23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"DOS ENFOQUES PARA LA SELECCION DE EQUILIBRIOS DE NASH EN JUEGOS NO COOPERATIVOS"

300348

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MAGDALENA ALEJANDRA CISNEROS CASTRO

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. MARIA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

MEXICO, D. F. 2001

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

MÉXICO D.F a 21 de noviembre del 2001

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Dos enfoques para la selección de equilibrios de Nash en juegos no cooperativos".

realizado por Magdalena Alejandra Cisneros Castro

con número de cuenta 09650342-3 quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. María de la Paloma Zapata Lillo.	Paloma Zapata
Propietario	M. en C. Sergio Hernández Castañeda.	
Propietario	Act. Claudia Villegas Azcorra.	
Suplente	M. en C. Salvador Ferrer Ramírez.	
Suplente	Doctora Idalia Flores de la Mota.	

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. José Antonio Flores Díaz.

GRACIAS;

A MIS PADRES CARLOS Y MAGDALENA por su amor incondicional, sus esfuerzos para que yo tenga una buena educación y por su apoyo y consejos a lo largo de mi preparación.

A CARLOS MI HERMANO por ser mayor, compartir tus experiencias conmigo y alegrarte de mis triunfos.

A BERENICE, MARTHA, MARA Y PAOLA, por todos estos años de amistad, en las buenas y en las malas.

A CADA UNO DE MIS ROBIN por caminar siempre mis pasos.

A PALOMA ZAPATA MI ASESOR DE TESIS por su dedicación para el desarrollo de esta tesis.

A ADRIAN, BERNA, GABY, HAYDEE, NANCY y a todos los que convivimos buenos y malos momentos tantos años estudiando una misma carrera

A TODA LA GENTE MARAVILLOSA que gracias al voleyball comparte conmigo su amistad y experiencias inolvidables.

A LA UNAM, por su educación tanto académica como deportiva...por las personas que he conocido ahí.

A TODAS LAS PERSONAS QUE ME HAN BRINDADO SU AMISTAD, que han compartido conmigo momentos de alegría y una palabra de aliento para continuar.

A DIOS porque siempre has estado conmigo, en todo momento.

Introducción.

Un equilibrio en un juego está definido como una asignación para cada jugador de una estrategia que es óptima para él cuando los otros jugadores usan estrategias asignadas a ellos.

Uno de los razonamientos más antiguos para este concepto es que cualquier teoría normativa que aconseje a los jugadores como jugar juegos debe escoger o seleccionar un equilibrio en cada juego. Una teoría recomendando cualquier otra cosa que no sea un equilibrio será descartada por sí sola, en el sentido de que un jugador que cree que los demás jugadores están siguiendo la teoría algunas veces estará motivado a desviarse de ella. Esto se sostiene solo si la teoría recomienda una única estrategia para cada jugador (seleccione dinámica).

En general, en un juego dado hay muchos equilibrios. El concepto de equilibrio de Nash es sin duda alguna herramienta teórica de juego más aplicada en Economía, y tiene sentido solo si cada jugador conoce cuales son las estrategias que está utilizando los otros jugadores. Así es esencial para cada juego, una teoría que seleccione un equilibrio único del conjunto de equilibrios de Nash. Una consecuencia de la disponibilidad de la teoría de selección de equilibrio es la habilidad de implementar lo que es llamado el programa de Nash o solución de Nash.

Un juego es llamado cooperativo cuando existe un mecanismo que asegura acuerdos o arreglos entre los jugadores, tales como una corte. Un resultado del juego puede ser alcanzado si los jugadores se unen al acuerdo apropiado de Nash que especificando y modelando el proceso de negociación por el cual los acuerdos pueden ser alcanzados, uno puede ver los juegos cooperativos como casos especiales de juegos no cooperativos.

Incluso cuando el proceso de negociación es completamente especificado y modelado, el juego no cooperativo resultante tiene muchos puntos de equilibrio que son muy diferentes entre sí, en este caso el programa de Nash no es muy informativo. Seleccionando uno en particular de los muchos que aparecen en tales modelos, la teoría Harsanyi - Selten remueve está dificultad.

El objetivo de esta tesis es presentar la teoría de dos algoritmos para la selección de equilibrio. El primero de Harsanyi y Selten, el segundo por Selección Dinámica, el segundo se presenta como los mismos autores indican, su teoría no es la única posible o razonable, aunque la teoría selecciona un equilibrio único, está teoría no es la única.

El cuerpo general de la tesis es el siguiente:

Capítulo 1. Juegos Rectangulares.

Capítulo 2. Selección de Harsanyi.

Capítulo 3. Selección Dinámica.

Capitulo 4. Generalización.

La tesis consta de 4 capítulos en donde se introducen conceptos que ayudan a la comprensión de varios resultados o conclusiones utilizados para la selección o descarte de equilibrios en el juego.

En el capítulo 1 se presenta la teoría básica, conceptos útiles y necesarios para el desarrollo del algoritmo de selección, a que se llama juegos rectangulares, estrategias mixtas, estrategias conservadoras y puntos de equilibrio. También se encuentra las propiedades de los juegos exhaustivos y como ayudan estas propiedades la el inicio del algoritmo: la existencia de puntos de equilibrio en el juego.

En el capítulo 2 se presenta ya propiamente de las bases para la selección de puntos de equilibrio, las primeras conclusiones para aceptar o descartar puntos de equilibrio, la formación de conjuntos admisibles y la relación riesgo dominancia para la construcción de juegos reducidos de los cuales se obtiene la solución del juego: la selección de un solo equilibrio. Y por supuesto de las soluciones V y T de los juegos vocales y tácitos y respectivamente.

En el 3er capitulo se habla del segundo enfoque se selección de equilibrio en el cual se hace uso de dinámicas darwinianas, matrices de Markov, algoritmos que incluyen subdigráficas conocidas como z - arboles h y los pesos mínimos de los mismos como herramientas para el empleo de este enfoque. Su diferencia con el primero y como mas adelante en la tesis se hablara con mas detalle, es que los jugadores no necesitan ser tan racionales ni expertos en lo que sucede a su alrededor.

Y en el capitulo 4 como su nombre lo dice se hace una generalizacion del enfoque de Kandori Et. Al. para la selección de equilibrios a juegos con mas de dos estrategias y con mas de dos jugadores involucrados.

La tesis comparara los distintos resultados que tienen ambos autores respecto a la selección en juegos del mismo tipo.

INDICE

1. JUEGOS RECTANGULARES.

2. LA SELECCIÓN DE EQUILIBRIOS SEGÚN HARSANYI.

3. SELECCIÓN DINÁMICA DE EQUILIBRIOS DE NASH EN JUEGOS SIMÉTRICOS 2 X 2.

Capítulo 1
LOS JUEGOS RECTANGULARES

1.1 Juegos Rectangulares.

El trabajo que estamos presentando se encuentra dentro de la teoría de juegos. John Von Neumann concibió esta teoría como la matemática adecuada para los conflictos humanos, económicos, políticos, sociales, militares, etc.

Hablando en forma gruesa, entenderemos por un juego a un conflicto en el que se encuentran envueltos algunos individuos o grupos de individuos a los que se conoce como jugadores. Cada uno de ellos persigue objetivos y para lograrlos debe llevar a cabo elecciones restringidas a un conjunto dado. El resultado que se obtiene en el conflicto depende de las elecciones de todos los participantes. Estos resultados pueden ser muy complicados, por ejemplo, en un conflicto electoral, supongamos que los votantes son jugadores y que el resultado es que un partido que llevaba gobernando muchos años pierde las elecciones. ¿Qué valor le asigna cada jugador a ese hecho? Puede ocurrir qué simplemente le importe si ganó o perdió el partido por el que votó o que la satisfacción o insatisfacción que esto le produzca sea mucho más difícil de traducir a términos numéricos. Para realizar esta traducción hay que meterse en la teoría de la utilidad. En este trabajo supondremos que los resultados se presentan en forma de un vector de reales, cuyas coordenadas son los pagos de los jugadores ganancias o pérdidas.

La teoría de Juegos se divide en la que estudia los juegos cooperativos y la que estudia los no cooperativos, este trabajo se encuentra dentro de la última. En la teoría de los Juegos No cooperativos se desarrollan dos modelos, los llamados juegos extensivos y los llamados juegos rectangulares o estratégicos, a los que nos limitaremos nosotros.

El concepto de solución de los Juegos No Cooperativos se debe a John Nash y se conoce como Equilibrio de Nash. Este concepto aparece en los juegos rectangulares y para cada juego rectangular finito existe al menos uno de estos equilibrios, pero no siempre es único, de allí la necesidad de introducir criterios de selección.

En este capítulo introducimos las definiciones y resultados básicos de los juegos rectangulares.

1.2 Definiciones.

Definición 1.2.1

Un **juego** en forma rectangular (estratégica, normal) consta de:

i. Un conjunto N= { 1, 2, ...n } de jugadores.
ii. Para toda $j \in N$ existe Dj = { 1, 2, ...lj } conjunto de estrategias puras de j.
iii. φ: $D_1 \times D_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times Dn \rightarrow R^n$ función de pagos en donde

$\varphi_j : D1 \times D2 \times \ldots\ldots\ldots \times Dn \rightarrow R$

y $\varphi_j(\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots, \sigma_n) \in R$ es la j-ésima componente de $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots\ldots\sigma_n)$

En adelante se utilizara la notación (N, {Dj}, φ) y /o Γ para referirnos a un juego.

Sea $D = D_1 \times D_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times D_n$, a los elementos de D les llamamos perfiles de estrategias. Dado un perfil de estrategias σ cuando uno de los jugadores decide cambiar su estrategia σ por la estrategia $\underline{\sigma}^j$, mientras que los demás permanecen con la estrategia del perfil σ utilizamos la notación $(\sigma \mid \underline{\sigma}^j)$ que significa $(\sigma^1, \sigma^2, \ldots\ldots, \underline{\sigma}^j, \ldots\ldots\ldots\sigma^n)$

Para los juegos bipersonales, los juegos rectangulares se pueden describir a través de matrices, en donde a cada uno de los renglones se le asigna una de las estrategias puras del jugador 1 y a cada una de las columnas, una de las estrategias puras del jugador 2 y el término correspondiente al renglón i y a la columna j es el vector de pago $\varphi(i, j)$. En realidad, los juegos bipersonales fueron los primeros en ser trabajados y después se generalizó la idea a cualquier número de jugadores, conservando el nombre de rectangulares, a pesar de que ya no pueden describirse a través de un arreglo rectangular o matriz

Ejemplos.

Estados Unidos y la desaparecida Unión Soviética en su participación por la elaboración de un mismo producto. La matriz de pago es la siguiente

$$
\begin{array}{lll}
 & & \textbf{URSS} \\
 & & \begin{array}{cc} \textbf{Produce} & \textbf{No produce} \end{array} \\
\textbf{EU} & \begin{array}{l} \textbf{Produce} \\ \textbf{No produce} \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (3,-10) \\ (-10,3) & (2,2) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

N={ EU, URSS}.

D_1, D_2 = { Produce, No produce}.

$D = D_1 \times D_2$ = { (P, NP), (P, P), (NP, P), (NP, NP) }.

$\varphi(P, P) = (1,1)$

$\varphi_1 (P, P) = 1$

$\varphi_2 (P, P) = 1$

Juego bipersonal con mas de dos estrategias para cada jugador.

Ejemplo.

El baile de Shapley.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \textbf{a} & \textbf{b} & \textbf{c} & \textbf{d} \end{array} \\
\begin{array}{c} \textbf{a} \\ \textbf{b} \\ \textbf{c} \\ \textbf{d} \end{array} & \begin{pmatrix} (2, 1) & (0, 0) & (1, 2) & (-1, -1) \\ (1, 2) & (2, 1) & (0, 0) & (-1, -1) \\ (0, 0) & (1, 2) & (2, 1) & (-1, -1) \\ (-1, -1) & (-1, -1) & (-1, -1) & (-1, -1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Juego n – personal.

Ejemplo.

El semáforo de una avenida en donde el transito de coches es enorme se descompone, cada automovilista tiene dos estrategias, una egoísta y una solidaria, dejando pasar a otros coches para favorecer la fluidez del tráfico (el dilema del prisionero). Cuando los automovilistas que son egoístas y buscan avanzar ellos mismos a como de lugar rebasan el número k tal que $n > k > 0$ se provoca un embotellamiento. Sea h_σ el número de automovilistas que escogen sea egoístas en un perfil de estrategias s. La función de pago φ se define como sigue:

$$\varphi_j(\sigma^1, \sigma^2, ...\sigma^n) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad \sigma^j = \text{egoísta y } h_\sigma \leq k \\ -30 & \text{si} \quad \sigma^j = \text{egoísta y } h_\sigma > k \\ -10 & \text{si} \quad \sigma^j = \text{solidario y } h_\sigma < k \\ -60 & \text{si} \quad \sigma^j = \text{solidario y } h_\sigma \geq k \end{cases}$$

1.3 Las Estrategias mixtas.

En algunos juegos rectangulares no podremos encontrar equilibrios de Nash en estrategias puras, como veremos más adelante, entonces cada uno de los jugadores deberá incorporar una táctica racional que envuelve una aleatoriedad voluntaria entre las opciones que representan sus estrategias puras.

Definición 1.3.1

Dado un juego rectangular $(N, \{Dj\}_{i \in N}, \varphi)$, una estrategia mixta para el jugador i es un vector $X^i \in R^{l_i}$, con $l_i = \#D_j$, tal que

$X_{ij} \geq 0$ y $\Sigma X_{ij} = 1$.

Notación:

$$M_j = \{ X^i \in R^{l_i} \mid X_{ij} \geq 0 \text{ y } \Sigma_{(i=1, lj)} X_{ij} = 1 \}.$$

A las estrategias puras del jugador j las podemos identificar con las estrategias mixtas de j representadas por los vectores canónicos, es decir a la estrategia pura σ^j la podemos pensar como el vector "σ^j" = (0, 0, ..., 1, .., 0, 0), en donde la coordenada uno corresponde a la estrategia pura σ^j y significa que el jugador j está dando probabilidad voluntaria o peso uno a la estrategia pura σ^j

Definición 1.3.2

La función esperanza de pago en el juego rectangular $(N, \{Dj\}_{i \in N}, \varphi)$ es

$$E: M_1 \times M_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times M_n \rightarrow R^n \text{ definida como}$$

$$E(X^1, X^2, \ldots\ldots\ldots\ldots X^n) = \Sigma_{\sigma \in D} P_X(\sigma)\, \varphi(\sigma)$$
$$= \Sigma_{(\sigma 1\, \sigma 2 \ldots \sigma n \in D)} X^1\sigma^1\, X^2\sigma^2 \ldots\ldots\ldots\ldots X^n\sigma^n\, \varphi(\sigma)$$

Denotamos como M a $M_1 \times M_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times M_n$, cada elemento de M se llama un **perfil de estrategias mixtas.**

Ejemplo.

Tenemos la siguiente matriz.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (-1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $X_1 = (1/5, 4/5)$ y

$X_2 = (2/3, 1/3)$

Entonces

$$E((1/5, 4/5), (2/3, 1/3)) = (1/5)(2/3)(-1, 1) + (1/5)(1/3)(1, -1) + (4/5)(2/3)(1, -1) + (4/5)(1/3)(-1, 1)$$
$$= (1/5, -1/5)$$

El ejemplo del juego Montmort.

A finales del siglo XVIII, el matemático francés René de Montmort describió la siguiente situación. Para hacer un regalo a su hijo, un padre hizo lo siguiente "Tengo una moneda de oro en mi mano derecha o en mi mano izquierda y tu deberás nombrar una mano; si tu suposición es correcta y está en mi mano derecha tu tendrás la moneda de oro; si tu suposición es correcta y está en mi mano izquierda, tu recibirás dos monedas de oro, de otro modo no obtendrás nada". Entonces Montmort pregunta cuanto vale realmente este regalo para el hijo mientras señala que en este juego los jugadores son igualmente astutos y perspicaces, no hay manera de que podamos establecer una regla de conducta, es decir no hay estrategias puras óptimas en este juego. De hecho un contemporáneo de Montmort, James Waldegrave si propuso utilizar estrategias mixtas en un juego similar.

La matriz de pago es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} & & \textbf{Padre} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Izquierda} & \textbf{Derecha} \end{array} \\ \textbf{Hijo} & \begin{array}{l} \textbf{Izquierda} \\ \textbf{Derecha} \end{array} & \begin{bmatrix} (2,-2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Si ambos pudieran ponerse de acuerdo en elegir sus estrategias para obtener sus pagos asegurables ambos escogerían tener (0, 0) como pago asegurable en sus estrategias puras.

La manera de prevenir que una opción o elección sea descartada es hacer esta elección al azar (aleatoriamente). Esto es, en lugar de escoger una estrategia pura, tal como izquierda o derecha, el hijo debe usar una estrategia aleatoria x_i tomando los valores de izquierda o derecha con una respectiva probabilidad p_1, $1 - p_1$. Escogiendo $p_1 = 1/3$, el hijo está seguro de un pago esperado al menos dos tercios.

La situación para el padre es simétrica. Jugando con estrategias aleatorias izquierda o derecha con una respectiva probabilidad p_2, $1 - p_2$ su pérdida máxima esperada es $(2\,p_2, 1 - p_2)$

Escogiendo $p_2 = 1/3$, el padre está seguro de una pérdida **a lo más** de dos tercios. Así incorporando incertidumbre táctica en las elecciones estratégicas sugiere el valor de dos tercios como una estimación justa de la generosidad del padre.

1.4 Equilibrio de Nash.

Por equilibrio de Nash de un juego (N, $\{Dj\}_{i \in N}$, φ), entenderemos un perfil de estrategias, es decir una estrategia para cada jugador, de tal manera que el jugador que abandona unilateralmente la estrategia del perfil no mejora su pago. Se puede pensar a un equilibrio como un pacto de que estrategia escogerá cada uno, con la propiedad de que ningún jugador tiene aliciente para traicionar el acuerdo, él sólo, mientras los demás permanecen fieles al pacto.

Definición 1.4.1.

Sea $<\sigma_j> \in D_j$, se dice que σ_ι es una mejor replica a $<\sigma_j>$ si

$$\varphi_j (<\sigma_j>|\sigma_\iota) \geq \varphi_j (<\sigma_j>| \sigma_j) \qquad \forall \ \sigma_j \in D_j$$

Sea $<\underline{X}> \in M$ se dice que $\underline{\sigma}^j \in D_j$ es una mejor réplica o respuesta pura de un jugador j a un perfil <X> si

$$E_j (<\underline{X}>_- | \underline{\sigma}^j) \geq E_j (<\underline{X}>_- | \sigma^j) \qquad \forall \sigma^j \in D_j$$

Sea $<\underline{X}> \in M$ decimos que $\underline{X} \in$ M es una mejor réplica o respuesta mixta de j a $<\underline{X}>$ si

$$E_j (\hat{}\underline{X} \ | \neg \underline{X}^j) \geq E_j (\hat{}\underline{X} \,| \underline{X}^j) \qquad \forall \ \underline{X}^j \in M_j.$$

Definición 1.4.2

Un perfil de estrategias puras σ^* es **un equilibrio de Nash en estrategias puras,** si para toda j $\in$ N, σ^{j*} es una mejor réplica o respuesta pura a σ^*.

Un perfil de estrategias mixtas X* es **un equilibrio de Nash,** si para toda j $\in$ N, $\underline{X}^{j*}$ es una mejor réplica o respuesta mixta a $\underline{X}^*$.

Ejemplos de equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

(Dilema del prisionero)

$$
\begin{array}{ccc}
 & C & NC \\
\begin{array}{c} C \\ NC \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (-10,-10) & (0,\ 20) \\ (-20,0) & (-2,\ 2) \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

El perfil de estrategias (C, NC) es un equilibrio de Nash, tanto en estrategias puras como mixtas, ya que si cualquiera de los jugadores mueve su estrategia no mejora. Una de las estrategias se considera agresiva o egoísta (NC: no cooperar) y la otra conciliadora o solidaria (C: cooperar). Este ejemplo es un juego simétrico, es decir los jugadores pueden cambiar sus papeles uno con otro.

El juego ya mencionado antes de EU y la antigua Unión Soviética

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textbf{URSS}} \\
 & & \textbf{Produce} & \textbf{No produce} \\
\textbf{EU} & \begin{array}{c} \textbf{Produce} \\ \\ \textbf{No produce} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (1,1) & (3,-10) \\ & \\ (-10,3) & (2,2) \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Solamente tiene un equilibrio en estrategias puras: el perfil (producir, producir). También los ejemplos del baile de Shapley y el juego n – personal tienen un solo equilibrio en estrategias puras: el perfil (d, d) en la matriz de pagos del baile de Shapley y el perfil egoísta en el juego de los conductores atrapados en el trafico n - personal.

La matriz

$$
\begin{array}{ccc}
 & A & S \\
\begin{array}{c} A \\ S \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

No tiene equilibrios en estrategias puras pero tiene equilibrio en estrategias mixtas: ((½, ½), (½, ½)). Y el ejemplo del padre, el hijo y las monedas:

		Padre	
		Izquierda	**Derecha**
Hijo	**Izquierda**	(2,-2)	(0, 0)
	Derecha	(0, 0)	(1,-1)

Tiene como equilibrio ((1/3, 2/3), (1/3, 2/3)) en estrategias mixtas.

Proposición 1.4.3

Si $\sigma^* \in D_1 \times \ldots\ldots\ldots \times D_n$ es un equilibrio de Nash en estrategias puras de $(N, \{Dj\}, \varphi)$, entonces "σ^*" es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Demostración.

Si σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras entonces

$$\varphi(\sigma^*) \geq \varphi(\sigma \mid j) \qquad \forall\, \sigma \in D$$

Si "σ^*" es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas entonces

$$E(\text{“}\sigma^*\text{”}) \geq E(\sigma \mid j) \qquad \forall\, j \in N$$

$$\text{pero } E(\text{“}\sigma^*\text{”}) = \varphi(\sigma^*)$$

entonces

$$\varphi(\sigma^*) \geq E(\sigma \mid j) \qquad \forall\, j \in N$$

por lo tanto si σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras entonces "σ^*" es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Q.E.D

Recordando que σ es PE de Nash si para cada jugador j la estrategia σ_j es la mejor réplica contra las demás estrategias de los jugadores, esto es:

A continuación enunciamos el teorema de existencia de equilibrios de Nash, teorema fundamental de los Juegos No Cooperativos Finitos. La demostración se basa en un teorema de punto fijo y fue encontrada por J. Nash [] y se puede consultar en cualquier libro de teoría de juegos, en particular el de G.Owen [] y el de K. Binmore [].

Teorema 1.4.4

Sea (N, {Dj}, φ) un juego finito, entonces existe al menos un perfil de estrategias mixtas X* que es Equilibrio de Nash del juego (N, {Dj}, φ).

1.5 El Método de la Cruz Gamada.

Existen varios métodos y algoritmos para calcular un equilibrio de Nash de un juego finito, muchos de ellos sirven para juegos especiales, otros se aplican a cualquier juego, pero no siempre convergen o son muy ineficientes. Los algoritmos simpliciales que inició Scarf [] encuentran un punto fijo de una función y son algoritmos que siempre encuentran un equilibrio de Nash en cualquier juego. En este trabajo nos limitaremos a exponer un método llamado de la cruz gamada que permite calcular todos los equilibrios de Nash de un juego bipersonal, donde cada jugador tiene dos estrategias (juegos 2 x 2), pues la mayoría de los juegos que ilustran este trabajo son de este tipo.

Consideremos un juego arbitrario, si ($\underline{X}^*$, $\underline{Y}^*$) es punto de equilibrio entonces las dos condiciones siguientes se cumplen:

a. $E_1(\underline{X}^*, \underline{Y}^*) \geq E_1(\underline{X}, \underline{Y}^*)$ para toda $\underline{X} \in M_1$
b. $E_2(\underline{X}^*, \underline{Y}^*) \geq E_2(\underline{X}^*, \underline{Y})$ para toda $\underline{Y} \in M_2$

Ahora para cada $\underline{Y}$ en M_2, consideremos todos los puntos ($\underline{X}'$, $\underline{Y}$) tales que cumplen la propiedad a, para construir el conjunto

$$L_1 = \{(\underline{X}', \underline{Y}) \mid \underline{Y} \in M_2 \text{ y } E_1(\underline{X}', \underline{Y}) \geq E_1(\underline{X}, \underline{Y}) \text{ para toda } \underline{X} \in M_1\}$$

Sea $(\underline{X}', \underline{Y}_0)$ con $\underline{Y}_0$ arbitraria y $\underline{X}'$ tal que

$$E_1(\underline{X}', \underline{Y}_0) = \max_{\underline{X}} E_1(\underline{X}, \underline{Y}_0)$$

Es evidente que

$$E_1(\underline{X}', \underline{Y}_0) \geq E_1(\underline{X}, \underline{Y}_0) \qquad \forall\, \underline{X} \in M_1$$

Por tanto $(\underline{X}', \underline{Y}_0)$ cumple con la condición a.

Más aún, si $(\underline{X}', \underline{Y})$ cumple con la condición 1, entonces

$$E_1(\underline{X}', \underline{Y}) \geq E_1(\underline{X}, \underline{Y}) \qquad \forall\, \underline{X} \in M_1 \qquad \text{y}$$

$$E_1(\underline{X}', \underline{Y}) = \max_{\underline{X}} E_1(\underline{X}, \underline{Y})$$

De tal modo que

$$L_1 = \{ (\underline{X}', \underline{Y}) \mid \underline{Y} \in M_2 \;\text{ y }\; \max_{\underline{X}} E_1(\underline{X}', \underline{Y}) = E_1(\underline{X}, \underline{Y})\}$$

Igualmente para que el jugador 2,

$$L_2 = \{(\underline{X}, \underline{Y}') \mid \underline{X} \in M_1 \;\text{ y }\; \max_{\underline{Y}} E_2(\underline{X}, \underline{Y}) = E_2(\underline{X}, \underline{Y}')\}$$

Es claro que el conjunto de puntos de equilibrio es la intersección entre L_1 y L_2.

Para cualquier juego, entonces, la intersección de todos los conjuntos L_j es el conjunto de equilibrios de Nash, sin embargo no siempre es fácil tener a la mano ese conjunto. Para los juegos 2 x 2, por el contrario, podemos representar los conjuntos L_1 y L_2 y su intersección en el cuadrado [0, 1] x [0, 1].

Supongamos entonces que la matriz de un juego para dos jugadores, cada uno con dos estrategias es

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}$$

Consideremos el cuadrado, cuyos puntos tienen coordenadas (x, y) tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. La coordenada x de un punto (x, y) de dicho cuadrado se puede interpretar, en forma única, como la estrategia (x, 1-x) del jugador 1 y, recíprocamente, cualquier estrategia mixta $\underline{\mathbf{X}}$ del jugador 1 es de la forma (x, 1 - x), con x en el intervalo [0, 1] y se le puede asociar el número x que la caracteriza totalmente. Análogamente con las estrategias mixtas del jugador dos que son de la forma $\underline{\mathbf{Y}} = (y, 1 - y)$. Entonces se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del cuadrado y los perfiles, parejas en este caso, de estrategias mixtas del juego.

Los pagos de los jugadores cuando estos han elegido la pareja $(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}})$ son:

Para el jugador uno

$$\begin{aligned} E_1(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}}) &= a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y) \\ &= x(a_{11}y - a_{12}y - a_{21}y + a_{22}y + a_{12} - a_{22}) + a_{21}y - a_{22}y + a_{22} \end{aligned}$$

Para el jugador dos

$$\begin{aligned} E_2(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}}) &= b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y) \\ &= y(b_{11}x - b_{12}x - b_{21}x + b_{22}x + b_{12} - b_{22}) + b_{21}x - b_{22}x + b_{22} \end{aligned}$$

Para calcular los puntos de L_1 buscamos la x que maximiza $E_1(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}})$ para cada valor fijo de y. Observemos que la x que maximiza esa esperanza de pago, solo depende de la función lineal $[y\,(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{12} - a_{22}]$. Llamaremos $\varphi(y)$ a esa función. Es decir,

$$\varphi(y) = [y\,(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{12} - a_{22}]$$

Si $\varphi(y) < 0$, el máximo se alcanza cuando $x = 0$, si $\varphi(y) > 0$, el máximo se alcanza cuando $x = 1$ y si $\varphi(y) = 0$, el valor de $E(\underline{X}, \underline{Y})$ es $a_{21}y - a_{22}y + a_{22}$ que es constante, puesto que y es fija y por lo tanto el máximo se alcanza para todo valor de x.

De manera semejante se calculan los puntos de L_2.

Ejemplos.

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (1,1) \\ (1,0) & (3,2) \end{pmatrix}$$

$\varphi(y) = (2 - 1 - 1 + 3)y + 1 - 3 = 3y - 2$

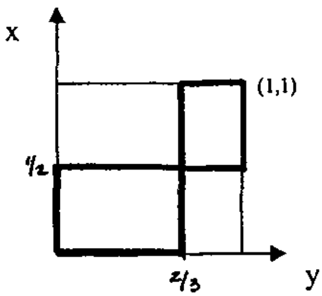
$\varphi(y)$ es igual a cero si y solo si y es igual a dos tercios, $\varphi(y)$ es mayor que cero si y solo si y es mayor que dos tercios y $\varphi(y)$ es menor que cero si y solo si y es menor que dos tercios

$L_1 = \{(x,2/3) \mid 0 \le x \le 1\} \cup \{(1, y) \mid 2/3 < y \le 1\} \cup \{(0, y) \mid 0 \le y < 2/3\}$

$\varphi(x) = (1 - 1 - 0 + 2)x + 1 - 2 = 2x - 1$

$\varphi(x)$ es igual a cero si y solo si x es igual a un medio, $\varphi(x)$ es mayor que cero si y solo si x es mayor que un medio y $\varphi(x)$ es menor que cero si y solo si x es menor que un medio.

$L_2 = \{(1/2, y) \mid 0 \le y \le 1\} \cup \{(x, 1) \mid 1/2 < x \le 1\} \cup \{(x, 0) \mid 0 \le x < 1/2\}$



Entonces la intersección de L_1 y L_2 y por lo tanto el conjunto de equilibrios de Nash es {(1/2, 2/3), (0, 0), (1, 1), (1/2, 0), (1/2, 1), (0, 2/3), (1, 2/3)}.

Juego de Montmort

		Padre	
		Izquierda	**Derecha**
Hijo	**Izquierda**	(2,-2)	(0, 0)
	Derecha	(0, 0)	(1,-1)

$\varphi(y) = 3y - 1$

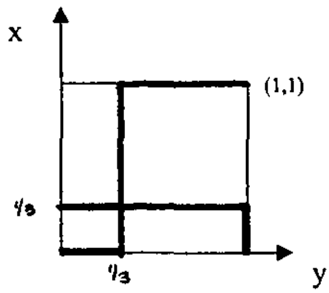
$\varphi(x) = -3x + 1$

$\varphi(y)$ es igual a cero si y solo si y es igual a 1/3 , $\varphi(y)$ es mayor que cero si y solo si y es mayor que 1/3 y $\varphi(y)$ es menor que cero si y solo si y es menor que ½ .

$L_1 = \{(x, 1/3) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) \mid 1/3 < y \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid 0 \leq y < 1/3\}$

$\varphi(x)$ es igual a cero si y solo si x es igual a 1/3 , $\varphi(x)$ es mayor que cero si y solo si x es menor que 1/3 y $\varphi(x)$ es menor que cero si y solo si x es mayor que 1/3 .

$L_2 = \{(1/3, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 \leq x < 1/3\} \cup \{(x, 0) \mid 1/3 < x \leq 1\}$



Con la matriz

$$\begin{array}{c|cc} & A & S \\ \hline A & (-1, 1) & (1, -1) \\ S & (1, -1) & (-1, 1) \end{array}$$

$\varphi(y) = -4y + 2$

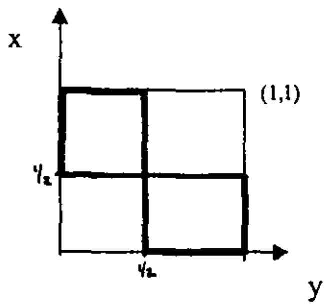
$\varphi(x) = 4x - 2$

$\varphi(y)$ es igual a cero si y solo si y es igual a $\frac{1}{2}$, $\varphi(y)$ es mayor que cero si y solo si y es menor que $\frac{1}{2}$ y $\varphi(y)$ es menor que cero si y solo si y es mayor que $\frac{1}{2}$.

$L_1 = \{(x, \frac{1}{2}) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) \mid 0 \leq y < \frac{1}{2}\} \cup \{(0, y) \mid \frac{1}{2} < y \leq 1\}$

$\varphi(x)$ es igual a cero si y solo si x es igual a $\frac{1}{2}$, $\varphi(x)$ es mayor que cero si y solo si x es mayor que $\frac{1}{2}$ y $\varphi(x)$ es menor que cero si y solo si x es menor que $\frac{1}{2}$.

$L_2 = \{(\frac{1}{2}, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\} \cup \{(x, 0) \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$



1.6 Máximo Asegurable y Estrategias Conservadoras.

El concepto de equilibrio de Nash, como decíamos anteriormente, se puede interpretar como un pacto entre los n jugadores para que cada uno de ellos escoja una estrategia, aunque este pacto puede ser tácito. En esta sección nos preocupamos por el máximo que un jugador puede asegurar con sus propias fuerzas. A las estrategias que le aseguran ese máximo las llamaremos estrategias conservadoras, cada una de éstas le aseguran al jugador j ese pago que los demás jugadores, aunque se hubieran confabulado contra j, no pueden aminorar. Así en caso de que los jugadores lleguen a un acuerdo por parte de para alcanzar entre todos un pago para cada uno, siempre tendrán ese pago que es el mejor de los mínimos que le asegura cada estrategia.

Definición 1.6.1.

Dada una estrategia $\underline{X}'^{j}$ para el jugador j, en el juego rectangular (N, $\{D_j\}$, φ), decimos que el real a está asegurado por j con la estrategia $\underline{X}'^{j}$, si $E_j(\underline{X} \mid \underline{X}'^{j}) \geq a$, para todo perfil $\underline{X}$.

Es claro que lo máximo que puede asegurar j utilizando la estrategia $\underline{X}'^{j}$ es el $\min_{X} E_j\left(X \middle| X'^{j}\right)$. Si ahora queremos el pago más grande que puede asegurar un jugador tomando en cuenta todas sus estrategias, buscaríamos una estrategia tal que $\min_{X} E_j\left(X \middle| X'^{j}\right)$

sea el más grande de todos, el famoso maxmin. Este tipo de estrategias existe puesto que la función E es continua en todas sus variables y las M_j y M son compactos.

Definición 1.6.2

El máximo asegurable para el jugador j es $v_j = \max_{X^j} (\min_{X} E_j(X|X^j))$

Definición 1.6.3

Una estrategia conservadora para j ∈ N es $<<\underline{X}^j>> \in M_j$ tal que

$$E_j (\underline{X} | <\underline{X}^j>) \geq v_j \quad \forall \ \underline{X} \in M$$

Los conceptos de máximo asegurable y estrategias conservadoras se pueden definir también para las estrategias puras

Ejemplos.

Tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} (-5,-5) & (1,0) \\ (0,1) & (-1,-1) \end{pmatrix}$$

En donde el máximo asegurable en estrategias puras es –1 para los dos jugadores. En este juego hay dos equilibrios de Nash e en estrategias puras que son (0,1) y (1,0), en ambos los jugadores ganan más que su máximo asegurable. Ahora utilizando el método geométrico para encontrar una estrategia conservadora en estrategias mixtas asignamos probabilidades a la matriz, esto es:

para el jugador 1

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{pmatrix} (-5,-5) & (1,0) \\ (0,1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \qquad \text{en donde} \qquad p_1 + p_2 = 1$$

y podemos cambiar p_1 y p_2 por x y (1-x) respectivamente para obtener la siguiente ecuación asociando las probabilidades a las funciones de pago del jugador 1:

$$-5x + 0(1-x) = (1)x + (-1)(1-x)$$

tenemos que (x, 1-x), con $x = 1/7$ y $(1-x) = 6/7$ es estrategia conservadora para el jugador 1 y $E_1((1/7, 6/7), (y, 1-y)) = -5/7$, para toda estrategia (y, 1-y) del jugador j, por lo que $v_1 = -5/7$.

Para el jugador 2, el resultado es análogo y los resultados son los mismos porque es una matriz simétrica.

Como podemos ver los jugadores pueden asegurar una ganancia mayor en estrategias mixtas que en estrategias puras, ese es un resultado general para todos los juegos.

Dilema del prisionero.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{NC} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{NC} \end{array} & \begin{pmatrix} (-10, -10) & (0, 20) \\ (-20, 0) & (-2, 2) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Máximo asegurable para el jugador 1: -2

Máximo asegurable para el jugador 2: -2

Estrategias conservadoras

Para el jugador 1: 2

Para el jugador 2: 2

Juego de Montmort

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{Padre} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Izquierda} & \textbf{Derecha} \end{array} \\ \textbf{Hijo} & \begin{array}{c} \textbf{Izquierda} \\ \textbf{Derecha} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Máximo asegurable para el jugador 1: 0

Máximo asegurable para el jugador 2: -1

Estrategias conservadoras

Para el hijo: izquierda y derecha

Para el padre : derecha

Matriz de pago:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textbf{A} & \textbf{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (-1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Máximo asegurable para el jugador 1: -1

Máximo asegurable para el jugador 2: -1

Estrategias conservadoras

Para el jugador 1: A y S

Para el jugador 2 : A y S

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{URSS} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Produce} & \textbf{No produce} \end{array} \\ \textbf{EU} & \begin{array}{c} \textbf{Produce} \\ \textbf{No produce} \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (3,-10) \\ (-10,3) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Máximo asegurable para el jugador 1: 2

Máximo asegurable para el jugador 2: 2

Estrategias conservadoras

Para EU : No Producir

Para URSS : No producir

Como veremos más adelante Harsanyi [ ], en su método de selección de equilibrios, considera que un jugador usará sus estrategias conservadoras, cuando ninguno de los equilibrios le otorga un pago estrictamente mayor o que su máximo asegurable o maxmin.

Proposición 1.6.4.

Si x^* es un Equilibrio de Nash entonces $E_j(x^*) \geq v_j$

Demostración.

Sea $\underline{x}^j$ una estrategia conservadora para j. Como x^* es equilibrio de Nash

$$\varphi_j(x^*) > \varphi_j(x^* \mid \underline{x}^j) > v_j$$

Q.E.D

1.7 Los juegos Exhaustivos

En los juegos bipersonales de suma cero, los jugadores tienen intereses opuestos, por lo que ninguno de ellos puede esperar llegar a un acuerdo o pacto que permita ganar más de lo máximo que puede asegurar por sus propias fuerzas. Es intuitivamente esperable que los equilibrios de Nash en dichos juegos están formados por estrategias conservadoras y que en ellos se obtiene como pago el maxmin. En esta sección veremos que esto es así y además caracterizaremos otros juegos que no son bipersonales de suma cero, pero en los que existe un antagonismo de intereses entre los jugadores que está oculto. Llamaremos a estos juegos exhaustivos y en ellos también habrá un fuerte relación entre estrategias conservadoras y equilibrios de Nash.

Definición de Juego Exhaustivo.

Decimos que (N, {Dj}, φ) es **exhaustivo** (antagónico) en estrategias puras si

$$\Sigma_{j \in N}\, v'_j = \mathrm{Max}_{(s \in D)}\, \Sigma\, \varphi_j(s)$$

exhaustivo: se agotan todas las posibilidades o recursos existentes.

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{Japoneses} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{N} & \textbf{S} \end{array} \\ \textbf{Aliados} & \begin{array}{c} \textbf{N} \\ \textbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (2,-2) \\ (1,-1) & (3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

El ejemplo de aliados contra japoneses es exhaustivo, puesto que el máximo asegurable para los aliados es 2, mientras que para los japoneses es –2 y como es juego de suma cero entonces Max es cero.

Proposición 1.7.1.

Sea (N, {Dj}, φ) exhaustivo (antagónico) (e.p.) entonces

a) si $\sigma^* \in D$ es un equilibrio de Nash (e.p) $\varphi j\,(\sigma^*) = v'_j \;\; \forall\, j \in N$.

b) si $<\sigma>$ es tal que $<\sigma^j>$ es conservadora (e.p) para cada j, $\varphi j(<\sigma>) = v'_j \;\; \forall\, j \in N$.

Si estos perfiles sólo son capaces de proporcional el máximo asegurable pero no los salvan del riesgo de ganar menos (conservador) , entonces no tendrían interés en los jugadores, pues escogiendo estrategias conservadoras aseguran dicho pago.

Ejemplo.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3,6) & (5,2) & (4,1) & (7,1) \\ (1,7) & (1,3) & (5,2) & (4,2) \\ (0,8) & (4,1) & (5,-1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es un juego exhaustivo que no es de suma cero, $v_1' = 3$, $v_2' = 6$ y max = 9. (1, 1) es un equilibrio de Nash pero también es un perfil de estrategias conservadoras puras y los jugadores obtienen su máximo asegurable en este punto.

Lo que sabemos es que un juego bipersonal de suma cero tiene equilibrio de Nash (e.p) si y solamente si la función de pago del jugador 1 tiene punto silla y una pareja de estrategias puras es punto silla sii es punto de equilibrio de Nash. Veremos que en los juegos exhaustivos el punto silla es equivalente a pareja de estrategias conservadoras y que el que la función de pago del jugador 1 tenga punto silla es equivalente a ser exhaustivo.

En los juegos bipersonales de suma cero exhaustivos, los equilibrios de Nash, las parejas de estrategias conservadoras y los puntos silla, todos en estrategias puras son conceptos equivalentes.

Definición. 1.7.2.

Sean D_1 y D_2 dos conjuntos y f una función f: $D_1 \times D_2 \rightarrow R$, (i^*, j^*) en $D_1 \times D_2$ es un punto silla de f si se cumple que $f(x^*, y) \geq f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*)$ para toda i en D_1 y para toda j en D_2

Proposición 1.7.3.

En un juego bipersonal de suma cero exhaustivo (antagónico) las tres afirmaciones son equivalentes:

a) $\sigma^* = (i^*, j^*)$ es punto silla de $\varphi 1$, la función de pago del jugador 1

b) σ^* es un equilibrio de Nash (e.p)

c) i^* y j^* son estrategias conservadoras para 1 y 2 respectivamente

Proposición 1.7.4.

Un juego bipersonal de suma cero exhaustivo tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Hablemos de los equilibrios de los juegos exhaustivos que no son bipersonales de suma cero.

Pongamos un ejemplo

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, -1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego el máximo asegurable para los dos jugadores es cero, tendríamos que decir que el juego es exhaustivo, pero no lo es porque en (2, 1) hay un punto silla que es un perfil de estrategias conservadoras que también es equilibrio de Nash, mientras que (1, 2) es un equilibrio de Nash pero no es un punto silla de ninguna de las dos funciones de pago ni tampoco es un perfil de estrategias conservadoras.

Proposición 1.7.5.

Si $(N, \{Dj\}, \varphi)$ es exhaustivo (e.p) entonces se cumple:

a) $\langle\sigma\rangle$ es punto silla de φj para toda $j \in N$ si y solamente si $\langle\sigma^j\rangle$ es estrategia conservadora (e.p) para $j \in N$

b) si $\langle\sigma\rangle$ es punto silla de φj para toda $j \in N$ entonces $\langle\sigma\rangle$ es equilibrio de Nash (e.p)

Pero en algunos de estos juegos existen equilibrios que no están formados por estrategias conservadoras. En los **juegos antagónicos** el pago en todos los equilibrios es el máximo asegurable, con eso se hizo claro que **los jugadores preferirán estrategias conservadoras,** para los equilibrios de Nash que no aseguran v'_j no podrán formar parte del conjunto solución. En los juegos exhaustivos el conjunto solución del juego es jugar conservadoramente y es un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash.

1. 8 La selección de equilibrios

En este capítulo han aparecido varios ejemplos de juegos y en algunos de ellos, los equilibrios no eran únicos. En algunos juegos, como los exhaustivos, los equilibrios tienen el mismo resultado y no se puede discriminar entre ellos, cualquiera tiene el mismo papel. Pero en muchos juegos esto no es así, se tienen varios equilibrios que significan pagos muy distintos para los jugadores, ¿ cómo decidir si alguno de dichos equilibrios resulta más "fuerte" que los demás?, en el sentido de que es el que se esperaría que se realizaría, pues bajo algún criterio resulta más realista, o cumple condiciones de algún tipo de dominancia sobre los otros equilibrios.

Pensemos, por ejemplo, en un conflicto que es muy común observar en la circulación de vehículos: En una calle muy estrecha circulan en sentidos opuestos, acercándose uno al otro, una enorme pipa y un pequeño vocho. El conductor de cada uno de estos vehículos debe decidir si se empecina en pasar a como de lugar, o se hace a un lado para dejar pasar al otro. Supongamos que el jugador que escoge renglones es la pipa y el que escoge columnas es el vocho y que los resultados que provocan las parejas de estrategias se describen en la siguiente matriz:

	Pasar a como de lugar	Dejar pasar al otro
Pasar a como de lugar	(-1, -100)	(1, 0)
Dejar pasar al otro	(0, 1)	(-1, -1)

Los equilibrios de Nash del juego son $\{((1, 0), (0, 1)), ((0, 1), (1, 0)), ((2/3, 1/3), (1/51, 50/51))\}$. Pero para todo mundo es claro que el único equilibrio creíble es el primero, es decir el vocho se hará a un lado para dejar pasar a la pipa y ésta pasará.

Para muchos juegos no es tan evidente cuál equilibrio sería el más realista, pero siempre ha preocupado a los teóricos de los juegos tener criterios para decidir si se puede discriminar entre los equilibrios de un juego que tiene varios de ellos. En los siguientes capítulos expondremos dos enfoques muy distintos para elegir entre los equilibrios de Nash de un Juego.

Capítulo 2.
LA SELECCIÓN DE EQUILIBRIOS SEGÚN HARSANYI.

2.1 El enfoque normativo en la selección de equilibrios de un juego

Los conceptos de solución de los juegos Cooperativos están basados en supuestos de racionalidad muy fuerte de los jugadores, no en la descripción de un comportamiento realista de los jugadores, más en lo que "debe ser", que en lo que "es", por eso podemos decir que son normativos. En cambio los juegos No Cooperativos tienen pretensiones más descriptivas, tratando de ajustarse a la acción de personas reales.

Sin embargo el mismo concepto de equilibrio de Nash, que es la base misma de la solución de los juegos No Cooperativos, parte de supuestos relativamente fuertes de racionalidad, lo que limita el logro del objetivo de la teoría de los juegos No Cooperativos. Es famosa la descripción de estos supuestos implícitos en el equilibrio de Nash: "..."

En el problema de la selección ocurre lo mismo, los primeros trabajos para escoger dentro del conjunto de equilibrios un subconjunto "solución" están llenos de supuestos de racionalidad. Aunque la preocupación por desprenderse de todos esos supuestos estaba presente en Nash y en otros de los autores que iniciaron el tema, Harsanyi entre ellos, es relativamente reciente al enfoque de los Juegos Evolutivos que busca superar ese problema.

Este capitulo lo dedicamos a un artículo pionero de J. Harsanyi que es muy representativo del enfoque "racionalista". Pero iniciamos con la primera selección de equilibrios que fue la que realizó Nash.

2.2 La Solución de Nash de un juego

Obviamente los perfiles de estrategias conservadoras tienen la propiedad de ser intercambiables, en el sentido de que si tenemos dos perfiles de estrategias conservadoras distintos y tomamos arbitrariamente una estrategia para cada jugador de alguno de los dos perfiles, obtendremos otro perfil de estrategias conservadoras, pues la propiedad de ser conservador no depende del perfil en que se sumerja, a diferencia de lo que ocurre en un equilibrio de Nash. Los equilibrios de Nash no tienen dicha propiedad, pues es fácil encontrar dos equilibrios de Nash que al escoger una estrategia de equilibrio para cada jugador de alguno de ellos, no se obtiene un nuevo equilibrio. Nash consideraba que el subconjunto de equilibrios de un juego que recibiera el nombre de solución de éste tendría que tener dicha propiedad. Fue Nash quien estableció la selección de equilibrios pionera.

Definición 2.2.1.

Un perfil de estrategias $\underline{X}$ es una **recombinación** de los equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$, si para cada jugador i, $\underline{X}^i = \underline{Y}^i$ o $\underline{X}^i = \underline{Z}^i$. Dos puntos de equilibrio $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son **intercambiables** si cada posible recombinación $\underline{X}$ de $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$, es también un equilibrio de Nash.

Definición 2.2.2 (Solución de Nash).

Un conjunto ψ de equilibrios de Nash es una **subsolución** de Nash, si cualquier pareja $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ en ψ son intercambiables y además ψ es un conjunto maximal con respecto a esta propiedad. Si todos los equilibrios de Nash de un juego son parejas intercambiables entonces el conjunto de equilibrios del juego se llama una **solución de Nash**.

Las soluciones de Nash, cuando existen, son únicas, sin embargo no siempre existen.

La solución que construyen Harsanyi y Selten [ ], aunque también toma en cuenta la propiedad de intercambiabilidad, es el resultado de un complicado método de eliminación de equilibrios cuyos vectores de pago están dominados, según varios criterios, por el vector de pago de otro equilibrio.

Para cualquier subsolución o solución de Nash ψ , definimos, para cada jugador i, el pago mas alto $E_i^*(\psi)$ y el pago mas bajo $E'_i(\psi)$ dentro de una subsolución o solución de Nash ψ como

$$E_i^*(\underline{X}^i;\psi) = \max_{(\underline{X}/\underline{X}^i)\varepsilon\psi} E_i(\underline{X}/\underline{X}^i)$$
$$E'_i(\underline{X}^i;\psi)) = \min_{(\underline{X}/\underline{X}^i)\varepsilon\psi} E_i(\underline{X}/\underline{X}^i)$$

Lema 2.2.3.

Para cualquier subsolución ψ y para cualquier $\underline{X}\,\varepsilon\,\psi$, el **pago asegurable** de i en ψ de $\underline{X}^i$ equivale al pago más bajo de ψ para i esto es

$$E_i^*(\underline{X}^i;\psi) = E'_i(\psi)$$

Demostración.

Sabemos que $\underline{X}$ es un punto de equilibrio de Nash si

$$E_i(\underline{X}\mid X^i) \geq E_i(\underline{Y}\mid X^i) \qquad \forall\ i\in N$$

Entonces
Para dos puntos de equilibrio cualesquiera $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ en ψ

$E_i(\underline{X}\mid X^i) = E_i(\underline{Y}\mid X^i)$ con $E_i(\underline{Y}\mid X^i)$ siempre el mas pequeño.

Recordemos que los puntos de equilibrio en ψ son intercambiables, por lo que además

$$E_i^*(\underline{X}^i;\psi) = E_i^*(\underline{Y};\psi) = E'_i(\psi)$$

$$E_i^*(\underline{X}^i;\psi) = E'_i(\psi) \qquad \text{Q.E.D}$$

2.3 Los supuestos de racionalidad de Harsanyi.

El método de selección que expondremos en este capítulo se encuentra en el artículo "A GENERAL SOLUTION FOR FINITE NON – COOPERATIVE GAMES, BASED ON RISK - DOMINANCE" de John Harsanyi [1963], uno de los primeros trabajos en este tipo de dirección. Este artículo es un buen representante de uno de los enfoques de la selección de equilibrios, basada no tanto en el aprendizaje de los jugadores, sino en supuestos de racionalidad muy fuerte para estos. "La racionalidad de Harsanyi" se sitúa frente a la seguridad, el equilibrio y el riesgo.

Los supuestos que aparecerán en esta sección, los relativos a seguridad y al equilibrio, son el fundamento de las 2 primeras relaciones de dominación de Harsanyi. En esta dominación, todos los jugadores "coinciden", pues cada uno de ellos preferirá entre dos equilibrios tales que uno "domina al otro", al "no dominado". En la sección 2.4, introduciremos nuevos supuestos de racionalidad sobre como se comportan jugadores que tienen preferencias distintas por equilibrios, en donde la clave es el riesgo y esto dará lugar a otra relación de dominación. Por último, tendremos supuestos para distinguir la acción de los jugadores en un juego donde existe algún tipo de comunicación entre ellos, de la acción cuando no existe ninguna comunicación.

El primer supuesto está relacionado con la actitud de los jugadores ante equilibrios y no equilibrios. Supongamos que un perfil de estrategias mixtas $\underline{X}$ no es equilibrio de Nash, entonces algún jugador j tiene incentivos para utilizar una estrategia $\underline{Y}^j$ no perteneciente a $\underline{X}$, incluso si los demás jugadores utilizan las estrategias $\underline{X}^k$ pertenecientes a $\underline{X}$. Es decir, ningún jugador puede esperar que todos los jugadores van a utilizar simultáneamente estrategias pertenecientes a $\underline{X}$. De aquí obtenemos el primer supuesto:

Supuesto de racionalidad 1

En un juego no cooperativo, si E'_i es un pago para el jugador i que es mayor que $\langle E_i \rangle$, el máximo asegurable o maxmin de dicho jugador, entonces el jugador i puede esperar alcanzar el pago E'$_i$, utilizando la estrategia $\underline{X}^i$, solo si $\underline{X}^i$ forma parte de un equilibrio de Nash $\underline{X}^*$ que tiene como pago E'$_i$ para el jugador i.

Al discutir las estrategias conservadoras, argumentamos que para obtener un pago más alto que el pago maxmin, un jugador necesita cooperación de los otros jugadores. En un juego no cooperativo la cooperación estable de los jugadores solo es posible en un equilibrio de Nash. En cambio, para obtener su pago maxmin, un jugador no necesita cooperación de los otros jugadores, ni tampoco tiene por que escoger estrategias que formen parte de algún punto de equilibrio.

Supuesto de Racionalidad II.

Sea $\langle E_i \rangle$ el pago maxmin del jugador i. Entonces el jugador i puede estar seguro de obtener al menos el pago $\langle E_i \rangle$ si usa cualquier estrategia conservadora $\langle \underline{X}^i \rangle$, incluso si $\langle \underline{X}^i \rangle$ **no es** una estrategia de equilibrio.

En un juego Γ un jugador i no puede esperar obtener un pago **más** alto que $\langle E_i \rangle$, si usa una estrategia conservadora $\langle \underline{X}^i \rangle$ o cualquier otra estrategia. Pero si usa $\langle \underline{X}^i \rangle$, puede estar seguro que obtendrá **al menos** $\langle E_i \rangle$, mientras que si usa cualquier otra estrategia $\underline{X}^i$, corre el riesgo de obtener menos que $\langle E_i \rangle$.

Supuesto de Racionalidad III.

Supongamos que en un juego no cooperativo Γ no hay un equilibrio $\underline{X}$ donde el pago $E_i(\underline{X})$ del jugador i exceda su pago maxmin $\langle E_i \rangle$. Entonces utilizará su estrategia conservadora $\langle \underline{X}^i \rangle$ (aunque $\langle \underline{X}^i \rangle$ **no sea** una estrategia de equilibrio) en lugar de una estrategia de equilibrio $\underline{X}^i$ (si $\underline{X}^i$ no es una estrategia conservadora).

Definición 2.3.1

Un equilibrio de Nash $\underline{X}$ **es rentable**, si para todo jugador i,

$$E_i(\underline{X}) > \langle E_i \rangle.$$

Los juegos exhaustivos no tienen equilibrios rentables.

Ejemplo de un juego no exhaustivo, sin equilibrios rentables.

Considérese el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (5,3) & (2,4) \\ (3,6) & (4,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Este juego solo tiene un punto de equilibrio en estrategias mixtas estrictamente hablando, $\underline{X} = (\underline{X}^1, \underline{X}^2) = (4/5\ \alpha_1 + \alpha_2\ 1/5,\ \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2\ )$, el pago para este par de estrategias es $E_1 = 7/2$ y $E_2 = 18/5$, los cuales también los obtienen con sus estrategias conservadoras, $\underline{<X^1>} = \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{3}{4}\alpha_2$ y $<\underline{X}^2> = 4/5\beta_1 + 1/5\beta_2$.

Vemos que si el jugador 1 utiliza su estrategia conservadora $<\underline{X}^1>$ puede estar **seguro** de obtener por lo menos $E_1 = 7/2$, pero si el jugador 1 utiliza su estrategia de equilibrio $\underline{X}^1$, su ganancia podría caer a 12/5, ya que si el jugador 2 decide utilizar su estrategia β_1, el pago es 23/5 pero si utiliza su estrategia β_2 el pago es 12/5. Aunque, es cierto que el jugador 2 no tiene incentivos para utilizar $\underline{X}^2$ en caso de que el jugador 1 decidiera utilizar $\underline{X}^1$ porque cualquier estrategia le produce como pago 18/5.

Conjuntos admisibles.

Sea Γ' el conjunto de todos los equilibrio de Nash de un juego Γ, y sea A un subconjunto no vacio de Γ' (posiblemente el mismo Γ'). Para $\underline{X}^i$ una estrategia del jugador i, denotamos como A($\underline{X}^i$) al conjunto de equilibrios de Nash $\underline{Y}$ en A tales que $\underline{Y}^i = \underline{X}^i$.:

Definición 2.3.1

El **pago asegurable** del jugador i en A usando la estrategia $\underline{X}^i$ (o su equivalente, desde cualquier equilibrio $\underline{Y}$ perteneciente a A($\underline{X}^i$) es

$$E_i^* (\underline{X}^i ; A) = E_i^* (\underline{Y} ; A)= \text{Min}\ \underline{Y} \varepsilon A (s_i) E_i (\underline{Y}) \qquad (2.3.1)$$

Definición 2.3.2

Dado el perfil de estrategias $\underline{X}$, el subconjunto A de equilibrios de Nash será llamado un **conjunto admisible** *respecto a* X, si el pago de seguridad de la estrategia X^j relativo a A está bien definido para todo jugador j.

El vector n cuya i - ésima componente es $E^*_i(\underline{Y}; A)$ para i = 1, 2 ....n se denota como $E^*(\underline{Y}; A)$ y se llama el vector de pago asegurable asociado con el equilibrio $\underline{Y}$ en el conjunto admisible A. El pago $E_i(\underline{Y})$ se llamará el pago definicional de i, en $\underline{Y}$.

Supuesto de racionalidad IV

Sea A un subconjunto de equilibrios de Nash de un juego Γ. Supongamos que todos los jugadores, excepto i, no tienen razones para evitar a ningún equilibrio que está en A. Entonces i **no puede contar** con cualquier pago mayor que su pago asegurable E_i^* ($\underline{Y}^i$; A), cuando el usa la estrategia $\underline{Y}^i$.

Sean ambos $\underline{Y}$ y $\underline{Z} \in A$, con $E_i(\underline{Y}) > E_i(\underline{Z})$. Pero supongamos que aparte de i, los otros jugadores no tienen razones para preferir el equilibrio $\underline{Y}$ al equilibrio $\underline{Z}$. Entonces i no puede actuar esperando que si escoge la estrategia $\underline{Y}^i$, los otros jugadores escogerán estrategias $\underline{Y}^j$ pertenecientes a $\underline{Y}$ en lugar de escoger estrategias $\underline{Z}^j$ pertenecientes a $\underline{Z}$. Si el juego fuera cooperativo, entonces i podría alcanzar un acuerdo con los otros jugadores para que todos usaran las estrategias correspondientes al equilibrio $\underline{Y}$, pero en un juego no cooperativo el jugador i no puede obtener un arreglo de esta clase.

Considérese el siguiente ejemplo.

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \\ \left(\begin{array}{cc} (2,2) & (3,2) \\ (2,3) & (3,3) \end{array}\right) \end{array}$$

Tenemos 4 equilibrios en estrategias puras (α_1, β_1), (α_1, β_2), (α_2, β_1) y (α_2, β_2). La opción del jugador 2 entre β_1 y β_2 no hará diferencia a su pago. Nuestro conjunto admisible A esta formado por estos 4 puntos. Aquí la mejor opción para ambos jugadores seria si pudieran entrar en un acuerdo para usar estrategias α_2 y β_2, pero como es un juego no cooperativo tal acuerdo no sucede. Incluso el jugador 1 no tendrá intenciones de utilizar α_2 en lugar de α_1 porque cualquier estrategia que su oponente use no hará diferencia en su propio pago. He aquí que para el jugador 1 cualquier estrategia que el use, α_1 o α_2, no puede esperar un pago mas alto que 1, esto es

$$\underline{Y} = (\alpha_1, \beta_1),\ \underline{Z} = (\alpha_2, \beta_1) \text{ y } \underline{Y}^1 = \underline{Z}^1$$
$$A(\underline{Y}^1) = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2)\}$$

y

$$\min_{\underline{x} \in A(Y^1)} E_1(\underline{X}) = \min \{E_1(\alpha_1, \beta_1), E_2((\alpha_1, \beta_2)\}$$
$$= \min\{1,2\} = 1$$

Si $\underline{X} = (\alpha_2, \beta_1)$ y $\underline{Y} = (\alpha_2, \beta_2)$, $A(\underline{X}^1) = \{(\alpha_2, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)\}$ y

$$\min_{\underline{z} \in A(X^1)} E_i(\underline{z}) = \min \{E_1(\alpha_2, \beta_1), E_2(\alpha_2, \beta_2)\}$$
$$= \min \{1,2\} = 1$$

Por ultimo $\min\{1,1\} = 1$.

Dos definiciones que utilizaremos más adelante con el concepto de dominancia por riesgo son las de pagos equivalentes y equivalentes seguros:

Definición 2.3.3.

Dos equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son **equivalentes** por pago si

$$E(\underline{Y}) = E(\underline{Z}).$$

Definición 2.3.4.

Dos equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son **equivalentes por seguridad** en algún conjunto admisible A si

$$E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\underline{Z}; A)$$

Proposición 2.3.5

Sean $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ dos equilibrios de Nash intercambiables y equivalentes por seguridad y sea $\underline{X}$ una recombinación de ambos, entonces $\underline{X}$ es un equilibrio de Nash equivalente por seguridad a $\underline{Y}$ y a $\underline{Z}$

Demostración:

En primer lugar como $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ dos equilibrios de Nash intercambiables, $\underline{X}$ es un equilibrio de Nash.

Por otro lado, $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son equivalentes por seguridad, si

$$E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\underline{Z}; A).$$

Para cualquier recombinación $\underline{X}$ y para cualquier $i \in N$, $\underline{X}^i = \underline{Y}^i$ o $\underline{X}^i = \underline{Z}^i$
Supongamos primero que $\underline{X}^i = \underline{Y}^i$ entonces

$$E^*_i(\underline{X}^i ; A) = E^*_i ((\underline{X} \mid \underline{Y}^i); A) = E^*_i ((\underline{Y} \mid \underline{Y}^i); A)$$

$$= E^*_i (\underline{Y}; A)= E^*_i (\underline{Z}; A)$$

donde la segunda igualdad proviene de (2.3.1).

Llegaríamos a lo mismo si $\underline{X}^i = \underline{Z}^i$, entonces

$$E^*_i (\underline{X}; A)= E^*_i (\underline{Y}; A)= E^*_i (\underline{Z}; A)$$

este argumento se aplica a todo $i \in N$. Por lo tanto

$$E^* (\underline{X}; A)= E^* (\underline{Y}; A)= E^* (\underline{Z}; A)$$

y $\underline{X}$ es equivalente por seguridad a $\underline{Y}$ y a $\underline{Z}$.

Q.D

La racionalidad ante el riesgo. El Principio de Zeuthen y El Postulado de aceptación de pagos mayores.

La racionalidad de los jugadores ante el riesgo de Harsanyi tiene su base en dos principios, por un lado el de Zeuthen que da lugar al concepto de dominancia por riesgo que es una generalización de dicho dicho principio y por otro lado, el postulado de aceptación de pagos mayores que da lugar al postulado de la Monotonía del Riesgo usado en este contexto de selección de equilibrios.

El Principio de Zeuthen

El principio establecido por Zeuthen para una negociación entre dos personas, 1 y 2, se puede resumir como sigue:

El individuo i hace la oferta de que se tomen las acciones x_i, que provocarían pagos esperadas de $E_i(x_i)$, con i=1,2. Suponiendo que el objetivo de 1 y 2 es maximizar su pago esperado y que si, no se ponen de acuerdo, arriesgan que se de la acción c que provoca el pago esperado $E_i(c)$, entonces el **máximo riesgo** que corre i por tratar de imponer x_i, en lugar de que le impongan x_j está da por :

$$R_i = R_i\,(x_i, x_j) = \frac{E_i(x_i) - E_i(x_j)}{E_i(x_i) - E_i(c)}$$

Es decir, la regla de decisión sería :

a) El individuo i debe ceder y aceptar la proposición de j y este último no hacer concesiones, si $R_i < R_j$,

b) Ambos individuos deben hacer algunas concesiones, si $R_i = R_j$.

2. El Postulado de aceptación de pagos mayores.

Este postulado diría que si un jugador dado está dispuesto a aceptar algún resultado particular x entonces está dispuesto también a aceptar cualquier resultado que le produzca un pago mayor.

Este postulado que interesa a Harsanyi, junto con el principio de Zeuhten dan lugar a:

El postulado de la Monotonía del Riesgo.

"Si un negociador o un jugador está dispuesto a aceptar un riesgo al menos de p para tratar de alcanzar x en lugar de y, entonces no aceptará un riesgo mayor para evitar un pago menos favorable que y, para alcanzar la misma x"

Si se tomara como supuesto racional el principio de Zeuthen y no se satisficiera la Monotonía de Riesgo, entonces se obtendría una violación a la regla de decisión del Postulado de Aceptación de pagos Mayores. Algún jugador i podría ser capaz de rechazar un equilibrio $\underline{X}$ aunque tuviera que aceptar otro equilibrio $\underline{Y}$, el cual podría ser inconsistente con el postulado de la Aceptación de Pagos Mayores.

Otra consideración a la que Harsanyi da gran importancia, además de los supuestos de racionalidad anteriores, es el hecho de que si en un juego es posible la **comunicación entre los jugadores**, aunque sea mínima, o esta no es posible.

2.4 Problemas de Coordinación: diferencias entre juegos Tácitos Semivocales y Vocales y entre sus soluciones.

En los juegos no cooperativos, los jugadores no pueden tener acuerdos previos que sean obligatorios y los únicos puntos que representan situaciones estables son los equilibrios en el sentido de Nash, no importando si la **comunicación** entre los jugadores es permitida (juegos vocales) o no lo es (juegos tácitos). También se puede hablar de juegos semivocales cuando los jugadores están dispuestos a hacer alguna concesión, pero no se pueden comunicar lo suficiente para permitir la total coordinación de sus estrategias.

Supongamos que en un juego Γ, los jugadores tienen que escoger entre los equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$. Diremos que hay opciones **coordinadas,** si todos los jugadores escogerían las estrategias correspondientes a $\underline{Y}$ o si todos escogerían estrategias correspondientes a $\underline{Z}$.

Decimos que un juego Γ involucra un **problema de coordinación,** si contiene al menos dos equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ tales que son equivalentes por seguridad en algún subconjunto A de equilibrios de Nash, pero no son **intercambiables**.

Supuesto de racionalidad ante la comunicación.

Solo si el juego Γ incluye **un problema de coordinación** existe diferencia entre si el juego es completamente **vocal** por un lado o es **tácito o semivocal** por el otro lado.

Esto es porque si dos equilibrios de Nash $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ producen **diferentes** vectores de pago asegurables $E^*(\underline{Y}; A)$ y $E^*(\underline{Z}; A)$, entonces la elección entre $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ siempre podrá ser decidida por criterios de selección basados en consideraciones de **dominancia y negociación**. Si los jugadores siguen estos criterios entonces todos ellos harán la misma elección entre $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$, incluso sin comunicación y no habrá un problema de coordinación de estrategias.

En cambio, cuando los vectores de pago asegurables son **iguales** en el conjunto admisible A, $E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\underline{Z}; A)$, los jugadores no tienen un criterio a priori para escoger $\underline{Y}$ o $\underline{Z}$. Incluso si los jugadores estuvieran dispuestos a aceptar el vector de pago asegurable asociado con $\underline{Y}$ y con $\underline{Z}$, en la ausencia de comunicación, harán elecciones no coordinadas, algunos jugadores i elegirán estrategias $\underline{Y}^i$ pertenecientes a $\underline{Y}$ mientras que otros jugadores j escogerán estrategias $\underline{Z}^j$ pertenecientes a $\underline{Z}$. Así el resultado en general no será $\underline{Y}$ ni $\underline{Z}$, sino alguna **recombinación** $\underline{X}$ de $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$. Si $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son **intercambiables**, no habrá ningún problema, por falta de comunicación, porque cualquier recombinación $\underline{X}$ de $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ será un equilibrio de Nash que produce el mismo vector de pago de seguridad que $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ y diremos que **no se** genera un problema de coordinación.

El problema se presenta, cuando $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ son de equilibrio de Nash equivalentes por seguridad, pero no son intercambiables, pues si no existe comunicación, los jugadores serán en general incapaces de alcanzar el vector de pagos $E^* = E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\underline{Z}; A)$. Esto es porque una elección no coordinada puede producir una recombinación de $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ que no sea equilibrio de Nash y, lo sea o no, tenga un vector de pago de seguridad diferente de E^*. Así los jugadores podrían tener que escoger algún punto de equilibrio menos favorable que $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ ó podrían tener que recurrir a usar sus estrategias conservadoras. Por esto, si puede haber gran diferencia entre un juego **vocal** y **otro que no lo sea** y diremos que la elección entre $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ envuelve un **problema de coordinación**.

Ejemplo.

Considérese el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Este juego tiene tres equilibrios de Nash: $\underline{Y} = (\alpha_1, \beta_1)$, $\underline{Z} = (\alpha_2, \beta_2)$ y $\underline{X} = (\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2)$, el vector de pagos para $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ es $(1, 1)$ mientras que para $\underline{X}$ es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Si fuera un juego **vocal**, los jugadores escogerían $\underline{Y}$ o $\underline{Z}$, no importando cual, porque estos dos dominan a $\underline{X}$. Pero si el juego fuera tácito o semivocal, entonces los jugadores serían incapaces de coordinar sus elecciones entre $\underline{Y}$ y $\underline{Z}$ y esto no les dejaría otra alternativa que escoger una recombinación.

Soluciones de Harsanyi para los juegos Tácitos y Vocales.

Para cada juego, Harsanyi define dos conceptos de solución uno llamado **solución V** (si el juego fuera vocal), el otro **solución T** (si el juego fuera no vocal). Para casi todos los juegos las dos soluciones coincidirán, no así para los que envuelven un problema de coordinación.

El propósito de estos conceptos de solución es seleccionar un único vector de pago asegurable como la solución del juego, suponiendo un comportamiento racional, de acuerdo a lo descrito en 2.3, por parte de los jugadores, y señalar el perfil o perfiles que podrían elegir los jugadores, en los cuales este vector de pago se alcanzaría.

Al considerar los postulados de racionalidad II y III, concluimos que en ciertos casos el jugador tendrá que utilizar sus estrategias conservadoras. Pero en los otros casos, el supuesto I, nos dice que dichas soluciones tendrán que ser un subconjunto de equilibrios de Nash, con ciertas propiedades.

La solución V para juegos **vocales** consistirá o bien de M, el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras o **puntos maxmin,** o bien de un subconjunto L de **equilibrios de Nash equivalentes por seguridad,** con respecto a algún conjunto admisible A.

La equivalencia por seguridad requerida para la solución V y la intercambiabilidad requerida para la solución T, se siguen de los supuestos IV y del supuesto de racionalidad ante la comunicación.

En el caso de los juegos **vocales** suponemos que los jugadores siempre pueden coordinar sus estrategias cuando ellos así lo requieran, por ello será suficiente que la solución sea un conjunto L de equilibrios de Nash equivalentes por seguridad y ya que los jugadores pueden comunicarse, no tendrán dificultad en alcanzar una elección coordinada.

Para construir las soluciones V y T, Harsanyi definió dos tipos de relacionas de dominancia, unas basadas en los supuestos de racionalidad por seguridad y equilibrio, las otras en los supuestos de racionalidad ante el riesgo.

2.5 Relaciones de dominación por seguridad y equilibrio.

De los supuestos de racionalidad de la sección 2.3 definiremos dos relaciones de dominio entre los equilibrios de Nash de un juego, la **dominancia simple** y la **dominancia estricta.**

Definición 2.5.1

El equilibrio de Nash $\underline{Y}$ domina **simplemente** al equilibrio $\underline{Z}$ dentro de algún subconjunto de equilibrios admisible A, escrito como

$$\underline{Y} \underset{A}{\succ} \underline{Z}$$

Si

$$E^*(\underline{Y}; A) > E^*(\underline{Z}; A).$$

es decir si para todo jugador j, tenemos que $E_j^*(\underline{Y}; A) > E_j^*(\underline{Z}; A)$.

El equilibrio de Nash $\underline{Y}$ domina **estrictamente** al equilibrio $\underline{Z}$ dentro de algún subconjunto de equilibrios admisible A, escrito como

$$\underline{Y} \underset{A}{{}^*\!\!\succ} \underline{Z}$$

Si

$$E^*(\underline{Y}; A) > E^*(\underline{Z}).$$

es decir si para todo jugador j, tenemos que $E_j^*(\underline{Y}; A) > E_j(\underline{Z})$.

Como consecuencia de la definición de pago asegurable de las estrategias de los jugadores (2.3.1), tenemos que se cumple:

Proposición 2.5.2

Si el equilibrio de Nash $\underline{X}$ domina estrictamente al equilibrio $\underline{Y}$, entonces lo domina simplemente. Además si $A' \subseteq A$

$$\underline{Y} \ {}^{*}\!\underset{A}{\succ} \ \underline{Z} \qquad \text{implica} \qquad \underline{Y} \ {}^{*}\!\underset{A'}{\succ} \ \underline{Z}$$

En cambio, Si el equilibrio de Nash $\underline{X}$ domina simplemente al equilibrio $\underline{Y}$, no necesariamente lo domina estrictamente, con $A' \subseteq A$

$$\underline{Y} \underset{A}{\succ} \underline{Z} \qquad \text{no implica} \qquad \underline{Y} \underset{A'}{\succ} \underline{Z}$$

Por ejemplo, considérese un juego de tres personas, en el cual las estrategias del jugador 1 son iguales en dos equilibrios de Nash: $\underline{X}=(\underline{X}^1, \underline{X}^2, \underline{X}^3)$ y $\underline{Y}=(\underline{Y}^1, \underline{Y}^2, \underline{Y}^3)$, es decir $\underline{X}^1 = \underline{Y}^1$. Supongamos, además que $E_1(\underline{X}) = 2$ y $E_1(\underline{Y}) = 1$ y sea $\underline{Z}$, un tercer equilibrio, en el que el jugador 1 no usa la misma estrategia.

Si $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ pertenecen a un conjunto admisible A, entonces $E^*_1(\underline{X}; A) = 1$. Pero si $\underline{Y}$ no pertenece a dicho conjunto A, entonces $E^*_1(\underline{X}; A) = 2$. Así puede ocurrir que $\underline{Z}$ domine simplemente a $\underline{X}$, si $\underline{Y}$ está en A, pero no domine simplemente a $\underline{X}$, si $\underline{Y}$ no está en A.

Esto es:

Si $A = \{\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}\}$

Entonces

$E^*_1(\underline{X}; A) = 1$

Porque $\underline{X}^{i} = \underline{Y}^{i}$ entonces $\underline{Y} \in A(\underline{X}^{i})$

y $E^*_1(\underline{X}; A) = \min_{\underline{Y} \in A(\underline{X}^{i})} E_1(\underline{Y}) = 1,$

En cambio, si $A = \{\underline{X}, \underline{Y}\}$, entonces

$E^*_1(\underline{X}; A) = 2$

y podría suceder que

$$\underline{Z} \underset{A}{\succ} \underline{X}$$

Ya que es posible que

$E^*(\underline{Z}; A) > E^*(\underline{X}; A) = 1$, cuando $A = \{\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}\}$

Pero

$E^*(\underline{X}; A)$ no sea mayor que $E^*(\underline{Y}; A) = 2$, cuando $A = \{\underline{X}, \underline{Y}\}$

Por el contrario, la dominancia estricta de $\underline{Z}$ sobre $\underline{X}$, **no depende de si el equilibrio** $\underline{Y}$ está o no en A, pues esta relación se define a través del pago $E_1(\underline{X}) = 2$ y no del pago asegurable $E^*_1(\underline{X}; A)$

Definición 2.5.3

Un equilibrio de Nash $\underline{X}$ es **simplemente no dominado** (o **estrictamente no dominado**) en algún conjunto admisible A, si no existe ningún equilibrio de Nash en A que lo domine simplemente (estrictamente).

Como decíamos el procedimiento de selección de Harsanyi consiste en depurar los equilibrios no dominados, por la proposición 2.5.2. es conveniente llevar a cabo primero la depuración relativa a la dominancia estricta y posteriormente la relativa a la dominancia simple. Con estas dos depuraciones, en las que, como mencionamos anteriormente, los jugadores tienen intereses comunes, se construye un juego más pequeño que el original, en el que se enfrentarán intereses contrapuestos y se medirá la fuerza que tiene cada jugador para imponer el equilibrio que le conviene.

2.6 Dominación Por Riesgo. La Funciones de Riesgo Directa y Extendida.

La relación de dominación por riesgo que definiremos en esta sección está basada en los supuestos de racionalidad por riesgo de 2.4

Sean $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ dos equilibrio de Nash pertenecientes a un subconjunto factible de equilibrios A y que tienen estrategias distintas para el jugador i y cuyo pago de seguridad, para este jugador es mayor en el primero que en el segundo dentro de A. Al llevar a cabo el proceso de selección de equilibrios de Harsanyi, la relación de dominación por riesgo no se trabaja dentro de un conjunto A de equilibrios cualquiera, sino con subconjuntos de equilibrios del llamado juego reducido que se construye en la sección siguiente, aplicando las relaciones de dominación que aparecieron en 2.5.

Como las relaciones de dominación por riesgo se determinan por el pago de seguridad dentro de un mismo conjunto admisible A, usaremos la notación $E^*(\underline{Y})$, en vez de $E^*(\underline{Y}; A)$ que es la que estará involucrada.

Supongamos que, en el contexto con el que iniciamos la sección, todos los jugadores excepto el jugador i están dispuestos a aceptar su pago de seguridad $E^*(\underline{Y})$ y en cooperar para alcanzar el equilibrio $\underline{Y}$. Si el jugador i propone a los otros jugadores (suponiendo que esto es posible en el juego) que él está también dispuesto a aceptar $E^*_i(\underline{Y})$ y a utilizar, por ello, la estrategia $\underline{Y}^i$, entonces los otros jugadores utilizarán estrategias $\underline{Y}^j$ pertenecientes a $\underline{Y}$ y el jugador i obtiene al menos $E^*_i(\underline{Y})$.

Pero si insiste en utilizar la estrategia $\underline{Y}^i$ tratando de asegurar el pago $E^*_i(\underline{X})$, no podrá hacerlo, porque los otros jugadores pueden aferrarse a sus estrategias $\underline{Y}^j$. Por lo que i corre el **riesgo** de obtener solamente $E^*_i(\underline{Y} \mid \underline{X}^i)$.

Definición 2.6.1.

La **función de riesgo directa** del jugador i es una función P_i: A x A→R, definida como

$$P_i(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{E^*_i(\underline{X}) - E^*_i(\underline{Y})}{E^*_i(\underline{X}) - E^*_i(\underline{Y} \mid \underline{X}^i)},$$

para $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ tales que $E^*_i(\underline{X}) > E^*_i(\underline{Y} \mid \underline{X}^i)$ y

$$P_i(\underline{X}, \underline{Y}) = 0, \quad \text{si } E^*_i(\underline{X}) \leq E^*_i(\underline{Y} \mid \underline{X}^i).$$

El valor de P_i en la pareja $(\underline{X}, \underline{Y})$ se interpreta como el **máximo riesgo** que el jugador i está dispuesto a correr para alcanzar el equilibrio de Nash $\underline{X}$ en contra de que le impongan el equilibrio $\underline{Y}$.

Es claro que el jugador i no correrá ningún riesgo para alcanzar el equilibrio de Nash $\underline{X}$ en contra de que le impongan el equilibrio $\underline{Y}$, si no prefiere claramente a $\underline{X}$ que a $\underline{Y}$, es lo que expresa la última condición de la definición.

Sea $W_i(\underline{Y})$ el conjunto de todos los equilibrios de Nash $\underline{Z}$ en A tales que $\underline{Z} = \underline{Y}$ ó $E^*_i(\underline{Z}) < E^*_i(\underline{Y})$. Así $W_i(\underline{Y})$ contiene al equilibrio $\underline{Y}$ y a todos los equilibrios de A menos favorables que $\underline{Y}$, desde el punto de vista del jugador i.

Definición 2.6.2

El jugador i está dispuesto **uniformemente** a correr el riesgo r en R para alcanzar el equilibrio $\underline{X}$ en contra de cualquier equilibrio en $W_i(\underline{Y})$, si

$$P_i(\underline{X}, \underline{Z}) \geq r \qquad \text{para todo } \underline{Z} \in W_i(\underline{Y})$$

Definición 2.6.3

La **función de riesgo extendida** es una función R_i: A x A→R definida como,

$$R_i(\underline{X}, \underline{Y}) = \min_{\underline{Z} \in W_i(\underline{Y})} P_i(\underline{X}, \underline{Z})$$

La función R_i está bien definida, pues el conjunto de valores de la función P_i está acotado inferiormente y por lo menos contiene al 0.

$R_i(\underline{X}, \underline{Y})$ se interpreta como el máximo riesgo que el jugador i está dispuesto a tomar para alcanzar X en contra de $\underline{Y}$ y todos los equilibrios $\underline{Z}$ que son **cuando mucho tan favorables** como $\underline{Y}$.

Dominación Primaria por Riesgo.

Definición 2.6.4

Sean $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ dos equilibrios de Nash en A. Se dice que $\underline{X}$ domina débilmente por riesgo a $\underline{Y}$, en el **nivel** r^*, si

$$r^* = \max_i R_i(\underline{X}, \underline{Y}) \geq \max_j R_j(\underline{Y}, \underline{X}).$$

Si $r^* = \max_i R_i (\underline{X}, \underline{Y}) > \max_j R_j (\underline{Y}, \underline{X})$,

decimos que $\underline{X}$ **domina fuertemente por riesgo** a $\underline{Y}$, en el **nivel de riesgo** r^*.

Estas relaciones se llaman la **relación de dominación por riesgo primaria débil y fuerte** respectivamente.

Si para un jugador i^*, $r^* = R_i^* (\underline{X}, \underline{Y})$, se dice que su oposición a $\underline{Y}$ es **fuertemente (débilmente) decisiva en el nivel de riesgo** r^*

Dominación Secundaria por Riesgo.

Las relaciones primarias de dominación por riesgo no seleccionan, en general, una solución determinada para el juego, porque en muchos juegos no habrá ningún equilibrio de Nash $\underline{X}$ que domine por riesgo a todos los demás equilibrios, ni fuerte, ni débilmente usando la relación de dominación primaria.

Para que un equilibrio de Nash $\underline{X}$ tenga una relación de dominación por riesgo sobre cada uno de los demás equilibrios de A, es necesario y suficiente que, con la relación primaria, $\underline{X}$ **no sea** dominado **fuertemente** por riesgo por ningún otro equilibrio de A. Pero en muchos juegos, para cualquier equilibrio $\underline{X}$, existirá un equilibrio $\underline{Z}$ que lo domina fuertemente por riesgo. Esto se debe a que la dominanción por riesgo no es una relación transitiva. Es decir, puede ocurrir que $\underline{X}$ domine fuertemente a $\underline{Y}$ mientras que $\underline{Y}$ domine fuertemente a $\underline{Z}$, pero ocurra que $\underline{Z}$ domine fuertemente por riego a $\underline{X}$.

La dominación por riesgo que define Harsanyi como secundaria tiene la ventaja de ser transitiva.

Supongamos que en un conjunto factible A, cada equilibrio de Nash $\underline{Y}$ es dominado fuertemente por riesgo por al menos otro equilibrio $\underline{X}$, en algún nivel de riesgo r^*. Sea $i = i^* (\underline{X}, \underline{Y})$ el jugador cuya oposición a $\underline{Y}$ es decisiva en establecer una relación de dominación por riesgo, es decir, el jugador i para el cual $R_i (\underline{X}, \underline{Y}) = r^*$.

Pero $\underline{X}$, el equilibrio de Nash favorecido por el jugador i, está dominado fuertemente por riesgo por algún otro punto de equilibrio $\underline{Z}$. Ahora, supongamos que el jugador $j = i^* (\underline{Z}, \underline{X})$ es el jugador cuya oposición a $\underline{X}$ es decisiva, etc.

En las relaciones de dominación por riesgo primarias, puede que cada equilibrio de Nash esté sujeto al poder de veto de uno o más jugadores, cuya oposición activa a dicho equilibrio sería decisiva. Consecuentemente los jugadores pueden ser capaces de llegar a un acuerdo sobre un equilibrio de Nash $\underline{X}$, solo si el jugador o jugadores con el poder de veto en contra de $\underline{X}$ se abstienen de usar este poder, porque consideren que no pueden alcanzar otro equilibrio $\underline{Y}$ que les sea más favorable que $\underline{X}$.

Recurriendo al principio de Zeuthen se puede decidir en una situación así. Si un jugador i y un jugador j compiten por imponer dos equilibrios de nash distintos, por el Principio de Zeuthen las concesiones deben venir del jugador que esté menos dispuesto a aceptar el riesgo para descartar el punto de equilibrio al que se opone, es decir, dichas concesiones deben venir del jugador que tenga asociado el nivel de **riesgo mas bajo**. Si ambos jugadores tienen asociados el mismo nivel de riesgo, entonces los dos deben hacer concesiones.

Dado un conjunto factible A de equilibrios de Nash, consideremos la función $H: A \times A \rightarrow R$, definida como

$H (\underline{X}, \underline{Y}) = r^*$	si $\underline{X}$ domina fuertemente por riesgo (relación primaria) a $\underline{Y}$ en el nivel de riesgo r^*.
$H (\underline{X}, \underline{Y}) = 0$	si $\underline{X}$ domina fuertemente por riesgo (relación primaria) a $\underline{Y}$ en todo nivel de riesgo .

Definición 2.6.5

Dado un equilibrio de Nash $\underline{X}$, el nivel más alto de riesgo al que está sujeto $\underline{X}$ por una dominanción fuerte (primaria) por cualquier equilibrio en A es

$$\max_{\underline{Y} \in A} H(\underline{Y}, \underline{X})$$

La función de nivel máximo K: A x A→R, definida como

$$K(\underline{X}) = \max_{\underline{Y}} H(\underline{Y}, \underline{X})$$

Definición 2.6.6

El nivel más alto de riesgo en el que el jugador i se opone al equilibrio de Nash $\underline{X}$ a favor de algún equilibrio $\underline{Y}$ es

$$K_i(\underline{X}) = \max_{\underline{Y}} R_i(\underline{Y}, \underline{X})$$

$\underline{X}$ domina débilmente por riesgo a $\underline{Y}$, en el **nivel r***, si

$$r^* = \max_i R_i(\underline{X}, \underline{Y}) \geq \max_j R_j(\underline{Y}, \underline{X}).$$

$\underline{X}$ **domina fuertemente por riesgo** a $\underline{Y}$, en el **nivel de riesgo r***, si

$$r^* = \max_i R_i(\underline{X}, \underline{Y}) > \max_j R_j(\underline{Y}, \underline{X}),$$

Entonces se puede definir K en forma equivalente como

$$K(\underline{X}) = \max_Y \max_i R_i(\underline{Y}, \underline{X}) = \max_i \max_Y R_i(\underline{Y}, \underline{X}) = \max_i K_i(\underline{X})$$

Es decir $K(\underline{X})$ es el nivel de riesgo más alto $R_i(\underline{Y}, \underline{X})$ que está dispuesto a correr alguno de los jugadores para oponerse a $\underline{X}$. Representa, de alguna manera, la mayor oposición con que cuenta el equilibrio de Nash $\underline{X}$.

Definición 2.6.7

Un equilibrio de Nash $\underline{X}$ **domina débilmente por riesgo (secundaria)** a $\underline{Y}$, si $K(\underline{X}) \leq K(\underline{Y})$.

Un equilibrio de Nash $\underline{X}$ **domina fuertemente por riesgo (secundaria)** a $\underline{Y}$, si $K(\underline{X}) < K(\underline{Y})$.

La dominancia por riesgo secundaria es una relación transitiva.

Usando los dos tipos de relación de dominación expuestos en estas dos últimas secciones Harsanyi construye un proceso sistemático de eliminación de estrategias de los diversos jugadores.

2.7 El proceso de Selección de equilibrios de Harsanyi. Construcción del Juego Reducido.

Dado un juego Γ Harsanyi procede a construir el llamado juego reducido, borrando o descartando más y más estrategias de los jugadores, en base al primer conjunto de supuestos de racionalidad (2.3) y a las relaciones de dominación de la sección 2.5. Posteriormente ya construido el juego reducido, dentro de éste se usa otra selección basada en la dominación por riesgo.

Para construir el juego reducido, en cada etapa de este proceso de selección, se obtendrá un conjunto admisible A que consiste de los equilibrios de Nash que han sobrevivido hasta ese momento. Las relaciones de dominancia simple y estricta (2.5) se considerarán en términos de dicho conjunto admisible A

Pasos para construir el juego reducido Γ*:

1-. Se borran las estrategias que no son parte de ningún equilibrio de Nash.

2-. Se borran todas las estrategias que no son parte de algún equilibrio de Nash **rentable**. Si después de estos dos pasos todas las estrategias de alguno de los jugadores han sido borradas termina el proceso

3-. Si para todo jugador i, el conjunto de estrategias no borradas no es vacio, se define el conjunto de todos los equilibrios de Nash sobrevivientes como el **conjunto admisible** A(1) y se borran todas las estrategias que no forman parte de algún equilibrio **no dominado estrictamente** dentro de A. Se define A(2) como el conjunto de los equilibrio de Nash restantes. Se repite este proceso de tal manera que si A(k) está construida, A(k+1) es el conjunto de los equilibrios de Nash que sobreviven después de borrar las estrategias que forman parte de equilibrios dominados estrictamente dentro de A(k).

Definimos $A' = \bigcap_{l=1}^{\infty} A(l)$ que es el conjunto de equilibrios contenidos todavía en el juego, después del proceso del punto 3.

4-. Se borran todas las estrategias que no forman parte de algún equilibrio de Nash **no dominado simplemente** dentro de A´ y se construye A´(1) como el conjunto de equilibrios que permanecen, después de ello. Se repite este proceso de tal manera que si A´(k) está construida, A´(k+1) es el conjunto de los equilibrios de Nash que sobreviven después de borrar las estrategias que forman parte de equilibrios dominados simplemente dentro de A(k). Llamaremos A´´ al conjunto $\bigcap_{l=1}^{\infty} A'(l)$.

5-. Para cada equilibrio de Nash $\underline{X}$ en A´´, se reemplaza el vector de pago de la función E, por el vector de pago asegurable E*($\underline{X}$; A´´), si $\underline{X}$ es un equilibrio de Nash del juego original Γ (denotaremos E*($\underline{X}$) a E*($\underline{X}$; A´´)) y si $\underline{X}$ no es un equilibrio de Nash de Γ, el pago se mantiene como antes (denotaremos E* ($\underline{X}$) a E ($\underline{X}$)

Observaciones:

a.- El proceso puede terminar después del paso dos, por haber eliminado todas las estrategias de algunos de los jugadores y la solución tendrá que establecerse en términos de perfiles de estrategias conservadoras, aunque no sean equilibrios de Nash.

b.- $\bigcap_{l=1}^{\infty} A(l)$ es no vacío, puesto que en el conjunto de los equilibrios beneficiosos, existe al menos un vector $\underline{X}^*$, cuyo vector de pagos E($\underline{X}^*$) no está dominado, coordenada a coordenada, por ningún otro vector de pagos. Por lo tanto, $\underline{X}^*$ está en todos los conjuntos A(l) y $\bigcap_{l=1}^{\infty}$ A(l) no es vacío.

c.- $\bigcap_{l=1}^{\infty} A'(l)$ es no vacío.

Demostración

Supongamos que $\bigcap_{l=1}^{\infty} A'(l)$ es vacio, entonces para cada equilibrio $\underline{X}^*$ en $\bigcap_{l=1}^{\infty} A(l)$, existe un último A´(k) tal que contiene a X^*. Es decir X^* pertenece a todos los conjuntos del encaje

A´(k)⊆ A´(k-1) ⊆...⊆A´(1), pero no a A´(k+1),

Definamos V: $\bigcap_{l=1}^{\infty} A(l) \rightarrow R^n$, como V($\underline{X}$)=$U^*$($\underline{X}$, A´(k)), donde A´(k) es el último conjunto del encaje en el que se encuentra $\underline{X}$.

Pensemos en el conjunto de vectores $V(\underline{X})$ tales que $\underline{X}$ está en A´(1). En este conjunto existe al menos un vector $\underline{X}^{\sim}$ que no está dominado por ningún otro vector del mismo conjunto. Sea A´(k) el último conjunto del encaje generado por la dominancia débil en el que se encuentra $\underline{X}^{\sim}$.

En A´(g) debe haber algún equilibrio $\underline{X}^{\sim\sim}$ tal que domina débilmente a $\underline{X}^{\sim}$, relativamente a A´(g) , pues de lo contrario, $\underline{X}^{\sim}$ estaría en A´(g+1). Entonces $\underline{X}^{\prime\prime}$ está dominado contrario al supuesto de que no estaba dominado.

d- El cambio de función de pago se introduce, pues las relaciones de dominación por riesgo se definen en términos del pago de seguridad, debido al supuesto de racionalidad IV.

El juego obtenido por los pasos 1 al 5 es llamado el juego **reducido** Γ^*. El conjunto de todos los puntos de equilibrio en Γ^* será denotado por Γ^{**}.

Para cualquier juego Γ que contiene solamente un número **finito** de subsoluciones de Nash Ψ, el proceso descrito siempre termina de un número finito de iteraciones. Ya que los pasos 3 y 4 son los únicos que pueden provocar un proceso infinito de pasos y siempre que se borren las estrategias dadas σ^i también se borran las estrategias $\underline{X}^{i'}$ en el mismo conjunto similar "X_i^j", pero el número de tales conjuntos similares en Γ es finito, si Γ contiene solamente un finito número subsoluciones.

Demostración.

Si Γ contiene un finito número subsoluciones Ψ entonces el rango de una estrategia $\underline{X}^i$ dada de todas las subsoluciones Ψ existe y es finito. Por lo que los conjuntos de estrategias similares "X_i^j" son finitos si es que existen porque el rango de las subsoluciones es finito.

Q.E.D

Sin embargo, si en un juego dado Γ el número de subsoluciones es infinito (incluso un juego finito puede contener muchas subsoluciones infinitas) entonces los pasos 3 y 4 puede crear dos secuencias infinitas de conjuntos admisibles A, A(1), A(2), ... y A´(1), A´(2), ... respectivamente. Pero ambas secuencias siempre convergen

Después de llevar a cabo los 5 pasos, estaremos en uno de los siguientes cuatro casos posibles:

1ª. El juego reducido Γ^* es **vacío** después de llevar a cabo el paso 2.

Ejemplo.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{array}
\begin{pmatrix}
(3, 1) & (3, 1)^* & (1, -1) & (1, -1) \\
(3, 1) & (3, 1) & (0, 2) & (0, 2) \\
(5, 1)^* & (0, 1) & (5, 1)^* & (0, -1) \\
(3, 1) & (3, 1)^* & (0, -1) & (0, -1) \\
(5, 1) & (2, 2) & (5, 1) & (2, 2)^* \\
(5, 1)^* & (0, -1) & (5, 1)^* & (0, -1) \\
(5, 1) & (2, 2) & (5, 1) & (2, 2)^*
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Paso 1. Borrar las estrategias no pertenecientes a algún punto de equilibrio. Entonces borramos la estrategia 2 del jugador I.

Paso 2. Borrar las estrategias que no pertenecen a un punto de equilibrio rentable. Pago asegurable del jugador I: $\langle E_1(x) \rangle = 2$

Pago asegurable del jugador II: $\langle E_2(x) \rangle = 1$

Entonces borramos las estrategias 5 y 7 para el jugador I y las estrategias 1, 2, 3, y 4 para el jugador II.

Paso 3. Se define A con los puntos de equilibrio restantes y borrar las estrategias no dominadas estrictamente en A.

Entonces A esta vacío porque no hay puntos restantes y las soluciones V y T para los dos jugadores es escoger sus estrategias conservadoras

2ª. Todos equilibrios de Nash en Γ^* son **intercambiables**, es decir, el juego reducido Γ^* tiene una solución de Nash.

Ejemplo.

	1	2
1	(0, 100)	(0, 100)
2	(0, 100)	(0, 100)
3	(0, 100)	(0, 100)
4	(0, 100)	(30, 100)
5	(40, 90)	(30, 100)
6	(0, 100)	(0, 100)
7	(0, 100)	(180, 190)*
8	(270, 100)*	(0, 0)
9	(0, 100)	(180, 190)*
10	(270, 100)	(180, 190)*
11	(270, 100)*	(0, 0)
12	(40, 90)	(150, 190)
13	(0, 100)	(30, 100)
14	(40, 90)	(0, 100)
15	(270, 100)*	(30, 100)
16	(0, 100)	(30, 100)

Paso 1. Borramos las estrategias 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14 y 16 del jugador I.

Paso 2. Borramos la estrategia 2 del jugador II porque

$$\langle E_1(x)\rangle = 180 \text{ y } \langle E_2(x)\rangle = 90$$

Paso 3. A = {(8, 1), (11, 1), (15, 1)}, A(2) = A

Entonces

$$\text{Min}_{\underline{X} \in A(2)} E_1(\underline{X}) = \min\{270, 270, 270\} = 270$$

Y

$$E^*(\underline{X}; A) = (270, 100)$$

Borramos las estrategias 7 y 9 del jugador I porque (0, 100) no es mayor que (270, 100), no hay dominancia simple, i.e. $E^*(\underline{X}; A) = E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\underline{Z}; A)$

Entonces solo nos quedan tres puntos de equilibrio en el juego por discriminar los cuales son intercambiables. Cualquiera de ellos es la solución del juego, $\underline{Z}^* = (270, 100)$

3ª. Todos los equilibrios en Γ^* son **equivalentes**, pero no intercambiables, ninguno de ellos.

Ejemplo.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2, 0)^* & (5, -1) & (2, -10) \\ (-2, 0) & (3, -1) & (8, 0)^* \\ (0, 1) & (5, -1) & (4, 8) \end{pmatrix} \end{array}$$

Paso 1. Borramos estrategias 2 del jugador II y 3 del jugador I

Paso 2. Borramos la estrategia 1 del jugador I, porque

$$\langle E_1(x)\rangle = 2 \;\; y \;\; \langle E_2(x)\rangle = 0$$

$\underline{X} = (2, 3)$ es el único equilibrio rentable.

Si seguimos aplicando el algoritmo estrictamente para ejemplificar los pasos restantes tenemos

Paso 3. $A = \{(2, 3)\} = A(Y^2)$

$$\text{Min}_{\underline{X} \in A(Y^2)} E_2(X) = \min \{0\} = 0$$

Entonces

$E^*(\underline{X}; A) = (8, 0)$

No esta dominado por ningún otro punto

Paso 4. No hay paso 4.

Paso 5. $E^*(\underline{X}; A) = (8, 0) = E^*(\underline{X})$. $\underline{X}$ es la solución del juego.

Es equivalente con su propio pago y no se intercambia con ningún otro punto porque es el único.

4ª. Los equilibrios en Γ^* no son ni intercambiables ni equivalentes.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (1, -10) & (3, 1)^* \\ (2, 3)^* & (0, 0) \end{pmatrix}} \end{array}$$

Paso 1. No se borra ninguna estrategia

Paso 2. Se borran las estrategias mixtas pertenecientes al equilibrio ((3/14, 11/14), (3/4, 1/4)) porque no es un equilibrio rentable, es decir, $v_1 = 3/2 = E_1((3/14,\ 11/14),\ (3/4,\ 1/4))$ y $v_2 = 3/14 = E_2((3/14,\ 11/14),\ (3/4,\ 1/4))$. En estrategias puras no se borra ninguna estrategia porque $\langle E_1(x)\rangle = 1$ y $\langle E_2(x)\rangle = 0$ y ambos equilibrios (α_1, β_2), (α_2, β_1) son rentables.

Paso 3. No hay dominancia estricta. No se borran estrategias, esto es

$$A = \{(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1)\},\quad A_1 = \{(\alpha_1, \beta_2)\},\quad A_2 = \{(\alpha_2, \beta_1)\}$$

$$E^*(\underline{X}; A_2) = (2, 3),\quad E^*(\underline{Y}; A_1) = (3, 1).$$

$E^*(\underline{X}; A_2)$ no es mayor que (3, 1) si $(3, 1) = E^*(\underline{Z})$, ni tampoco $E^*(\underline{Y}; A)$ es mayor que (2, 3) si $(2, 3) = E^*(\underline{U})$

Paso 4. No se borran estrategias porque tampoco hay dominancia simple. No se pueden comparar entre si, porque no pertenecen al mismo A_i, $i = 1, 2$

Paso 5. Definimos pagos

$$E^*(\underline{X}; A) = E^*(\alpha_2, \beta_1)$$

$$E^*(\underline{Y}; A) = E^*(\alpha_1, \beta_2)$$

Entonces

$$P_1((\alpha_1, \beta_2),(\alpha_2, \beta_1)) = \frac{E^*_1(\alpha_1, \beta_2) - E^*_1(\alpha_2, \beta_1)}{E^*_1(\alpha_1, \beta_2) - E^*_1(\alpha_2, \beta_2)}$$

$$= \frac{3 - 2}{3 - (0)} = 1/3$$

$$P_2((\alpha_1, \beta_2),(\alpha_2, \beta_1)) = \frac{E^*_2(\alpha_1, \beta_2) - E^*_2(\alpha_2, \beta_1)}{E^*_2(\alpha_1, \beta_2) - E^*_2(\alpha_2, \beta_2)}$$

$$= \frac{1 - 3}{1 - (0)} = -2$$

$$P_1((\alpha_2, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2)) = \frac{E^*_1(\alpha_2, \beta_1) - E^*_1(\alpha_1, \beta_2)}{E^*_1(\alpha_2, \beta_1) - E^*_1(\alpha_1, \beta_1)}$$

$$= \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1$$

$$P_2((\alpha_2, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2)) = \frac{E^*_2(\alpha_2, \beta_1) - E^*_2(\alpha_1, \beta_2)}{E^*_2(\alpha_2, \beta_1) - E^*_2(\alpha_1, \beta_1)}$$

$$= \frac{3 - 1}{3 - (-10)} = 2/13$$

Entonces

$\max R_i ((\alpha_1, \beta_2),(\alpha_2, \beta_1)) = \max \{R_1 ((\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1)), R_2 ((\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1))\} = \max \{1/3, -2\} = 1/3$

$\max R_j ((\alpha_2, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2)) = \max \{R_1 ((\alpha_2, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2)), R_2 ((\alpha_2, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2))\} = \max \{-1, 2/13\} = 2/13$

Como 1/3 es mayor que 2 /13, entonces (α_1, β_2) domina fuertemente a (α_2, β_1) (relación primaria de riesgo dominancia). La solución del juego son las estrategias (α_1, β_2).

Para los casos 1 y 2, ya no será necesario aplicar las relaciones de dominación por riesgo, en cambio en el caso de 3 y 4, el proceso de selección debe continuar ahora considerando las relaciones de dominación por riesgo secundaria débil y fuerte dentro del conjunto Γ^*. Es decir las ideas manejadas en 2.6 se consideran tomando como conjunto admisible A al conjunto Γ^* de los equilibrios de Nash del juego reducido

Para las relaciones de dominación por riesgo secundaria tenemos los resultados siguientes, importantes para el proceso de selección, que son corolario de lo estudiado en 2.6

- La dominación débil por riesgo es un cuasi - orden completo en Γ^{**}.
- En cualquier juego reducido Γ^{*} existe al menos un equilibrio de Nash $\underline{X}$ que domina por riesgo **débilmente** a todos los demás puntos equilibrios, con $\underline{X}$ satisfaciendo $K(\underline{X}) = \min\limits_{\underline{Y}} K(\underline{Y})$.
- Un equilibrio de Nash $\underline{X}$ domina **fuertemente** por riesgo a todos los demás equilibrios si y solo si $\underline{X}$ es el único equilibrio que domina **débilmente** por riesgo a todos los demás equilibrios.

2.8 Definición de las soluciones V y T.

Recordemos que para Harsanyi, resulta muy distinto que en un juego se permita la comunicación entre los jugadores (juego vocal) o no se permita (juego tácito) y que tendrá, por ello, dos tipos de soluciones, la solución V, para juegos vocales, y la solución T, para los juegos tácitos.

Dependiendo de en cuál de los cuatro casos nos encontremos, después de construir el juego reducido tenemos:

1-En el caso en que después del paso 2, Γ^{*} es vacío, entonces de acuerdo al supuesto de racionalidad III, la solución V y la solución T son el conjunto M de todos los **perfiles de estrategias conservadoras** en el juego original Γ.

2- Todos equilibrios de Nash en Γ^{*} son **intercambiables**, entonces ambas soluciones V y T se define como el conjunto Γ^{**} de todos los puntos de equilibrio en Γ^{*}.

3- Todos los equilibrios en Γ^{**} son **equivalentes**, pero no intercambiables, entonces se define la solución V como el conjunto Γ^{**} de todos los puntos de equilibrio en Γ^*, pero la solución T se define en términos de la dominancia por riesgo.

4-Los equilibrios Γ^{**} no son intercambiables, ni **equivalentes**, entonces se definen ambas soluciones V y T en términos de las relaciones de dominancia por riesgo.

Entonces, basándonos en todos los supuestos de racionalidad podemos definir las soluciones en los dos casos posibles, cuando Γ^{**} es vacio y cuando no lo es.

Definición 2.8.1

a) Si Γ^{**} es vacío, entonces **la solución V** y **la solución T** es el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras o puntos maxmin.

b) Si Γ^{**} es no vacío, entonces

la **solución V** es el conjunto L de todos los puntos de equilibrio en el juego reducido Γ^* tales que una de las dos afirmaciones se cumple

1. **Si** $\underline{X}^*$ está en L, $\underline{X}^*$ domina **fuertemente** por riesgo a todos los demás equilibrios de Nash de Γ^*

2. **Si** $\underline{X}^*$ está en L, $\underline{X}^*$ domina **débilmente** por riesgo a todos los demás equilibrios de Nash de Γ^* y domina **fuertemente** por riesgo al menos a aquellos equilibrios que no son **equivalentes** a $\underline{X}^*$;

y la **solución T** es el conjunto L* de todos los puntos de equilibrio en el juego reducido Γ^* tales que una de las dos afirmaciones se cumple

1´. **Si** $\underline{X}^*$ está en L*, $\underline{X}^*$ domina **fuertemente** por riesgo a todos los demás equilibrios de Nash de Γ^*

2´. Si $\underline{X}^*$ está en L*, $\underline{X}^*$ domina **débilmente** por riesgo a todos los demás equilibrios de Nash de Γ^* y domina **fuertemente** por riesgo al menos a aquellos equilibrios que no son **intercambiables con** $\underline{X}^*$;

Para que la definición en el caso b sea válida es necesario garantizar que L y L* sean no vacíos y que cada recombinación de dos equilibrios de Nash que pertenezcan a L* también pertenezca a L*.

El segundo corolario que se menciona al final de la sección anterior garantiza que L y L* no son vacíos. Por otro lado, el tercer corolario asegura que, si un solo equilibrio de Nash domina débilmente por riesgo a los demás entonces los conjuntos L y L* constarían de ese sólo equilibrio que satisfaría ambas soluciones V y T.

Pero existen dos o más equilibrios de Nash que dominen débilmente a todos los demás, entonces puede pasar que ningún subconjunto no vacío L (o L*) va a satisfacer la definición de la solución V (o la definición de la solución T respectivamente).

En tales casos este criterio no permite a los jugadores escoger entre los equilibrios de Nash alternativos. Se dice que el juego está en un **punto muerto** entre los puntos de equilibrio. Sin embargo tales situaciones de punto muerto pueden ocurrir sólo en casos especiales, que representan un conjunto de **medida cero** en el espacio de todos los posibles juegos no cooperativos finitos. Y debido a ello, dejaremos aquí este problema, los interesados en ver como lo resuelve Harsanyi pueden consultar su artículo.

Para terminar este capítulo estudiemos las soluciones de Harsanyi de algunos juegos especiales.

2.9 Soluciones V y T de algunos juegos

Juegos cuya soluciones V y T es el conjunto de puntos maxmin

Proposición 2.9.1

En un juego 2x2, sin equilibrio de Nash en estrategias puras, la solución V y la solución T constan d el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras o puntos minmax.

Demostración:

El juego puede expresarse con la matriz $\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}$,

con $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0$, $b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \neq 0$.

El único equilibrio del juego es de la forma

$(\hat{X}^1, \hat{X}^2)$=(

$$\left(\frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}\right),\left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}\right))$$

Sea a= $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})$ y b= $(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})$, entonces

$U_1(\hat{X}^1, \hat{X}^2) = \frac{1}{ab}((b_{22} - b_{21})(a_{22} - a_{12})a_{11} + (b_{22} - b_{21})(a_{11} - a_{21})a_{12} +$

$(b_{11} - b_{12})(a_{22} - a_{12})a_{21} +$

$(b_{11} - b_{12})(a_{11} - a_{21})a_{22}) = \frac{1}{ab}((b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})) = \frac{1}{a}(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = v_1.$

Análogamente se demuestra que $E_2(\hat{X}^1, \hat{X}^2) = v_2$.

Entonces el juego no tiene equilibrios rentables, $\Gamma*$ es vacío y las soluciones V y T son el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras.

Q.D.

Para algunos de estos juegos 2 x 2, el equilibrio está formado por estrategias conservadoras, en cambio para otros no. En los primeros, la solución sería el equilibrio, en los segundos la pareja de estrategias conservadoras.

Proposición 2.9.1

Si Γ es un Juego Exhaustivo, tanto la solución V, como la solución T son el conjunto de equilibrios de Nash que están formados por estrategias conservadoras, para cada jugador.

Demostración.

En el capítulo 1, se demostró que en todos los equilibrios de Nash de un juego exhaustivo, cada jugador gana su máximo asegurable.

Por lo tanto no existen equilibrios rentables y las soluciones V y T son el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras.

Pero también se demostró que en estos juegos, cada perfil de estrategias conservadoras forma un equilibrio de Nash, por lo tanto las soluciones V y T son un conjunto de equilibrios de Nash.

Q.D.

Los Juegos simétricos 2x2.

Los resultados que obtiene Harsanyi en los tres tipos de juegos simétricos son los siguientes:

Consideremos el juego simétrico 2 x 2

$$\begin{pmatrix} (a, a) & (b, c) \\ (c, b) & (d, d) \end{pmatrix}$$

I. Juegos con una estrategia dominantes (a - c)(d - b) < 0.

Si $(a - c)(d - b) < 0$,
Entonces $a < c$ y $d > b$ o $a > c$ y $d < b$.

1er Caso. Si $a < c$ y $d > b$, el único equilibrio del juego es (d, d) que es dominante.

2do. Caso. Si $a > c$ y $d < b$, el único equilibrio del juego es (a, a) que también es dominante.

No se construye ningún juego reducido puesto que solo hay un equilibrio en el juego en cada caso.

II. Juegos de coordinación. (a > c) y (d > b).

Tanto (a, a) como (d, d) son equilibrios del juego, entonces

Paso 1. No se borra ninguna estrategia

Paso 2. No se borra ninguna estrategia

Paso 3. $A = \{(1, 1), (2, 2)\}$. No se puede construir $A(i)$, $i = 1, 2$.

Paso 4 y 5. Redefinimos los pagos $E^*(\underline{X}; A) = (a, a)$, $E^*(\underline{Y}; A) = (d, d)$, no se puede aplicar la dominancia estricta pero aplicaremos la dominancia simple, entonces

Caso 1. Si $E^*(\underline{X}; A) > E^*(\underline{Y}; A)$ se borran las estrategias (2, 2) y el equilibrio (1, 1) es la solución del juego.

Caso 2. Si $E^*(\underline{Y}; A) > E^*(\underline{X}; A)$ se borran las estrategias (1, 1) y el equilibrio (2, 2) es la solución del juego.

III. Juegos con equilibrio simétrico único en estrategias mixtas (a < c) y (d < b)

Los equilibrios del juego son (b, c), (c, d) y el equilibrio en estrategias mixtas $R = ((b - d)/(c - a + b - d), 1 - (b - d)/(c - a + b - d))$

Paso 1 y 2. No se borra ninguna estrategia.

Paso 3. $A = \{(2, 1), (1, 2)\}$. $E^*(\underline{X}; A) = (c, b)$, $E^*(\underline{Y}; A) = (b, c)$. Se borran las estrategias mixtas porque están dominadas estrictamente, el valor de $((b - d)/(c - a + b - d)$ se encuentra entre cero y uno y cualquier numero entero multiplicado por este valor es menor o igual a ese numero , es decir

$$E^*(\underline{X}; A) > E^*(\underline{R}; A) \quad \text{y}$$
$$E^*(\underline{Y}; A) > E^*(\underline{R}; A)$$

Dependiendo de los valores de b y c se aplican los pasos 4 y 5 para seguir construyendo el juego reducido y aplicar la definición de relación riesgo dominancia primaria y conocer cual es la solución del juego.

CAPÍTULO 3

SELECCIÓN DINÁMICA DE EQUILIBRIOS DE NASH EN JUEGOS SIMÉTRICOS 2 X 2

3.1 Planteamiento del problema.

El enfoque de Harsanyi y Selten para la selección de equilibrios, expuesto anteriormente, resulta normativo, en cierto sentido, ya que no describe la forma de comportarse que tendrían los participantes en un conflicto, ni la de corregir este comportamiento, sino que establece una serie de criterios matemáticos que debe cumplir un equilibrio de Nash, para ser considerado solución. Necesita, por eso mismo, supuestos muy fuertes de racionalidad de los involucrados. La verdad es que estos mismos defectos los tiene el concepto de equilibrio de Nash que es el concepto de solución en la Teoría de Juegos No Cooperativos, a pesar de que esta teoría pretende describir como se comportarían jugadores reales.

El segundo enfoque de selección de equilibrios de Nash que nos proponemos exponer en este trabajo, está situado dentro de los llamados Juegos Evolutivos. Con éste, se trata de subsanar el problema anterior, no sólo para responder cuáles equilibrios serían seleccionados por jugadores "reales", sino que, al mismo tiempo, pone a prueba si la ley natural del conflicto consiste en que los jugadores tienden a actuar en algún equilibrio de Nash. Este enfoque teórico fue introducido en la Biología, específicamente en la Teoría de la Evolución, por Maynard Smith y de allí fue trasladado a las Ciencias Sociales, en particular a la Economía.

Empezamos la exposición de este enfoque, siguiendo a M.Kandori, G.J Mailath y R.Rob [1993], con los juegos más simples, es decir los juegos simétricos dos por dos, para después generalizar las ideas a cualquier juego rectangular finito

Supondremos que hay una población N, con más de dos elementos que están enfrentados en dicho juego, a lo largo del tiempo, y estudiaremos la evolución del comportamiento de los miembros de N, al ir utilizando su experiencia. Los miembros de N tienen las características de personas reales, es decir tienen muchas limitaciones, por ejemplo de información y de capacidad de cálculo, pueden tener, además, fuertes inercias que dificultan el cambio, etc. Pero, a pesar de estas limitaciones, ellos aprenden. El aprendizaje provocará una dinámica que conducirá a la población a ciertos patrones de conducta que cuando se alcanzan, ya no se abandonan. ¿Que relación tienen estos patrones de conducta con los equilibrios de Nash?, ¿qué relación tienen con los equilibrios seleccionados por Harsanyi y Selten en un juego simétrico 2 x 2?.

3.2 El modelo

Considérese un juego simétrico 2 x 2, es decir, $(\{1, 2\}, \{Dj\}\ j=1,2, \varphi)$, con $D_1 = D_2 = \{s_1, s_2\}$ y $\varphi_1(s_i, s_k) = \varphi_2(s_k, s_i)$, $\varphi_2(s_i, s_k) = \varphi_1(s_k, s_i)$, para i = 1, 2 y k = 1, 2. Además tenemos una población $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n > 2$. Dos miembros distintos de N serán escogidos al azar para llevar a cabo partidas del juego.

Cualquiera de los juegos simétricos 2 x 2 se puede describir con una matriz de la forma

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{array} \right) \end{array}$$

con a, b, c y d $\in$ R y

$\varphi(s_1, s_1)=(a, a)$, $\varphi(s_1, s_2)=(b, c)$, $\varphi(s_2, s_1)=(c, b)$, $\varphi(s_2, s_2)=(d, d)$

Como decíamos, no se asume que los miembros de N sean tan racionales o sabios como para anticipar correctamente las elecciones de los otros jugadores. Cada jugador escoge, en cada periodo, una estrategia "óptima", desde el punto de vista de sus creencias acerca de su ambiente. Las dinámicas de aprendizaje que aparecerán son estacionarias, es decir de tal manera que el resultado del proceso de aprendizaje sea semejante cuando se enfrenta a las mismas conductas sociales, sin importar el periodo en que se encuentre. Las creencias se forman observando lo que otros agentes han hecho en el pasado. Las siguientes características pueden aparecer, total o parcialmente, en las diversas dinámicas de aprendizaje.

I. No todos los agentes necesitan reaccionar instantáneamente a su ambiente (hipótesis de **inercia**)

II. Cuando los agentes reaccionan, lo hacen de forma miope (hipótesis de **miopía**)

III. Hay una pequeña probabilidad de que los agentes cambien sus estrategias aleatoriamente (hipótesis de experimentación, de equivocación o **mutación**)

Las observaciones de los jugadores son imperfectas, su conocimiento de cómo los pagos dependen de los perfiles de estrategias puede requerir un esfuerzo excesivo y cambiar la estrategia puede ser costoso, o quizá existan miedos al cambio, la presencia de inercia es sugerida por la existencia de tales incertidumbres y ajustes de costos.

Entonces, quizá solo hay una pequeña fracción de miembros de la población que cambian sus estrategias simultáneamente, y cuando lo hacen, actúan en forma miope. Ellos saben que solamente un pequeño segmento de la población cambia su comportamiento en un punto y tiempo dado y, por lo tanto, las estrategias que probaron ser efectivas en el presente es muy probable que permanezcan efectivas por algún tiempo en el futuro.

La segunda característica supone que las personas en conflicto son comunes y corrientes, es decir miopes, no genios sabelotodo, por lo que usan mucho la imitación. El mundo es un lugar muy complicado y los agentes no pueden calcular las mejores respuestas a su ambiente. La gente aprende que ciertas estrategias son buenas, observando que le han servido a otra gente. El supuesto de la miopía se basa, además, en que las personas no pueden tomar en cuenta las implicaciones a muy largo plazo de sus elecciones de estrategias, así los agentes actúan como si cada etapa del juego fuera la última.

Por último la tercera caracteristica es que las personas cometen errores y tienen deseos de experimentación, por esos no se ajustan estrictamente al proceso de aprendizaje.

El proceso o dinámica de aprendizaje transcurre en el tiempo, el cuál se considerará en forma discreta, es decir $t = 0, 1, \ldots$ En el periodo t, cada miembro de N escoge una de sus estrategias, la que utilizará al participar en numerosos conflictos (partidas del juego) que le tocará jugar, en dicho periodo, al ser seleccionado al azar como uno de los competidores.

¿Que es un estado del conflicto en un periodo?.

Por un estado del conflicto, en el periodo t, entendemos una selección de una de sus posibles estrategias por cada miembro de N.

Es decir, un "estado del conflicto en el periodo t" describe cuantos miembros de la población eligieron la primera estrategia y cuantos la segunda, es claro que si decimos que q personas escogieron la primera estrategia y hay n personas dentro de N, entonces, n-q escogieron la segunda. Entonces establecemos la

Definición 3.2.1

Un estado z del conflicto, en el tiempo t, es un elemento del conjunto $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Observación 1: Un estado no distingue quiénes eligieron la primera estrategia y quienes la segunda, sino solo cuantas personas eligieron cada una de ellas. Por ejemplo, el estado 1, puede tomar, entre otras formas, las dos siguientes, 1ª) Sólo Juan escoge s_1, mientras que todos los demás escogen s_2, 2ª) sólo Pedro escoge s_1, mientras que todos los demás escogen s_2.

Observación 2: Al estado z le asociamos la estrategia mixta $(z/n, (n-z)/n)$ y el perfil $\underline{z} = ((z/n, (n-z)/n), (z/n, (n-z)/n))$.

Al principio del período t, cada jugador escoge su estrategia pura para todo el período (esto es parte de la hipótesis de inercia), quedando determinado el estado z_t. Los jugadores evaluarán, en forma miope, la conveniencia o no de seguir con la misma estrategia o de cambiarla, de acuerdo a como funcionó ésta en el periodo anterior.

Supongamos que z es el estado del conflicto en un periodo, y un miembro de N ha escogido la estrategia s_i para el periodo t y ha jugado un número muy grande de partidas, con dicha estrategia; tendrá, entonces, un pago promedio esperado. Este pago esperado es el mismo que el de un jugador que, en el juego simétrico 2 x 2 que estamos estudiando, hubiera escogido la estrategia pura s_i, mientras el jugador contrario ha escogido la estrategia mixta $\underline{z}$. O sea $E_1(\underline{z} \mid s_i) = E_1(e^i, \underline{z})$, con $e^1 = (1, 0)$ y $e^2 = (0, 1)$. Recordemos,

$$E_1(\underline{z} \mid s_1) = \left(\frac{z}{n}\right) a + \frac{(n-z)}{n} b \qquad y$$

$$E_1(\underline{z} \mid s_2) = \frac{z}{n} c + \frac{(n-z)}{n} d$$

Supongamos que en el periodo t, se ha establecido el estado z_t, a través del aprendizaje miope de los miembros de N, se pasará a otro estado z_{t+1} Esto es, se establece una **dinámica de aprendizaje**, a la que podemos describir con una función b: Z →Z ,

$$z_{t+1} = b(z_t).$$

Las dinámicas que usaremos son estacionarias, como dijimos, en el sentido de que independientemente del periodo que se presente el estado z, éste tendrá la misma imagen bajo b.

Dinámicas Darwinianas

Exigiremos a b que cumpla una propiedad que provoque que las mejores estrategias estén mejor representadas dentro de la población, en el siguiente período. A dicha propiedad se le llamará Darwiniana, formalmente:

Definición 3.2.2

La dinámica de aprendizaje b **tiene la propiedad Darwiniana (D)**, si

(D) Para z distinto de 0 y de n,

signo $(b(z) - z) =$ signo $(E_1(\underline{z} \mid s_1)) - E_1(\underline{z} \mid s_2))$,

$b(0) > 0$	si	$E_1(s_1, s_2) > E_1(s_2, s_2)$,
$b(0) = 0$	si	$E_1(s_1, s_2) \leq E_1(s_2, s_2)$,
$b(n) < n$	si	$E_1(s_1, s_1) < E_1(s_2, s_1)$
y $b(n) = n$	si	$E_1(s_1, s_1) \geq E_1(s_2, s_1)$

La anterior definición indica que si el signo de $(E_1(\underline{z} \mid s_1)) - E_1(\underline{z} \mid s_2))$ es positivo, en el siguiente periodo habrá más gente que utiliza s_1, porque también es positivo el signo de $b(z) - z_t$. Análogamente para los otros dos casos.

$z_t = 0$, significa que nadie escogió s_1, en t, si $E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)$, la propiedad Darwiniana exige que $z_{t+1} > 0$, es decir que algunos miembros de N, la escojan en t + 1; en cambio, si $(E_1(\underline{z} \mid s_1)) - E_1(\underline{z} \mid s_2)) < 0$, como nadie puede abandonar s_1, ya que ninguno la había escogido, en t + 1 seguirán siendo cero los miembros de N que escogen esa estrategia. Ocurre algo semejante cuando $z_t = n$.

Definición 3.2.3

z en Z es un **estado estacionario de b**, si es un punto fijo de b, es decir

$$b(z) = z.$$

Proposición 3.2.4

z es un estado estacionario de una dinámica Darwiniana b, si y solo si $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash de (K, {Dj}, φ).

Demostración.

Como b es Darwiniana, si b(z)=z, entonces para j = 1, 2, Ej($\underline{z}$ | s_i)) ≤ Ej($\underline{z}$), para i = 1, 2, entonces $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash.

Por otro lado, si $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash, para j=1, 2, Ej($\underline{z}$ | s_i)) ≤ Ej($\underline{z}$), para i =1, 2 y entonces, b(z) = z

Q.D

Observación: Los estados estacionarios representan estados importantes porque al llegar a ellos, la dinámica de aprendizaje ya no empuja a nadie hacia otro lado. Además de los estados estacionarios, otros subconjuntos de estados que ya no son abandonados son los ciclos. En general de lo que se trata es de detectar una colección de subconjuntos de estados que tengan la propiedad de que, bajo la dinámica de aprendizaje, al llegar a ellos ya no se sale y que desde cualquier estado se llegue a uno de estos subconjuntos. Este tipo de subconjuntos representan patrones de conducta socialmente aprendidos. Ya determinados estos patrones de conducta, buscaremos alguna forma de discriminar entre ellos, para localizar los que tienen una probabilidad de prevalecer.

Una dinámica de aprendizaje particular que se usará es la de mejor respuesta o réplica. Será denotada por B y está definida por la regla

$$B(z) = \begin{cases} n & \text{si} \quad E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2) \\ z & \text{si} \quad E_1(\underline{z} \mid s_1) = E_1(\underline{z} \mid s_2) \\ 0 & \text{si} \quad E_1(\underline{z} \mid s_1) < E_1(\underline{z} \mid s_2) \end{cases}$$

Que se podría considerar como una dinámica de "pánico", es decir, todos "corren" a escoger la primera estrategia (estado n), si ven que les iría bien con esa estrategia y salen "huyendo", si ven que les iría mal (estado cero).

Proposición 3.2.5

B cumple con la propiedad Darwiniana,

Demostración

$B(z) > z \Leftrightarrow B(z) = n$ y z distinto de n $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) > E_1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de n.

$B(z) < z \Leftrightarrow B(z) = 0$ y z distinto de 0 $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) < E_1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de 0.

$B(z) = z$ y z distinto de 0 y de n $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) = E1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de 0 y distinto de n.

Además $B(0) = 0 \Leftrightarrow E_1(s_2, s_2) \leq E_1(s_1, s_2)$ y

$B(n) = n \Leftrightarrow E1(s_1, s_1) \geq E1(s_2, s_1)$.

Por lo tanto, si z distinto de 0 y de n, entonces

$$\text{sign}\,(B(z)-z) = \text{sign}\,(E_1(\underline{z}\,|s_1) - E_1(\underline{z}\,|s\,2))$$

$z = n$, $B(n) < n$	si	$E_1(s_1, s_1) < E_1(s_2, s_1)$
y $B(n) = n$	si	$E_1(s_1, s_1) \geq E_1(s_2, s_1)$
$B(0) > 0$	si	$E_1(s_2, s_2) > E_1(s_1, s_2)$
y $B(0) = 0$	si	$E_1(s_1, s2) \leq E1(s_2, s_2)$.

Es decir B cumple la propiedad Darwiniana

QD

Damos a continuación un ejemplo de una dinámica, también darwiniana, pero donde el cambio de estrategia, por parte de los de los miembros de N, es más gradual, pues existe inercia:

para z distinto de 0 y n

$$B'(z) = \begin{cases} z+1, & \text{si} \quad E_1(\underline{z}\,|s_1) > E_1(\underline{z}\,|s_2) \\ z, & \text{si} \quad E_1(\underline{z}\,|s_1) = E_1(\underline{z}\,|s_2) \\ z-1, & \text{si} \quad E_1(\underline{z}\,|s_1) < E_1(\underline{z}\,|s_2) \end{cases}$$

para z = n

$B'(n) = n$ si $E_1(s_1, s_1) \geq E_1(s_2, s_1)$

$B'(n) = n - 1$ si $E_1(s_1, s_1) < E1(s_2, s_1)$

$B'(0) = 0$ si $E_1(s_1, s_2) \leq E_1(s_2, s_2)$

$B'(0) = 0 + 1$ si $E_1(s1, s2) > E_1(s2, s2)$

Proposición 3.2.6.

B' es darwiniana.

Demostración.

$B'(z) > z \Leftrightarrow B'(z) = z + 1$ y z distinto de n $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) > E_1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de n.

$B'(z) < z \Leftrightarrow B'(z) = z - 1$ y z distinto de 0 $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) < E_1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de 0.

$B'(z) = z$ y z distinto de 0 y de n $\Leftrightarrow E_1(\underline{z}\,|s_1) = E_1(\underline{z}\,|s_2)$ y z distinto de 0 y distinto de n.

Además $B'(0) = 0 \Leftrightarrow E_1(s_2, s_2) \leq E_1(s_1, s_2)$ y
$B'(n) = n \Leftrightarrow E_1(s_1, s_1) \geq E_1(s_2, s_1)$

Por lo tanto, si z distinto de 0 y de n, entonces

Sign $(B'(z) - z) = \text{sign}\,(E_1(\underline{z}\,|s_1) - E_1(\underline{z}\,|s_2))$ y

Si $z = n$,

$$B'(n) < n \quad \Leftrightarrow \quad E_1(s_1, s_1) < E_1(s_2, s_1) \text{ y}$$

$$B'(n) = n \quad \Leftrightarrow \quad E_1(s_1, s_1) \geq E_1(s_2, s_1)$$

Si $z = 0$,

$$B'(0) > 0 \quad \text{si} \quad E_1(s_1, s_2) > E_1(s_2, s_2) \text{ y}$$

$$B'(0) = 0 \quad \text{si} \quad E_1(s_1, s_2) \leq E_1(s_2, s_2).$$

Por lo que cumple con la propiedad Darwiniana.

QD

Ejemplo 1.

Juego simétrico 2 x 2 de coordinación.

Sea

$$\begin{bmatrix} (2,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{bmatrix}$$

con una población $n = 11$

y la dinámica

$$b(z) \begin{cases} 11 & \text{si} \quad z > 3 \\ 0 & \text{si} \quad z \leq 3 \end{cases}$$

Los puntos fijos de b son tres 0, 11 y 11/3. Éste último no tiene sentido como estado, mientras que 0 y 11, además de ser estados, los perfiles de estrategias correspondientes son equilibrios de Nash. En esta dinámica no existen ciclos.

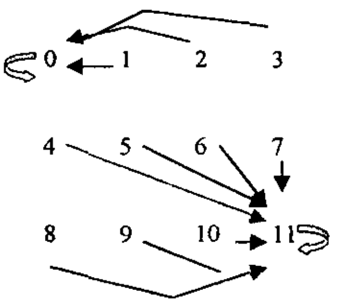
Es interesante construir una digráfica para representar el proceso de aprendizaje, para lo que definimos:

Definición 3.2.7.

Dado un juego simétrico 2 x 2, una población N y una dinámica Darwiniana b, la digráfica asociada al proceso es

$$(V,A), \text{ donde } V = Z \text{ y } A = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid b(x) = y\}.$$

Con esta digráfica se pueden estudiar los "patrones de conducta socialmente aprendidos". Para el ejemplo 1 tenemos:



Nuestros patrones de conducta buscados son $C_1 = \{0\}$ y $C_2 = \{11\}$ que representan a los dos equilibrios de Nash en estrategias puras que son de los puntos fijos de b. Si la población fuera de 12 miembros, aparecería como otro de estos patrones {4} que representaría al equilibrio en estrategias mixtas ((1/3, 2/3), (1/3, 2/3)).

Ejemplo 2

Juego sin equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras.

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (3,2) \\ (2,3) & (0,0) \end{pmatrix}$$

con una población N = 8

supongamos que se mueven con la dinámica de lento aprendizaje

$$b(z) = \begin{cases} z+1 & \text{si} \quad z < 6 \\ z & \text{si} \quad z = 6 \\ z-1 & \text{si} \quad z > 6 \end{cases}$$

El único punto fijo de b es 6 y no hay ciclos. La digráfica asociada es:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[dll] \\
3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[dll] \\
6 \arrow[loop left] & 7 \arrow[l] & 8 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

El único patrón de conducta que obtenemos es $\{6\}$ que corresponde al equilibrio en estrategias mixtas ((2/3, 1/3), (2/3, 1/3)) que sí es simétrico. Si para el mismo juego y la misma población, tomáramos como dinámica de aprendizaje la de mejor réplica, tendríamos además del punto fijo 6, el ciclo $\{8, 0\}$.

El contexto que hemos establecido, hasta ahora, es el una población inmersa en un conflicto, compuesta con personas de carne y hueso que son limitadas en cuanto a su conocimiento de la situación en que se encuentran, también en cuanto a su capacidad de encontrar decisiones óptimas, pueden tener miedos y otros motivos que producen inercia para cambiar su forma de actuar y sin embargo aprenden con su experiencia y la de sus vecinos a medida que transcurre se desarrollan enfrentamientos diversos a lo largo del tiempo. Hemos detectado, en estas condiciones, ciertos patrones de conducta sociales que son producto del aprendizaje, pero aún no sabemos si algunos de ellos tienen más probabilidad de perdurar o estar más presentes como conductas acostumbradas de la población estudiada. Como se hace en otros contextos teóricos sometamos a prueba la fuerza de los patrones de conducta que hemos localizado, perturbando la situación, metiendo ruido. Este ruido se ocasionará por pensar que la gente se equivoca y tiene deseos de salir de la rutina que le marca el aprendizaje, experimentando, también puede haber cambios externos no previstos. En el terreno de la biología, en el que apareció este enfoque de los juegos evolutivos, este ruido representa el concepto de mutación.

3.3 Errores, Experimentos Mutaciones

Hasta ahora sólo han aparecido las hipótesis de inercia y miopía, pero decíamos que las personas que componen la población también se equivocan o experimentan. Supongamos que, por ejemplo, cada miembro de la población N, a través de un volado escoge su estrategia s_i, pero, con probabilidad 2ε, ε positiva y menor que un real a, es reemplazado por otro miembro de N, en cada tiempo t, (de tal modo que el número de elemento de la población se mantiene fija). El nuevo participante no sabe nada del juego y simplemente escoge cada estrategia con igual probabilidad.

Con esto obtenemos una nueva dinámica, que es una perturbación de b.

El nuevo conjunto de estados será el de las distribuciones de probabilidad en Z, es decir el simplejo unitario n- dimensional Q.

$$Q = \{\ q \in R^{n+1} \big| q_i \geq 0\ y\ \sum_{i=0}^{n} q_i = 1\}.$$

El sistema dinámico perturbado consiste en una **cadena de Markov** definida en el espacio de estados finito Z = [0, 1, 2, ..., n]. Las **probabilidades de transición** están dadas por

$$p_{ij}(\varepsilon) = \text{prob}\ (z_{t+1} = j \mid z_t = i)$$

que se refiere a la probabilidad de que se pase del estado z_t, donde i miembros de N escogieron s_1 en t , al estado z_{t+1}, donde j miembros de N, la escogieron en t + 1

P $(\varepsilon)= [p_{ij}]$ es la matriz de Markov.

La nueva dinámica o dinámica perturbada sería $P(\varepsilon):Q \to Q$.

A la dinámica original, sin perturbar, también la podemos representar con la matriz de Márkov $P(0)$, $\varepsilon = 0$, de la siguiente manera:

$$P_{ij}(0)=\begin{cases}1, & si\; b(i)=j\\ 0, & si\; b(i)\neq j\end{cases}$$

Supongamos que para $\varepsilon > 0$, todos los términos de **P** (ε) son estrictamente positivos, asegurando que hay una probabilidad positiva aunque sea muy pequeña de que los agentes cambien de cualquier estado i a cualquier otro estado j. P (ε) sería no negativa, irreducible, aperiódica y los términos de cada renglón sumarían uno.

Definición 3.3.1

Una distribución estacionaria (o invariable) es un vector renglón $\mu= (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_N) \in Q$ satisfaciendo $\mu(\varepsilon)P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)$

Los resultados de Perron Frobenius , que enunciamos a continuación, van a asegurar que las matrices $P(\varepsilon)$ tienen una única distribución estacionaria y que esta tiene una importante propiedad de estabilidad.

Teorema (Perron-Frobenius)

Si A es una matriz cuadrada de orden n, no negativa se cumple:

a) Si α es el valor propio de A de módulo mayor, entonces α es no negativo y tiene asociado un vector propio x no negativo, es decir, $Ax = \alpha x$.

b) $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \alpha \leq \max_i \sum_j a_{ij}$ y $\min_j \sum_i a_{ij} \leq \alpha \leq \max_j \sum_i a_{ij}$.

c) Si A es una matriz cuadrada de orden n, nonegativa e irreducible,

i) α es positivo y tiene asociado un vector propio x positivo.

ii) Si existe β valor propio de A no negativo que tiene asociado un vector propio no negativo $\alpha = \beta$

iii) Si $Ay = \alpha y$, entonces $y = cx$, con c un real

d) Si A es una matriz cuadrada nonegativa, de orden n, irreducible y aperiódica (primitiva), entonces para todo vector *y no negativo* en R^n, se cumple que $\lim_{t \leftarrow \infty} A^t y / \sum y_j = x / \sum x_j$

Entonces se tiene respecto a todas las matrices P(ε), cuando $\varepsilon > 0$

Proposición 3.3.2.

Para cada ε en (0, a], P(ε) tiene una distribución estacionaria única $\mu.(\varepsilon)$, es decir

$$\mu(\varepsilon)P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon).$$

Demostración.

P(ε) es una matriz cuadrada no negativa e irreducible, entonces tiene un valor propio positivo α (único) y un vector propio (único excepto escalares) $x > 0$ asociado a α, es decir

$$x\, \mathbf{P}(\varepsilon) = \alpha\, x$$

Además,

$$(x\, \mathbf{P}(\varepsilon))/\Sigma x_i = (\alpha\, \underline{x}) / \Sigma x_i$$

Sea $\mu.(\varepsilon) = x / \Sigma x_i$

entonces

$$\mu.(\varepsilon)\, \mathbf{P}(\varepsilon) = \alpha\, \mu.(\varepsilon).$$

Por otro lado, como $\alpha \leq \max \Sigma_{(j=0,N)} p_{ij}(\varepsilon) = \max \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$

y, también

$$\alpha \geq \min \Sigma_{(j=0,N)} p_{ij}(\varepsilon) = \min \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$$

entonces

$$1 = \min \Sigma_{(j=0,N)} p_{ij}(\varepsilon) \leq \alpha \leq \max \Sigma_{(j=0,N)} p_{ij} = 1$$

por lo tanto $\alpha = 1$

entonces

$$\mu.(\varepsilon)\, \mathbf{P}\, (\varepsilon) = \mu.(\varepsilon).$$

Como la matriz es irreducible, $\mu.(\varepsilon)$ es único y tiene todas sus coordenadas positivas

Q.D.

Observación *P(0)* es también una matriz no negativa, por lo que también por los resultados de Perron Frobenius podemos asegurar que tiene al menos una distribución estacionaria, sin embargo como no es una matriz irreducible no se garantiza la unicidad. No es difícil darse cuenta que las distribuciones estacionarias de *P(0)* corresponden a los patrones de conducta socialmente aprendidos, tanto los puntos estacionarios como los ciclos. En estos últimos, la distribución estacionaria tiene coordenada cero para los estados que no pertenecen al ciclo y 1/k para las que sí pertenecen, donde k es el número de estados del ciclo, es decir todos los estados del ciclo tienen la misma probabilidad.

Proposición 3.3.3

Para cualquier $q \in Q$, $\quad q(P(\varepsilon))^{t} \to \mu.(\varepsilon) \quad$ si $t \to \infty$.

Demostración.

La matriz $P(\varepsilon)$ es primitiva, por lo que se cumple la propiedad mencionada

Q.D

Los resultados anteriores, nos dicen que la introducción de choques estocásticos produce una estabilidad global. $\mu.(\varepsilon)$ que puede ser interpretada como la proporción de tiempo que la sociedad pasa en cada estado.

Denotaremos como c_{ij} a la velocidad de convergencia a cero del término ij de la matriz $P(\varepsilon)$, cuando ε tiende a cero, es decir

$$p_{ij}(\varepsilon) = 0(\varepsilon^{c_{ij}}).$$

Proposición 3.3.4.

$$c_{ij} = | b(i)-j |$$

Demostración

La probabilidad de pasar del estado i al j tiene la forma

$$pij = \sum_{k=max(j-b(i),0)}^{min(j,N-b(i))} \binom{b(i)}{b(i)+k-j}\binom{N-b(i)}{k} \times \varepsilon^{b(i)+2k-j}(1-\varepsilon)^{N+j-b(i)-2k}$$

Si dividimos el polinomio entre $\varepsilon^{|b(i)-j|}$ obtenemos un polinomio que converge a un número cuando ε tiende a cero, en cambio si dividimos entre una potencia menor de ε el polinomio resultante seguiría convergiendo a cero. Por lo tanto $c_{ij} = | b(i)-j |$

QD

Es decir, c_{ij} la resistencia de pasar de un estado ***i*** a otro ***j*** o costo de transición ($i \rightarrow j$) puede ser interpretado como el grado de mutación requerido para transitar de i a j. Ya que en ausencia de mutación, **b(i) sería el estado alcanzado después de i,** el número mínimo de elementos de N que tiene que equivocarse, para pasar de i a j, en vez de hacerlo a b(i) es $|b(i) - j|$.

Construimos una nueva digráfica, ahora asociada al proceso con errores, que le llamaremos la **digráfica perturbada,** además ponemos un peso o costo a cada uno de los arcos de ella.

Dada una población N, un juego simétrico 2 x 2, proceso de aprendizaje b y un sistema de perturbaciones regular $\{\varepsilon\}$, **la digráfica perturbada** asociada es (V, A), con $V = Z$ y $A = V \times V$.

Para cualquier arco (i, j), c_{ij} es el **costo de transición de i a j**. Cualquier arco de la forma (i , b(i)) tiene costo ($c_{i, b(i)} = 0$)

Dentro de la digráfica perturbada, nos interesan "los mapas" que indican como alcanzar z desde cualquier estado, sin pasar por cada uno de ellos más de una vez y el costo relacionado con dichos mapas. A estos mapas se les llama z-árbol y damos a continuación la definición formal.

Recordemos que una trayectoria que une a z con z′ es una sucesión de nodos $\{z_1, \ldots\ldots, z_s\}$, tal que $z_1 = z$, $z_s = z'$ y $(z_i, z_{i+1}) \in A$, para i=1, ..., s-1 el **costo de una trayectoria** es la suma de los costos de sus arcos.

Si existe una trayectoria de costo cero que une al estado x con el estado z, decimos que **x está en la cuenca de z** y lo escribimos como $x \in C(z)$

Definición 3.3.5.

Para toda $z \in Z$, un z – árbol h es una subdigráfica de $(\underline{V}, \underline{A})$ tal que desde cualquier vértice z' distinto de z hay una única trayectoria que une a z' con z.

Denotamos como H_z al conjunto de todos los z – árboles

El costo total de transición desde todos los estados hasta z de acuerdo con un z-árbol h es $\Sigma_{(i,j)\in h} c_{ij}$ y lo denotamos como c(h).

Definición 3.3.6

El potencial del estado z, v_z, es el mínimo costo total para llegar a z, es decir

$$v_z = \min \Sigma_{(i,j)\in h,\, h\in H_z} |b(i) - j|$$

La forma de $\mu.(\varepsilon)$ queda establecida en la siguiente proposición:

Proposición 3.3.7.

$$\mu_Z(\varepsilon) = \frac{\sum_{h\in H_z} \prod_{(y,y')\in h} p_{xy}(\varepsilon)}{\sum_{x\in Z} \sum_{h\in H_x} \prod_{(y,y')\in h} p_{xy}(\varepsilon)}$$

Demostración.

Sea $q_z = \Sigma_{(h\in Hz)} \Pi_{(x,x')\in h} P_{xx'}(\varepsilon)$, y $q = (q_0, q, \ldots, q_n)$

P.D. $qP(\varepsilon) = q$

$$(qP(\varepsilon))_z = \Sigma_{(x\in Z)} q_x P_{xz}(\varepsilon) = q_z P_{zz}(\varepsilon) + \Sigma_{(x\neq z)} q_x P_{xz}(\varepsilon)$$

$$\Sigma_{(x\neq z)} q_x P_{xz}(\varepsilon) = \Sigma_{(x\neq z)} P_{xz}(\varepsilon) \,\Sigma_{(h\in Hx)} \Pi_{((y,y')\in h)} P_{yy'}(\varepsilon)$$

$$= \Sigma_{(x\neq z)} P_{zx}(\varepsilon) \,\Sigma_{(h\in Hx)} \Pi_{((y,y')\in h)} P_{yy'}(\varepsilon)$$

$$= \Sigma_{(x\neq z)} q_z P_{zx}(\varepsilon)$$

$$= q_z \ \Sigma_{(x \neq z)} \ P_{zx}(\varepsilon)$$

$$= q_z(1 - P_{zz}(\varepsilon))$$

$$= q_z - q_z \ P_{zz}(\varepsilon)$$

$$q_zP_{zz}(\varepsilon) + \ \Sigma_{(x \neq z)} \quad q_x \ P_{xz}(\varepsilon) \ = \ q_zP_{zz}(\varepsilon) \ + \ q_z - q_zP_{zz}(\varepsilon) \ = \ q_z$$

por lo tanto

$$qP(\varepsilon) = q$$

ahora

$$(q \,/\, \Sigma q_z)P(\varepsilon) \ = (1/\Sigma q_z)qP(\varepsilon)$$

$$= (1/\Sigma q_z)q$$

$$= \mu(\varepsilon)$$

por lo tanto

$$\mu(\varepsilon) = q \,/\, \Sigma q_z,$$

Q.D

Se examinará ahora el comportamiento en el largo plazo de las distribuciones estacionarias de $P(\varepsilon)$, cuando la probabilidad de mutación es baja, es decir, cuando ε tiende a cero. Sin embargo pediremos algo más al sistema de perturbaciones de lo que hemos pedido hasta ahora, para poder disponer de un teorema que nos dará luz sobre las distribuciones estacionarias, cuando el ruido producto de las equivocaciones no es muy grande.

Definición 3.3.8

Un sistema de perturbaciones $\{P(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0, a]}$ es regular, si para cada $\varepsilon \in (0, a]$, $P(\varepsilon)$ es irreducible y primitiva, $\{P(\varepsilon)\}$ converge a $P(0)$ cuando ε tiende a cero y para cada pareja de estados (i, j) existe r_{ij} tal que el límite de $\varepsilon^{-r_{ij}} P_{ij}(\varepsilon)$, cuando ε tiende a cero, existe y es positivo.

A nuestro sistema de perturbaciones le habíamos pedimos que cada $P(\varepsilon)$ tenga términos positivos, eso determina que se cumpla la primera condición de la regularidad, es decir cada $P(\varepsilon)$ es irreducible y primitiva, tenemos que pedir que cumpla también las otras dos condiciones. Es claro que r_{ij} es $c_{ij}=|b(i)-j|$.

Definición 3.3.9.

La distribución límite μ^* es el límite de $\mu(\varepsilon)$, cuando ε tiende a 0.

Tenemos que demostrar que esta distribución límite existe y con base en ella definiremos nuestro concepto de equilibrio a largo plazo.

Definición 3.3.10

$z \in Z$, es llamado un **equilibrio de largo plazo,** si la coordenada de la distribución límite correspondiente a z es positiva.

Un caso particular del teorema de Freidlin y Wentzell establece que la distribución límite existe y que los estados que reciben peso positivo bajo μ^* son aquellos en los que las z-coordenadas de $\{\mu(\varepsilon)\}$ convergen a cero a la tasa más baja. Si sólo existe un estado z que cumple dicha propiedad, la distribución límite será un vector canónico cuya coordenada uno corresponde a ese estado.

Teorema 3.3.11

(Wentzell y Freidlin.)

Sea **P**(0) una cadena de Markov estacionaria definida en un espacio finito de estados Z, $\{\mathbf{P}(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,a]}$ una perturbación regular de P(0) y $\mu(\varepsilon)$ la única distribución estacionaria de $P(\varepsilon)$, para cada ε positivo, entonces:

i. El límite de $\{\mu(\varepsilon)\}$ existe, cuando ε tiende a cero. Denotemos como μ^* a ese límite.

ii. $\mu_x^* > 0$ si y solo si x es tal que $\min_{z \in Z} vz = vx$.

Demostración.

Definamos $\gamma: Z \to R$, como $\gamma(z)=\min \Sigma_{(i,j) \in h\ h \in Hz} |b(i) - j|$

y sea $\gamma^* = \min_z \gamma(z)$

Recordemos que $\mu_Z(\varepsilon)=\dfrac{\sum_{h \in H_z} \prod_{(y,y') \in h} p_{xy}(\varepsilon)}{\sum_{x \in Z} \sum_{h \in H_x} \prod_{(y,y') \in h} p_{xy}(\varepsilon)}$.

Escribamos a $\mu_Z(\varepsilon)$, como $\dfrac{\varepsilon^{-\gamma^*} \sum_{h \in H_z} \prod_{(y,y') \in h} p_{xy}(\varepsilon)}{\sum_{x \in Z} \sum_{h \in H_x} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(y,y') \in h} p_{xy}(\varepsilon)}$ y estudiemos el comportamiento de $\varepsilon^{-\gamma^*} \Sigma\ \Pi\ p_{xy}(\varepsilon)$, cuando ε tiende a cero.

Consideremos primero que h es un z – árbol con costo mayor o igual a $\gamma(z)$ y pensemos en la siguiente igualdad

(a) $\quad \varepsilon^{-\gamma^*} \Sigma_{h \in Hz} \Pi_{(x,y) \in h}\, p_{xy}(\varepsilon) \;=\; \varepsilon^{c(h) - \gamma^*} \Sigma_{h \in Hz} \Pi_{(x,y) \in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)}\, p_{xy}(\varepsilon)$

como el sistema de perturbaciones es regular, se cumple,

(b) $$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{-r(x,y)}\, p_{xy}(\varepsilon) > 0 \qquad \forall\, (x, y) \in h.$$

Veamos que sucede para árboles con costo mayor que γ^* y para los que tienen costo igual a dicho valor.

si $c(h) \geq \gamma(z) > \gamma^*$ se sigue de (a) y (b) que

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{-\gamma^*}\, \Pi_{(x,y)\in h} P_{xy}(\varepsilon) = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{c(h)-\gamma^*}\, \Pi_{(x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)$$

$$= \lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{c(h)-\gamma^*} \lim_{(\varepsilon \to 0)} \Pi_{(x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)$$

$$= 0\,(\lim_{(\varepsilon \to 0)} \quad \Pi_{(x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon))$$

$$= 0$$

c) Cuando el costo de un árbol es mayor que γ^*,

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{-\gamma^*} \Pi \quad P_{xy}(\varepsilon) = 0.$$

En cambio, si $c\,(h) = \gamma(z) = \gamma^*$, tenemos de nuevo,

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{-\gamma^*}\, \Pi \quad P_{xy}(\varepsilon) = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{c(h)-\gamma^*}\, \Pi_{(x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)$$

$$= \lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{0} \lim_{(\varepsilon \to 0)} \quad \Pi_{(x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)$$

$$= \lim_{(\varepsilon \to 0)} 1 (\lim_{(\varepsilon \to 0)} \Sigma \Pi_{Hz \quad (x,y)\in h} \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)) > 0$$

$$= 1\,(\lim_{(\varepsilon \to 0)} \quad \Sigma \quad \Pi_{Hz \quad (x,y)\in h}\, \varepsilon^{-r(x,y)} P_{xy}(\varepsilon)) > 0$$

d) Cuando el costo de un árbol es igual a $\gamma*$,

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \varepsilon^{-\gamma^*} \Pi \quad P_{xy}(\varepsilon) > 0.$$

Entonces de c y d obtenemos que $\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{x \in Z} \sum_{h \in H_x} \varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(y,y') \in h} p_{xy}(\varepsilon)$ es positivo, ya que al menos un árbol tiene costo igual a $\gamma*$.

Por lo tanto, $\mu*$ el límite de $\{\mu_Z(\varepsilon)\}$, cuando ε tiende a cero, existe para toda z

y

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \mu_z(\varepsilon) = 0, \qquad \text{si } \gamma(z) > \gamma^*$$

$$\lim_{(\varepsilon \to 0)} \mu_z(\varepsilon) > 0 \qquad \text{si } \gamma(z) = \gamma^*$$

Por lo tanto la coordenada μ^*_z es no negativa si y sólo si z es un estado de costo mínimo.

Q.D.

El teorema en cuestión nos dice que los estados de menor potencial forman el conjunto solución de equilibrios a largo plazo. Intuitivamente se puede conjeturar que dichos estados son nodos de alguno de aquellos subconjuntos especiales de la digráfica asociada al proceso de aprendizaje. Estos subconjuntos corresponden a distribuciones estacionares de la matriz P(0), es decir, la intuición nos dice que μ^* es una distribución estacionaria de P(0). Todo esto lo justificaremos en el siguiente capítulo.

Pasemos ahora al estudio sistemático de todos los juegos simétricos 2 x 2, para lo que nos será de gran utilidad la siguiente proposición que tiene también un gran valor técnico para el cálculo de v_z .

Proposición 3.3.12

Sean z y z´ dos elementos de Z, tales que z con está en z´, entonces una trayectoria de mínimo costo que une a z C(z´) es de la forma:

$$h^* = \{(z, x)\} \bigcup_{m=1}^{S} \{(b^{m-1}(x), b^{m}(x))\},$$

con x en C (z´) y tal que $\min_{y \in Cuenca(z')} r(z, y) = r(z, x)$ y s tal que $b^{S}(x)=z'$.

El costo de pasar de z a z´ es igual a r(z, x).

Demostración:

Para cualquier trayectoria h´ que une a z con z´, definimos como k(h´) el número de vértices de h´ que no están en la cuenca de z .

Para cada entero positivo κ que representa el número máximo de vértices fuera de la cuenca de z´ que admitimos en las trayectorias de costo mínimo que unen a z con z´, denotamos como

$c(z, \kappa)$ al $\min \{c(h') \mid h'$ une a z con z´ y $k(h') \leq \kappa\}$.

Probaremos por inducción sobre κ que $c(h^*)= c(z, \kappa)$ para toda κ.

Supongamos que κ=1, si h´ es una trayectoria que une z con z´ de mínimo costo y tal que k(h´) es menor o igual que uno, entonces z es el único vértice de h´ que no pertenece a la cuenca de z´ y $c(h') = r(z, u)=c(z, \kappa)$, con

(z, u) en h´ y u en la cuenca de z.

Como h´ es de mínimo costo, $r(z, u) = r(z, x)$, pues x es uno de los vértices de la cuenca de z´ que minimiza r(z, y). Los demás arcos de h´ tienen costo cero, entonces $c(h') = c(h^*)$ y, por lo tanto, $c(h^*)= c(z, 1)$.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que para alguna $\kappa \geq 2$, $c(h^*)= c(z, \kappa)$ y sea h´ de mínimo costo, con a lo más κ +1 vértices fuera de la cuenca de z´, es decir $c(h')= C(z, \kappa+1)$.

Si (z, z^0) está en h' y z^0 está en la cuenca de z', entonces por los argumentos anteriores $c(h') = c(h^*)$.

Supongamos entonces que z^0 no está en la cuenca de z'.

$$c(h') = r(z, z^0) + C(z^0, \kappa) = r(z, z^0) + c(h^{\#}),\ \text{donde}$$

$$h^{\#} = \{(z^0, x^0)\} \bigcup_{m=1}^{s0} \{(b^{m-1}(x^0), b^{m}(x^0))\},$$

con x^0 en la cuenca de z', tal que $\min\limits_{y \in Cuenca(z')} r(z^0, y) = r(z^0, x^0)$ y s^0 tal que $b^{s0}(x^0) = z'$.

Es decir,

$c(h') = r(z, z^0) + r(z^0, x^0)$.

Consideremos la trayectoria $h'' = \{z, z^0, x^0, d(x^0), d^2(x^0), \ldots, d^s(x^0) = z'\}$,

$k(h'') = 2 \leq \kappa$, por lo tanto $c(h'') = c(z, \kappa) = c(h^*)$.

Pero, por otro lado $c(h'') = r(z, z^0) + r(z^0, x^0) = c(h') = c(z, \kappa+1)$.

Es decir $c(z, \kappa+1) = c(h^*)$, para toda κ. O lo que es lo mismo h^* es una trayectoria de costo mínimo que une a z con z' y el costo de transitar de z a z' es $r(z, x)$.

Q.D.

3.4 Comparación De Los Resultados Obtenidos Con Los Dos Enfoques En Los Juegos Simétricos 2 X 2.

En esta sección estableceremos, para cada uno de los tipos de juegos simétricos 2 x 2 existentes, los equilibrios a largo plazo de dinámicas de aprendizaje Darwinianas y los compararemos con los equilibrios de Nash seleccionados, para estos mismos juegos, por Harsanyi y Selten (ver capítulo 2).

Un juego simétrico 2 x 2 se expresa por una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{pmatrix}.$$

Suponiendo que $a \neq c$ y $d \neq b$, tenemos los dos casos siguientes:

i) $(a-c)(d-b) > 0$ y

ii) $(a-c)(d-b) < 0$

En el caso i, tenemos, a su vez, dos posibilidades:

1*) $a > c$ y $d > b$, en cuyo caso el juego se llama de coordinación y tiene dos equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras, (s_1, s_1) y (s_2, s_2) y uno también simétrico en "estrategias mixtas estrictas".

2*) $a < c$ y $d < b$, entonces el juego tiene dos equilibrios de Nash no simétricos en estrategias puras (s_2, s_1) y (s_1, s_2) y uno simétrico en "estrategias mixtas estrictas".

En el caso ii) se tienen otras dos posibilidades:

1°) $a > c$ y $b > d$, en cuyo caso s1 es una estrategia dominante y el único equilibrio de Nash del juego es (s_1, s_1) que es equilibrio simétrico en estrategias puras.

2°) $c > a$ y $d > b$ y entonces s_2 es dominante, (s_2, s_2) es un equilibrio de Nash simétrico en estrategias puras y es el único equilibrio del juego.

Veremos los resultados en cada uno de los casos, con una población N enfrentada en el juego y con alguna de las dinámicas de aprendizaje Darwiniana.

Por simplicidad, empecemos con ii). Sus dos casos son análogos.

Teorema 3.4.2

Supongamos que en un juego simétrico 2 x 2 la estrategia s_i es dominante, entonces, cualquier dinámica Darwiniana tiene como distribución límite μ^* un vector canónico de R^2. La coordenada 1 de μ^* corresponde al estado n, si la estrategia dominante es s_1 y al estado 0, si es s_2.

Demostración:

Supongamos que s1 es dominante entonces
$a=\varphi_1(s_1, s_1) > c= \varphi_1(s_2, s_1)$ y $b = \varphi_1(s_1, s_2) > d$,
O lo que es lo mismo, $E_1(s_1, s_1) > E(s_2, s_1)$ y $E_i(s_1, s_2) > E_i(s_2, s_2)$.

Por lo tanto $E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)$, para toda z en $\{0, 1, \ldots, n\}$, entonces $vn = 0$ y es el único estado tal que v_z es cero. Entonces la única coordenada positiva de v^* corresponde a n y tiene que ser 1.

La demostración es análoga, si es s_2 la que es dominante.

Q.E.D.

Comparando con lo estudiado en el capítulo 2, supongamos que la estrategia dominante es s_1, tenemos dos casos:

i) $a < b$, entonces el juego tiene punto silla en (s_1, s_1) que es el único equilibrio de Nash, los jugadores obtienen como pago su máximo asegurable que es a y la solución de Harsanyi es jugar con estrategias conservadoras. Pero s_1 es conservadora para los dos jugadores, entonces la solución de Harsanyi es el único equilibrio de Nash del juego.

ii) $b < a$, entonces el máximo asegurable de los dos jugadores es b. En el único equilibrio de Nash, (s_1, s_1), ambos obtienen un pago mayor que su máximo asegurable. La solución de Harsanyi es el único equilibrio de Nash del juego.

Es decir, la solución de Harsanyi es el único equilibrio de Nash que es el mismo que se obtiene con las dinámicas de aprendizaje Darwinianas.

Ejemplo

Sea

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,1) \\ (1,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

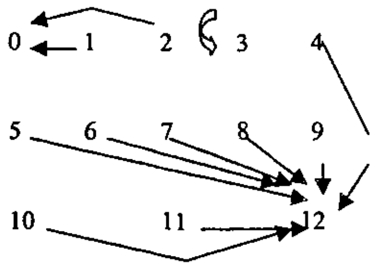
con una población $N = 12$

y la dinámica

$$b(z) = \begin{cases} N & \text{si} \quad z > 3 \\ z & \text{si} \quad z = 3 \\ 0 & \text{si} \quad z < 3 \end{cases}$$

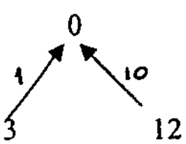
la digráfica (V,A) donde $V = Z$ y $A = \{ (x,y) \in Z \times Z \mid b(x) = y\}$

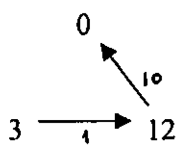
queda así

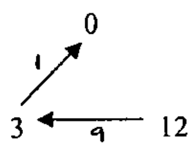


Los z-árboles son los siguientes

0 – árboles



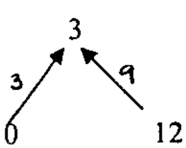


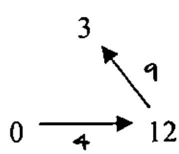


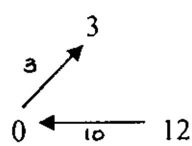
$\Sigma c_{ij} = 11$ $\Sigma c_{ij} = 11$ $\Sigma c_{ij} = 10$

$v_0 = 10$

3 – árboles



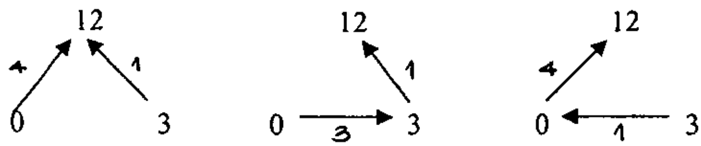




$\Sigma c_{ij} = 12$ $\Sigma c_{ij} = 13$ $\Sigma c_{ij} = 13$

$v_3 = 12$

12 – árboles



$c_{ij} = 5$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Sigma c_{ij} = 4$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Sigma c_{ij} = 5$

$v_9 = 4$

$\min v_z = v_9$

El equilibrio del juego es la estrategia s_1 que es dominante.

Si ahora s_2 es la estrategia dominante tenemos

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (2,0) \\ (0,2) & (3,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

con la población $N = 8$

y la dinámica

$$b(z) = \begin{cases} N & \text{si} \quad z > 4 \\ z & \text{si} \quad z = 4 \\ 0 & \text{si} \quad z < 4 \end{cases}$$

Los estados con posibilidad a ser el equilibrio del juego son 9, 4 y 0, con $v_0 = 4$, $v_4 = 7$ y $v_8 = 7$, $\min v_z = v_0$. El equilibrio del juego es la estrategia (s_2, s_2).

Vayamos ahora al primer caso de i), los juegos de coordinación.

Juegos de Coordinación.

Como decíamos anteriormente, en los juegos de coordinación (s_1, s_1) y (s_2, s_2) son equilibrios de Nash. Si, además, $a > d$ $(d > a)$, entonces el equilibrio (s_1, s_1) $((s_2, s_2))$ domina a (s_2, s_2) $((s_1, s_1))$, es decir, es dominante de Pareto.

Según Harsanyi, si los jugadores pudieran comunicarse, aunque fuera a señas (juegos vocales), posiblemente escogerían (s_1, s_1) $((s_2, s_2))$, pero, siguiendo con ese autor, en la ausencia de esta comunicación, no es obvio que lo escojan, porque el riesgo de s1 relativo a s_2 (el riesgo de s_2 relativo a s_1) también cuenta para tomar una decisión.

Cuál de los dos equilibrios, en estrategias puras, es dominante por riesgo depende de lo que llamaremos el nivel crítico de la población.

Definición 3.4.1

El real positivo z^* es **el nivel critico de la población**, si la siguiente ecuación es válida para toda z en Z.

$$\text{signo}\,(E_1(\underline{z} \mid s_1) - E1(\underline{z} \mid s_2)) = \text{signo}\,(z - z^*)$$

(z^* no es necesariamente un entero)

Proposición 3.4.2

Dado un juego simétrico de coordinación existe el nivel crítico de la población z^* y es igual a $\dfrac{n(d-b)}{a-b-c+d}$

Demostración.

Denotamos como ζ a la estrategia mixta que es solución de la ecuación

$E_1(\zeta \mid s_1) = E_1(\zeta \mid s_2)$, entonces $\zeta=\left(\dfrac{(d-b)}{a-b-c+d}, 1-\dfrac{(d-b)}{a-b-c+d}\right)$.

Si $z < \dfrac{n(d-b)}{a-b-c+d}$, tenemos que $E_1(\underline{z} \mid s_1) < E_1(\underline{z} \mid s_2)$.

Si $z > \dfrac{n(d-b)}{a-b-c+d}$, entonces $E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)$.

Por lo signo de $\left(z - \dfrac{n(d-b)}{a-b-c+d}\right)$ = signo de $(E_1(\underline{z} \mid s_1) - E_1(\underline{z} \mid s_2))$ y

$z^*=\dfrac{n(d-b)}{a-b-c+d}$.

Q.E.D

Observación: Supongamos que z^* es menor que n/2, entonces
$E_1(\underline{n/2} \mid s_1) > E_1(\underline{n/2} \mid s_2)$,
$E_1(\underline{n/2} \mid s_1) = (n/2)a + (n/2)b$ y $E_1(\underline{n/2} \mid s_2) = (n/2)c + (n/2)d$

Entonces $E_1(\underline{n/2} \mid s1) > E1(\underline{n/2} \mid s_2)$ implica que $a - c > d - b$ y (s_1, s_1) domina por riesgo a (s_2, s_2).

Si z^* es mayor que n/2, la situación es análoga.

Teorema 3.4.3

Supongamos que el juego es de coordinación y z^* es distinto de n/2. Para cualquier población N y cualquier dinámica Darwiniana de aprendizaje b, la distribución límite tiene coordenada uno en el estado que corresponde a n si $z^* < n/2$ y en 0 si $z^* > n/2$.

Supongamos que el juego es de coordinación, n impar y $z^* = n/2$, o n par mayor o igual a 4 y z^* entero, entonces, para cualquier dinámica de aprendizaje Darwiniana, los equilibrios de largo plazo son (s_1, s_1) y (s_2, s_2) y la distribución límite tiene coordenadas ½ en cada uno de ellos.

Demostración.

$A = E_1(\underline{n} \mid s_1)$ y $E_1(\underline{n} \mid s_2) = c$, por lo que $E_1(\underline{n} \mid s_1) > E_1(\underline{n} \mid s_2)$ y el conjunto $\{z \in Z \mid E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)\}$ es no vacío.

z^* es una cota inferior del conjunto $\{z \in Z \mid E_1(\underline{z} \mid s_1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)\}$ que es finito, entonces existe $\alpha < z^*$, $\alpha = \min \{z \in Z \mid E_1(\underline{z} \mid s1) > E_1(\underline{z} \mid s_2)\}$.

Además, $b = E_1(\underline{0} \mid s_1)$ y $d = E_1(\underline{0} \mid s_2)$, por lo que $E_1(\underline{0} \mid s_1) < E_1(\underline{0} \mid s_2)\}$ y z^* es una cota superior de $\{z \in Z \mid E_1(\underline{z} \mid s_1) < E_1(\underline{z} \mid s_2)\}$, entonces existe $\beta = \max \{z \in Z \mid E_1(\underline{z} \mid s_1) < E_1(\underline{z} \mid s_2)\}$, $\beta < z^*$.

Entonces se cumple:

$\beta < z^* < \alpha$

Sea h un n- árbol. Denotemos como h' a la trayectoria que pertenece a h y une a 0 con n, y como h'' a h - h'.

Entonces

$$c(h) = c(h') + c(h'')$$

Por la proposición 3.3.1
tenemos que el min c(h'), sobre todas las trayectorias que unen a 0 con n, se alcanza en la trayectoria

$$h^* = \{ (0, \alpha) \} \cup \{(b^{m-1}(\alpha),\ b^m(\alpha))\},\ m=1, \ldots, s, \text{ con } b^s(\alpha)=n.$$

$$c(h^*)=\alpha.$$

Entonces

$$c(h) = c(h') + c(h'') \geq \alpha + c(h'') \geq \alpha.$$

α es una cota inferior de $c(h)$ para cualquier n-árbol.

Si z^* no es un entero, los vértices de Z, están en la cuenca de 0 o en la de n. Construiremos un n-árboles h de costo α. En h, las trayectorias que unen a cualquier vértice z, en la cuenca de cero, con n, son de la forma $h_z' \cup h^*$, con $h'_z = \cup \{(b^{m-1}(z), b^m(z))\}$, m=1, ...s', con $b^{s'}(z)=0$. Las trayectorias h_z'' que unen vértices en la cuenca de n, con n, serán de la forma $\cup\{(b^{m-1}(z), b^m(z))\}$, m=1, ...s'', con $b^{s''}(z)=n$.

$H=\{ h'_z \}_{z\in Cuenca(0)} \cup \{h_z''\}_{z\in Cuenca(n)} \cup h^*$, $c(h)=\alpha$.

Si z^* es entero, $z^*=\alpha-1$, consideramos

$h^{**}= \{ (0, z^*) \}\cup\{(z^*, \alpha) \cup\{(b^{m-1}(\alpha), b^m(\alpha))\}$, con m=1, ..., s, donde
$b^s(\alpha)=n$.

El n-árbol $h = h=\{ h'_z \}_{z\in Cuenca(0)}\cup \{h_z''\}_{z\in Cuenca(n)} \cup h^{**}$, es tal que $c(h)=\alpha$.

Por lo tanto,

$$v_n = \min_{h\in HN\,(i,j)\in h} \Sigma\, cij = \alpha$$

Luego considérese el valor de v_z para $\alpha \leq z < n$.

Con los argumentos anteriores se demuestra que α es cota inferior de los costos de las trayectorias que unen al estado 0 con el z, pero no podremos encontrar una trayectoria que una a 0 con z y que tenga costo α. Es decir, $v_z>\alpha$.

Procediendo con el estado 0, como se hizo con n, se demuestra que

$$v_0 = n - \beta$$

y que para $0 < z \leq \beta$, $vz > n - \beta$.

cuando z^* es un entero (que es un estado)

$$vz^* \geq \{n-z^*+z^*\} = n$$

Nos resta comparar α, β y $n- z^*$ para decidir cuál estado tiene asociado menor "costo total" . Tenemos tres casos:

a) $z^* < n/2$,

b) $z^* > n/2$ y

c) $z^* = n/2$.

Para el caso a) tenemos que $\beta < z^* < \alpha \leq n/2$ y

$$n-\beta > n- z^* > n/2 \geq \alpha .$$

Por lo que v_z* y $v_0 = n - \beta$ son mayores que α y n es el estado con menor "costo total" y el equilibrio a largo plazo tiene coordenada 1 en el estado n. Lo que se puede interpretar como que a largo plazo el equilibrio que aparecerá casi siempre es (s_1, s_1).

Para el caso b) tenemos que $n/2 \leq \beta < z^* < \alpha$ y

$$\alpha > z^* > n/2 \geq n - \beta.$$

Por lo que vz^* y $vn = \alpha$ son mayores que $n - \beta$ y 0 es el estado con menor "costo total" y el equilibrio a largo plazo tiene coordenada 1 en el estado 0. Lo que se puede interpretar como que a largo plazo el equilibrio que aparecerá casi siempre es (s_2, s_2). Uno de los dos equilibrios puede ser óptimo de Pareto, pero solo prevalecerá en el largo plazo si es dominante por riesgo.

Para el caso c), tenemos $\beta < z^* = n/2 < \alpha$.

Si z^* no es entero, $\alpha= [n/2] + 1$, $\beta = [n/2]$, $n - \beta = n-[n/2] = [n/2] + 1 = \alpha$. Y el equilibrio a largo plazo es (½, 0, 0,..., 0, ½).

Si z^* es entero y $n \geq 4$, $\alpha= n/2 + 1$, $\beta = n/2 - 1$, $n - \beta = n/2 +1 = n/2 + 1 = \alpha$. También el equilibrio a largo plazo es (½, 0, 0,..., 0, ½).

Q.D.

Recordando que si el nivel crítico de la población se alcanza con menos de la mitad de la población, el equilibrio formado por la primera estrategia pura para ambos jugadores domina por riesgo al formado por las segundas estrategias y por el contrario si ese nivel de la población se alcanza con más de la mitad la dominancia es contraria, podemos establecer el

Corolario 3.4.4

Supongamos un juego simétrico 2 x 2 es de coordinación y z^* es distinto de $n/2$, el único equilibrio de largo plazo es el equilibrio que domina por riesgo.

Corolario 3.4.5

Supongamos que el juego simétrico 2 x 2 es de coordinación y $b = c$. Para cualquier población N y para cualquier dinámica de aprendizaje, el único equilibrio de largo plazo es el equilibrio eficiente de Pareto.

Si solo uno de los dos equilibrios es eficiente de Pareto, el nivel crítico de la población no puede ser igual a $n/2$. z^* será menor que $n/2$, si el equilibrio eficiente de Pareto es (s_1, s_1) y mayor que $n/2$, si lo es (s_2, s_2).

Tomemos el ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & s_1 & s_2 \\ s_1 & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} (2,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{array}\right)} \\ s_2 & & \end{array}$$

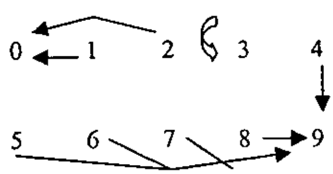
con una población N = 9

y la dinámica

$$b(z) = \begin{cases} N & \text{si} \quad z > 3 \\ z & \text{si} \quad z = 3 \\ 0 & \text{si} \quad z < 3 \end{cases}$$

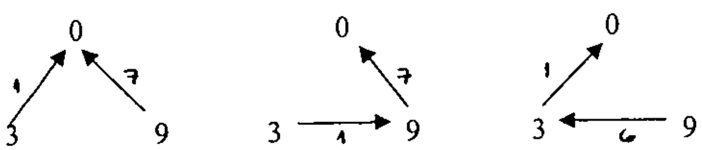
la digráfica (V,A) donde V = Z y A = { (x,y) ε Z x Z | b(x) = y}

queda así



Los z-árboles son los siguientes

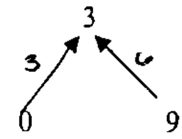
0 – árboles

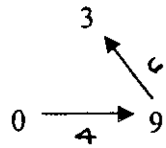


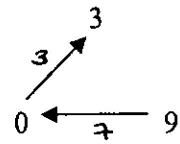
$\Sigma c_{ij} = 8$ $\qquad$ $\Sigma c_{ij} = 8$ $\qquad$ $\Sigma c_{ij} = 7$

$v_0 = 7$

3 – árboles



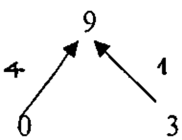


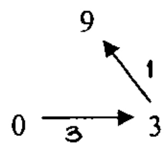


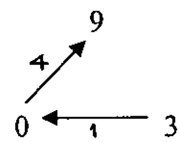
$\Sigma c_{ij} = 9$ $\Sigma c_{ij} = 10$ $\Sigma c_{ij} = 10$

$v_3 = 9$

9 – árboles







$c_{ij} = 5$ $\Sigma c_{ij} = 4$ $\Sigma c_{ij} = 5$

$v_9 = 4$

$\min v_z = v_9$

Entonces vemos que uno de los equilibrios del juego es (s_1, s_1). Este equilibrio es también eficiente de Pareto y domina por riesgo a (s_2, s_2) que es el otro equilibrio del juego.

Vayamos, por último, al caso restante de los juegos simétricos, aquel en el que $a < c$ y $d < b$. Como sabemos, estos juegos no tienen equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras y el único de estos equilibrios que resulta simétrico está formado por "estrategias mixtas estrictas" para los dos jugadores.

En los juegos de coordinación, las cosas funcionan como en Harsanyi.

Juegos cuyo único equilibrio simétrico es en estrategias mixtas, en sentido estricto.

Sigamos denotando con z* a $\frac{n(d-b)}{a-b-c+d}$, aunque no cumpla las propiedades de un nivel crítico de la población.

Definición 3.4. 6

Una dinámica Darwiniana b es una contracción relativa a z* si para toda z en Z,

$$[\,|b(z) - z^*|\,] \leq [\,|z - z^*|\,]$$

con la desigualdad estricta si $z^* \in Z$ y z distinto de z*,
z tal que $[\,|z - z^*|\,] \geq 1$ y b(z) distinto de z y la igualdad en los otros casos.

Teorema 3.4.7

Supongamos $n \geq 4$ y b una contracción relativa a z*, en un juego simétrico 2x2, en donde a < c y d < b. Si $z^* \in Z$, entonces la distribución límite tiene coordenada uno en z*. Si z* no pertenece a Z, entonces la distribución límite puede tener coordenadas ½ en [z*] + 1 y ½ en [z*] o 1 en alguno de esos dos estados.

Demostración:

Supongamos que z* es un entero, entonces b(z*) =z*, ya que b es Darwiniana y {z*} es la única clase de comunicación recurrente de la dinámica b. Para cada z existe s_z tal que $b^{s_z}(z) = z^*$.

Sea h* = {(z, b(z)) | z es distinto de z*}, h* es un z*- árbol y c(h*)=0. Por lo tanto h* es un z*-árbol de costo mínimo y vz = 0. Además, para cualquier vértice z distinto de

z^*, un z-árbol arbitrario tiene costo estrictamente mayor que cero, pues por lo menos tendrá una flecha (z^*, z') con costo positivo. Es decir, z^* es el único equilibrio a largo plazo.

Ahora supongamos que z^* no es un entero.

$[z^*] + 1$ y $[z^*]$ son enteros en Z.

$[[z^*] + 1 - z^*] = 0$ y $[[z^*] - z^*] = 0$ y si $[z - z^*] = 0$, entonces $z = [z^*]$ o $z = [z^*] + 1$.

Por otro lado,

si $z = [z^*] + 1$, entonces $[z - z^*] < 1$, entonces $[\, b([z^*] + 1) - z^*] = 0$, pues b es una contracción. Tenemos dos casos excluyentes:

1) $b(\{[z^*] + 1) = [z^*] + 1$ y $[z^*] + 1$ es una clase de comunicación de recurrencia

o

2) $b(\{[z^*] + 1) = [z^*]$.

Si $z = [z^*]$, de nuevo $[z - z^*] < 1$ tenemos dos casos excluyentes:

1') $b([z^*]) = [z^*]$ y $[z^*]$ es una clase de comunicación recurrente o

2') $b([z^*]) = [z^*] + 1$.

Si se cumplen 1) y 1'), tenemos que las dos únicas clases de comunicación recurrente son $\{[z^*]\}$ y $\{[z^*] + 1\}$ y $v[z^*] + 1 = v[z^*] = 1$. Por lo que la distribución límite tiene coordenadas ½ en dichos estados y ellos son los únicos equilibrios a largo plazo.

Si se cumplen 2) y 2') tenemos una única clase de comunicación de recurrencia que es el ciclo $\{[z^*], [z^*]+1\}$ y la distribución límite y los equilibrios a largo plazo son los mismos que en el caso anterior.

Si se cumplen 1) y 2´), la única clase de comunicación de recurrencia es {[z*]+1} y la distribución límite tendría coordenada 1 en dicho estado que sería el único equilibrio a largo plazo.

Si se cumplen 2) y 1´), la única clase de comunicación de recurrencia es {[z*]} y la distribución límite tendría coordenada 1 en dicho estado que sería el único equilibrio a largo plazo.

El juego tiene dos equilibrios en estrategias puras que a Kandori, ... no le interesan porque solo consideran los equilibrios simétricos. ¿Qué diría Harsanyi de este problema ?

Supongamos que b y c son mayores que el máximo asegurable de los jugadores, entonces Harsanyi eliminaría el equilibrio en estrategias mixtas estrictas, pues en dicho equilibrio, los jugadores ganan el máximo asegurable. Entonces, se preocuparía por estudiar los otros dos equilibrios, para estudiar sus relaciones de dominio. La solución sería el equilibrio en estrategias puras que domine por riesgo. Si no hay dominancia por riesgo, la solución sería el conjunto de los dos equilibrios.

En el caso de que el jugador i ganase su maxmin en uno de los equilibrios en estrategias puras, el jugador j lo haría en el otro y la solución de Harsanyi no sería ninguno serían las estrategias conservadoras que no forman equilibrio.

Un ejemplo de un juego simétrico 2x2, sin equilibrio simétrico en estrategias puras, una población N y una contracción b.

Sea el juego

$$\begin{pmatrix} (2,2) & (1,3) \\ (3,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

$N = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

$\zeta = (½, ½)$

$z^*=5$ que es un entero

y nuestra dinámica $b: Z \to Z$, definida como

$$b(z) = \begin{cases} z+1 & \text{si} \quad z < 5 \\ z & \text{si} \quad z = 5 \\ z-1 & \text{si} \quad z > 5 \end{cases}$$

Entonces b es Darwiniana.

Veamos que b es una contracción relativa a $z^* = 5$.

Si $z < 5$, $b(z) = z + 1$, entonces

$$[\,|z+1-5|\,] = [|z-4|\,] = 4 - z < 5 - z = |z-5| = [|z-5|\,].$$

Si $z > 5$, $b(z) = z - 1$

$$[\,|z-1-5|\,] = |z-6| = z-6 < z-5 = |z-5| = [|z-5|\,]$$

$b(5) = 5$ y $[|b(5) - 5|\,] = 0$.

Entonces b cumple todas las condiciones de una contracción relativa a z^*.

En este caso, desde cualquier nodo la dinámica conduce a 5 que representa al único equilibrio de Nash simétrico, entonces es el nodo de menor potencial y la distribución límite es el vector (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0). Mientras que la solución de Harsanyi es el equilibrio (s_1, s_2)

Veámoslo en la digráfica

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10$$

Ahora consideremos N = 11 para el mismo juego entonces la dinámica es

$$b(z) = \begin{cases} z+1 & \text{si} \quad z < 11/2 \\ z-1 & \text{si} \quad z > 11/2 \end{cases}$$

Entonces b es Darwiniana.

Veamos que b es una contracción relativa a $[z^*] = 5$ y $[z^*] + 1 = 6$ porque $z^* = 11/2$ no está en Z .

Si $z < 5$, $b(z) = z + 1$, entonces

$$[\,|z+1-5|\,] = [\,|z-4|\,] = 4 - z < 5 - z = |z-5| = [\,|z-5|\,].$$

Si $z > 6$, $b(z) = z - 1$

$$[\,|z-1-6|\,] = |z-7| = z-7 < z-6 = |z-6| = [\,|z-6|\,]$$

Entonces b cumple todas las condiciones de una contracción relativa a z^*.

En este caso, desde cualquier nodo se llega a 5 o a 6 y comienza un ciclo entre ellos, los nodos de menor potencial son 5 y 6 y la distribución límite es el vector (0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0).

CAPÍTULO 4
SELECCIÓN DINÁMICA DE EQUILIBRIOS. EL CASO GENERAL.

4.1 El Sentido de la Generalización.

El teorema 3.3.11, que es un caso particular del de Friedlin y Wentzell, nos permite generalizar el tratamiento dinámico del capítulo 3 a cualquier juego rectangular finito. Otro aspecto que generalizaremos es que las dinámicas admitidas no son necesariamente funciones, sino que pueden ser correspondencias, pues desde un estado del conflicto podrán existir varios estados siguientes. Además, en el momento de admitir los errores de los miembros de la población estudiada, no quedarán por necesidad unidos por un arco de la digráfica perturbada dos estados cualesquiera, pero esta digráfica si será conexa, es decir las matrices $P(\varepsilon)$ serán, por supuesto no negativas, pero no necesariamente positivas, lo que si les pediremos es que sean irreducibles y primitivas.

Por otro lado, el modelo y muchas de las ideas siguen lo hecho por Kandori, Mailath y Rob y en este capítulo trataremos de seguir el mismo orden de las secciones 3.2 y 3.3, para facilitar la comparación (Paloma Zapata. NOTAS, Impresión en proceso.)

4.2 El Modelo General

Sea $(K, \{D_j\}, \varphi)$, $K = \{1, 2, \ldots k\}$, $D_j = \{1, 2, \ldots l_j\}$ y $\varphi : D \times D \to R^n$ un juego finito cualquiera.

Sea N, una población que está envuelta en el conflicto expresado por el juego anterior, como éste no es simétrico, las personas que componen nuestra población no son del mismo tipo, desde el punto de vista del conflicto (juego). Consideraremos, entonces, que dentro de la población hay subconjuntos ajenos entre sí, ya que suponemos que cada persona puede ocupar el papel de uno sólo de los jugadores y de ninguno más. Es decir, N está partida en k subconjuntos, $N_1, N_2, \ldots, N_k$ de manera que cada jugador pertenece a uno y sólo un grupo.

Formalmente, $N = U(i = 1, K)\ N_i$ y la intersección entre N_i y N_j es igual al vacío para toda i y j distintas.

Siguiendo a Kandori et al, las personas de nuestra población no son sabelotodos, sino personas miopes, con inercia y propensión a cometer errores.

Como antes, el conflicto se desarrolla en tiempo discreto y en cada instante los estados z representan la composición estratégica de la población, esto es, z especifica cuantos pobladores j de cada grupo escogieron cada una de sus estrategias k, pero ahora un estado no es tan sencillo matemáticamente, como en el caso simétrico, z ya no es un número natural, sino que es una "matriz", cuyas columnas tienen tamaños diferentes, pues cada jugador tiene un número diferente de estrategias.

Definición 4.2.1

Un estado z del conflicto, en el tiempo t es una k-ada

$$z = (z^1, z^2, \ldots\ldots\ldots, z^k), \text{ tal que}$$

$$z^j = (n_1^j, n_2^j, \ldots\ldots\ldots, n_{l_j}^j), \text{ con } \sum_{i=1}^{l_j} n_i^j = \# N_j = n_j$$

Interpretamos a n_i^j como el número de personas del grupo j que escogieron la estrategia pura i del jugador j.

Denotamos como Z al conjunto de estados posibles en el conflicto.

Observación. A cada estado z le podemos asociar el perfil de estrategias mixtas de frecuencias $\underline{z} = (\underline{z}^1, \underline{z}^2, \ldots, \underline{z}^k)$,

$$\underline{z}^j = (n_1^j/n_j, n_2^j/n_j, \ldots\ldots\ldots, n_{lj}^j/n_j)$$

Es decir,

$$\underline{z} = (z^1/n_1, z^2/n_2, \ldots\ldots, z^k/n_k)$$

Denotaremos como (N, (K, $\{D_j\}$, φ)) a una población N que enfrenta el conflicto (K, $\{D_j\}$, φ).

Igual que antes se establece, en el modelo, una dinámica de aprendizaje b para determinar como se pasa de un estado a otro. La imagen de z_t no depende del tiempo solo del estado, entonces b es fija con respecto al tiempo.

Tiempo discreto quiere decir que el tiempo toma valores 0, 1, 2, ..., a diferencia del tiempo continuo que toma valores en la semirecta de los reales no negativos o en un intervalo de reales, etc.

Definición 4.2.2.

Una dinámica de aprendizaje en el conflicto (N,(K, $\{D_j\}$, φ)) es una correspondencia

$$b: Z \multimap Z, \quad \ni \quad b(z) \neq \emptyset \qquad \forall\ z,$$

A una población envuelta en un conflicto y con una dinámica de aprendizaje la denotamos como (N, (K, $\{D_j\}$, φ), b).

Continuamos con las hipótesis de que estas dinámicas son propias de personas miopes, tienen miedo al cambio o éste tiene un alto costo (inercia) y se equivocan frecuentemente, lo que refleja la forma en que personas comunes y corrientes aprenden, lo único que se les exige es que las estrategias más aptas relativamente se fortalezcan frente a las que lo son menos.

Definición 4.2.3.

Una dinámica de aprendizaje es Darwiniana

si $z' \in b(z)$ y $z'^j_i > z^j_i$ implica $E_j(\underline{z} \mid \hat{\imath}) > E_j \underline{z})$ y

$$E_j(\underline{z} \mid i) \leq E_j(\underline{z}) \Rightarrow z \in b(z) \qquad \forall\ i$$

Definición 4.2.4.

Los patrones de conducta acostumbrados bajo la dinámica de aprendizaje b es la colección de subconjuntos $Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_r$ de Z, ajenos dos a dos y tales que

1- para toda $z \in Z$ que no está en ninguna Z_i, existe $\{z_1, z_2, \ldots\ldots z_q\}$ tal que $z_1 = z$, $z_q \in Z_m$, para laguna $m = 1, 2, \ldots, r$ y $z_{i+1} \in b(z_i)$ $\forall$ $i = 1, \ldots, q-1$.

2-si z está en Zj y z' no está en Zj no existe una sucesión $\{z_1, z_2, \ldots\ldots z_s\}$ tal que $z_1 = z$, $z_s = z'$ y $z_{i+1} \in b(z_i)$ $\forall$ $i = 1, \ldots, s-1$.

3-Si z y z' están en Zj, existe $\{z_1, z_2, \ldots\ldots z_g\}$ tal que $z_1 = z$, $z_g = z'$, y z_{i+1} está en $b(z_i)$ $\forall$ $i = 1, \ldots, g-1$.

Definición 4.2.5

z en Z es un **estado estacionario de b**, si es un punto fijo de b, es decir si $z \in b(z)$.

z en Z es un **estado absorbente de b**, si $\{z\}$ es uno de los patrones de conducta acostumbrados bajo b.

Proposición 4.2.6

Si b es una dinámica Darwiniana, las tres afirmaciones son equivalentes:

i) z es un estado estacionario de b,

ii) z es un estado absorbente de b,

iii) $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash.

Demostración

Como b es Darwiniana, si $z \in b(z)$, entonces para todo jugador j y para toda estrategia pura s_i de j, $E_j(\underline{z} \mid si)) \leq E_j(\underline{z})$, entonces $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash.

Por otro lado, si $\underline{z}$ es un equilibrio de Nash, para todo jugador j y para toda estrategia pura s_i de j, $Ej(\underline{z} \mid si)) \leq Ej(\underline{z})$, entonces, z está en b(z) , por lo que i) y iii) son equivalentes.

Por otro lado si z es absorbente, no existe z′ distinta de z tal que z′ está en b(z), por lo que z está en b(z). Por lo que ii) implica i).

Es claro que si $\underline{z}$ es equilibrio de Nash, entonces es absorbente, pues b(z) = z y iii) implica ii).

Q.D.

Ejemplo De Dinámicas Darwinianas.

Ejemplo 1.
Dinámica de Mejor Réplica

Sea $z' \in B(z)$, entonces

$$\begin{cases} \text{si } (z'^1, z'^2, \ldots, z'^k) \text{ es distinto de } z, \text{ para toda } j, \text{ existe una } \hat{\imath} \text{ mejor respuesta de} \\ j \text{ a } \underline{z}, \text{ tal que } z'^j_{\hat{\imath}} = n_j \text{ y } z'^j_i = 0 \text{ para } i \text{ distinta de } \hat{\imath} \\ \\ z' = z, \end{cases}$$

Ejemplo 2.

Dinámicas con Inercia Débil.

B´ tal que, en cada periodo, para toda j, una sola persona de N_j cambia de estrategia para "mejorar" y todas las demás permanecen con la misma estrategia.

Es decir, si z´está en B´(z), para toda j y z´ distinta que z,

$$z'^j_i \begin{cases} > z_{\hat{\imath}}^j, \text{ para una } \hat{\imath} \text{ mejor réplica de j a } \underline{z}, \\ < z_{\hat{\hat{\imath}}}^j, \text{ para una } \hat{\hat{\imath}} \text{ no mejor réplica estricta de j a } \underline{z} \\ = z_i^j, \text{ para i distinta de } \hat{\imath} \text{ y de } \hat{\hat{\imath}} \end{cases}$$

Ejemplo 3.

Dinámicas con Inercia Fuerte

Si z´ en B´´(z) y z´distinta de z, existe j tal que

$$z'^j_i \begin{cases} > z_{\hat{\imath}}^j, \text{ para una } \hat{\imath} \text{ mejor réplica estricta de j a } \underline{z}, \\ < z_{\hat{\hat{\imath}}}^j, \text{ para una } \hat{\hat{\imath}} \text{ no mejor réplica estricta de j a } \underline{z} \\ = z_i^j, \text{ para i distinta de } \hat{\imath} \text{ y de } \hat{\hat{\imath}} \end{cases}$$

y $z'^k = z^k$ para k distinta de j.

Proposición 4.2.7.

La dinámica B, B´y B´´ son Darwinianas.

Demostración.

Supongamos que $z' \in B(z)$ y z´ distinta de z, entonces existe j y una única $\hat{\hat{\imath}}$ tal que $n_j = z'^j_{\hat{\imath}} > z_{\hat{\imath}}^j$

$\hat{\imath}$ mejor réplica estricta de j a $\underline{z}$, por lo tanto $E_j(\underline{z} \mid \hat{\imath}) > E_j(\underline{z})$

De otra manera z´= z.

Por lo tanto B es una dinámica darwiniana

Las demostraciones para B´ y B´´ son análogas a la demostración para la dinámica de mejor réplica.

Q.E.D

De nuevo, será de gran utilidad la digráfica asociada a (N, (K,$\{D_j\}$, φ), b), que tomará la forma (V,A), con V = Z y A = { (x,y) ∈ Z x Z | y ∈ b(x) }.

Definición 4.2.8

Dada una digráfica (V, A), los subconjuntos de V, $C_1, C_2, \ldots, C_s$ son sus **Clases de Comunicación Recurrente** si:

1. La intersección entre C_i y C_j es igual a vacío si i es distinta de j.
2. Para toda x ∈ V, existe una trayectoria dirigida que une a x con algún vértice en C_j.
3. Si x ∈ C_j y y ∉ en C_j, no existe ninguna trayectoria dirigida que una a x con y.
4. Si x y y ∈ C_j existe una trayectoria que une a x con y.

Observación: Claramente las clases de comunicación recurrente de la digráfica asociada a (N, (K,$\{D_j\}$, φ), b) corresponden a los patrones de conducta acostumbrados bajo la dinámica de aprendizaje b.

Ejemplos:

Sea

- el juego (K, {Dj}, φ) representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} (3, 1) & (0, 2) \\ (1, 4) & (2, 0) \end{pmatrix}$$

- una población N con 7 miembros, 5 de los cuáles pertenecen a N_1 y 2 a N_2 y

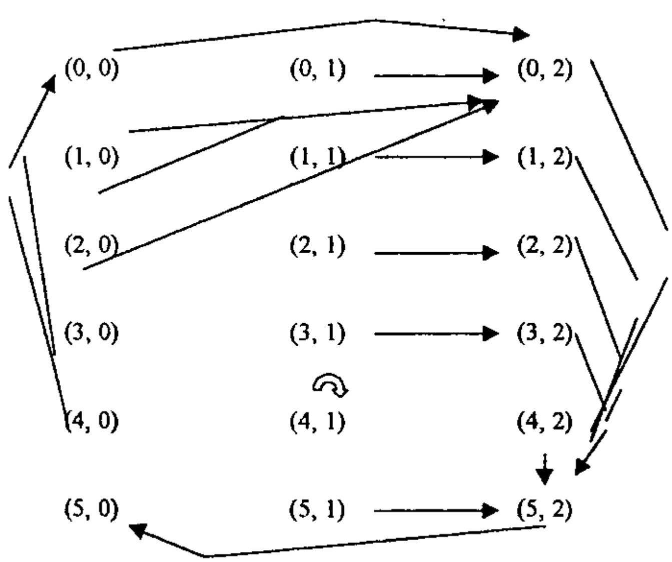
- la dinámica de aprendizaje de mejor réplica, es decir, si

$B(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$

$$z'_1 = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad z_2 > 1 \\ z_1 & \text{si} \quad z_2 = 1 \\ 0 & \text{si} \quad z_2 < 1 \end{cases}$$

$$z'_2 = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad z_1 < 4 \\ z_2 & \text{si} \quad z_1 = 4 \\ 0 & \text{si} \quad z_1 > 4 \end{cases}$$

La digráfica asociada es como sigue



El único punto fijo de B es (4, 1), representa al único equilibrio de Nash del juego ((4/5, 1/5), (1/2, 1/2)). Es una de las clases de comunicación recurrente, la otra es el ciclo {(5, 2), (5, 0), (0, 0), (0, 2), (5,2)}. Por el momento aunque no podemos discriminar entre ellas, observamos que el equilibrio de Nash es débil, pues no hay un solo nodo distinto, desde el que se llegue a nuestro equilibrio. Harsanyi hubiera eliminado este equilibrio, pues no es beneficioso, ya que determina el vector de pagos (3/2, 8/5) que es el de los máximos asegurables de los jugadores. La solución de Harsanyi señalaría a la pareja de estrategias conservadoras que es ((1/4, 3/4), (2/5, 3/5))

Estudiemos el mismo ejemplo con una dinámica de lento aprendizaje, por ejemplo, la de mejor réplica, con inercia débil.

Entonces para z'1 distinto de 0 y de 5 y para z'2 distinto de 0 y de 2,

$$z'1 = \begin{cases} z_1 + 1 & \text{si} \quad z_2 > 1 \\ z_1 & \text{si} \quad z_2 = 1 \\ z_1 - 1 & \text{si} \quad z_2 < 1 \end{cases}$$

y

$$z'2 = \begin{cases} z_2 + 1 & \text{si} \quad z_1 < 4 \\ z_2 & \text{si} \quad z_1 = 4 \\ z_2 - 1 & \text{si} \quad z_1 > 4 \end{cases}$$

para $z'_1 = N_1$

$$z'1 = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad z_2 \geq 1 \\ 4 & \text{si} \quad z_2 < 1 \end{cases}$$

para $z'_1 = 0$

$$z'1 = \begin{cases} 0 + 1 & \text{si} \quad z_2 > 1 \\ 0 & \text{si} \quad z2 \leq 1 \end{cases}$$

para $z'_2 = N_2$

$$z'_2 = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad z_1 \leq 4 \\ 1 & \text{si} \quad z_1 > 4 \end{cases}$$

para $z'_2 = 0$

$$z'2 = \begin{cases} 0 + 1 & \text{si} \quad z_1 < 4 \\ 0 & \text{si} \quad z_1 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
(0, 0) \arrow[r] & (0, 1) \arrow[r] & (0, 2) \arrow[d] \\
(1, 0) \arrow[ur] & (1, 1) \arrow[r] & (1, 2) \arrow[d] \\
(2, 0) \arrow[ur] & (2, 1) \arrow[r] & (2, 2) \arrow[d] \\
(3, 0) \arrow[ur] & (3, 1) \arrow[r] & (3, 2) \arrow[d] \\
(4, 0) \arrow[u] & (4, 1) \arrow[loop left] & (4, 2) \arrow[d] \\
(5, 0) \arrow[u] & (5, 1) \arrow[l] & (5, 2) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Las clases de comunicación recurrente son {(4,1)} y el ciclo {(5, 2), (5, 1), (5, 0), (4, 0), (3, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)} que es un cerco más estrecho en torno de (4, 1), pero este sigue siendo un nodo aislado.

Empleamos, por último, una dinámica de aún más lento aprendizaje, la de mejor réplica con inercia fuerte, en la que nada más una persona se pueda mover y no dos al mismo tiempo, como en la anterior. La digráfica resultante es

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[r] & (0,2) \arrow[d] \\
(1,0) \arrow[u] \arrow[r] & (1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[d] \\
(2,0) \arrow[u] \arrow[r] & (2,1) \arrow[r] & (2,2) \arrow[d] \\
(3,0) \arrow[u] \arrow[r] & (3,1) \arrow[r] \arrow[d, bend left] & (3,2) \arrow[d] \\
(4,0) \arrow[u] \arrow[r] & (4,1) & (4,2) \arrow[l] \arrow[d] \\
(5,0) \arrow[u] & (5,1) \arrow[l] & (5,2) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Esta dinámica tiene como única clase de comunicación recurrente la que contiene a nuestro equilibrio $\{(4,1)\}$.

Pasemos, ahora al estudio de cómo se comporta el proceso general con las perturbaciones que causan los errores de la gente.

4.3 Mutaciones, El Proceso Con Perturbación.

Como vimos en la sección anterior, cuando ya se tiene una dinámica de aprendizaje el proceso determina las clases de recurrencia o patrones de conducta, pero no podemos discriminar entre ellas. Para resolver esta indeterminación y sacar a flote, de entre ellas, a las más fuertes, introducimos la hipótesis de que los miembros de la población se equivocan con cierta probabilidad, lo que introduce perturbaciones en nuestro sistema.

Para trabajar en forma más cómoda las perturbaciones, le damos forma de matriz a nuestro proceso de aprendizaje, como en el capítulo anterior.

Dado $(N,(K, \{D_j\}, \varphi), b)$ un proceso de aprendizaje bajo la dinámica b, construimos una matriz de probabilidad P^0 cuadrada de orden # Z, definida así

$$P_{zz'}^{0} = \begin{cases} 1/\#b(z) & \text{si} \quad z' \in b(z) \\ 0 & \text{si} \quad z' \notin b(z) \end{cases}$$

P^0 es una matriz markoviana (sus elementos son no negativos y suman uno por renglones) de un proceso fijo con respecto al tiempo. Nos referimos a P^0 como el proceso sin perturbación o sin ruido. Cuando un renglón no es un vector canónico, sino que tiene varios términos positivos, estos son iguales, lo que significa que desde un estado o nodo hay la misma probabilidad de pasar a cualquiera de los siguientes.

Ahora consideramos que cada miembro de N puede equivocarse respecto a lo que marca la dinámica b. Se modela este ruido como lo hizo Young, a través de una $\varepsilon \in [0, a)$, $a \in R$. ε representa la probabilidad de que cada miembro de N se desvíe de las estrategias aprendidas, entonces, con probabilidad $1 - \varepsilon$ no se equivocan. Las probabilidades de equivocarse son independientes de persona a persona y de periodo a periodo.

Llamaremos a $(N, (K, \{D_j\}, \varphi), b, \varepsilon)$ un proceso de aprendizaje perturbado. A este proceso le asociamos una matriz de Markov $P(\varepsilon)$ cuadrada de orden # Z, es decir, $p_{ij}(\varepsilon) \geq 0$ para toda i y para toda j, y $\Sigma_j\ p_{ij}(\varepsilon) = 1$ para toda i. $p(\varepsilon)_{ij}$ es la probabilidad de que partiendo del estado i, el proceso pase al estado j después de aplicada la dinámica b y la perturbación ε.

Vamos a interpretar a $P(\varepsilon)$ como una nueva dinámica en donde el conjunto de estados será el conjunto de distribuciones de probabilidades en Z, al que denotaremos por Q, es decir

$$Q = \{q \in R^{\#Z} \mid qi \geq 0\ ,\ \Sigma q_i = 1\}$$

La nueva dinámica a la que llamaremos dinámica perturbada es:

$$P(\varepsilon): Q \rightarrow Q$$

Definida como

$$P(\varepsilon)(q_t) = (q_t)P(\varepsilon) = q_{t+1}$$

Trabajaremos con sistemas de perturbaciones regulares, como las de la definición 3.3.8, es decir, $\{P(\varepsilon)\}$ tales que para toda ε y cada pareja z, z' $\in$ Z, existe una sucesión de estados $\{z_1\ z_2, \ldots.. z_r\}$ con $z_1 = z$, $z_r = z'$ y $P_{z_i z_{i+1}}(\varepsilon) > 0$, además $P(\varepsilon)$ no provoca ciclos y si ε es muy pequeño $P(\varepsilon)$ se parece mucho a P^0. Por último si para z y z' hay una probabilidad positiva bajo alguna $P(\varepsilon)$ de pasar de z a z' podremos hablar de una resistencia finita entre estos dos estados. Ya que el límite de $\varepsilon^{-r(z, z')} P(\varepsilon)_{zz'}$ cuando ε tiende a cero, existe y es positivo, podemos entender a r(z, z') como dicha resistencia.

Proposición 4.3.1

$$r(z, z') = \Sigma_{(j=1,k)}\ \Sigma_{(i=1,lj)} \min_{(x \in b(z))} \mid x_i^j - z'^j_i \mid$$

La demostración es análoga a la de la proposición que expusimos en el capítulo 3.3.4

El siguiente paso es estudiar los nuevos esquemas de comportamiento bajo $P(\varepsilon)$ para buscar algún estado especial dentro de Q por ejemplo, un punto fijo de $P(\varepsilon)$

Definición 4.3.2

Para $\varepsilon \in [0, a]$, decimos que $\mu(\varepsilon)$ es una distribución estacionaria de $P(\varepsilon)$, si

$$\mu(\varepsilon)P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon).$$

Es decir, un elemento de Q es una distribución estacionaria si es un punto fijo de $P(\varepsilon)$.

Como $P(\varepsilon)$ es no negativa, para ε en $[0, a]$ y sus renglones suman uno, los resultados de Perron – Frobenius [ ] garantizan que exista al menos una de estas distribuciones, si además ε no es cero, $P(\varepsilon)$ es irreducible y primitiva $\mu(\varepsilon)$ es única, para cada ε y se tiene la propiedad de estabilidad. Expresamos en el siguiente teorema dichas propiedades.

Teorema 4.3.3

Existe al menos una distribución estacionarias de P^0.

Para cada $\varepsilon \in (0, a]$, existe $\mu(\varepsilon) \in Q$ única tal que

$$\mu(\varepsilon)P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)$$

además si $q \in Q$ entonces

$$\lim_{\alpha \to \infty} q(P(\varepsilon))^\alpha = \mu(\varepsilon)$$

Observaciones:

- Las distribuciones estacionarias de P^0 corresponden a los esquemas de comportamiento acostumbrados o clases de comunicación recurrente.
- Gracias a que la gente se equivoca, obtenemos un solo esquema de comportamiento especial $\mu(\varepsilon)$ tal que partiendo, desde cualquier otro estado q, la dinámica perturbada nos lleva a $\mu(\varepsilon)$.

Nuestra preocupación ahora es estudiar el comportamiento de la dinámica de aprendizaje, cuando la probabilidad de equivocarse tiende a cero. Especialmente si existe el límite de $\{\mu(\varepsilon)\}$ cuando $\varepsilon \to 0$, y si es así, estudiar la relación que tiene dicho límite con las clases de comunicación o esquemas de comportamiento relacionadas con b.

Para resolver ese problema nos servirá el tratamiento de digráficas con perturbaciones.

Definición 4.3.4

Dado $(N,(K, \{D_j\}, \varphi), b, \varepsilon)$ un proceso de aprendizaje perturbado, la digráfica asociada a este proceso perturbado es $(\underline{V}, \underline{A})$ con $\underline{V} = Z$ y $\underline{A} = \{(z, z') \in Z \times Z \mid P_{zz'}(\varepsilon) > 0\}$ y la función resistencia es $r : \underline{A} \to \{0, 1, \ldots\ldots, \#N\}$ definida como

$$r(z, z') = \Sigma_{(j=1,k)}\, \Sigma_{(i=1,lj)} \min_{(x \in b(z))} \mid x_i^j - z'^j_i \mid$$

Observaciones:

- (V, A) es una subdigráfica de $(\underline{V}, \underline{A})$.
- La resistencia definida en 4.3.4 de pasar de z a z´, r(z, z´) cuenta el mínimo de personas que tienen que equivocarse para pasar de z a z´ y es igual a la resistencia que aparece en el proceso perturbado regularmente, cuando la probabilidad de pasar de z a z´, después de la perturbación es positiva.

Dada la digráfica perturbada y la resistencia para cada flecha (z, z') el siguiente paso es identificar los estados que ofrecen la menor resistencia total para llegar a ellos.

Si tenemos una trayectoria $\{z_1, \ldots\ldots, z_s\}$, su costo es:

$$\Sigma_{(i = 1, s-1)}\, r(z_i, z_{i+1})$$

Dados z y z' existe al menos una trayectoria que une a z con z', pues P(ε) es irreducible, es decir ($\underline{V}$, $\underline{A}$) es conexa. Definimos el costo de pasar de z a z' (c(z, z')) como el mínimo de los costos de todas las trayectorias que unen a z con z'.

Como en el capítulo 3, mediremos el costo total para llegar a un estado z considerando los z – árboles, definidos en 3.3.5 y buscaremos los de mínimo costo.

Denotamos como Hz al conjunto de todos los z – árboles

Como en 3, el costo de h, un z – árbol, es $c(h) = \Sigma_{(z, z') \in h}\ r(z, z')$.......................(1)

Y el potencial de $z \in Z$, v_z , es $\min_{h \in Hz} c(h)$.

El potencial de un estado va a ser la resistencia total que usaremos, para llegar a él, entonces queremos encontrar los estados que tienen el mínimo potencial. Demostraremos que los estados de mínimo potencial pertenecen a alguna de las clases de comunicación recurrente y luego estudiaremos su relación con el límite de μ^*.

Proposición 4.3.5.

Sean z y z' en C, una clase de comunicación recurrente de (V,A) y x un estado de Z cualquiera, entonces el costo de pasar de x a z es igual al costo de pasar de x a z' y el costo de pasar de z a x es igual que el costo de pasar de z' a x.

Demostración.

Tomemos una trayectoria de costo mínimo que une a x con z y unámosle una de las trayectorias de costo cero que une a z con z'. Obtenemos una trayectoria que une a x con z' cuyo costo es $c(x, z)$, por lo tanto $c(x, z') \leq c(x, z)$.

Análogamente se demuestra que $c(x, z) \leq c(x, z')$, es decir $c(x, z') = c(x, z)$.

Por otro lado, sea una trayectoria de costo mínimo que une a una z con x, construyamos otra trayectoria uniéndole una de costo cero que una a z' con z. La nueva trayectoria tiene costo $c(x, z)$, por lo tanto $c(z', x) \leq c(z, x)$, y en forma análoga $c(z, x) \leq c(z', x)$, por lo tanto son iguales.

Q.E.D

Proposición 4.3.6.

Sea z un estado de una clase de comunicación recurrente C, z' en la cuenca de C y x un estado cualquiera de Z, entonces el costo de pasar de x a z es menor o igual que el costo de pasar de x a z'.

Demostración

Se considera una trayectoria de costo mínimo que une a x con z' y se le une una trayectoria de costo cero que una a z' con z, esta nueva trayectoria une a x con z y tiene costo $c(x, z)$, por lo tanto $c(x, z') \leq c(x, z)$.

Q.E.D

Corolario 4.3.7

Si $z \in Z$ tiene mínimo potencial, entonces z está en alguna clase de comunicación recurrente de (V, A).

De nuevo, estamos en el contexto del teorema caso particular del teorema de Wentzell – Friedlin, es decir, P^0 es una cadena de Markov estacionaria definida en un espacio finito de estados Z , $\{P(\varepsilon)\}_{\varepsilon \text{ en } (0, a]}$ es una perturbación regular de P^0 y $\mu(\varepsilon)$ es la única distribución estacionaria de $P(\varepsilon)$, para cada ε positivo, entonces se cumple:

Teorema 4.3.8.

El límite de $\mu(\varepsilon)$, cuando ε tiende a cero existe y si $\mu^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon)$, entonces, $\mu_z^* > 0$ si y solo si z es de mínimo potencial.

A μ^* le llamamos la distribución límite y a los estados correspondientes a las coordenadas positivas de μ^* les llamaremos los estados de equilibrio a largo plazo y forman el conjunto de soluciones del proceso de aprendizaje. Hemos demostrado que los estados de equilibrios a largo plazo, pertenecen a alguna clase de comunicación recurrente y, por lo tanto μ^* es una distribución estacionaria de P^0.

En la siguiente sección aprenderemos como localizar a la o las clases de comunicación recurrente que contienen a los estados de equilibrio a largo plazo.

4.4. La Digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente.

Consideramos la digráfica asociada al proceso de aprendizaje perturbado (N,(K, $\{D_j\}$, φ), b, ε), podemos definir dentro de ésta digráfica el costo de pasar de una clase de comunicación recurrente C a otra C′ denotado como R(C, C′).

Sean z y z′ dos estados distintos, denotaremos como T(z, z′) al conjunto de las trayectorias que unen a z con z′.

Sean z en C y z'en C', definimos R(C, C') como $\min_{h \in T(z,z')} c(h)$. Este costo está bien definido, pues no depende de los estados z y z' escogidos, lo que se puede demostrar usando la proposición 4.3.5

Definición 4.4.1.

Dado (N,(K, $\{D_j\}$, φ), b, ε), la digráfica de las clases de comunicación recurrente de (N,(K, $\{D_j\}$, φ), b) es (V, A) tal que $V = \{C_1, C_2, ...C_r\}$ donde $C_1, C_2, ..., C_r$ son las clases de comunicación recurrente, $A = V \times V$ y $R: A \rightarrow \{0, 1, ..., \# N\}$, $R(C_i, C_j)$ es el costo de pasar de C_i a C_j

En esta digráfica con una función de costo, podemos tener el mismo tratamiento que con la digráfica asociada a un proceso de aprendizaje perturbado. Podemos considerar Cj – árboles, costo de un Cj – árbol y potencial de C_j .

Denotemos como H_{Cj} al conjunto de todos los C_j – árboles. El potencial de $C_j \in$ (V, A) es

$$v_{Cj} = \min_{h \in HCj} c(h).$$

Con la introducción de la digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente podemos unificar el corolario 4.3.7 y una de las afirmaciones de 4.3.8 y obtener el siguiente corolario:

Corolario 4.4.2.

$\mu_Z^* > 0$ si y sólo si z está en una clase de comunicación recurrente de potencial mínimo.

Observación: La proposición 3.3.12 se puede generalizar para todo tipo de juegos, su demostración está hecha para tener validez general. Recordemos que esta proposición nos dice como calcular el costo de pasar desde z hasta cualquier z′ que no pertenezca a la cuenca de z, que es el caso entre dos vértices cualesquiera de dos clases de comunicación recurrente. Entonces el costo, entre dos clases de comunicación C y C′, se calcula, como se prueba en 3.3.12, encontrando el "salto" de mínimo costo, desde un nodo de C hasta un nodo en la cuenca de C′.

Ejemplos:

La misma matriz

$$\begin{pmatrix} (3, 1) & (0, 2) \\ (1, 4) & (2, 0) \end{pmatrix}$$

con una población N de 7 miembros, 5 de los cuáles pertenecen a N_1 y 2 a N_2

Con la dinámica aprendizaje de mejor réplica obtuvimos dos clases de comunicación recurrente: $C_2 = \{ (0, 0), (0, 2), (5, 0), (5, 2)\}$ y $C_1 = \{(4, 1)\}$.

Busquemos la clase de comunicación recurrente de mínimo potencial para la solución del conflicto.

$C_2 \longrightarrow C_1$ $\qquad$ $C_1 \longrightarrow C_2$

$v_z =$ min = 1 $\qquad$ v_z = min = 2

Sólo hay un C-árbol para cada clase, el de menor costo es el C_2 – árbol, pues tiene costo es 1, mientras que el costo del (4, 1) – árbol es 2, es más fácil entrar al circuito (C_2) que salir de él. Para esta dinámica, la clase de mínimo potencial es el ciclo C_2 y los equilibrios a largo plazo son los estados que pertenecen a dicho ciclo, la distribución límite le da la misma probabilidad a cada uno de ellos

Pensemos en la dinámica de mejor réplica con inercia débil, para el mismo ejemplo. Las clases de comunicación recurrente son de nuevo $C_1=\{(4,1)\}$ y el C'_2, el ciclo

$\{(5, 2), (5, 1), (5, 0), (4, 0), (3, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

El C-árbol de mínimo es el de C'_2. Es decir la clase de potencial mínimo es C'_2 y sus estados son los equilibrios de largo plazo, la distribución límite le da la misma probabilidad a cada uno de ellos

En la digráfica correspondiente a la dinámica de mejor réplica con inercia fuerte, del mismo juego y la misma población que los anteriores, la única clase de comunicación recurrente es C_1, que es por tanto la de mínimo potencial y (4, 1) es el único equilibrio a largo plazo, la distribución límite le da probabilidad uno a este equilibrio.

Considérese ahora el juego

$$\begin{pmatrix} (-1, -4) & (2, -2) \\ (0, 1) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

$\#N_1 = 6$

$\#N_2 = 3$

Y

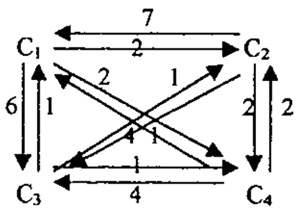
$B(z_1, z_2) = (z_1', z_2')$, definida como

$$z_1' = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad z_2 < 2 \\ z_1 & \text{si} \quad z_2 = 2 \\ 0 & \text{si} \quad z_2 > 2 \end{cases}$$

y

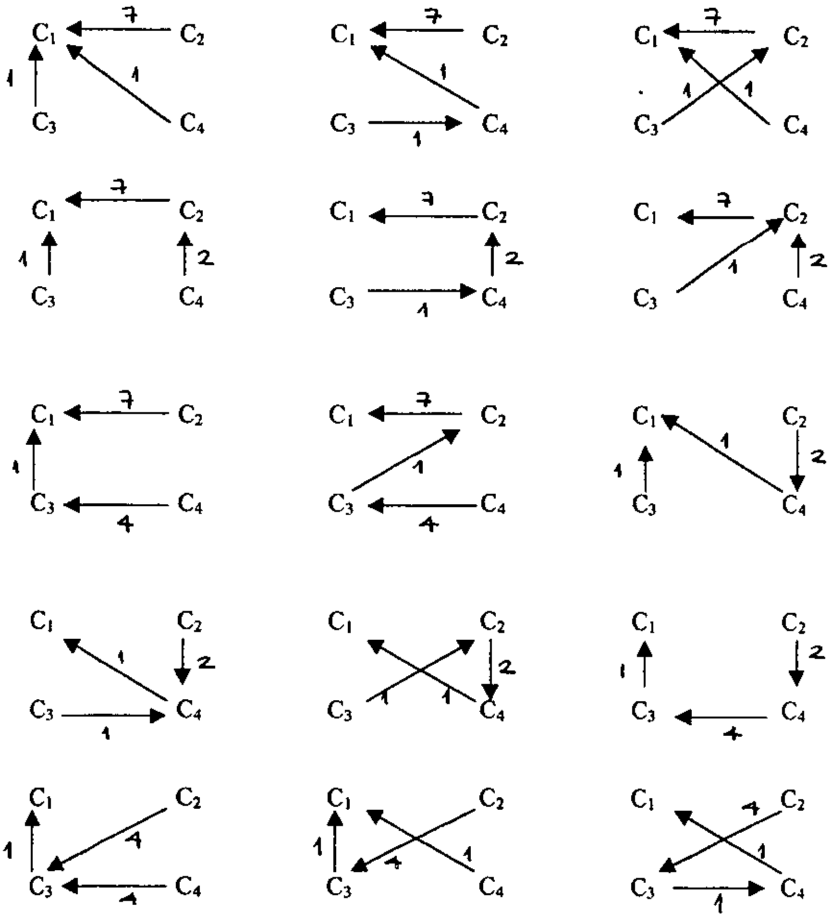
$$z_2' = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad z_1 < 2 \\ z_2 & \text{si} \quad z_1 = 2 \\ 0 & \text{si} \quad z_1 > 2 \end{cases}$$

las clases de recurrencia que obtenemos son $C_1 = \{(6, 0)\}$, $C_2 = \{(0, 3)\}$, $C_3 = \{(2,2)\}$ y el ciclo $C_4 = \{(0,0), (6, 3)\}$



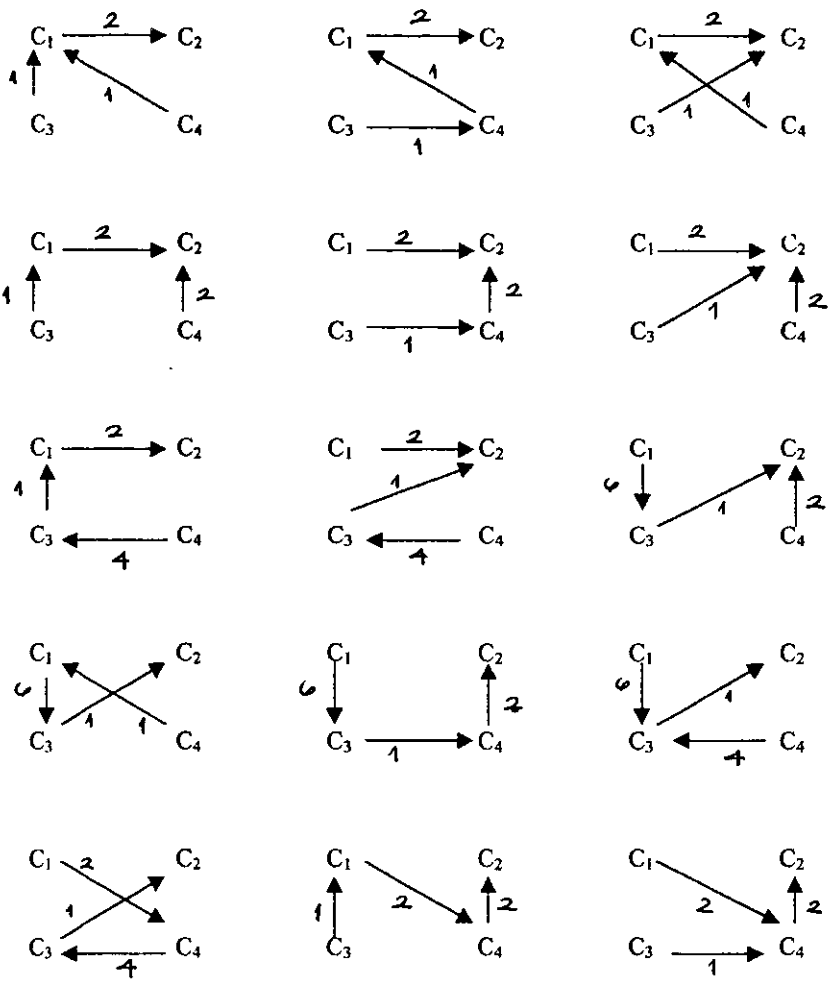
veamos cual es el C-árbol de menor costo

C_1 – árboles



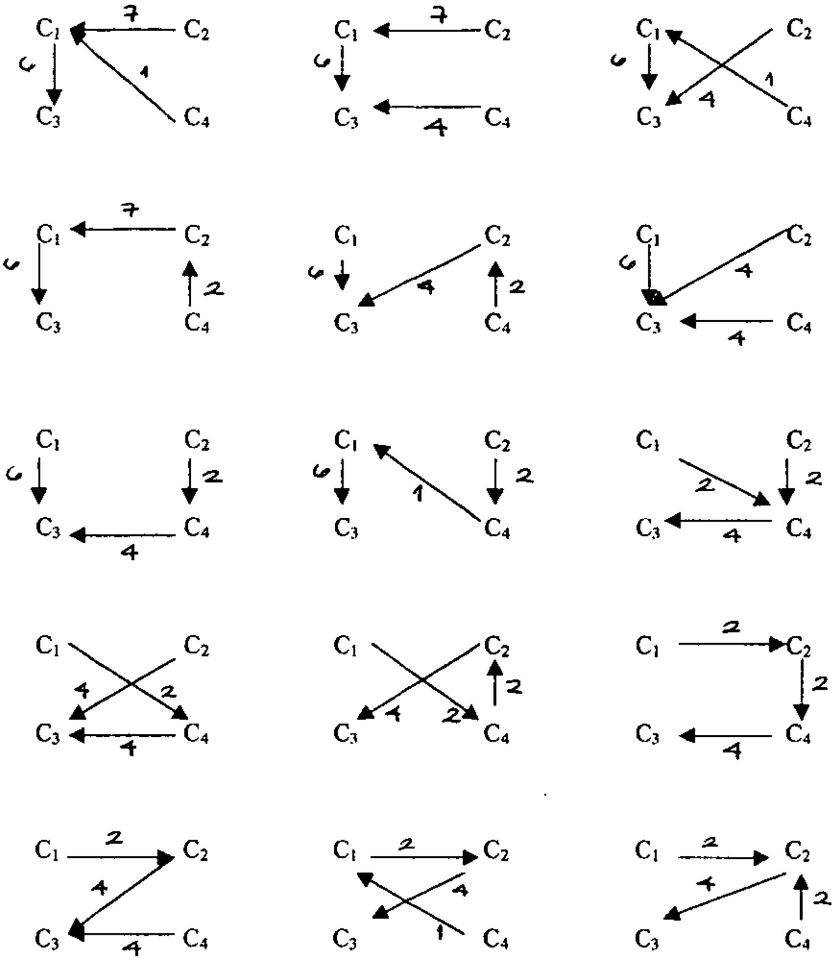
$V_{C1} = 4$

C_2 – árboles



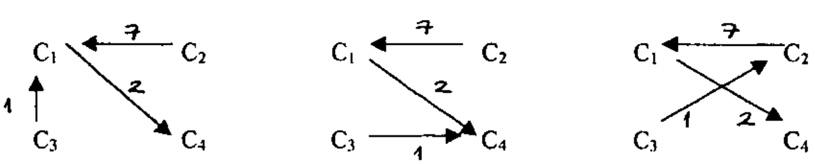
$V_{C2} = 5$

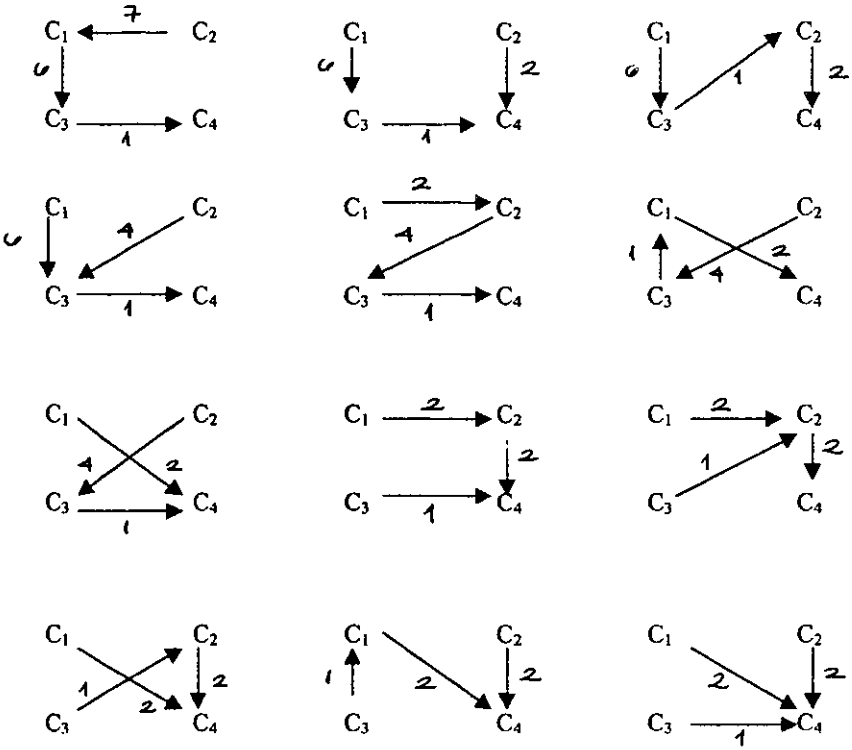
C_3 – árboles



$V_{C3} = 8$

C_4 – árbol





$V_{C4} = 5$

La clase de mínimo potencial es $C_1 = \{(6, 0)\}$, y el único equilibrio a largo plazo es (6, 0) que corresponde al equilibrio de Nash ((1, 0), (0,1)).

Ahora veamos el mismo ejemplo con la dinámica de mejor réplica en la que solo una persona de cualquier grupo se mueva a la vez, tenemos

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[r] & (0,3) \arrow[loop right] \\
(1,0) \arrow[r] \arrow[d] & (1,1) \arrow[r] \arrow[d] & (1,2) \arrow[r] & (1,3) \arrow[u] \\
(2,0) \arrow[d] & (2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[loop below] & (2,3) \arrow[u] \\
(3\ 0) \arrow[r] \arrow[d] & (3,1) \arrow[r] \arrow[d] & (3,2) \arrow[r] & (3,3) \arrow[u] \\
(4,0) \arrow[r] \arrow[d] & (4,1) \arrow[r] \arrow[d] & (4,2) \arrow[r] & (4,3) \arrow[u] \\
(5,0) \arrow[r] \arrow[d] & (5,1) \arrow[r] \arrow[d] & (5,2) \arrow[r] & (5,3) \arrow[u] \\
(6,0) \arrow[loop left] & (6,1) \arrow[l] & (6,2) \arrow[l] & (6,3) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Las clases de recurrencia de esta digráfica son $C_1 = \{(6, 0)\}$, $C_2 = \{(0, 3)\}$ y $C_3 = \{(2, 2)\}$, las cuales tiene los potenciales $v_{C1} = 3$, $v_{C2} = 3$ y $v_{C3} = 5$. Por lo que tiene min $V_{Ci} = 3$, esto indica que tenemos dos Clases con potencial mínimo, entonces los equilibrios a largo plazo serían: (6, 0) y (0, 3), la distribución límite pondría probabilidad un medio a cada uno.

Veamos, por último el juego simétrico 2 x 2,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

con una población N, con 12 miembros y en B, la dinámica de mejor réplica. Podríamos dividir a la población en personas renglón y personas columna, pero la técnica de las digráficas de las clases de comunicación recurrente es válida para el contexto del capítulo 3 y respetaremos ese contexto.

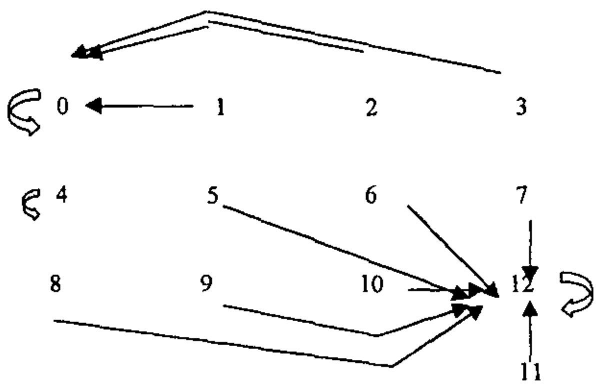
Entonces V, el conjunto de nodos, es {0, 1, …, 12}

La dinámica de mejor réplica toma la forma:

$$B(z) = \begin{cases} 12 & \text{si } z > 4 \\ z & \text{si } z = 4 \\ 0 & \text{si } z < 4 \end{cases}$$

$A = \{(x, y) \in Z \times Z \mid b(x) = y\}$

La digráfica del proceso de aprendizaje sin perturbar es



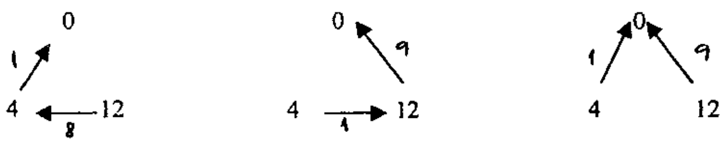
Las clases de recurrencia son {0}, {4}, {12}

La digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente .

$\underline{V}$={{0}, {4}, {12}} y $\underline{A}$ =$\underline{V}$ x $\underline{V}$.

$C_{40} = C_{43} = 1$, $C_{412} = C_{45} = 1$, $C_{04} = 4$, $C_{012} = C_{05} = 7$, $C_{120} = C_{123} = 9$, $C_{124} = 8$.

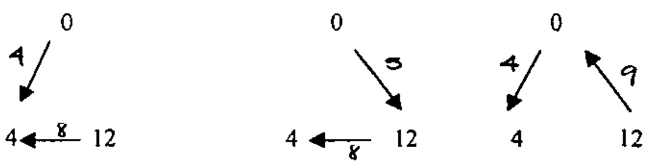
Los 0- árboles son:



$\Sigma\, C_{ij} = 9$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 10$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 10.$

$v_0 = \min_{h \in Hz} \Sigma\, C_{ij} = 9$

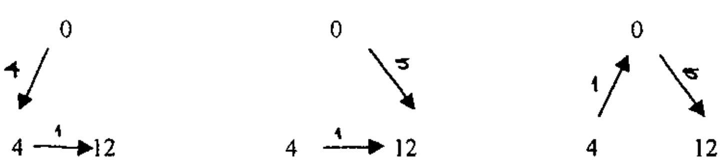
Los 4-árboles:



$\Sigma\, C_{ij} = 12$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 13$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 13$

$v_4 = \min_{h \in Hz} \Sigma\, C_{ij} = 12$

Los 12-árboles:



$\Sigma\, C_{ij} = 5$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 6$ $\qquad$ $\Sigma\, C_{ij} = 6$

$v_{12} = \min_{h \in Hz} \Sigma\, C_{ij} = 5$

Por lo tanto $\min_z v_z = v_{12}$

Esto implica que la clase de comunicación recurrente de potencial mínimo es {12}, es decir el equilibrio a largo plazo es que todos escogen la estrategia s_1. Esto corresponde a (s_1, s_1) el equilibrio de Nash que es dominante de Pareto y es la solución de Harsanyi para este juego.

4.5 Comparación de los Resultados Obtenidos con los Dos Enfoques en el Contexto General

Para los dos enfoques expuestos en esta tesis, la diferencia entre los dos conceptos puede ser resumida así: el proceso de riesgo dominancia selecciona el equilibrio más fácil de flotar por cada otro equilibrio considerado en aislamiento (asumiendo que dicho equilibrio existe), el proceso de la distribución límite selecciona el equilibrio más fácil de flotar dentro de todos los demás estados combinados, incluyendo ambos equilibrio y estados de no equilibrio.

El segundo enfoque es mas realista puesto que no pide a los jugadores que sean sabios o expertos en cuanto a lo que sucede a su entorno y modela las reacciones normales que tendría un jugador en la vida real. En ambos procesos la base para que exista un equilibrio optimo para todos los jugadores es la coordinación, en tales casos los dos enfoques coinciden en que el equilibrio perdurable es el de riesgo dominancia. El mismo equilibrio de riesgo dominancia es la solución para juegos en donde hay un jugador que domina como lo es la guerra de los sexos o el problema entre una pipa y un coche compacto para ganar el paso en una calle estrecha, como el nombre lo indica, domina la pipa y arriesga mas el coche compacto.

Hablando especificamente del tercer capítulo vemos como el teorema de Wentzell y Friedlin es la base de todo el proceso estocástico para obtener el equilibrio a largo plazo, reduce todo el problema estocástico a una sencilla solución de redes, y esta misma base se aplica a juegos en general.

Cuando el juego tiene dos equilibrios de Nash simétricos estrictos, el limite de la distribución pone probabilidad uno en el equilibrio que satisface el criterio de riesgo dominancia de Harsanyi y Selten para poblaciones grandes. Pero si ambas estrategias tienen los **mismos niveles de seguridad** el limite de la distribución pone probabilidad uno en el equilibrio de Pareto aunque haya otro equilibrio de Nash estricto. Este resultado requiere solamente de la Condición Débil de Monotonía y por eso es independiente de la especificación precisa de la dinámica Darwiniana (cuando el comportamiento individual es perturbado por choques independientes).

Hablando de un juego simétrico 2 x 2 con dos equilibrios en estrategias puras que a Kandori et al, no les interesan porque solo consideran los equilibrios simétricos Harsanyi elimina el equilibrio en estrategias mixtas estrictas, pues en dicho equilibrio, los jugadores ganan el máximo asegurable en un juego simétrico suponiendo que b y c son mayores que el máximo asegurable de los jugadores. Entonces, estudiaria los otros dos equilibrios, para conocer sus relaciones de dominio y la solución sería el equilibrio en estrategias puras que domine por riesgo. Si no hay dominancia por riesgo, la solución sería el conjunto de los dos equilibrios.

Por otro lado supongamos que en un juego simétrico 2 x 2 la estrategia s_i es dominante, la coordenada 1 del vector μ^* corresponde al estado n, si la estrategia dominante es s_1 y al estado 0, si es s_2. Comparando con lo estudiado por Harsanyi supongamos que la estrategia dominante es s_1, tenemos a < b, entonces el juego tiene punto silla en (s_1, s_1) que es el único equilibrio de Nash, los jugadores obtienen como pago su máximo asegurable que es a y la solución de Harsanyi es jugar con estrategias conservadoras. Pero s_1 es conservadora para los dos jugadores, entonces la solución de Harsanyi es el único equilibrio de Nash del juego. Si b < a, entonces el máximo asegurable de los dos jugadores es b y en el único equilibrio de Nash, (s_1, s_1), ambos obtienen un pago mayor que su máximo asegurable. La solución de Harsanyi es el único equilibrio de Nash del juego que es el mismo que se obtiene con las dinámicas de aprendizaje Darwinianas.

CONCLUSIÓN.

Los Juegos Cooperativos, como decíamos, al principio buscan los acuerdos que resulten más adecuados, para todos los jugadores y como estos resultan obligatorios a priori, pues esta será la solución. Desde el punto de vista de su realización en la vida, tendría que existir una fuerza externa a los jugadores que los obligara a cumplir el acuerdo solución. Desde un punta de vista de la teoría no aparece explícitamente la fuerza que obliga a cumplir los acuerdos, el papel de esta fuerza lo cumplen los axiomas que debe cumplir la solución y para apegarse a ellos los jugadores deben cumplir muy fuertes supuestos de racionalidad. Los juegos cooperativos tienen un papel normativo y se ocupan, más bien de lo que **debe ocurrir**, no tanto de lo que ocurre.

Los Juegos No Cooperativos, en cambio son un instrumento para estudiar las leyes que rigen los conflictos reales que ocurren entre gente con racionalidad muy limitada y problemas para informarse hacer cálculos, etc. Sin embargo el camino para que esta teoría vaya logrando esta meta ha sido larga. El equilibrio de Nash (concepto de solución en los juegos no cooperativos) requería de muchos supuestos de conocimiento común y de confianza de cada jugador sobre como actuarán los demás para fundamentarlo. En cuanto al problema de la selección de equilibrios, en el sentido de cuál de ellos es la situación esperada en un conflicto, las cosas eran peores para los supuestos de racionalidad requeridos, como se puede apreciar en el trabajo pionero de Harsanyi.

Por el contrario, en el segundo enfoque que expusimos, el de Kandori Mailath y Rob los supuestos corresponden a actitudes humanas cotidianas y los jugadores no necesitan aprendérselos o conocerlos. Este enfoque es mas realista puesto que no pide a los jugadores que sean sabios o expertos en cuanto a lo que sucede a su entorno y modela las reacciones normales que tendría un jugador en la vida real, pero su dificultad seria que las redes (z- árboles) que describe el proceso para la selección de equilibrios puede llegar a ser obsoleto si el número de jugadores es muy grande. Es el enfoque de los llamados juegos evolutivos que han seguido, no sólo nuestros tres autores, sino muchos otros como Young, Binmore, Canning, Friedman, etc. Con este enfoque se construye un enfoque realista para discutir lo que ocurre en cualquier conflicto que se repite en grupos de personas reales.

Algunos autores que trabajan en juegos evolutivos se basan en contextos distintos al del teorema de Wentzell y Freidlin. El enfoque de Kandori, Mailath y Rob que también utiliza Young es muy llamativo pues transforma problemas muy complicados de procesos estocásticos en problemas relativamente sencilla de redes.

6. BIBLIOGRAFÍA.

Kandori Michihiro, Mailath George, and Rob Rafael.
LEARNING, MUTATION, AND LONG RUN EQUILIBRIA IN GAMES
Econometrica. Vol. 61. No. 1
1993

Harsanyi John C.
A GENERAL SOLUTION FOR NON – COOPERATIVE GAMES,
BASED ON RISK DOMINANCE.
1968

Harsanyi John C. and Selten Reinhard.
A GENERAL THEORY OF EQUILIBRIUM SELECTION IN GAMES.
The MIT Press,
Cambridge, Massachusetts.
London England.
1988.

Moulin Hervé.
GAME THEORY FOR THE SOCIAL SCIENCIES,
SECOND AND REVISED EDITION.
New York university Press.
Washington Square, New York.
1986.

Toscano G. .Didier Antonio
MODELOS DINAMICOS PARA EL CAMBIO ESTRUCTURAL DE LA ECONOMIA Y LA POLITICA.
Tesis
1998.

Young Peyton.
THE EVOLUTION OF CONVENTIONS
Econométrica Vol. 61 No. 1
1993.

Zapata Paloma
NOTAS
Elaboración e impresión en proceso.