



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

*“SEGMENTACIÓN ADAPTABLE POR
CRITERIO MÁXIMO A POSTERIORI”*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
“INGENIERO EN TELECOMUNICACIONES”

PRESENTA
EVARISTO VIDAL GARCÍA

ASESOR DE TESIS
MIGUEL MOCTEZUMA FLORES



CIUDAD UNIVERSITARIA

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, la gran señora Élfega García Garrido (†), donde quiera que esté por haberme enseñado tantas cosas de la vida, por haberme formado, por ser la responsable de todas las cosas buenas que tengo, por haber creído en mi, por haberme apoyado en todos los proyectos que tuve cuando ella estuvo conmigo, por haberse levantado todos los días temprano para darme mi desayuno para que tuviera las energías suficientes en la escuela, por haberme querido tanto, por haber sido tan cariñosa, por haberme escuchado, por haber estado en esos momentos tan difíciles en los cuales solo necesitaba ser querido, por haberme enseñado a ser una persona fuerte y segura, por haberme enseñado a luchar por lo que quiero, por haberme enseñado a ser un hombre cariñoso y sincero, por haberme enseñado a ser un buen amigo y podría seguir con un sin fin de cosas que me dejó ella, mi mamá, a la cual le dedico todo este trabajo que ya no pudo ver terminar, pero que creo que donde quiera que se encuentre puede darse cuenta de todo lo que me dejó.

Agradezco a mis hermanos Isabel y Eduardo, por ser tan comprensivos, por apoyarme tanto, por creer en mi, porque sin la ayuda de alguno de los dos no estaría escribiendo todo esto. Gracias Isabel por apoyarme en el momento en el que mamá partió, todo se me ha hecho mucho menos difícil estando en tu casa, estando en tu familia. Gracias Lalo por ayudarme en mi carrera, nunca lo voy a olvidar, gracias por darme tus consejos para cuidarme. Espero de todo corazón que ambos estén muy orgullosos de lo que estamos logrando, y digo estamos porque ustedes han estado conmigo a lo largo del camino. Muchas gracias a los dos, los quiero con todo mi corazón.

Agradezco a mis amigos José Arturo Martínez, Alma Gloria Hernández, Rubén Correa y José Alfredo García por tener siempre algo que decirme cuando necesito un consejo. A Ricardo López, Anabel Sánchez, Raúl Chora, Juan Carlos Arroyo y Francisco Casillas por todos los momentos divertidos que pasamos.

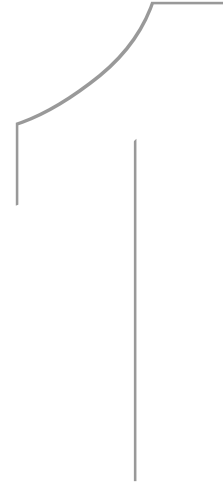
Agradezco a todos mis profesores por toda su enseñanza, por su paciencia, por su ayuda, por sus palabras.

Agradezco a Renata Cardoso por apoyarme en estos momentos, por estar conmigo, por ser la persona que es, por amarme de la forma en la que lo hace, por darme la estabilidad que necesito y por muchas cosas más. Estarás siempre en mi corazón.

Índice

1. Introducción.....	5
1.1 Objetivo.....	5
1.2 Definición de Segmentación.....	6
1.2.1 Métodos Enfocados a Píxel.....	7
1.2.2 Métodos Enfocados a Región.....	7
1.3 Aplicaciones de la Segmentación de Imágenes.....	8
1.4 Dificultades que se Presentan a la Hora de Segmentar.....	8
2. Procesos Estocásticos.....	10
2.1 Introducción.....	10
2.2 Definiciones.....	11
2.3 Axiomas de Probabilidad.....	12
2.4 Probabilidad Condicional.....	13
2.5 Teorema de Bayes.....	15
2.6 Variables Aleatorias Discretas.....	16
2.7 Variables Aleatorias Continuas.....	19
2.8 Distribución Gaussiana.....	20
2.9 Teorema del Límite Central.....	21
2.10 Procesos Estocásticos.....	24
2.10.1 Propiedad de Estacionalidad.....	24
3. Campos Aleatorios de Markov.....	25
3.1 Introducción.....	25
3.2 Definición de Campos Aleatorios de Markov.....	26
3.3 Topologías.....	26
3.3.1 Sistemas de Vecinos.....	27
3.3.2 Cliques.....	28
3.4 Modelos de Markov.....	29
3.4.1 Auto-Modelos.....	29
3.4.2 Modelo Logístico Multi-Nivel.....	31

4. Optimización.....	34
4.1 Introducción.....	34
4.2 Recocido Simulado.....	35
4.3 El Algoritmo del Recocido Simulado.....	37
5. Esquema de Procesamiento.....	40
5.1 Introducción.....	40
5.2 Segmentación por Bayes.....	41
5.3 Segmentación por Mahalanobis.....	46
5.4 Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).....	49
5.5 Segmentación por MRF Combinado con Bayes.....	53
6. Resultados.....	56
6.1 Introducción.....	56
6.2 Imagen 1: Aeropuerto.....	57
6.2.1 Segmentación por Bayes.....	58
6.2.2 Segmentación por Mahalanobis.....	62
6.2.3 Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).....	63
6.2.4 Segmentación Combinada de Bayes y MRF.....	65
6.3 Imagen 2: Estadio Universitario.....	70
6.3.1 Segmentación por Bayes.....	71
6.3.2 Segmentación por Mahalanobis.....	72
6.3.3 Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).....	73
6.3.4 Segmentación Combinada de Bayes y MRF.....	73
6.4 Imagen 3: Región Este del Mar de Groenlandia.....	77
6.5 Imagen 4: Tabla de Ajedrez.....	78
6.6 Imagen 5: Figuras Geométricas.....	79
7. Conclusiones.....	81
Bibliografía.....	82



Introducción

1.1 Objetivo

Los métodos de segmentación de imágenes pueden clasificarse de una forma general en dos grupos: enfocados a píxel y enfocados a región. Ambas metodologías de segmentación son eficientes para distintos casos de imágenes con base en su homogeneidad. Esto es, para una imagen donde predominan pequeñas regiones homogéneas es suficiente aplicar un método de segmentación enfocado a píxel, ya que éste segmenta en función del nivel de gris de cada píxel y por lo tanto conservará dichas regiones; por otra parte, si el caso es una imagen donde las regiones son predominantemente heterogéneas, es mejor utilizar un método enfocado a región,

ya que este tipo de método segmenta en función de los niveles de gris de los píxeles de una pequeña región y en consecuencia se perderán algunos detalles de la imagen para así dar como resultado la segmentación.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un método de segmentación que utilice los beneficios de ambas metodologías, es decir, al considerar que las imágenes en general no presentan un grado de homogeneidad uniforme, es posible hacer una combinación de métodos en función de dicho grado. Para poder segmentar una imagen con este método propuesto es necesario desarrollar un algoritmo que pueda discriminar entre uno y otro método en función de un umbral. La propuesta es emplear un parámetro estadístico de segundo orden que indique la homogeneidad local; esto es, partiendo de una imagen original en niveles de grises se analizará píxel por píxel así como sus 24 vecinos y posteriormente se calculará el valor de la varianza σ^2 de ese conjunto de píxeles. De esa manera se podrá obtener una matriz de valores de varianzas del tamaño de la imagen y con ésta al imprimir sus valores en los niveles de grises del 1 al 256 una imagen de homogeneidad o varianzas.

Así pues, la selección del método de segmentación se realizará mediante una etapa de binarización óptima aplicada a la imagen de homogeneidad, el cual consiste básicamente en encontrar un umbral de varianza y en función de éste se pueda seleccionar el método de segmentación.

Los métodos de segmentación que serán analizados y utilizados para la combinación son el de máximo a posteriori o de Bayes, el cuál es un método enfocado a píxel, y el de campos aleatorios de Markov, el cual es un método contextual enfocado a región.

Se analizará también el método de Mahalanobis, el cual es enfocado a píxel, con la finalidad de tener una referencia para comparar los resultados obtenidos.

Al final del trabajo se hará una comparación de varias imágenes segmentadas por cada uno de los métodos mencionados. Los resultados obtenidos demostrarán la funcionalidad del método propuesto.

1.2. Definición de segmentación

La segmentación de imágenes tiene su origen en numerosos estudios psicológicos que indican la preferencia de los humanos por agrupar regiones visuales en términos de proximidad, similitud y continuidad para construir un conjunto de unidades *significativas*. Existe cierta confusión en torno al concepto de segmentación ya que si bien algunos autores consideran suficiente marcar los puntos de la imagen (píxeles) con un valor indicativo de su pertenencia a determinada región

o clase, otros indican que además es necesario proveer un mecanismo que permita una representación simbólica de las relaciones topológicas existentes entre las distintas unidades.

En este trabajo de tesis se abordarán dos tipos de métodos de segmentación, los cuales se clasifican de la siguiente manera:

- Métodos orientados a píxel
- Métodos orientados a región

Cada uno de esos métodos tiene sus ventajas y desventajas para diversas circunstancias. Estos se pueden definir de la siguiente manera:

1.2.1 Métodos Orientados a Píxel

Estos métodos asocian cada píxel de la imagen a una determinada clase según su nivel de gris. Para ello, es necesario determinar los rangos de intensidad que mejor representan a cada clase. Esta asignación de rangos puede ser fijada a-priori o ser realizada en línea empleando técnicas típicamente basadas en el análisis de histogramas. Una vez determinados los rangos, se realiza la asignación mediante la aplicación de un umbral (posiblemente multi-nivel).

Si bien la implantación computacional de estos métodos suele llevar a soluciones relativamente rápidas y sencillas, adolecen el problema fundamental de ignorar las nociones de proximidad y conectividad, suponiendo que los objetos se distinguen únicamente por su valor de intensidad. Por ello, suelen limitar su área aplicación a situaciones muy controladas donde se sabe con certeza que dichas condiciones se cumplen, como por ejemplo al pretender discernir la silueta de un objeto ante una iluminación trasera sobre un fondo claro semitransparente. Métodos analizados en este trabajo de este tipo son el de Bayes y el de Mahalanobis.

1.2.2 Métodos Orientados a Región

Estos métodos explotan la noción de conectividad para agrupar zonas de la imagen con puntos de intensidad similar en entidades discernidas. Con objeto de eliminar los efectos del ruido, se han desarrollado métodos iterativos orientados a fundir entidades pequeñas en otras más grandes de valor medio de intensidad similar. Entre dichos métodos cabe destacar el algoritmo de la teoría de Campos Aleatorios de Markov (Markov Random Fields) el cuál es analizado más adelante.

El mayor inconveniente de este tipo de métodos consiste en que son iterativos o recursivos, dificultando su implantación en sistemas que requieren un tiempo de respuesta rápido. También existe una pequeña dificultad a la hora de establecer el criterio por el cual una región pequeña es absorbida por otra grande, exigiendo un compromiso entre la eliminación de ruido y la pérdida de

detalle. Otra dificultad es la de determinar con precisión la frontera entre regiones cuando las variaciones de intensidad son graduales, produciendo a veces un efecto de ambigüedad.

1.3 Aplicaciones de la segmentación de imágenes

La segmentación es un paso imprescindible en diversos procesos de tratamiento de imagen.

Existen diversas aplicaciones de la segmentación de imágenes; brevemente podemos hablar de las siguientes:

- Es necesaria para poder tomar medidas sobre una región.
- Determinación de superficies y volúmenes.
- Reconstrucción tridimensional de una zona de la imagen.
- Clasificación o diagnóstico automático (detección de defectos en materiales, tejidos anómalos, células, etc.)
- Reducción de información en transmisión y almacenamiento.
- Si de una serie de imágenes para un determinado estudio sólo interesa una región concreta se puede segmentar y almacenar sólo las regiones para el análisis posterior.

1.4 Dificultades que se presentan a la hora de segmentar

En el proceso de la segmentación pueden presentarse una serie de situaciones que pueden dificultar dicho proceso; pueden mencionarse entre otros los siguientes:

- Volumen parcial: Al ser las imágenes representaciones 2D de objetos 3D se pueden encontrar en la imagen información que no es propiamente de ese plano y que limita la definición de las regiones.
- Artefactos: Por problemas en la adquisición se puede encontrar ruido en la imagen, que distorsiona las características de las distintas regiones.
- Inhomogeneidad: Los objetos no poseen siempre una iluminación uniforme, sino que muchas veces es sólo una textura característica lo que los diferencia de otros.
- Forma: Podríamos clasificar las formas de los objetos grosso modo en objetos patata, con una forma más o menos regular y convexa, objetos con forma de coliflor, con bordes no definidos y ciertas ramificaciones, y objetos spaghetti, objetos finos y muy ramificados. Estos últimos pueden ser difíciles de segmentar ya que pueden estar entrelazados con otros objetos.

- Ruido: La imagen puede ser de baja calidad debido a la presencia de ruido o a una mala adquisición de la misma.
- Conocimiento previo: Muchas veces se emplea en la segmentación visual el conocimiento previo que se tiene sobre una determinada región. Este conocimiento previo no es sencillo de obtener ni de ponerlo en estructuras aplicables



Procesos Estocásticos

2.1. Introducción.

Si consideramos hacer un experimento en el cual se tienen que tomar mediciones por varios días de un mismo parámetro, los resultados obtenidos pueden tener ligeras variaciones aún cuando las condiciones aparentemente sean las mismas. En algunos casos esa situación no es un gran problema, como por ejemplo la ley de Ohm, la cual no es una descripción exacta del comportamiento de la electricidad en los conductores, pero es un modelo bastante aproximado que sirve para analizar el desempeño de muchos de ellos. La situación cambia cuando

analizamos otro tipo de experimento donde las variaciones del medio si afectan de manera considerable los resultados.

Analicemos por ejemplo una central telefónica, la cual puede tener 1000 abonados. Una de las premisas del servicio telefónico residencial es la disponibilidad, esto es, que siempre que se requiera hacer una llamada no se tenga el problema de no tener el servicio por falta de recursos. Pareciera que la solución sería asignar un canal de voz permanente para cada abonado y de esa forma éste pudiera hacer uso de él en cualquier momento, pero si analizamos esta opción nos daremos cuenta de que sería una inversión bastante alta para instalar toda esa infraestructura; por el lado técnico, el canal asignado no sería utilizado todo el tiempo y eso sería un desperdicio de recursos que finalmente el usuario sería el que tendría que pagar. Si lo vemos numéricamente sería de la siguiente manera: en un cable coaxial se pueden meter 30 canales de voz utilizables, y considerando que son 1000 los abonados, entonces necesitaríamos 33 cables coaxiales para poder asignar un canal permanente a cada abonado; si ahora hiciéramos un análisis de la frecuencia de utilización del servicio por parte de los abonados y el tiempo de duración de las llamadas, llegaríamos a la conclusión de que en la mayoría de los casos el promedio del tiempo de utilización es mínimo en comparación con la duración del día; si consideramos también que no todos los usuarios utilizan su línea al mismo tiempo, entonces podríamos hacer un promedio de hasta cuántas líneas se utilizan a la vez y en función de eso instalar la infraestructura suficiente para poder dar el servicio a ese número máximo de líneas utilizadas.

Para realizar un análisis de este tipo es necesario utilizar herramientas matemáticas que nos permitan manejar variables aleatorias, ya que como es evidente la variabilidad de utilización de una línea telefónica no es una acción que pueda controlarse, ya que no se le puede condicionar a un cliente a usar su línea en determinados momentos o que sus llamadas duren una cierta cantidad de tiempo. La probabilidad nos permite usar este tipo de variables y utilizando sus métodos podemos llegar a un resultado bastante confiable al problema de las líneas telefónicas.

2.2. Definiciones.

Es conveniente antes de iniciar con el tema de probabilidad definir algunos términos que se utilizarán a lo largo de todo el capítulo:

Definición 2.2.1 Experimento aleatorio: Es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Definición 2.2.2 Espacio muestral S : Es el conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Un espacio muestral discreto está formado por un conjunto finito de resultados.

Definición 2.2.3 Evento: Es un subconjunto E del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Definición 2.2.4 Operaciones básicas de conjuntos:

- La unión de dos eventos es el evento que está formado por todos los resultados contenidos en cualquiera de los eventos. La unión se denota por $E_1 \cup E_2$.
- La intersección de dos eventos es el evento que está formado por los resultados contenidos en ambos eventos. La intersección se denota por $E_1 \cap E_2$.
- El complemento de un evento en un espacio muestral es el conjunto de resultados en el espacio muestral que no están en el evento. Este componente del evento E se denota por E' .

Definición 2.2.5 Eventos mutuamente excluyentes: Son dos eventos tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

2.3. Axiomas de probabilidad.

La probabilidad es un número que se asigna a cada miembro de una colección de eventos de un experimento aleatorio y que satisface las siguientes propiedades.

Si S es el espacio muestral y E es cualquier evento del experimento aleatorio,

1. $P(S) = 1$, esto es, la probabilidad numérica de todo el espacio muestral S es 1, ya que este es la suma de todos los posible resultados de un experimento aleatorio.
2. $0 \leq P(E) \leq 1$, esto es, la probabilidad numérica de un evento E tiene que ser mayor igual que cero o menor igual que 1, ya que dicho evento es un subconjunto de todo un espacio muestral S y por lo tanto es un posible resultado del experimento. Puede tener una probabilidad de 1 cuando este evento E es igual al espacio muestral S .
3. **Para dos eventos E_1 y E_2 con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$,** esto es, si dos eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes (no tienen elementos en común), la probabilidad de la unión de ambos eventos la podemos obtener sumando la probabilidad de cada evento por separado.

De los axiomas anteriores se puede deducir lo siguiente:

➤ $P(\emptyset) = 0$ (2.3.1)

➤ $P(E) = 1 - P(E')$ (2.3.2)

Si consideramos tener dos y tres eventos A , B y C , se definen las siguientes operaciones:

$$\triangleright P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots\dots (2.3.2)$$

$$\triangleright P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \dots (2.3.3)$$

Si A , B y C fueran eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$\triangleright P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad \dots\dots (2.3.4)$$

Ejemplo 2.3.1

En una operación de maquinado, sea x la longitud de una parte, y supóngase que para

El 10% de las partes, $x \leq 7.55$ milímetros

El 15% de las partes, $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros

El 25% de las partes, $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros

Si se escoge una parte de esta operación, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud sea menor o igual que 7.59 milímetros?

Sean E_1 : el evento donde $x \leq 7.55$ milímetros, E_2 : el evento donde $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros, y E_3 : $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros. Entonces, dado que estos eventos son mutuamente excluyentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.50$$

2.4. Probabilidad Condicional.

La probabilidad condicional se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2.4.1 Probabilidad Condicional: Es la probabilidad de un evento A dado un evento B , denotado por $P(A|B)$, es

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) \quad \dots\dots (2.4.1)$$

Esta definición puede comprenderse al considerar el caso especial en que todos los resultados de un experimento aleatorio son igualmente probables. Si existe un total de n resultados, entonces

$$P(B) = (\text{número de resultados en } B) / n \quad \dots\dots (2.4.2)$$

Por otra parte

$$P(A \cap B) = (\text{número de resultados en } A \cap B) / n \quad \dots \quad (2.4.3)$$

En consecuencia

$$P(A \cap B) / P(B) = (\text{número de resultados en } A \cap B) / (\text{número de resultados en } B) \quad \dots \quad (2.4.4)$$

Por consiguiente, $P(A|B)$ puede interpretarse como la frecuencia relativa del evento A con respecto al número de ensayos que producen los resultados en el evento B .

Ejemplo 2.4.1

Los resultados obtenidos de 266 muestras de aire se clasifican de acuerdo con la presencia de dos moléculas raras. Sean A : el evento formado por todas las muestras en las que se encuentra presente la molécula rara 1, y B : el evento formado por todas las muestras de aire donde está presente la molécula 2. Al utilizar los resultados que aparecen en la tabla 2.4.1, se tiene que

		Molécula 1 presente	
		No	Sí
Molécula 2 presente	No	212	24
	Sí	18	12

Tabla 2.4.1

$$\begin{aligned} &P(\text{molécula 2 presente} \mid \text{molécula 1 presente}) \\ &= P(B|A) \\ &= P(A \cap B) / P(A) \\ &= (12/266) / (36/266) \end{aligned}$$

Nótese que, en este ejemplo, las cuatros siguientes probabilidades son diferentes:

$$\begin{aligned} P(A) &= 36/266, & P(A|B) &= 12/30 \\ P(B) &= 30/266, & P(B|A) &= 12/36 \end{aligned}$$

En este caso, $P(A)$ y $P(A|B)$ son las probabilidades del mismo evento, pero calculadas bajo dos diferentes estados de conocimiento. De manera similar, $P(B)$ y $P(B|A)$ son las probabilidades del mismo evento, pero calculadas bajo dos estados diferentes de conocimiento.

El diagrama de árbol siguiente presenta resultados similares.

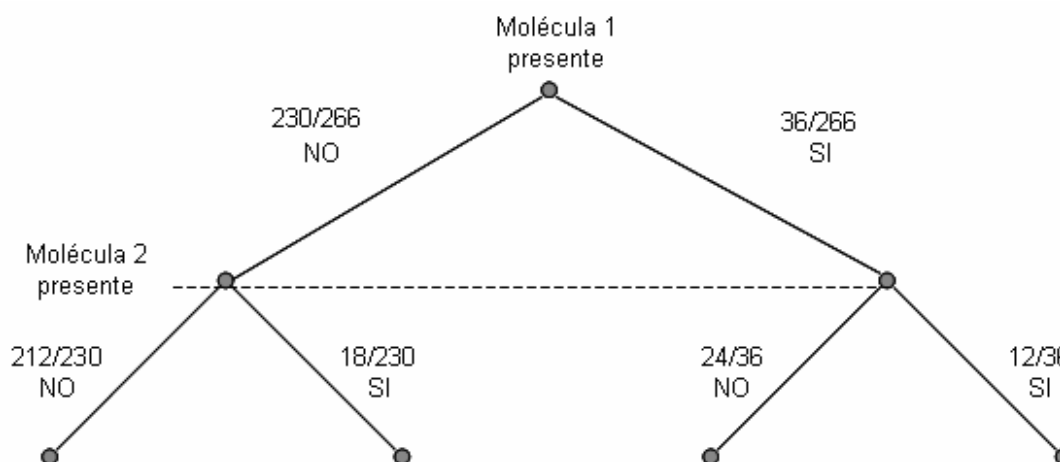


Figura 2.4.1

Definición 2.4.2 Eventos independientes: Se dice que dos eventos son independientes si, y solo si, cualquiera de las siguientes proposiciones es verdadera.

- $P(A|B) = P(A)$ (2.4.5)
- $P(B|A) = P(B)$ (2.4.6)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (2.4.7)

2.5. Teorema de Bayes.

Definición 2.5.1 Teorema de Bayes: Si E_1, E_2, \dots, E_k son k eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes, y B es cualquier evento, entonces

$$P(E_1 | B) = \frac{P(B | E_1)P(E_1)}{P(B | E_1) + P(B | E_2) + \dots + P(B | E_k)P(E_k)} \quad \text{.....} \quad (2.5.1)$$

Ejemplo 2.5.1

Debido a que un nuevo procedimiento médico ha demostrado su eficacia en la detección temprana de cierta enfermedad, se propone realizar un examen médico preventivo a la población. La probabilidad de que la prueba sea positiva e identifique de manera correcta a una persona que tiene la enfermedad, es 0.99, mientras que la probabilidad de que la prueba sea negativa e identifique correctamente a un paciente que no tiene la enfermedad, es 0.95. La incidencia de la enfermedad en la población es 0.0001. Alguien toma la prueba y ésta resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona tenga la enfermedad?

Sean D : el evento en que la persona tiene la enfermedad, y S : el evento en que la prueba es positiva. La probabilidad pedida es entonces $P(D|S)$. La probabilidad de que la prueba sea negativa y detecte de manera positiva a una persona que no tiene la enfermedad, es 0.05. En consecuencia, la probabilidad de que la prueba sea positiva sin que la persona esté enferma es

$$P(S|D') = 0.05$$

Del teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D|S) &= P(S|D)P(D) / [P(S|D)P(D) + P(S|D')P(D')] \\ &= 0.99(0.0001) / [0.99(0.0001) + 0.05(1-0.0001)] \\ &= 1/506 = 0.002 \end{aligned}$$

De manera sorprendente, a pesar de que la prueba es eficaz, en el sentido de que $P(S|D)$ es grande y $P(S|D')$ es baja, dada la baja incidencia de la enfermedad en la población, las posibilidades de que la persona tenga la enfermedad son muy pequeñas, incluso si la prueba es positiva.

2.6. Variables Aleatorias Discretas.

Con frecuencia el interés recae con un número el resultado de un experimento aleatorio. En muchos experimentos aleatorios, el espacio muestral sólo es una descripción de los posibles resultados. En algunos casos las descripciones de los resultados son suficientes, pero en otros es útil asociar un número con cada resultado del espacio muestral. Ya que el resultado de un experimento no se conoce con anticipación, sucede lo mismo con el valor de la variable. Por esta razón, la variable que asocia un número con el resultado de un experimento aleatorio se conoce como variable aleatoria.

Definición 2.6.1 Variable Aleatoria: Es una función que asigna un número real a cada resultado en el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Las variables aleatorias se denotan con una letra mayúscula, tal como X , y con una minúscula, como x , el valor posible de X . El conjunto de los posibles valores de la variable aleatoria X recibe el nombre de rango de X .

Ejemplo 2.6.1

Se evalúa un nuevo proceso para la fabricación de partes moldeadas en plástico en términos de la coloración y reducción del tamaño. Una de las primeras corridas del proceso proporciona la información para el espacio muestral y las probabilidades que aparecen en la tabla 2.6.1.

Supóngase que el interés recae en resumir los resultados de este experimento aleatorio con el número de características (de coloración y reducción del tamaño) que son aprobadas. Por lo cual, se define una variable aleatoria, X , para ser igual al número de características aprobadas. La cuarta columna de la tabla contiene los valores de X asignados a cada resultado del experimento. Por ejemplo, al resultado (aprobado, aprobado) se le asigna $x = 2$.

Coloración	Reducción del tamaño	Probabilidad	X
Aprobado	Aprobado	0.64	2
Aprobado	Inaceptable	0.16	1
Inaceptable	Aprobado	0.16	1
Inaceptable	Inaceptable	0.04	0

Tabla 2.6.1

Definición 2.6.2 Variable Aleatoria Discreta: Es una variable aleatoria con un rango finito (o infinito contable).

Definición 2.6.3: El evento que está formado por todos los resultados para los que $X = x$ se denota como $\{X = x\}$, y la probabilidad de este evento como $P(X = x)$.

Definición 2.6.4 Función de Probabilidad: Es la función $f_x(x) = P(X = x)$ que va del conjunto de los valores posibles de la variable aleatoria discreta X al intervalo $[0, 1]$.

Para una variable aleatoria X , $f_x(x)$ satisface las propiedades siguientes:

1. $f_x(x) = P(X = x) \quad \dots \quad (2.6.1)$

2. $f_x(x) \geq 0$ para toda $x \quad \dots \quad (2.6.2)$

3. $\sum_x f_x(x) = 1 \quad \dots \quad (2.6.3)$

Definición 2.6.5 Función de Distribución Acumulada: La función de distribución acumulada de una variable discreta X , denotada por $F_x(x)$, es

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad \dots \quad (2.6.4)$$

para una variable aleatoria discreta X , $F_x(x)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_x(x_i) \quad \dots \quad (2.6.5)$

2. $0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad \dots \quad (2.6.6)$

3. Si $x \leq y$, entonces $F_x(x) \leq F_x(y) \quad \dots \quad (2.6.7)$

Definición 2.6.6 Valor Esperado: La media o valor esperado de una variable aleatoria discreta X , denotada por μ_x o $E(X)$, es

$$\mu_x = E(X) = \sum_x x f_x(x) \quad \dots \quad (2.6.8)$$

Definición 2.6.7 Varianza de una variable aleatoria X : Suponiendo que la media de X es μ_x y que la función de probabilidad de X es $f_x(x)$. La varianza, denotada por σ_x^2 o $V(X)$, es:

$$\sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 f_x(x) \quad \dots \quad (2.6.9)$$

Definición 2.6.8 Desviación estándar de una variable aleatoria X : Denotada por σ_x , es la raíz cuadrada positiva de σ_x^2 .

2.7. Variables Aleatorias Continuas.

Definición 2.7.1 Variable aleatoria continua: X es un variable aleatoria continua si su rango contiene un intervalo (ya sea finito o infinito) de números reales.

Definición 2.7.2 Función de densidad de probabilidad: Una función $f_x(x)$ es una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X si para cualquier intervalo de número reales $[x_1, x_2]$

$$1. \quad f_x(x) \geq 0 \quad \dots \quad (2.7.1)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad \dots \quad (2.7.2)$$

$$3. \quad P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(u) du \quad \dots \quad (2.7.3)$$

Definición 2.7.3 Función de distribución acumulada: La función de distribución de una variable aleatoria continua X es

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du \quad \dots \quad (2.7.4)$$

para $-\infty < x < \infty$

Definición 2.7.4 Valor esperado: Supóngase que X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_x(x)$, $-\infty < x < \infty$. La media de X , denotada por $E(X)$ o μ_x , es

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad \dots \quad (2.7.5)$$

Definición 2.7.5 Varianza: La varianza de X , denotada por $V(X)$ o σ_x^2 , es

$$V(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \quad \dots \quad (2.7.6)$$

Definición 2.7.6 Desviación estándar: La desviación estándar de X es

$$\sigma_x = [V(X)]^{\frac{1}{2}} \quad \dots \quad (2.7.7)$$

2.8. Distribución Gaussiana.

Sin lugar a dudas, la distribución más utilizada para modelar experimentos aleatorios es la distribución normal o también llamada Gaussiana. Esta distribución puede obtenerse al considerar el modelo básico de una variable aleatoria binomial cuando el número de ensayos se vuelve cada vez más grande. La importancia de la distribución normal se extiende más allá de proporcionar aproximaciones a las probabilidades binomiales.

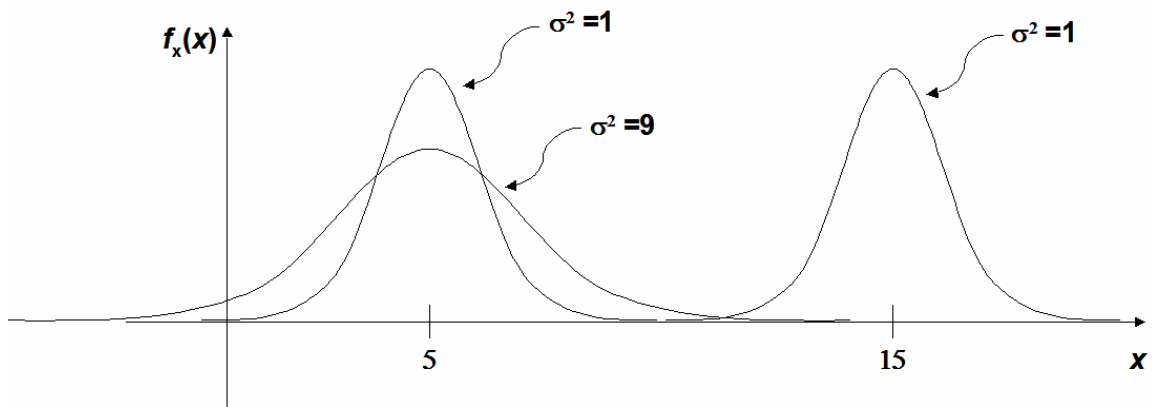
Definición 2.8.1: Una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f_x(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad \dots \quad (2.8.1)$$

tiene una distribución normal con parámetros μ , donde $-\infty < x < \infty$, y $\sigma > 0$. Asimismo,

$$E(X) = \mu \quad \dots \quad (2.8.1.2) \quad \text{y} \quad V(X) = \sigma^2 \quad \dots \quad (2.8.2)$$

La siguiente gráfica muestra algunas funciones de densidad de probabilidad normal para distintos valores de los parámetros μ y σ^2 .



Gráfica 2.8.1

2.9. Teorema del Límite Central.

Considérese la determinación de la distribución de muestreo de la media muestral \bar{X} . Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con media μ y varianza σ^2 . Cada observación en esta muestra (Por ejemplo X_1, X_2, \dots, X_n) es una variable aleatoria distribuida normal e independientemente, con media μ y varianza σ^2 . Entonces, por la propiedad reproductiva de la distribución normal, se concluye que la media muestral

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad \dots \quad (2.9.1)$$

tiene una distribución normal con media

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \mu \quad \dots \quad (2.9.2)$$

y varianza

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \dots \quad (2.9.3)$$

Si se muestrea una población que tiene una distribución de probabilidad desconocida, la distribución de muestreo de la media muestral seguirá siendo aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n , si el tamaño de la muestra n es grande.

Teorema del Límite Central: Si X_1, X_2, \dots, X_n es una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población (finita o infinita) con media μ y varianza finita σ^2 , y si \bar{X} es la media muestral, entonces la forma límite de la distribución de

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \dots \quad (2.9.4)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, es la distribución normal estándar.

Ejemplo 2.9.1

En una compañía de electrónica fabrica resistores que tienen una resistencia promedio de 100 Ω y una desviación estándar de 10 Ω . La distribución de la resistencia es normal. Encuéntrese la probabilidad de que al tomar una muestra de $n=25$ resistores, la resistencia promedio de éstos será menor que 95 Ω .

Nótese que la distribución de muestreo de \bar{X} es normal, con media $\mu_{\bar{X}} = 100 \Omega$ y desviación estándar de

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

Por consiguiente, la probabilidad deseada corresponde al área sombreada de la figura 2.9.1. Al estandarizar el punto $\bar{X} = 95$ en la figura 2.9.1, se tiene que

$$z = \frac{95 - 100}{2} = -2.5$$

Y por tanto

$$P(\bar{X} < 95) = P(Z < -2.5) = 0.0062$$

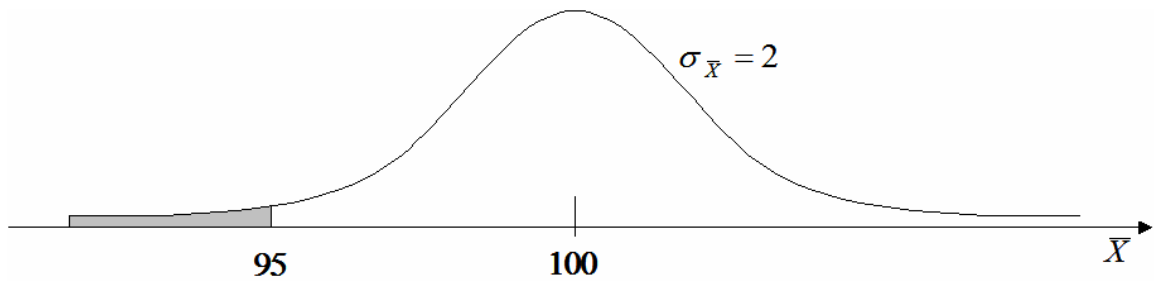


Figura 2.9.1

Ejemplo 2.9.2

Supóngase que una variable aleatoria X tiene la distribución uniforme continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \dots, 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & \dots, \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño $n=40$.

La media y la varianza de X son $\mu = 5$ y $\sigma^2 = (6 - 4)^2 / 12 = 1/3$. El teorema del límite central indica que la distribución de \bar{X} es aproximadamente normal con media $\mu_{\bar{X}} = 5$ y varianza $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n = 1/[3(40)] = 1/120$. La figura 2.9.2 presenta las distribuciones de X y \bar{X}

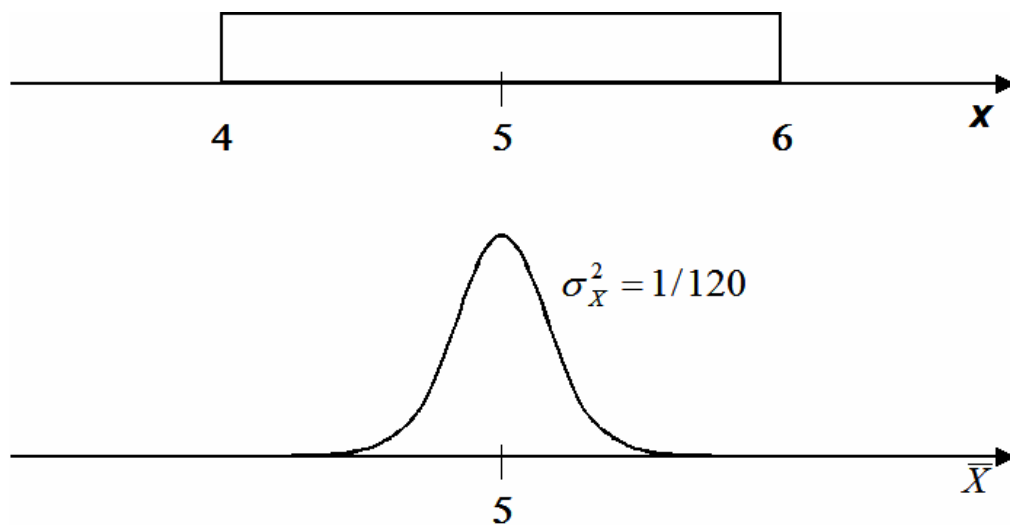


Figura 2.9.2

2.10. Procesos Estocásticos.

Definición 2.10.1 Proceso Estocástico: Si nos dan un experimento $\varepsilon = (I, B, P)$ y si a cada resultado $\xi \in I$ se le asigna una función de tiempo $X(t, \xi)$, entonces de esa manera se ha creado una función para cada resultado $\xi \in I$. A la familia de estas funciones se le llama un proceso estocástico. La notación $X(t)$ es también utilizada.

2.10.1 Propiedad de estacionalidad.

Definición 2.10.1.1 Proceso Estrictamente Estacionario: Un proceso es estrictamente estacionario si su transición de probabilidades no son afectadas por un cambio en el tiempo. En otras palabras el proceso $X(t)$ y $X(t+\epsilon)$ tienen las mismas estadísticas para cualquier ϵ .

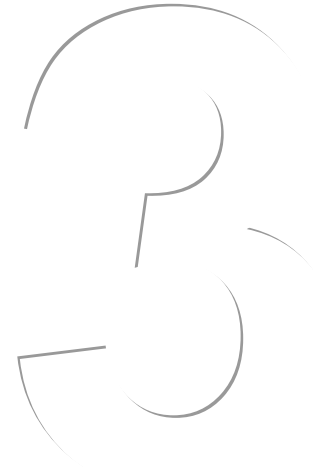
De hecho, si $X(t)$ es estrictamente estacionario entonces su densidad de orden n debe tener la siguiente forma:

$$\forall \epsilon, \forall n : f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon) \quad \dots \quad (2.10.1)$$

Si la ecuación anterior solo es válida para $n \leq k$ entonces el proceso es llamado estacionario de orden k . Como caso especial de esta misma ecuación, la de primer orden $f(x, t)$ es independiente de t y como consecuencia el valor esperado $E\{X(t)\}$ es constante. Para la de segundo orden se puede concluir que es una función de $r = t_1 - t_2$ y la autocorrelación depende solo del parámetro r .

Definición 2.10.1.1 Proceso Débilmente Estacionario: Un proceso es débilmente estacionario si su valor esperado es constante y su correlación depende solo en $r = t_1 - t_2$.

$$E\{X(t)\} = \mu, \quad E\{X(t+r)X(t)\} = R(r) \quad \dots \quad (2.10.2)$$



Campos Aleatorios de Markov

3.1. Introducción

El concepto de Campos Aleatorios de Markov (MRF) es una extensión directa del concepto de un proceso de Markov que proporciona una herramienta para analizar dependencias espaciales o contextuales de fenómenos físicos. La definición para un MRF bidimensional continuo fue introducida por Wong (1968), y de forma intuitiva dice que un campo aleatorio es de Markov si para cualquier curva cerrada que separa el espacio en dos regiones, el conocimiento del valor del campo a lo largo de la curva, hace el campo en estas regiones mutuamente independientes. Más útil para los propósitos de este trabajo es la definición de un MRF discreto, una generalización del concepto de cadena de Markov. Un campo aleatorio discreto de Markov sobre una trama finita se define como una colección de variables aleatorias, que corresponden a los

estados de la trama, cuya distribución de probabilidad es tal que la probabilidad condicional de que una variable determinada tenga un valor particular, dado los valores del resto de las variables, es idéntica a la probabilidad condicional dados los valores del campo en un conjunto pequeño de estados, que llamaremos los vecinos de un estado determinado.

3.2. Definición de Campos Aleatorios de Markov

Formalmente los Campos Aleatorio de Markov se pueden definir de la siguiente manera:

- Sea S un conjunto finito con N estados y sea $G = \{G_s, s \in S\}$ el conjunto de vecinos para S , es decir:
 1. $s \notin G, \forall s \in S$
 2. $s \notin G$, si y solo si $r \in G, \forall r, s \in S$
- Sea $F = \{F_s, s \in S\}$ una familia de variables aleatorias indexadas por $s \in S$, que toman valores en algún conjunto finito $\{Q_s\}$.
- Se llamará configuración a toda realización posible $f : (f_{S1}, \dots, f_{SN}), f_{Si} \in Q_{Si}$.
- Sea Ω el conjunto de todas las configuraciones posibles y sea P una medida de probabilidad en Ω .
- F es un MRF con respecto a G si:
 1. $P(F = f) > 0, \forall f \in \Omega$ ($(F = f)$ denota el evento $(F_s = f_s \forall s \in S)$).
 2. $P(F_s = f_s | F_r = f_r, r \neq s) = P(F_s = f_s | F_r = f_r, r \in G_s)$ para algún $s \in S$.

3.3. Topologías

Los campos aleatorios van a proporcionar medidas de probabilidad sobre un dominio de definición que tenga relaciones de tipo espacial o temporal. El conjunto de posiciones donde se define el campo va a denominarse malla o rejilla y se va a denotar por el conjunto S . En una textura el conjunto S representa el conjunto de píxeles en una estructura matricial (2d) como puede verse en la figura 3.1.

Para cada posición $s \in S$ se va a definir un espacio de estados Λ_s . Para la textura, s es un píxel y el espacio de estados Λ_s para cada píxel corresponde a los niveles de gris.

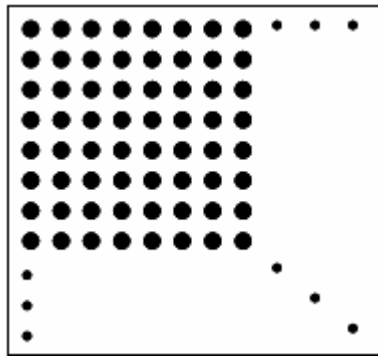


Figura 3.1 Textura

3.3.1. Sistemas de vecinos

Los estados de S están relacionados mediante lo que llamaremos un sistema de vecinos. Se le llama sistema de vecinos al conjunto de estados S a:

$$N = \{N_i \mid \forall i \in S\} \quad \dots \quad (3.3.1)$$

Donde N_i es el conjunto de los estados vecinos a i para los que:

$$1. \quad i \notin N_i \quad \dots \quad (3.3.2)$$

$$2. \quad i \in N_i \Leftrightarrow j \in N_i \quad \dots \quad (3.3.3)$$

Para una rejilla regular S , el conjunto de vecinos de i está definido como el conjunto de estados próximos dentro de un radio r .

$$N_i = \{j \in S \mid [dist(pixel_j, pixel_i)]^2 \leq r, j \neq i\} \quad \dots \quad (3.3.4)$$

Donde $dist(A,B)$ denota la distancia euclídea entre A y B , y r es un número entero. Notar que los píxeles de la frontera o próximos a ella tienen pocos vecinos.

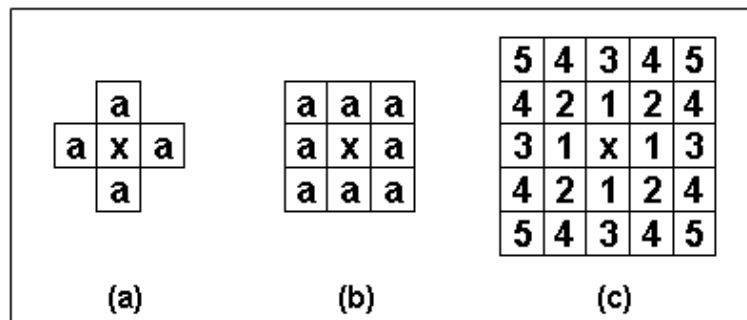


Figura 3.2 Vecinos de una rejilla regular S

En el sistema de vecinos de primer orden, llamado sistema de 4-vecinos, cada estado (interior) tiene cuatro vecinos, según lo mostrado en la figura 3.2.a, donde x denota al estado considerado y a sus vecinos. En el sistema de vecinos de segundo orden, también llamado sistema de 8-vecinos, hay ocho vecinos para cada estado (interior), según lo mostrado en la figura 3.2.b. Los números $n = 1, \dots, 5$ mostrados en la figura 3.2.c indican los estados vecinos exteriores en el sistema de vecinos de orden n -ésimo.

Cuando se ha especificado un orden entre los elementos de S , el conjunto de vecinos se puede determinar más explícitamente. Por ejemplo, sea $S = \{1, 2, \dots, m\}$ un conjunto ordenado de estados cuyos elementos son los índices de los píxeles de una imagen ID, entonces un estado interior $i \in \{2, \dots, m-1\}$ tiene dos vecinos $N_i = \{i-1, i+1\}$; y los estados de la frontera (los dos extremos) tienen un vecino cada uno, $N_1 = \{2\}$ y $N_m = \{m-1\}$. El conjunto de estados de una rejilla regular rectangular $S = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ corresponde a los píxeles de una imagen en dos dimensiones de tamaño $n \times n$. Cada estado interior, representado por (i, j) , tiene 4 vecinos $N_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$, los estados de la frontera tienen tres y los estados de las esquinas tienen dos.

Para un conjunto irregular de estados S , el conjunto de vecinos de i , N_i , se define de la misma manera que para una rejilla regular y corresponde a los estados próximos en un radio r .

$$N_i = \{j \in S \mid [dist(característica_j, característica_i)]^2 \leq r, j \neq i\} \quad \dots \quad (3.3.5)$$

La función $dist(A, B)$ necesita ser definida apropiadamente para puntos que no tienen características.

3.3.2. Cliques

Una *clique* c para $\{S, N\}$ se define como un subconjunto de S tal que c consiste en un único estado $c = \{i\}$ o un par de estados vecinos $c = \{i, j\}$, o tres estados vecinos $c = \{i, j, k\}$ y así sucesivamente.

Se denota el conjunto de cliques de un solo estado, el conjunto de cliques de dos estados, ..., por C_1, C_2, \dots respectivamente, donde:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{i \mid i \in S\} \\ C_2 &= \{\{i, j\} \mid j \in N_i, i \in S\} \\ C_3 &= \{\{i, j, k\} \mid i, j, k \in S, \text{son_vecinos_dos_a_dos}\} \quad \dots \quad (3.3.6) \\ &\dots \end{aligned}$$

El conjunto de todas las cliques para $\{S, N\}$ será entonces $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$

El tipo de clique para $\{S, N\}$, de una rejilla regular, viene determinado por su tamaño, dimensión y orientación. La figura 3.3 muestra distintos tipos de cliques para sistemas de vecinos de primer y segundo orden. A medida que aumenta el orden del sistema de vecinos, el número de cliques crece rápidamente y también el coste computacional asociado.

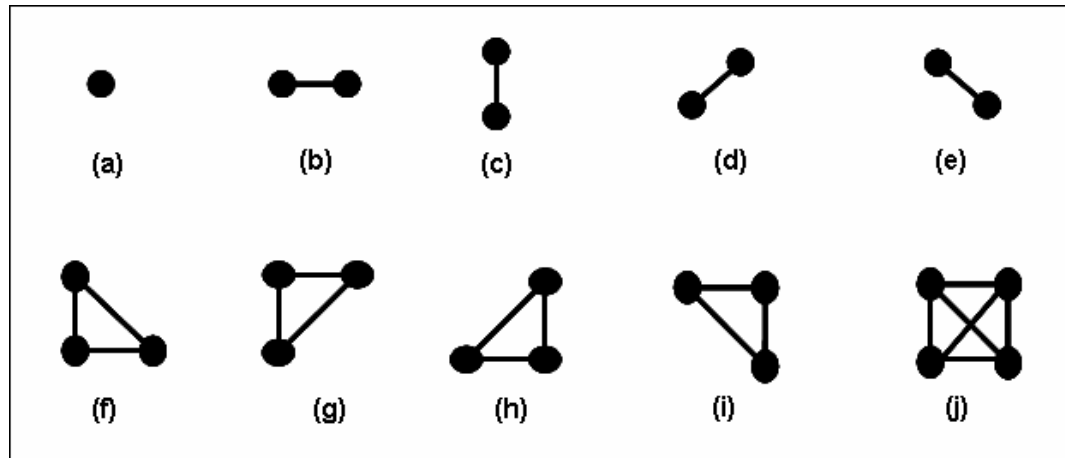


Figura 3.3 Cliques en una rejilla regular S

3.4 Modelos de Markov

A continuación se definen algunos modelos útiles de Campos Aleatorios de Markov para modelar características de la imagen tales como regiones y texturas. El interés principal se centra en sus distribuciones de probabilidad condicional y conjunta, y en sus correspondientes funciones de energía. Dependiendo de cómo está definida la función de energía se pueden agrupar en:

- Auto-Modelos.
- Modelo Logístico Multinivel.

3.4.1. Auto-Modelos

Las restricciones de contexto entre dos etiquetas son un primer nivel a tener en cuenta en la información del contexto. Son muy utilizadas debido a su simplicidad y bajo costo computacional. Se codifican en la función de energía de Gibbs como funciones clique potenciales para cada par de estados. Entonces la función clique potencial queda definida por

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} V_2(f_i, f_j) \quad \dots \quad (3.4.1)$$

A la cual se le puede llamar energía de segundo orden porque se calcula para cada clique formada por dos estados. Se puede especificar un Campo Aleatorio de Gibbs o un Campo Aleatorio de Markov mediante la selección apropiada de V_1 y V_2 .

Cuando $V_1(f_i) = f_i G_i(f_i)$ y $V_2(f_i, f_j) = \beta_{i,j} f_i f_j$, donde $G_i(*)$ son funciones arbitrarias y $\beta_{i,j}$ son constantes que reflejan la interacción entre cada par de estados i y j , entonces la función de energía es:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} f_i G_i(f_i) + \sum_{\{i,j\} \in C_2} \beta_{i,j} f_i f_j \quad \dots \quad (3.4.2)$$

Definición 3.4.1.1 auto-modelo: El modelo anterior recibe el nombre de auto-modelo. Los auto-modelos se pueden clasificar más a fondo según las suposiciones hechas sobre las f_i .

Definición 3.4.1.2 Modelo auto-logístico: Un auto-modelo se dice que es un modelo auto-logístico si las f_i toman valores en el conjunto de etiquetas discreto $L = \{0, 1\}$ (o $L = \{+1, -1\}$). La correspondiente función de energía es de la forma:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} \alpha_i f_i + \sum_{\{i,j\} \in C_2} \beta_{i,j} f_i f_j \quad \dots \quad (3.4.3)$$

donde $\beta_{i,j}$ puede ser interpretado como la interacción entre los coeficientes. Cuando el sistema de vecinos N es una rejilla (4-vecinos en una rejilla 2D, o 2-vecinos en una rejilla 1D), entonces el modelo *auto-logístico* se reduce al modelo de *Ising*. La probabilidad condicional para el modelo *auto-logístico* con $L = \{0, 1\}$ es

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{\sum_{f_i \in \{0,1\}} e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}} = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{1 + e^{\alpha_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_j}} \quad \dots \quad (3.4.4)$$

Cuando la distribución es homogénea, se tiene $\alpha_i = \alpha$ y $\beta_{i,j} = \beta$ sin importar i ni j .

Definición 3.4.1.3 auto-modelo normal: Se dice que un *auto-modelo* es un auto-modelo normal, llamado Campo Aleatorio de Markov Gaussiano, si el conjunto de etiquetas L es \mathcal{R} y la

distribución de probabilidad conjunta es una normal multivariante. Su función de probabilidad condicional es:

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[f_i - \mu_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} (f_j - \mu_j) \right]^2} \dots \quad (3.4.5)$$

que es una distribución normal con media condicional:

$$E(f_i | f_{N_i}) = \mu_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} (f_j - \mu_j) \dots \quad (3.4.6)$$

y varianza condicional

$$\text{var}(f_i | f_{N_i}) = \sigma^2 \dots \quad (3.4.7)$$

La probabilidad conjunta es una distribución de Gibbs

$$p(f) = \frac{\sqrt{\det(B)}}{\sqrt{(2\Pi\sigma^2)^m}} e^{\frac{1}{2\sigma^2} (f-\mu)^T B (f-\mu)} \dots \quad (3.4.8)$$

donde f se considera un vector, μ es el vector $m \times 1$ de las medias condicionales, y $B=[\beta_{i,j}]$ es la matriz de interacción $m \times m$ cuyos elementos de la diagonal son 1 y el resto de elementos (i, j) es $-\beta_{i,j}$, es decir con $b_{ij} = \delta_{i,j} - \beta_{i,j}$ con $\beta_{i,i} = 0$. Por lo tanto, las funciones clique potenciales, de un solo estado y de dos estados, para el modelo auto-normal son:

$$V_1(f_i) = \frac{(f_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \dots \quad (3.4.9)$$

$$V_2(f_i, f_j) = \frac{\beta_{i,j} (f_i - \mu_i)(f_j - \mu_j)}{2\sigma^2} \dots \quad (3.4.10)$$

3.4.2. Modelo Logístico Multinivel

El modelo auto-logístico se puede generalizar al modelo logístico multinivel (MLL), también llamado modelo de Strauss y modelo generalizado de Ising. Hay $M (> 2)$ etiquetas discretas en el conjunto de etiquetas $L = \{1, \dots, M\}$. Una clique potencial depende del tipo c (tamaño, dimensión

y orientación posible) de la clique y de la configuración local $f_c = \{f_i \mid i \in c\}$. Para las cliques que contienen más de un estado ($c > 1$), se definen las funciones clique potenciales MLL como:

$$V_c(f) = \begin{cases} \zeta_c & \text{si todos los estados de } c \text{ tienen la misma etiqueta} \\ -\zeta_c & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde ζ_c es el potencial para las cliques del tipo c ; para cliques de un solo estado, depende de la etiqueta asignada al estado

$$V_c(f) = V_c(f_i) = \alpha_l \text{ si } f_i = l \in L_d \quad \dots \quad (3.4.11)$$

Donde α_l es el potencial para la etiqueta l . La siguiente figura muestra los tipos de cliques y los parámetros asociados en sistemas de vecinos de segundo orden (8-vecinos).

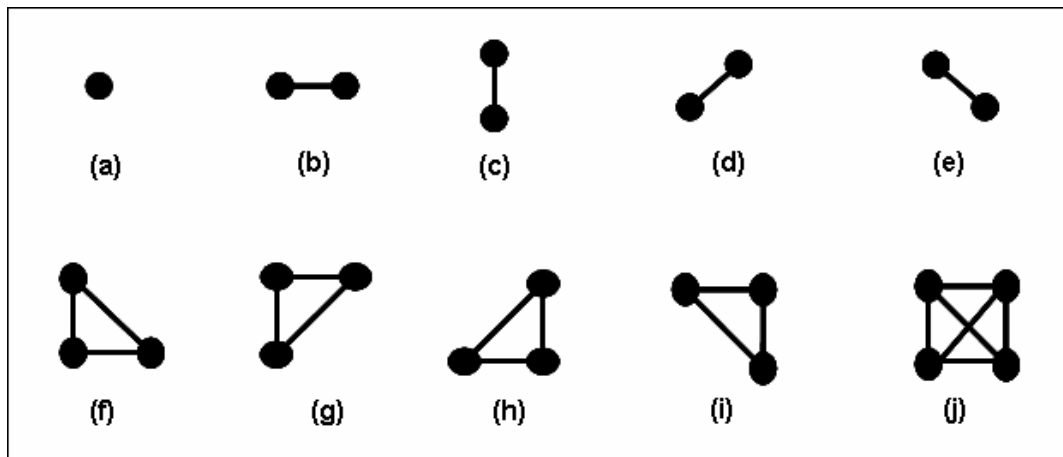


Figura 3.4 Tipos de cliques y parámetros potenciales asociados en sistemas de vecinos de segundo orden (8-vecinos). Los estados son los puntos y las líneas muestran las relaciones entre vecinos.

Si se asume que un modelo MLL es de segundo orden, si y sólo si α (para cliques de un estado) y β (para cliques de dos estados) son parámetros distintos de cero. La función clique potencial para cliques de dos estados es:

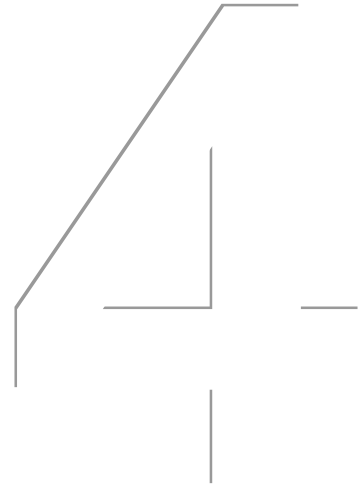
$$V_2(f_i, f_j) = \begin{cases} \beta_c & \text{si los estados de la clique } \{i, j\} = c \in C_2 \text{ tienen la misma etiqueta} \\ -\beta_c & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde β_c es el parámetro β para las cliques del tipo c y C_2 es el conjunto de cliques de dos estados. Para un sistema de 4-vecinos hay cuatro tipos de cliques de dos estados (figura 3.4) y cuatro diferentes β_c . Cuando el modelo es isotrópico los cuatro toman el mismo valor. Cuando el modelo MLL es isotrópico, la probabilidad condicional puede ser expresada como sigue:

$$P\left(f_i = \frac{I}{f_{N_i}}\right) = \frac{e^{-\alpha_I - \beta_{n_i}(I)}}{\sum_{I=1}^M e^{-\alpha_I - \beta_{n_i}(I)}} \quad \dots \quad (3.4.12)$$

donde $n_i(I)$ es el número de estados en N_i que están etiquetados por I . Cuando hay solamente dos etiquetas, 0 y 1, se reduce a:

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{\sum_{f_i \in \{0,1\}} e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}} = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{1 + e^{\alpha_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_j}} \quad \dots \quad (3.4.13)$$



Optimización

4.1. Introducción

En las últimas décadas se han presentado una variedad importante de problemas de optimización combinatoria que requieren ser atacados con técnicas generales que consideren explícitamente el gran número de variables de decisión involucradas. Estos problemas son sencillos de entender y su esquema de solución, usando técnicas de solución exactas, es aplicable únicamente cuando el número de variables de decisión es pequeño.

El resolver un problema combinatorio se resume a encontrar la “mejor” / “óptima” solución dentro de un conjunto finito o contablemente infinito de alternativas.

Se asume que la calidad de la solución es cuantificable y comparable con cualquier otra solución y se asume que las soluciones son finitas.

Muchos problemas combinatorios son NP, por lo que normalmente se buscan soluciones "rápidas" sub-óptimas.

Una instancia de un problema combinatorio se puede formalizar por un par $(S; f)$ donde el espacio solución S denota el conjunto finito de todas las posibles soluciones y f denota la función de costo:

$$f : S \rightarrow R$$

Lo que se trata (en minimización) es encontrar una solución $i_{opt} \in S$ tal que $f(i_{opt}) \leq f(i)$ para toda $i \in S$.

Los algoritmos de búsqueda local constituyen una clase de algoritmos aproximados basados en la exploración de vecinos. Estos presuponen que existe una función de costo y una estructura de vecindad.

La estructura de vecindad define para cada $i \in S$ un subconjunto $S_i \subset S$ que son cercanos a i en algún sentido. Se asume que $j \in S_i \Leftrightarrow i \in S_j$.

El mecanismo de generación se define como la forma de seleccionar una solución j en la vecindad S_i de la solución i .

Los algoritmos de búsqueda local normalmente iteran partiendo de una solución aleatoria, generando un vecino que sea mejor hasta que se llegue a una solución que no tiene vecinos.

4.2. Recocido Simulado

El algoritmo de recocido simulado está basado en una analogía entre la simulación de recocido de sólidos y la problemática de resolver problemas de optimización combinatoria de gran escala. Por esta razón el algoritmo se conoce como recocido simulado. Recocido denota un proceso de calentamiento de un sólido a una temperatura en la que sus granos deformados recrystalizan para producir nuevos granos. La temperatura de recocido o de recrystalización, depende del tipo de material, del grado de deformación del mismo, además de su uso futuro. Seguida a la fase de calentamiento, viene un proceso de enfriamiento en donde la temperatura se baja poco a poco. De esta manera, cada vez que se baja la temperatura, las partículas se acomodan en estados de más baja energía hasta que se obtiene un sólido con sus partículas acomodadas conforme a una estructura de cristal. Si se comienza con un valor máximo de la temperatura, en la fase de enfriamiento del proceso de recocido, para cada valor de la temperatura T debe permitirse que se alcance su equilibrio térmico. Sin embargo, si el proceso de enfriamiento es demasiado rápido

y no se alcanza en cada etapa el equilibrio térmico, el sólido congelará en un estado cuya estructura será amorfa en lugar de la estructura cristalina de más baja energía. La estructura amorfa está caracterizada por una imperfecta cristalización del sólido.

El equilibrio térmico está caracterizado por la distribución de Boltzmann. De acuerdo a esta distribución, la probabilidad de que el sólido esté en un estado s con energía E_s a la temperatura T , viene dada por

$$P_T\{X = i\} = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(\frac{-E_i}{k_B T}\right) \quad \dots \quad (4.2.1)$$

donde X es una variable aleatoria que denota el estado actual del sólido. $Z(T)$ es una constante de normalización llamada la función partición, que está definida como

$$Z(T) = \sum_j \exp\left(\frac{-E_j}{k_B T}\right) \quad \dots \quad (4.2.2)$$

donde la sumatoria se extiende sobre todos los posibles estados y k_B es una constante física conocida como la constante de Boltzmann. El factor $\exp\left(\frac{-E_i}{k_B T}\right)$ se conoce como el factor de Boltzmann.

Obviamente P_T es una función de densidad de probabilidad ya que siempre es mayor o igual a cero y la suma sobre todos los valores es igual a la unidad. Se puede observar en P_T que cuando el valor de T disminuye, la distribución de Boltzmann se concentra en los estados de menor energía mientras que si la temperatura se aproxima a cero, únicamente los estados con mínima energía tienen una probabilidad de ocurrencia diferente de cero.

Por lo dicho anteriormente, el proceso de recocido consta de dos pasos fundamentales que son:

- Incrementar la temperatura del sólido a un valor máximo.
- Decrementar cuidadosamente la temperatura del sólido hasta que las partículas se reacomoden por sí mismas en un estado de mínima energía, denominado el estado fundamental del sólido.

El proceso físico de recocido puede moderarse exitosamente usando métodos de simulación. El algoritmo genera una sucesión de estados del sólido de la siguiente manera:

Dado un estado i del sólido con energía E_i , se genera un estado subsecuente j aplicando un mecanismo de perturbación que transforma el estado actual en el siguiente estado por medio de una pequeña distorsión, por ejemplo, por el desplazamiento de una partícula. La energía del

siguiente estado es E_j . Si la diferencia de energía, $E_j - E_i$, es menor o igual a cero, el estado j se acepta como el estado actual. Si la diferencia de energía, es mayor que cero, el estado j se acepta con una probabilidad que está dada por:

$$\exp\left(\frac{-E_i}{k_B T}\right) \quad (4.2.3)$$

donde T denota la temperatura del baño térmico y k_B es la constante de Boltzman. La regla de decisión descrita arriba se conoce como el criterio de Metropolis y al algoritmo se le conoce como algoritmo de Metropolis.

Si la temperatura se baja poco a poco, el sólido puede alcanzar su equilibrio térmico en cada temperatura. En el algoritmo de Metropolis esto se lleva a cabo generando un número grande de transiciones para un valor dado de la temperatura.

4.3. El Algoritmo del Recocido Simulado

La simulación del proceso de recocido puede usarse para describir un proceso de generación de una sucesión de soluciones de un problema de optimización combinatoria en donde se vayan obteniendo, conforme el proceso avanza, mejores soluciones al mismo. Para este propósito se puede observar una analogía entre el sistema físico y un problema de optimización combinatoria en donde cada solución del problema puede verse como un estado del sólido y el valor de la función objetivo para la el nivel de energía del sólido. En resumen se puede pensar en las siguientes equivalencias.

- Las soluciones de un problema de optimización combinatoria son equivalentes a los estados de un sistema físico.
- El costo de una solución es equivalente a la energía de un estado.

Además, se introduce un parámetro que juega el papel equivalente de la temperatura. Este parámetro se llama el parámetro de control. El algoritmo de recocido simulado puede verse como una iteración del algoritmo de Metrópolis, evaluado en valores decrecientes del parámetro de control.

Definición 4.3.1 Sea (S, f) una instancia de un problema de optimización combinatoria, y denotadas por i y j dos soluciones con costo $f(i)$ y $f(j)$, respectivamente. Entonces el criterio de aceptación determina si j se acepta de i a partir de aplicar la siguiente probabilidad de aceptación:

$$P_c \{aceptar_j\} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(j) \leq f(i) \\ \exp\left(\frac{f(i) - f(j)}{c}\right) & \text{si } f(j) > f(i) \end{cases} \quad \dots \quad (4.3.1)$$

donde $c \in R^+$ denota el parámetro de control.

Claramente el mecanismo de generación corresponde al mecanismo de perturbación en el algoritmo de Metrópolis, mientras que el criterio de aceptación corresponde al criterio de Metrópolis.

Definición 4.3.2 Una transición es una acción combinada que transforma la solución actual en una subsecuente. Esta acción consiste de los siguientes dos pasos:

- (i) aplicación del mecanismo de generación,
- (ii) aplicación del criterio de aceptación.

Sea C_k el valor del parámetro de control y L_k el número de transiciones generadas en la k -ésima iteración del algoritmo de Metrópolis. Entonces el algoritmo de recocido simulado puede describirse en pseudo-código como se muestra más abajo.

El pseudo-código comienza llamando a un procedimiento de inicialización donde se definen la solución inicial, la temperatura inicial y el número inicial de generaciones necesarias para alcanzar el equilibrio térmico para la temperatura inicial. La parte modular del algoritmo consta de dos ciclos. El externo Repite ... hasta y el interno para ...fin para. El ciclo interno mantiene fijo el parámetro de control hasta que se generan L_k soluciones y se acepta o se rechaza la solución generada conforme los criterios de aceptación ya discutidos. El ciclo externo disminuye el valor de la temperatura mediante el procedimiento CALCULA-CONTROL y calcula el número de soluciones a generar para alcanzar equilibrio térmico mediante el procedimiento CALCULA-LONGITUD. Este ciclo finaliza cuando la condición de paro se cumple.

Un rasgo característico del algoritmo de recocido simulado es que, además de aceptar mejoramientos en el costo, también acepta soluciones más malas en costo. Inicialmente, para valores grandes donde c , puede aceptar soluciones con un valor objetivo mucho mayor a la solución actual; cuando c decrece, únicamente pequeñas desviaciones serán aceptadas y

finalmente, cuando el valor de c se aproxima a cero, no se aceptarán desviaciones. Este hecho significa que el algoritmo de recocido simulado, en contraste con el algoritmo de búsqueda local, puede escapar de mínimos locales además de exhibir los rasgos favorables de los algoritmos de búsqueda local; es decir, simplicidad y aplicabilidad general.

Pseudocódigo del algoritmo del Recocido Simulado

Comienza

INICIALIZA (i_{inicial} , C_0 , L_0)

$k = 0$

$i = i_{\text{inicial}}$

Repite

para $L = 1$ a L_k **haz**

Comienza

GENERA (j de S_i)

Si $f(j) \leq f(i)$ **entonces** $i = j$

sino

si $\exp\left(\frac{f(i) - f(j)}{c_k}\right) >$ número aleatorio en $[0,1)$ **entonces** $i = j$

fin para

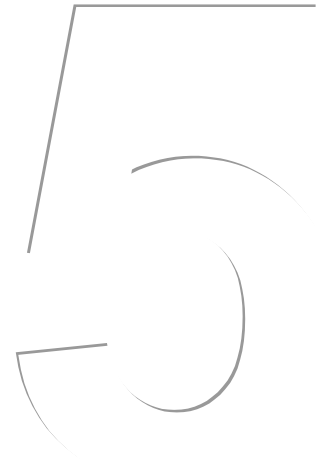
$k := k+1$

CALCULA-LONGITUD (L_k)

CALCULA- CONTROL (C_k)

hasta criterio de paro

fin



Esquema de Procesamiento

5.1. Introducción.

En este capítulo se explicarán de manera gráfica y textual los pasos de los métodos de segmentación que ya han sido mencionados a lo largo de los capítulos anteriores. Asimismo, se propondrá un algoritmo para cada uno de ellos para su programación.

5.2. Segmentación por Bayes.

Este método consiste en aplicar una aproximación de la regla de Bayes. Dicha regla está definida de la siguiente manera:

$$P(w_i | X) = \frac{P(X | w_i)P(w_i)}{P(X)} \quad \dots \quad (5.2.1)$$

Donde:

$P(w_i X)$	Representa la probabilidad a posteriori.
$P(X w_i)$	Es la probabilidad conjunta de X dado w_i .
$P(w_i)$	Es la probabilidad a priori de la clase w_i .
$P(X)$	Es la probabilidad total de X .

¿Qué significa esto en una imagen? Considérese una imagen de $N \times M$ píxeles en 256 niveles de gris; ahora sobre esa imagen se definen n ventanas representativas, es decir, n regiones homogéneas que de las cuales se pueda tomar un nivel de gris para representar a cada una de dichas regiones.

Regresando a las fórmulas matemáticas, $P(w_i)$ representa la probabilidad o la proporción de una clase i respecto a toda la imagen, donde i puede ser $1, 2, 3, \dots, n$; es decir, es el número de píxeles que conforman a una clase entre el número de píxeles totales de toda la imagen.

La probabilidad conjunta $P(X | w_i)$ se puede definir como la probabilidad de que un píxel x pertenezca a una clase w_i .

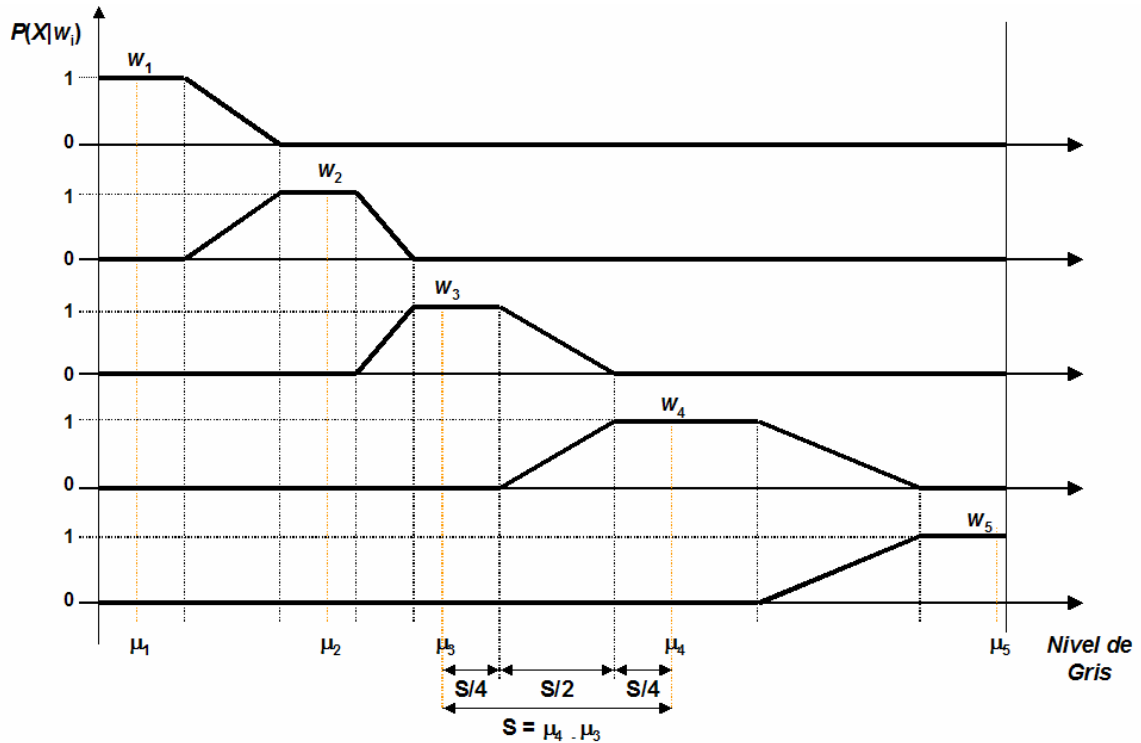
La probabilidad $P(X)$ representa la probabilidad de la imagen como tal, pero si se considera que X representa a todo el espacio muestral, entonces la $P(X)$ será 1, por lo cual se puede eliminar del procedimiento; considerando lo anterior, se puede llegar a una aproximación de la regla de Bayes:

$$P(w_i | X) \approx P(X | w_i)P(w_i) \quad \dots \quad (5.2.2)$$

Para poder segmentar una imagen por este método es necesario hacer una primera pre-segmentación de ésta; para esto se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las Probabilidades a priori $P(w_i)$ son equiprobables, es decir, la probabilidad de cada clase como la misma; para cinco clases sería $P(w_i) = 1/5$.

- Para las probabilidades conjuntas $P(X | w_i)$, se utilizan las funciones trapezoidales que se muestran a continuación:



Gráfica 5.1 Funciones Trapezoidales.

Estas funciones representan la proporción de los píxeles en sus niveles de gris en las cinco ventanas definidas. Cada ventana tiene un nivel medio de gris, el cual sirve para representar a cada una de las clases en las imágenes segmentadas.

- Posteriormente, se analiza la imagen píxel por píxel y se le reasigna su valor de nivel de gris en función del valor más alto de la operación $P(w_i | X) \approx P(X | w_i)P(w_i)$, donde i representa a cada una de las cinco clases. $P(w_i|X) = P(X|w_i) * P(w_i)$

Luego de la primer pre-segmentación se realiza una segunda; en este punto se toma en cuenta lo siguiente:

- Las probabilidades a priori $P(w_i)$ se calculan en función del número de píxeles pertenecientes a cada una de las cinco clases de la primer imagen pre-segmentada.

- Para las probabilidades conjuntas $P(X | w_i)$, se utilizan nuevamente las funciones trapezoidales.
- Posteriormente, se analiza la imagen píxel por píxel y se le reasigna su valor de nivel de gris en función del valor más alto de la operación $P(w_i | X) \approx P(X | w_i)P(w_i)$, donde i representa a cada una de las cinco clases.

Finalmente se realiza la segmentación de la imagen; en este punto se toma en cuenta lo siguiente:

- Las probabilidades a priori $P(w_i)$ se calculan en función del número de píxeles pertenecientes a cada una de las cinco clases de la segunda imagen pre-segmentada.
- Para las probabilidades conjuntas $P(X | w_i)$, se utilizan nuevamente las mismas funciones trapezoidales.
- Posteriormente se analiza la imagen píxel por píxel y se le reasigna su valor de nivel de gris en función del valor más alto de la operación $P(w_i | X) \approx P(X | w_i)P(w_i)$, donde i representa a cada una de las cinco clases.

Gráficamente este método queda de la siguiente manera:

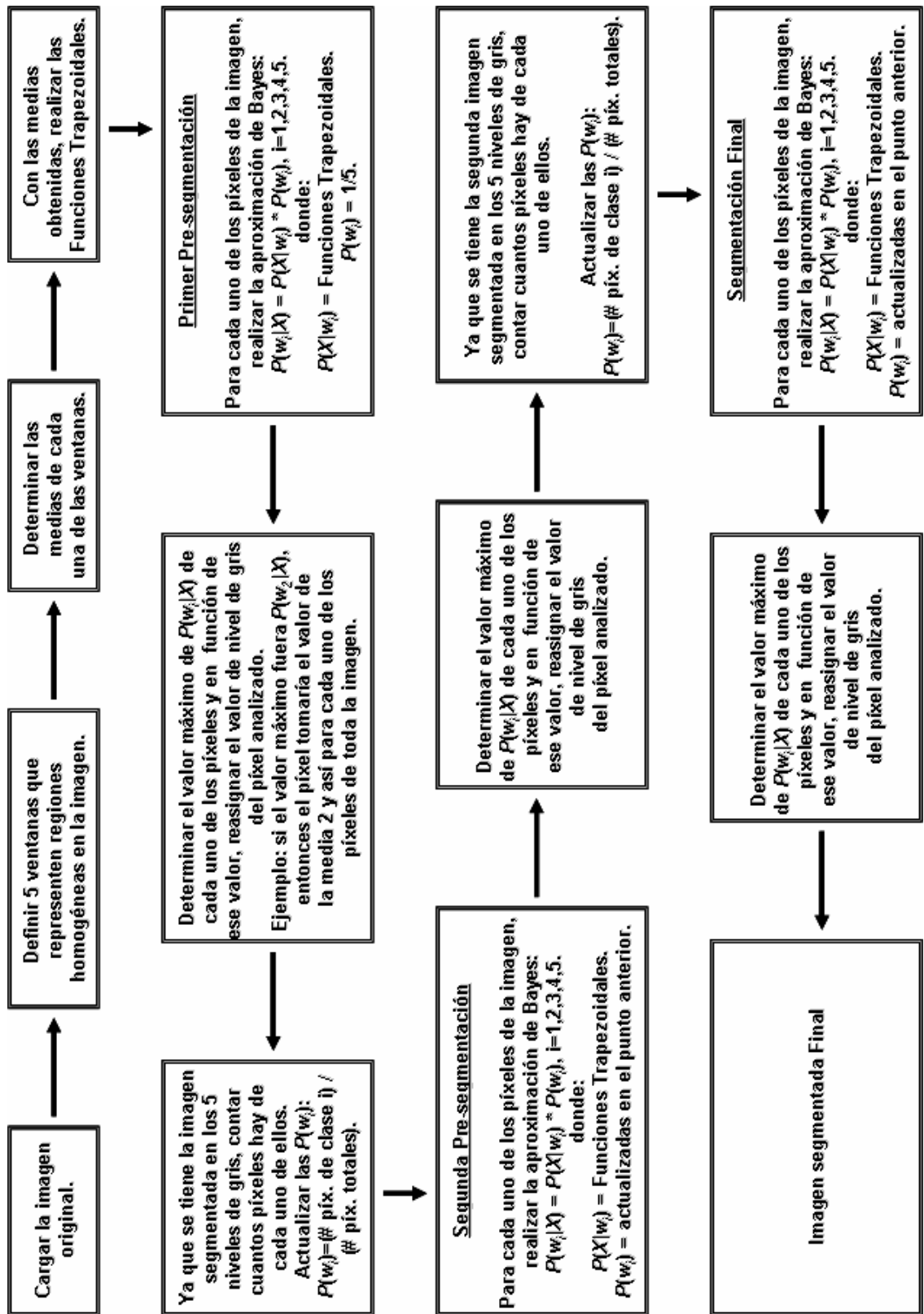


Tabla 5.1 Pasos de la segmentación por el método de Bayes.

Y algorítmicamente una propuesta sería la siguiente:

X = imagen original;

Y = X; reasigno la imagen a otra variable

vent(i) = ventanas de entrenamiento; i = número de ventanas o clases escogidas;

med(i) = mean(vent(i)); medias de las ventanas

$P(X | w_i)$ = funciones trapezoidales;

For n = 1 to 3

 If n=1

$P(w_i) = 1/i$ (probabilidad a priori inicial), para i = 1, 2,

 End if

 For a = 1 to X(numero de filas de la matriz de X)

 For b = 1 to X(numero de columnas de la matriz de X)

$P(w_i | X) = P(X | w_i)P(w_i)$ para cada una i

 PWIXmax = Max($P(w_i | X)$) ;

 If PWIXmax == $P(w_1|X), P(w_2|X), P(w_3|X), \dots, P(w_i|X)$

 Y(a,b) = med(i)

 End if

 End for

 End for

Save (Y);

$P(w_i) = (\text{número de píxeles de la clase } i) / (\text{número de píxeles totales}),$ para i = 1, 2....

End for

5.3. Segmentación por Mahalanobis.

Este método de segmentación es muy sencillo, básicamente consiste en aplicar a cada uno de los píxeles de la imagen la fórmula siguiente:

$$r_i^2 = \frac{x - \mu_i}{\sigma_i^2}, i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots \quad (5.3.1)$$

donde r_i^2 representa cada uno de los valores de Mahalanobis, x cada uno de los píxeles de la imagen, μ_i las medias de cada una de las i clases y σ_i^2 la varianza de cada una de las mismas clases. Desarrollando la fórmula anterior para cada una de las clases, se tienen las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{x - \mu_1}{\sigma_1^2} \\ r_2^2 &= \frac{x - \mu_2}{\sigma_2^2} \\ r_3^2 &= \frac{x - \mu_3}{\sigma_3^2} \\ r_4^2 &= \frac{x - \mu_4}{\sigma_4^2} \\ r_5^2 &= \frac{x - \mu_5}{\sigma_5^2} \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Posteriormente se toma el valor más pequeño de los n obtenidos y en función de a qué clase pertenece se reasigna el valor de nivel de gris de cada píxel.

Gráficamente este método queda de la siguiente manera para 5 clases:

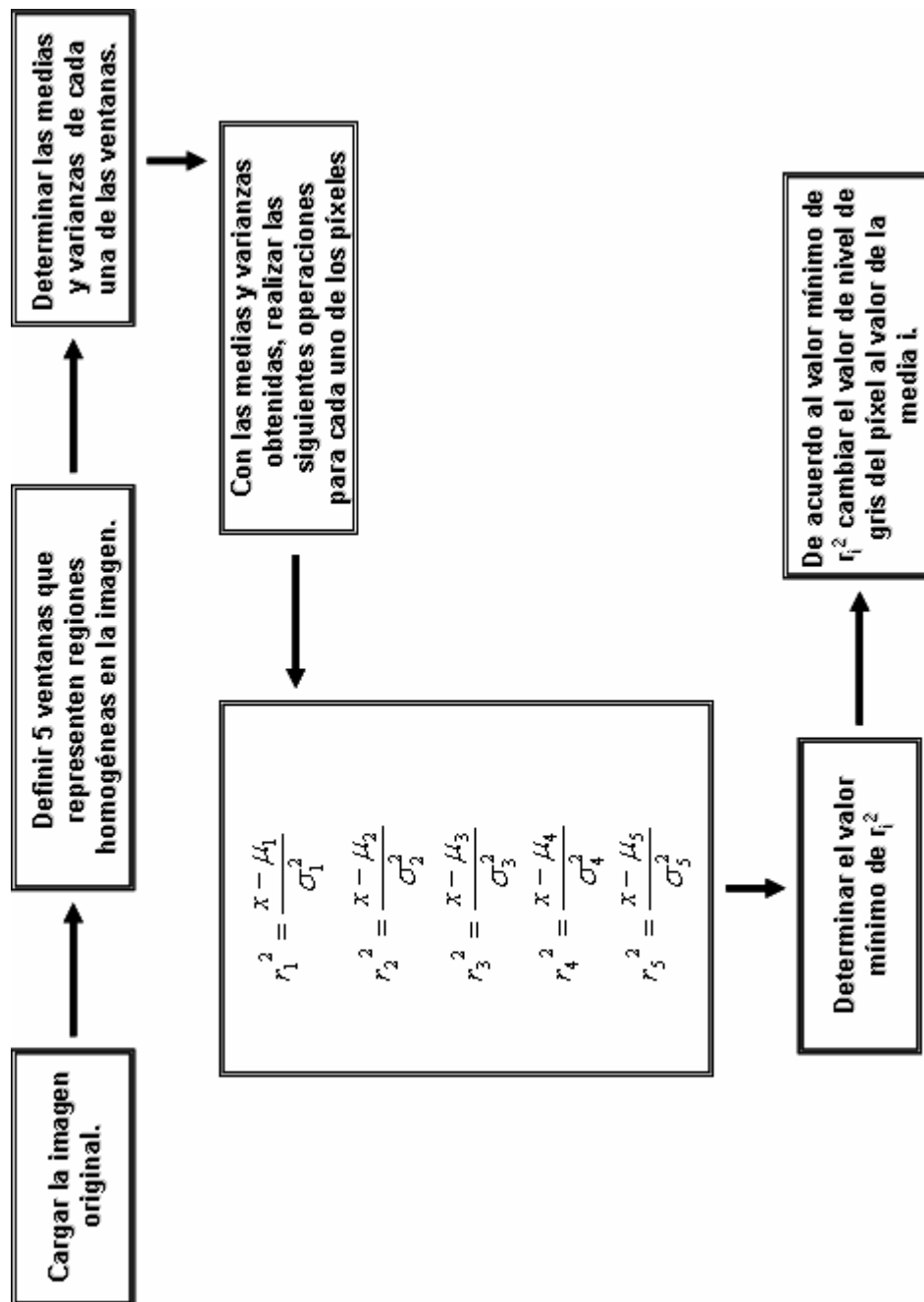


Tabla 5.2 Pasos de la segmentación por el método de Mahalanobis.

Y algorítmicamente una propuesta sería la siguiente:

X = imagen original;

Y = X; reasigno la imagen a otra variable

vent(i) = ventanas de entrenamiento; i = número de ventanas o clases escogidas;

med(i) = mean(vent(i)); medias de las ventanas

varianzas = var(vent(i)); varianzas de las ventanas

For a = 1 to X(numero de filas de la matriz de X)

For b = 1 to X(numero de columnas de la matriz de X)

$$r_i^2 = \frac{x - \mu_i}{\sigma_i^2}, \quad \text{para cada } i$$

$$Ri2min = \text{Min} \left(r_i^2 = \frac{x - \mu_i}{\sigma_i^2} \right);$$

If Ri2min == $r_1^2, r_2^2, r_3^2, \dots, r_i^2$

Y(a,b) = med(i)

End if

End for

End for

5.4. Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).

Este método de segmentación es un tanto más complicado que los dos anteriores ya que utiliza más herramientas matemáticas. Consiste en una aproximación de la regla de Bayes:

$$P(w_i | X) \approx P(X | w_i)P(w_i) \quad \dots \quad (5.4.1)$$

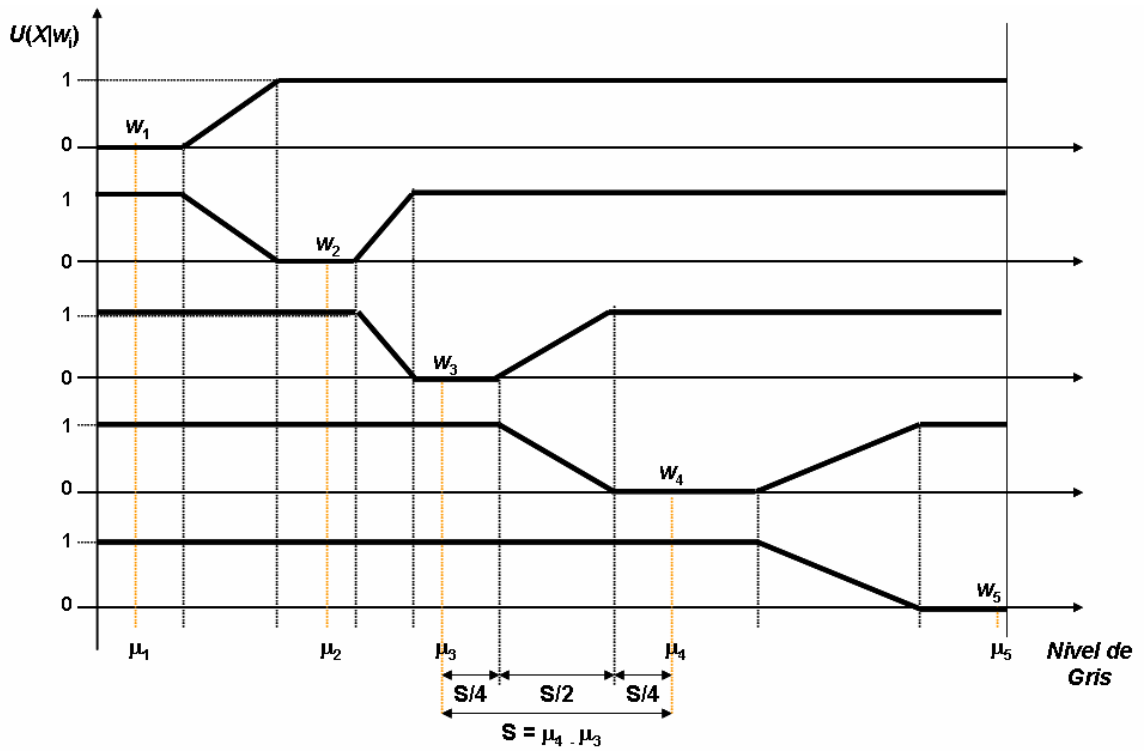
La cual a su vez se puede aproximar por la función de energía:

$$U(w_i | X) \approx U(X | w_i) + U(w_i) \quad \dots \quad (5.4.2)$$

De la anterior función de energía, se definen los siguientes términos:

- $U(w_i | X)$ Representa la energía a posteriori.
- $U(X | w_i)$ Es la probabilidad conjunta de X dado w_i .
- $U(w_i)$ Es la energía a priori de la clase w_i .

Como ejemplo de aproximación de las probabilidades conjuntas $U(X | w_i)$ de 5 clases, es necesario utilizar las funciones trapezoidales de energía mostradas a continuación:



Gráfica 5.2 Funciones Trapezoidales.

Para la energía a priori de clases, es necesario utilizar el criterio de Metrópolis y el modelo de Potts. Consiste básicamente en el análisis de cada píxel de la imagen y hacer una comparación con sus ocho píxeles vecinos.

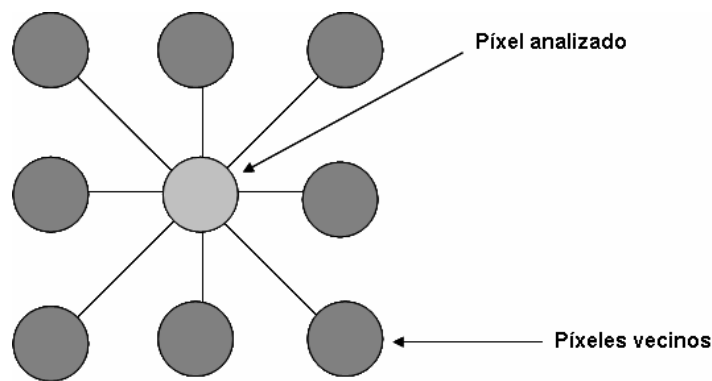


Figura 5.1 Vecindad de un píxel analizado.

El método de análisis es llamado Algoritmo de Recocido Simulado. De forma gráfica este método quedaría de la siguiente manera:

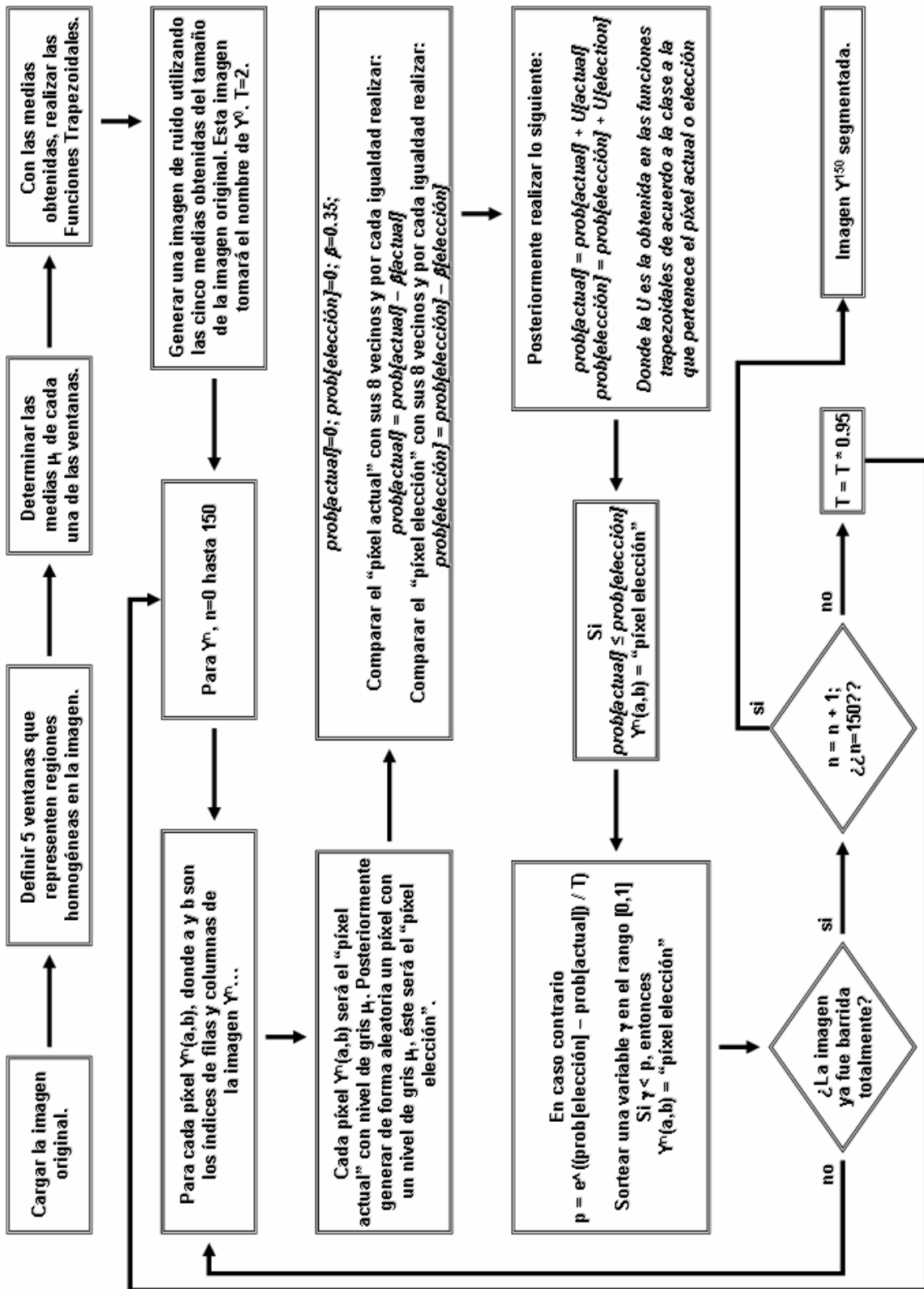


Tabla 5.3 Pasos de la segmentación por el método de Campos de Markov.

Y algorítmicamente una propuesta sería la siguiente:

X = imagen original;

Y = X; reasigno la imagen a otra variable

vent(i) = ventanas de entrenamiento; i = número de ventanas o clases escogidas;

med(i) = mean(vent(i)); medias de las ventanas

$U(X | w_i) =$ funciones trapezoidales;

Seleccionar una temperatura suficientemente alta $T^{(0)}$ ($T^{(0)} = 2$ en este caso).

$\beta[\text{actual}] = \beta[\text{elección}] = 0.35$

Realizar una imagen de ruido Y^0 con lo valores de med(i) y del tamaño de X;

For $n = 0, n = 150$

 En cada barrida (n):

 For cada píxel $Y^n(a,b)$:

 Generar un píxel de forma aleatoria de valor med(i), el cuál será el píxel
 elección

Análisis de 8-vecindad

$prob[\text{actual}] = 0$

$prob[\text{election}] = 0$

 For cada uno de los 8 vecinos

 If $pixel\ actual = pixel\ vecino$

$prob[\text{actual}] = prob[\text{actual}] - \beta[\text{actual}]$

 End if

 If $pixel\ elección = pixel\ vecino$

$prob[\text{elección}] = prob[\text{elección}] - \beta[\text{election}]$

 End if

 End For

Variación de energía asociada al píxel

$prob[\text{actual}] = prob[\text{actual}] + U[\text{actual}]$

$prob[\text{election}] = prob[\text{elección}] + U[\text{elección}]$

 If $prob[\text{election}] <= prob[\text{actual}]$:

$Y^n(a,b) = píxel\ elección$

 Else:

$p = \exp -[(prob[\text{elección}] - prob[\text{actual}])/T^{(n)}]$

γ = variable aleatoria en el rango [0,1].

If $\gamma < p$:

$Y^n(a,b) = \text{pixel elección}$

End if

End if

End for

$T^{(n+1)} = 0.95 * T^{(n)}$

End for

5.5. Segmentación por MRF combinado con Bayes.

Este método es una combinación de los métodos de MRF y de Bayes. Consiste en tomar, por decirlo de una manera, la mejor parte de ambos métodos, esto es, las partes más homogéneas del método de MRF y las partes finas de Bayes. Básicamente es formar una tercera imagen a partir de las dos segmentadas de ambos métodos.

Para poder realizar lo anterior se debe analizar píxel por píxel de la imagen original en vecindades y determinar la varianza existente en ellas; esto es básicamente para poder determinar el grado de homogeneidad en pequeñas regiones, así de esa manera se puede determinar que región es adecuada por un método u otro. En la siguiente imagen se muestra un píxel analizado con su vecindad de 24 píxeles:

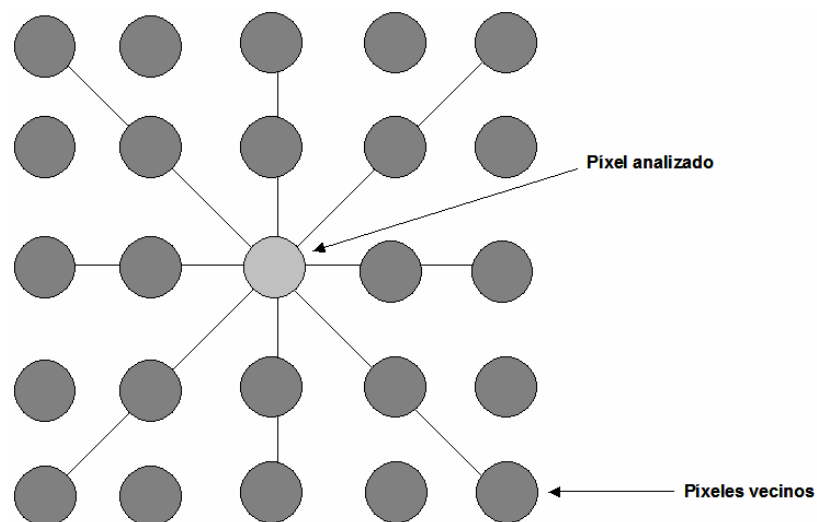


Figura 5.1 Vecindad de un píxel analizado.

Al analizarse todos los píxeles de la imagen, se obtendrá una imagen de varianzas, esto es, a cada píxel se le asignará un valor de varianza de 0 a 255 en función de la variabilidad de su vecindad. Ya que se tiene esta imagen de varianza, se tiene que formar la tercer imagen segmentada en función de ésta. Para realizar esto hay que seleccionar un umbral en la imagen de varianza para así poder determinar qué píxeles se toma de la imagen segmentada por Bayes y cual por MRF.

Una varianza pequeña indica que hay un mayor grado de homogeneidad en la imagen segmentada, así que al seleccionar el valor del umbral todos los valores de los píxeles que estén debajo de éste tomaran los píxeles de la imagen segmentada por MRF y los que están arriba tomarán los de la imagen segmentada por Bayes.

Un método para poder determinar dicho umbral que se puede utilizar es el criterio de correlación, el cual consiste en tomar un valor máximo en la función de correlación de la imagen original con su respectiva binarizada con un umbral de 20 a 220. La función de correlación $\rho_{xy}(T)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\rho_{xy}(T) = \frac{E_{xy}(T) - E_x E_y(T)}{[V_x V_y(T)]^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots 20 \leq T \leq 220 \quad \dots \quad (5.5.1)$$

donde

$$\mu_0(T) = \frac{\sum_{g=0}^T g * P_g}{\sum_{g=0}^T P_g} \quad \dots \quad (5.5.2)$$

$$\mu_1(T) = \frac{\sum_{g=T+1}^n g * P_g}{\sum_{g=T+1}^n P_g} \quad \dots \quad (5.5.3)$$

donde $g = 0, 1, 2, \dots, n$ son los niveles de gris de la imagen original y P_g su probabilidad de aparición.

$$E_y(T) = \sum_{g=0}^T \mu_0(T) * P_g + \sum_{g=T+1}^n \mu_1(T) * P_g \quad \dots \quad (5.5.4)$$

$$E_x = \sum_{g=0}^n g * P_g \quad \dots \quad (5.5.5)$$

para los momentos de segundo orden:

$$E_{yy}(T) = \sum_{g=0}^T \mu_0^2(T) * P_g + \sum_{g=T+1}^n \mu_1^2(T) * P_g \quad \dots \quad (5.5.6)$$

$$E_{xx} = \sum_{g=0}^n g^2 * P_g \quad \dots \quad (5.5.7)$$

$$E_{xy}(T) = \sum_{g=0}^T g * \mu_0(T) * P_g + \sum_{g=T+1}^n g * \mu_1(T) * P_g \quad \dots \quad (5.5.8)$$

y las varianzas:

$$V_x = E_{xx} - [E_x]^2 \dots \quad (5.5.9)$$

$$V_y(T) = E_{yy}(T) - [E_y(T)]^2 \dots \quad (5.5.10)$$

De forma gráfica el método quedaría de la siguiente manera:

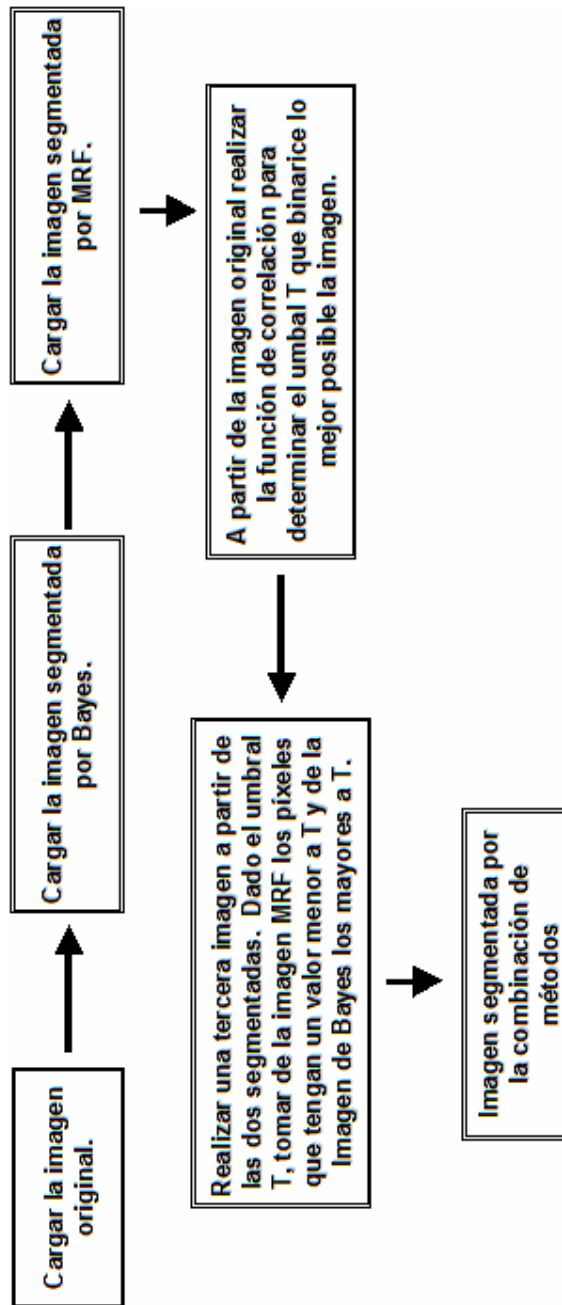
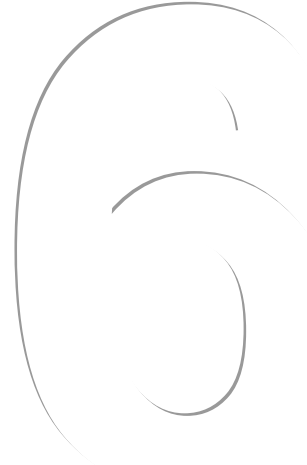


Tabla 5.4 Pasos de la segmentación por el método combinado.



Resultados

6.1. Introducción.

En este capítulo se mostrarán algunas imágenes segmentadas por los distintos métodos revisados en los capítulos anteriores. Se hará un análisis por cada segmentación y una comparación por cada una de ellas.

6.2. Imagen 1: Aeropuerto

Inicialmente se muestra la segmentación en cinco clases de una imagen del aeropuerto de la Ciudad de México. La imagen mostrada a continuación es la original con las cinco regiones marcadas de donde se escogieron las ventanas de entrenamiento:



Imagen 6.1 Imagen original del Aeropuerto.

Las medias de los niveles de gris de las cinco regiones escogidas son las siguientes:

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
59	100	127	181	237

Tabla 6.1 Medias de las cinco clases.

6.2.1 Segmentación por Bayes.

Como se explicó en el capítulo anterior, antes de obtener la imagen segmentada se debe realizar dos pre-segmentaciones para poder calcular las probabilidades a priori de la aproximación por Bayes. La primer imagen obtenida es la siguiente:



Imagen 6.2 Imagen de la primer pre-segmentación del Aeropuerto.

De esta primer pre-segmentación se obtuvieron los siguientes datos:

$P(w_1)$	$P(w_2)$	$P(w_3)$	$P(w_4)$	$P(w_5)$	Total
128708 pix	63551 pix	29349 pix	30975 pix	9561 pix	262144 pix
0.4910	0.2424	0.1120	0.1182	0.0365	0.999

Tabla 6.2 Probabilidades a priori calculadas en la primer imagen pre-segmentada.

Como se explicó en el capítulo anterior, se utilizan esas probabilidades obtenidas para poder hacer la segunda pre-segmentación. La imagen obtenida es la siguiente:



Imagen 6.3 Imagen de la segunda pre-segmentación del Aeropuerto.

De esta segunda pre-segmentación se obtuvieron los siguientes datos:

$P(w_1)$	$P(w_2)$	$P(w_3)$	$P(w_4)$	$P(w_5)$	Total
141143 pix	52855 pix	27610 pix	34182 pix	6354 pix	262144 pix
0.5384	0.2016	0.1053	0.1304	0.0242	0.999

Tabla 6.3 Probabilidades a priori calculadas en la segunda imagen pre-segmentada.

Y finalmente con esos datos obtenidos se realizó la segmentación final. La imagen obtenida es la siguiente:



Imagen 6.4 Imagen segmentada final del Aeropuerto.

En la siguiente tabla se muestra los resultados obtenidos en las pre-segmentaciones y los obtenidos en la segmentación final:

Paso	$P(w_1)$	$P(w_2)$	$P(w_3)$	$P(w_4)$	$P(w_5)$
Inicial	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Primera	0.4910	0.2424	0.1120	0.1182	0.0365
Segunda	0.5384	0.2016	0.1053	0.1304	0.0242
Final	0.5498	0.1903	0.1007	0.1379	0.0214

Tabla 6.4 Probabilidades a priori calculadas después de cada una de las segmentaciones.

Como puede verse en la tabla anterior, las probabilidades a priori tienen un cambio muy grande de las propuestas iniciales a las obtenidas después de la primer pre-segmentación, posteriormente los cambios ya no son tan críticos pero si suficientes para provocar un pequeño cambio en las imágenes segmentadas.

A continuación se muestra una comparación de una región de la imagen en cada una de las segmentaciones así como su original:

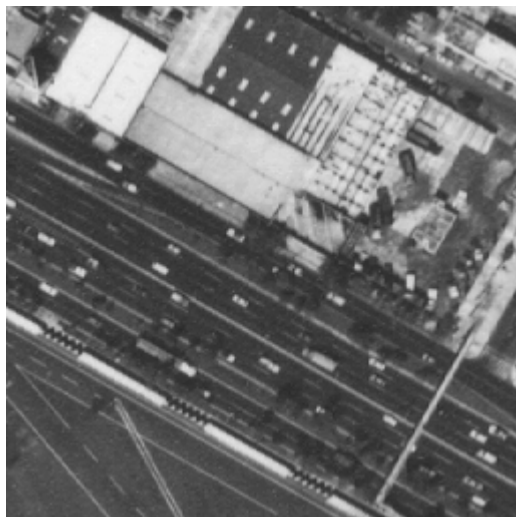


Figura 6.5 Imagen original.



Figura 6.6 Primer pre-segmentación.



Figura 6.7 Segunda pre-segmentación.



Figura 6.8 Segmentación final.

Como puede verse, la imagen se va modificando en cada una de las etapas ya que la probabilidad a priori se va actualizando en cada una de ellas.

6.2.2 Segmentación por Mahalanobis.

Para esta segmentación se requirió hacer el cálculo de varianza además de las medias de las cinco ventanas de entrenamiento. Las varianzas obtenidas son las siguientes:

σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2
2.5281	2.1333	73.4023	52.3867	2.2454

Tabla 6.5 Varianzas de las cinco clases.

La imagen obtenida por la segmentación de Mahalanobis es la siguiente:



Imagen 6.9 Imagen segmentada por Mahalanobis del Aeropuerto.

6.2.3 Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).

Para esta segmentación se hicieron 150 iteraciones para llegar a la segmentación final. La imagen de la iteración 150 es la siguiente:



Imagen 6.10 Imagen segmentada por MRF del Aeropuerto.

A continuación se muestra una serie de imágenes de una región definida para observar los cambios en las distintas iteraciones:

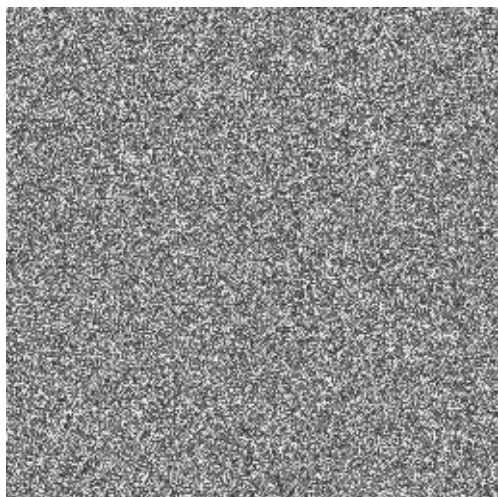


Figura 6.11 Iteración 0.

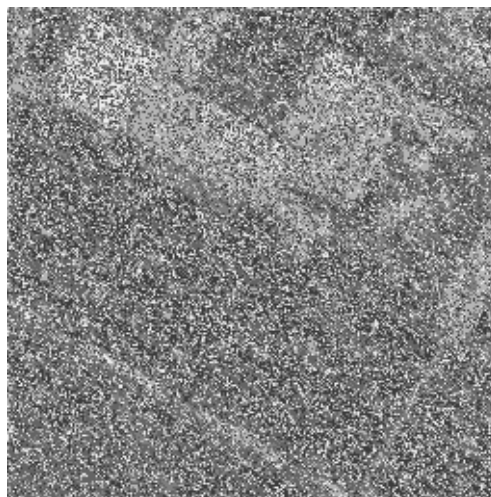


Figura 6.12 Iteración 20.



Figura 6.13 Iteración 40.

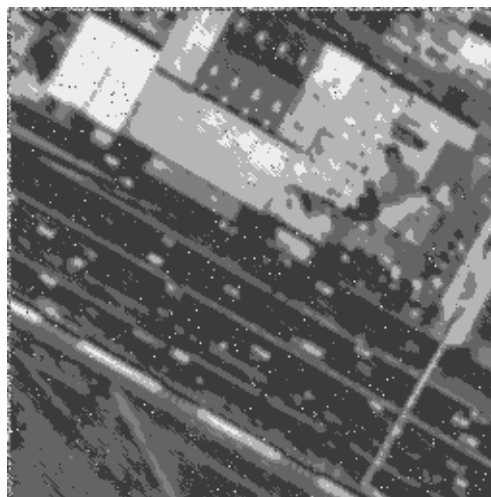


Figura 6.14 Iteración 60.

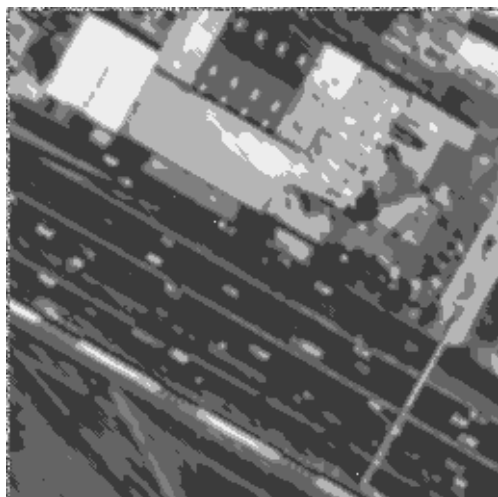


Figura 6.15 Iteración 100.

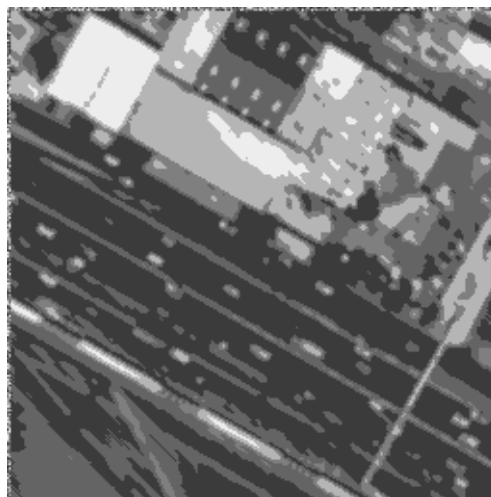


Figura 6.16 Iteración 150.

6.2.4 Segmentación combinada de Bayes y MRF.

En esta segmentación lo que se hizo fue una análisis de la imagen original antes de realizar dicha segmentación.

Se analizó la varianza de cada píxel de la imagen con sus 24 píxeles vecinos y posteriormente con los números obtenidos se realizó una imagen de varianzas, esto es, se tomó el valor máximo y mínimo de las varianzas y con ellos de manera proporcional con los niveles de gris de 0 a 255 se realizó la imagen de varianzas. La imagen obtenida fue la siguiente:



Imagen 6.17 Imagen de varianzas de los píxeles del Aeropuerto.

Lo que representa esta imagen es la homogeneidad de las regiones de la imagen, es decir, entre más oscura se vea una región, más homogénea es ésta, mientras que entre más blanca, la variabilidad entre los píxeles es mayor.

Posteriormente a la obtención de la imagen de varianzas se realizó una binarización de la imagen original con la finalidad de obtener el mejor umbral para así poder realizar la imagen segmentada por medio de la combinación de los métodos de Bayes y MRF. Esto es de la siguiente manera: La binarización se realizó por medio del criterio de correlación como ya fue explicado en el capítulo anterior; el umbral obtenido fue de 84. Posteriormente al obtener el umbral de nivel de gris se empieza a formar una tercer imagen segmentada con las dos segmentadas con los dos métodos a combinar, esto es, se toma la imagen de varianzas y se analiza píxel por píxel, entonces cuando un píxel tiene una varianza menor o igual al umbral entonces se toma el nivel de gris de la imagen segmentada por el método de Bayes y si este es mayor, entonces lo toma de la segmentada por MRF. De esa manera se obtendrá la imagen segmentada por la combinación. La imagen binarizada obtenida es la siguiente:



Imagen 6.18 Imagen binarizada del Aeropuerto.

Y la imagen segmentada por medio de la combinación es la siguiente:



Imagen 6.19 Imagen segmentada por la combinación de Bayes y MRF del Aeropuerto.

A continuación se muestra una serie de imágenes de una región definida para observar algunas diferencias de las distintas segmentaciones:

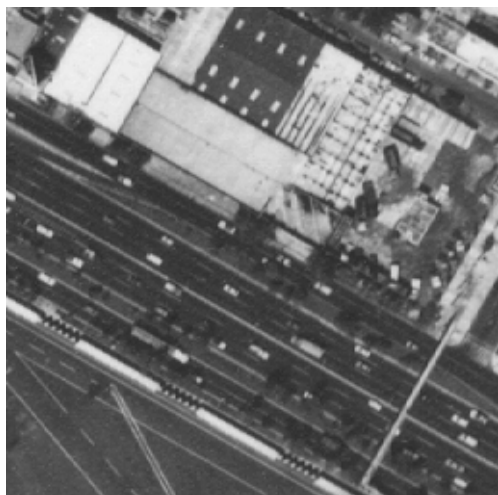


Figura 6.20 Imagen original.

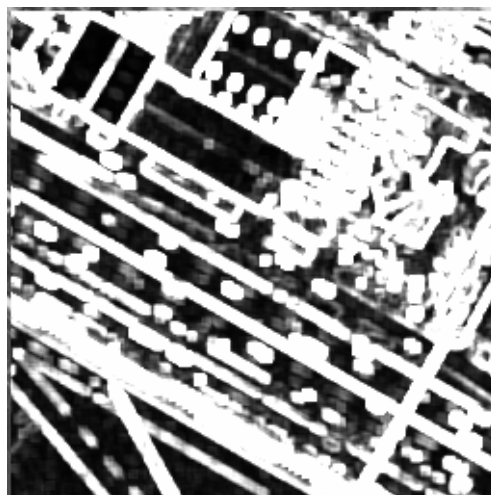


Figura 6.21 Imagen de varianzas.



Figura 6.22 Segmentación por Bayes.

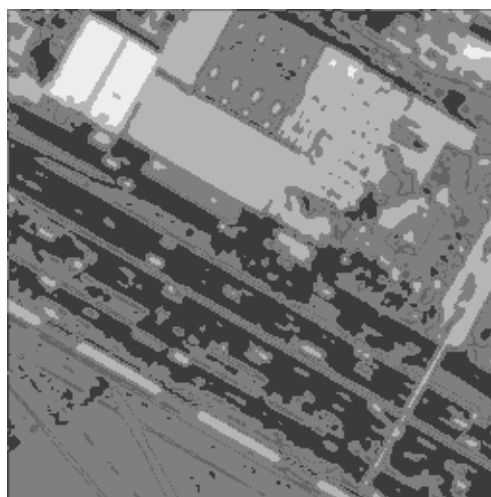


Figura 6.23 Segmentación por Mahalanobis.

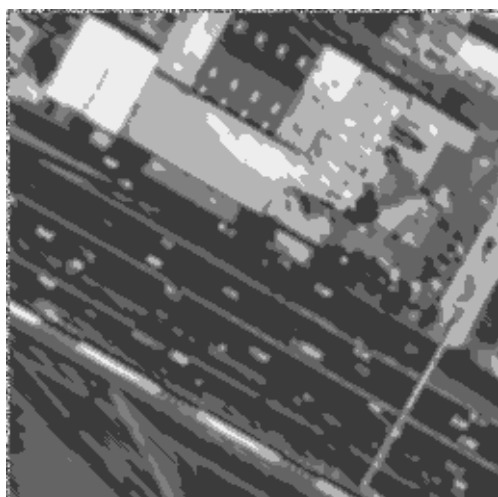


Figura 6.24 Segmentación por MRF.



Figura 6.25 Segmentación combinada.

6.3. Imagen 2: Estadio Universitario

La siguiente imagen de ejemplo es la del estadio olímpico universitario. Al igual que la imagen anterior, ésta se segmentó en cinco clases, las cuales se muestran en la misma imagen. La imagen original es la siguiente:

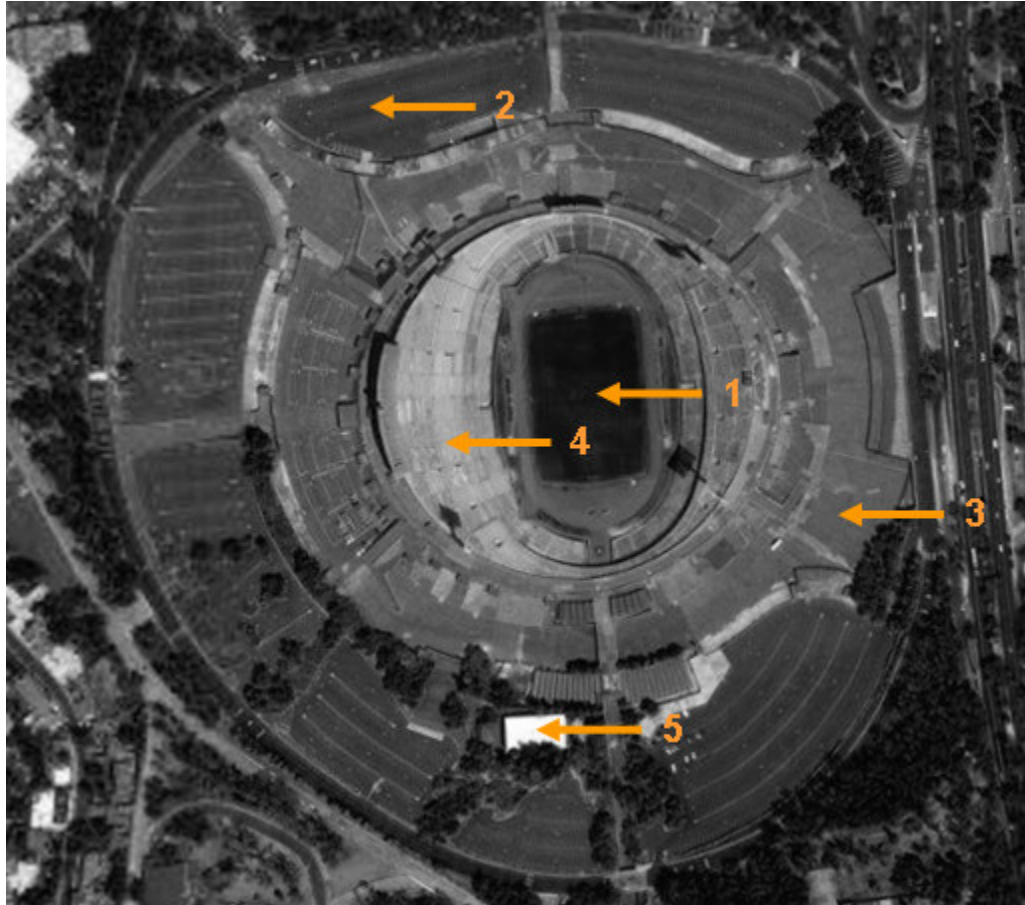


Figura 6.26 Imagen original del Estadio Olímpico Universitario.

Las medias de los niveles de gris de las cinco regiones escogidas son las siguientes:

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
17	56	90	170	250

Tabla 6.6 Medias de las cinco clases.

6.3.1 Segmentación por Bayes.

Los resultados obtenidos en cada una de las segmentaciones de Bayes de las probabilidades a priori son los siguientes:

Paso	$P(w_1)$	$P(w_2)$	$P(w_3)$	$P(w_4)$	$P(w_5)$
Inicial	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Primera	0.1916	0.3663	0.3709	0.0673	0.0039
Segunda	0.1679	0.3900	0.3952	0.0439	0.0030
Final	0.1603	0.3976	0.3979	0.0412	0.0030

Tabla 6.7 Probabilidades a priori calculadas después de cada una de las segmentaciones.

Como puede verse los resultados arrojados de la segunda y tercer segmentación son casi iguales; en esta situación pudo ya no volver a segmentarse la imagen dado que la variación es mínima.

A continuación se muestra la imagen segmentada:

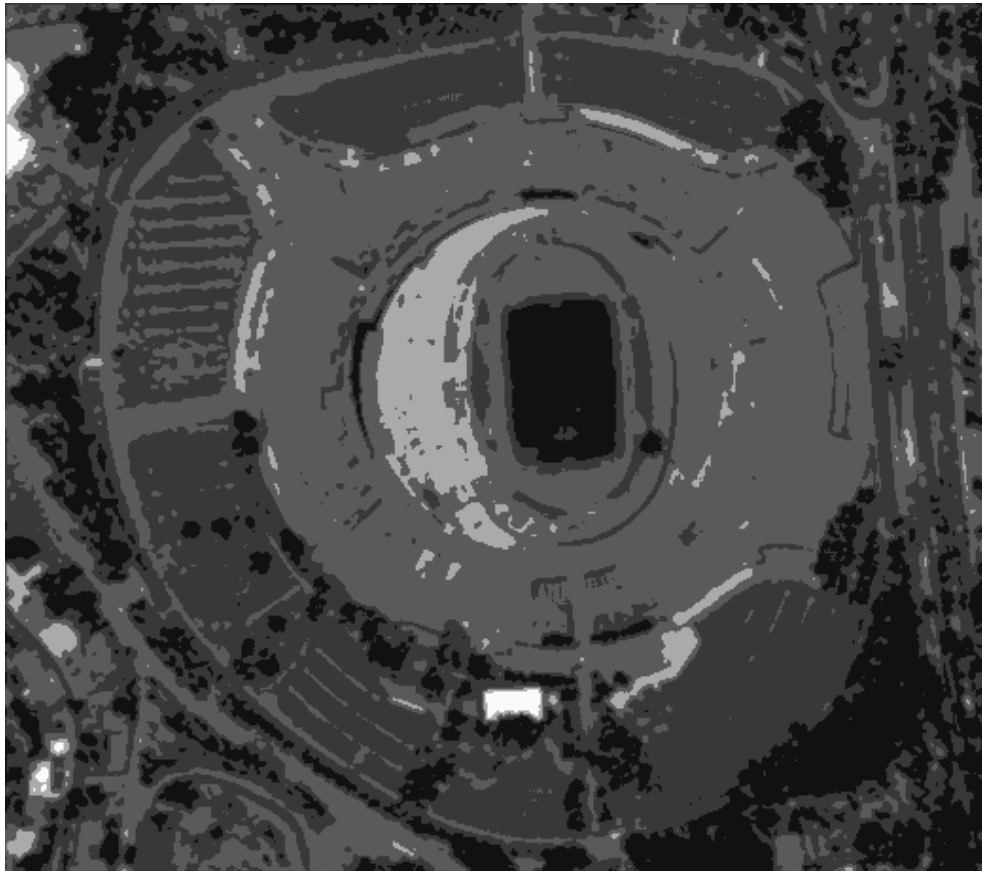


Figura 6.27 Imagen segmentada por Bayes.

6.3.2 Segmentación por Mahalanobis.

Para esta segmentación se requirió, como en el caso anterior, hacer el cálculo de las medias además de las varianzas de las cinco ventanas de entrenamiento. Las varianzas obtenidas son las siguientes:

σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2
4.2551	24.8791	3.7838	11.2049	5.6683

Tabla 6.8 Varianzas de las cinco clases.

La imagen obtenida por esta segmentación es la siguiente:

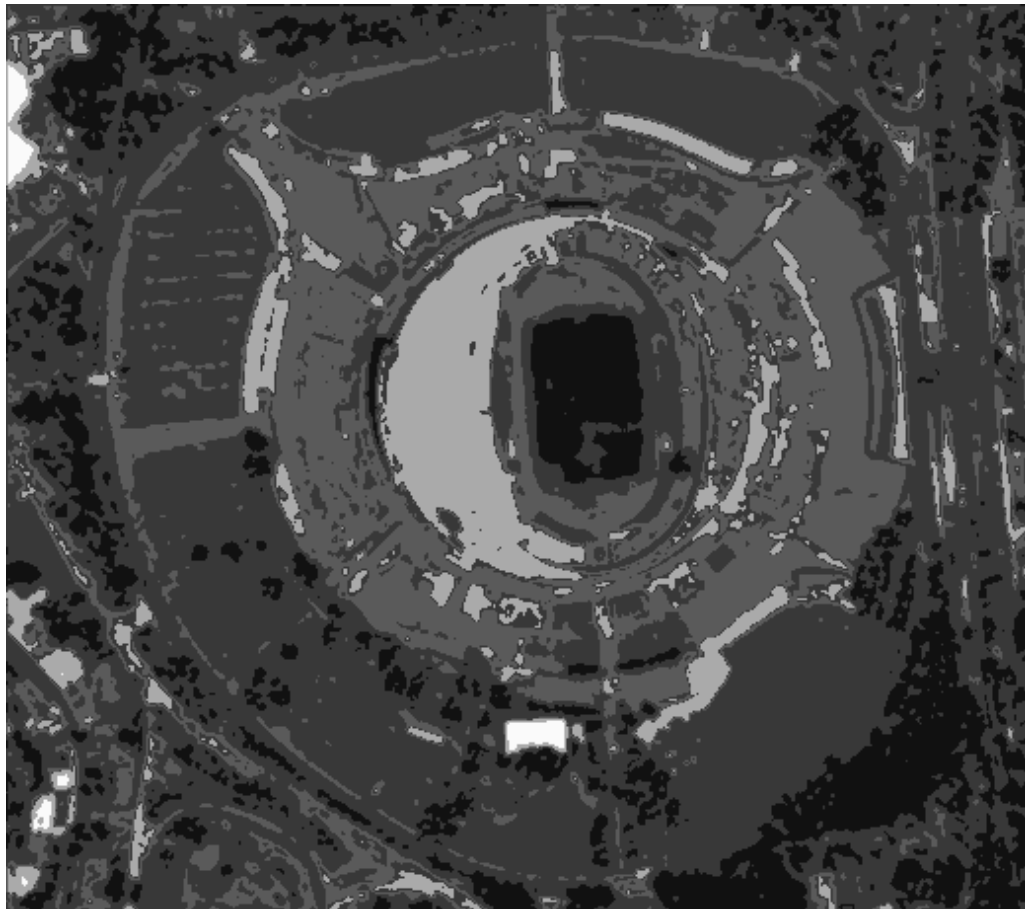


Figura 6.28 Imagen segmentada por Mahalanobis.

6.3.3 Segmentación por Campos Aleatorios de Markov (MRF).

La imagen obtenida por este método es la siguiente:

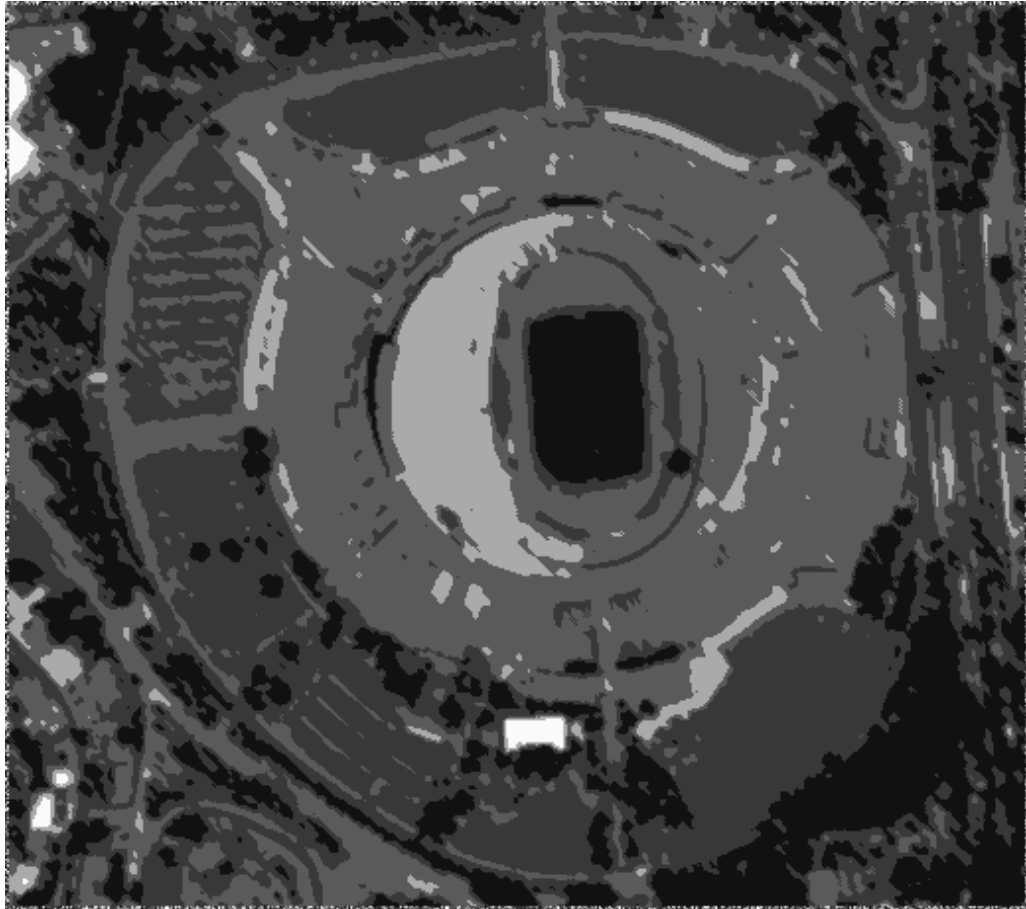


Figura 6.29 Imagen segmentada por MRF.

6.3.4 Segmentación combinada de Bayes y MRF.

Igual que el caso anterior, se realizó una imagen de varianzas y la binarización de la imagen original del estadio olímpico; posteriormente se realizó la segmentación combinada en función de las dos imágenes obtenidas de las segmentaciones de Bayes y de MRF. La imagen de varianzas obtenida es la siguiente:

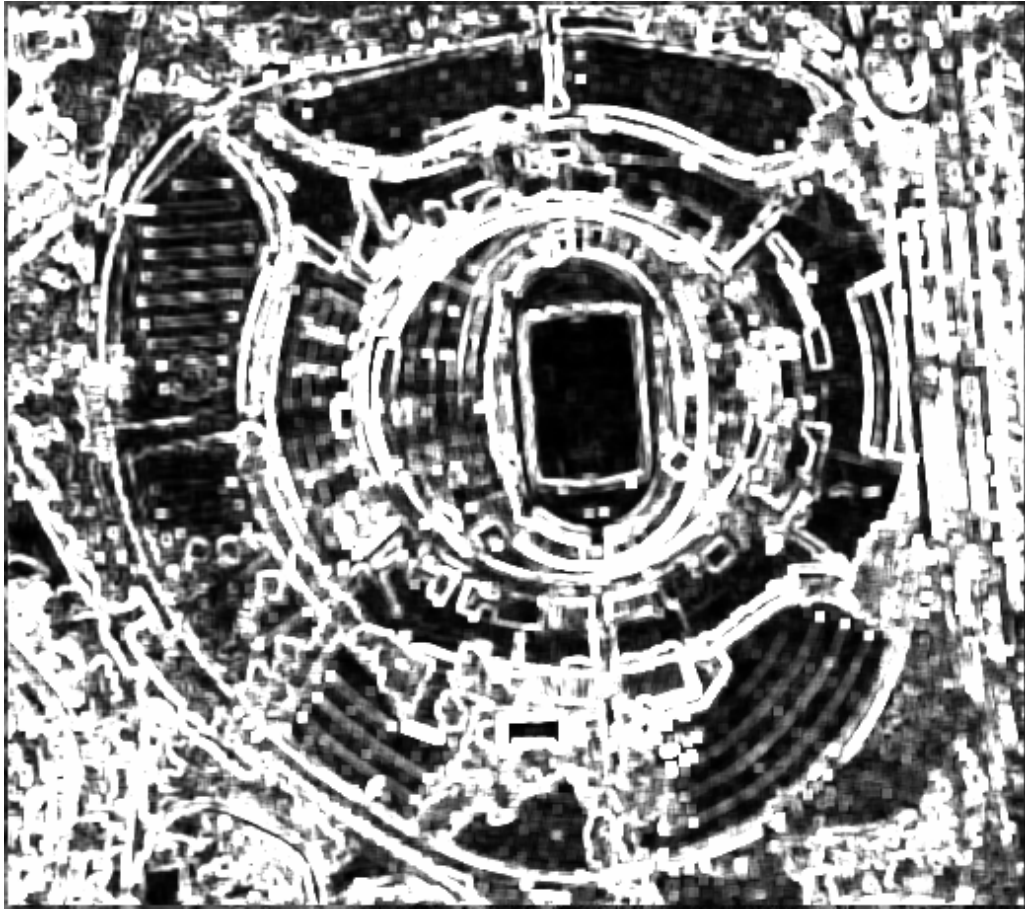


Figura 6.30 Imagen de varianzas del estadio olímpico.

En este caso el umbral obtenido con la binarización de la imagen fue de 102. En base a ese número se realizó la segmentación combinada como en el caso de la imagen anterior y la imagen resultante es la siguiente:

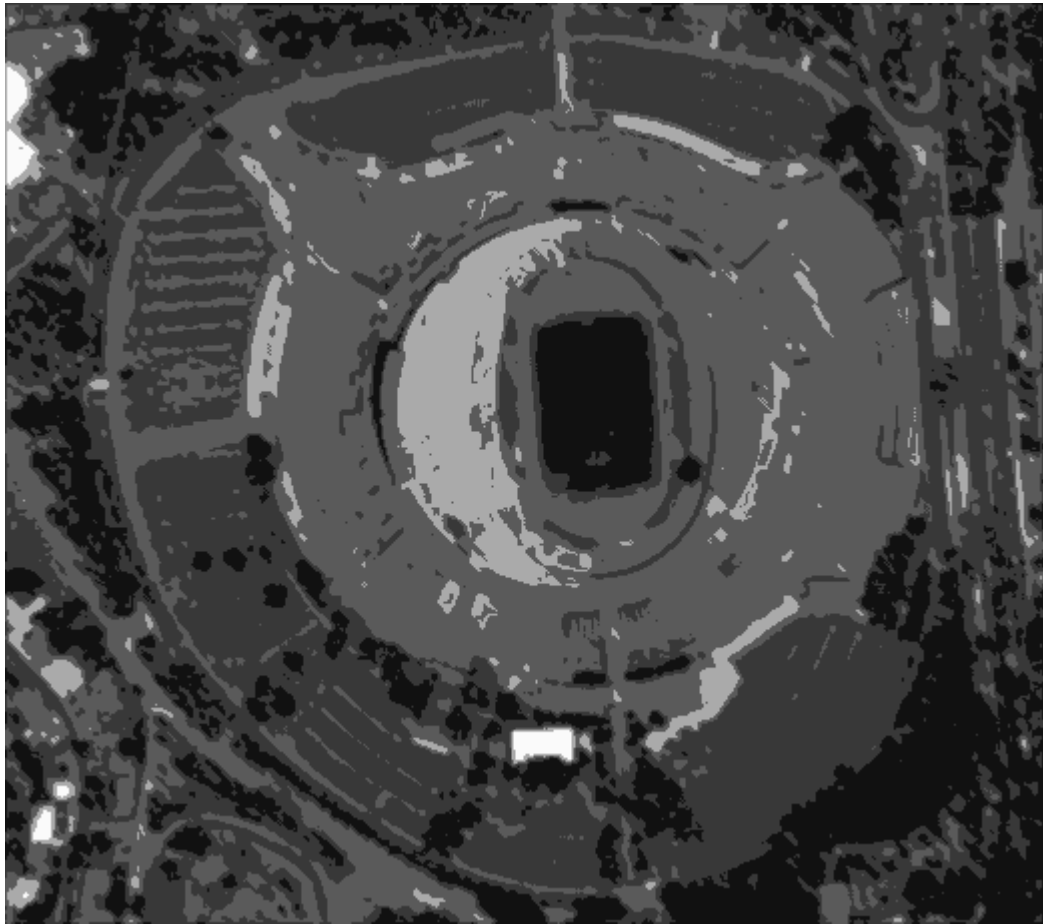


Figura 6.31 Imagen segmentada por la combinación de Bayes y MRF del estadio olímpico.

A continuación se muestra una comparación de la diferentes segmentaciones de la imagen del Estadio Olímpico Universitario:



Figura 6.32 Imagen original.

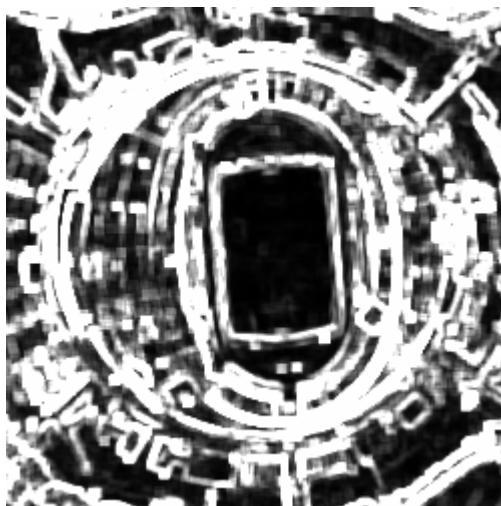


Figura 6.32 Imagen de varianzas.

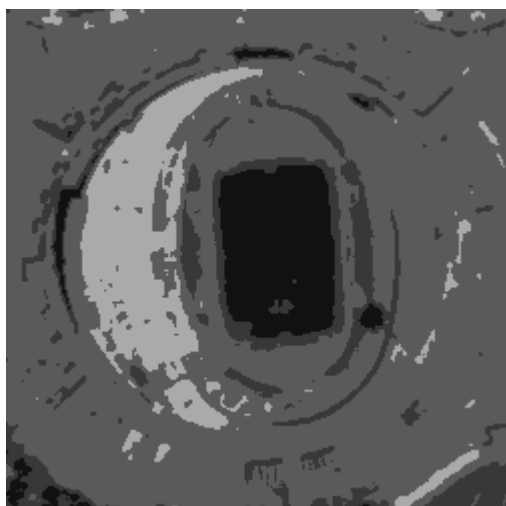


Figura 6.33 Segmentación por Bayes.

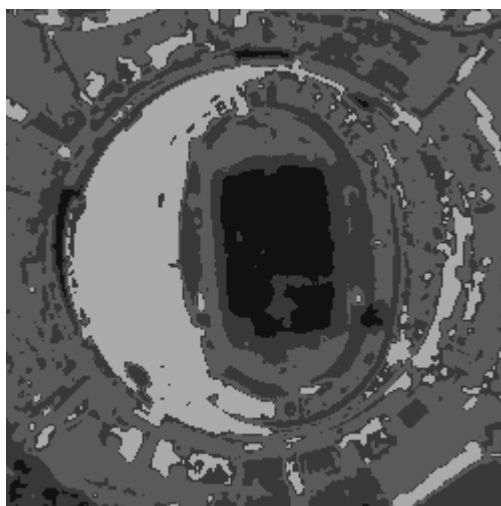


Figura 6.34 Segmentación por Mahalanobis.

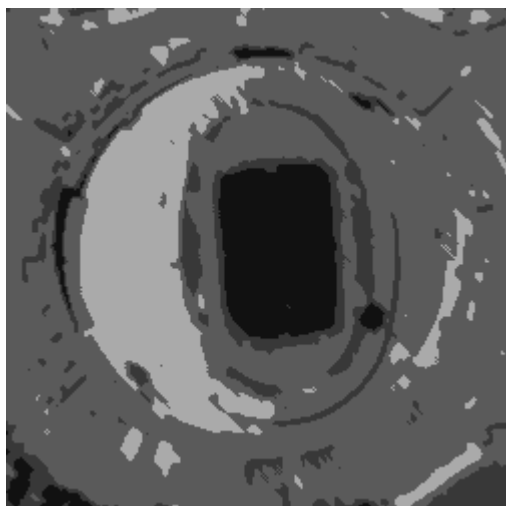


Figura 6.35 Segmentación por MRF.

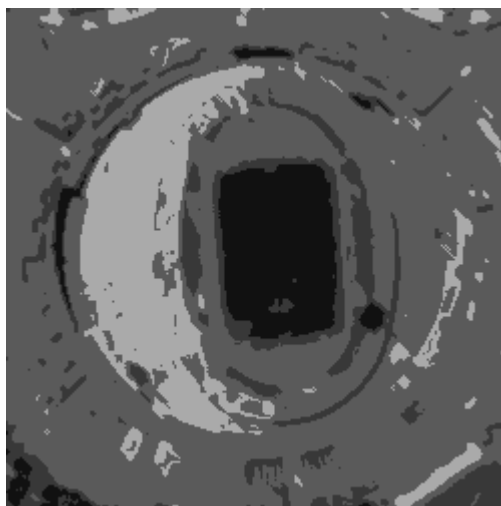


Figura 6.36 Segmentación combinada.

6.4. Imagen 3: Región Este del Mar de Groenlandia

La siguiente es una imagen de la región este del mar de Groenlandia tomada en febrero del 2002. En este caso se segmentó en dos niveles de gris, en 1 y 256, dicho de otra forma en blanco y negro. Las imágenes resultantes son las siguientes:

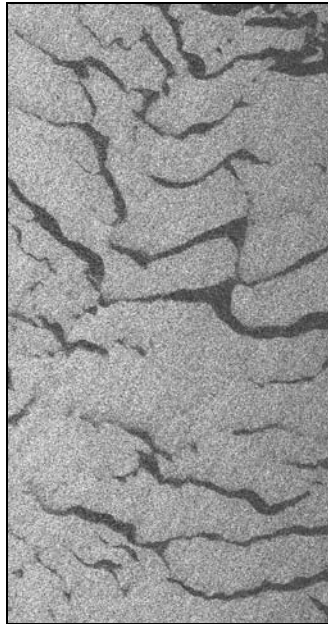


Figura 6.37 Imagen original.

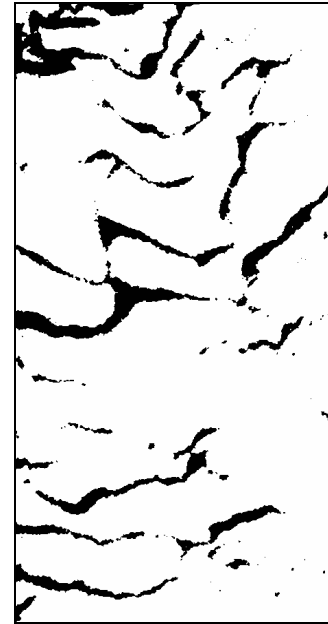


Figura 6.38 Imagen segmentada por Bayes.

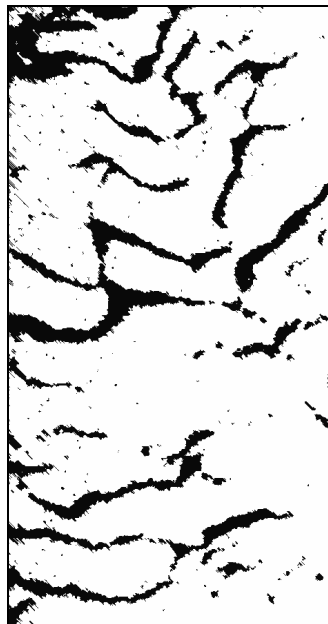


Figura 6.39 Imagen segmentada por MRF.

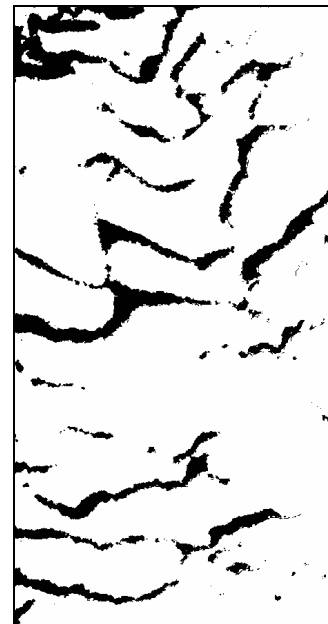


Figura 6.39 Imagen segmentada por combinación.

6.5. Imagen 4: Tabla de Ajedrez

Esta es una imagen sintética a la cual se le aplicó un ruido gaussiano. La finalidad es degradar a dicha imagen y con los métodos de segmentación analizados poder recuperarla.

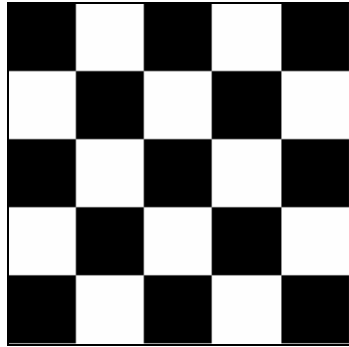


Figura 6.40 Imagen original.

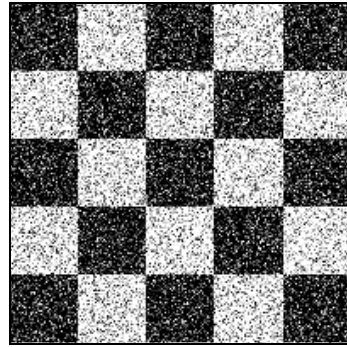


Figura 6.41 Imagen con ruido gaussiano de media 0 y varianza 0.2.

Al segmentarla por los diversos métodos analizados los resultados son los siguientes:

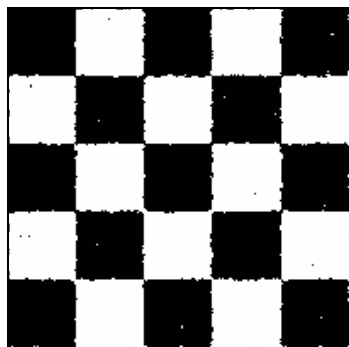


Figura 6.42 Imagen segmentada por Bayes.

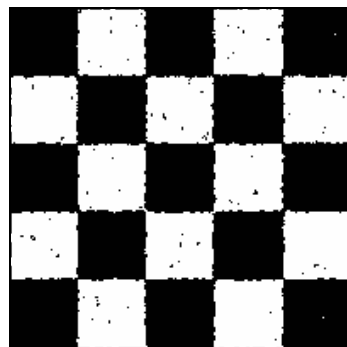


Figura 6.43 Imagen segmentada por Mahalanobis.

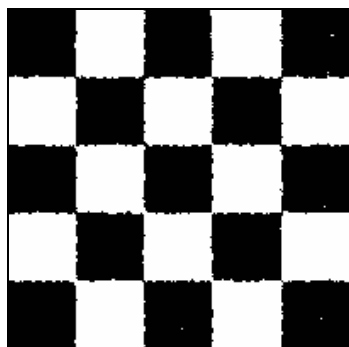


Figura 6.44 Imagen segmentada por MRF.

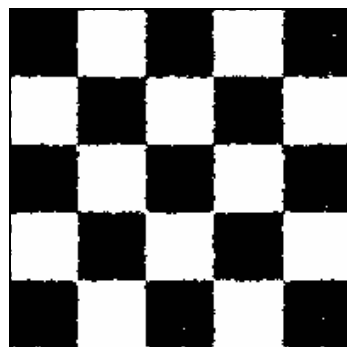


Figura 6.45 Imagen segmentada por combinación.

A estos resultados se les puede aplicar una correlación con la imagen original con la finalidad de observar numéricamente qué resultado es el más óptimo para la recuperación de la misma. Los resultados son los siguientes:

Ruido	Bayes	Mahalanobis	MRF	Combinada
0.7887	0.9667	0.9431	0.9672	0.9684

Tabla 6.9 Valores de correlación de los resultados con la imagen original .

6.6. Imagen 5: Figuras Geométricas

Esta es otra imagen sintética que de igual forma se le aplicó un ruido gaussiano. La diferencia de ésta con la anterior es que en esta nueva se utilizan 3 niveles de gris.



Figura 6.46 Imagen original.

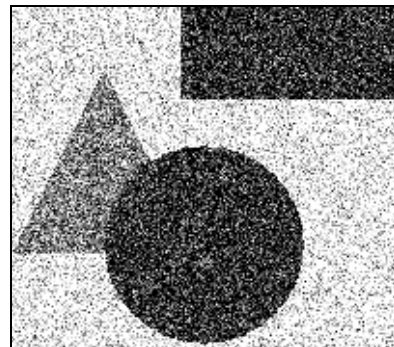


Figura 6.47 Imagen con ruido gaussiano de media 0 y varianza 0.1.

Al segmentarla por los diversos métodos analizados los resultados son los siguientes:



Figura 6.48 Imagen segmentada por Bayes.

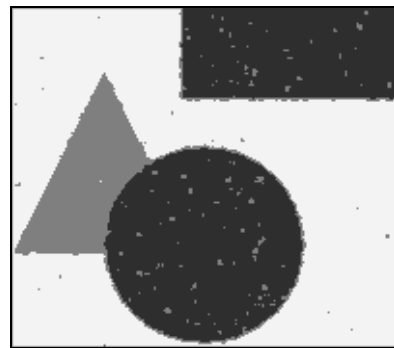


Figura 6.49 Imagen segmentada por Mahalanobis.



Figura 6.50 Imagen segmentada por MRF.

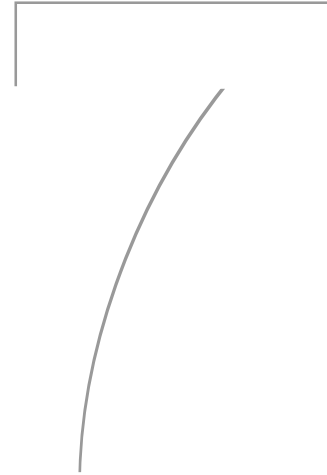


Figura 6.51 Imagen segmentada por combinación.

De la misma forma a estos resultados se les puede aplicar una correlación con la imagen original con la finalidad de observar numéricamente qué resultado es el más óptimo para la recuperación de la misma. Los resultados son los siguientes:

Ruido	Bayes	Mahalanobis	MRF	Combinada
0.8252	0.9820	0.9713	0.9814	0.9832

Tabla 6.10 Valores de correlación de los resultados con la imagen original.



Conclusiones

7.1 Conclusiones

A lo largo de este trabajo de tesis se trataron diversos temas los cuales sirvieron para entender lo que es la segmentación de imágenes. Inicialmente se dio una definición de lo que es la segmentación; posteriormente se trato un capítulo con conceptos de probabilidad con la finalidad de entender lo que son los procesos estocásticos; esto fue necesario ya que el método de máximo a posteriori o de Bayes utiliza estas herramientas probabilísticas.

El capítulo tres y cuatro se enfocó a tratar la teoría de los campos aleatorios de Markov y la optimización, ya que se necesito entender los conceptos tratados en estos temas para poder desarrollar el método de segmentación MRF.

En el capítulo cinco se realizaron esquemas para entender los procedimientos de los distintos métodos de segmentación analizados, así como un pseudocódigo propuesto de cada uno de ellos.

El capítulo seis se analizó la aplicación de los distintos métodos en algunas imágenes propuestas. De acuerdo a lo establecido en los objetivos se puede observar la eficiencia de cada uno de los métodos utilizados; por ejemplo, al analizar la imagen del estadio olímpico se puede observar claramente las diferencias en los distintos métodos de segmentación; si se observa la segmentación por Bayes se puede ver que se conservan muchos de los detalles de la imagen, pero la segmentación no es tan clara ya que no agrupa en regiones a los píxeles, sino más bien deja a muchos píxeles muy dispersos en toda la imagen; esto es ya que este método es enfocado a píxel y lo que hace como tal es reasignar el nivel de gris en función de su pertenencia de clase, la cual depende finalmente de su mismo nivel de gris. Por otra parte el método MRF si agrupa a los píxeles en un mayor número de regiones más homogéneas, ya que como se mencionó este método se enfoca a analizar cada píxel de la imagen y reasigna el nivel de gris a alguna clase en función de los niveles de gris de los píxeles vecinos; la consecuencia de hacer este tipo de reasignación de nivel de gris es que se pierden varios detalles de la imagen. Al aplicar el método propuesto se puede observar que es posible agrupar a los píxeles en regiones homogéneas y al mismo tiempo conservar varios detalles de la imagen.

Al tomar el ejemplo de la imagen de la tabla de ajedrez se puede notar también la eficiencia del método propuesto; este caso consistió en tomar una imagen original y aplicarle ruido, posteriormente la finalidad de usar la segmentación fue recuperar al máximo posible la imagen original a partir de la imagen ruidosa. Si se observan visualmente los resultados obtenidos de los distintos métodos no es tan clara la diferencia, pero en este caso como es una recuperación de una imagen se pudo realizar una correlación entre las imágenes recuperadas con los métodos de segmentación y la imagen original, de esta forma se pudo ver que el método propuesto alcanzó un mayor coeficiente de correlación que los otros métodos.

Finalmente puedo decir que la eficiencia de un método depende mucho de la formalidad matemática que este tenga, por ejemplo, al analizar los resultados obtenidos se puede ver la segmentación por Mahalanobis es muy deficiente, pero cabe destacar que este método es demasiado sencillo al utilizar solo herramientas matemáticas como la media y la varianza. Por otra parte al analizar el método MRF se puede ver que la eficiencia aumenta considerablemente ya que se utilizan medias, varianzas, funciones exponenciales, probabilidad condicional y recursividad al implementara este método. Al utilizar el método propuesto se puede ver la mejoría en los resultados, pero la complejidad aumenta al introducir la binarización la cual utiliza la función de correlación. Todo esto influye de manera directa al implementar los métodos ya que al aumentar la complejidad matemática, aumenta de manera directa el tiempo de procesamiento de cómputo.

Bibliografía

- Revista electrónica de visión por computador (REVC), “Aplicación de los modelos de los campos aleatorios de Markov en visión artificial”; M. Pujol, R. Rizo, P. Arques, P. Compañ, F. Escolano, R. Molina; número 4, octubre 2000.
- “Propuesta de características robustas para segmentación de imágenes”, P. Arques, P. Compañ, F. Escolano, R. Molina, M. Pujol, R. Rizo; Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Alicante.
- “Segmentación de imágenes. Incorporación de las características de color a la función de energía” ; P. Arques, P. Compañ, F. Escolano, R. Molina, M. Pujol, R. Rizo; Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Alicante.
- "Simulated Annealing and Boltzmann Machines"; Aarts, E. y Korst, J., Wiley, 1989.
- "Optimization by Simulated Annealing"; Kirkpatrick, S., Gelatt C.D. y Vecchi, M.P.; Science 220, 1983.
- “Probabilidad y Estadística aplicadas a la ingeniería”; Montgomery, Douglas, Mc Graw Hill.