$

III) tres bolas rojas

$$C\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$

IV) dos rojas y una blanca

$$C\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{3!\cdot 3!} = 10$$

$$C\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$$

De donde $n_1 \cdot n_2 = 10 \cdot 10 = 100$

V) dos blancas y una roja

$$C\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

$$C\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$$

De donde $n_1 \cdot n_2 = 45 \cdot 5 = 225$

Por último si sumamos todas las posibles maneras de sacar tres bolas (puras blancas, puras rojas, 2 rojas 1 blanca o 1 roja 2 blancas), es decir, $120 + 10 + 100 + 225 = 455$, vemos que es el número total que habíamos obtenido de sacar tres bolas.

Ejercicio Propuesto:

Para agilizar el proceso de entrega de calificaciones conformaré un grupo de 4 alumnos que van a estar a cargo de las notificaciones y representaciones pertinentes en cada grupo.

¿Cómo quedaría conformada esta comisión si?

a) El grupo 606 cuenta con 41 alumnos inscritos.

b) El grupo 609 cuenta con 18 alumnos inscritos

c) El grupo 613 cuenta con 29 alumnos inscritos.

3.5 Concepto de probabilidad

Cuando se toman decisiones sobre resultados futuros que se conocen, la única razón para que se cometa un error es que exista un error en el análisis por parte de la persona que toma la decisión. Esta situación se conoce como certidumbre completa.

Pero la realidad casi nunca es totalmente predecible. Por lo tanto, aunque el que toma la decisión haya hecho el análisis correcto, siempre hay factores que no puede controlar y que influyen para que los resultados sean imprevistos. Cuando prevalecen estas condiciones se dice que se trabaja "bajo incertidumbre" y, por lo tanto, la persona que va a tomar las decisiones se ve obligada a asumir riesgos. Por ejemplo, que los resultados de sus decisiones no sean favorables. Una forma de hacerlo es medir el riesgo asociado a cada predicción; riesgo que significa que tantas posibilidades hay de que la decisión adoptada sea errónea. Con esa información se tomará la *mejor* determinación y sólo queda esperar para saber si el resultado es o no favorable. Por más cuidado que se tenga en el análisis, siempre existirá la posibilidad de que el resultado sea desfavorable.

Hay que aceptar que este tipo de análisis es anticipado –a priori– y que se sabe que el resultado será único. Sin embargo, al hacer el análisis "a priori", hay que identificar el mayor número de resultados posibles y medir, para cada resultado, la probabilidad de que ocurra. Cuando se trabaja con decisiones bajo riesgo es necesario entonces introducir el concepto de probabilidad. Esta idea se utiliza en forma intuitiva y en léxico corriente. Así por ejemplo, se habla de la probabilidad de que llueva, o de que un candidato gane cierta elección. Estas son probabilidades subjetivas que, ante escasez de información son válidas.

3.5.1 Probabilidad

Usualmente se utiliza el concepto de frecuencia para ilustrar el concepto de probabilidad. Supóngase que se estudian *n* resultados de un experimento, de los cuales *m* se consideran ocurrencias exitosas de un resultado deseado, A y P(A) denota la probabilidad de ocurrencia de dicho resultado; la relación entre el número de resultados exitosos *m* y el número de resultados posibles *n*, es una medida aproximada de la probabilidad de ese resultado, es decir:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Lo que queremos es acercarnos al número de la frecuencia f_A sin recurrir a la experimentación. Para llegar a ello el número de repeticiones debe ser muy grande y procedemos como sigue:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

Donde:

$P(A) =$ Probabilidad de que el resultado *A* ocurra

$A =$ Resultado que interesa analizar

$m =$ Número de veces que ocurre A

$n =$ Número de veces que se ejecuta el experimento

Con cada evento *A* asociamos un número real, designado con P(*A*) y llamando probabilidad de *A*, el cual satisface las siguientes propiedades:

i) $0 \le P(A) \le 1$.

ii) P(*S*) = 1.

iii) Si *A* y *B* son dos eventos mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

iv) Si A_1, A_2, A_3.............A_n son eventos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Teorema 1: Si ϕ es el conjunto vacío, entonces P(ϕ) = 0.

Demostración: Podemos escribir $A = A \cup \phi$ y como *A* y ϕ son mutuamente excluyentes escribimos $P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$.

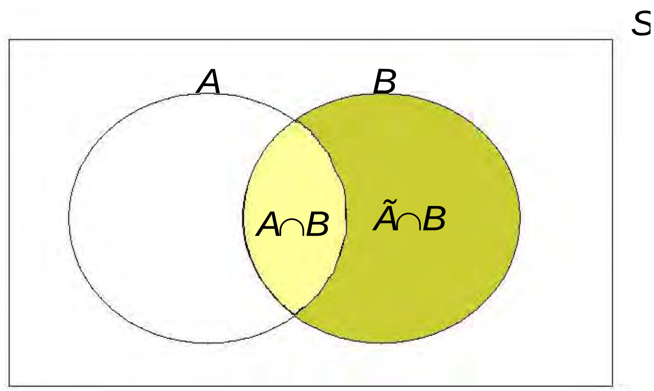
Nota: No vale la recíproca. Esto es, si P(A) = 0 no significa que A = ϕ.

Teorema 2: Si *Ã* es el evento complementario de *A*, entonces: $P(A)=1-P(\tilde{A})$.

Demostración: Podemos sustituir $S=A\cup\tilde{A}$, entonces $P(S)=P(A\cup\tilde{A})=P(A)+P(\tilde{A})$, así tenemos $1=P(A)+P(\tilde{A})$.

Teorema 3: Si *A* y *B* son dos eventos cualesquiera, entonces: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Demostración:



$$A\cup B=A\cup(B\cap\tilde{A})$$

$$B=(A\cap B)\cup(B\cap\tilde{A})$$

Por lo tanto:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\cap\tilde{A})$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(B\cap\tilde{A})$$

Si restamos las dos ecuaciones:

$$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)$$

Teorema 4: Si *A*, *B* y *C* son tres eventos cualesquiera, entonces:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Demostración: Consiste en escribir $A\cup B\cup C$ como $(A\cup B)\cup C$ y aplicar el resultado del teorema anterior.

Teorema 5: Si $A\subset B$, entonces $P(A)\leq P(B)$.

Demostración: Podemos escribir a *B* como dos eventos excluyentes $B=A\cup(B\cap\tilde{A})$. Por lo tanto $P(B)=P(A)+P(B\cap\tilde{A})$ y como por propiedad $P(B\cap\tilde{A})\geq 0$ entonces es fácil apreciar que $P(A)\leq P(B)$.

$$
\text{PROBABILIDAD}\begin{cases}
\text{Definición clásica(Regla de Laplace)} \rightarrow P(A) = \dfrac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos posibles de E}} \\
\text{Definición frecuentista} \rightarrow P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(A)}{n} \\
\text{Axiomas de Kolmogorov}\begin{cases}
1.\text{-}\ P(A) \geq 0, \forall \mathrm{A} \in A \\
2. - P(E) = 1 \\
3. - \text{Dada una colección de sucesos incompatibles}, A_1, A_2, \ldots \in A \\
\quad \text{se verifica que} \\
\qquad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \\
\quad \text{o bien} \\
\qquad \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{\mathrm{i}=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) \\
(E, A, P) \rightarrow \text{Espacio Probabilístico}
\end{cases}
\end{cases}
$$

3.6 Eventos

Vimos anteriormente el concepto de evento, ahora nos enfocaremos en los tipos de eventos que existen. Básicamente se consideran los siguientes tipos:

1. *Evento Elemental*

Es aquel que está formado por un sólo elemento del espacio muestral.

2. *Evento Compuesto*

Aquel que está formado por varios elementos del espacio muestral.

3. *Evento Imposible*

Es aquel cuyo elementos son el conjunto vacío, por tanto se denota como Φ. Ejemplo: E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, F=salir 7= Φ

4. Evento Seguro

Es el que se va a presentar siempre, por tanto, es el evento que está compuesto por los elementos del espacio muestral.

5. Evento Contrario o Complementario

Sea A un evento, definimos su complementario $\left(\overline{A}\right)$ como aquel evento que está formado por los eventos elementales que no pertenecen a A. Ejemplo: E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, A=salir par={2, 4, 6}, $\left(\overline{A}\right)$={1, 3, 5}= salir impar.

6. Evento Condicionado

Sean A y B dos eventos, se llama evento de A condicionado a B $\left(A/B\right)$ si se presenta A una vez que se haya presentado B. Ejemplo: B=salir par={2, 4, 6} A=salir 2={2}.

7. Evento Incompatible

Sean A y B dos eventos, se dice que son incompatibles si $A \cap B$ = Φ. En caso contrario se dice que son compatibles.

8. Evento Mutuamente excluyente o disjunto

Son aquellos que no pueden ocurrir al mismo tiempo, por ejemplo, que un billete sea de $100 y de $200 o que una persona chifle y coma pinole.

9. Evento Dependiente

Cuando un evento afecta la probabilidad de que suceda otro; por ejemplo, si un trabajo se hace descuidadamente, es más probable que resulte mal.

10. Evento Independiente

Sean A y B dos eventos, se dice que son independientes si $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right)P\left(B\right)$. En caso contrario se dice que son dependientes. Sabemos que si dos eventos son independientes, el que suceda uno no indica nada para el otro. Entonces $P\left(A/B\right)=P(A)$ y $P\left(B/A\right)=P(B)$. Hay otro método más fácil, esto es:

$$P(A\cap B)=P\left(A/B\right)P(B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A\cap B)=P\left(B/A\right)P(A)=P(A)P(B)$$

3.6.1 Tipos de eventos independientes

Definición: *A* y *B* son eventos independientes si y sólo si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Definición: Decimos que los tres eventos *A*, *B* y *C* son mutuamente independientes si y sólo si todas las condiciones siguientes se mantienen:

i) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

ii) $P(A\cap C)=P(A)P(C)$

iii) $P(B\cap C)=P(B)P(C)$

iv) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

Definición: Los *n* eventos A_1, A_2, A_3,...,A_n son mutuamente independientes si y sólo si tenemos para cada k = 2, 3, 4.....*n*

$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap\ldots\cap A_{ik})=P(A_{i2})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik})$$

Ejemplo Propuesto:

a) Se tiene una urna que contiene 5 dulces blancos y 4 dulces rojos.

- Si se extraen 2 dulces con remplazamiento, la probabilidad de que el primer dulce sea blanco y el segundo sea rojo es:

$$P(B)=\frac{5}{9}=0.556$$

$$P(R)=\frac{4}{9}=0.444$$

- Si se extraen tres dulces con remplazamiento, la probabilidad de que el primero sea blanco, el segundo rojo y el tercero blanco es

$$P(B)=\frac{5}{9}=0.556$$

$$P\left(R\right)=\frac{4}{9}=0.444$$

$$P\left(B\right)=\frac{5}{9}=0.556$$

- Si se extraen 2 dulces sin remplazamiento, la probabilidad de que el primero sea blanco y el segundo rojo es

$$P\left(B\right)=\frac{5}{9}=0.556$$

$$P\left(R\right)=\frac{4}{8}=0.5$$

- Si se extraen tres dulces sin remplazamiento, la probabilidad de que el primero sea blanco, el segundo rojo y el tercero blanco es

$$P\left(B\right)=\frac{5}{9}=0.556$$

$$P\left(B\right)=\frac{4}{8}=0.5$$

$$P\left(B\right)=\frac{4}{7}=0.571$$

Ejemplo Propuesto:

El sábado por la noche salí con Natalie y estoy muy interesado en ella. La probabilidad de que me de un beso es de 0.45 y de que me de un abrazo es 0.54. ¿Cuál será la probabilidad de que pueda disfrutar un beso y un abrazo de Natalie?, si la probabilidad de que no consiga ninguna de éstas muestras de cariño es 0.26

Sean

A: El evento de que Natalie me abrace → P(A)=0.54

B: El evento de que Natalie me bese → P(B)=0.45

Y queremos hallar: $P(A\cap B)$

Además: $P\left[\left(A\cup B\right)^{'}\right]=0.26$

Aplicamos el teorema de probabilidad complementaria:

$$P\left(A\cup B\right)=1-P\left[\left(A\cup B\right)^{'}\right]=1-0.26=0.74$$

Dado que los eventos son mutuamente no excluyentes, por lo tanto:

$$P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sustituyendo

$$0.74 = 0.54 + 0.45 - P(A \cap B)$$

$$0.74 = 0.99 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.99 - 0.74$$

$$P(A \cap B) = 0.25$$

Donde $P(A \cap B)$ es el evento A intersección con el evento B (Un beso y un abrazo), igual a una probabilidad del 25%

Ejemplo Propuesto:

En un estudio de percepción auditiva se presentan aleatoriamente uno de los dos estímulos utilizados, A y B. Si ambos estímulos son equiprobables y en cada sesión se presentan 5 estímulos aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en las 5 ocasiones se presente el estímulo A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estímulo B se presente una sola vez?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten A y B y no se presente el estímulo A después de que se haya presentado el estímulo B?

Tomando las bases del análisis combinatorio podemos decir que:

a) La probabilidad de que toda la prueba suene el estímulo A sería:

$$P(AAAAA) = P(A) \bullet P(A) \bullet P(A) \bullet P(A) \bullet P(A) = 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 = 0.03125$$

b) Hay 5 formas de que esto ocurra, BAAAA, ABAAA, AABAA, AAABA, AAAAB, todas ellas con la misma probabilidad.

$$p = 5 \bullet P(BAAAA) = 5 \bullet P(B) \bullet P(A) \bullet P(A) \bullet P(A) \bullet P(A) = 5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 \bullet 0.5 = 0.15625$$

c) Hay 4 casos posibles, ABBBB, AABBB, AAABB, AAAAB, todos ellos con la misma probabilidad de suceder ya que $P(A) = P(B) = 0.5$, con lo cual la probabilidad de que ocurra alguno de estos 4 casos es:

$$4 \bullet P(ABBBB) = P(A) \bullet P(B) \bullet P(B) \bullet P(B) \bullet P(B) = 4 \bullet 0.5^5 = 4 \bullet 0.03125 = 0.125$$

Ejemplo Propuesto:

Se sabe que el 10% de la población padece algún tipo de psicopatía (trastorno de la personalidad) a lo largo de su vida. El test TCP detecta este tipo de trastorno en el 90% de los casos en que se padece y produce un 20% de falsas alarmas (diagnóstica el trastorno cuando verdaderamente no existe). Aplicado el test a una determinada persona:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diagnosticada como psicópata?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté realmente trastornada si el test ha dado positivo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca el trastorno aunque el test haya sido positivo?

Si planteamos la información que tenemos en términos de probabilidad tenemos que:

$$p = \text{Padecer psicopatía}$$
$$p' = \text{No padecer psicopatía}$$
$$D = \text{Detección de la psicopatía}$$
$$P(p) = 0.1 \Rightarrow P(p') = 1 - 0.1 = 0.9$$
$$P(D/p) = 0.9 \Rightarrow P(D'/p) = 1 - 0.9 = 0.1$$
$$P(D/p') = 0.2$$

De tal manera nos queda:

a) $$P(D) = P(D \cap p) + P(D \cap p') = [P(p) \cdot P(D/p)] + [P(p') \cdot P(D/p')] = \\ = [0.1 \cdot 0.9] + [0.9 \cdot 0.2] = 0.27$$

b) $$P(p/D) = \frac{P(p \cap D)}{P(D)} = \frac{P(p) \cdot P(D/p)}{P(D)} = \frac{0.1 \cdot 0.9}{0.27} = 0.33$$

c) $$P(p'/D) = 1 - P(p/D) = 1 - 0.33 = 0.66$$

o bien

$$P(p'/D) = \frac{P(p' \cap D)}{P(D)} = \frac{P(p') \cdot P(D/p')}{P(D)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.27} = 0.66$$

Ejemplo Propuesto:

En las elecciones primarias para el 02 de julio, en un importante partido político, el 45% de los militantes votan al candidato A, de los cuales un 54% provienen del sur de México. Del 55% de los militantes que votaron al candidato ganador, B, el 60% son del norte.

a) Elegido un votante al azar, calcular la probabilidad de que sea del norte de México.

b) Elegido un votante al azar, calcular la probabilidad de que haya optado por el candidato A y sea del norte de México.

c) Utilizando estas proporciones, calcular la relación entre las variables: candidato (A o B) y localización geográfica (norte o sur) e interpretar su resultado.

Sabemos en términos de probabilidad que:

$$P(A) = 0.45; \;\Rightarrow P(B) = 0.55$$
$$P(S / A) = 0.54 \Rightarrow P(N / A) = 1 - 0.54 = 0.46$$
$$P(N / B) = 0.6 \Rightarrow P(S / B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

Por tanto podemos resolver de la siguiente manera:

a) $$P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap B) = [P(A) \cdot P(N / A)] + [P(B) \cdot P(N / B)] =$$
$$= [0.45 \cdot 0.46] + [0.55 \cdot 0.6] = 0.537$$

b) $P(N \cap A) = P(A) \cdot P(N / A)] = 0.45 \cdot 0.46 = 0.207$

c)

	A	B		
N	0.207	0.33	0.537	$\phi = \frac{0.207 \bullet 0.22 - 0.33 \bullet 0.243}{\sqrt{0.537 \bullet 0.463 \bullet 0.45 \bullet 0.55}} = -0.139$
S	0.243	0.22	0.463	El signo positivo o negativo depende de la disposición de los datos.
	0.45	0.55	1.0	

A la vista de la disposición de las frecuencias en la tabla podemos decir que existe una pequeña relación (0.139) entre votar A y ser del Sur y votar a B y ser del Norte.

Ejemplo Propuesto:

En la ENP plantel 5 “José Vasconcelos” hay 400 alumnos de sexto año, cuyo número de asignaturas de tronco común oscila entre 1 y 5 dependiendo del área. Al final de curso el número de alumnos que han aprobado un determinado número de asignaturas en relación con las asignaturas en común aparece recogido en la siguiente tabla:

		Asignaturas aprobadas					
		0	1	2	3	4	5
Asignaturas Inscritas	1	5	20				
	2	5	40	5			
	3	2	5	60	8		
	4	10	15	50	100	25	
	5	1	2	3	4	30	10

Con estos datos, si llamamos M al número de asignaturas inscritas y A al número de asignaturas aprobadas:

a) Elegido un alumno al azar ¿Cuál es la probabilidad de que se haya inscrito en 3 asignaturas o menos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que se ha inscrito en 3 asignaturas apruebe al menos 2?

c) Elegido un alumno al azar resultó que había aprobado 2 asignaturas ¿Cuál es la probabilidad de que se inscribiera exactamente en dos asignaturas?

Tenemos por tanto que:

		Asignaturas aprobadas						
		0	1	2	3	4	5	
Asignaturas Inscritas	1	5	20					25
	2	5	40	5				50
	3	2	5	60	8			75
	4	10	15	50	100	25		200
	5	1	2	3	4	30	10	50
		23	82	118	112	55	10	400

a) $P(M \leq 3) = \dfrac{25+50+75}{400} = 0.375$

b) $P(A \geq 2 / M = 3) = \dfrac{60+8}{75} = 0.906$

c) $P(M = 2 / A = 3) = \dfrac{5}{118} = 0.04237$

Ejemplo Propuesto:

Un alumno de Estadística y Probabilidad se enfrenta a un examen extraordinario de opción múltiple en el que todas las preguntas son de la misma dificultad, y tienen cuatro alternativas de las que sólo una es correcta. El alumno decide contestar a todas las preguntas, y dado su nivel de conocimientos, la probabilidad de que sepa la solución correcta de una pregunta elegida al azar, P(S), es 0.8. Si el alumno sabe la pregunta, entonces la acierta, es decir, P(A/S)=1. Si no sabe la solución correcta marca una de las alternativas aleatoriamente, de tal forma que P(A/NS)=0,25. Con estos datos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que nuestro alumno acierte una pregunta cualquiera?

b) Sabiendo que el alumno ha acertado una pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que sepa cuál es la solución correcta?

c) Si el examen consta de 20 preguntas. ¿Cuántas de ellas acertará más probablemente?

Con los datos que tenemos podemos afirmar lo siguiente:

a) La probabilidad de acertar es igual a la "probabilidad de saber la pregunta y acertarla más la probabilidad de no saberla y acertarla", es decir:

$$P(A) = P(S \cap A) + P(NS \cap A) = P(S)P(A/S) + P(NS)P(A/NS) =$$
$$= 0.8 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.85$$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S)P(A/S)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 1}{0.85} = 0.94$$

c) Se trata de la esperanza de una Binomial (20,0.85)

$E(X) = n \bullet p = 20 \bullet 0.85 = 17$

Ejemplo Propuesto:

En la siguiente tabla se muestra los alumnos inscritos en una determinada materia optativa, en tres áreas, desglosadas por sexo.

	Físico-Matemática	Químico-Biológica	Económico-Administrativa	
Varones	983	2820	6151	9954
Mujeres	2384	2288	1728	6400
	3367	5108	7879	16534

Elegido un alumno al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del área físico matemática?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sabiendo que es mujer no sea del área químico biológica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sabiendo que es de económico administrativa, sea mujer?

a) $P(FisMat) = \dfrac{3367}{16354} = 0.20588$

b) $P(No\ QuimBiol / mujer) = \dfrac{P(No\ QuimBiol \cap mujer)}{P(mujer)} = \dfrac{2384 + 1728}{6400} = 0.6425$

c) $P(mujer / EconAdmn) = \dfrac{P(EconAdmn \cap mujer)}{P(EconAdmn)} = \dfrac{1728}{7879} = 0.21931$

Ejemplo Propuesto:

Sean 3 equipos de fútbol (Águilas del América, Chivas de Guadalajara y Pumas de la UNAM), que se presentan a las finales de un torneo de verano, sólo uno ganará el torneo. El espacio muestral es un conjunto de tres elementos, E={Águilas, Chivas, Pumas}, donde cada elemento corresponde al triunfo de cada uno de los equipos. Suponemos que las águilas y las chivas tienen las mismas posibilidades de ganar mientras que los pumas tienen solamente la mitad de las posibilidades de ganar que las águilas. Debemos asignar las probabilidades de modo que:

$$P(\acute{A}guilas) = P(Chivas) = 2 \cdot P(Pumas)$$

Como se debe cumplir que:

$$P(\acute{A}guilas) + P(Chivas) + P(Pumas) = 1$$

Nos conduce a:

$$2 \cdot P(Pumas) + 2 \cdot P(Pumas) + P(Pumas) = 1$$

Por lo tanto:

$$P(\acute{A}guilas) = \frac{2}{5};\ \ P(Chivas) = \frac{2}{5};\ \ P(Pumas) = \frac{1}{5}$$

La probabilidad del suceso V que ganen las águilas o los pumas el trofeo del torneo sería:

$$P(V) = P(\acute{A}guilas) + P(Pumas) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$$

3.7 Teoremas de la probabilidad

Sean *A* y *B* dos eventos asociados con un experimento ε. Indicaremos con $P\left(B/A\right)$ la probabilidad condicional del evento *B*, dado que *A* ha ocurrido.

Cada vez que calculamos $P\left(B/A\right)$, esencialmente estamos calculando $P(B)$ respecto del espacio muestral reducido *A*, en vez del espacio muestral original *S*.

Podemos escribir:

$$B = B \cap S$$

y sabemos que :

$$P(B)=P(B\cap S)=P(B)P(S)\Rightarrow P\left(B/S\right)=\frac{P(B\cap S)}{P(S)}$$

Si ahora reducimos el espacio Muestral de *S* a *A*:

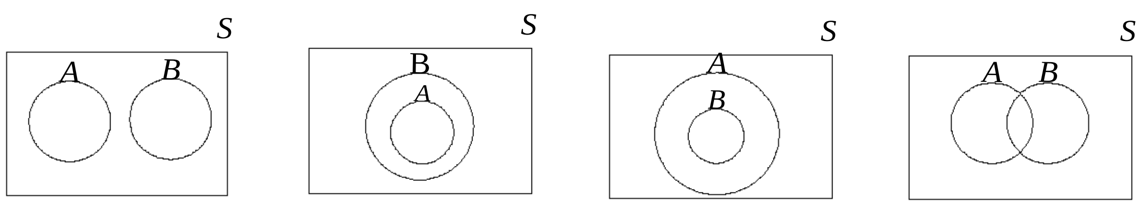
$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \text{ puesto que } P(A)>0$$

La consecuencia más importante de la definición de probabilidad condicional es:

$$P(A\cap B)=P\left(B/A\right)P(A)$$

$$P(A\cap B)=P\left(A/B\right)P(B)$$

Esto también se conoce como el teorema de la multiplicación de probabilidades.



i) $A\cap B=\phi$ ii) $A\subset B$ iii) $B\subset A$ iv) Ninguno anterior

Figura 3.7.1 diagramas de Venn para teoremas de probabilidad

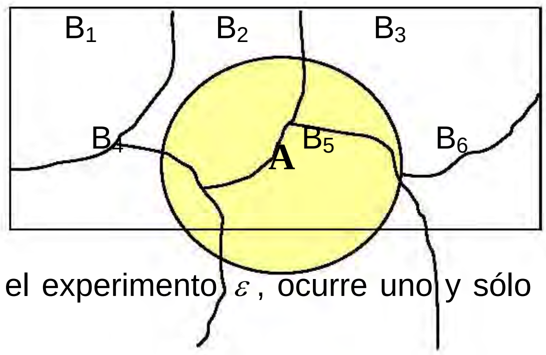
i) $P\left(A/B\right)=0\leq P(A)$ puesto que *A* no puede ocurrir si ocurrió *B*.

ii) $P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\geq P(A)$ puesto que $0<P(B)\leq 1$.

iii) $P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1\geq P(A)$.

iv) No se puede hacer porque ninguna afirmación acerca de la magnitud relativa de $P\left(A/B\right)$ y $P(A)$.

Definición: Decimos que los eventos B_1, B_2, B_3,...,B_k representan una partición de S si:



a) $B_i \cap B_j = \phi, \forall i \neq j$.

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$.

c) $P(B_i) > 0, \forall i$

En otras palabras, cuando se efectúa el experimento ε, ocurre uno y sólo uno de los eventos B_j.

Sea A algún evento de S y sea B_1, B_2, B_3,...,B_k una partición de S. Por lo tanto podemos escribir:

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$ vemos que todos los pares $A \cap B_j$ son mutuamente excluyentes, por lo tanto podemos aplicar la propiedad aditiva:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_j)$ se puede escribir como $P\left(A/B_j \right) P(B_j)$, y así obtenemos el teorema de la probabilidad Total:

$$P(A) = P\left(A/B_1 \right) P(B_1) + P\left(A/B_2 \right) P(B_2) + \ldots + P\left(A/B_k \right) P(B_k)$$

3.8 Variables aleatorias: discretas y continuas

3.8.1 Variable Aleatoria

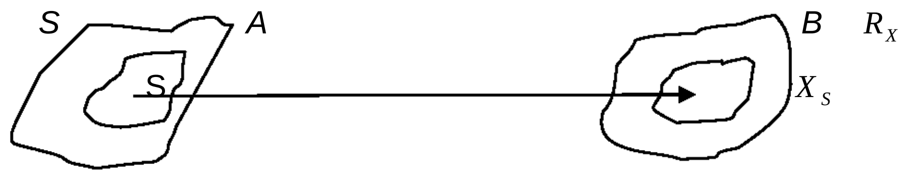
Sea un experimento ε y S el espacio muestral asociado a él. Una función X que a cada uno de los elementos $s \in S$, un número real $X_{(S)}$, se llama variable aleatoria.

El espacio R_X, es decir, el conjunto de todos los valores posibles de X, algunas veces es llamado recorrido.

Definición: Sea ε un experimento y S su espacio muestral. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_X su recorrido. Sea B un evento respecto a R_X ,esto es, $B \subset R_X$. Supongamos que A se define como:

$$A = \{s \in S / X_S \in B\}$$

Es decir, *A* consta de todos los resultados en *S* para los cuales $X_S \in B$. Entonces *A* y *B* son eventos equivalentes:



Definición: Sea *B* un evento en el recorrido R_X, entonces definimos $P(B)$ como sigue:

$P(B) = P(A)$, $A = \{s \in S / X_S \in B\}$

Es decir, la probabilidad de dos eventos equivalentes es la misma. De esta manera, desde aquí podremos ignorar el espacio muestral *S* que dio lugar a esas probabilidades.

3.8.2 Variable Aleatoria Discreta

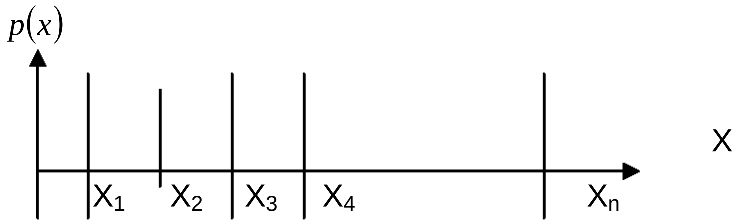
Sea *X* una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de *X* (R_X) es finita o infinita numerable, llamamos a *X* una variable aleatoria discreta. Esto es, se pueden anotar los valores posibles de *X* como X_1, X_2, X_3,....,X_n.

Definición: Sea *X* una variable aleatoria discreta, con cada resultado posible x_i asociamos un número $p(x_i) = P[X = x_i]$, llamado probabilidad de x_i. Propiedades:

i) $p(x_i) \geq 0, \forall i$.

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

La función *p* antes mencionada se llama función de probabilidad puntual de la variable *X*.



Sea *B* un evento asociado con la variable aleatoria *X*. Esto es, $B \subset R_X$ $\left(B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\right)$. Por lo tanto:

$$P(B) = P[S/X_S \in B] \quad \text{(puesto que son equivalentes)}$$

$$P(B) = P[S/X_S = x_i; i = 1,2,3,\ldots,n]$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} p(x_j)$$

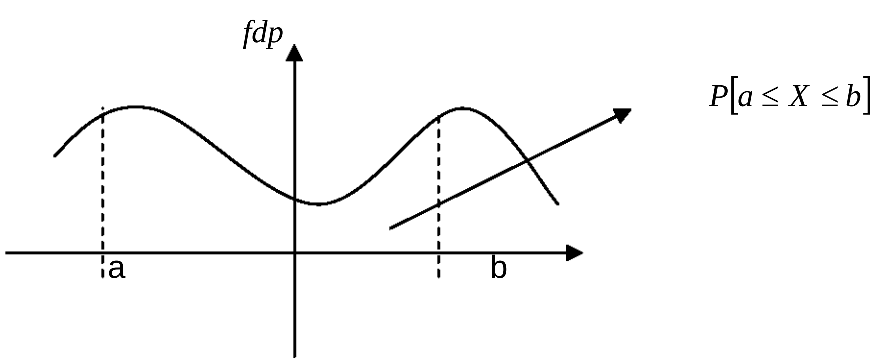
3.8.3 Variable Aleatoria Continua

Se dice que *X* es una variable aleatoria continua, si existe una función *f*, llamada función de densidad de probabilidad de *X*, que satisface las siguientes condiciones:

i) $f(X) \geq 0, \forall X$.

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$.

iii) Para cualquier a, b tal que $-\infty < a < b < +\infty$, tenemos $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(X)dx$.



No existen, en este tipo de variables la probabilidad puntual del tipo $P[X = x_0]$, puesto que $P[X = x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(X)dx = 0$.

Si X toma valores en un intervalo finito [a, b], establecemos $f(X) = 0, \forall X \notin [a,b]$.

3.8.4 Función de distribución acumulada

Sea *X* una variable aleatoria, discreta o continua. Definimos que *F* es la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria *X* como $F(X) = P[X \leq x]$.

Teorema:

Si *X* es una variable aleatoria discreta:

$$F(X) = \sum_j p(x_j) \qquad \forall j \; x_j < X$$

Si *X* es una variable aleatoria continua:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(s)ds$$

Teorema:

a- La función *F* es no decreciente. Esto es si $x_1 \leq x_2$, tenemos $F(x_1) \leq F(x_2)$.

b- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(X) = 1$ (A menudo se escribe como $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$).

Demostración:

a- Definimos los eventos *A* y *B* como sigue: $A = \{x \leq x_1\}$ y $B = \{x \leq x_2\}$. Entonces, puesto que $x_1 \leq x_2$, tenemos $A \subset B$ y por el teorema $P(A) \leq P(B)$.

b- Para el caso continuo:

i. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{X} f(s)ds = 0$.

ii. $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = 1$.

Teorema:

a- Sea *F* la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad *f*. Luego, $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ para toda *X* en la cual *F* es diferenciable.

b- Sea *X* una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots$ y supongamos que es posible rotular esos valores de modo que $x_1 < x_2 < \ldots$. Sea *F* la función de distribución acumulativa de *X*. Entonces: $p(x_j)=P\lfloor X = x_j \rfloor = F(x_j)-F(x_{j-1})$.

Demostración:

a- $F(x)=P(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds$. Así, aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que $F'(x)= f(x)$.

b- Puesto que supusimos $x_1 < x_2 < \ldots$, tenemos:

$$F(x_j)=P\lfloor X = x_j \cup X = x_{j-1} \cup X = x_{j-2} \cup \ldots \cup X = x_1 \rfloor$$
$$= P(x_j)+P(x_{j-1})+P(x_{j-2})+\ldots P(x_1)$$
$$F(x_{j-1})=P\lfloor X = x_{j-1} \cup X = x_{j-2} \cup \ldots \cup X = x_1 \rfloor$$
$$= P(x_{j-1})+P(x_{j-2})+\ldots P(x_1)$$

Por lo tanto, $F(x_j)-F(x_{j-1})=P\lfloor X = x_j \rfloor = p(x_j)$.

3.9 Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas

Inicialmente vimos que existen las variables aleatorias, siendo aquellas que se asocian a la ocurrencia de un fenómeno aleatorio. Cuando una de estas variables aleatorias toma diversos valores, la probabilidad asociada a cada uno de tales valores puede ser organizada como una distribución de probabilidad, la cual es la distribución de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores de la variable aleatoria.

Las distribuciones de probabilidad pueden representarse a través de una tabla, una gráfica o una fórmula, en cuyo caso tal regla de correspondencia se le denomina función de probabilidad.

Dado que existen dos tipos de variables aleatorias se consideran a su vez dos tipos de modelos de distribuciones de probabilidad.

3.9.1 Modelos de distribución de probabilidad de variables discretas

- Uniforme. Es la distribución donde todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad. Por ejemplo: tirar un dado, donde la función P(X=x)=$^1/_6$ para valores de x=1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Binomial. Es la que maneja la distribución de la probabilidad de obtener cierta cantidad de éxitos al realizar una cantidad de experimentos con probabilidad de éxito constante y con ensayos independientes.
- Geométrica. Es la distribución de la probabilidad de realizar cierto número de experimentos antes de obtener un éxito.
- Hipergeométrica. Es similar a la binomial, pero con un tamaño de muestra grande en relación al tamaño de la población.
- De Poisson. Es la distribución de la probabilidad de que ocurra un evento raro en un periodo de tiempo, un espacio o un lugar.

3.9.2 Modelos de distribución de probabilidad de variables continuas

- Uniforme. Es la distribución en donde todos los eventos tienen la misma probabilidad.
- Exponencial. Se utiliza para estudiar el tiempo entre dos sucesos.
- Beta. Sirve para el estudio de variaciones, a través de varias muestras, de un porcentaje que representa algún fenómeno.
- Gamma. Se utiliza para estudiar variables cuya distribución puede ser asimétrica.
- Ji cuadrada$\left(\chi^2\right)$. Es una distribución asociada a la prueba $\left(\chi^2\right)$, y se usa para comparar los valores observados con los esperados.

- Normal. Es la distribución más utilizada porque la mayoría de las variables utilizadas en fenómenos sociales se distribuyen aproximadamente siguiendo este modelo.

Las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de los polígonos de frecuencias. En el caso de una variable estadística continua consideramos el histograma de frecuencias relativas, y se comprueba que al aumentar el número de datos y el número de clases el histograma tiende a estabilizarse llegando a convertirse su perfil en la gráfica de una función.

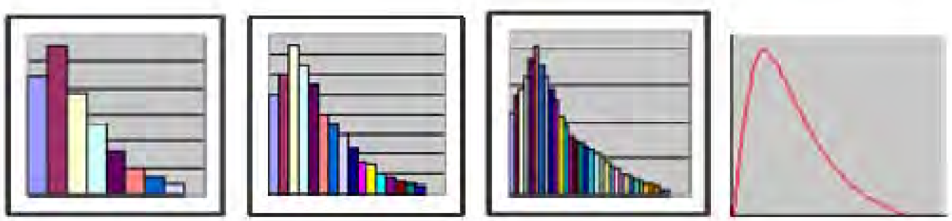


Tabla 3.9.1.1 distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad de variable continua se definen mediante una función y=f(x) llamada función de probabilidad o función de densidad.

Así como en el histograma la frecuencia viene dada por el área, en la función de densidad la probabilidad viene dada por el área bajo la curva, por lo que:

- El área encerrada bajo la totalidad de la curva es 1.
- Para obtener la probabilidad p(a<X<b) obtenemos la proporción de área que hay bajo la curva desde a hasta b.
- La probabilidad de sucesos puntuales es 0, p(X=a)=0

3.9.1.1 Distribución Binomial

Sea un experimento ε y un evento *A* asociado a él. Suponemos $P(A) = p$ (por ende, $P(\tilde{A}) = 1 - p$). Consideramos *n* repeticiones independientes de ε. Por lo tanto, *S* consiste de las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ donde cada a_i es *A* o *Ã*, según ocurra *A* o *Ã* en la i-ésima repetición.

Supongamos que $P(A)=p$ es el mismo para todas las repeticiones y definimos *X* = "número de veces que ocurrió *A*". Llamamos a *X* una variable aleatoria Binomial con parámetros *n* y *p*. Las repeticiones individuales de ε se llamarán ensayos de Bernoullí.

Como ejemplos de ensayos Bernoulli tenemos:

- Un tornillo, puede estar defectuoso o no defectuoso.
- El sexo de un bebé al nacer: niño o niña.
- La respuesta correcta o incorrecta en un examen.

Teorema: Sea *X* una variable Binomial con base en *n* repeticiones. Entonces:

$$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Demostración: Consideremos que en las *n* repeticiones de ε ocurre *k* veces *A*. Así:

$$\underbrace{AAAAAAA\ldots\ldots A}_{k}\underbrace{\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\tilde{A}\ldots\ldots\tilde{A}}_{n-k}$$

Si $P(A)=p$ y como todas las repeticiones son independientes, la probabilidad de esta sucesión particular sería $p^k(1-p)^{n-k}$. Pero como hay $\binom{n}{k}$ maneras de agruparlas:

$$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Ejemplo propuesto:

Consideremos a la variable aleatoria X como la cantidad de águilas observadas cuando se lanzan dos volados. El espacio muestral es el conjunto {AA, AS, SA, SS} y se puede ver que la variable X puede tomar como valores 0, 1 y 2.

Calculando las probabilidades tenemos:

P(de no observar águilas)= $P(SS)=P(x=0)=\frac{1}{4}$

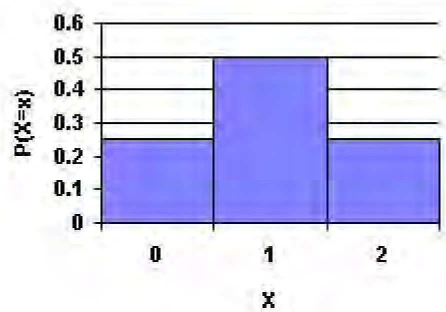
P(de observar un águila)= $P(SA\cup AS)=P(x=1)=\frac{2}{4}$

P(de observar dos águilas)= $P(AA) = P(x=2) = \frac{1}{4}$

Si ahora se organizan estos resultados con el siguiente formato

X	P(X=x)
0	¼
1	$^2/_4$
2	¼

Se podrá explicar por qué se usa el nombre "distribución de probabilidad" e incluso, con esta información se puede construir una gráfica de barras o un histograma como el que sigue:



Ejemplo propuesto:

Consideremos un examen con tres preguntas de opción múltiple, con cuatro opciones, y que será contestado al azar.

1. La varianza para el conjunto de datos {3, 8, 7, 6, 7, 5} es:

a)5.7 b)5.45 c)4.7 d)3.2

2. Si se tiran 2 dados, la probabilidad de que la suma de puntos sea múltiplo de 3, dado que la suma es par es

a)$\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

3. Es un ejemplo de variable categórica

a)Edad b)Costo c)Marca d)Dimensiones de un terreno

Con esto contamos con un experimento binomial, ya que la probabilidad de éxito permanece constante en las tres preguntas (p=¼) y las respuestas de una a otra pregunta son independientes entre sí. Se cuenta con una cantidad n=3 de ensayos y $q = 1 - p = \frac{3}{4}$

Hay que mencionar que n y p son los llamados parámetros de la distribución, y tenemos ahora la variable aleatoria X que representará el número de respuestas correctas, siendo sus posibles valores: 0, 1, 2, y 3.

Para calcular la distribución de probabilidad correspondiente, consideraremos como E los éxitos y como F los fracasos (el subíndice indica el número de pregunta). Así pues, tenemos que:

$$P(x=0) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 = P(F_1)P(F_2)P(F_3)$$

$$= 1\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

$$P(x=1) = P\left[\left(E_1 \cap F_2 \cap F_3\right) \cup \left(F_1 \cap E_2 \cap F_3\right) \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap E_3\right)\right]$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{81}{256}$$

$$P(x=2) = P\left[\left(E_1 \cap E_2 \cap F_3\right) \cup \left(E_1 \cap F_2 \cap E_3\right) \cup \left(F_1 \cap E_2 \cap E_3\right)\right]$$

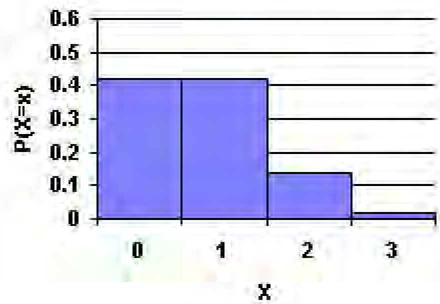
$$= 3\left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(x=3) = P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= 1\left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

Al presentar esta información como tabla y su respectivo histograma se obtiene:

X	P(X=x)
0	0.422
1	0.422
2	0.141
3	0.016



Ejemplo Propuesto:

Una fábrica produce alfileres con 2.5% de defectuosos. Si se toma una muestra de 200 alfileres ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos?

- La probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos es igual, por complemento, a uno menos la probabilidad de encontrar menos de 3 defectuosos, esto es:

Probabilidad (3 o más defectuosos) = 1-Probabilidad (menos de 3 defectuosos) = 1-(P(0) + P(1)+(2)) = 1-P(0) – P(1) – (2)

- La probabilidad de obtener x artículos defectuosos puede calcularse por medio de la siguiente fórmula:

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x \; q^{n-x}$$

En este caso, x es 0, 1 y 2; n es 200; p es 0.025 y q es 0.975 (1-0.025)

Probabilidad (0 éxitos) $= \frac{200!}{2!(200-0)!} (0.025)^2 \; (1\text{-}0.025)^{(200\text{-}0)}$

$= 0.0063$

Probabilidad (1 éxito) $= \frac{200!}{2!(200-1)!} (0.025)^2 \; (1\text{-}0.025)^{(200\text{-}1)}$

$= 0.0324$

Probabilidad de (2 éxitos) $= \frac{200!}{2!(200-2)!}$ $(0.025)^2$ $(1\text{-}0.025)^{(200\text{-}2)}$

$$= 0.0827$$

Probabilidad de (3 o más defectuosos) $=1-\left(P(0)+P(1)+P(2)\right)$

$$=1-\left(0.0063+0.0324+0.0827\right)$$

$$=1-0.1214=0.8786$$

$\therefore$ la probabilidad es de 87.86%

Hasta el momento hemos considerado una distribución de probabilidad para variables discretas, donde se podía asignar el valor que toma la función de probabilidad cuando la variable aleatoria tomaba un valor en concreto. Sin embargo, al considerar las variables continuas se encuentra uno el problema de que, lo más probable, los datos que se puedan recabar no sean completamente exactos, o dos o más de ellos no coincidan, por lo que se tienen que trabajar en intervalos y, en ese momento, modelar una función se convierte en un problema serio.

Sin embargo, se pueden realizar aproximaciones y describir la probabilidad a través de modelos teóricos de probabilidad cuya gráfica es una línea continua, a diferencia de las variables discretas que le corresponde un histograma.

3.9.2.1 Distribución Normal

Esta función de probabilidad es la densidad más usada tanto en aspectos teóricos como prácticos, juega un papel central en la Probabilidad y la Estadística, ya que cualquier población cuya mayoría de individuos se concentren cercanamente a un valor y cuya minoría se alejen de dicho valor, tendrá un comportamiento normal.

Una variable aleatoria X que toma todos los valores reales tiene una distribución Normal Gaussiana si su función de densidad de probabilidad es de la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)} \qquad X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

con la condición de que $\sigma > 0$

Propiedades:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ii) $E(x)=\mu$

iii) $V(x)=\sigma^2$

iv) la gráfica es simétrica respecto de μ

v) Si $X \sim N(0,1)$ decimos que *X* tiene una distribución Normal Tipificada y se escribe así:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La ventaja de esta última es que se encuentra tabulada:

$$P[a \le x \le b]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Como la integral no puede resolverse por el teorema fundamental del cálculo (ya que no hay función que derivada sea igual a $e^{-\frac{x^2}{2}}$), usamos los métodos de integración numérica para evaluar dicha integral ($P[X \le s]$ ha sido tabulada). Esta función de distribución acumulativa se denota con Φ : es decir:

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Por lo tanto, si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $z=\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ tiene una distribución $N(0,1)$, así:

$$P(a \le X \le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Por ejemplo:

- La estatura de una población
- El peso de una población
- El coeficiente intelectual de una población

El término normal es un término netamente estadístico, la falta de *normalidad* no necesariamente implica *patología.*

Ejemplo Propuesto:

Una fábrica produce alfileres con 2.5% de defectuosos. Si se toma una muestra de 200 alfileres ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos?

- La probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos es igual, por complemento, a uno menos la probabilidad de encontrar menos de 3 defectuosos, esto es:

Probabilidad (3 ó más defectuosos) = 1– Probabilidad (menos de 3defectuosos)

$$= 1 - (P(0) + P(1) + P(2))$$

$$= 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

Distribución del número de defectuosos en la muestra	
P(0) + P(1) + P(2)	P(3) + P(4) + . . . + P(200)
Menos de tres	Tres o más defectuosos

La solución de este problema puede obtenerse por medio de la distribución binominal, pero también, y más fácilmente, aunque en forma aproximada, por medio de la distribución normal si se cumplen con las siguientes condiciones:

(Número de artículos • Probabilidad de éxito) $\geq$ *5, y*

(Número de artículos • (1 – Probabilidad de éxito)) $\geq$ *5*

$np \geq 5$ *y* $n(1-p) \geq 5$

Dado que n=200 y p=0.025, np=200•0.025=5 $\geq$ 5 y n(1- p)=200•(1- 0.025)=195 $\geq$ 5, por lo tanto es adecuada la aplicación de la distribución normal. La media y la desviación estándar se calculan enseguida:

Media= Número de eventos • Probabilidad de éxito

Media = n • p = μ = 200 (0.025)=5

$$\text{Desviación estándar} = \sqrt{\begin{matrix} \textit{Número} \\ \textit{de eventos} \end{matrix} \bullet \begin{matrix} \text{Pr}\textit{obabilidad} \\ \textit{de éxito} \end{matrix} \bullet \begin{matrix} \text{Pr}\textit{obabilidad} \\ \textit{de fracaso} \end{matrix}}$$

$$\sigma = \sqrt{n \bullet p \bullet (1-p)} = \sqrt{n\ p\ q}$$

$$\sigma = \sqrt{200\ (0.025)\ (1-0.025)} = 2.208$$

Observamos que la posibilidad deseada, P(3 o más defectuosos), es igual a P (más de 2 defectuosos), es decir,

P (X $\geq$ 3) = P(X > 2)

El ajuste por continuidad es positivo, y el valor de *z* es:

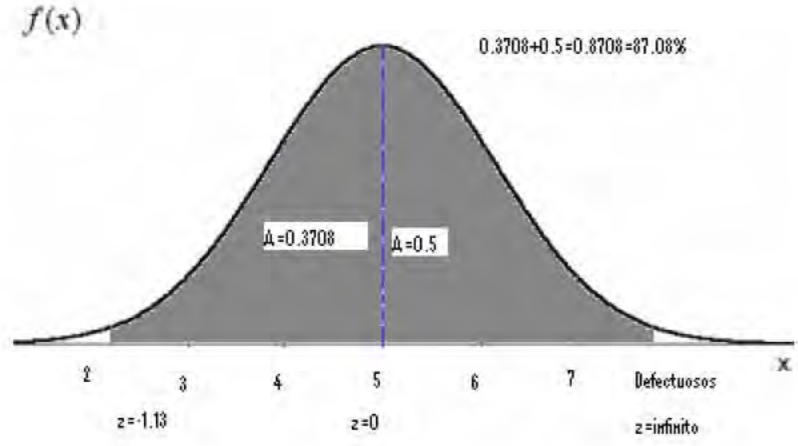
$$z = \frac{Valor - Media \pm 0.5}{Desviación\ estándar} = \frac{X - \mu \pm 0.5}{\sigma}$$

$$= \frac{2-5+0.5}{2208} = -1.13$$

Ajuste por continuidad

Símbolo	Ajuste
≤	+0.5
>	+0.5
≥	-0.5
<	-0.5

De las tablas, él área bajo la curva entre 0 y 1.13 es 0.3708, por lo que el área buscada es:



Aportaciones de Fermat a la teoría de la probabilidad

En el año de 1654 se establece una importante correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1655). En esa época, lo usual para intercambiar ideas entre científicos en temas comunes era ese medio. En este caso quien los puso en contacto fue Carcavi un viejo amigo de Fermat y gran amigo de Pascal.

A partir de las cartas que intercambian Pascal y Fermat podemos reconstruir el origen de varios de los conceptos más importantes en la probabilidad, muy especialmente la contribución que Fermat hace para comprender el de independencia.

En estas cartas, se discuten diversos problemas matemáticos; entre los cuales se encuentran varios relativos a juegos de azar:

1. Primer problema de los puntos
2. Problema de proporcionalidad
3. Segundo problema de los puntos.

Muchos historiadores de la ciencia coinciden en señalar que las aportaciones contenidas en ellas marcan el nacimiento de la teoría de la probabilidad; no sólo por su contenido, sino por el prestigio de estos dos matemáticos que atrae a otros científicos de la época hacia este tema. Hasta entonces el estudio del azar no había sido trabajado de manera sistemática. No es claro por qué. En parte, puede ser por provenir de los juegos y de las apuestas que como tal era considerado algo poco serio: en tiempos más remotos, su vínculo con cuestiones religiosas, tales como los oráculos, la adivinación del futuro, etc., le pudo hacer conferido un carácter sagrado que le impidió su estudio.

Es Pascal quien inicia la correspondencia y transmite a Fermat las preguntas que Chevalier de Méré le hacía. Este personaje de la corte de Luís XIV, era un jugador apasionado y en sus múltiples juegos se le presentaron dudas diversas, especialmente relativas a como repartir de una manera justa la cantidad apostada. Chevalier de Méré no fue un científico ni un matemático. Es conocido por los matemáticos en la actualidad principalmente por haber planteado estos problemas a Pascal.

A continuación se describen los problemas y las diversas soluciones que dieron los célebres corresponsales:

1. Para ganar un juego A debe sacar al menos un seis en ocho lanzamientos de un dado. La apuesta total que llamaremos “la bolsa” se la lleva el jugador A si logra obtener el seis. En caso contrario pierde la bolsa entera. El jugador A ya ha lanzado tres veces el dado sin obtener el seis deseado. Si A decide no hacer el cuarto lanzamiento, ¿qué parte de la bolsa debe ser reintegrada a A por no hacer este lanzamiento?

Este problema lo plantea Pascal a Fermat, en una carta que no se conserva. Sólo tenemos la respuesta de Fermat quien escribe: "….si no hago el primer lanzamiento, debo tomar de la bolsa 1/6 del total. Si nuevamente no realizo el segundo lanzamiento, debo ser indemnizado con 1/6 del capital restante, esto es con 5/36 del total. Si ahora acordamos que no hago el tercer lanzamiento, debo retirar un sexto del capital que queda y es:

$$25/216$$

y si después de esto decidimos que no haga la cuarta tirada debo retirar un sexto del capital restante, es decir:

$$125/1296$$

del total. Pero usted me propone en el último ejemplo de su carta (cito sus palabras):

"… *si debo obtener un seis en ocho lanzamientos de un dado y ya jugué tres sin lograrlo y si mi oponente me propone que no juegue mi cuarto lanzamiento y quiere pagarme por ello, debería darme*

$$125/1296$$

del total de la bolsa.

Esto no es cierto según mi principio. Pues en este caso, las tres primeras tiradas sí se hacen, sin haber obtenido el seis: la bolsa total aún sigue en juego y si el jugador decide no tirar el dado en su cuarta oportunidad debe tomar como recompensa 1/6 del total. Y si hubiese jugado las primeras cuatro veces sin obtener el seis y decide no lanzar la quinta, recibirá el mismo sexto del total como indemnización."

En el razonamiento de Fermat cabe destacar lo siguiente:

1. Si A renuncia a un lanzamiento, le corresponde 1/6 de la bolsa, sin importar si es el primero, el quinto o el que sea de los ocho. Es decir, cada lanzamiento no depende de los demás.
2. Si A decide no hacer 4 lanzamientos, debe ser indemnizado con $1-(5/6)^4$ de la bolsa y esta cantidad es igual a:

$$1/6+5/36+25/216+125/1296=1/6\sum_{k=0}^{3}(5/6)^k$$

Aquí vemos la idea de calcular la indemnización de A con un sexto de la bolsa restante es equivalente a decir que le corresponde 1- $(5/6)^4$ de la bolsa. Esta cantidad se obtiene de restar a 1 el resultado de multiplicar 4 veces la probabilidad de no obtener un seis en 4 lanzamientos.

3. De manera análoga si A decide no hacer n lanzamientos (n<8) le corresponde:

$$1-(5/6)^n$$

de la bolsa, que es lo mismo que:

$$1/6+5/36+\ldots+1/6(5/6)^{n-1}$$

4. En el juego total A pierde con probabilidad $q= (5/6)^8$ y gana con probabilidad $p=1-q$. Así que si A decide no hacer ningún lanzamiento le corresponde $1-(5/6)^8$ de la bolsa y esta cantidad es igual a:

$$1/6+5/36+25/216+\ldots+1/6(5/6)^7= 1/6 \sum_{k=0}^{7} (5/6)^k$$

Lo anterior muestra que Fermat maneja con toda claridad el concepto que hoy se conoce como independencia en la teoría de la probabilidad. Esto permite resolver correctamente el problema, no sólo eso, con esta idea establece el inicio a toda una serie de aportaciones que serán fundamentales, tanto en combinatoria como en la probabilidad. El antecedente más importante de éste razonamiento es la solución que da Galileo a un problema que proviene del lanzamiento de tres dados (en ciertos escritos Cardano, que también era muy aficionado a los juegos de azar, desarrolla correctamente la idea de independencia pero entre otros comete errores serios):

Es fácil ver que hay el mismo número de descomposiciones tanto del 9 como del 10 en suma de tres naturales mayores o iguales a 1:

$$\left| \begin{array}{l|l} 9=3+3+3 & 10=4+3+3 \\ 9=4+3+2 & 10=4+4+2 \\ 9=4+4+1 & 10=5+3+2 \\ 9=5+2+2 & 10=5+4+1 \\ 9=5+3+1 & 10=6+2+2 \\ 9=6+2+1 & 10=6+3+1 \end{array} \right|$$

¿Porqué entonces, al lanzar tres dados es más probable obtener 10 que 9 al sumar los números resultantes? El razonamiento de Galileo muestra que ve claramente la independencia, ya que da un listado de todos los posibles casos de lanzamiento de dos dados:

(1,1)	*(1,2)	*(1,3)+	*(1,4)+	*(1,5)+	*(1,6)+
*(2,1)	*(2,2)+	*(2,3)+	*(2,4)+	*(2,5)+	*(2,6)+
*(3,1)+	*(3,2)+	*(3,3)+	*(3,4)+	*(3,5)+	(3,6)+
*(4,1)+	*(4,2)+	*(4,3)+	*(4,4)+	(4,5)+	(4,6)
*(5,1)+	*(5,2)+	*(5,3)+	(5,4)+	(5,5)	(5,6)
*(6,1)+	*(6,2)+	(6,3)+	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Luego ve que con los tres dados la suma puede dar 9 en los casos marcados con *, y 10 en los casos marcados con +. Dice que cada caso tiene igual probabilidad y son más casos con + (27) que con * (25). Este razonamiento impecable fue poco conocido por sus contemporáneos y el mismo Galileo le dío poca importancia.

No sabemos si Fermat conocía el resultado de Galileo. En las reuniones de casa del Abad Mersenne en Paris, se discutían los trabajos de la escuela italiana, pero aparentemente Pascal (que asistía a estas reuniones) no conocía el resultado de Galileo. Es de suponer que Fermat no lo conociera ya que no asistió a dichas reuniones. Es claro por la cita textual que hace Fermat de la carta de Pascal, que ese último no había extendido el concepto de independencia, pues relaciona el cuarto lanzamiento con los anteriores.

El segundo problema aparece de manera marginal en la segunda carta del 29 de julio de 1654, en la que Pascal escribe acerca de un comentario hecho por Méré:

“No he tenido tiempo de pensar en su problema que inquieta a M. de Méré. Si usted puede resolver la dificultad será perfecto. Chevaliere de Méré dice haber encontrado falsedad en la teoría de los números por la siguiente razón:

Si me propongo obtener un seis en el lanzamiento de un dado, tengo ventaja si es en cuatro lanzamientos. Si me propongo obtener un doble seis con *dos dados, tengo desventaja si es en 24 lanzamientos. Además 24 es a 36 como 4 es a 6.*

Este es su gran escándalo…"

O sea que Méré razonaba ingenuamente con una idea de proporcionalidad: "4 es al 6 como 24 es a 36" y en consecuencia según él, la probabilidad de ganar debería ser la misma en ambos casos. Sin embargo su experiencia personal mostraba que en el segundo caso perdía mientras que en el primero ganaba con mayor frecuencia. De lo cual concluía que había una gran falsedad en los números. La carta en que Fermat responde no se conoce. Se sabe que Fermat explicó con detalle porqué el primer juego es favorable y el segundo desfavorable con sus métodos de combinatoria y sus ideas sobre la independencia.

La independencia de cada lanzamiento permite calcular con toda precisión las probabilidades correspondientes:

La probabilidad de no tener un seis en cuatro lanzamientos es

$$(5/6)^4$$

La probabilidad de obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos es

$$(1-(5/6)^4)=p$$

y se calcula p que resulta ser 0.5177.

De manera análoga, se ve que la probabilidad de no tener un doble seis en veinticuatro lanzamientos es

$$(35/36)^{24}$$

La probabilidad de obtener al menos un doble seis en veinticuatro lanzamientos es

$$(1-(35/36)^{24})=p_1$$

Al calcular el valor de p_1 vemos que es 0.4914. Así que no hay problema alguno. En cambio se comprueba la conclusión a la que había llegado de Méré experimentalmente. Nos podemos preguntar cuán asiduo sería al juego si puedo detectar esta mínima diferencia.

Por último, Pascal comenta en la misma carta el segundo problema de los puntos. Este problema aparece en el libro de Fra Luca Paccioli editado en Venecia en 1494.

"Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proportionalita" de la siguiente manera:

Un juego de pelota entre dos equipos consiste en alcanzar 60 puntos. Cada etapa del juego da a quien la gana 10 puntos y 0 puntos a quien la pierde. La apuesta total es de 10 ducados. El juego debe interrumpirse y en ese momento el equipo A ha ganado 50 puntos y el equipo B tiene 20 puntos. ¿Cómo debe repartirse la bolsa de 10 ducados entre A y B de manera que la repartición sea justa?

Puesto que el libro de Paccioli es principalmente una recopilación de temas conocidos, seguramente el problema de los puntos se conocía desde hace tiempo atrás.

Se dieron soluciones aparentemente razonables, la más frecuente era: dividir la bolsa en partes proporcionales al número de juegos ganados por cada uno de los equipos. Es la solución que propone Paccioli en su libro: "se debe dividir en una proporción de 5 a 2". Esta solución es incorrecta.

No se encontró la respuesta hasta la época de la correspondencia entre Pascal y Fermat, o sea que fue un problema abierto por más de 160 años.

Pascal plantea el problema bajo la siguiente forma a Fermat:

Cada jugador apuesta 32 monedas: hay dos jugadores A y B y cada etapa del juego da un punto al ganador y 0 al perdedor. Gana el juego el primero en tener 3 puntos. Se supone además que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar cada etapa. El juego se interrumpe cuando A cuenta con un punto y B con ninguno. La pregunta en la misma ¿Cómo repartir la bolsa total de 64 monedas?

La carta en que Fermat le contesta no se conoce, pero podemos saber lo que dijo Fermat por el contenido de la respuesta de Pascal. En ella reproduce el razonamiento de Fermat:

Para encontrar la división justa de la bolsa es necesario saber cuantas etapas se requieren para que el juego termine y se pueda decidir quién gana. Se observa que no todas la formas de terminar el juego tienen la misma probabilidad. Por ejemplo, la sucesión ABA y la sucesión ABBA no tienen la misma probabilidad y en ambos casos gana A, (se usa la notación A si es A quien gana una etapa, y B si es B quien gana, es decir, la sucesión ABA significa que A gana, luego B gana y por último A vuelve a ganar.) Para evitar esa dificultad, Fermat primero establece cual es el número máximo de etapas necesarias para decidir el juego, en este caso es fácil ver que son cuatro. Hace entonces un listado de todos los posibles resultados de las cuatro etapas:

*AAAA	*ABAA	*BAAA	*BBAA
*AAAB	*ABAB	*BAAB	BBAB
*AABA	*ABBA	*BABA	BBBA
*AABB	ABBB	BABB	BBBB

Al observar esta lista ve que los casos en que A ganaría son 11 ya que sólo se necesitan de dos etapas más para ganar el juego y B en 5 pues requiere de tres puntos para ganar. Con esta información Fermat concluye que la repartición justa debe ser:

$$64x11/16=44$$

monedas para A y

$$64x5/16=20$$

Monedas para B.

Pascal expresa su gran admiración por la solución de Fermat y declara estar totalmente de acuerdo con el resultado, además describe otro método para resolver el problema que, sin necesidad de hacer la enumeración de todas las posibilidades conduce al mismo resultado:

1. Primero resuelve el problema en el caso de que A tenga dos puntos y B uno; el razonamiento es el siguiente: A puede ganar y llevarse las 64 monedas o puede perder y quedará empatado con B, por lo tanto a A le corresponden

$$64+32/2=48$$

monedas y a B las 16 restantes

2. Una vez resuelto este caso, sigue el mismo razonamiento para el caso en que A tenga dos puntos y B ninguno:

Si A gana se lleva las 64 monedas y B si gana queda en el caso anterior, por lo que la repartición justa deberá ser para A

$$64+48/2=56$$

monedas y 8 para B.

3. De manera análoga concluye el caso en que A lleve un punto y B cero puntos, la bolsa deberá repartirse así:

$$56+32/2=44$$

monedas para A y 20 para B, ya que si A gana quedan en el segundo caso y si B gana quedan empatados.

Este método nos lleva, por simetría a la siguiente tabla, donde la primera columna representa el número de etapas que A ha ganado, el último renglón el correspondiente de B y los números en la tabla la proporción que le toca a cada jugador:

3	64:0	64:0	64:0	/
2	56:8	48:16	32:32	0:64
1	44:20	32:32	16:48	0:64
0	32:32	20:44	8:56	0:64
/	0	1	2	3

Vemos que la respuesta al problema originalmente planteado (caso 3º de Pascal) coincide con la respuesta que encuentra Fermat por la vía de contar todos los casos posibles. Pascal en su carta se congratula de ello y escribe “Veo que la verdad es la misma en Toulouse que en Paris “, ya que Fermat vivía en Toulouse y Pascal en Paris.

Si aplicamos el método de Fermat al problema que aparece en el libro de Fra Luca de Paccioli, se tendrá que también en este caso el juego se decide a lo más en cuatro etapas (mismo listado):

AAAA	ABAA	BAAA	BBAA
AAAB	ABAB	BAAB	BBAB
AABA	ABBA	BABA	BBBA
AABB	ABBB	BABB	*BBBB

Pero ahora A gana en 15 casos y pierde en uno ya que A necesita ganar una etapa para ganar el juego mientras que B necesita 4 etapas. La repartición justa debe ser en este caso y siempre bajo la hipótesis de que en cada etapa la probabilidad de ganar es la misma para ambos:

$$10x15/16$$

ducados para A y

$$10x1/16$$

ducados para B.

Es claro que también puede resolverse por el método de Pascal. Ahora escribiremos en la tabla sólo la proporción de la bolsa que le toca a cada uno. Al igual que en la tabla anterior la primero columna representa el número de etapas que A ha ganado y el último renglón las de B.

Ejercicio Propuesto:

La tabla no aparece completa, se solicita que siguiendo los razonamientos anteriores se llene los espacios en blanco.

6	1:0	1:0	1:0	1:0	1:0	1:0	/
5			15:1	7:1	3:1	1:1	0:1
4					1:1	1:3	0:1
3				1:1		1:7	0:1
2			1:1			1:15	0:1
1		1:1					0:1
0	1:1						0:1
/	0	1	2	3	4	5	6

Y vemos que el resultado es

$$10 \times 1/16$$

ducados para B y

$$10 \times 15/16$$

para A.

El método de Pascal puede describirse como un método de inducción reversa. Razona en sentido inverso; empieza por considerar la situación previa al triunfo de alguno de los contrincantes y retrocede paso a paso para examinar cada uno de los casos posibles.

Parte del hecho que gana la bolsa quien logra ganar el juego y a partir de este resultado final se regresa paso a paso para determinar la repartición justa para cada caso.

Con estos elementos, queda claro el porqué no es correcto repartirla de manera proporcional al número de etapas ganadas por cada uno. El acuerdo original "gana el primero que tenga tres puntos" determina al juego y eso obliga a tener en cuenta las distintas maneras de llegar a la meta propuesta.

Actualmente la discusión planteada sigue siendo tema de los cursos elementales de probabilidad, es por ello que tal vez no se valore su trascendencia. Sin embargo, este intercambio de cartas, más allá de resolver el problema de los puntos, establece conceptos fundamentales para el posterior desarrollo de la teoría, tales como: independencia, probabilidad condicional y los métodos de enumeración y conteo para calcular las probabilidades bajo hipótesis de equiprobabilidad de los posibles resultados.

El concepto de independencia tomará aún cierto tiempo en ser asimilado por la comunidad matemática; de hecho cuando Pascal muestra la solución de Fermat a Roberval (profesor de matemáticas en el famoso College de France), Roberval no la acepta. Objeta la inducción de los cuatro juegos. Relativo a este incidente Leibnitz escribió: "…las bellas ideas sobre los juegos de azar en los señores Fermat, Pascal y Huygens que M. de Roberval no pudo o no quiso entender".

Por otra parte, como ya hemos visto en el primer problema, Pascal mismo parece no haber entendido cabalmente el método de Fermat ya que en la misma carta le dice que si bien su método funciona en el caso de dos jugadores, ya no funcionará para tres jugadores. Da un ejemplo y lo resuelve erróneamente. No se conoce la respuesta de Fermat a esa carta. El problema que plantea Pascal es el siguiente:

Tenemos tres jugadores A, B y C igualmente capaces de ganar cada etapa. Para ganar el juego, A necesita un punto, B y C dos puntos. Pascal dice correctamente que se necesitan tres etapas para decidir el juego. Enumera correctamente las 27 posibilidades

*AAA	*BAA	*CAA
*AAB	*BAB	*CAB
*ABA	**BBA	*CBA
*ACA	*BCA	**CCA
*AAC	*BAC	*CAC
*ACC	BCC	CCC
*ABB	BBB	CBB
*ACA	BCB	CCB
*ABC	BBC	CBC

Claramente la proporción para repartir en la bolsa es 17 para A, 5 para B y 5 para C. Pascal, sin embargo dice que las posibilidades de triunfo para A son 19, para B son 5 y otras 5 para C. Al mismo tiempo, reconoce que esta repartición sería injusta. Por ello concluye que el método de Fermat no es válido para tres jugadores.

Otro indicio de la dificultad para entender la independencia es que muchos años más tarde D´Alambert discute el problema de cuál es la probabilidad de obtener dos águilas en dos lanzamientos de moneda (equilibrada). D´Alambert sostiene que es 1/3 ya que para él, los resultados posibles y los equiprobables son obtener 0, 1, o 2 águilas.

Si bien Pascal parece no dominar el concepto de independencia, su método es muy ingenioso y contiene (como se mencionó) el concepto de probabilidad condicional, ya que de hecho está calculando la probabilidad de triunfo condicionada a que cada jugador tenga cierto número de puntos sin haber aún logrado ganar.

Este problema se siguió discutiendo por los sucesores de Fermat y Pascal y se generalizó de varias maneras pero los dos métodos fundamentales siguen las mismas líneas de razonamiento.

El problema en su forma general es:

Un juego con dos contrincantes A y B. Gana el juego el primero que logre tener N puntos y cada etapa del juego da a quien la gana 1 punto y ninguno al perdedor. El juego debe interrumpirse cuando A ha ganado $r < N$ juegos y B ha ganado $s < N$ juegos, es decir, A tiene r puntos y B tiene s. Además, la probabilidad de que A gane cada etapa es $p \in (0,1)$ y en consecuencia la de B es q=1-p. La cantidad que se apuesta es irrelevante (en términos de la solución del problema). Sólo se supone que cada uno aporta la misma cantidad y la suma de ellas conforma la bolsa a ganar, que será repartida proporcionalmente a la probabilidad que cada uno tenga de ganar en el momento de interrumpir el juego.

El método de Pascal descrito con la terminología actual es el siguiente:

Se define $P(r,s)$ como la probabilidad de que A gane el juego si sabemos que A tiene r puntos y B tiene s en el momento de interrumpir el juego: Entonces se cumple, para $s, r < N$,

(a.) $P(r,N) = 0$

(b.) $P(N,s) = 1$

(c.) $P(r,s) = pP(r+1,s) + qP(r,s+1)$

En efecto, las afirmaciones (a.) y (b.) son inmediatas de la definición.

Para demostrar la propiedad (c.) se requiere el concepto de probabilidad condicional y para la demostración se introducen las siguientes variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si A gana la i-ésima etapa,} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

y

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Claramente Y_k es el número de puntos que A tiene hasta la k-ésima etapa y X_1 X_2,… es una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución (Bernoulli de parámetro p). Vemos entonces que, si U denota al evento de que "A gane",

$$P(r,s) = P(U \mid Y_{r+s} = r) = P(U, Y_{r+s} = r) / P(Y_{r+s} = r)$$

$$= P(U, Y_{r+s} = r, X_{r+s+1} = 1 / P(Y_{r+s} = r)$$

$$+ P(U, Y_{r+s} = r, X_{r+s+1} = 0) / P(Y_{r+s} = r)$$

$$= [P(U, Y_{r+s+1} = r + 1) + P(U, Y_{r+s+1} = r)] / P(Y_{r+s} = r)$$

$$= p\frac{P(U, Y_{r+s+1} = r+1)}{P(Y_{r+s+1} = r+1)} + q\frac{P(U, Y_{r+s+1} = r)}{P(Y_{r+s+1} = r)}$$

$$= pP(U \mid Y_{r+s+1} = r + 1) + qP(U \mid Y_{r+s+1} = r)$$

$$= pP(r + 1, s) + qP(r, s + 1)$$

La quinta igualdad es consecuencia de la independencia ya que:

$$pP(Y_{r+s} = r) = P(X_{r+s+1} = 1)\, P(Y_{r+s} = r)$$

$$= P(X_{r+s+1} = 1, Y_{r+s} = r) = P(Y_{r+s+1} = r + 1)$$

es decir:

$$1 / P(Y_{r+s} = r) = q / P(Y_{r+s+1} = r + 1)$$

Analógicamente,

$$qP(Y_{r+s} = r) = P(X_{r+s+1} = 0)\, P(Y_{r+s} = r)$$

$$= P(X_{r+s+1} = 0, Y_{r+s} = r) = P(Y_{r+s+1} = r)$$

o sea,

$$1 / P(Y_{r+s} = r) = q / P(Y_{r+s+1} = r)$$

Es fácil ver que a partir de éstas tres relaciones podemos calcular P (r,s) para toda r,s $\leq$ N: Se empieza con P (N-1,s), s = N – 1. N – 2, … y se obtiene:

$$P(N-1, N-1) = p$$

$$P(N-1, N-2) = p + pq$$

$$P(N-1, N-3) = p + pq + pq^2$$

…

$$P(N - 1, 0) = p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1}$$

Luego se calcula P (N – 2, s), s = N – 1, N – 2, … i, 0 y así sucesivamente.

El método general de Fermat es el siguiente:

Para lograr N triunfos, si el juego se interrumpe cuando A ha ganado r etapas y B ha ganado s etapas (r,s < N), se debe ver cuál es la probabilidad de que A gane n=N-r etapas antes de que B gane m=N-s. El razonamiento de Fermat sería: para lograr n triunfos de A antes que m triunfos de B es necesario y suficiente que se tengan n triunfos de A en las siguientes n+m-1 etapas. Esto es cierto ya que entonces B podrá tener a lo más m-1 puntos de las n+m-1 etapas. Por otro lado si hubiera menos de n puntos para A en ese número de etapas, entonces B necesariamente tendrá m triunfos en el mencionado número de etapas y ya habría ganado el juego. Recordemos que la probabilidad de tener k triunfos en n+m-1 etapas es:

$$\binom{m+n-1}{k} x p^k q^{m+n-1-k}$$

Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$P_{(r,s)} = \sum_{k=n}^{k=m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x p^k q^{m+n-1-k}$$

Lo hecho por Pascal permite dar un algoritmo para que una computadora calcule las probabilidades con la inducción reversa mencionada. Lo hecho por Fermat es, desde el punto de vista conceptual, de una enorme importancia pero no es fácil implementarlo para juegos con un número grande de etapas.

La correspondencia entre ellos fue de muy corta duración debido en gran parte a que Pascal contesta a Fermat que

"…busque en otra parte un corresponsal capaz de seguir sus desarrollos numéricos…"

Lo que significa el fin de su comunicación y es cuando Pascal decide retirarse de la matemática (por primera vez). Sus esfuerzos los canaliza en cuestiones religiosas, y se une al grupo de los Jansenistas. Esto hace que Fermat abandone sus reflexiones sobre los juegos de azar y continúe pensando en otros temas de la matemática. Relativamente al conjunto de su obra, la parte probabilista es muy pequeña aunque sustancial y profunda. Tocará a los sucesores Christianus Huygens, James Bernoulli, Pierre-Rédmond De Montmort, Abraham de Moivre, continuar la obra emprendida por estos dos grandes pensadores.

Sin embargo, y a pesar de los importantes descubrimientos hechos por este grupo y otro más como John y Nicolas Bernoulli, Laplace, Gauss, etc, la teoría de la probabilidad se mantuvo relativamente marginada del centro del desarrollo matemático hasta llegar al siglo XX. A principios del siglo el desarrollo de la teoría de la medida da finalmente el marco conceptual adecuado a la teoría y esta va tomando poco a poco un lugar central en el mundo de la matemática tanto pura como aplicada.

En todo momento de su desarrollo, las ideas de independencia y de probabilidad condicional han sido y son fundamentales. Los métodos probabilistas logran resolver conjeturas y problemas abiertos de análisis matemático, ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números entre otras, y permiten aproximar soluciones de, por ejemplo, ecuaciones diferenciales parciales mediante una afortunada combinación de resultados probabilistas con métodos de análisis numérico.


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,
Apud ... hum, juxta

Portada de la Varia Opera Mathematica, *de Pierre Fermat (1601-1665), quien trabajó con Pascal en la creación de la teoría de la probabilidad.*

El espectacular crecimiento de esta rama en los últimos 100 años y la manera en cómo se ha interrelacionado con muchas otras ramas, tanto de la matemática como de la física y la estadística, seguramente sorprendería a los precursores Pascal y Fermat.

Durante el desarrollo de esta unidad se pretenden abordar y explicar temas y definiciones como fueron: experimentos, eventos, principio fundamental del conteo, análisis combinatorio, teoremas de probabilidad, funciones de distribución para variables tanto discretas como continuas; con las que es posible fomentar que el alumno pueda comprender, adquirir y proponer un modelo lógico que le permita conocer y desarrollar procesos y proyectos para contribuir en los campos del quehacer humano, incidiendo así, en la solución de problemas de la teoría de probabilidad que afectan a la sociedad, donde se utiliza un proceso deductivo, esto es, que se parte de lo general para decir algo de lo particular. Por ejemplo, cuando conocemos un universo de elementos y se desea saber cuál es el comportamiento de un grupo reducido de observaciones tomadas de ese universo, aunque estudios más avanzados utilizan métodos inductivos, donde a partir de la información obtenida de unos pocos elementos de un universo –una muestra–, se trata de encontrar las características de todo el universo.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El presente trabajo es la recopilación del material didáctico que he utilizado en el curso que imparto en la Escuela Nacional Preparatoria para la asignatura de Estadística y Probabilidad, y ha sido probado a lo largo de mi desempeño docente, el cual incluye de diciembre de 2001 a la fecha. Muchas han sido las modificaciones previas antes de esta primera versión final, sin embargo quiero insistir, que sólo la experiencia y el tiempo podrán proporcionar el éxito o fracaso de este programa.

Es importante antes de vertir las conclusiones y recomendaciones de este trabajo, mencionar que el material que propongo tendrá que ser aplicado varias veces y por más docentes, según mi punto de vista, con el fín de comentar y revisar la verdadera problemática a la cual el profesor y el alumno se enfrentan, así como, unificar los criterios sobre la profundidad del mismo.

Durante el tiempo de elaboración del presente trabajo, se tuvieron grandes experiencias, y varias aportaciones, que por parte de los profesores del Colegio de Matemáticas de la ENP plantel 5 “José Vasconcelos” enriquecieron su contenido. Así mismo, se trató de visualizar diferentes criterios docentes sobre un sólo tema con los profesores que imparten la asignatura de Estadística y Probabilidad, y consultar un número considerable de fuentes.

Dicho lo anterior, al término de este trabajo, he llegado a las siguientes conclusiones:

- La labor de un profesor al ejercer el proceso de enseñanza–aprendizaje, ha sido y será dedicar todo su esfuerzo profesional hacia la investigación, la docencia y la difusión de los conocimientos que ha adquirido, al preservar en todo momento los valores nacionales y enaltecer el espíritu universitario.
- Sólo se logrará el objetivo buscado en el presente trabajo si el lector, siendo cualquier persona, con un conocimiento básico de la matemática, pueda

entender y asimilar los conocimientos básicos de la asignatura de Estadística y Probabilidad.

- La asignatura de Estadística y Probabilidad, contribuye a la construcción del perfil general del egresado de la ENP de la siguiente manera:
  - El alumno adquirirá conocimientos en lenguajes, métodos, y técnicas básicas inherentes a la matemática, así como en reglas básicas de investigación.
  - El alumno desarrollará su capacidad de interacción y diálogo por medio del trabajo en equipo, y de las discusiones grupales con sus compañeros y el profesor.
  - El alumno identificará sus intereses profesionales y evaluará alternativas hacia la autodeterminación.

- Actualmente la asignatura de Estadística y Probabilidad en el nivel de Enseñanza Media Superior dentro de la Escuela Nacional Preparatoria, proporciona al alumno las bases teórico-metodológicas necesarias para continuar su formación profesional o como etapa terminal de sus estudios, dotándolo de la capacidad y posibilidad de tomar decisiones frente a sus problemas cotidianos.
- Considero que los criterios que se deben tener en cuenta para que el alumno acredite el curso se base a través de actividades o factores, donde el alumno demuestre su capacidad de análisis, de síntesis, e interpretación lógica de la información adquirida, y mediante la aplicación de dichos conocimientos, realice el planteamiento y resolución de problemas concretos; estas actividades sugiero deberán ser evaluadas individualmente y por equipo durante el transcurso del ciclo escolar en el desarrollo de cada unidad.
- Concluyo que mi propuesta de material didáctico, a través del análisis y la investigación realizada, conduce a que la enseñanza de la estadística y probabilidad conlleve a nuevos paradigmas dentro del proceso enseñanza–aprendizaje.

- El presente trabajo constituye una herramienta más que sirve de material de soporte a los profesores que imparten esta asignatura, o bien, como material de consulta para estudiantes que no hayan cursado la materia, pero que requieran adquirir de manera autodidacta estos conocimientos básicos.
- Este trabajo tendrá que ser adaptado al tiempo que se tiene para ser impartido, sin olvidar que cubrir en su totalidad el temario, no es la meta primordial que se busca, sino que el aprendizaje y el dominio de los temas son el principal objetivo.
- Con respecto a los antecedentes académicos del alumno con respecto a la materia, puedo decir que carece de bases en relación a la teoría de conjuntos, que es de suma importancia para tener éxito en esta asignatura, es importante señalar que dicho tema es parte de la unidad 1 del temario de Matemáticas IV correspondiente al cuarto año de bachillerato, y que la materia de Estadística y Probabilidad pertenece al sexto año de bachillerato, razón por la cual el alumno ha olvidado o dice no haber visto ese tema.
- A pesar de que el temario indica que se deben acabar los modelos de distribución para variables tanto discretas como continuas durante el desarrollo del ciclo escolar, el temario de cálculo (matemáticas VI) incluye conceptos de integración al final del mismo en el caso del área 1 (Físico Matemática), y de manera muy somera en el área 3 (Económico Administrativa), por lo que los alumnos carecen de los conocimientos previos para desarrollar a detalle estos temas.
- Concluyo que la formación integral recibida en la licenciatura de matemáticas aplicadas y computación coadyuvó significativamente para poder visualizar la problemática actual en la materia de Estadística y Probabilidad a nivel bachillerato.
- En mi desempeño laboral me he dado cuenta de la imperiosa necesidad de realizar más cursos para la unificación de criterios, en lo que se refiere a la profundidad y al nivel en el cual deberán de ser tratados los temas.

- El presente trabajo se apega al orden propuesto en el temario aprobado por la ENP, sin embargo considero que la primera unidad correspondiente a estadística descriptiva utiliza conceptos de teoría de conjuntos los cuales son incluidos en la segunda unidad; también propongo que la secuencia lógica sea de introducción a la sumatoria y después medidas de tendencia central, ya que nuevamente en medidas de tendencia central se utilizan preconceptos de sumatoria, y en el programa aprobado están propuestos de manera inversa.
- Este material didáctico se elaboró con base en el enfoque de resolución de problemas, el cual, más que incluir ejercicios de aplicación rutinaria de procedimientos, consiste en plantear situaciones problemáticas que permitan poner en práctica las habilidades para relacionar los nuevos contenidos del curso con casos similares que pudieran darse en el entorno familiar o social, e incluso incursionar en el estudio de otros temas.
- Recomiendo elaborar lo más pronto posible, material didáctico de apoyo, como son, cuadernos de trabajo, guías de estudio, folletos, libros, reactivos, etcétera, que apoyen a los alumnos para lograr el éxito en su posterior desarrollo educativo en niveles superiores, y si estos ya existen, difundirlos.

ANEXO I

$$\text{Variables}\begin{cases}\text{Categóricas (cualitativas)}\begin{cases}\text{Nominales}\\ \text{Ordinales}\end{cases}\\ \\ \text{Numéricas (cuantitativas)}\begin{cases}\text{Discretas}\\ \text{Continuas}\end{cases}\end{cases}$$

Figura I.1 Resumen de variables capítulo I Estadística Descriptiva

Frecuencia Absoluta	$\sum_{i=1}^{n} n_i = N$
Frecuencia Relativa	$f_{i=\frac{n_i}{N}}$
Amplitud del Intervalo	$c_i = L_{i+1} - L_i$
Marca de clase	$x_i = \frac{L_{i+1} + L_i}{2}$

Tabla I.2 Resumen de frecuencias capítulo I Estadística Descriptiva

Propiedad 1	$\sum cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$
Propiedad 2	$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
Propiedad 3	$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \gamma y_i) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \gamma\sum_{i=1}^{n} y_i$
Propiedad 4	$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i$
Propiedad 5	$\sum_{i=1}^{0} x_i = 0$

Tabla I.3 Resumen de propiedades de la sumatoria capítulo I Estadística Descriptiva

Media geométrica	$\sqrt[n]{x_1 * x_2 * \ldots * x_r}$
Distribuciones unitarias	$G = \sqrt[N]{x_1 * x_2 * \ldots * x_r} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{r} x_i}$
Distribuciones no unitarias	$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} * x_2^{n_2} * \ldots * x_r^{n_r}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}}$
Media armónica	$M.A. = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_i}\right)}$
valores repetidos	$M.A. = \dfrac{n}{\dfrac{n_1}{x_1} + \dfrac{n_2}{x_2} + \ldots + \dfrac{n_k}{x_k}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{n_i}{x_i}\right)}$
Media aritmética simple	$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
Media aritmética ponderada	$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{n}$
Media aritmética en distribuciones agrupadas en intervalos	$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i * n_i}{n}$
Relación entre las medias aritmética , geométrica y armónica	$H \leq G \leq \overline{x}$
Mediana	$Me = L_{i-1} + \dfrac{\dfrac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} * c_i$
Moda	$Moda = L + \dfrac{d_1}{d_1 + d_2} w$

Tabla I.4 Resumen de formulas de medidas de tendencia central capítulo I Estadística Descriptiva

Fractiles de datos individuales	$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{4}$ para cuartiles
Fractiles de datos individuales	$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{10}$ para deciles
Fractiles de datos individuales	$fractil_i = 1 + \frac{i(n-1)}{100}$ para percentiles
Cuartiles	$Q_1 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{4}\right)1 - f_{k-1}}{f_k} \right) h$
Deciles	$D_6 = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{10}\right)6 - f_{k-1}}{f_k} \right) h$
Percentiles	$P_{31} = l_i + \left(\frac{\left(\frac{n}{100}\right)31 - f_{k-1}}{f_k} \right) h$

Tabla I.5 Resumen de formulas de fractiles capítulo I Estadística Descrptiva

Desviación Estándar	$S_x = +\sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)n_i}{n-1}}$
Varianza	$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{N}$
Coeficiente de Variación de Pearson	$C.V. = \frac{Sx}{\overline{x}}$
Variable tipificada	$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S_x}$

Tabla I.6 Resumen de formulas medidas de dispersión capítulo I Estadística Descriptiva

Coeficiente de correlación	$r = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 - \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$
Covarianza	$Cov(x, y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
Regresión lineal	$y = a_0 + a_1 x$, donde $a_0 = punto,\ a_1 = pendiente$
$a_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$	$a_1 = \dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

Tabla I.7 Resumen de formulas análisis de datos divariados capítulo I Estadística Descriptiva

Conjuntos

Concepto	*Definición en lenguaje común*	*Definición simbólica*
Igualdad	Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A.	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ y $B \subset A$
Unión	La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A o x pertenece a B.	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ o $x \in B\}$
Intersección	La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos x tales que x pertenece a A y x pertenece a B.	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$
Diferencia	La diferencia $A - B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.	$A - B = \{x \mid x \in A$ y $x \notin B\}$
Complemento	El complemento de un conjunto A es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.	$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = U - A$

Tabla II.1 Resumen de operaciones con conjuntos capítulo II Conjuntos

Notación de intervalos	Notación de conjuntos	Representación gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$	

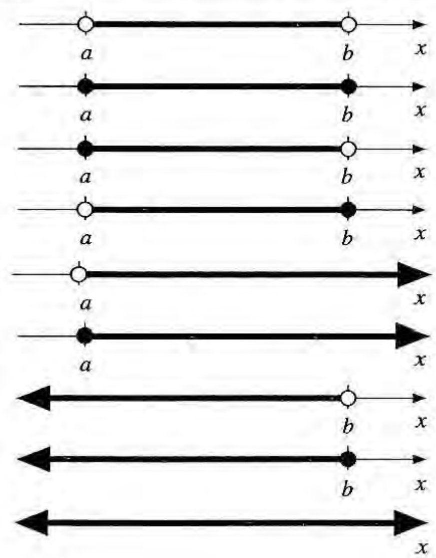


Tabla II.2 Resumen de intervalos capítulo II Conjuntos

Arreglo	circular	repite	ordena	fórmula	Restricción
Permutación	no	no	si	$P\binom{n}{n} = n!$	n = r
Permutación con repetición	no	si	si	$P\binom{n}{a,b,c,...,x} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot ...\cdot x!}$	n=r tomados de a en a, de b en b, de c en c, etc.
Ordenación	no	no	si	$O\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	n > r
Ordenación con repetición	no	si	si	$OR\binom{n}{r} = n^r$	n $\geq$, $\leq$ r
Ordenación cíclica	si	no	si	$OC\binom{n}{n} = (n-1)!$	n = r
Combinación	no	no	no	$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	n $\geq$ r
combinación	no	si	no	$CR\binom{n}{r} = C\binom{n+r-1}{r}$	n $\geq$, $\leq$ r

Tabla III.1 Resumen de formulas análisis combinatorio capítulo III Probabilidad

Teorema 1	P(ϕ) = 0
Teorema 2	$P(A)=1-P(\tilde{A})$
Teorema 3	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
Teorema 4	$P(A\cup B\cup C)=$ $P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$
Teorema 5	Si $A\subset B$, entonces $P(A)\leq P(B)$
Probabilidad condicional	$P(A\cap B)=P\left(B/A\right)P(A)$
Probabilidad condicional	$P(A\cap B)=P\left(A/B\right)P(B)$

Tabla III.2 Resumen de teoremas de probabilidad capítulo III Probabilidad

Distribución Binomial	$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Distribución Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}$

Tabla III.3 Resumen de modelos de distribución de probabilidad capítulo III Probabilidad

ANEXO II

Solución a los ejercicios propuestos

1. Ejercicio página 11

Variable1 nombre - Variable categórica ordinal

Variable2 edad - Variable numérica discreta

Variable3 estatura - Variable numérica continua

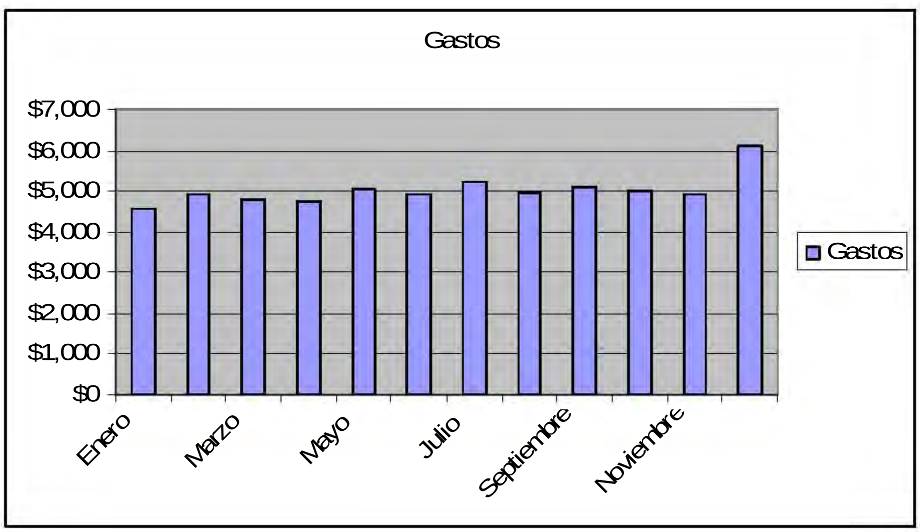
Variable4 peso - Variable numérica continua

Variable5 calzado - Variable numérica discreta

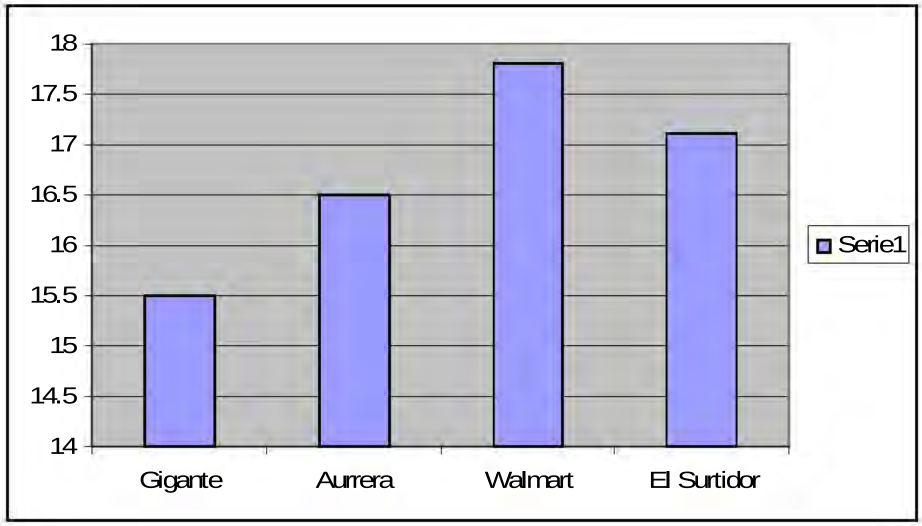
Variable6 familia - Variable numérica discreta

Variable 7 deporte - Variable numérica nominal

2. Ejercicio página 33



3. Ejercicio página 34



4. Ejercicio página 54

Sony 1.553
Toshiba 1.575
$\therefore$ la recomendación sería comprar la computadora Sony, debido al tiempo de procesamiento.

5. Ejercicio página 55

Utilizamos la medida de tendencia central correspondiente a la mediana

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i} * c_i$$

ya que la variable familia debe contar con un dato entero.

6. Ejercicio página 58

Hay diferencia entre lo reportado en la etiqueta con la lectura hecha en clase.

No hay problema entre el vendedor, el consumidor y la PROFECO, ya que la diferencia encontrada es mínima o en algunos casos el producto contenía más líquido del debido.

7. ejercicio página 71

sueldo promedio = $3121.15
mediana = $ 3330.5
moda = $4028
Desviación estándar = 1284.33

8. Ejercicio página 75

Vemos que no se distribuye de manera uniforme como las piezas del dominó
Media = 198kwh con una desviación estándar = 12kwh
De tal modo que usando la regla empírica el punto correspondiente a 219.92kwh no se podría obtener fácilmente.

9. Ejercicio página 85

Intervalo de Clase	Intervalo Clase Real	Marca De clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa Acumulada

10. ejercicio página 87

prácticas promedio = 2.04
profundidad de la mediana = 13
moda = 0

11. Ejercicio página 92

El tubo B presenta una mayor dispersión, ya que la desviación estándar es un estimador de la dispersión de datos.

12. Ejercicio página 92

Con los datos que se tienen no es posible hacer una estimación para una edad distinta.

13. Ejercicio página 102

A={a,e,i,o,u}
B={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
C={primavera, verano, otoño, invierno}
D={soltero, casado, divorciado}
E={m,a,t,e,i,c,s}
F={tacto, gusto, oído, olfato, vista}
G={12, 3,6,9}
H={do, re, mi, fa, sol, la, si}
O={x/x es una pieza de ajedrez}
P={x/x es una operación aritmética}
Q={x/x es un estado de la materia}

14. Ejercicio página 105

$P \subset D$, $I \subset D$, $P \notin I$

15. Ejercicio página 108

a) conjunto vacío
b) cero
c) conjunto vacío

16. Ejercicio página 175

a) 101,270 formas
b) 3,060 formas
c) 23,751 formas

BIBLIOGRAFÍA

- Mendenhall, William. *“Introducción a la probabilidad y estadística”* México: Thomson, 2003, Págs 615.
- Lipschutz, Seymour. *“Teoría y problemas de Teoría de conjuntos y temas afines”,* McGraw-Hill, 1964, Págs 231.
- Jonson, Robert. *“Estadística elemental”* México: Thomson, 1998 Págs 482.
- Alonso Reyes, Ma. Del Pilar. *“Estadística descriptiva para bachillerato”* México: Temas de Matemáticas para Bachillerato. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Págs 115.
- Alonso Tapia, J. *“Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar”.* Madrid: Santillana, Aula XXI, 1991.
- Cabero Almenara, Julio. *“Nuevas Tecnologías, comunicación y educación”*. EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa. REVISTA ELECTRÓNICA 1.htm.
- Castells, Manuel, 1986, *“El Desafió Tecnológico: España y las Nuevas Tecnologías”* Madrid: Alianza, Págs. 407
- Cruz Fellu , Jaime.1996, *“Teoría del aprendizaje y tecnología de la enseñanza”.* Trillas México, (reimp.1999) Págs . 225.
- Eisner, Elliot W. 1987, *“Procesos Cognitivos y Curriculum: Una base para decidir lo que hay que enseñar”*. Barcelona: Martínez Roca, Págs. 166
- Castaño, C. *“Psicología y orientación vocacional”*. Madrid: Marova 1983.
- AENOR: “*Documentación. Referencias bibliográficas. contenido, formas y estructura”*. UNE 50 104 94. Madrid: AENOR, 1994.
- Declaraciones de Budapest (1999): *“Marco general de acción de la declaración de Budapest”.*
  Disponible en World Wide Web:
  http://www.oei.org.co/cts/budapest.dec.htm/