



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**TEORÍA DE GRUPOS CON UNA APLICACIÓN A PARTICULAS
ELEMENTALES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

SÁNCHEZ LIMA, ISRAEL

ASESOR: HESS BECHSTEDT, PETER OTTO

MÉXICO, D. F.

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Teoría de grupos con una aplicación a
partículas elementales

Israel Sánchez Lima

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM 2006

Dedicado a:

A mis padres y mi hermano.

Datos de Jurado	7. Datos del trabajo escrito
1. Datos del alumno. Sánchez Lima Israel Teléfono 21569853 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas	Teoría de grupos con una aplicación a partículas elementales 63 páginas 2006
2. Datos del tutor. Dr. Peter Otto Hess Bechstedt	
3. Datos del sinodal 1. Dr. Juan Morales Rodríguez.	
4. Datos del sinodal 2. Dr. Hector Octavio Castaños Garza.	
5. Datos del sinodal 3. Dr. Marcos Moshinsky Borodiansky	
6. Datos del sinodal 4. Dr. Francisco Marmolejo Rivas.	

Índice general

Introducción	1
Motivación	1
Objetivo y metas	4
1. Teoría de grupos.	1
1.1. Grupos	1
1.1.1. Grupos	1
1.1.2. Ejemplos	2
1.2. Grupo Simétrico	2
1.3. Representaciones de Grupos.	5
1.4. Diagramas de Young	7
1.5. Grupos Continuos.	14
1.5.1. Transformaciones Infinitesimales.	16
1.5.2. Representación equivalente bosónica	19
1.6. Series y coeficientes de Clebsch-Gordan.	20
1.7. El grupo $SU(2)$	21
1.7.1. Definiciones.	22
1.7.2. Interpretación física del álgebra de $SU(2)$	24
1.7.3. Espectro de los eigenvalores.	25
1.8. Teorema de Wigner-Eckart.	31
1.8.1. Coeficientes de Wigner para $SU(3)$	31
1.9. Resumen.	32
2. El caso $SU(3)$.	33
2.1. Reducción de $SU(3)$	33
2.1.1. Construcción de un estado con $m \neq l$	35
2.1.2. Coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$	37
3. Futuro.	45
3.1. Estados de $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$	46
3.2. Polinomios.	46

4. Conclusiones.	49
Bibliografía	51

Introducción

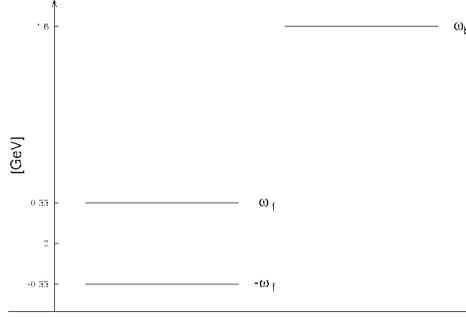
Planteamiento, objetivo y justificación

Motivación.

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría de las interacciones fuertes. Sin embargo para bajas energías, la descripción de el espectro hadrónico basado en la QCD resulta difícil debido a la estructura no lineal de la teoría. Una forma de atacar el problema es por medio de modelos esquemáticos. El uso de estos modelos es común en la física donde la estructura de muchos cuerpos puede ser investigada introduciendo grados de libertad y sus acoplamientos. El modelo esquemático de Lipkin [1] es uno de los más famosos en física nuclear. Los requerimientos a cumplir de un modelo esquemático para la QCD son:

- Poder describir estructuras básicas de QCD para bajas y altas energías.
- Debe ser resoluble con exactitud, que significa a lo más diagonalizar numéricamente una matriz.

Un modelo que cumpla estos requerimientos probablemente no exista debido a lo complicado de la estructura no lineal de la QCD. Sin embargo se puede construir un modelo que sea tan cercano como sea posible. En [2] se presenta un modelo que cumple los requerimientos anteriores. El modelo está basado en los modelos de tipo Lipkin que consisten de dos niveles para la descripción de quarks y antiquarks. De manera similar a [1] en [3] el sector de fermiones es descrito por dos niveles, uno a energías $-\omega_f$ y otro a energía $-\omega_f$ (ver figura). Está es la imagen de Dirac para fermiones, donde los antiquarks son observados como agujeros en el nivel inferior. El valor ω_f esta fijado a un tercio de la masa del núcleo ($0,33GeV$). El nivel a $1,6GeV$ es ocupado por pares de gluones con espín cero.



La degeneración de cada nivel de fermión es 2Ω , que se refiere al espín, color, sabor y eventualmente otros grados de libertad. Si consideramos únicamente espín (n_s), sabor (n_f) y color (n_c), tenemos que, $2\Omega = n_s \cdot n_f \cdot n_c$. [1] de donde obtenemos tomando $n_s = 2$, $n_c = 3$ y $n_f = 3$ que $2\Omega = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Los quarks y antiquarks reales son identificados de tal manera que los quarks reales son descritos por fermiones en el nivel superior y los antiquarks reales por agujeros en el nivel inferior.

Para temperatura cero y sin interacciones el nivel de menor energía se llena con fermiones. Los operadores de creación (aniquilación) de estos fermiones son $c_{\alpha(1,0)f\sigma i}^\dagger$ ($c^{\alpha(1,0)f\sigma i}$), utilizando notación covariante y contravariante para los índices. El símbolo $(1,0)f$ se refiere al sabor, donde $(1,0)$ es la notación de sabor para $SU(3)$, f es la notación corta para hipercarga Y , isospin T y tercera componente T_z , σ representa los dos componentes del spin $\pm\frac{1}{2}$, i denota el nivel 1 o 2 y α los restantes grados de libertad que en el caso de ser color tenemos 3 [4].

Los operadores así definidos contienen los principales grados de libertad de QCD. Estos grados de libertad aparecen a todas las energías. Aquí los quarks y antiquarks son los *constituyentes de las bajas energías* entre $0 - 2GeV$ y tienen poco en común (excepto por los números cuánticos mencionados) con los quarks y antiquarks a altas energías.

Los operadores de creación y aniquilación de quark (a^\dagger, a) antiquark (b, b^\dagger) quedan definidos en términos de los operadores c y c^\dagger

$$\begin{aligned} a_{\alpha f \sigma}^\dagger &= c_{\alpha f \sigma 1}^\dagger, & d_{\alpha f \sigma} &= c_{\alpha f \sigma 2}^\dagger, \\ a^{\alpha f \sigma} &= c^{\alpha f \sigma 1}, & d^{\dagger \alpha f \sigma} &= c^{\alpha f \sigma 2}, \end{aligned} \quad (1)$$

La descripción de los pares quark-antiquark del modelo están dados por las ecuaciones de B^\dagger y B [1].

$$\begin{aligned} B_{f_1 \sigma_1}^{\dagger f_2 \sigma_2} &= \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1 \sigma_1 1}^\dagger c^{\alpha f_2 \sigma_2 2} = \sum_{\alpha} a_{\alpha f_1 \sigma_1}^\dagger d^{\dagger \alpha f_2 \sigma_2}, \\ B_{f_1 \sigma_1}^{f_2 \sigma_2} &= \sum_{\alpha} c_{\alpha f_1 \sigma_1 2}^\dagger c^{\alpha f_2 \sigma_2 1} = \sum_{\alpha} d_{\alpha f_1 \sigma_1} a^{\alpha f_2 \sigma_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Estás dos ecuaciones describen la creación y aniquilación de pares quark-antiquark [2]. Esta descripción es complicada para la construcción explícita de estados base y el cálculo de los elementos matriz, el cual entra en conflicto con una idea de un modelo sencillo. Un camino para resolver este problemas es mapear a bosones.

El mapeo a bosones es

$$\overline{B_{f_1\sigma_1}^{\dagger J_2\sigma_2} \rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{\dagger J_2\sigma_2}, \quad B_{f_1\sigma_1}^{J_2\sigma_2} \rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{J_2\sigma_2}} \quad (3)$$

donde los operadores de la derecha satisfacen las relaciones de conmutación normal de bosones.

$$\overline{[b_{f_1\sigma_1}^{J_2\sigma_2}, b_{f_3\sigma_3}^{\dagger J_4\sigma_4}] = \delta_{f_3f_2}\delta_{f_4f_1}\delta_{\sigma_3\sigma_2}\delta_{\sigma_4\sigma_1}} \quad (4)$$

Estos pares se pueden aproximar en primera instancia con bósones $b_{(\lambda,\lambda)FSM}^{\dagger} = b_{\lambda FSM}^{\dagger}$ y $b^{\lambda FSM}$. Donde λ es una notación corta para el sabor (λ, λ) que puede tomar los valores 0 ó 1, S denota el espín siendo 0 para espín entero solamente y 1 si se incluye espín semientero. Esto da cuatro combinaciones posibles de $[\lambda, S]$: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, y $[1, 1]$. El caso con $\lambda = 1$ y $S = 0$ va a jugar un papel importante en esta tesis. Este caso tiene ocho grados de libertad, por lo que se ve involucrado $U(8)$. Una posible cadena de grupos es $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$ el cual juega un papel muy importante en sistemas de muchos gluones y en el modelo esquemático para QCD a bajas energías [2].

El grupo $U(8)$ se ve involucrado en varios problemas, por ejemplo un gluon tiene ocho colores de libertad y por tanto la parte de color puede ser descrito por el grupo $U(8)$. Como el gluon tiene spin (matemáticamente tres grados de libertad), un sistema de gluones es descrito por $U(24) \supset U(8) \otimes U(3)$ [5] y he aquí otro ejemplo donde aparece $U(8)$. El grupo $U(8)$ es reducido al grupo de color $SU(3)$ y el grupo $U(3)$ es reducido al grupo de spin $SO(3)$, con spin enteros solamente. La reducción esta dada en [5, 6]. Sin embargo la construcción de estados es menos conocida. En [7] encontramos el primer intento.

La necesidad de la forma explícita de los estados es el cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan primordiales para determinar las transiciones y propiedades de decaimiento de los hadrones. Así como para la cadena $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$, el cálculo de de estos coeficientes tiene relevancia debido a la necesidad de poder calcular probabilidades de decaimiento. A menudo las propiedades del grupo y su álgebra son usadas para la obtención de los coeficientes, por ejemplo en [8] encontramos el uso para el grupo $SU(2)$ y en [9, 10, 11] para el grupo $SU(3)$. Sin embargo estos métodos solo se practican con grupos de rango pequeño, es por eso la necesidad de hacer un bosquejo de métodos más prácticos.

Objetivo y metas.

El cálculo de las propiedades de decaimiento en el modelo esquemático de QCD para bajas energías [2, 12] puede ser muy importante para decidir la existencia o no existencia del pentaquark en el modelo esquemático [13, 14, 15, 16, 17].

Un primer e importante paso hacia la construcción de estados de muchos gluones o quarks-antiquarks es expresar los estados base para las representaciones irreducibles (irrep) de $U(8)$. Los coeficientes de Clebsch-Gordan (CGC) son entonces obtenidos como integrales sobre un producto de tres polinomios.

Solo se ilustrarán las ideas básicas para obtener CGC para el ejemplo de $SU(3) \supset SO(3)$. Hay varios trabajos publicados para los grupos $SU(3)$ y $SO(3)$ en el que el cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan se hacen de manera elegante [18], pero el método no es aplicable para grupos de rango mayor.

En el caso del modelo motivo de este trabajo, para el grupo $U(8)$ ($SU(8)$) y en general para el grupo $U(n)$ ($SU(n)$) no es necesario conocer todas las representaciones irreducibles, i.e. solo las simétricas $[N]$ o $[h_1 h_2 h_3]$ con tres renglones. Por tanto los métodos directos son más prácticos.

El objetivo es construir los CGC de $U(8)$, en este trabajo consideraremos un problema más sencillo $SU(3) \supset O(3)$, el cual tiene las siguientes características importantes:

- Es no trivial.
- Los resultados son conocidos. Además que fueron descubiertos por métodos más elegantes ya mencionados pero no extendibles.

La meta de este trabajo es mostrar apartir de $SU(3)$ el camino para obtener los CGC de grupos más grandes $SU(n)$.

Un método similar al propuesto en este trabajo se utilizó para el grupo $U(5)$ [19, 20].

Este trabajo consiste de cuatro capítulos en el capítulo 1 se hace una revisión de los conceptos de teoría de grupos necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos, además de ilustrar un ejemplo concreto para $SU(2)$ y se enuncian algunos resultados para $SU(3)$. En el capítulo 2 se desarrolla el método propuesto para atacar el problema $SU(3) \supset O(3)$, se comparan los resultados obtenidos con los ya existentes y se señala la idea básica. En el tercer capítulo se habla sobre los avances en la generalización del método a $U(8)$, finalmente en el último capítulo mencionamos las conclusiones.

Capítulo 1

Teoría de grupos.

Definiciones y nociones básicas.

1.1. Grupos

En este capítulo solamente haré mención de la teoría de grupos básica y de relevancia para este trabajo. Si se requiere de justificación o demostración de los teoremas mencionados dirigirse a [4, 21, 22], además que en cada teorema mencionado se hará referencia a la bibliografía correspondiente.

1.1.1. Grupos

Un grupo es un conjunto no vacío G , con una operación binaria $*$ en G tal que si $x, y, z \in G$ se cumple que

- (a) $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- (b) Existe $e \in G$, tal que $e * x = x * e = x$, se dice que e es el elemento identidad en G .
- (c) Existe $x^{-1} \in G$, tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. A x^{-1} se le conoce como el inverso de x .

Si en el grupo G se tiene que $\forall x, y \in G$

- $x * y = y * x$ se dice que G es un grupo *conmutativo o abeliano*.

Al cardinal de un grupo G lo llamamos el orden del grupo y se le denota $|G|$.

Si a, b son elementos de un grupo G se dice que b es **conjugado** de a si y solo si existe $u \in G$ tal que

$$b = uau^{-1}. \tag{1.1}$$

Sea G un grupo y $R = \{(a, b) \in G \times G \mid b \text{ es conjugado de } a\}$. R es una relación de equivalencia en G y los conjuntos de la partición de G inducida por R se llaman las clases conjugadas de G .

1.1.2. Ejemplos

1. Sea $G = \{1, -1\} \subset \mathbb{Z}$ y $*$ la multiplicación usual en \mathbb{Z} . G es un grupo abeliano con respecto a la operación $*$.

$*$	1	-1	
1	1	-1	.
-1	-1	1	

Vemos que 1 es la identidad y cada elemento es su propio inverso. El orden del grupo es 2.

2. Sea $G = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$ y $*$ la adición módulo 3, es decir, si $a, b \in G$ tal que $a + b = 3q + r$ con $q, r \in \mathbb{Z}$, el resultado de la operación $*$ es $0 \leq r \leq 2$.

$*$	0	1	2	
0	0	1	2	.
1	1	2	0	
2	2	0	1	

Vemos que la operación es asociativa y conmutativa. G con la operación $*$ es un grupo abeliano. El grupo es de orden 3.

1.2. Grupo Simétrico

Sea $J_N = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ el conjunto de los N primeros números enteros positivos. Definimos S_N como

$$S_N = \{f : J_N \rightarrow J_N \mid f \text{ es biyectiva}\} \quad (1.2)$$

El conjunto S_N con la composición de funciones como la operación $*$ es un grupo. A S_N se le conoce como el *grupo simétrico de grado N* . S_N tiene $N!$ elementos.

Si $f \in S_N$, a f la podemos denotar como

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ f_1 & f_2 & \dots & f_N \end{pmatrix},$$

donde $f_i = f(i)$.

Un ejemplo de permutación de grado 8 es

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sean i_1, i_2, \dots, i_r distintos enteros en $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Si $f \in S_N$ es tal que

$$f(i_1) = i_2, f(i_2) = i_3, \dots, f(i_{r-1}) = i_r, f(i_r) = f(i_1),$$

y

$$f(x) = x \quad \forall x \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$$

f es llamado un r -ciclo o un ciclo de *longitud* r , el r -ciclo f se denota como (i_1, i_2, \dots, i_r) . Los 2-ciclos son también llamados **transposiciones**, y éstas solo mueven a dos elementos en J_N .

Dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_N$ son **ajenas** si todo i movido por una de ellas, queda fijo por la otra: $\alpha(i) \neq i$, entonces $\beta(i) = i$, y si $\beta(i) \neq i$, entonces $\alpha(i) = i$. Una familia $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ de permutaciones es **ajena** si cada par de ellas son ajenas.

Toda permutación $\alpha \in S_N$ es un ciclo o un producto de ciclos ajenos.

Del ejemplo anterior descompongamos f en ciclos ajenos, para ello observamos que en el renglón superior tenemos el dominio de f . Sabemos que $f(1) = 2, f(2) = 3$ y $f(3) = 1$ cerrando un ciclo, el cual escribimos como (123) . Ahora comenzamos con cualquier otro número en la línea superior, digamos el 8, notamos que $f(8) = 8$ dando el ciclo (8) . Continuando de la misma manera encontramos los ciclos (45) y (67) . Por consiguiente la permutación f la podemos expresar como

$$f = (123)(45)(67)(8) \quad \text{ó} \quad f = (123)(45)(67).$$

Los ciclos de la descomposición anterior son ajenos.

Si $N \geq 2$, entonces toda $\alpha \in S_N$ es un producto de transposiciones [4, 21].

Cada r -ciclo (i_1, i_2, \dots, i_r) se puede descomponer en transposiciones de la siguiente forma $(i_1 i_2)(i_1 i_3) \dots (i_1 i_{r-1})(i_1 i_r)$.

Decimos que dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_N$ tiene la **misma estructura cíclica** si sus factorizaciones en ciclos ajenos tienen el mismo número de r -ciclos para cada r .

Si $\gamma, \alpha \in S_N$ entonces $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ tiene la misma estructura de ciclo que γ .

Por ejemplo, si $\gamma = (13)(247)(5)(6)$ y $\alpha = (256)(143)(7)$, entonces

$$\alpha\gamma\alpha^{-1} = (\alpha 1 \alpha 3)(\alpha 2 \alpha 4 \alpha 7)(\alpha 5)(\alpha 6) = (41)(537)(6)(2).$$

Una permutación de S_N actúa en un conjunto de N símbolos. Supongamos que expresamos la permutación en ciclos ajenos y sea ν_1 el número de 1-ciclos, ν_2 el número de 2-ciclos, \dots, ν_N el número de N -ciclos entonces

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + N\nu_n = N \tag{1.3}$$

Si una permutación está expresada en ciclos ajenos, se dice que tiene la estructura cíclica $(1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, N^{\nu_N})$, o brevemente, (ν) . Las permutaciones de S_N que tienen la misma estructura (ν) forman una clase conjugada en S_N .

Sea $(X) = x_1, x_2, \dots, x_N$ una lista de enteros no negativos tales que

$$x_1 + 2x_2 + \dots + Nx_n = N \quad (1.4)$$

la lista (X) induce una clase conjugada de elementos en S_N , a saber, la clase formada por todas las permutaciones de S_N que tiene la estructura cíclica $(1^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, N^{x_N})$. El número s de listas (X) es el número de clases conjugadas de S_N .

Si

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_N &= \lambda_1, \\ \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_N &= \lambda_2, \\ &\vdots \\ \nu_N &= \lambda_N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

con

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + N\nu_N = N \quad (1.6)$$

entonces

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = N \quad \text{y} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0, \quad (1.7)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$ es una partición de N que denotaremos como $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, inversamente dada una partición hay una estructura de ciclo correspondiente:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \lambda_1 - \lambda_2, \\ \nu_2 &= \lambda_2 - \lambda_3, \\ &\vdots \\ \nu_n &= \lambda_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cada partición $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ induce una clase conjugada en S_N .

Como otro ejemplo consideremos $\phi \in S_3$ tal que

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ es un 3-ciclo

$$\phi = (123).$$

Es claro que $(123) = (312) = (231)$. Descomponiendo ϕ en transposiciones tenemos

$$\phi = (12)(13) \quad (1.9)$$

Los elementos de S_3 son $e, (123), (132), (12), (13), (23)$. Las particiones (λ) de 3 son $(300), (210)$ y (111) , por comodidad denotaremos las particiones como $(3), (21)$ y (1^3) . Usando (1.8) encontramos la estructura cíclica correspondiente a cada partición, siendo éstas $(1^3), (1^1, 2^1)$ y (3^1) respectivamente.

S_3	(1^3)	(12)	(3)
	e	(13)	(123)
		(12)	(132)
		(23)	

Cada columna en la tabla es una clase conjugada con la correspondiente estructura cíclica en el renglón superior.

1.3. Representaciones de Grupos.

Sea G un grupo y F un campo. Una F -representación $D(G)$ de G es un homomorfismo de G en el grupo de transformaciones lineales no singulares de algún espacio vectorial V sobre el campo F de dimensión finita. La dimensión de V es el grado de $D(G)$. Una F -representación es fiel si es un monomorfismo. Dos F -representaciones $D(G), D'(G)$ son equivalentes si tienen como base un espacio vectorial V y V' respectivamente y existe una transformación lineal no singular S de V a V' tal que

$$D(R) = S^{-1}D'(R)S \quad \forall R \in G.$$

Una representación de G es una F -representación de G para algún campo F .

Si V es un espacio vectorial n -dimensional sobre un campo F entonces el grupo de transformaciones no singulares lineales de V es isomorfo al grupo de matrices no singulares $n \times n$ con coeficientes en F . Una F -representación de grado n de G , puede ser igualmente definida como un homomorfismo de G al grupo de matrices $n \times n$ no singulares con coeficientes en F .

Sea V el espacio vectorial de una F -representación $D(G)$ de G . Un subespacio $D(G)$ invariante de V es un subespacio W de V tal que

$$D(R)W \subseteq W \quad \forall R \in G.$$

Si W es un subespacio $D(G)$ invariante de V entonces $D(G)$ define una F -representación de G con espacio vectorial base W y otra representación con espacio base V/W . Estas representaciones son llamadas constituyentes de $D(G)$. Una F -representación $D(G)$ de G en un espacio vectorial V es F -irreducible si \emptyset, V son los únicos subespacios $D(G)$ invariantes de V . $D(G)$ es F -reducible si no es F -irreducible. $D(G)$ es completamente reducible si

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s, \quad s \geq 1$$

donde cada V_i es un subespacio $D(G)$ invariante de V y F -irreducible. Es claro que F -reducibilidad, F -irreducibilidad y reducibilidad completa son todas preservadas si $D(G)$ es remplazada por una F -representación similar.

En términos de matrices es de fácil verificación que la F -representación $D(G)$ de G es F -reducible si y solo si existe una matriz no singular S con entradas en F tal que

$$S^{-1}D(R)S = \begin{pmatrix} A(R) & C(R) \\ 0 & B(R) \end{pmatrix} \quad \forall R \in G,$$

donde $A(R)$, $B(R)$ son las constituyentes de $D(G)$.

Además $D(G)$ es completamente reducible si y solo si existe una matriz no singular S con coeficientes en F tal que

$$S^{-1}D(R)S = \begin{pmatrix} D^1(R) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D^n(R) \end{pmatrix} \quad \forall R \in G,$$

donde D^i es F -irreducible.

Sea F un campo. Sea G un grupo y sea $D(G)$ una F -representación de G . Para $R \in G$ sea $\text{tra}(R)$ la traza de $D(R)$. La función $\text{tra}(x)$ es llamada el caracter de G en la F -representación $D(G)$ y se denotara $\chi(R)$.

A partir de aquí todas las representaciones $D(G)$ de un grupo G con espacio vectorial V serán sobre el campo \mathbb{C} y cuando digamos reducibilidad o irreducibilidad se entenderá \mathbb{C} -reducibilidad o \mathbb{C} -irreducibilidad a menos que se diga lo contrario.

Solamente trabajaremos con representaciones $D(G)$ de un grupo G completamente reducibles, por lo que una representación $D(G)$ reducible significa una representación $D(G)$ completamente reducible

Para hacer distinción entre representaciones de un grupo G no similares haremos uso de un superíndice $D^{(\mu)}(G)$ para distinguirlas, de manera similar, distinguiremos los caracteres de una representación $D^{(\mu)}(G)$ de un grupo G con $\chi^{(\mu)}$.

Representaciones similares de G tienen el mismo conjunto de caracteres, además que elementos conjugados en G siempre tienen el mismo caracter.

Si etiquetamos las clases de conjugación de G como K_1, K_2, \dots, K_ν donde ν es el número de clases en G , la representación es descrita por un conjunto de caracteres χ_1, \dots, χ_ν . Los caracteres de representaciones irreducibles son usualmente llamados **caracteres primitivos** o **caracteres simples**.

Considerando una representación arbitraria D reducible. D puede ser expresado en términos de representaciones irreducibles

$$D(R) = \sum_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)}(R), \quad (1.10)$$

donde las a_ν son enteros ≥ 0 . Tomando la traza de esta ecuación para un elemento R en la clase K_i de un grupo G

$$\chi_i = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi_i^{(\nu)}. \quad (1.11)$$

El caracter χ_i de una representación reducible D es llamado **caracter compuesto**. Como vemos un caracter compuesto es una combinación lineal de caracteres simples con coeficientes enteros positivos.

Para obtener el coeficiente a_ν de una representación irreducible en una representación $D(G)$ de un grupo G con caracter χ_i para un elemento R en una clase conjugada K_i de G hacemos uso de la ecuación [21]

$$a_{\mu} = \frac{1}{g} \sum_i g_i \chi_i^{(\mu)*} \chi_i \quad (1.12)$$

Si una representación $D(G)$ de un grupo G es irreducible sus caracteres deben satisfacer

$$\sum_i g_i |\chi_i|^2 = g. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) nos da un criterio simple de irreducibilidad [21].

En un grupo de orden finito el número de representaciones no-similares e irreducibles es finito, es más, el número de representaciones no-similares e irreducibles de un grupo finito es igual al número de clases conjugadas en el grupo.

Otro resultado importante dice que el cuadrado de las dimensiones de las representaciones irreducibles es igual al orden del grupo, esto es

$$g = \sum_{\nu} n_{\nu}^2 \quad (1.14)$$

donde g es el orden de un grupo G y n_{ν} es la dimensión de la representación ν , la suma es sobre todas las representaciones irreducibles.

1.4. Diagramas de Young

El problema de encontrar todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico S_N es uno de los ejemplos clásicos de técnicas algebraicas.

El teorema de Frobenius da una conexión entre los caracteres simples de un grupo G y los caracteres de cualquiera de sus subgrupos.

Separamos los elementos de G en clases conjugadas K_i , el número de elementos en K_i es g_i . Denotemos los caracteres simples de G por $\chi_i^{(\mu)}$ de una representación $D^{(\mu)}(G)$ de G . Sea H un subgrupo de G , para formar H tomamos h_i elementos de los

g_i elementos de la clase K_i , de estos h_i elementos solamente h_{i_1} elementos están en la clase K_{i_1} , h_{i_2} están en la clase K_{i_2} , etc., donde las K_{i_τ} son clases conjugada de H . Denotemos los caracteres simples de H como $\phi_{i_\tau}^{(\mu)}$ y la correspondiente representación por $\Delta^{(\mu)}(H)$. Si al menos un elemento de la clase K_i de G está en el subgrupo H se cumple [21]

$$\chi_i^{(\mu)} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \phi_{i_\tau}^{(\nu)}. \quad (1.15)$$

Si la clase K_i no tiene elementos en H tenemos que

$$\sum_{\mu} a_{\mu\rho} \chi_j^{(\mu)} = 0 \quad \forall \rho, \quad (1.16)$$

donde ρ denota todas las representaciones irreducibles de H no similares. Regresando a considerar todas las clases conjugadas en G que tienen al menos un elemento en H ,

$$\psi_l^{(\sigma)} = \sum_{\mu} a_{\mu\sigma} \chi_l^{(\mu)} = \sum_{K_{i_\tau}} \frac{gh_{i_\tau}}{g_l h} \phi_{i_\tau}^{(\sigma)} \quad (1.17)$$

donde del lado izquierdo tenemos un caracter compuesto $\psi_l^{(\sigma)}$ de G .

Hay un caracter simple el cual conocemos para cualquier grupo, llamado el caracter de la representación identidad, $\chi_i^{(0)} = 1$ para toda i . Esto implica que $\phi_{i_\tau}^{(\sigma)} = 1$ para toda l_τ obteniendo en (1.17)

$$\frac{gh_l}{g_l h} = \sum_{\mu} a_{\mu 0} \chi_l^{(\mu)}. \quad (1.18)$$

Las cantidades $gh_l/g_l h$ son un caracter compuesto de G . La ecuación (1.18) es aplicable a cualquier subgrupo H de G .

Por ejemplo para cualquier S_N conocemos dos caracteres simples, el caracter simétrico, con 1 para toda permutación; y el antisimétrico, con 1 para permutaciones pares y -1 para permutaciones impares.

Para S_2 tenemos

$$S_2 : \begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ & (1^2) & (2) \\ \chi^{(1)} & 1 & 1 \\ \chi^{(2)} & 1 & -1 \end{array} .$$

Donde el número de elementos en la clase es mostrado encima del símbolo de la partición. Para S_3 conocemos

$$S_3 : \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ & (1^3) & (2, 1) & (3) \\ \hline \chi^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \chi^{(2)} & 1 & -1 & 1 \\ \chi^{(3)} & & & \end{array} .$$

La clase (3) de S_3 no tiene elementos en S_2 , por tanto el caracter compuesto es 0. Comenzando con $\phi^{(1)}$ (i.e., $\chi^{(1)}$ en S_2). (1.17) da

$$\psi_{(1^3)} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{1} = 3 \quad \psi_{(2,1)} = \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1. \quad (1.19)$$

Obtuvimos los caracteres compuestos 3, 1, 0. Usando (1.12)

$$\frac{1}{g} \sum_l g_l \psi_l \chi_l^{(1)} = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 1 \quad (1.20)$$

tenemos que χ contiene a $\chi^{(1)}$ una vez. Sustrayendo obtenemos los caracteres 2, 0, -1. Estos son caracteres simples pues cumplen (1.13), $\frac{1}{6} [1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2] = 1$. Entonces la tabla para S_3 es

$$S_3 : \begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ & (1^3) & (2, 1) & (3) \\ \hline \chi^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \chi^{(2)} & 1 & -1 & 1 \\ \chi^{(3)} & 2 & 0 & -1 \end{array} .$$

Dado un grupo G de orden g , teniendo g_l elementos en la clase K_l de G . Si un subgrupo H de G tiene orden h y contiene h_l elementos de la clase K_l entonces el conjunto de números

$$\chi_l^{(H)} = \frac{gh_l}{g_l h} \quad (1.21)$$

formán un caracter compuesto de G [21].

A partir de (1.21) se puede resolver completamente el problema de encontrar las representaciones irreducibles del grupo simétrico.

La manera de resolver el problema es a partir de la ecuación (1.21) que nos da un caracter compuesto $\chi^{(H)}$ de S_N para cada subgrupo H . Considerando una partición $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ de N con

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = N$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$$

se construye un subgrupo de G distribuyendo los símbolos $1, 2, \dots, N$ en la partición (λ) ; agrupamos λ_1 símbolos por un lado, λ_2 símbolos distintos por otro lado, etc. (la elección de símbolos en cada agrupación es irrelevante). Construimos el grupo simétrico del conjunto de λ_1 símbolos al que llamamos G_{λ_1} . Se hace lo mismo para cada uno de los otros conjuntos. Tomamos el producto directo de grupos (recordemos que no tienen símbolos en común). El producto directo

$$G_{(\lambda)} = G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \times \cdots \times G_{\lambda_m}$$

es un subgrupo de S_N . Usando (1.21) se obtiene el caracter compuesto de S_N el cual etiquetamos como $\phi^{(\lambda)}$. Cada partición (λ) de (N) se puede operar con ella por este camino:

El número de particiones de N es igual al número de clases de S_N . Se prueba que las ϕ^λ son vectores linealmente independientes. El resultado de Frobenius es una fórmula que da todos los caracteres simples de S_N .

Como ejemplo consideremos S_4 y construyamos el subgrupo correspondiente a la partición (2^2) .

$$G_{(2^2)} = G_2 \times G_2$$

Donde formamos el grupo simétrico de 1, 2 y multiplicamos con el grupo simétrico formado de 3, 4. $G_{(2^2)} = e, (12), (34), (12)(34)$. El orden del subgrupo es $h = 2!2! = 4$. Considerando las clases de S_4 , $(4), (31), (2^2), (1^4)$, la clase (4) no tiene elementos en el subgrupo y la clase (31) tampoco, la clase (2^2) tiene un elemento, la clase (21^2) tiene dos elementos y la clase (1^4) tiene un elemento. Con estos datos y usando (1.21) obtenemos los caracteres compuestos

$$\begin{array}{ccccc} (1^4) & (21^2) & (2^2) & (31) & (4) \\ \hline 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Las cantidades $\phi_l^{(\lambda)}$ son los coeficientes de cierto multinomio el cual se construye en [21]. Obteniendo la ecuación

$$s_{(l)} = \sum_{(\lambda)} \phi_l^{(\lambda)} \sum_{\text{perm}} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \quad (1.22)$$

donde

$$s_{(l)} = s_1^\alpha s_2^\beta \cdots, \quad (1.23)$$

para cada clase l con estructura cíclica $(1^\alpha, 2^\beta, 3^\gamma, \dots)$,

$$s_r = \sum_i x_i^r, \quad r = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

En la derivación del enunciado general (1.22), se usaron N variables x_i

Aplicamos (1.22) a S_4

$$\begin{aligned} (l) = (1^4) : \quad s_{(1^4)} &= (s_1)^4 = \left(\sum x_i\right)^4 = \sum x_1^4 + 4 \sum x_1^3 x_2 + 6 \sum x_1^2 x_2^2 \\ &\quad + 12 \sum x_1^2 x_2 x_3 + 24 \sum x_1 x_2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

donde $\sum x_1^4$, etc., implica una suma sobre todas las permutaciones de índices la cual da distintos monomios. Similarmente

$$\begin{aligned} (l) = (21^2) : \quad s_{(21^2)} &= s_2(s_1)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(x_1 + \cdots + x_n)^2 \\ &= \left[\sum x_1^2 + 2 \sum x_1 x_2\right] \left[\sum x_3^2\right] \\ &= \sum x_1^4 + 2 \sum x_1^3 x_2 + 2 \sum x_1^2 x_2^2 + 2 \sum x_1^2 x_2 x_3; \\ (l) = (2^2) : \quad s_{(2^2)} &= (s_2)^2 = \left(\sum x_1^2\right)^2 = \sum x_1^4 + 2 \sum x_1^2 x_2^2; \\ (l) = (31) : \quad s_{(31)} &= s_3 s_1 = \left(\sum x_1^3\right) \left(\sum x_2\right) = \sum x_1^4 + \sum x_1^3 + 2; \\ (l) = (4) : \quad s_{(4)} &= s_4 = \sum x_1^4 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones formamos la matriz de $\phi_{(l)}^{(\lambda)}$, transponemos la matriz y entonces (λ) señala renglones y (l) columnas:

	$(l) = (1^4)^1$	$(21^2)^6$	$(2^2)^3$	$(31)^8$	$(4)^6$
$(\lambda) = (4)$	1	1	1	1	1
(31)	4	2	0	1	0
(2^2)	6	2	2	0	0
(21^2)	12	2	0	0	0
(1^4)	24	0	0	0	0

De esta matriz se pueden determinar los caracteres simples $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$.

A partir de la ecuación (1.22) podemos encontrar el conjunto completo de caracteres compuestos $\phi^{(\lambda)}$ para S_N . Frobenius dió una ecuación similar la cual da directamente todos los caracteres simples $\chi^{(\lambda)}$. A saber

$$s_{(l)} D(x_i) = \sum_{(\lambda)} \chi_{(l)}^{(\lambda)} \sum_P \delta_P P x_1^{\lambda_1 + m - 1} x_2^{\lambda_2 + m - 2} \cdots x_m^{\lambda_m}. \quad (1.25)$$

Donde $D(x_i)$ está definido como

$$\begin{aligned} D(x_i) \equiv D(x_1, \dots, x_m) &= \prod_{i < j} (x_i - x_j) \\ &= \sum_P \delta_P P x_1^{m-1} x_2^{m-2} \cdots x_{m-1} x_m^0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

A partir de 1.25 se pueden derivar métodos gráficos.

Por ejemplo para la clase conjugada del elemento identidad en S_N , esto es, la clase (1^n) . Del lado izquierdo de (1.25) es solo $D(x_i)(\sum x_i)^n$. Comenzamos con $D(x_i)$ y multiplicamos sucesivamente n veces con $\sum x_i$. Entonces $\chi_{(1^n)}^{(\lambda)}$ es el coeficiente de

$$x_1^{\lambda_1+m-1}x_2^{\lambda_2+m-2} \dots x_m^{\lambda_m}$$

en (1.25). Comenzamos a partir de

$$D(x_i) = \sum_P \delta_P P x_1^{m-1} x_2^{m-2} \dots x_{m-1} x_m^0.$$

Si multiplicamos por $\sum x_i$ incrementamos una de las potencias por una unidad. Pero si en algún momento dos de los exponentes llegan a ser iguales, el término se hace cero. Notamos que si elevamos el grado del polinomio en uno en cada ocasión, debemos siempre elevar la potencia de x_1 a lo menos tan rápido como x_2 , etc. El objetivo final es elevar la potencia de x_1 por λ_1 , es decir, x_i por λ_i . Mientras hacemos esto un factor a la vez, debemos estar seguros que cada vez que el número de multiplicaciones por x_1 es más grande que el número de multiplicaciones de x_2 , etc. El número total de caminos por el cual podemos llegar es el grado de la representación (λ) .

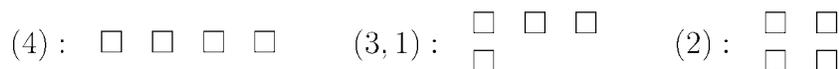
Por ejemplo, supongamos que nosotros deseamos obtener la dimensión de la representación irreducible de S_4 correspondiente a $(\lambda) = (2, 1^2)$. Entonces debemos elevar la potencia de x_1 por 2, x_2 y x_3 por 1. En otras palabras deseamos llegar a $x_1^2 x_2 x_3$ aplicando un x factor a la vez, siempre teniendo más x_1 que x_2 , x_2 que x_3 , etc. Los posibles caminos de hacer esto son

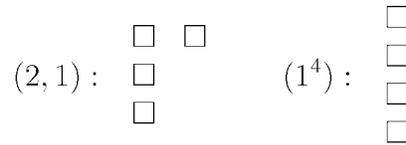
$$x_1^2 x_2 x_3 = x_1 x_1 x_2 x_3 \quad x_1 x_2 x_1 x_3 \quad x_1 x_2 x_3 x_1.$$

Hay tres permutaciones, entonces la dimensión de la representación asociada con $(2, 1^2)$ es 3. Si ahora remplazamos x_1 por “punto en la primera línea”, x_2 por “punto en la segunda línea”, etc. Llegamos a un método **gráfico** con dos puntos en la primera línea (x_1^2) y un punto en la segunda y tercera línea ($x_2 x_3$). Obtenemos las gráficas

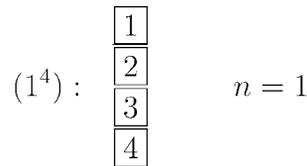
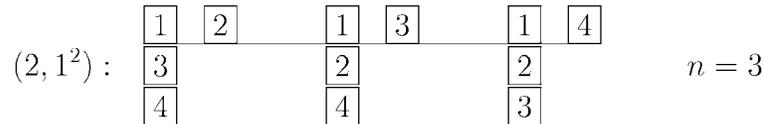
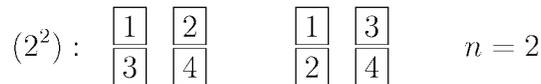
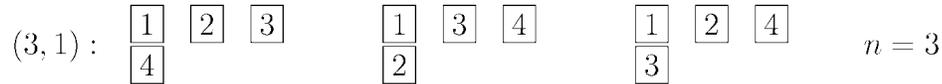
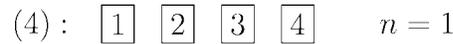


en el segundo diagrama usamos cajas en lugar de puntos. Por el mismo procedimiento a cada partición corresponde una gráfica:





Las maneras posibles de hacer aplicaciones regulares son:



Existe un método gráfico similar al anterior que se puede utilizar para calcular caracteres. Para encontrar el caracter $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ en (1.25) debemos encontrar el coeficiente de $x_1^{\lambda_1+m-1} x_2^{\lambda_2+m-2} \dots x_m^{\lambda_m}$.

Una aplicación regular de l_i puntos se obtiene aplicando puntos en la línea q -ésima hasta que excede el número de puntos a el número de puntos en la línea anterior por uno, entonces vamos a la línea precedente y aplicamos el mismo procedimiento.

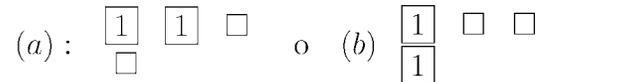
Si un conjunto de l_i puntos es puesto en un número impar de líneas decimos que es un *aplicación par*, si los puntos son puestos en número impar de líneas es una *aplicación impar* y da un signo negativo a la gráfica.

La regla general para encontrar el caracter en la representación (λ) de la clase (l) teniendo ciclos de longitud l_1, l_2, \dots , se hace considerando la gráfica de la partición (λ) y mediante diferentes aplicaciones sucesivas de l_1, l_2, \dots , etc., puntos, el caracter $\chi_{(l)}^{(\lambda)}$ es igual al número de gráficas que contienen aplicaciones pares mas el número de gráficas que contienen aplicaciones impares.

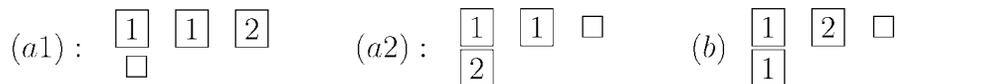
Por ejemplo encontremos el caracter $\chi_{(2,1^2)}^{(3,1)}$. Primero dibujamos la gráfica $(3,1)$



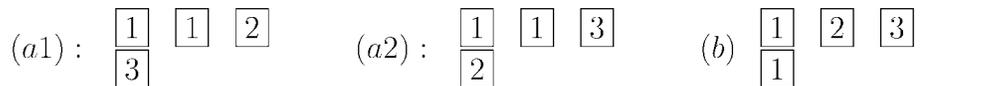
Haremos una aplicación regular de 2, 1 y 1 puntos. Estas aplicaciones pueden ser hechas en cualquier orden. Aplicamos primero un par de puntos que etiquetamos como 1, después un punto (2) y finalmente un punto (3). Los dos puntos pueden ser agregados de dos maneras



Ahora hacemos la aplicación regular de 2



Solamente tenemos una opción en cada caso para 3



En $(a1)$ y $(a2)$ los dos 1's están en la misma línea, por tanto no contiene aplicaciones impares. En (b) los 1's están en distintas líneas, por tanto (b) contiene una aplicación impar. Obtenemos +1 de $(a1)$, +1 de $(a2)$ y -1 de (b) ,

$$\chi_{(2,1^2)}^{(3,1)} = +1 + 1 - 1 = 1 \quad (1.27)$$

1.5. Grupos Continuos.

Un grupo continuo o un grupo topológico consiste de :

- Una variedad¹ n -dimensional μ .
- Una operación que mapea cada par de puntos a, b en la variedad a otro punto c en la variedad.

En general, un *grupo continuo r -paramétrico* tiene todos sus elementos etiquetados por r -parámetros que varían continuamente a_1, a_2, \dots, a_r , entonces los elementos del grupo son $R(a_1, \dots, a_r) = R(a)$. Grupos cuyos elementos pueden ser etiquetados por un número *finito* de parámetros que varían continuamente se dice que son un *grupo*

¹Vease [36, p.57] para la definición de variedad

continuo finito. El rango de variación de los parámetros no está especificado, estos pueden variar de $-\infty$ a $+\infty$ o pueden estar contenidos en un dominio finito. Si el dominio de variación es finito, la variedad del grupo se dice que es cerrada.

Los requerimientos para que los elementos $R(a)$ formen un grupo continuo son iguales que para el grupo finito. Debe de haber un conjunto de valores de los parámetros a^0 tal que

$$R(a^0)R(a) = R(a)R(a^0) = R(a) \quad (1.28)$$

para toda a . $R(a^0)$ es el elemento identidad del grupo. Por conveniencia se tomará $a^0 = 0$. Además para cualquier valor de a podemos encontrar un valor a tal que:

$$R(\bar{a})R(a) = R(a)R(\bar{a}) = R(0) \quad (1.29)$$

entonces $R(\bar{a})$ es el elemento inverso de $R(a)$:

$$R(\bar{a}) = [R(a)]^{-1}. \quad (1.30)$$

El producto de dos elementos del conjunto debe pertenecer al conjunto. Dado los valores de los parámetros a y b , podemos encontrar un conjunto de valores de los parámetros c tal que:

$$R(c) = R(b)R(a). \quad (1.31)$$

El parámetro c es una función *real* de los parámetros *reales* a y b :

$$c_k = \phi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r), \quad k = 1, \dots, r, \quad (1.32)$$

o, de manera abreviada

$$c = \phi(a; b). \quad (1.33)$$

Hasta aquí los requerimientos son los mismos tanto para grupos finitos o denumerables, pero ahora requerimos además que los parámetros de un producto sean funciones analíticas de los parámetros de los factores. Esto es, que la función anterior posea derivadas de todos los ordenes con respecto a ambos argumentos. Similarmente requerimos que a en la ecuación (1.29) sea una función analítica de a . Al grupo que cumple con las condiciones anteriores se le conoce como Grupo de Lie r -paramétrico.

Estamos interesados principalmente en grupos de transformaciones. Los resultados anteriores para este tipo de grupos los podemos reescribir de la siguiente forma.

Un grupo de Lie r -paramétrico de transformaciones es un grupo de transformaciones

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \quad i = 1, \dots, n$$

de manera abreviada

$$x' = f(x; a),$$

podemos que f sea una función analítica de los parámetros a .

Un grupo continuo de transformaciones debe satisfacer todos los requerimientos de grupo, entonces para una transformación etiquetada por un conjunto de parámetros a , se puede encontrar un conjunto de parámetros \bar{a} tal que

$$x'' = f(x'; \bar{a}) = f(f(x; a); \bar{a}) = x. \quad (1.34)$$

Si aplicamos una sucesión de transformaciones

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (1.35)$$

$$x''_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; b_1, \dots, b_r) \quad (1.36)$$

se requiere que el resultado pertenezca al conjunto. Es decir debe existir un conjunto de valores de los parámetros c_1, \dots, c_r tal que:

$$x''_i = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_r) \quad (1.37)$$

los parámetros c deben ser función de los parámetros a y b

$$c_k = \phi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r), \quad (1.38)$$

se asume que las funciones ϕ_k son analíticas y que a en la ecuación (1.34) son funciones analíticas de a . También existe un conjunto de valores de los parámetros a^0 el cual corresponde a la transformación identidad

$$x' = f(x; a^0) = x, \quad (1.39)$$

en general tomaremos a^0 igual a cero

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} x''_i &= f_i(x'; b) = f_i(f_1(x; a), \dots, f_n(x; a); b) \\ &= f_i(x, c) \\ &= f_i(x, \phi(a; b)) \end{aligned} \quad (1.40)$$

abreviadamente escribiremos

$$f(f(x; a); b) = f(x; \phi(a; b)) \quad (1.41)$$

esta última ecuación es una identidad en x , a y b .

1.5.1. Transformaciones Infinitesimales

El estudio de las propiedades infinitesimales de los grupos de Lie, esto es, las propiedades del grupo cercanas al elemento identidad nos llevará al concepto de generadores infinitesimales y álgebras de Lie.

Partiendo de la ecuación (1.41) que expresa las restricciones para las funciones f_i que forman un grupo de transformaciones continuas. Vemos que la transformación $x' = f(x; a)$ toma los puntos de la posición x a la posición x' . Suponemos que la transformación con parámetros a toma a x y lo manda a x' . Si tomamos un parámetro cercano a a digamos $a + \delta a$ de tal forma que a x lo manda a $x' + dx'$, entonces hay dos alternativas de camino para ir de x' a $x' + dx'$

$$\underline{x' + dx' = f(x; a + \delta a)}$$

o

$$\underline{x' = f(x; a) \quad x' + dx' = f(x'; \delta a),}$$

de manera general tenemos

$$\underline{x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad i = 1, \dots, n} \quad (1.42)$$

$$x'_i + dx'_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; \delta_1, \dots, \delta_r);$$

$$\begin{aligned} dx'_i &= \sum_{k=1}^r \left[\frac{\partial f_i(x'_1, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r)}{\partial a_k} \right]_{a=0} \delta a_k \\ &= \sum_{k=1}^r U_{ik}(x') \delta a_k; \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\underline{a_l + da_l = \phi_l(a_1, \dots, a_r; \delta a_1, \dots, \delta a_r),} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} da_l &= \sum_{m=1}^r \left[\frac{\phi_l(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r)}{\partial b_m} \right]_{a=0} \delta a_m \\ &= \sum_{m=1}^r \theta_{lm}(a) \delta a_m; \end{aligned} \quad (1.45)$$

para $a = 0$, $\theta_{lm}(0) = \delta_{lm}$. Resolviendo (1.45) para las δ 's en términos de da 's, tenemos

$$\underline{\delta a_k = \sum_{l=1}^r \psi_{kl}(a) da_l} \quad (1.46)$$

donde las matrices ψ y θ satisfacen

$$\psi\theta = 1, \quad \psi_{kl}(0) = \delta_{kl};$$

sustituyendo en (1.43) obtenemos

$$dx' = \sum_{k,l=1}^r U_{ik}(x')\psi_{kl}(a)da_k \quad (1.47)$$

o

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \sum_{k=1}^r U_{ik}(x')\psi_{kl}(a). \quad (1.48)$$

En la ecuación (1.48) consideramos las x' 's como funciones de los parámetros a . La coordenada x es el valor inicial de las x' 's para $a = 0$.

Si examinamos el cambio de una función $F(x)$ bajo las transformaciones infinitesimales (1.42) encontramos

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \sum_{k=1}^r U_{ik}(x) \delta a_l \\ &= \sum_{l=1}^r \delta a_l \left(\sum_{i=1}^n U_{il}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F = \sum_{l=1}^r \delta a_l X_l F. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Los operadores

$$X_\rho = \sum_{i=1}^n U_{i\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.50)$$

son llamados los operadores infinitesimales del grupo.

Un resultado importante con respecto al conmutador $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ dice que el conmutador de operadores infinitesimales es expresable en términos de operadores infinitesimales. Se tiene que

$$[X_\rho, X_\sigma] = C_{\rho\sigma}^k U_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} X_l \quad (1.51)$$

donde los coeficientes $C_{\rho\sigma}^k$ son la *estructura constante* del grupo de Lie, claramente

$$C_{\rho\sigma}^k = -C_{\sigma\rho}^k \quad (1.52)$$

además de que los operadores infinitesimales cumplen con la identidad de Jacobi.

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0. \quad (1.53)$$

La representación lineal de un grupo de Lie es definido de igual forma que para grupos finitos. Cada elemento R del grupo se asocia con un operador lineal $D(R)$. El operador $D(R)$ actúa sobre un espacio vectorial de vectores ψ , un espacio euclidiano

de dimensión finita o un espacio de Hilbert en el cuál un producto escalar positivo definido (ψ_1, ψ_2) está definido.

La representación debe satisfacer los requerimientos usuales

$$\frac{|D(R_1)D(R_2) - D(R_1R_2)|}{D(E)} = 1 \quad (1.54)$$

El problema de encontrar las representaciones irreducibles del grupo de Lie se puede atacar directamente o se puede considerar el problema relacionado de encontrar las representaciones irreducibles de su álgebra de Lie. A cada elemento del álgebra A se le asocia un operador lineal $D(A)$ en un espacio vectorial o de Hilbert y requerimos que

$$\begin{aligned} \overline{D(A+B)} &= \overline{D(A) + D(B)} \\ \overline{D(\alpha A)} &= \overline{\alpha D(A)} \\ \overline{D([A, B])} &= \overline{D(A)D(B) - D(B)D(A) = [D(A), D(B)]} \end{aligned} \quad (1.55)$$

La representación del álgebra sirve como intermediario y se muestra que la representación del álgebra se puede extender para dar una representación del grupo de Lie.

En el proceso de encontrar las representaciones irreducibles de un álgebra semi-simple, el teorema de Casimir es extremadamente usado.

Si los elementos base del álgebra son X_μ el operador de Casimir es definido como

$$\overline{C = g^{\rho\sigma} X_\rho X_\sigma} \quad (1.56)$$

este operador conmuta con todos los operadores de la representación. Donde $g^{\rho\sigma}$ es la inversa de una forma bilineal simétrica asociada a dos elementos del álgebra.

Considerando una representación irreducible, el operador C conmuta con todos los operadores de la representación y por el lema de Schur es un múltiplo del operador unidad. Entonces el operador C tiene un valor numérico fijo en una representación irreducible dada y el valor es usado para caracterizar la representación irreducible.

Para grupos compactos $g^{\rho\sigma} = -\delta^{\rho\sigma}$ en una base apropiada, el operador de Casimir para este caso es

$$\overline{C = \sum_p X_p^2} \quad (1.57)$$

1.5.2. Representación equivalente bosónica

El grupo unitario $U(n)$ tiene n^2 generadores \hat{C}_{im} con $(i, m = 1, \dots, n)$ los cuales satisfacen la regla de conmutación

$$\overline{[\hat{C}_{im}, \hat{C}_{jn}] = \delta_{jm}\hat{C}_{in} - \delta_{in}\hat{C}_{jm}} \quad (1.58)$$

En la naturaleza encontramos bósones y fermiones. Cada uno de estos tiene sus operadores que cumplen la relación de conmutación y anticonmutación bosónica y fermiónica respectivamente. Aquí tomaremos como ejemplo los operadores bosónicos los cuales nos serán de utilidad para secciones posteriores de este trabajo.

Consideremos bósones y una posible representación de $\hat{C}_{im} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_m$ como generadores, si $\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_m$ son operadores de creación y aniquilación con la regla de conmutación $[\hat{b}_m, \hat{b}_i^\dagger] = \delta_{im}$. Se puede mostrar que satisfacen (1.58), es decir,

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_m, \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_n] &= \hat{b}_i^\dagger [\hat{b}_m, \hat{b}_j^\dagger] \hat{b}_n + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger [\hat{b}_m, \hat{b}_n] + [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] \hat{b}_n \hat{b}_m + \hat{b}_j^\dagger [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_n] \hat{b}_m \\ &= \hat{b}_i^\dagger \delta_{mj} \hat{b}_n - \hat{b}_j^\dagger \delta_{in} \hat{b}_m \\ &= \delta_{jm} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_n - \delta_{in} \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_m. \end{aligned} \quad (1.59)$$

En general, son requeridos varios operadores de Casimir para caracterizar una representación irreducible completamente. El número de operadores requeridos es igual al *rango* del álgebra el cual se define como el número máximo de generadores que conmutan entre sí.

1.6. Series y coeficientes de Clebsch-Gordan.

El producto de Kronecker juega un papel importante en la teoría de sistemas acoplados y en la derivación de reglas de selección. El producto de dos representaciones irreducibles del grupo G debe ser en general reducible [21, 25].

Una de las ecuaciones principales es [21]

$$a_\sigma = \frac{1}{g} \sum_G \chi^{(\mu)}(R) \chi^{(\nu)}(R) \chi^{\dagger(\sigma)}(R) \quad (1.60)$$

el cual da el número de veces a_σ que la representación irreducible D^σ es contenida en la representación $D^{(\nu \times \mu)}$ y $\chi^{\dagger(\sigma)}$ es el caracter de la representación adjunta σ

Los números a_σ son los coeficientes en la expansión de $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$ en representaciones irreducibles:

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)} = \sum_\sigma a_\sigma D^{(\sigma)} \quad (1.61)$$

Esta expansión es llamada la serie de *Clebsch-Gordan*. Una notación más conveniente es:

$$D^{(\mu)} \times D^{(\nu)} = \sum_\sigma (\mu\nu\sigma) D^{(\sigma)} \quad (1.62)$$

esto es, $(\mu\nu\sigma)$ es el número de veces que $D^{(\sigma)}$ ocurre en el producto de Kronecker de $D^{(\mu)}$ y $D^{(\nu)}$. Claramente, $(\mu\nu\sigma) = (\nu\mu\sigma)$.

Los coeficientes surgen del problema de encontrar todas las representaciones irreducibles las cuales están contenidas en el producto de Kronecker de dos representaciones irreducibles. Para aplicaciones físicas el problema de encontrar las funciones bases para las representaciones las cuales están contenidas en el producto de Kronecker es de suma importancia. Por ejemplo tomemos n_μ funciones bases ψ_j^μ ($j = 1, \dots, n_\mu$) para la representación irreducible $D^\mu(G)$, y n_ν funciones base ϕ_l^ν ($l = 1, \dots, n_\nu$) para la representación irreducible $D^\nu(G)$. Queremos encontrar n_λ funciones Ψ_s^λ ($s = 1, \dots, n_\lambda$) las cuales son combinaciones lineales de productos $\psi_j^\mu \phi_l^\nu$, y éstas forman una base para la representación $D^{(\lambda)}(G)$. Sabemos que tal conjunto existe *solamente* si $D^{(\lambda)}$ está contenida en $D^{(\mu)} \times D^{(\nu)}$, esto es, sólo sí $(\mu\nu\lambda) \neq 0$ o si $(\mu\nu\lambda) > 1$, se van a formar conjuntos independientes $\Psi_s^{(\lambda)}$. Hay de hecho $(\mu\nu\lambda)$ "combinaciones lineales independientes" de funciones producto. Para distinguir estos diferentes conjuntos, se usará la notación $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$, $s = 1, \dots, n_\lambda$, $\tau_\lambda = 1, \dots, (\nu\mu\lambda)$ que es las multiplicidades de λ en el producto $(\nu\mu\lambda)$. Las funciones $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ deben ser combinaciones lineales de los productos $\psi_j^\mu \phi_l^\nu$ (Se usa la convención de suma sobre letras latinas repetidas, la suma sobre letras griegas será mostrada explícitamente).

$$\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)} = \psi_j^{(\mu)} \phi_l^{(\nu)}(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s) \quad (1.63)$$

Los coeficientes $(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s)$ son llamados *Coefficientes de Clebsch-Gordan*. (Otros nombres son *coeficientes de Wigner* en caso de $SU(2)$ o *coeficientes adición - vector*). El total de funciones $\Psi_s^{(\lambda\tau_\lambda)}$ es igual al número de funciones producto $\psi_j^\mu \phi_l^\nu$:

$$\sum_{\lambda} (\mu\nu\lambda) n_{\lambda} = n_{\mu} n_{\nu}. \quad (1.64)$$

Entonces los coeficientes forman $(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s)$ una matriz de grado $n_{\nu} n_{\mu}$.

A partir de ésta relación y su inversa obtenemos las siguientes ecuaciones :

$$(\lambda' \tau_{\lambda'} s' | \mu j, \nu l)(\mu j, \nu l | \lambda \tau_\lambda s) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\tau_{\lambda'} \tau_\lambda} \delta_{ss'} \quad (1.65)$$

$$\sum_{\lambda \tau_\lambda} (\mu j', \nu l' | \lambda \tau_\lambda s)(\lambda \tau_\lambda s | \mu j, \nu l) = \delta_{jj'} \delta_{ll'}. \quad (1.66)$$

1.7. El grupo $SU(2)$.

Los generadores de un grupo de Lie son determinados por elementos del grupo los cuales son infinitesimalmente cercanos al elemento unidad [4, 21, 22, 23].

Los generadores de $SU(n)$, pueden ser elegidos como $(n \times n)$ matrices hermitianas linealmente independientes con traza igual a cero [4].

Un caso que estudiaremos más a profundidad es con $n = 2$. En este caso los generadores de $SU(2)$ pueden ser matrices 2×2 matrices hermitianas y traza igual a cero, teniendo $2^2 - 1 = 3$ generadores.

Proponemos

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.67}$$

Estas son matrices linealmente independientes. La relación de conmutación de las $\hat{\sigma}_i$ es

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k.\tag{1.68}$$

En lugar de trabajar con $\hat{\sigma}_i$, es más convenientes usar $\hat{S}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$, como generadores, simplificando las reglas de conmutación

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k.\tag{1.69}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor Levi-Civita y tiene las propiedades

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) = (123), \text{ y permutaciones cíclicas} \\ -1 & \text{si } (ijk) = (213), \text{ y permutaciones cíclicas} \\ 0 & \text{en los demás.} \end{cases}\tag{1.70}$$

No existe un par de generadores que conmuten $\{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3\}$. El número máximo de generadores que conmutan es trivial, i.e. 1, lo cual determina el rango de $SU(2)$ a uno. Por tanto existe un solo operador de Casimir [4] que es

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2.\tag{1.71}$$

A partir de lo presentado en esta sección deduciremos en lo siguiente, los números cuánticos y su espectro de eigenvalores [4, 26, 27].

1.7.1. Definiciones.

En mecánica clásica, el vector de momento angular es definido como el producto cruz del vector de posición r y el vector momento lineal p ,

$$L = r \times p\tag{1.72}$$

La transición a la Mecánica Cuántica se hace reemplazando la variable de momento por el operador [27]

$$|\hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (1.73)$$

implicando

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.74)$$

Usando (1.72), es inmediato obtener las relaciones de conmutación para los componentes del operador del momento angular.

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y. \quad (1.75)$$

Estos conmutadores definen el momento angular en mecánica cuántica y esta definición es más general pues admite números cuánticos semienteros como veremos más adelante. Si el momento angular total L es la suma de momentos angulares $L^{(n)}$ las relaciones de conmutación (1.75) son válidas para la suma también. Con [4]

$$L = \sum_n L^{(n)} \quad \text{y} \quad [L_i^{(m)}, L_j^{(n)}] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k^{(n)} \delta_{nm}. \quad (1.76)$$

Para este propósito, denotaremos los operadores del momento angular por J y usaremos la convención de expresar el momento angular en unidades de \hbar . Para las relaciones de conmutación resulta

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

$$[J_y, J_z] = iJ_x$$

$$[J_z, J_x] = iJ_y. \quad (1.77)$$

La ecuación (1.77) es el punto de partida de nuestra investigación y el objetivo es sacar toda la información posible de esta definición.

1.7.2. Interpretación física del álgebra de $SU(2)$.

Aunque los componentes del operador momento angular no conmutan consigo mismos, es fácil mostrar que el cuadrado de operador del momento angular

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (1.78)$$

conmuta con cada uno de sus componentes

$$[J^2, J_k] = 0, \quad k = x, y, z. \quad (1.79)$$

Las ecuaciones (1.77) y (1.79) están sujetas a interpretaciones físicas. Es posible encontrar los eigenvalores simultáneos de J^2 y de uno de los componentes, digamos J_z únicamente, pero es imposible de encontrar los eigenvalores de J_x y J_y al mismo tiempo. Pensando los operadores como matrices podemos decir que J^2 y J_z pueden ser diagonalizados en la misma representación pero no los otros componentes J_x y J_y . Físicamente esto significa que podemos saber a lo mucho, la magnitud del vector del momento angular y su proyección en uno de los ejes. La proyección sobre los otros dos ejes no pueden ser determinados. Si ψ_{jm} es la eigenfunción del operador J^2 y J_z , entonces

$$J^2 \psi_{jm} = \eta_j \psi_{jm} \quad (1.80)$$

y

$$J_z \psi_{jm} = m \psi_{jm}. \quad (1.81)$$

En la ecuación anterior, j y m son los números cuánticos usados para definir la eigenfunción y los correspondientes eigenvalores de los operadores son η_j y m . Nosotros estamos interesados en encontrar que valores pueden tomar j y m y entonces los eigenvalores η_j y m .

Definimos dos operadores diferentes J_+ y J_- los cuales llamaremos operadores de ascenso y descenso.

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \quad (1.82)$$

Esta nomenclatura llegará a ser obvia, y su rol comprendido. Las siguientes relaciones de conmutación pueden ser fácilmente obtenidas,

$$[J^2, J_{\pm}] = 0,$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad (1.83)$$

Generamos una nueva función Φ para permitir a J_+ operar sobre ψ_{jm} y saber si esta nueva función es una eigenfunción de los operadores J^2 y J_z . Sea

$$J_{\pm}\psi_{jm} = \Phi_{\pm}, \quad (1.81)$$

entonces

$$\begin{aligned} J^2\Phi_{\pm} &= J^2J_{\pm}\psi_{jm} \\ &= J_{\pm}J^2\psi_{jm} \\ &= \eta_j\Phi_{\pm}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde se usó la ecuación (1.80). Ahora se aplica J_z

$$\begin{aligned} J_z\Phi_{\pm} &= J_zJ_{\pm}\psi_{jm} \\ &= (J_{\pm}J_z \pm J_{\pm})\psi_{jm}. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.81) obtenemos

$$\begin{aligned} &= J_{\pm}(J_z \pm 1)\psi_{jm} \\ &= (m \pm 1)\Phi_{\pm}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Encontramos que Φ_{\pm} es una eigenfunción de los operadores J^2 y J_z . El eigenvalor de los operadores J^2 no cambia pero el eigenvalor de el operador J_z es aumentado o disminuido por una unidad. Es precisamente por esta razón que los operador J_{\pm} son llamados operadores de ascenso y descenso.

1.7.3. Espectro de los eigenvalores.

De la discusión anterior es obvio que m puede tomar un espectro de valores diferentes por una unidad para un valor dado de j . Es fácil de mostrar que los valores que m puede tomar están acotados para un j dado. Para esto, consideremos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (J_x^2 + J_y^2)\psi_{jm} &= (J^2 - J_z^2)\psi_{jm} \\ &= (\eta_j - m^2)\psi_{jm}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Donde los elementos diagonales del operador cuadrado Hermitiano J_x y J_y son positivos o cero,

$$\eta_j - m^2 \geq 0. \quad (1.88)$$

Esto significa que los valores de m son acotados para un valor dado de j . Denotemos el valor mínimo de m por m_1 y el valor más alto por m_2 , entonces tenemos

$$m_1, m_1 - 1, \dots, m_2. \quad (1.89)$$

Y se sigue que se deben satisfacer las relaciones

$$J_+ \psi_{jm_2} = 0, \quad (1.90)$$

$$J_- \psi_{jm_1} = 0. \quad (1.91)$$

Operando J_- sobre la izquierda de la ecuación (1.90) y J_+ en la izquierda de la ecuación (1.91), obtenemos

$$\overline{J_- J_+ \psi_{jm_2}} = 0, \quad (1.92)$$

$$\overline{J_+ J_- \psi_{jm_1}} = 0. \quad (1.93)$$

Donde

$$J_- J_+ = J^2 - J_z(J_z - 1), \quad (1.94)$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z(J_z + 1). \quad (1.95)$$

De ahí salen las siguientes relaciones:

$$\eta_j - m_2(m_2 + 1) = 0, \quad (1.96)$$

$$\eta_j - m_1(m_1 - 1) = 0. \quad (1.97)$$

De las ecuaciones (1.96) y (1.97), obtenemos

$$\overline{m_2(m_2 + 1) = m_1(m_1 - 1)}. \quad (1.98)$$

que implica

$$\overline{(m_1 + m_2)(m_2 - m_1 - 1) = 0}. \quad (1.99)$$

donde $m_2 - m_1$ es positivo en nuestra elección, de ahí se sigue que $m_1 = -m_2$. Si etiquetamos los valores más altos por j entonces el espectro de los valores de m es dado por

$$-j, -j + 1, \dots, j - 1, j. \quad (1.100)$$

Hay $2j + 1$ valores de m y entonces $2j + 1$ debe ser un entero. Esto significa que $2j$ es un entero y entonces j debe ser entero o semientero. Usando la ecuación (1.96) o (1.97), obtenemos los valores del operador J^2

$$\overline{\eta_j = j(j + 1)}. \quad (1.101)$$

Resumamos los resultados obtenidos: Partimos de la definición de la mecánica cuántica del momento angular dado por la ecuación (1.77), hemos mostrado que el eigenvalor del operador J^2 es $j(j + 1)$ donde j puede tomar valores enteros o semienteros y para un j dado, el eigenvalor del operador J_z queda acotado por j .

Se ha mostrado que a partir de una eigenfunción ψ_{jm} se pueden generar todas las $2j + 1$ eigenfunciones para un eigenvalor fijo j por los operadores J_{\pm} . También se puede mostrar que son definidas unívocamente excepto por un factor de fase [4], y acorde a la elección de la fase se satisface

$$\begin{aligned}\hat{J}_+\psi_{jm} &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\psi_{j,m+1} \text{ y} \\ \hat{J}_-\psi_{jm} &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\psi_{j,m-1} \text{ con} \\ \hat{J}_+\psi_{jj} &= \hat{J}_-\psi_{j,-j} = 0\end{aligned}\tag{1.102}$$

Los $2j + 1$ eigenvectores son transformados unos a otros por los operadores J_{\pm} , J^2 y J_z . Aplicando estos operadores, i.e. en el contexto de operadores de rotación, siempre obtenemos eigenvectores o sus combinaciones lineales como resultado. En otras palabras, el espacio vectorial de dimensión $2j + 1$ creado por las ψ_{jm} eigenfunciones es invariante bajo la aplicación de los operadores del momento angular. Por tanto podemos llamar a este un subespacio invariante. Esto nos lleva a la expresión de una representación irreducible del grupo de rotaciones.

En general hay muchos estados ψ_{jm} para un par de valores j y m los cuales pueden ser denotados por ψ_{njm} . Donde n es un nuevo número cuántico que distingue entre estos estados.

A continuación usando las relaciones obtenidas con anterioridad (ver ecuación 1.102), se puede calcular la representación matricial de los operadores del momento angular [4].

En el caso del momento angular $j = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}(J_x)_{mm'} &= S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (J_y)_{mm'} &= S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ (J_z)_{mm'} &= S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.103}$$

Ahora consideremos el caso en el cual combinamos dos momentos angulares \hat{J}_1 y \hat{J}_2 los cuales formán un momento angular total \hat{J}

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2.\tag{1.104}$$

Ya vimos que el operador suma del momento angular obedece las mismas relaciones de conmutación que el momento angular individual. Sean $\psi_{j_1 m_1}$ y $\psi_{j_2 m_2}$ el conjunto de eigenfunciones ortonormales de los operadores \hat{J}_1^2 , \hat{J}_{1z} y \hat{J}_2^2 , \hat{J}_{2z} respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{J}_1^2 \psi_{j_1 m_1}^{(1)} &= j_1(j_1 + 1)\psi_{j_1 m_1}^{(1)} & \text{y} & \quad \hat{J}_2^2 \psi_{j_2 m_2}^{(2)} = j_2(j_2 + 1)\psi_{j_2 m_2}^{(2)} \\ \hat{J}_{1z} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} &= m_1 \psi_{j_1 m_1}^{(1)} & \text{y} & \quad \hat{J}_{2z} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} = m_2 \psi_{j_2 m_2}^{(2)}.\end{aligned}\tag{1.105}$$

Pensemos por ejemplo en un problema de dos electrones, en el que cada partícula simple es descrita por la función de onda $\psi_{j_1 m_1}(1)$ y $\psi_{j_2 m_2}(2)$. La función de onda total del momento angular de los dos electrones está dada por $\psi_{jm}(1, 2)$, con un momento angular total j y su componente m . Las eigenfunciones de los operadores del momento angular total \hat{J}^2 y \hat{J}_z son denotados por $\psi_{jm}(1, 2)$. Escribimos ψ_{jm} como el producto $\psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}$. La función de onda total puede ser descrita como una combinación lineal de productos $\psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}$.

$$\psi_{jm}(1, 2) = \sum_{m_1, m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}. \quad (1.106)$$

Los coeficientes $(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)$ muestran la dependencia de los números cuánticos. Estos son los ya conocidos coeficientes de Clebsch-Gordan. Según el acoplamiento del momento angular [8] tenemos $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ como veremos más abajo.

La relación (1.106) da la transformación del espacio de Hilbert, generado por los vectores ortonormales $\psi_{j_1 m_1}$ y $\psi_{j_2 m_2}$ al conjunto generado por ψ_{jm} . A continuación encontraremos las condiciones para la evaluación de los coeficientes $(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)$. Aplicamos \hat{J}_z a la parte desacoplada $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z \psi_{jm} &= (\hat{J}_{1z} - \hat{J}_{2z}) \sum_{m_1, m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \\ &= \sum_{m_1, m_2} (m_1 - m_2) (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

De la misma forma actuando, sobre la parte acoplada ψ_{jm} tenemos

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} m (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}. \quad (1.108)$$

La suma sobre m_1 va de $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ análogamente para el caso de m_2 que toma los valores $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$. De las condiciones anteriores y la condición de independencia lineal tenemos que

$$(m - m_1 - m_2) (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) = 0. \quad (1.109)$$

Esto implica que los coeficientes $(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)$ se hacen cero para $m \neq m_1 + m_2$, i.e. m debe satisfacer $m = m_1 + m_2$. Podemos reducir la doble sumatoria de (1.106) haciendo $m_2 = m - m_1$, llegando a

$$\psi_{jm}(1, 2) = \sum_{m_1} (j_1 m_1 j_2 m - m_1 | jm) \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m - m_1}^{(2)}. \quad (1.110)$$

El siguiente paso es calcular los valores posibles para el número cuántico j . Usamos que

$$\hat{J}^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm}. \quad (1.111)$$

Sabemos que $-j \leq m \leq j$. De la relación anterior que $m = m_1 + m_2$ tenemos

$$\underline{m_{max} = j_1 + j_2.} \quad (1.112)$$

lo que implica que

$$\underline{j_{max} = j_1 + j_2.} \quad (1.113)$$

A partir de estos resultados los valores que j puede tomar son [4]:

$$j = \begin{cases} j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 - 1 \\ \vdots \\ |j_1 - j_2|. \end{cases} \quad (1.114)$$

Para simplificar el siguiente procedimiento haremos uso de la notación de Dirac, el bracket. La ecuación (1.106) se escribe como (suma sobre índices repetidos)

$$|jm\rangle = |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | jm\rangle. \quad (1.115)$$

Aquí $|m_1 m_2\rangle$ representa el producto $|m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$. Los números j_1 y j_2 son omitidos, y deben ser considerados como números fijos para cualquier m_1 y m_2 que aparezca. El elemento matriz es

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle = \int \psi_{j_1 m_1}^*(1) \psi_{j_2 m_2}^*(2) \psi_{jm}(1, 2) dV_1 dV_2. \quad (1.116)$$

Acorde a nuestra notación previa (1.106), el coeficiente de Clebsch-Gordan es

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle = (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm). \quad (1.117)$$

De la ortogonalidad de ambos conjunto base deducimos

$$\underline{\delta_{jj'} \delta_{mm'}} = \langle jm | j' m'\rangle = \langle jm | m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | j' m'\rangle \quad (1.118)$$

En lo siguiente buscaremos una relación de recurrencia para los coeficientes de Clebsch-Gordan. Comenzando por

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2.$$

El operador de momento angular en componentes esféricas es

$$\begin{aligned} \hat{J}_\pm &= \hat{J}_{1\pm} + \hat{J}_{2\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y = (\hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}) \pm i(\hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}) \\ \hat{J}_0 &= \hat{J}_{10} + \hat{J}_{20} = \hat{J}_z = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) \end{aligned} \quad (1.119)$$

Aplicando \hat{J}_+ a (1.115) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{J}_+|jm\rangle &= (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2+})|jm\rangle = (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2+})|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|jm\rangle \\ &= [\hat{J}_1 |m_1m_2\rangle + \hat{J}_2 |m_1m_2\rangle]\langle m_1m_2|jm\rangle. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Usando (1.102) encontramos que

$$\begin{aligned} [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}|jm+1\rangle &\{ [j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)]^{\frac{1}{2}}|m_1+1m_2\rangle + \\ &[j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)]^{\frac{1}{2}}|m_1m_2+1\rangle\} \times \langle m_1m_2|jm\rangle \end{aligned} \quad (1.121)$$

Sustituyendo (1.115) del lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{[j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|jm+1\rangle}{= [j_1(j_1+1) - m'_1(m'_2-1)]^{\frac{1}{2}}|m'_1m'_2\rangle\langle m'_1-1, m_2|jm\rangle} \\ &- [j_2(j_2+1) - m'_2(m'_2-1)]^{\frac{1}{2}}|m_1m'_2\rangle\langle m_1m'_2-1|jm\rangle. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Aquí se introdujo $m'_1 = m_1 + 1$ en el primer término del lado derecho y en el segundo término se hizo $m'_2 = m_2 + 1$. La suma de m'_1 va desde $-j_1$ a j_1 , y m'_2 va desde $-j_2$ a j_2 . La razón es porque el factor de los términos $m'_1 = j_1 + 1$ y $m'_2 = j_2 + 1$ se hacen cero en (1.121). Entonces en (1.122), los términos con $m'_1 = j_1 + 1$ y $m'_2 = j_2 + 1$ no contribuyen. Similarmente encontramos que los términos con $m'_1 = -j_1$ y $m'_2 = -j_2$ en (1.122) pertenecen al vector nulo $| -j_1 - 1, m_2\rangle$ y $|m_1, -j_2 - 1\rangle$ en (1.121) y no contribuyen al resultado, m'_1 y m'_2 son índices de la sumatoria que podemos renombrarlos de nuevo como $m_1 = m'_1$ y $m_2 = m'_2$. Comparando el factor del mismo $|m_1m_2\rangle$,

$$\begin{aligned} &[j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1m_2|jm+1\rangle \\ &= [j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1-1, m_2|jm\rangle \\ &+ [j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1m_2-1|jm\rangle. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Repetiendo el proceso con \hat{J}_- nos da un resultado análogo

$$\begin{aligned} &\frac{[j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1m_2|jm-1\rangle}{= [j_1(j_1-1) - m_1(m_1+1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1-1m_2|jm\rangle} \\ &+ [j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)]^{\frac{1}{2}}\langle m_1m_2+1|jm\rangle. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Estas relaciones de recurrencia nos permiten derivar los coeficientes de Clebsch-Gordan para un momento angular j , pero diferente m . A partir de estas últimas ecuaciones podemos evaluar los coeficientes de Clebsch-Gordan $\langle m_1m_2|jm\rangle$.

Esta idea fue usada también para construir Coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ [10].

1.8. Teorema de Wigner-Eckart.

Definimos $2k+1$ operadores $\hat{T}_q^{(k)}$ ($q = -k, -k+1, \dots, k$) que son los componentes de un operador irreducible de la siguiente forma [8],

$$\langle I_m, T_q^k | = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^k \langle kq' | I_m | kq \rangle. \quad (1.125)$$

Sean los vectores base $|\tau jm\rangle$, y el elemento matriz $\langle \tau' j' m' | \hat{T}_q^{(k)} | \tau jm \rangle$, de un operador irreducible. Este está dado por el producto de un elemento matriz reducido $\langle \tau' j' | \hat{T}^{(k)} | \tau j \rangle$, el cual no depende de m, m' y q , y un coeficiente de Clebsch-Gordan

$$\langle \tau' j' m' | \hat{T}_q^{(k)} | \tau jm \rangle = (jmkq j'm') \langle \tau' j' | \hat{T}^{(k)} | \tau j \rangle. \quad (1.126)$$

La demostración se puede encontrar en [8].

1.8.1. Coeficientes de Wigner para $SU(3)$.

La letra α la vamos a usar para representar un conjunto de etiquetas usadas para distinguir bases ortonormales dentro de una representación irreducible $\Gamma = (\lambda\mu)$ de $SU(3)$. El coeficiente de Wigner $\langle \Gamma_1 \alpha_1; \Gamma_2 \alpha_2 | \Gamma \alpha \rangle_\rho$ es definido como un elemento de una transformación unitaria entre representaciones irreducibles ortonormales acopladas y no acopladas de $SU(3)$. El índice ρ es una etiqueta de multiplicidad y es usada para distinguir entre multiples ocurrencias de Γ en el producto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ [28].

Aquí $\alpha = \epsilon \Lambda M_\Lambda$ para la cadena de grupo canónica $SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$ o $\alpha = kLM$ para $SU(3) \supset SO(3)$ donde k es el índice de multiplicidad para (λ, μ) [28].

El teorema de Wigner en el caso $SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$ está dado por [28]

$$\langle \Gamma \alpha | T_{\alpha_2}^{\Gamma_2} | \Gamma_1 \alpha_1 \rangle = \sum_{\rho} \langle \Gamma_1 \alpha_1; \Gamma_2 \alpha_2 | \Gamma \alpha \rangle_\rho \langle \Gamma_1 || T^{\Gamma_2} || \Gamma \rangle_\rho. \quad (1.127)$$

El coeficiente de Clebsch-Gordan se puede factorizar como

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma_1 \epsilon_1 \Lambda_1 M_{\Lambda_1}; \Gamma_2 \epsilon_2 \Lambda_2 M_{\Lambda_2} | \Gamma \epsilon \Lambda M_\Lambda \rangle_\rho \\ & = \langle \Gamma_1 \epsilon_1 \Lambda_1; \Gamma_2 \epsilon_2 \Lambda_2 | \Gamma \epsilon \Lambda \rangle_\rho (\Lambda_1 M_{\Lambda_1}; \Lambda_2 M_{\Lambda_2} | \Lambda M_\Lambda). \end{aligned} \quad (1.128)$$

El primer factor del lado derecho de la ecuación (1.128) se llama coeficiente isoescalar y el segundo factor es simplemente un coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ [28].

1.9. Resumen.

Hasta aquí hemos dado un repaso a la teoría de grupos necesaria para comprender el tema central de la tesis. Comenzamos con la definición del grupo finito. Como ejemplo trabajamos con el grupo simétrico. Introdujimos las definiciones de la *tabla y diagrama de Young* haciendo una distinción entre éstas dos. Uno de los puntos importantes que se mencionó es la representación de grupos, caracteres e irreducibilidad de una representación. Con este último punto terminamos la revisión sobre grupos finitos. Posteriormente de una manera breve abordamos el tema de grupos continuos r -paramétricos de Lie y sus generadores. De estos últimos vimos dos de sus propiedades, la conmutatividad y la identidad de Jacobi. Continuamos con una representación equivalente en el espacio de bosones y el porque de la utilización de este espacio. Vimos una noción del operador de Casimir.

De las secciones más importantes es el que se refiere a coeficientes y series de Clebsch-Gordan pues son parte relevante para secciones posteriores.

Finalmente trabajamos con más detalle el ejemplo del grupo $SU(2)$ haciendo énfasis en su importancia dentro de la física cuántica. Mencionamos las fórmulas de recurrencia importantes para la obtención de coeficientes de Clebsch-Gordan.

Como sección final de este capítulo hablamos del Teorema de Wigner-Eckart para el grupo $SU(3)$ que jugará un papel importante dentro de la generalización del método propuesto a grupos mayores. Para mayor facilidad en se introdujo la notación de Dirac.

Capítulo 2

El caso $SU(3)$.

Después de haber revisado todos los elementos básicos y necesarios procederemos al desarrollo matemático para la obtención de los coeficientes de Clebsch-Gordan que nos servirá de ejemplo para un trabajo posterior con $U(8)$

2.1. Reducción de $SU(3)$.

Como ejemplo tomaremos la cadena de grupos

$$\begin{array}{ccccc} SU(3) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ (\lambda, \mu)k & & l & & m, \end{array} \quad (2.1)$$

donde (λ, μ) denota a las representaciones irreducibles de $SU(3)$ y k la multiplicidad, l es el momento angular y m su proyección. Consideraremos solo representaciones irreducibles de tipo $(N, 0)$, las cuales son simétricas. Esta consideración se debe a que para el caso de la cadena de grupos $U(8) \supset SU(3)$ solo nos interesan las representaciones irreducibles $[N]$ totalmente simétricas. Así como también en el caso más sencillo, i. e. $SU(3) \supset SU(2)$ para las representaciones irreducibles $(N, 0)$ hay soluciones analíticas con que comparar [11]. Para este tipo de representaciones el índice de multiplicidad es $k = 1$ siempre.

El primer paso es la construcción de polinomios representando estados de máximo peso en $SO(3)$, i.e. Necesitamos resolver las ecuaciones de eigenvalores con $m = l$

$$\begin{array}{l} NP_{Nu}(b^\dagger) = NP_{Nu}(b^\dagger) \\ L_z P_{Nu}(b^\dagger) = l P_{Nu}(b^\dagger) \\ L_- P_{Nu}(b^\dagger) = 0. \end{array} \quad (2.2)$$

Para esto, los acoplamientos elementales (también llamados epd's, "elementary permissible diagram" o "Integrity basis") [29] tienen que ser construidos, es decir, un

conjunto completo de acoplamientos básicos en términos de operadores bosónicos de creación b_m^\dagger ($m = 0, \pm 1$) de tal forma que todos los estados de máximo peso para un momento angular sean obtenidos por un número de oscilación de quantas total N [30, 31]. Hay dos epd's [30, 31], i.e.

$$\begin{aligned} A &= b_{+1}^\dagger \\ B &= -\sqrt{3}[b^\dagger \otimes b^\dagger]_0^{[0]} \\ &= (b^\dagger \cdot b^\dagger). \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde la última igualdad de (2.3) se define como

$$\begin{aligned} (b^\dagger \cdot b^\dagger) &= \sum_{m=0} (-1)^m b_m^\dagger b_{-m}^\dagger \\ &= -2b_{+1}^\dagger b_{-1}^\dagger + (b_0^\dagger)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La relación entre índice covariante y contravariante es la siguiente

$$b^m = (-1)^m b_{-m} \quad (2.5)$$

y además sabemos que por ser bósones cumplen las relaciones de conmutación

$$[b^{m'}, b_m^\dagger] = \delta_{m'm}. \quad (2.6)$$

Reescribiendo (2.4) tenemos

$$\begin{aligned} (b^\dagger \cdot b^\dagger) &= \sum_{m=0} b_m^\dagger b^{\dagger m} \\ &= 2b_{+1}^\dagger b^{\dagger +1} + (b_0^\dagger)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por la regla de conmutación (2.6) podemos interpretar los operadores b^m como derivada $\frac{\partial}{\partial b_m^\dagger}$. Si hacemos $b_{+1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $b_0 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ y $b^{+1} = \frac{\partial}{\partial x_3}$ tenemos

$$(b \cdot b) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (2.8)$$

El estado de máximo peso no normalizado está dado como

$$\text{max peso} : |N \ l \ m = l\rangle \sim (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-l}{2}} (b_{+1}^\dagger)^l |0\rangle. \quad (2.9)$$

Esto nos permite generar todos los estados del momento angular para un N fijo. Con referencia a [8] un estado en general $|N \ l \ m\rangle$ se escribe como

$$|N \ l \ m\rangle = A_{n \ l} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^n \mathcal{Y}_{lm}(b^\dagger) |0\rangle \quad (2.10)$$

donde A_{nl} es la normalización y \mathcal{Y}_{lm} son armónicos esféricos sólidos. Tomando en cuenta que $n = \frac{N-l}{2}$ para A_{nl} , tenemos que [8, 31]

$$A_{nl} = \left[\frac{4\pi}{(2n+2l+1)!!(2n)!!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{Y}_l(b^\dagger) = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}} (b_{+1}^\dagger)^l. \quad (2.12)$$

Por conveniencia no hemos tomado en cuenta la fase $(-1)^n$ en A_{nl} que está en la referencia [31]. Ahora construyamos el estado $|N l l\rangle$ usando la ecuación (2.10) con $m = l$ el cual será un estado de máximo peso y de donde podremos sacar su factor de normalización. Así tenemos

$$\begin{aligned} |N l l\rangle &= A_{nl} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-l}{2}} \mathcal{Y}_l(b^\dagger) |0\rangle \\ &= A_{nl} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-l}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}} (b_{+1}^\dagger)^l |0\rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

Haciendo la sustitución de (2.11) y simplificando el factor obtenemos

$$|N l l\rangle = \left[\frac{(2l+1)!!}{(2n+2l+1)!!(2n)!!l!} \right]^{\frac{1}{2}} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{N-l}{2}} (b_{+1}^\dagger)^l |0\rangle. \quad (2.14)$$

Esta última ecuación (2.14) nos da el estado de máximo peso en $SO(3)$ normalizado con un factor de normalización \mathcal{N}_{nl}

$$\mathcal{N}_{nl} = \left[\frac{(2l+1)!!}{(2n+2l+1)!!(2n)!!l!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Hasta aquí ya construimos los estados de máximo peso normalizados.

El mismo resultado se puede obtener partiendo de (2.10), aplicando el hermitiano conjugado del lado izquierdo y usando métodos algebraicos manuales [31] o algebraicos numéricos [32]. Es importante notar que para el caso de $U(8)$ hay que usar métodos algebraicos numéricos porque los manuales dejarán de ser manejables.

2.1.1. Construcción de un estado con $m \neq l$.

Ahora continuaremos con la construcción de estados. El estado $|N l m\rangle$ con $m \neq l$ lo expresamos como

$$|N l m\rangle = \mathcal{N} L_-^{l-m} |N l l\rangle \quad (2.16)$$

donde $|N l l\rangle$ es el estado de máximo peso normalizado, \mathcal{N} es el factor de normalización del nuevo estado y L_-^{l-m} es el operador de descenso aplicado $(l-m)$ veces.

Para encontrar el factor de normalización hacemos el producto con su conjugado y obtenemos

$$\overline{\mathcal{N}^2 \langle N \ l \ l | L_+^{l-m} L_-^{l-m} | N \ l \ l \rangle}. \quad (2.17)$$

Antes de continuar con la deducción veamos como es la aplicación de un operador de ascenso L_+ a un estado $L_-^n |N \ l \ m\rangle$

$$L_+ L_-^n |N \ l \ l\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} L_-^{n-1-k} [L_+, L_-] L_-^k |N \ l \ l\rangle \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} L_-^{n-1-k} 2(l-k) L_-^k |N \ l \ l\rangle. \quad (2.19)$$

En la última igualdad usamos que

$$[L_+, L_-] = 2L_0. \quad (2.20)$$

y

$$L_0 L_-^k |N \ l \ l\rangle = (l-k) L_-^k |N \ l \ l\rangle. \quad (2.21)$$

Continuando con el algebra a partir de (2.19) tenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_-^{n-1-k} 2(l-k) |N \ l \ l\rangle = L_-^{n-1} (2ln - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k) |N \ l \ l\rangle \quad (2.22)$$

y

$$\begin{aligned} 2ln - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k &= 2ln - n(n-1) \\ &= n(2l - n + 1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Obtenemos finalmente que la aplicación del operador de creación es

$$\overline{L_+ L_-^n |N \ l \ l\rangle} = \overline{n(2l - n + 1) L_-^{n-1} |N \ l \ l\rangle}. \quad (2.24)$$

Para darnos una idea si hay alguna formula para el caso general hacemos una segunda aplicación del operador de creación y observamos que

$$\begin{aligned} L_+^2 L_-^n |N \ l \ l\rangle &= L_+ n(2l - n - 1) L_-^{n-1} |N \ l \ l\rangle \\ &= \overline{n(n-1)(2l - n + 1)(2l - n - 2) L_-^{n-2} |N \ l \ l\rangle}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Con estos resultados en cuenta hacemos la *propuesta* de la formula para $p \leq n$

$$L_+^p L_-^n |N l l\rangle = \frac{n!(2l-n+p)}{(n-p)!(2l-n)!} L_-^{n-p} |N l l\rangle. \quad (2.26)$$

La demostración la haremos por inducción. La base de inducción ya la comprobamos con las ecuaciones (2.24) y (2.25). Suponemos la formula (2.26) válida para p , queda por demostrar que es valida para $p+1$, i. e.

$$\begin{aligned} L_+^{p+1} L_-^n |N l l\rangle &= L_+ \frac{n!(2l-n+p)!}{(n-p)!(2l-n)!} L_-^{n-p} |N l l\rangle \\ &= \frac{n!(2l-n+p)!}{(n-p)!(2l-n)!} (n-p)(2l-n+p+1) L_-^{n-p-1} |N l l\rangle \\ &= \frac{n!(2l-n+(p+1))!}{(n-(p+1))!(2l-n)!} L_-^{n-(p+1)} |N l l\rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

que es lo que queriamos demostrar y por tanto es válida la formula (2.26).

Ahora ya podemos continuar con la construcción del estado arbitrario. Usando la ecuación (2.26) tomando a $p = l - m$ y $n = l - m$, sustituyendo en (2.17) obtenemos

$$\mathcal{N}^2 \langle N l l | L_+^{l-m} L_-^{l-m} |N l l\rangle = \mathcal{N}^2 \frac{(l-m)!(2l)!}{(2l-l+m)!} \langle N l l | N l l\rangle = 1. \quad (2.28)$$

Para encontrar el factor de normalización usamos que $\langle N l l | N l l\rangle = 1$

$$\mathcal{N}^2 \frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!} = 1 \quad (2.29)$$

y despejando \mathcal{N} tenemos

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}}. \quad (2.30)$$

En este punto hemos obtenido aparte de la expresión de los estados de máximo peso, también la expresión de estados arbitrario $m \neq l$ con la ayuda de operadores de descenso L_- .

2.1.2. Coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$.

Los CGC de $SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2)$ están relacionados con la integración de tres polinomios normalizados para el caso de representaciones irreducibles totalmente simétricas.

$$\langle 0 | P_{N_3 l_3 m_3}(b) P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) P_{N_2 l_2 m_2}(b^\dagger) | 0 \rangle \quad (2.31)$$

La notación (2.31) la podemos ver como:

$$\overline{\langle N_3 l_3 m_3 | P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 m_2 \rangle} \quad (2.32)$$

Si aplicamos el Teorema de Wigner-Eckart de $SU(2)$ [4] a (2.32) obtenemos:

$$\overline{\langle N_3 l_3 m_3 | P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 m_2 \rangle} = (l_2 m_2, l_1 m_1 | l_3 m_3) \langle N_3 l_3 | P_{N_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 \rangle. \quad (2.33)$$

Del lado derecho de la igualdad tenemos un coeficiente de Clebsch-Gordan y un elemento doble reducido de $SU(2)$. Pero por otro lado podemos aplicar a (2.32) el Teorema de Wigner-Eckart de $SU(3)$ [28]

$$\overline{\langle N_3 l_3 m_3 | P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 m_2 \rangle} = \langle (N_2, 0) 1 l_2 m_2, (N_1, 0) 1 l_1 m_1 | (N_3, 0) 1 l_3 m_3 \rangle_1 \langle N_3 || P_{N_2}(b^\dagger) || N_2 \rangle_1 \quad (2.34)$$

En donde ahora tenemos del lado derecho de la ecuación un coeficiente de Clebsch-Gordan y un elemento triple reducido de $SU(3)$. En este caso solo hay multiplicidades igual a 1 en el producto $(N_2, 0) \times (N_1, 0)$ y por lo tanto no aparece la sumatoria de la ecuación (1.127). Sin embargo mantendremos $\rho = 1$ en la notación del coeficiente de Clebsch-Gordan y el elemento triple reducido.

Analizaremos un caso muy particular donde los polinomios de índices 1 y 3 son de máximo peso en $SO(3)$ de esta manera el elemento $\langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle$ puede ser calculado usando armónicos esféricos [8]. Para esto tomamos

$$\begin{aligned} \overline{m_3} &= l_3 \\ m_1 &= l_1 \\ \overline{m_1 + m_2} &= m_3 \\ l_1 + m_2 &= l_3. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir de (2.35) podemos deducir que

$$\overline{m_2} = l_3 - l_1 \quad (2.36)$$

además que l_2 debe cumplir con las desigualdades

$$|l_3 - l_1| \leq l_2 \leq l_1 + l_3. \quad (2.37)$$

Tomando estos valores y sustituyendo en (2.32), (2.33) y (2.34) tenemos

$$\begin{aligned} \langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle &= (l_2 l_3 - l_1, l_1 l_1 | l_3 l_3) \langle N_3 l_3 || P_{N_1 l_1}(b^\dagger) || N_2 l_2 \rangle \\ &= \langle (N_2, 0) 1 l_2 l_3 - l_1, (N_1, 0) 1 l_1 l_1 | (N_3, 0) 1 l_3 l_3 \rangle_1 \langle (N_2, 0) || P_{(N_1, 0)}(b^\dagger) || (N_3, 0) \rangle_1. \end{aligned} \quad (2.38)$$

El elemento matriz puede ser obtenido usando los resultados para armónicos esféricos sólidos dado en [8] esta manera de obtenerlos de forma analítica se vuelve complicado para grupos de rango mayor. Otra forma más práctica es aplicando directamente el polinomio $\langle P_{N_3 l_3 l_3}(b)$ al lado derecho y usando la relación $b^m = \frac{\partial}{\partial b_m^\dagger}$ para calcularlo algebraicamente a través de un programa como MATHEMATICA [32].

La ecuación (2.38) es nuestro punto de partida para la generalización a $U(8)$. Sin embargo para fines de $U(8)$ el elemento correspondiente será calculado algebraicamente, usando las relaciones de conmutación de los operadores de ascenso-descenso y las expresiones equivalentes de L_- en términos de operadores bosónicos que veremos más adelante.

De la primera línea de la ecuación (2.38) mostraremos como calcular el elemento del lado izquierdo para un caso en particular. Y como ya conocemos los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ entonces el elemento $\langle N_3 l_3 | P_{N_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 \rangle$ doble reducido puede ser calculado. A partir de este elemento doble reducido podemos obtener todos los elementos $\langle N_3 l_3 m_3 | P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 m_2 \rangle$ los cuales ya no son estados de máximo peso. Este es el primer paso.

El segundo paso se hace a partir de la misma ecuación (2.38) pero en la segunda línea en donde tenemos que determinar el elemento de matriz triple reducido $\langle N_3 | | P_{N_1}(b^\dagger) | | N_2 \rangle_1$. Para realizar el cálculo de este elemento haremos uso de un caso especial en el que queda igualado a $\langle N_3 l_3 m_3 | P_{N_1 l_1 m_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 m_2 \rangle$. Del paso anterior este último elemento ya es conocido para cualquier caso, por lo que podemos calcular el elemento triple reducido. En este punto tenemos lo necesario para calcular los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ para estas representaciones particulares.

En lo que resta del trabajo procederemos a encontrar la forma analítica de los coeficientes y comparar con resultados existentes.

Para realizar el cálculo del elemento $\langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle$ usando el operador de descenso L_- necesitamos conocer su aplicación al estado de máximo peso. Entonces definimos

$$L_m = \sqrt{2} [b^\dagger \times b^\dagger]_m^{[1]} \quad (2.39)$$

Y L_- está dado por

$$\begin{aligned} L_- &= \frac{\sqrt{2}}{\sum_{m_1, m_2} (1 \ m_1 | 1 \ m_2 | 1 \ -1) b_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_2} b^{m_2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} (1 \ 0, 1 \ -1 | 1 \ -1) b_0^\dagger b^1 + (1 \ -1, 1 \ 0 | 1 \ -1) b_{-1}^\dagger (-1) b^0}{b_0^\dagger b^1 + b_{-1}^\dagger b^0} \\ &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Usando L_- podemos calcular

$$\langle 0 | P_{N_3 l_3 l_3}(b) P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) P_{N_2 l_2 l_3 - l_1}(b^\dagger) | 0 \rangle \quad (2.41)$$

donde $|P_{N_2 l_2 l_3 - l_1}(b^\dagger)|0\rangle$ se obtiene aplicando $L_-^{l_2 - (l_3 - l_1)}|P_{N_2 l_2 l_2}(b^\dagger)|0\rangle$. Por tanto el estado normalizado que se obtiene es

$$\langle 0|P_{N_3 l_3 l_3}(b)P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger)L_-^{l_1 + l_2 - l_3}P_{N_2 l_2 l_2}(b^\dagger)|0\rangle \sqrt{\frac{l_3!}{(2l_2 - l_3)!(2l_2)!}}. \quad (2.42)$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} b_{+1}^\dagger &= x_1 \\ b_0^\dagger &= x_2 \\ b_{-1}^\dagger &= x_3. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Podemos hacer el cálculo del elemento $\langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle$ de manera algebraica, usando la representación de operadores bosónicos de L_- .

Por otro lado ese mismo elemento como ya habíamos mencionado anteriormente es calculado en [8] con normalización A_{nl} y armónicos esféricos sólidos \mathcal{Y}_{lm} haciendolo de esa manera tenemos que

$$\begin{aligned} \langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle &= \langle 0 | A_{n_3 l_3} \mathcal{Y}_{l_3 l_3}(b) (b \cdot b)^{n_3} A_{n_1 l_1}(b^\dagger \cdot b^\dagger)^{n_1} \mathcal{Y}_{l_1 l_1}(b^\dagger) \cdot \\ &A_{n_2 l_2}(b^\dagger \cdot b^\dagger)^{n_2} \mathcal{Y}_{l_2 l_3 - l_1}(b^\dagger) | 0 \rangle \\ &= A_{n_1 l_1} A_{n_2 l_2} A_{n_3 l_3} \langle 0 | \mathcal{Y}_{l_3 l_3}(b) (b \cdot b)^{n_3} (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{n_1 + n_2} \cdot \\ &\sum_{lm} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (l_1 l_1, l_2 l_3 - l_1 | l m) \\ &(l_1 0 l_2 0 | l 0) (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{l_1 + l_2 - l}{2}} \mathcal{Y}_{lm}(b^\dagger) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde se utilizó

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{l_1 m_1}(b^\dagger) \mathcal{Y}_{l_2 m_2}(b^\dagger) &= \sum_{lm} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (l_1 m_1, l_2 m_2 | l_1 l_2 l m) \\ &\times (l_1 0 l_2 0 | l_1 l_2 l 0) (b^\dagger \cdot b^\dagger)^{\frac{l_1 + l_2 - l}{2}} \mathcal{Y}_{lm}(b^\dagger) \end{aligned} \quad (2.45)$$

De la ortonormalidad de los armónicos esféricos obtenemos las condiciones para l y m . Siendo estas condiciones $l = l_3$ y $m = l_3$ que implica

$$\begin{aligned} \langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 l_3 - l_1 \rangle &= \delta_{N_3, N_1 + N_2} \frac{A_{n_1 l_1} A_{n_2 l_2}}{A_{n_3 l_3}} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &(l_1 l_1, l_2 l_3 - l_1 | l_3 l_3) (l_1 0, l_2 0 | l_3 0). \end{aligned} \quad (2.46)$$

En el último renglón el elemento $(l_1 l_1 l_2 l_3 - l_1 | l_3 l_3)$ aparece nuevamente por lo tanto comparando con la ecuación (2.38) se tiene que

$$\langle N_3 l_3 | P_{N_1 l_1} | N_2 l_2 \rangle = \delta_{N_3, N_1 + N_2} \frac{A_{n_1 l_1} A_{n_2 l_2}}{A_{n_3 l_3}} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (l_1 0, l_2 0 | l_3 0). \quad (2.47)$$

Hasta aquí ya resolvimos la primera parte de la ecuación (2.38). Para la segunda parte es decir con referencia al segundo renglón de la misma ecuación (2.38) tomaremos nuevamente un caso particular para facilitar el cálculo, i.e. $N_1 = l_1$, $N_2 = l_2$ y $N_3 = l_3$. La ecuación se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \langle N_3 N_3 N_3 | P_{N_1 N_1 N_1} (b^\dagger) | N_2 N_2 N_2 \rangle = \\ & \langle (N_2, 0) | N_2 N_2, (N_1, 0) | N_1 N_1 | (N_3, 0) | N_3 N_3 \rangle \langle (N_3, 0) | | P_{(N_1, 0)} (b^\dagger) | | (N_2, 0) \rangle \\ & = \langle (N_2, 0) | N_2, (N_1, 0) | N_1 | (N_3, 0) | N_3 \rangle_1 \\ & (N_2 N_2, N_1 N_1 | N_3 N_3) \langle (N_3, 0) | | P_{(N_1, 0)} (b^\dagger) | | (N_2, 0) \rangle \end{aligned} \quad (2.48)$$

La última igualdad salió usando la ecuación (1.128) en donde aparece un factor isoescalar. La manera de calcularlo ya fue mencionado con anterioridad al hablar del elemento $\langle N_3 l_3 l_3 | P_{N_1 l_1 l_1} (b^\dagger) | N_2 l_2 l_2 - l_1 \rangle$. Pero en el caso considerado el factor isoescalar y el coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ son iguales a 1 por ser acoplamientos lineales teniendo finalmente

$$\langle N_3 N_3 N_3 | P_{N_1 N_1 N_1} (b^\dagger) | N_2 N_2 N_2 \rangle = \langle (N_3, 0) | | P_{(N_1, 0)} (b^\dagger) | | (N_2, 0) \rangle \quad (2.49)$$

De la ecuación (2.47) sustituyendo los nuevos valores para l_1 , l_2 y l_3 tenemos

$$\begin{aligned} \langle N_3 N_3 N_3 | P_{N_1 N_1 N_1} (b^\dagger) | N_2 N_2 N_2 \rangle & = \delta_{N_3, N_1 + N_2} \frac{A_{0N_1} A_{0N_2}}{A_{0N_3}} \left[\frac{(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)}{4\pi(2N_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & (N_1 \ 0, N_2 \ 0 | N_3 \ 0) \\ & = \delta_{N_3, N_1 + N_2} \left[\frac{(2N_3 - 1)!!}{(2N_1 - 1)!!(2N_2 - 1)!!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & (N_1 \ 0, N_2 \ 0 | N_3 \ 0). \end{aligned} \quad (2.50)$$

El coeficiente de Clebsch-Gordan de esta última ecuación tiene una forma analítica conocida que esta dada por

$$\begin{aligned} (N_1 \ 0, N_2 \ 0 | N_3 \ 0) & = (-1)^{\frac{N_1 + N_2 - N_3}{2}} \frac{\sqrt{(2N_3 + 1) \binom{N_1 + N_2 + N_3}{2}}!}{\left(\frac{N_2 + N_3 - N_1}{2} \right)! \left(\frac{N_1 + N_3 - N_2}{2} \right)! \left(\frac{N_1 + N_2 - N_3}{2} \right)!} \\ & \left[\frac{(N_2 + N_3 - N_1)! (N_1 + N_3 - N_2)! (N_1 + N_2 - N_3)!}{(N_1 + N_2 + N_3 + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sustituimos (2.51) en (2.50) y usando el resultado (2.49) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle (N_3, 0) ||| P_{(N_1, 0)} ||| (N_2, 0) \rangle_1 &= \delta_{N_3, N_1 + N_2} \left[\frac{(2N_3 - 1)!!}{(2N_1 - 1)!!(2N_2 - 1)!!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \frac{(-1)^{\frac{N_1 + N_2 - N_3}{2}} \sqrt{(2N_3 + 1)} \left(\frac{N_1 + N_2 + N_3}{2} \right)!}{\left(\frac{N_2 + N_3 - N_1}{2} \right)! \left(\frac{N_1 + N_3 - N_2}{2} \right)! \left(\frac{N_1 + N_2 - N_3}{2} \right)!} \\ &\cdot \left[\frac{(N_2 + N_3 - N_1)!(N_1 + N_3 - N_2)!(N_1 + N_2 - N_3)!}{(N_1 + N_2 + N_3 + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tomando ahora $N_3 = N_1 + N_2$, $N_3 - N_1 = N_2$ y $N_3 - N_2 = N_1$ para una mayor simplificación y sabiendo que $\frac{(2N_3 + 1)!!}{(2N_3 + 1)!} = \frac{1}{(2N_3)!!} = \frac{1}{2^{N_3} N_3!}$ podemos escribir la ecuación (2.52) como

$$\langle (N_3, 0) ||| P_{(N_1, 0)} ||| (N_2, 0) \rangle_1 = \delta_{N_3, N_1 + N_2} \left[\frac{N_3!}{N_1! N_2!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.53)$$

A partir de (2.47) obtuvimos

$$\begin{aligned} &\langle N_3 l_3 ||| P_{N_1 l_1} ||| N_2 l_2 \rangle \\ &= \delta_{N_3, N_1 + N_2} \frac{A_{N_1 l_1} A_{N_2 l_2}}{A_{N_3 l_3}} \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} (l_1 \ 0, l_2 \ 0 | l_3 \ 0) \\ &= \left[\frac{4\pi(2n_3 + 2l_3 + 1)!!(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{(2n_1 + 2l_1 + 1)!!(2n_1)!!(2n_2 + 2l_2 + 1)!!(2n_2)!4\pi(2l_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot (-1)^{\frac{l_1 + l_2 - l_3}{2}} \left[\frac{(2l_3 + 1)(l_2 + l_3 - l_1)!(l_1 + l_3 - l_2)!(l_1 + l_2 - l_3)!}{(l_1 + l_2 + l_3 + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \frac{\left(\frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} \right)!}{\left(\frac{l_2 + l_3 - l_1}{2} \right)! \left(\frac{l_1 + l_3 - l_2}{2} \right)! \left(\frac{l_1 + l_2 - l_3}{2} \right)!} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para obtener la última igualdad escribimos de forma explícita el coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$. Definimos para fines posteriores $(n_k = \frac{N_k - l_k}{2})$

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= (-1)^{\frac{l_1 + l_2 - l_3}{2}} \left(\frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} \right)! \\ &\cdot \left[\frac{(N_3 + l_3 + 1)!!(N_3 - l_3)!!(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(l_2 + l_3 - l_1)!(l_1 + l_2 - l_3)!(l_1 + l_3 - l_2)!}{(N_1 + l_1 + 1)!!(N_1 - l_1)!!(N_2 + l_2 + 1)!!(N_2 - l_2)!!(l_1 + l_2 + l_3 + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \frac{1}{\left(\frac{l_2 + l_3 - l_1}{2} \right)! \left(\frac{l_1 + l_3 - l_2}{2} \right)! \left(\frac{l_1 + l_2 - l_3}{2} \right)!} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Usando (2.33) y la segunda igualdad de (2.48) tenemos

$$\begin{aligned} & (l_2 m_2, l_1 m_1 | l_3 m_3) \langle N_3 l_3 | P_{N_1 l_1}(b^\dagger) | N_2 l_2 \rangle = \\ & \langle (N_2 0) 1 l_2 (N_1, 0) 1 l_1 | (N_3 0) 1 l_3 \rangle_1 (l_2 m_2, l_1 m_1 | l_3 m_3) \langle (N_3, 0) | | P_{(N_1, 0)}(b^\dagger) | | (N_2, 0) \rangle \end{aligned} \quad (2.56)$$

En esta última ecuación ya conocemos los elementos doble y triple reducido, ecuaciones (2.55) y (2.53) respectivamente, notamos que aparece en ambos lados el mismo coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ por lo que se anularán cuando despejamos el elemento isoescalar y sustituyendo las ecuaciones (2.55) y (2.53) llegamos a

$$\langle (N_2, 0) 1 l_2 (N_1, 0) 1 l_1 | (N_3, 0) l_3 \rangle_1 = \mathcal{X} \left[\frac{N_1! N_2!}{N_3!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.57)$$

Con esta última ecuación y los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ ya conocidos podemos calcular los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ que es nuestro objetivo final.

A continuación haremos comparaciones con resultados particulares. En [9] tenemos

$$\langle (\lambda, 0) L - 1; (1, 0) 1 | (\lambda + 1, 0) L \rangle = \left[\frac{(\lambda + L + 2)L}{(\lambda + 1)(2L + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

Para obtener ese resultado tomamos los siguientes valores

$$\begin{aligned} N_2 &= \lambda \\ N_1 &= 1 \\ N_3 &= \lambda + 1 \\ l_2 &= L - 1 \\ l_1 &= 1 \\ l_3 &= L \end{aligned} \quad (2.59)$$

y sustituimos en (2.55) obteniendo

$$\mathcal{X} = \frac{L}{(L-1)!2!0!} \left[\frac{(\lambda + L + 2)!!(\lambda + 1 - L)!!3(2L - 1)!0!2!}{3!!0!(\lambda + 1)!!(\lambda - 2 + 1)!!(2\lambda + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.60)$$

Finalmente hacemos las sustituciones correspondiente en (2.57)

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \left[\frac{1!\lambda!}{(\lambda + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{1}{\lambda + 1} \right]^{\frac{1}{2}} L \left[\frac{(\lambda + L + 2)2}{(2L + 1)2L} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{L(\lambda + L + 2)}{(\lambda + 1)(2L + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Está última ecuación es igual a (2.58).

Por otro lado en [18] se tiene la siguiente formula analítica

$$\begin{aligned} \langle (\lambda_1 0)_{L_1}, (\lambda_2 0)_{L_2} | (\lambda 0)_{L_3} \rangle &= \frac{1}{4} [1 + (-1)^{\lambda_1 + L_1}] [1 + (-1)^{\lambda_2 + L_2}] (L_1 0 L_2 0 | L 0) \cdot \\ &\left[\frac{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)\lambda_1! \lambda_2! (\lambda - L_3)!! (\lambda + \lambda + 1)!!}{(2L + 1)\lambda! (\lambda_1 - L_1)!! (\lambda_2 - L_2)!! (\lambda_1 + L_1 + 1)!! (\lambda_2 + L_2 + 1)!!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Usando la ecuación (2.54) sin expresar de forma explícita el coeficiente de Clebsch-Gordan de $SU(2)$ y la ecuación (2.57) en donde sustituimos $N_i = \lambda_i$, $l_i = L_i$ con $i = 1, 2$ y $N_3 = \lambda$, $l_3 = L$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle (\lambda_1 0)_{L_1}, (\lambda_2 0)_{L_2} | (\lambda 0)_{L_3} \rangle &= (L_1 0 L_2 0 | L 0) \cdot \\ &\left[\frac{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)\lambda_1! \lambda_2! (\lambda - L_3)!! (\lambda + \lambda + 1)!!}{(2L + 1)\lambda! (\lambda_1 - L_1)!! (\lambda_2 - L_2)!! (\lambda_1 + L_1 + 1)!! (\lambda_2 + L_2 + 1)!!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

que es igual a (2.62) excepto por el factor $\frac{1}{4}[1 + (-1)^{N_1 + l_1}][1 + (-1)^{N_2 + l_2}]$ que se anula pues N_k más l_k es siempre par.

De esta manera terminamos las comparaciones con resultados anteriores. En conclusión el método es efectivo y fácil de generalizar para grupos mayores, cumpliendo así el objetivo de este trabajo.

Capítulo 3

Futuro.

Obtención de coeficientes de Clebsch-Gordan de $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$.

Después de haber concluido con el ejemplo donde obtuvimos los coeficientes de Clebsch-Gordan para representaciones irreducibles $(N, 0)$ de $SU(3)$ de manera analítica dentro de la cadena

$$SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \tag{3.1}$$

y haber hecho una comparación con los resultados existentes, el siguiente paso es aplicar estas ideas a el grupo $U(8)$ con la cadena de grupos

$$U(8) \supset O(8) \supset SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1). \tag{3.2}$$

Continuando con la idea presentada comenzaremos por expresar los acoplamientos elementales (epd's por sus siglas en ingles) del grupo $U(8)$. Estos epd's serán expresados en términos de operadores bosónicos, de tal forma que los epd's dan una completa representación de todos los estados del grupo $U(8)$.

Posteriormente despues de tener la forma explícita de los estados procederemos a calcular los coeficientes requeridos.

Este cálculo planeamos hacerlo con el paquete de cómputo MATHEMATICA aprovechando su fácil manejo y aplicación, para posteriormente hacer una transferencia de los programas a algún otro lenguaje que podría ser C++ o FORTRAN.

El objetivo de los programas es generar archivos de datos que sean facilmente retomables por otros programas y así realizar con ellos, por ejemplo, la verificación de la validez del modelo esquemático de QCD.

En un futuro mucho más lejano se continuaría con la aplicación del método a la

cadena

$$\begin{array}{c}
 U(24) \supset U(8) \times U(3) \\
 \cup \quad \cup \\
 O(8) \quad SO(3) \\
 \cup \\
 \hline
 SO(3), \qquad \qquad \qquad (3.3)
 \end{array}$$

que aparece en en sistemas de muchos gluones [33].

En las siguientes secciones se da una descripción de los avances realizados en el trabajo propuesto.

3.1. Estados de $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$.

Los bósones bajo consideración tiene ocho grados de libertad y pertenecen a la irrep $(1, 1)$. La cadena de grupos es

$$\begin{array}{ccccccc}
 U(8) & \supset & O(8) & \supset & SU(3) & \supset & U(1) \otimes SU(2) \\
 N & & (\nu 000) & & (\lambda, \mu) & & Y \quad T, T_3
 \end{array} \quad (3.4)$$

Donde N es el número de partículas y ν es el seniority que significa el número de bósones no acoplados a pares con $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. El grupo $U(8)$ tiene $n^2 = 8^2 = 64$ generadores como ya vimos en la parte de teoría de grupos.

3.2. Polinomios.

Tenemos que hacer la construcción de acoplamientos elementales (epd's) de $U(8)$, en analogía a los acoplamientos elementales en $SU(3)$ [7] los cuales están en máximo peso en $SU(3)$. Los acoplamientos elementales en términos de operadores bósonicos están dados por [7]

$$A = \mathbf{b}_{011}^\dagger \quad (3.5)$$

$$B = [\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{000}^{(00)s} \quad (3.6)$$

$$C = [\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{011}^{(11)s} \quad (3.7)$$

$$D = [[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]^{(11)s} \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{000}^{(00)} \quad (3.8)$$

$$E = [[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]^{(11)s} \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{1\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{(30)} \quad (3.9)$$

$$F = [[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]^{(11)s} \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{-1\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{(03)} \quad (3.10)$$

Hacemos uso de la siguiente tabla de pesos 3.1 asignando el número 1 al mayor peso y así sucesivamente hacia pesos menores.

Cuadro 3.1: Valores para z Y T T_3

z	Y	T	T_3
1	0	1	1
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	0	1	0
5	0	0	0
6	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
7	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
8	0	1	-1

Con esta notación obtenemos nuevas ecuaciones más fáciles de manejar algebraicamente usando MATHEMATICA

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_1^{(11)s} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{10}} b_3^\dagger b_2^\dagger - \frac{2}{\sqrt{5}} b_5^\dagger b_1^\dagger \quad (3.11)$$

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_2^{(11)s} = \sqrt{\frac{6}{5}} b_1^\dagger b_6^\dagger - \sqrt{\frac{3}{5}} b_4^\dagger b_2^\dagger + \frac{1}{\sqrt{5}} b_5^\dagger b_2^\dagger \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_3^{(11)s} = -\sqrt{\frac{6}{5}} b_1^\dagger b_7^\dagger + \sqrt{\frac{3}{5}} b_4^\dagger b_3^\dagger + \frac{1}{\sqrt{5}} b_5^\dagger b_3^\dagger \quad (3.13)$$

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_4^{(11)s} = \sqrt{\frac{3}{5}} b_3^\dagger b_6^\dagger + \sqrt{\frac{3}{5}} b_7^\dagger b_2^\dagger - \frac{2}{\sqrt{5}} b_5^\dagger b_1^\dagger \quad (3.14)$$

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_5^{(11)s} = \frac{1}{\sqrt{5}} b_3^\dagger b_6^\dagger - \frac{1}{\sqrt{5}} b_7^\dagger b_2^\dagger + \frac{2}{\sqrt{5}} b_1^\dagger b_8^\dagger - \frac{1}{\sqrt{5}} (b_4^\dagger)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} (b_5^\dagger)^2 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_6^{(11)_s} &= -\sqrt{\frac{6}{5}}b_8^\dagger b_2^\dagger + \sqrt{\frac{3}{5}}b_4^\dagger b_6^\dagger \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}b_5^\dagger b_6^\dagger
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_7^{(11)_s} &= \sqrt{\frac{6}{5}}b_8^\dagger b_3^\dagger - \sqrt{\frac{3}{5}}b_4^\dagger b_7^\dagger \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}b_5^\dagger b_7^\dagger
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger]_8^{(11)_s} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{10}}b_7^\dagger b_6^\dagger - \frac{2}{\sqrt{5}}b_5^\dagger b_8^\dagger \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger] \otimes \mathbf{b}^\dagger]_5^{(00)} &= -\frac{3}{2\sqrt{10}}(b_4^\dagger)^2 b_5^\dagger + \frac{1}{2\sqrt{10}}(b_5^\dagger)^3 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}b_3^\dagger b_4^\dagger b_6^\dagger \\
&\quad + \frac{3}{2\sqrt{10}}b_3^\dagger b_5^\dagger b_6^\dagger + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}b_2^\dagger b_4^\dagger b_7^\dagger - \frac{3}{2\sqrt{10}}b_2^\dagger b_5^\dagger b_7^\dagger \\
&\quad - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}b_1^\dagger b_6^\dagger b_7^\dagger - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}b_2^\dagger b_3^\dagger b_8^\dagger + \frac{3}{\sqrt{10}}b_1^\dagger b_5^\dagger b_8^\dagger
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger] \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{1 \frac{3}{2} \frac{3}{2}}^{(3,0)} &= \sqrt{\frac{3}{5}}(b_2^\dagger)^2 b_3^\dagger - \frac{3}{\sqrt{10}}b_1^\dagger b_2^\dagger b_5^\dagger \\
&\quad - \sqrt{\frac{3}{5}}(b_1^\dagger)^2 b_6^\dagger + \sqrt{\frac{3}{10}}b_1^\dagger b_2^\dagger b_4^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{b}^\dagger \otimes \mathbf{b}^\dagger] \otimes \mathbf{b}^\dagger]_{-1 \frac{3}{2} \frac{3}{2}}^{(0,3)} &= -\sqrt{\frac{3}{5}}(b_1^\dagger)^2 b_7^\dagger + \frac{3}{\sqrt{10}}b_1^\dagger b_3^\dagger b_5^\dagger \\
&\quad - \sqrt{\frac{3}{5}}(b_3^\dagger)^2 b_2^\dagger + \sqrt{\frac{3}{10}}b_1^\dagger b_3^\dagger b_4^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Hasta este punto tenemos desarrollados todas los estados base, desde la ecuación (3.5) a (3.10).

Esto es en primera instancia lo hecho hasta el momento como adelanto del trabajo que espera.

Capítulo 4

Conclusiones.

El propósito del trabajo es calcular coeficientes de Clebsch-Gordan para grupos representaciones irreducibles particulares, mediante métodos más prácticos. Calcular los coeficientes de forma explícita obedece a la necesidad de determinar propiedades de transición y decaimiento.

Grupos como $U(8)$ aparecen con frecuencia. Por ejemplo en el modelo propuesto en [1]. Este es un modelo esquemático que se usa para describir el espectro hadrónico. En un sistema de gluones aparece la cadena de grupos $U(24) \supset U(8) \otimes U(3)$ [5]. En general el grupo $U(8)$ aparece cuando tenemos 8 grados de libertad.

Abordar el problema directamente en $U(8)$ resulta complicado. Es por este motivo que preferimos atacar un problema más sencillo. Teniendo en mente una generalización de forma más natural y práctica.

El ejemplo $SU(3) \supset SO(3)$ aquí presentado cumple con dos características importantes. Primero ser no trivial, es decir, tener una importancia en la física. Su segunda característica es la existencia de resultados anteriores [9, 11] con los cuales poder comparar la efectividad del método propuesto.

De esta manera mostramos con la cadena de grupos $SU(3) \supset SO(3)$ el procedimiento a seguir para la cadena $U(8) \supset O(8) \otimes SU(3)$ para representaciones $[N]$ de $U(n)$. Para ello desarrollamos la expresión de epd's de $U(8)$ en términos de los operadores bosónicos b_i^\dagger , ($i = 1, 2, \dots, 8$).

Tomando como base este trabajo el siguiente paso consiste en la generalización del método para la cadena de grupos $U(8) \supset O(8) \supset SU(3)$. Además de crear programas para computadora que realicen los cálculos de los coeficientes buscados.

Bibliografía

- [1] H. J. Lipkin, N. Meschkov y S. Glick, Nucl. Phys. **A62**, 118 (1965).
- [2] S.Lerma, S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, Phys. Rev. **C 67** (2003), 055209.
- [3] S.Lerma, S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, Phys. Rev. **C 66**, 045207 (2002).
- [4] W. Greiner and B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, Springer, Heidelberg, 1989.
- [5] P. O. Hess, S. Lerma, J. C. López, C. R. Stephens y A. Weber, Eur. Phys. Jour. **C 9** (1999), 121.
- [6] R. López, P. O. Hess, P. Rochford y J. P. Draayer, J. Phys. A **23** (1990), L229.
- [7] E. Chacón, “Anales de Física. Monografías”, eds. M. A. Olmo, M. Santander y J. Mateos Guilarte, CIEMAT, Proceedings of the “XIX International Colloquium Salamanca”, Spain, June 29 - July 4, 1992, p- 331
- [8] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princcton, 1957.
- [9] J. D. Vergados, Nucl. Phys. A **111**, 1968.
- [10] J. P. Draayer and Y. Akiyama, J. Math. Phys. **14**, 1973.
- [11] D. J. Rowe, P. S. Turner and J. Repka, J. Math. Phys. **45** 2004.
- [12] M. Nunez, S. Lerma, P. O. Hess, S.Jesgarz, O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. C **70**, 2004, 025201.
- [13] T. Nakano et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 2003, 012002.
- [14] V. V. Barmin et al. (DIANA Collaboration), preprint hep-ex/0307018, Yed. Fis. (in press).

- [15] S. Stepanyan et al. (CLAS Collaboration), preprint hep-ex/0307018.
- [16] J. Barth et al. (SAPHIR Collaboration), preprint hep-ex/0307083, Nucl. Phys. B (in press).
- [17] A. E. Asratyan, A. G. Dolgolenko and M. A. Kubantsev, preprint hep-ex/0309042, submitted to Yad. Fis. 2003.
- [18] D.J. Rowe and C. Bahri, Journal of Mathematical Physics, **41**, (2000), 6544.
- [19] E. Chacón, M. Moshinsky and R. T. Sharp, J. Math. Phys. **17**, 1976.
- [20] E. Chacón and M. Moshinsky, J. Math. Phys. **18**, 1977.
- [21] M. Hamermesh *Group theory and its application to physical problem*. New York, Dover, 1989.
- [22] E. P. Wigner *Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, New York, Academic Press, 1959.
- [23] H. Boerner *Representations of groups with special consideration for the needs of modern physics*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1963.
- [24] A. J. Coleman. "Quantum Chemistry" **4** (1968), 83.
- [25] J. P. Elliot y P. G. Dawber "Symmetry in Physics", Vol. 1 y 2 , Oxford University Press (1974)
- [26] Eugen Merzbacher, *Quantum Mechanics*, New Yor, JOHN WILEY & SONS, INC.,1998.
- [27] V. Devanathan *Angular Momentum Techniques in Quantum Mechanics* Netherlands,1999.
- [28] J. Escher and J. P. Draayer, *J. Math. Phys.*, Vol. 39, No. 10,1998.
- [29] R. Gaskell, A. Peccia and R. T. Sharp, J. Math. Phys. **19** 1978. 727.
- [30] M. Moshinsky, *Group Theory and the Many-Body Problem*, Gordon and Breach, New York, 1967.
- [31] M. Moshinsky and Yu. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic publishers, New York, 1996.
- [32] MATHEMATICA-5 package, Wolfram Research, 2004.

-
- [33] P. O. Hess, A. Weber, C. R. Stephens, S. A. Lerma, J. C. López, *Eur. Phys. J.* **C9** (1999), 121.
-
- [34] Y. Akiyama y J. P. Draayer, *Comp. Phys. Comm.* **5**, (1973), 405.
-
- [35] C. Bahri, D. J. Rowe y J. P. Draayer, *Comp. Phys. Comm.* **159**, (2004), 121.
-
- [36] R. Gilmore *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons, United State of America, 1974.