UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ESTRUCTURAS CONFORMES Y DE MÖBIUS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

L U I S J O S E Y U D I C O A N A Y A

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ANTONIO SEADE KURI

M. en C. MANUEL CRUZ LOPEZ

IVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Estructuras Conformes y de Möbius en Variedades Riemannianas"

realizado por Luis José Yúdico Anaya

con número de cuenta 9450272-9 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. José Antonio Seade Kuri	
Co-Director de Tesis Propietario	M. en C. Manuel Cruz López	
Propietario	Dr. Alberto Verjovsky Sola	
Suplente	Dr. Mario Eudave Muñoz	Mario Eudave Mu
Suplente	M. en C. Emigdio Martínez Ojeda	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Dedicatoria

Quiero ofrecer este trabajo a todas las personas que me han apoyado desde el momento en que me conocieron, aunque a lo mejor no siempre hemos podido estar juntos todo el tiempo, al menos sí en los momentos importantes de nuestras vidas, para todos ellos mi infinito agradecimiento :

A mi Maestra : por todo el cariño, apoyo y comprensión que siempre me has brindado.

A mis Padres: Rayo y Xóchitl, porque pocos son los momentos que uno tiene para corresponder el apoyo y cariño que se le han dado, espero esto sea una pequeña muestra del trabajo que Ustedes han realizado en mi.

A mi Esposa e Hijo: Ana y Paco, gracias por todo su amor y cariño incondicional, esta es la primera parte de todo un proyecto en el que siempre estaremos juntos. Espero lo disfruten y lo conserven en su corazón.

A mis Suegros: Emilio y Bertha, por todo el apoyo que nos brindaron en los momento difíciles de nuestro comienzo. A ustedes debo mucho y espero poder complacerlos un poco con este presente que es de ustedes.

A mi Hermano: Küster, gracias por todo tu cariño y apoyo, brother este es nuestro trabajo, GRACIAS.

Agradecimientos

Es obviamente imposible enumerar a todos aquellos que me han prestado ayuda. No obstante, y aclarando que quienes no son expresamente mencionados cuentan también con mi aprecio y gratitud, desearía dejar sentado mi especial agradecimiento a las siguientes personas:

A Pepe S. Por su paciente orientación, apoyo y asesoramiento durante todo este tiempo para llevar a cabo este trabajo.

A Manuel C. Quien supo despertar en mi la inquietud y fascinación por la matemática. Por su tiempo, su amistad, su ejemplo, su paciencia, su interés y estímulo en todo este tiempo de convivencia, para lograr terminar este proyecto.

A mis Sinodales: Alberto V., Mario E. y Emigdio M. Por proporcionarme el apoyo y el tiempo de revisar este trabajo.

Finalmente doy las gracias a todos los que me brindaron aliento, consejos y ayuda: Oscar por los monitos y su gran amistad, Cruz por el *buen* humor y demás, mis amigos Octavio, Sael, Elohim, Ara, Edgar, Pablo, J. Malagón Barbas, Paulo, Gualberto, Ivette, Juan Pablo, Omar, Verónica, Pablo y Monz, Mayita, Melissa y Karla, Osvaldo e Israel, Héctor y Jorge, Alexei y Mirella, Javier, Ulises y

etc ....

A todos ustedes

Por las múltiples acciones de solidaridad y amistad que tuvieron conmigo, que sin duda me las llevo de recuerdo para siempre.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo esta basado en un artículo realizado por Ravi. S. Kulkarni ([KP]), donde se estudian las nociones de Estructuras Conformes y de Möbius en variedades.

El estudio comienza con la Teoría de Superficies de Riemann y la obtención de éstas por la acción de un subgrupo discreto en la esfera de Riemann, que actúa propiamente discontinuamente ahí, llevandonos de manera natural al estudio de las transformaciones de Möbius sobre la esfera y su clasificación por las propiedades geométricas que éstas tienen. Se estudiarán después las bases bajo las cuales esta teoría descansa. Esto nos remite al conocido Teorema de Uniformización, el cual dice que el cubriente universal de una superficie de Riemann es, la esfera S^2, el plano complejo $\mathbb{C}$ ó el plano hiperbólico D^2. Lo cual nos da una manera natural de definir estructuras sobre las superficies de Riemann, modeladas en los tres tipos de espacios con curvatura seccional constante igual a 1, 0 ó -1,asociados respectivamente a los cubrientes universales S^2, $\mathbb{C}$ y D^2. Un hecho que se mostrará en el transcurso del trabajo, es que el grupo de transformaciones de Möbius tiene relación con las teorías de Geometría Hiperbólica y la Geometría Conforme en el caso de dimensión 2.

Después estudiaremos con un poco más de profundidad lo que significa tener algún tipo de estructura en una variedad, llevándonos de manera natural a lo que se entenderá por una Estructura Conforme, así, al poder definir un grupo, que llamaremos el Grupo de Möbius en dimensión n, podremos definir también lo que entenderemos por una Estructura de Möbius en una variedad. Y al igual que en el caso de dimensión 2, veremos que este grupo de Möbius tiene una estrecha relación con la geometría Conforme y con la geometría Hiperbólica en dimensión n. Posteriormente veremos como el Teorema de Liouville nos dará información sobre las Estrucuras Conformes y de Möbius; y se obtendrá un recíproco parcial de este teorema, lo cual nos permitirá estudiar a las variedades con relación a sus cubrientes universales, estudiando las nociones de Desarrollamiento y Holonomia de una Variedad, y las condiciones bajo las cuales se puede efectuar este estudio. Para finalizar; se definirá lo que se entenderá por la Frontera Ideal de una variedad con Estrucrura Conforme y la clasificación de Estructuras de Conformes sobre variedades de dimensión n. Lo cual en cierta manera extenderá las nociones que se tiene para el caso de dimensión 2.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

TEORÍA CLÁSICA DE GRUPOS KLEINIANOS

1.1 Preliminares

Recordemos que **una** n-**variedad topológica** X de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff con una base numerable para su topología la cual es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, es decir:

Para cada punto $p \in X$ existe una pareja (U, z), donde U es una vecindad del punto

p y z es un homeomorfismo de U sobre un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^n$, con n fija.

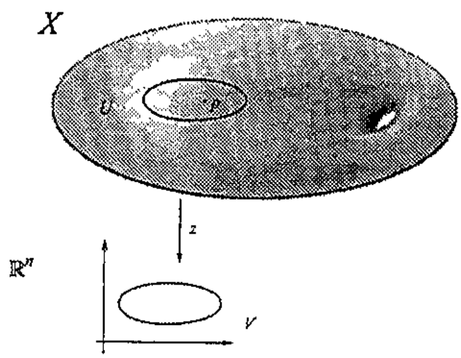

Figura 1.1 Cartas Coordenadas de una Variedad

A las parejas (U, z) con $U \subseteq X$ se les llaman **Cartas Coordenadas** de X y un **Atlas** en X es una familia $A = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ de cartas coordenadas de X que cubren a ésta. Empezaremos nuestro estudio con variedades de dimesión 2 y consideraremos el codominio de las cartas coordenadas que sea $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1.1 *Sea X una 2-variedad y consideremos las cartas coordenadas de la siguiente forma $z_\alpha : U_\alpha \subseteq X \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$*

1) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ para dos cartas de X, a las funciones

$$z_{\alpha\beta} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta (U_\alpha \cap U_\beta),$$

*se les llama **Funciones de Transición o Cambios de Coordenadas.***

*2) Un atlas $A = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ en X se llama un **Atlas Holomorfo o Complejo** si todas sus funciones de transición son funciones holomorfas.*

*3) Dos atlas complejos $A = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ y $B = \{(V_\beta, w_\beta)\}_{\beta \in \Delta}$ en X se llaman **Equivalentes** si siempre que $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, los cambios de coordenadas $z_\alpha \circ w_\beta^{-1}$ y $w_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ son holomorfos.*

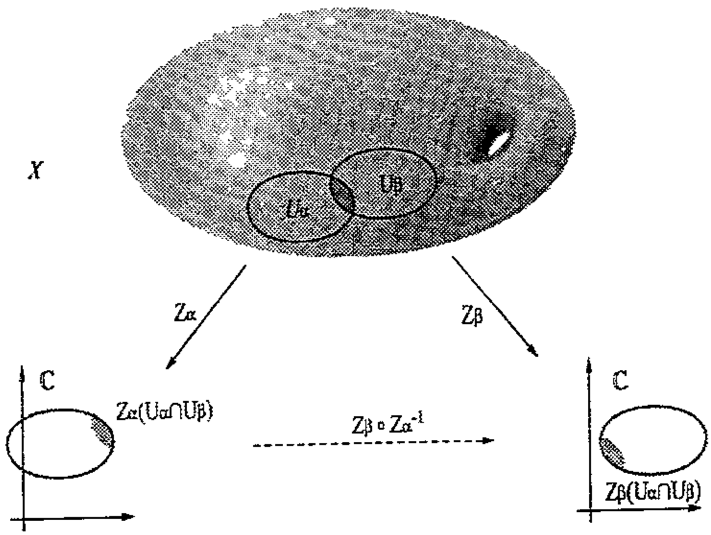

Figura 1.2 Funciones de Transición en una Variedad

Es fácil ver que la relación anterior entre atlas complejos sobre X es una relación de equivalencia y la unión de dos atlas complejos equivalentes sobre X es de nuevo un atlas complejo sobre X equivalente a cada uno de éllos.

Definición 1.1.2 *Una **Superficie de Riemann** es una pareja (X, Σ) donde X es una 2-variedad conexa y Σ es una clase de equivalencia de atlas complejos en X. A Σ se le llama una **Estructura Compleja** en X.*

Ejemplo 1.1.3 *Superficies de Riemann*

1) El plano complejo

Este es claramente el ejemplo más sencillo de una superficie de Riemann, su estructura compleja está dada por el atlas $A = \{(\mathbb{C}, id)\}$, consistente solamente de la carta coordenada $id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $id\,(z) = z$.

2) La 2-esfera

De las 2-variedades compactas, la 2-esfera S^2 definida por

$$S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\},$$

es el ejemplo más sencillo. Ésta superficie, que es claramente conexa, posee una estructura compleja de la siguiente manera:

Sean N y S los polos norte y sur de la esfera S^2. Consideremos los abiertos $U_1 = S^2 - \{N\}$ y $U_2 = S^2 - \{S\}$, y observemos que estos dos abiertos cubren a la esfera. Las cartas correspondientes están definidas como sigue

$z_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ es la proyección estereográfica desde el polo norte.

Así z_1 es un homeomorfismo cuya inversa $z_1^{-1} : \mathbb{C} \to U_1$ está determinada de la siguiente manera:

Identifiquemos a $\mathbb{C}$ con el plano XY; sea pues $w = x+iy = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$. Entonces $z_1^{-1}(w)$ es el punto sobre S^2 determinado por la intersección de la recta que pasa por $w = (x, y, 0)$ y el polo norte $N = (0, 0, 1)$. Observemos que $z_1(S) = 0 \in \mathbb{C}$.

La otra carta $z_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ está dada por

$$z_2(p) := \frac{1}{z_1(p)} \text{ si } p \neq N \quad y \quad z_2(N) = 0.$$

Notemos que como $p \neq S$ entonces $z_1(p) \neq 0$ y así z_2 es una función bien definida. Es claro ver que z_2 es biyectiva y además es un homeomorfismo.

Finalmente los cambios de coordenadas son de la forma:

$$z_{12} := z_2 \circ z_1^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \to z_2(U_1 \cap U_2),$$

donde $U_1 \cap U_2 = S^2 - \{N, S\}$, *y* $z_i(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$ *ya que* $z_1(S) = 0$ *y* $z_2(N) = 0$. *Por lo que para todo* $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ *se tiene que:*

$$z_{12}(w) = z_2\left(z_1^{-1}(w)\right) = \frac{1}{z_1\left(z_1^{-1}(w)\right)} = \frac{1}{w}.$$

De aquí se sigue que z_{12} *es holomorfa. Un cálculo similar muestra que el cambio de coordenadas* z_{21} *resulta ser también holomorfo, por lo que la esfera* S^2 *tiene una estructura de superficie de Riemann.*

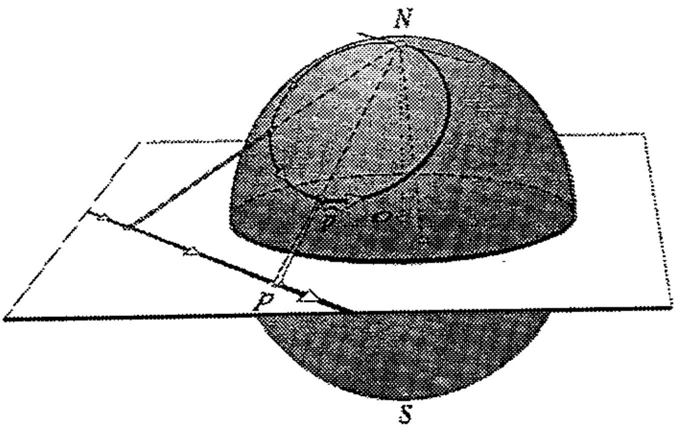

Figura 1.3 Proyección Estereográfica desde el Polo Norte N

Una pregunta natural que resulta de la construcción anterior sería el por qué en lugar de usar la carta (U_2, z_2) anterior, que es poco " natural ", no usamos la proyección estereográfica desde el polo sur S. La respuesta es sencilla; si escribimos explícitamente ésta proyección estereográfica, el cambio de coordenadas z_{12} estaría dado por la siguiente expresión

$$z_{12}(w) = \frac{1}{w} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}, \text{ si } w = x + iy \neq 0,$$

que es claramente diferenciable, pero no es holomorfo.

Un hecho importante es que la esfera S^2 también lo podemos considerar como la **Esfera de Riemann** que se denota generalmente por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Introduscamos la siguiente topología en $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$:

Los conjuntos abiertos son los conjuntos usuales abiertos $U \subset \mathbb{C}$ junto con conjuntos de la forma $V \cup \{\infty\}$, donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con ésta topología sobre $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$, que es un espacio compacto de Hausdorff homeomorfo a S^2, via la proyección estereográfica y extendiendola de tal manera que $z_1(N) = \infty$.

Consideremos los conjuntos $U_1 := \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ y $U_2 := \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$; donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Definamos las siguientes aplicaciones $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ como sigue:

$\varphi_1 = Id_{\mathbb{C}}$ y $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}^*$, y $\varphi_2(z) = 0$ para $z = \infty$.

Claramente éstas aplicaciones son homeomorfismos y por lo tanto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$ es una 2-variedad. Ya que U_1 y U_2 son conexos y tienen intersección no vacía $\mathbb{C}P^1$ es también conexo. La estructura compleja sobre $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$ es ahora definida por el atlas consistente de las cartas (U_i, φ_i) con $i = 1, 2$.

Debemos entonces mostrar que las dos cartas son holomorfamente compatibles. Para esto observemos que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ y además se tiene que la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, es de la forma $z \to \frac{1}{z}$ que es biholomorfa, con lo cual; hemos mostrado de otra manera alternativa que S^2, que es homeomorfa a $\mathbb{C}P^1$ tiene además una estructura compleja la cual la hace una superficie de Riemann.

De ahora en adelante consideraremos el plano complejo extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que denotaremos por $\widehat{\mathbb{C}}$, como la esfera de Riemann cuando es identificado via la proyección estereográfica con la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Es claro que las 2-variedades son espacios topológicos, por lo que resulta natural ahora preguntarnos cuales son el tipo de funciones que se pueden definir en estos espacios, y *más* especificamente para superficies de Riemann, cuales funciones preserven la estructura de una superficie de Riemann y si se puede extender la teoría de Variable compleja a una superficie de Riemann.

Definición 1.1.4 *Sean X y Y superficies de Riemann.*

*Una **Aplicación Holomorfa** entre X y Y es una función continua $f : X \to Y$, tal que para cada punto $p \in X$ y para cualesquiera cartas (U, ϕ) alrededor de $p \in X$ y (V, ψ) alrededor de $f(p) \in Y$, la función*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \to \psi(V),$$

es holomorfa en el sentido usual, es decir, como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.5 *Sea X una superficie de Riemann. Una **Función Holomorfa en** X es una aplicación holomorfa $f : X \to \mathbb{C}$, considerando a $\mathbb{C}$ como una superficie de Riemann, es decir, $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa si para todo punto $p \in X$ y cualquier carta coordenada (U, z) del punto p, la función $f \circ z^{-1} : z(U) \to \mathbb{C}$, es holomorfa en el sentido usual.*

Es fácil ver que el conjunto de funciones holomorfas definidas en un abierto U de una superficie de Riemann forman un anillo con las operaciones definidas puntualmente, a este anillo lo denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ y es conocido como el **Anillo de Funciones Holomorfas** en U.

Observemos que la propiedad de que una función entre superficies de Riemann sea una función holomorfa, es una propiedad local, y como localmente toda superficie de Riemann es como $\mathbb{C}$, esto nos lleva a pensar que muchas de las propiedades usuales de funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ sean también válidas en las superficies de Riemann. En efecto tenemos que muchas de éstas propiedades se siguen conservando entre superficies de Riemann como por ejemplo: El teorema de Singularidad Removible de Riemann, Teorema de Identidad, Teorema de la función abierta, Teorema del Módulo Máximo y el Teorema de Liouville. Para mayor información al respecto y demostraciones de estos resultados puede consultarse [Fo].

En resumen tenemos que las funciones holomorfas en una superficie de Riemann son la generalización natural de las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, por lo que ahora es igualmente natural preguntarnos si exite una generalización a superficies de Riemann de la teoría de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, ya que éstas funciones son en cierta manera muy parecidas a las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.6 *Sea X una superficie de Riemann y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto. Una **Función Meromorfa** en U es una función holomorfa $f : \acute{U} \to \mathbb{C}$, donde $\acute{U}$ es un subconjunto abierto contenido en U tal que:*

*1) $U - \acute{U}$ contiene sólo puntos aislados, a los que llamaremos **Polos** de f.*

2) Para cada polo $p \in U - \acute{U}$ se tiene que

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty.$$

Denotemos por $\mathcal{M}(U)$ al conjunto de funciones meromorfas en U. Observemos que si $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto , entoces $f : U \to X$ es una función meromorfa si y sólo si para cada carta coordenada (V, z) en X, la función $f \circ z^{-1} : z(V \cap U) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es meromorfa en el sentido usual, es decir, holomorfa salvo polos, que necesariamente son aislados. También es importante observar que una función meromorfa en $U \subsetneq X$ no es propiamente hablando una función de U en $\mathbb{C}$, sino que en general sólo está definida en un abierto $\acute{U} \subseteq U$. Por lo que en principio el conjunto $\mathcal{M}(U)$ no es comparable con el anillo $\mathcal{O}(U)$. Para salvar ésta dificultad vemos que definiendo el valor en los polos de una manera continua a un punto se resolvería este problema, esto nos lleva a pensar que una función meromorfa se puede pensar ahora como una función, sólo que su codominio no es $\mathbb{C}$ sino $\widehat{\mathbb{C}}$ como veremos a continuación:

Teorema 1.1.7 *Sea X una superficie de Riemann.*

1) Sea f una función meromorfa en X. Si para cada polo p de f se define

$$\tilde{f}(p) := \infty \in \widehat{\mathbb{C}},$$

entonces se obtiene una aplicación holomorfa $\tilde{f} : X \to \widehat{\mathbb{C}}$, que extiende a f.

2) Recíprocamente, si $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una aplicación holomorfa, entonces:

i) f es una función constante con valor ∞ ó

ii) $f^{-1}(\infty)$ consiste de puntos aislados, y la función

$$f\mid_{X-f^{-1}(\infty)} : X - f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C},$$

es holomorfa, es decir, $f : X \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa.

([Fo], Teo. 1.15, pag. 7)

El teorema anterior nos dice que éxiste una biyección entre el conjunto de funciones meromorfas $f : X \to \mathbb{C}$ y el conjunto de funciones holomorfas $\tilde{f} : X \to \widehat{\mathbb{C}}$, y en consecuencia, podemos identificar las funciones meromorfas en X con las aplicaciones holomorfas de X en $\widehat{\mathbb{C}}$.

De éste resultado se desprende como corolario el **Teorema de Identidad** en superficies de Riemann que dice que si f y g son dos funciones meromorfas en X que coinciden en un subconjunto $A \subseteq X$ que tiene un punto de acumulación en X, entonces $f = g$.

Demos ahora una caracterización de las funciones meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, para esto recordemos que una **Función Racional** en $\mathbb{C}$, es una función de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $q(z) \neq 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.1.8 *Toda función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional, (es decir, que toda función holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional) y recíprocamente, toda función racional es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

([Bo], Teo. 1.4.1, pag. 9).

Definición 1.1.9 *Un **Automorfismo de la Esfera de Riemann** es una aplicación biyectiva $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ la cual es holomorfa.*

Denotemos al conjunto de todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ por $Aut\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$.

Teorema 1.1.10 *$Aut\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ consiste de las funciones de la formá: $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.*

([JS], Teo. 2.1.1, pag. 17).

Definición 1.1.11 *A los elementos de Aut* $\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ *se les llama* ***Transformaciones Lineales*** *o* ***Transformaciones de Möbius.***

Nota:

Observemos que un elemento $T \in Aut\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ no está determinado de manera única por los coeficientes a, b, c y d, ya que si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces para los coeficientes $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ y λd tenemos:

$$\hat{T}(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z),$$

es decir $\hat{T}$ y T son la misma transformación.

Estas tranformaciones forman un grupo ya que si $U(z) = \frac{\tilde{a}z+\tilde{b}}{\tilde{c}z+\tilde{d}}$ con $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{C}$ y $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{c}\tilde{b} \neq 0$, tenemos que:

$$(U \circ T)(z) = \frac{(\tilde{a}a + \tilde{b}c)z + (\tilde{a}b + \tilde{b}d)}{(\tilde{c}a + \tilde{d}c)z + (\tilde{c}b + \tilde{d}d)}$$

con

$$(\tilde{a}a + \tilde{b}c)(\tilde{c}b + \tilde{d}d) - (\tilde{a}b + \tilde{b}d)(\tilde{c}a + \tilde{d}c) =$$

$$= (ad - bc)(\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{c}\tilde{b}) \neq 0.$$

Por lo que $U \circ T \in Aut\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$.

La transformación Identidad $Id\,(z) = z$ se obtiene al hacer $a = d \neq 0$ y $b = c = 0$, y la transformación inversa de $T(Z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es la transformación dada por $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

El Grupo $Aut\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ es también conocido por el **Grupo de Möbius** y de ahora en adelante lo denotaremos por M. Notemos además que las funciones holomorfas son continuas, por lo que tenemos

Corolario 1.1.12 *M es un grupo de homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en si misma.*

([JS], Cor 2.1.2, pag18).

Denotemos por $GL(2,\mathbb{C})$ al **Grupo General Lineal** que consiste de matrices de tamaño 2×2 con coeficientes en $\mathbb{C}$ y determinante distinto de cero, es decir:

$$N \in GL(2,\mathbb{C}) \text{ si y sólo si } N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Definimos $\Pi : GL(2,\mathbb{C}) \to M$ dada por:

$$\Pi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Por lo que si denotamos por:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} \tilde{a}a + \tilde{b}c & \tilde{a}b + \tilde{b}d \\ \tilde{c}a + \tilde{d}c & \tilde{c}b + \tilde{d}d \end{pmatrix} \text{ a estas matrices,}$$

de tal manera que $\Pi(A) = U$ y $\Pi(B) = T$, tenemos entonces que:

$$\Pi(A) \circ \Pi(B) = U(T(z)) = (U \circ T)(z) = \Pi(C).$$

Con lo cual tenemos que Π es un homomorfismo de grupos y por los comentarios anteriores y el Teorema 1.1.11, es además epimorfismo. Si denotamos por H al nucleo de Π, vemos que consiste de las matrices $N \in GL(2,\mathbb{C})$ tales que $\Pi(N) = T(z) = z$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, o equivalentemente que sus coeficientes sean de la forma $a = d \neq 0$ y $c = b = 0$, ya que estos son lo que cumplen que $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

Así tenemos que:

$$H = \{N \in GL(2,\mathbb{C}) : N = \lambda Id, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

Por lo que obsevamos anteriormente tenemos que: $L, N \in GL(2,\mathbb{C})$ determinan el mismo automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ bajo Π si y sólo si $LN^{-1} \in H$ es decir $L = \lambda N$ con $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Por el primer teorema de isomorfismo para grupos, que díce que si se tiene un homomorfismo de grupos $f : G \to K$ donde el núcleo de f es el subgrupo H de G, entonces H es un subgrupo normal y $G/H \cong \operatorname{im} f$, obtenemos de esta manera que

$$M \cong GL(2,\mathbb{C})/H = GL(2,\mathbb{C})/\{\lambda Id, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

El grupo cociente $GL(2,\mathbb{C})/\{\lambda Id, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$ es llamado el **Grupo Proyectivo General Lineal** y es denotado por $PGL(2,\mathbb{C})$.

Por otro lado tenemos que la función determinante cumple con las siguientes propiedades:

1) $\det(NL) = \det(N)\det(L)$ para toda $L, N \in GL(2,\mathbb{C})$.

2) $\det : GL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, es un homomorfismo de grupos, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ está pensado como el grupo multiplicativo de los números complejos distintos de cero.

El nucleo del homomorfismo det es un subgrupo normal de $GL(2,\mathbb{C})$. Este grupo es llamado el **Grupo Especial lineal**, se denota por $SL(2,\mathbb{C})$ y consiste de todos las matrices $N \in GL(2,\mathbb{C})$ tales que $\det(N) = 1$. Como el homomorfismo det es suprayectivo tenemos nuevamente por el primer teorema de isomorfismo para grupos que:

$$GL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*.$$

Si $L \in GL(2,\mathbb{C})$ entonces podemos escribir a L como $L = \lambda N$, donde $\lambda = \det(L)$ y $N \in SL(2,\mathbb{C})$. De las observavciones hechas anteriormente vemos que:

$$\Pi(L) = \Pi(N).$$

A partir de lo cual podemos entonces decir que todo elemento $T \in M$ tiene la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$, que es lo mismo que decir que Π aplica $SL(2,\mathbb{C})$ sobre M. Así $PGL(2,\mathbb{C})$ coincide con el grupo cociente $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm Id\}$, que es llamado el **Grupo Proyectivo Especial Lineal**, que es denotado por $PSL(2,\mathbb{C})$. De aquí se tiene:

$$M \cong PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C}).$$

Dado un grupo G en general , siempre es bueno saber si este grupo es generado por algunos de sus elementos, pues esto facilita en cierta forma su estudio.

Consideremos los siguientes tipos especiales de transformaciones de Möbius:

1) $R(z) = az$ donde $|a| = 1$ es decir, $a = \exp(i\theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Esta transformación representa geométricamente una rotación de $\widehat{\mathbb{C}}$ por un ángulo θ alrededor del eje vertical que pasa por los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$ en $\mathbb{R}^3$.

2)$J(z) = \frac{1}{z}$ que geométricamente representa una rotación de $\widehat{\mathbb{C}}$ por un ángulo π alrededor del eje horizontal que pasa por los puntos $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$.

3)$S_r(z) = rz$ donde $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ fija; esta transformación es una similitud en el plano complejo y actúa expandiendo o dilatando en un factor r.

4)$T_t(z) = z + t$ con $t \in \mathbb{C}$, que es una traslación en $\mathbb{C}$.

La importancia de estas transformaciones la tenemos explícitamente en el siguiente resultado

Teorema 1.1.13 *Toda transformación de Möbius es composición de un número finito de transformaciones de Möbius de los tipos 1),2),3) y 4).*

([JS], Teo. 2.3.1, pag. 21)

Observemos que una de las tantas propiedades que posee la proyección estereográfica de $\mathbb{C}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$, es que aplica a los círculos de $\mathbb{C}$ sobre círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$, y la imagen de una recta en $\mathbb{C}$ es una recta sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, de donde si a esta ultima recta se le añade el punto $\{\infty\}$, resulta ser topológicamente equivalente lo mismo que un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$, por lo que los círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$ son de los siguientes dos tipos:

1)Círculos en $\mathbb{C}$ en el sentido Euclidiano usual.

2)Conjuntos de la forma $\Lambda \cup \{\infty\}$, donde Λ es una línea recta en $\mathbb{C}$.

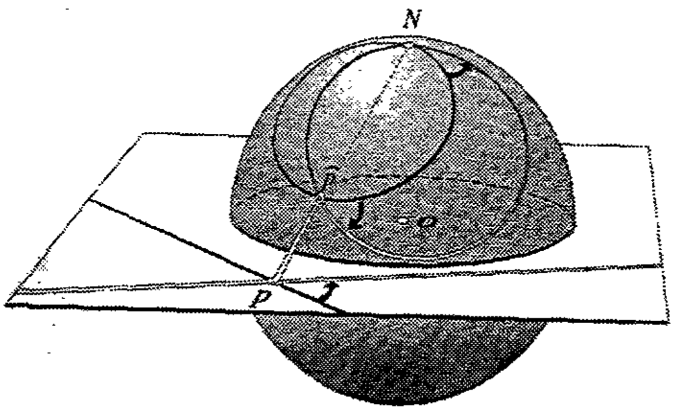

Figura 1.4 Círculos en la esfera de Riemann

Una propiedad importante de la aplicación de un elemento del grupo $PGL(2, \mathbb{C})$ sobre los círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$ está dada en el siguiente

Teorema 1.1.14 *Si denotamos por O a un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$ y si $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, entonces $T(O)$ es un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

([JS], Teo. 2.4.1, pag. 22)

Consideremos un conjunto Ω y un grupo G.

Definición 1.1.15 *Decimos que un grupo G* **Actúa** *en Ω (por la izquierda), si se cumple lo siguiente:*

Si existe una función $\Theta : G \times \Omega \to \Omega$, que denotaremos por: $\Theta(g, x) = g(x)$ o simplemente gx, tal que satisface lo siguiente:

1) $e(x) = x$, para toda $x \in \Omega$ donde $e \in G$ denota al elemento identidad del grupo G.

2) $\varphi(\psi(x)) = \varphi\psi(x)$, para toda $x \in \Omega$ y para todas $\varphi, \psi \in G$

Definición 1.1.16 *Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto Ω.*

Decimos que la **Acción** *es* **Transitiva** *si para cada par de puntos $x, y \in \Omega$; existe algún elemento $g \in G$ tal que $g(x) = y$. De modo más general, decimos que G* **Actúa k-transitivamente** *sobre Ω siempre que se tengan α_i y β_i con $i = 1, ..., k$, elementos distintos de Ω, es decir, $\alpha_i \neq \alpha_j$ y $\beta_i \neq \beta_j$ para $i \neq j$, existe algún $g \in G$ tal que $g(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 1, ..., k$.*

Dada la noción de que un grupo actúe transitivamente sobre un conjunto tenemos el siguiente resultado y algunas de sus consecuencias:

Teorema 1.1.17 *Si z_1, z_2 y z_3 son elementos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces existe una única $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$.*

([JS], Teo. 2.5.1, pag. 23)

Corolario 1.1.18 *Si (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) son dos ternas de puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces, existe una única $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.*

Es decir; la acción de $PGL(2,\mathbb{C})$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ es 3-transitiva y a su vez, todo elemento $T \in PGL(2,\mathbb{C})$ queda determinado por su valor en cualesquiera tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

([JS], Cor 2.5.2, pag. 23)

Definición 1.1.19 *Decimos que un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un **Punto Fijo** de algún elemento $T \in PGL(2,C)$ si $T(z) = z$, y de igual manera decimos que T fija a z.*

Corolario 1.1.20 *Si $T \in PGL(2,\mathbb{C})$ y T fija tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces T es la transformación identidad.*

([JS], Cor 2.5.3, pag. 23)

Este último corolario nos dice además que $PGL(2,\mathbb{C})$ no es 4-transitivo pues no existe una transformación de Möbius que aplique por ejemplo a los puntos 0,1,∞ y 2 en los puntos 0,1,∞ y -1 respectivamente, pues esta transformación tendría que ser la identidad.

Por otro lado tenemos que tres puntos distintos en $\mathbb{R}^3$ determinan un único plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, por lo que cualesquiera tres puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ estan en un único círculo $O = \Pi \cap \widehat{\mathbb{C}}$. Usando la 3-transitividad de la acción de $PGL(2,\mathbb{C})$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.1.21 *$PGL(2,\mathbb{C})$ permuta los círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$ transitivamente, esto es, si O y O' son círculos en $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces existe $T \in PGL(2,\mathbb{C})$ tal que $T(O) = O'$.*

([JS], Teo. 2.6.1, pag. 26)

Definición 1.1.22 *Si G es cualquier grupo entonces los elementos $g, h \in G$ son* ***Conjugados*** *en G si existe $a \in G$ tal que $g = aha^{-1}$.*

La conjugación da una relación de equivalencia sobre G, y sus clases de equivalencia son llamadas Clases de Conjugación.

Analizaremos ahora clases de conjugación en $PGL(2, \mathbb{C})$. Como ya hemos visto estas transformaciones tienen muchas propiedades geométricas y las clases de conjugación determinan, por ejemplo, el número de puntos fijos de estas transformaciones.

En efecto, si $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de algún $T \in PGL(2, \mathbb{C})$ y si $U \in PGL(2, \mathbb{C})$, se tiene que $U(z)$ es un punto fijo de la transformación conjugada $UTU^{-1} \in PGL(2, \mathbb{C})$.

Para realizar nuestro análisis de clases de conjugación y puntos fijos, trabajaremos con transformaciones de Möbius representadas en el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, es decir con transformaciones de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$.

Consideremos ahora una transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ representada por alguna matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Recordemos que la traza de la matriz A está definida por $\operatorname{tr}(A) = a + d$.

Supongamos primeramente que $c \neq 0$, y sea $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punto fijo de T. Por definición $z \in \mathbb{C}$ un punto fijo de T si y sólo si $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Esta ecuación tiene dos raices, que corresponden a dos puntos fijos de la transformación, a menos que $(d-a)^2 + 4bc = 0$ en cuyo caso se tiene una sola raíz de multiplicidad 2. Usando la condición $ad - bc = 1$, la ecuación anterior equivale a la ecuación $(a+d)^2 - 4 = 0$ y observemos que $a + d$ es la traza de la matriz A. Por lo que T tiene un único punto fijo si y sólo si $(a+d)^2 = 4$, es decir; si la traza de T es ± 2.

Ahora si $c = 0$ entonces T fija ∞ ya que $T(\infty) = \frac{a}{c}$, y así T fija a ∞ si y sólo si $c = 0$. En este caso tenemos que $ad = 1$ y T es de la forma $T(z) = a^2 z + ab$, por lo que su segundo punto fijo debe satisfacer $z = \frac{ab}{1-a^2} \neq \infty$ y esto sucede si y sólo si $a^2 \neq 1$ ó equivalentemente si $(a+d)^2 \neq 4$ por las observaciones hechas anteriormente. Cuando $a^2 = 1$ tenemos que $T(z) = z \pm b$ con lo que T es la transformación identidad para $b = 0$, y tiene un único punto fijo en ∞ para $b \neq 0$.

Consideremos ahora el término $(a+d)^2$ en los elementos de $PSL(2,\mathbb{C})$ para determinar las clases de conjugación en $PSL(2,\mathbb{C})$.

Por cálculos directos se puede observar que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, con lo que si B es invertible entonces se tiene que $\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr}(BB^{-1}A) = \operatorname{tr}(A)$.

Obteniendo así que $\operatorname{tr}(A)$ depende solamente de la clase de conjugación de A en $GL(2,\mathbb{C})$.

Ahora cada transformación de Möbius T es representada por un par $\pm A$ de matrices en $SL(2,\mathbb{C})$ y además se tiene que $\operatorname{tr}(-A) = -\operatorname{tr}(A)$; por lo que tenemos

$$\operatorname{tr}^2(T) = (\operatorname{tr}(A))^2 = (a+d)^2,$$

obteniendo de esta manera una función bien definida de T dependiendo solamente sobre la clase de conjugación de T en $PSL(2,\mathbb{C})$.

Todo lo anterior podemos resumirlo en el siguiente

Teorema 1.1.23 *Sea* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *con* $ad-bc = 1$, *y sea* $A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ *una matriz que representa a* T.

Si $\operatorname{tr}(A_T) \neq \pm 2$ *entonces* T *tiene dos puntos fijos en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Si $\operatorname{tr}(A_T) = \pm 2$ *y* T *no es la transformación identidad, entonces* T *tiene un solo punto fijo en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

([JS], Teo. 2.9.1, pag. 32)

Consideremos el siguiente ejemplo que ilustra los resultados anteriores.

Ejemplo 1.1.24 *Consideremos las transformaciones de Möbius de la forma*

$$U(z) = \lambda z \quad con\ \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Tenemos entonces que en $SL(2,\mathbb{C})$ *, la transformación* U *está representada por las matrices:*

$$\pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix},\ así\ \operatorname{tr}^2(U) = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2.$$

Describamos ahora las clases de conjugación en $PSL(2,\mathbb{C})$.

En cualquier grupo, el elemento identidad forma una clase de conjugación; las clases de conjugación restantes de $PSL(2,\mathbb{C})$ se describen seleccionando representantes de cada clase. Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ definimos las siguientes transformaciones:

Ejemplo 1.1.25 $U_\lambda(z) = \lambda z$ *si* $\lambda \neq 1$ *y* $U_1(z) = z + 1$ *si* $\lambda = 1$.

Teorema 1.1.26 *Si* T *no es la transformación identidad de* $PSL(2,\mathbb{C})$ *, entonces existe algún* $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ *tal que* T *es conjugada a* U_λ.

([JS], Teo. 2.9.2, pag. 33)

Por último para describir completamente a las clases de conjugación nos falta determinar cuando U_k y U_λ son conjugadas.

Teorema 1.1.27 *U_k y U_λ son conjugadas si y sólo si $k = \lambda$ ó $k = \lambda^{-1}$.*

([JS], Teo. 2.9.3, pag. 34)

Corolario 1.1.28 *Dos elementos que no sean la identidad T_1,$T_2 \in PSL(2,\mathbb{C})$ son conjugados si y sólo si $\operatorname{tr}^2(T_1) = \operatorname{tr}^2(T_2)$.*

([JS], Cor 2.9.4, pag. 34)

Definición 1.1.29 *El par $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$ que está determinado de manera única para un elemento $T \in PSL(2,\mathbb{C})$, es llamado el **Multiplicador** de T.*

De los resultados de esta sección tenemos que, dos transformaciones de Möbius que no sean la identidad son conjugadas si y sólo si éllas tienen los mismos multiplicadores. De esta manera obtenemos que el multiplicador es un metodo igual de efectivo que la función tr^2 para determinar las clases de conjugación. La relación que existe entre estos dos invariantes es que:

$$\operatorname{tr}^2(T) = \operatorname{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2,$$

de donde vemos que λ y $\frac{1}{\lambda}$ son las raices de la ecuación cuadrática

$$z^2 + (2 - \operatorname{tr}^2(T))z + 1 = 0.$$

1.2 Clasificación geométrica de las transformaciones de Möbius

Empecemos por analizar el comportamiento de una transformación de Möbius T que no sea la identidad, y en particular el comportamiento de T^n cuando n tiende a ∞, donde T^n denota la n-ésima iteración de T, es decir $T^n = T \circ ... \circ T$, n-veces.

Anteriormente observamos que T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a alguna transformación U_λ con $\lambda \neq 0$. Observamos además que T no esta determinada de manera única por λ ya que T es también conjugada a $U_{\frac{1}{\lambda}}$.

Consideremos primeramente que T tiene un único punto fijo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, es decir que $\text{tr}^2(T) = 4$ ó equivalentemente que $\lambda = 1$; llamaremos a una de estas **Transformaciones T Parabólica**.

En este caso tenemos que $T = V^{-1}U_1V$ para alguna $V \in PSL(2, \mathbb{C})$ que satisface $V(z_0) = \infty$ y $U_1(z) = z + 1$.

Ahora

$$\lim_{n\to\infty} U_1^n(z) = \lim_{n\to\infty}(z+n) = \infty \text{ para toda } z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

y así tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = \lim_{n\to\infty} V^{-1}U_1^nV(z) = V^{-1}(\infty) = z_0$$

para toda $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, de donde podemos observar que cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es eventualmente movido por T^n hacia z_0 conforme la n aumenta. Es decir que z_0 es un **Punto Atractor**.

Consideremos ahora el caso en T que tiene dos puntos fijos z_1 y z_2, así consideremos la transformación $V(z) = \frac{(z-z_1)}{(z-z_2)}$ que transforma estos dos puntos fijos en 0 e ∞. Entonces tenemos que $VTV^{-1} = U_\lambda$ para alguna $\lambda \neq 0, 1$ y fija los puntos 0 e ∞. Por otro lado tenemos que

$$U_\lambda^n(z) = \lambda^n z,$$

así, si $|\lambda| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} U_\lambda^n(z) = 0$ para toda $z \neq \infty$, obteniendo de esta manera

$$\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_1 \text{ para toda } z \neq z_2.$$

Similarmente si $|\lambda| > 1$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} U_\lambda^n(z) = \infty \text{ para toda } z \neq 0,$$

es decir que $\lim_{n\to\infty} T^n(z) = z_2$ para toda $z \neq z_1$ donde claramente estos dos casos son esencialmente los mismos al intercambiar z_1 por z_2 pues corresponde a reemplazar λ por $\frac{1}{\lambda}$.

Obtenemos así que si $|\lambda| \neq 1$, entonces T^n progresivamente mueve todos los puntos $z \neq z_1, z_2$ lejos de uno de estos puntos fijos y acercándolos hacia el otro punto fijo. Es decir que uno de éllos, digamos z_1, es un **Punto Repulsor** mientras que z_2 es un **Punto Atractor**. Llamaremos a una de tales **Transformaciones** T **Hiperbólica** si λ es un número real positivo y **Transformaciones Loxodrómica** en otro caso.

Ahora para $|\lambda| = 1$ tenemos que U_λ es una rotación R_θ de $\widehat{\mathbb{C}}$. Haciendo $\lambda = \exp i\theta$ observamos que:

$$\lim_{n\to\infty} U_\lambda^n(z) = \lim_{n\to\infty} \exp(in\theta)z, \text{ no existe para } z \neq 0, \infty,$$

por lo que tampoco existe el de $T^n(z)$ para $z \neq z_1, z_2$; llamaremos a una de estas **Transformaciones** T **Elíptica**.

Resumiendo tenemos que: Como T es conjugada a U_λ si y sólo si $\operatorname{tr}^2(T) = \operatorname{tr}^2(U_\lambda)$ y además como $\operatorname{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$ tenemos así el siguiente resultado:

Teorema 1.2.1 *Sea* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *con* $ad - bc = 1$ *y sea* $\mathrm{tr}(T)$ *su traza. Entonces:*

1) T es elíptica si y sólo si $0 \leq \mathrm{tr}^2(T) < 4$.

2) T es parabólica si y sólo si $\mathrm{tr}^2(T) = 4$.

3) T es hiperbólica si y sólo si $\mathrm{tr}^2(T) > 4$.

4) T es loxodrómica si y sólo si $\mathrm{tr}^2(T) < 0$ *ó* $\mathrm{tr}^2(T) \notin \mathbb{R}$.

1.3 Geometría del Grupo M^*

Definición 1.3.1 *Una transformación de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *en* $\widehat{\mathbb{C}}$ *de la forma* $g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, *con* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ad - bc \neq 0$, *es llamada una* ***Reflexión Racional*** *o* ***Anti-Automorfismo*** *de* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Estas transformaciones se pueden ver de la siguiente manera:

$$T(z) = (\tilde{U} \circ Inv)(z) \text{ donde } Inv(z) = \bar{z} \text{ y } \tilde{U} \in M.$$

Como ambas son homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ en si misma (la conjugación compleja en $\widehat{\mathbb{C}}$ se puede entender como la reflexión en el plano a través de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ pensando a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como la imagen de la copia de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ union $\{\infty\}$ bajo la proyección estereográfica), y análogo al caso de los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ estas transformaciones no están determinadas por sus coeficientes de manera única, así que procediendo de igual manera podemos suponer que $ad - bc = 1$ y como las reflexiones cambian la orientación en $\mathbb{R}^3$, tenemos que estas transformaciones cambian la orientación de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Tenemos así que los automorfismos y los anti-automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ forman un grupo denotado por M^* en el cual M es un subgrupo normal de índice 2. Al igual que los elementos del grupo de transformaciones de Möbius que poseen uno o dos puntos fijos, las reflexiones racionales cumplen con tener ciertos subconjuntos de puntos fijos.

Proposición 1.3.2 *El conjunto de puntos fijos de una reflexión racional es vacío, un punto, dos puntos o un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$. ([Mk], pag. 2)*

Ejemplo 1.3.3 *Los siguientes ejemplos ilustran que todas las posibilidades anteriores puede ocurrir:*

1) $f(z) = \bar{z}$ tiene a un círculo de puntos fijos, a saber $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2) $f(z) = \bar{z} + 1$ tiene un punto fijo que es ∞.

3) $f(z) = 2\bar{z}$ tiene dos puntos fijos, que son $\{0, \infty\}$.

4) $f(z) = -(\frac{1}{\bar{z}})$ no tiene puntos fijos.

Estas reflexiones racionales cumplen también con propiedades geométricas similares a las del grupo M sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 1.3.4 *Sea L un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces existe una única reflexión racional ρ cuyo conjunto de puntos fijos es L (que es llamada la reflexión en el círculo; si éste es Euclidiano entonces es llamada* ***Inversión en el Círculo****).*

Demostración: Si L es un círculo Euclidiano con centro α y radio r , entonces ρ es de la forma:

$$\rho(z) = \alpha + \frac{r^2}{(\bar{z} - \bar{\alpha})}.$$

Si L es una línea que pasa por α en la dirección $\arg(z) = \theta$, entonces la reflexión es dada por:

$$\rho(z) = \exp(2i\theta)(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \alpha.$$

■

Nota: Observemos que $\rho^2 \in M$ y tiene un círculo invariante, así que ρ^2 es la identidad, es decir ρ es una involución.

Proposición 1.3.5 *Si C es cualquier círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$, y g es una reflexión racional, entonces $g(C)$ es un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

([Mk], pag. 3)

Definición 1.3.6 *Sea X un conjunto y $f : X \to X$ una función biyectiva. Decimos que un **Subconjunto** A de M es **Invariante** bajo f si $f(A) = A$.*

Definición 1.3.7 *Sea C un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$ y z un punto que no esté sobre C. Entonces el punto $z^* = r_C(z)$ es llamado el **Punto Conjugado** de z, donde r_C es la reflexión racional que tiene a C como conjunto de puntos fijos. En este caso decimos que z y z^* son **Puntos Conjugados**.*

Mucha de la geometría de los elementos de M se refleja en las siguientes observaciones:

1) Describamos la acción de la transformación parabólica $z \to z + 1$. Toda familia de líneas paralelas al eje real en $\mathbb{C}$ es invariante bajo esta transformación. La familia de líneas paralelas al eje imaginario permanece fija como familia, pero la transformación permuta a los miembros de esta familia. Una transformación parabólica general con punto fijo x tiene igualmente dos familias:

1.1) Existe una familia de horocíclos que son círculos tangentes en x; cada miembro de esta familia permanece invariante bajo la transformación.

1.2) Existe una familia de trayectorias ortogonales a la familia anterior que es también una familia de círculos tangentes en x.

Esta familia es fija como familia, pero cada elemento se mueve por la transformación en otro de tales círculos.

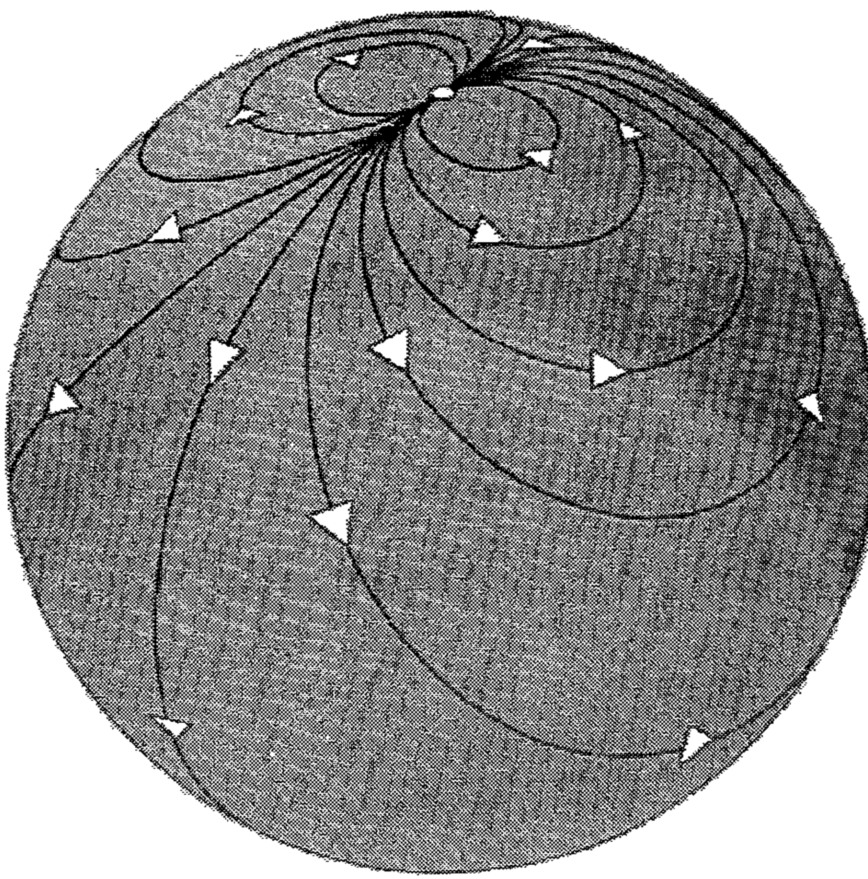

Figura 1.5 Dinámica de una Transformación Parabólica general en la esfera

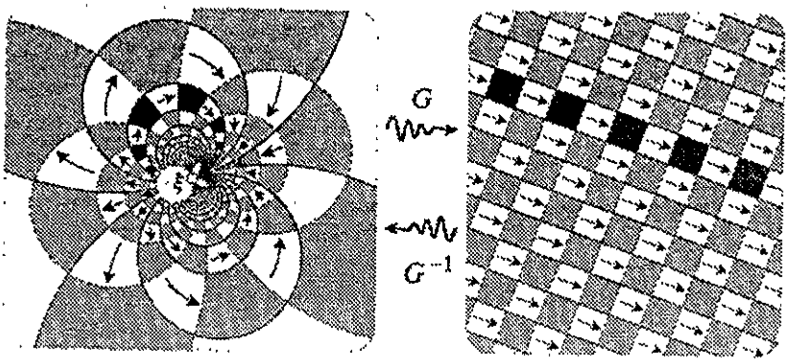

Figura 1.6 Geometría de una Transformación Parabólica general con punto fijo ξ en la esfera y en el plano , y donde G representa a la Proyección Estereográfica

2) Las transformaciones de la forma $z \to \lambda z$, $\lambda \in (1, \infty)$, que son dilataciones pueden también describirse en términos de un par de familias ortogonales:

2.1) La familia de líneas a través del origen que es invariante como conjunto; además cada rayo de cada linea es invariante.

2.2) Las trayectorias ortogonales a la primera familia son la familia de círculos centrados en el origen y cada uno de estos es aplicado por la transformación en otro círculo de la familia.

2.a) Para una transformación hiperbólica g con puntos fijos x y y, el elemento de M el cual aplica $0 \to x$ e $\infty \to y$, transforma estas dos familias en otras dos familias:

2.a.1) Existe una familia de círculos que pasa a través de x y y , donde cada círculo invariante como conjunto.

2.a.2) La familia de círculos ortogonales a la primera ; denotemos por Ξ a dicha familia.

Para cada $C \in \Xi$ la reflexión en C intercambia x y y , y si C^* es un círculo que intercambia x y y, como puntos conjugados entonces $C^* \in \Xi$; es decir Ξ es la familia de círculos para los cuales x y y son puntos conjugados. La transformación hiperbólica aplica cada círculo de Ξ por otro de tales círculos en Ξ.

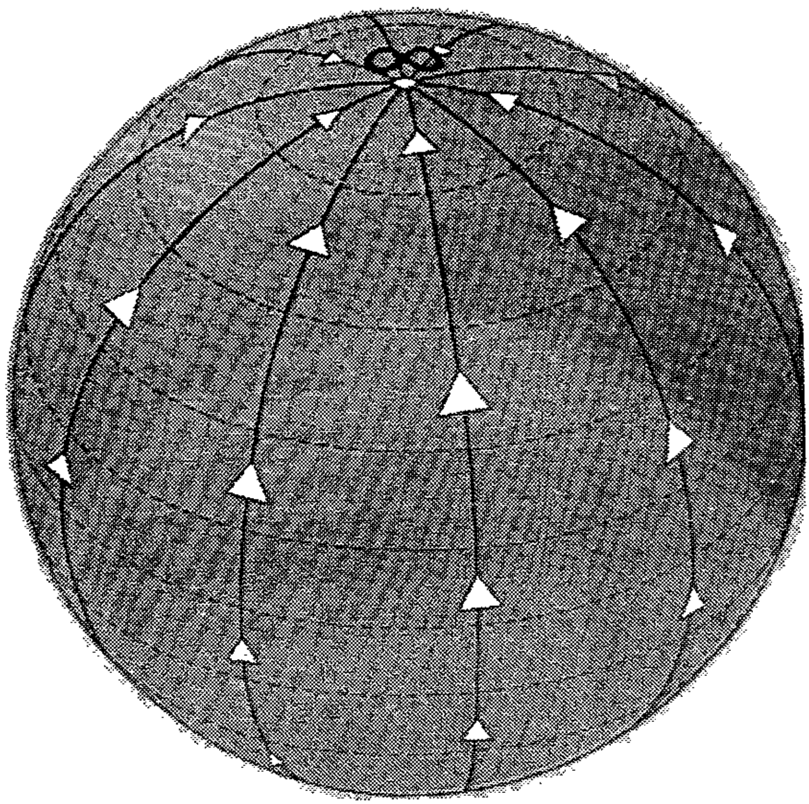

Figura 1.7 Dinámica de una Transformación Hiperbólica general en la esfera

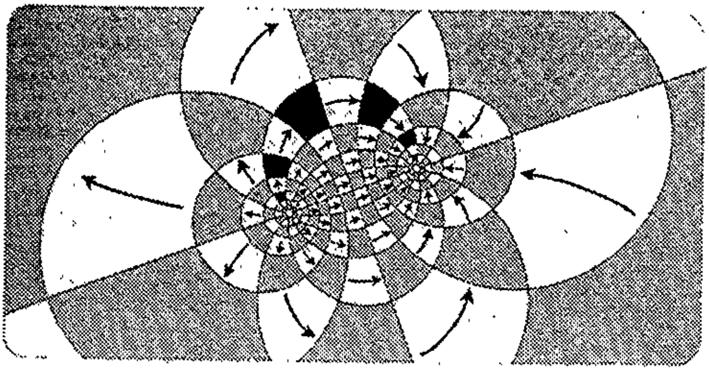

Figura 1.8 Geometría de una Transformación Hiperbólica general en la esfera

2.b) La rotación centrada en el origen es de la forma $z \to \exp(i\theta)z$. Las mismas dos familias de círculos en la dilatación pueden ser usadas para describir a las de las rotaciones, pero los papeles de las familias son intercambiados. Todos los círculos centrados en el origen son ahora cada uno invariantes , pero los rayos que parten del origen son intercambiados.

Para una transformación elíptica general con puntos fijos x y y tenemos:

2.b.1) La familia de círculos que pasan por x y y que es invariante como familia, donde cada círculo en la familia es aplicado por la transformación a otro círculo de esta familia.

2.b.2) Las trayectorias ortogonales; es la familia de trayectorias para las cuales x y y son puntos conjugados son fijas una a una bajo la transformación elíptica, es decir cada elemento de está familia es invariante bajo la transformación.

Si g es un elemento elíptico de orden 2 entonces deja a cada círculo que pasa a través de sus puntos fijos invariante, y los puntos fijos cortan a cada círculo en dos arcos que son intercambiados por g.

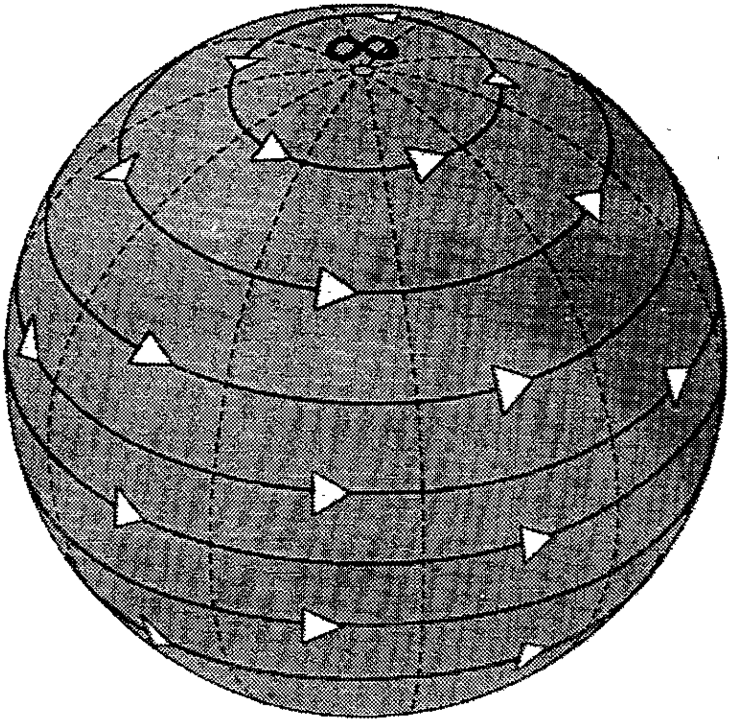

Figura 1.9 Dinámica de una Transformación Elíptica general en la esfera

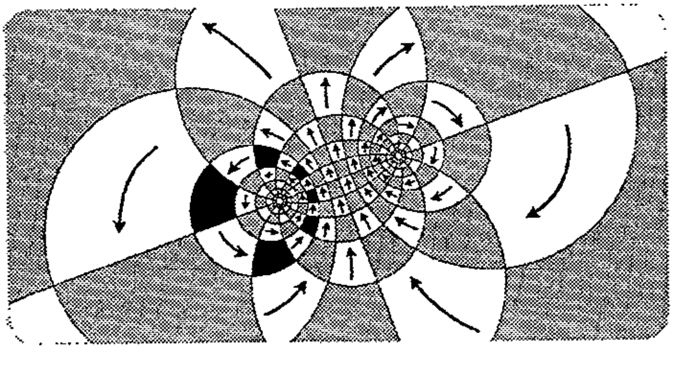

Figura 1.10 Geometría de una Transformación Elíptica general en la esfera

3) El elemento loxodrómico general con puntos fijos 0 e ∞ tiene la siguiente forma $z \to \rho \exp(i\theta)z$, con $\rho \in (0, \infty)$ y $\rho \neq 1$.

Para estas transformaciones tenemos:

3.1) La familia de círculos centrados en el origen es invariante como familia pero ningún miembro es invariante.

3.2) Las líneas a través de origen son invariantes como familia, en general ninguna línea es invariante pero hay dos excepciones:

1) el caso hiperbólico cuando $\exp(i\theta) = 1$.

2) cuando $\exp(i\theta) = -1$ que es llamado demi-hiperbólico que es el caso en que cada línea es invariante pero los dos rayos de la linea son intercambiados.

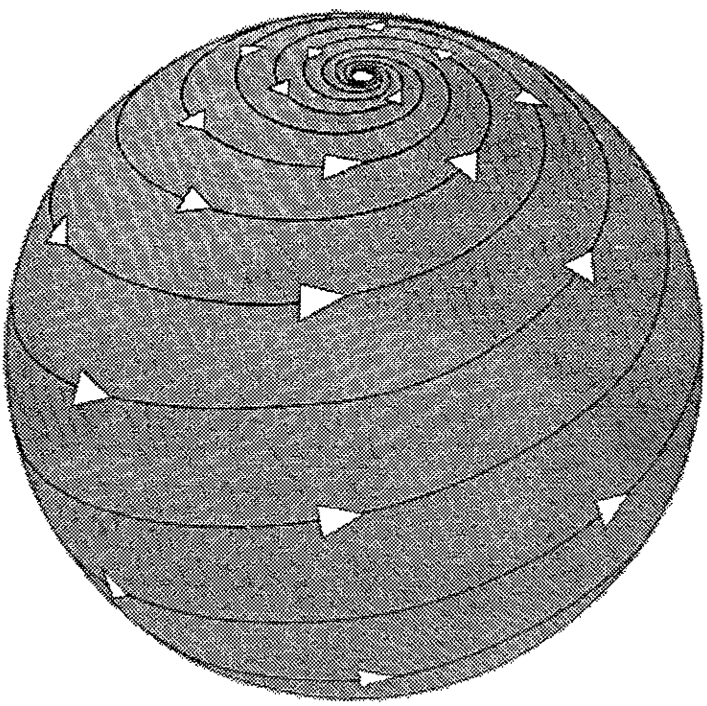

Figura 1.11 Dinámica de una Transformación Loxódromica general en la esfera

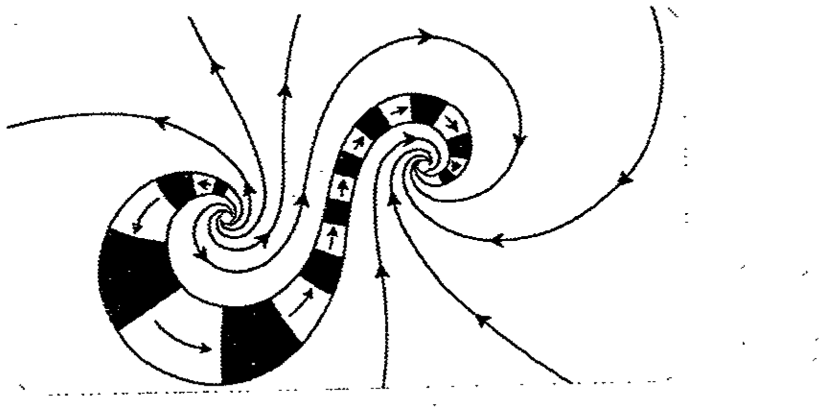

Figura 1.12 Geometría de una Transformación Loxódromica general en la esfera

Sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, y supongamos que $g(\infty) \neq \infty$, es decir $c \neq 0$.

Definición 1.3.8 *Al punto $\alpha = g^{-1}(\infty)$ se le llama el* ***Centro del Círculo Isométrico*** *de g, a su vez $\acute{\alpha} = g(\infty)$ es llamado el centro del círculo isométrico de g^{-1}.*

La familia de círculos que pasan a través de α e ∞ es aplicada por g sobre la familia de círculos que pasan a través de $\acute{\alpha}$ e ∞, de donde las trayectorias ortogonales a la primera es aplicada por g a las trayectorias ortogonales de la segunda. En otras palabras esto nos dice que la familia de círculos centrados en α es aplicada a la familia de círculos centrados en $\acute{\alpha}$.

De entre todos estos círculos existe un único círculo $I = I(g)$ de la primera familia el cual es aplicado por g sobre un círculo del mismo tamaño, y se le conoce como el círculo isométrico de g y su imagen es el círculo isométrico de g^{-1}.

Podemos definir I por medio de la derivada: $\acute{g}(z) = (cz + d)^{-2}$, con lo cual tendríamos que:

$$I = \{z \mid |g'(z)| = |cz+d|^{-2} = 1\},$$

de donde $I' = g(I)$ y $\alpha' = g^{-1}(\alpha)$.

I e I' tienen el mismo radio $\rho = |c|^{-1}$, $\alpha = \frac{-d}{c}$ y $\alpha' = \frac{a}{c}$.

Definición 1.3.9 *Sean z y w dos puntos distintos y sea ϖ el punto medio del segmento γ de longitud mínima que une a z y a w.*

*Entonces la única línea a través de ϖ que es ortogonal a γ es el **bisector perpendicular de** γ.*

Nota:

Para mayor información al respecto puede consultarse [BE], pag164.

Denotemos por $p = p(g)$ la reflexión en I de g y por $q = q(g)$ la reflexión Euclidiana en el bisector perpendicular al segmento entre α y α', si $\alpha = \alpha'$ entonces $q = 1_{Id}$.

Hagamos $r = g \circ (q \circ p)^{-1}$, tenemos entonces que:

$$r^{-1}(\infty) = q \circ p \circ g^{-1}(\infty) = q \circ p(\alpha) = q(\infty) = \infty$$

por ser q Euclidiana.

Por un lado tenemos que

$$r^{-1}(\alpha') = q \circ p \circ g^{-1}(\alpha') = q \circ p \circ g^{-1}(g(\infty)) = q \circ p(\infty) = q(\alpha) = \alpha'.$$

Y por otro lado tenemos que

$$r^{-1}(I') = q \circ p \circ g^{-1}(I') = q \circ p(I) = q(I) = I'.$$

Si r preserva orientación entonces necesariamente es una transformación elíptica de la forma $r(z) = k^2(z - \alpha') + \alpha'$, $|k| = 1$.

Si r no preserva orientación, entonces es de la forma

$r(z) = k^2(\bar{z} - \bar{\alpha}') + \alpha'$, $|k| = 1$.

En ambos casos r es una transformación Euclidiana con puntos fijos en α' e ∞.

([Mk], pag. 8)

Proposición 1.3.10 *Sea $g \in M$, $g(\infty) \neq \infty$, entonces $g = r \circ q \circ p$ donde p es la reflexión en el círculo isométrico de g , y con r y q son transformaciones Euclidianas.*

([Mk], pag. 9)

1.4 Transformaciones Conformes

En esta sección mostraremos la importancia que tienen las transformaciones de Möbius como transformaciones conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ en si mísma.

Definición 1.4.1 *Si S_1 y S_2 son superficies en $\mathbb{R}^3$ entonces decimos que una **aplicación** $f : S_1 \to S_2$ es **conforme** si ésta preserva ángulos; es decir que siempre que se tengan dos curvas c_1 y c_2 en S_1 que se intersecten en un punto Q con ángulo θ, entonces $f(c_1)$ y $f(c_2)$ se intersectan en $f(Q)$ con el mismo ángulo θ, donde el ángulo entre dos curvas está definido como el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de intersección.*

Dada la definición de una aplicación conforme enunciaremos los resultados importantes de ésta sección:

Teorema 1.4.2 *La proyección estereográfica $\pi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{N\}$ (donde N es el polo norte de S^2) y su inversa $\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$ son aplicaciones conformes.*

([JS], Teo. 2.11.1 y Cor 2.11.1 pag. 37)

Si se define el ángulo en ∞ entre dos curvas c_1 y c_2 en $\widehat{\mathbb{C}}$ como el ángulo en el polo norte N de la esfera S^2 entre las curvas $\pi^{-1}(c_1)$ y $\pi^{-1}(c_2)$; se sigue que la proyección estereográfica extendida $\pi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ y su inversa $\pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ son conformes. Ya que la transformación $J : z \longmapsto \frac{1}{z}$ induce una rotación $\pi^{-1}J\pi$ de S^2, mandando un ángulo θ en N a un ángulo θ en el polo sur de S^2. Tenemos así, que el ángulo entre c_1 y c_2 en ∞ es igual al ángulo entre $J(c_1)$ y $J(c_2)$ en 0, así una función f sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es conforme en ∞ si y sólo si $f \circ J$ es conforme en 0.

Definición 1.4.3 *Una aplicación conforme de una superficie orientada en si misma es **directamente** o **indirectamente conforme** si esta preserva o invierte la orientación de la superficie.*

Teorema 1.4.4 *Cada automorfismo (anti-automorfismo) T de $\widehat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo directamente (indirectamente) conforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ en si misma.*

([JS], Teo. 2.11.3, pag. 38)

Teorema 1.4.5 *Cada aplicación directamente (indirectamente) conforme f de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ es un automorfismo (anti-automorfismo) de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

([JS], Teo. 2.11.4, pag. 39)

En otras palabras estos dos últimos resultados nos dicen que el Grupo de Transformaciones de Möbius coincide con el Grupo de todos las aplicaciones conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ que preservan la orientación.

1.5 Grupos Discontinuos

Consideremos a X un espacio topológico y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de X en si mismo.

Recordemos que un grupo G actúa en X (por la izquierda), si se cumple lo siguiente:

Definición 1.5.1 *Si existe una función* $\Theta : G \times X \to X$, *que denotaremos por:* $\Theta(g,x) = g(x)$ *o simplemente* gx, *tal que satisface lo siguiente:*

1) $e(x) = x$, *para toda* $x \in X$ *donde* $e \in G$ *denota al elemento identidad del grupo* G.

2) $\varphi(\psi(x)) = \varphi\psi(x)$, *para toda* $x \in X$ *y para todas* $\varphi,\psi \in G$

Para cada $g \in G$ definimos una función Θ_g de X en X por:

$$\Theta_g(x) = \Theta(g,x) = g(x) = gx.$$

Así que podemos pensar a una acción Θ de G en X como una familia $\{\Theta_g\}_{g\in G}$ de transformaciones biyectivas de X, que respetan la estructura del grupo G, es decir:

1) $\Theta_e = Id_X$.

2) $\Theta_{g\bullet h} = \Theta_g \circ \Theta_h$.

3) $\Theta_{g^{-1}} = \Theta_g^{-1}$.

Obsérvese que las condiciones 2) y 3) anteriores implican que Θ_g es una función biyectiva de X en M, con inversa Θ_g^{-1}.

Sea $S(X)$ el conjunto de todas las permutaciones de elementos de X.

Definición 1.5.2 *Diremos que la* ***Acción*** *de* G *en* X *es* ***Efectiva*** *si para cada* $g \in G$, *la función* $\Psi : G \to S(X)$ *dada por* $g \to \Theta_g$ *es inyectiva; es decir, si* Θ_g *es la* *identidad, entonces $g = e$. En este caso tendremos entonces que G es un subgrupo de $S(X)$.*

Ejemplo 1.5.3 *(Acciones de grupos)*

a) Sean H, G grupos y $\Psi : H \to G$ un homomorfismo de grupos.

Definimos $\Theta : H \times G \to G$ por $\Theta(h,x) = \Psi(h)\,x$, entonces Θ es una acción izquierda de H en G ya que:

i)$\Theta(e,x) = \Psi(e)\,x = x$, para todo $x \in G$.

ii)$\Theta(h_1, \Theta(h_2,x)) = \Theta(h_1, \Psi(h_2)\,x) = \Psi(h_1)(\Psi(h_2)\,x)$.

Por otro lado tenemos $\Theta(h_1h_2,x) = \Psi(h_1h_2)\,x = [\Psi(h_1)\,\Psi(h_2)]x$.

b) Veamos la acción natural del Grupo General Lineal $Gl(n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea $G = Gl(n,\mathbb{R})$ y $X = \mathbb{R}^n$. Definimos $\Theta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como :

$\Theta(A,x) = Ax$.

Esta acción satisface las condiciones trivialmente y la condición de asociatividad se satisface por la asociatividad en el producto de matrices: $(AB)\,x = A\,(Bx)$.

Ya que $\Theta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está dada por polinomios en las entradas de $A \in Gl(n,\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos además que esta acción es infinitamente diferenciable, esto lo denotamos por C^∞ .

Su expresión esta dada por : $\Theta\left((a_{ij}), \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j \right)_i$, $i = 1, ..., n$.

Consideremos ahora a un grupo G actuando sobre un conjunto X, y supongamos que $A \subset X$ es un subconjunto; denotemos por $GA = G(A) = \{ga \mid g \in G, a \in A\}$.

Definición 1.5.4 *Para cada $x \in X$ el conjunto $Gx = \{gx \in X \mid g \in G\}$ es llamada **la órbita** de x bajo G.*

Recordemos que se dice que la acción es transitiva ó 1-trasitiva sobre X si $Gx = X$ para alguna $x \in X$, lo que implica que $Gx = X$ para toda $x \in X$.

Definición 1.5.5 *Cuando la acción es transitiva y existe una única transformación de un punto a otro, la acción se denomina **Simplemente Transitiva**.*

Ejemplo 1.5.6 *(Acciones transitivas)*

a) Consideremos la acción natural de $Gl(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ dada en el ejemplo 2.

El origen es un punto fijo para la acción y además es transitiva sobre $\mathbb{R}^n - \{\bar{0}\}$.

Si $x = (x^1, ..., x^n) \neq \bar{0}$ entonces existe una base para $\mathbb{R}^n$ dada por $\{f_i\}$, $i = 1,...,n$ con $x = f_1$.

Si expresamos estos elementos de la primera base en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, $i = 1,...,n.$, entonces podemos ver que $x = Ae_1$, con $A = (a_{ij}) \in Gl(n, \mathbb{R})$.

b) $Gl(n, \mathbb{R})$ es transitiva también en los marcos o colección de bases de $\mathbb{R}^n$.

Dada cualquier base $\{f_1, ...f_n\}$ existe un elemento $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ de tal manera que $Ae_i = f_i$ y de hecho esta matriz es única.

Dado $f = \{f_1, ... f_n\}$ *y la base canónica, denotamos por* B *el conjunto de todas las bases de* $\mathbb{R}^n$ *entonces podemos definir una acción izquierda de* $Gl(n, \mathbb{R})$ *sobre* B*:*

$\Theta : Gl(n, \mathbb{R}) \times B \to B$ *dada por* $\Theta(A, e) = Ae = f = \{Ae_1, ..., Ae_n\}$, *esta acción es transitiva y por la unicidad de* A *tenemos de hecho que la acción es simplemente transitiva.*

c) La acción de $PSL(2, \mathbb{C})$ *en un par de ternas de puntos distintos de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *es una acción simplemente trasitiva como ya vimos en la sección 1.1.*

Definición 1.5.7 *Sean* G *y* X *como antes. Se dice que* G ***Actúa Libremente*** *en* X, *si para toda* $x \in X$ *se cumple que si* $g(x) = x$ *para algún* $g \in G$, *entonces necesariamente se tiene que* $g = e$.

Ejemplo 1.5.8 *(Acción libre)*

Consideremos la acción de los enteros $\mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{R}$ *de la siguiente manera:*

$$\Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } \Theta(n, a) = a + n.$$

Es claro que esta acción es libre ya que $a + n = a$ *implica que* $n = 0 \in \mathbb{Z}$ *que es el elemento neutro de los enteros, los cuales son un grupo con la suma.*

Definición 1.5.9 *Se dice que la acción de un grupo* G *en un punto* $x \in X$ *es* ***Libremente Discontinua*** *si existe una vecindad* U *de* x *tal que* $g(U) \cap U = \emptyset$ *para todo* $g \in G - \{e\}$, *es decir; que las* G*-traslaciones de* U *son disjuntas. La vecindad* U *que satisface esta condición recibe el nombre de* ***vecindad decente*** *o* ***buena vecindad*** *para la acción.*

Ejemplo 1.5.10 *(Acción libremente discontinua)*

Tomando la acción del ejemplo anterior consideremos un punto cualquiera $x \in \mathbb{R}$ y consideremos la vencindad $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ de x.

Entonces tenemos que para cualquier n en los enteros se tiene:

$$\Theta(n, U) = (n + x - \frac{1}{2}, n + x + \frac{1}{2}) = ((n + x) - \frac{1}{2}, ((n + x) + \frac{1}{2})$$

Que no es otra cosa que una vecindad de radio $\frac{1}{2}$ del punto $(n + x) \in \mathbb{R}$, por lo que si $\Theta(n, U) \cap U = y$ tendríamos que:

$$x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2} \text{ y } (n + x) - \frac{1}{2} < y < (n + x) + \frac{1}{2}$$

Con lo cual tendríamos que se tiene que cumplir simultáneamente que:

$$n + x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2} \text{ y } x - \frac{1}{2} < y < n + x + \frac{1}{2}$$

para todo entero, y esto sucede solamente si y sólo si $n = 0$, lo cual nos dice que la acción es libremente discontinuamente.

Definición 1.5.11 *El conjunto de puntos donde la acción de G es libremente discontinua se denomina el* ***Conjunto Libre Regular*** *y lo denotaremos por Ω°.*

Ejemplo 1.5.12 *Conjunto libre regular*

En el ejemplo 1.5.10 vimos que los enteros actúan libremente discontinuamente en todo $\mathbb{R}$.

En general, si se tiene un espacio topológico X y una relación de equivalencia $\sim$ definida sobre X, denotaremos por $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ a la clase de equivalencia de x, y para un subconjunto no vacío $A \subset X$ denotemos por $[A] = \cup_{a \in A}[a]$.

Sea $X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia y denotemos por $\Pi : X \to X/\sim$ la proyección natural que asigna a cada $x \in X$ su clase de equivalencia. Π está dada por la regla $\Pi(x) = [x]$ para cada $x \in X$. Con esta notación definimos la topología cociente sobre $X/\sim$ como sigue: $U \subset X/\sim$ es abierto si y sólo si $\Pi^{-1}(U)$ es abierto en X, por lo que de manera natural se tiene que Π es continua.

Cuando tenemos una acción de grupo en un conjunto X, el grupo G divide X en clases de equivalencia, las cuales están determinadas de la siguiente manera:

Sean X y G como antes; diremos que x y $y \in X$ están en la misma clase de equivalencia, o son G-**Equivalentes** si están en la misma G-órbita. Es decir si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$, y en este caso decimos que y es una G-**Traslación** de x o simplemente una **Traslación** de x.

El espacio de clases de equivalencias que es denotado por X/G se le conoce como el **Espacio de Órbitas** de la acción. Podemos dar a este espacio una topología a saber, la topología cociente, la cual está dada por el requisito como se dijo anteriormente de que la proyección $p : X \to X/G$ sea abierta y continua.

Ejemplo 1.5.13 *En el ejemplo 1.5.8 dimos la acción de los enteros $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ dada por:*

$$\Theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; con \; \Theta(n, a) = a \pm n.$$

Entonces haciendo $X = \mathbb{R}$ y tomando está acción definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x - y \text{ es un entero.}$$

El espacio de clases de equivalencia no es otra cosa que el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ con *la topología de subespacio de* $\mathbb{R}^2$ *y se denota por* S^1.

Analicemos ahora como toda la teoría desarrollada hasta el momento se relaciona con el grupo de transformaciones de Möbius actuando sobre la esfera de Riemann.

Definición 1.5.14 *Un subgrupo* G *de* M *cuya acción sobre* $\widehat{\mathbb{C}}$ *es libremente discontinua en algún punto* $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ *es llamado un* ***Grupo Kleiniano.***

Ejemplo 1.5.15 *Grupos Kleinianos*

a) Sea G *el grupo generado por una traslación real actuando sobre* $\mathbb{R}$ *, entonces todo elemento de* G *es de la forma* $z \to z + na$*, con* $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$.

b) Sea G *el grupo de rotaciones de* $\mathbb{R}^2$ *actuando sobre el círculo unitario dado por* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| = 1\}$*, cada elemento es de la forma* $z \to \exp(i\theta)z$ *con* $\theta \in \mathbb{R}$*, entonces* G *es Kleiniano si y sólo si* G *es finito y cíclico; y esto sucede si y sólo si* θ *es un número racional.*

Nota:

El último ejemplo nos proporciona una manera fácil de conseguir un ejemplos de grupos que no sean Kleinianos:

Para esto consideremos el grupo G generado por la transformación $T(z) = \exp(i\theta)z$ con θ un número irracional junto con la identidad. Entonces se tiene que para toda $z \in \mathbb{C}$ la G-órbita de z en un subconjunto denso sobre el círculo de radio $r = |z|$. Por lo que no existe ningún punto donde la acción de este grupo sea libremente discontinua y por lo tanto este grupo no es Kleiniano.

Proposición 1.5.16 *Sea G un subgrupo del grupo de transformaciones de Möbius actuando libremente discontinuamente sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces el cociente Ω°/G es un espacio Hausdorff.*

Demostración: Dados x y y dos puntos de Ω° no equivalentes, debemos mostrar que existen vencindades U, V de los puntos respectivamente tal que $g(U) \cap V = \emptyset$ para toda $g \in G - \{e\}$. Como G actúa libre y discontinuamente en Ω° , podemos escoger buenas vecindades U, V de x y y respectivamente. Ya que V es una buena vecindad existe a lo más otro elemento de la G-órbita de x en V, de donde si es necesario hacemos V más pequeña de tal manera que ninguna traslación de x viva en $\bar{V}$.

Ya que las G-traslaciones de U son discos disjuntos, si U es un disco; la suma de sus áreas esféricas es menor que el área de S^2 de donde el diámetro esférico de cualquier sucesión de éllos tiende a cero. Ya que si hubiera una sucesión de trasladados de U cuyo diámetro fuera mayor que ε por la propiedad Arquimedeana existiría un natural n_0 tal que $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$, pero como los trasladados de U son ajenos tendríamos por un lado que

$$\sum_{g \in G} A(g(U)) < A(S^2)$$

y por otro lado tenemos que

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in N} \frac{1}{n_0} \leq \sum_{g \in G} A(g(U)),$$

(donde $A(g(U))$ es el area de $g(U)$). Como se sabe la serie $\sum_{n \in N} \frac{1}{n}$ diverge, con lo cual llegaríamos a una contradicción.

Como las traslaciones de x no pueden acumularse en ningún punto de Ω° (dado que cada punto que está en Ω° tiene una buena vecindad la cual contiene a lo más una traslación de cada punto), solamente un número finito de traslaciones de U intersectan a V. Para cada $g \in G$ que cumple con $g(U) \cap V \neq \emptyset$, existe $\grave{U} \leq U$, que es un refinamiento de U tal que $g\left(\grave{U}\right) \cap V = \emptyset$ después de un número finito, tomamos la vecindad más chica de los $\grave{U}$ y esta es tal que $g\left(\grave{U}\right) \cap V = \emptyset$ para toda $g \in G$. ■

Analicemos un poco más las propiedades que tiene el grupo de transformaciones de Möbius.

En general si tenemos dos espacios topológicos X y Y, y conjuntos de la forma $S(K,U) = \{f \mid f \in C^{\circ}(X,Y), f(K) \subset U\}$, con U abierto en Y y K compacto en X. Estos conjuntos forman una sub-base para la topología compacto abierta sobre el espacio $C^{\circ}(X,Y)$ de funciones continuas de X a Y que también denotaremos por $C^{\circ}\left(Y^X\right)$, donde Y^X es el espacio de funciones de X a Y.

Sea (Y,d) es un espacio métrico y X es un espacio topológico.Dado $f \in Y^X$, K un subconjunto compacto de X y $\varepsilon > 0$, denotemos por

$$B_K(f,\epsilon) = \{g \in Y^X \mid \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in K\} < \varepsilon\}.$$

Estos $B_K(f,\epsilon)$ forman una base para la topología de convergencia uniforme sobre Y^X. En el caso en que Y es espacio métrico, la topología de convergencia uniforme y compacto abierta coinciden.

El grupo de Möbius dado por $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) : ad - bc \neq 0\}$ tiene una topología natural definida de la siguiente manera: Una sucesión $\{g_m\}$ de elementos de M converge a $g \in M$, si existen matrices $\tilde{g}_m$ y $\tilde{g} \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que cada entrada en $\tilde{g}_m$ converge como número complejo a la correspondiente entrada en $\tilde{g}$.

Esta topología es equivalente a la topología definida por la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Como para grupos Kleinianos trabajamos sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ que es espacio métrico, tenemos la condición arriba señalada; por lo el grupo de transformaciones de Möbius es un grupo topológico con una topología métrica.

Definición 1.5.17 *Por un **Grupo Discreto** Γ entenderemos un grupo con un número contable de elementos con la topología discreta. Equivalentemente un grupo discreto es un grupo topológico Γ en el cual todos sus puntos son abiertos.*

El hecho de que Γ sea contable implica que tiene base numerable de conjuntos abiertos cada uno homeomorfo a un espacio Euclidiano de dimensión cero, es decir, un punto.

Dado un grupo topológico G y un espacio topológico X, decimos que la acción es continua se la función $\Theta : G \times X \to X$ es continua, con respecto a la topología producto en el espacio $G \times X$.

Cuando G es un grupo topológico actuando sobre un espacio topológico X y la acción Θ es continua, tenemos que como Θ_g es biyectiva entonces Θ_g es un homeomorfismo.

Lema 1.5.18 *Un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda sucesión convergente $\{x_n\}$ en X es eventualmente constante.*

([Rat], lema 2 pag. 162)

Proposición 1.5.19 *Sea G un subgrupo no discreto de M, entonces existe una sucesión de elementos distintos de G que convergen a la identidad.*

Demostración: Ya que G es no discreto existe una sucesión $\{g_m\}$ de G convergente a algún elemento $g \in M$, la cual no es eventualmente constante. Tomando un representante en la clase de conjugación de g en G de tal manera que g sea $z \to z+1$ ó $z \to \lambda z$ y elíptica.

Tenemos que $g_{m+1} \to z+1$ ó $g_{m+1} \to \lambda z$, y como en un grupo topológico la función $h \to h^{-1}$ es continua tenemos que $g_m^{-1} \to z-1$ ó $g_m^{-1} \to \frac{1}{\lambda} z$. En ambos casos $g_{m+1} \circ g_m^{-1}$ convergen a la identidad. ■

Proposición 1.5.20 *Sea G un grupo Kleiniano entonces G es discreto en M.*

Demostración: Supongamos que G no es discreto, entonces existe una sucesión de elementos distintos de G , $\{g_m\}$ de tal manera que $g_m \to 1$ la función identidad, así que $g_m(z) \to z$, para toda z. De donde para toda $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ un número infinito de g_m cumplen con $g_m(z) = z$ ó hay un número infinito de traslaciones de z en cada vecindad de z , en ambos casos $z \notin \Omega^{\circ}$. Que es una contradicción al hecho de que G era Kleiniano. ■

Definición 1.5.21 *Un grupo discreto Γ se dice que* ***Actúa Propiamente Discontinuamente*** *sobre un espacio topológico X si la acción es continua y satisface las siguientes condiciones:*

1) Cada $x \in X$ tiene una vecindad U tal que el conjunto $\{h \in \Gamma \mid h(U) \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.

2) Si x, y no son equivalentes y están en X, entonces existen vecindades U, V de x y y respectivamente tal que $U \cap \Gamma(V) = \emptyset$.

Si X es un espacio de Hausdorff en su topología, es decir; que los puntos en X son conjuntos cerrados, entonces tenemos que la órbita es un subconjunto cerrado ya que es la imagen inversa de un cerrado.Tenemos así que la condición 2) implica que X/Γ es un espacio Hausdorff.

La condición 1) es equivalente a la siguiente:

1') El subgrupo de isotropía $\Gamma_x = \{h \in \Gamma \mid h(x) = x\}$ de cada $x \in X$ es finito y cada x tiene una vecindad U tal que $hU \cap U = \emptyset$ si $h \notin \Gamma_x$ y $hU = U$ si $h \in \Gamma_x$.

Denotemos por $X = \tilde{X}/\Gamma$, y por $\Pi : \tilde{X} \to X$ la proyección al cociente, dando al espacio X la topología cociente.

Una condición necesaria para que X tenga algún tipo de topología decente y estructura de variedad es que para cada $x \in \tilde{X}$ la órbita Γx sea un conjunto cerrado de $\tilde{X}$, pero esto sin embargo no es suficiente.

Definición 1.5.22 *Supongamos que se tiene definida una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto S.*

A el conjunto $\Gamma = \{(s, s') \mid s \sim s'\} \subset S \times S$ se le llama la ***gráfica de la relación de equivalencia*** $\sim$.

La ***gráfica*** *es llamada* ***abierta (cerrada)*** *si $\Pi : S \to S/\sim$ es abierta (cerrada).*

La relación $\sim$ es abierta si y sólo si para cualquier conjunto abierto $A \subset S$ el conjunto $\Pi^{-1}(\Pi(A))$ es abierto.

Lema 1.5.23 *Una relación de equivalencia $\sim$ sobre X es abierta si y sólo si Π es abierta .*

Cuando $\sim$ es abierta y X tiene base numerable de conjuntos abiertos entonces $X/\sim$ tiene base numerable también.

Demostración: Sea $A \subset X$ un conjunto abierto. Ya que $[A] = \Pi(A)$ por definición de la topología cociente sobre $X/\sim$ vemos que $[A]$ es abierto si Π es abierta y recíprocamente si $[A]$ es abierto entonces $\Pi(A)$ es abierto.

Ahora supongamos que $\sim$ es abierta y X tiene base numerable $\{U_i\}$ de conjuntos abiertos.

Si W es abierto de $X/\sim$ entonces $\Pi^{-1}(W) = \cup_{j\in J} U_j$ para alguna subfamilia de $\{U_i\}$ y $W = \Pi(\Pi^{-1}(W)) = \cup_{j\in J}\Pi(U_j)$. Se sigue entonces que el conjunto $\{\Pi(U_i)\}_{i\in I}$ es base de conjuntos abiertos para $X/\sim$. ■

Proposición 1.5.24 *Si $S/\sim$ es Hausdorff entonces la gráfica Γ de la $\sim$ es cerrada en $S \times S$.*

Por otro lado si $\sim$ es abierta y Γ es cerrado (en $S\times S$), entonces $S/\sim$ es Hausdorff.

Demostración: Si $S/\sim$ es Hausdorff entonces el conjunto $\Delta_S/\sim$ es cerrado, dado que S es un espacio topológico de Hausdorff si y sólo si la diagonal dada por $\Delta_S = \{(s,s) \mid s \in S\} \subset S \times S$ es un subespacio cerrado de $S \times S$ con la topología producto.

S es Hausdorff si y sólo si para p, $q \in S$ existen U_p, U_q vecindades de los puntos tal que satisfacen lo siguiente: $(U_p \times U_q) \cap \Delta_S = \emptyset$ donde $\Gamma = (\Pi \times \Pi)^{-1}(\Delta_{S/\sim})$ es cerrado en $S \times S$, y la aplicación $\Pi\times\Pi : S \times S \to (S/\sim) \times (S/\sim)$ está dada por

$$(\Pi \times \Pi)(x,y) = ([x],[y]).$$

Asumamos ahora que Γ es cerrada y $\sim$ es abierta.

Si $S/\sim$ no es Hausdorff existen puntos $[x],[y]\in S/\sim$ diferentes tales que para cualquier vecindades U_x y U_y tenemos que $U_x\cap U_y\neq\emptyset$. Sean V_x y V_y vecindades abiertas de x y y respectivamente como $\sim$ es abierta $\Pi(V_x)=U_x$ y $\Pi(V_y)=U_y$ son vecindades abiertas de $[x],[y]$ en $S/\sim$.

Ya que $U_x\cap U_y\neq\emptyset$, existen puntos $\bar{x}\in V_x$ y $\bar{y}\in V_y$ tal que $[\bar{x}]=[\bar{y}]$ i.e. $(\bar{x},\bar{y})\in\Gamma$ de donde $(x,y)\in\bar{\Gamma}$.

Como Γ es cerrado $(x,y)\in\Gamma$ entonces $[x]=[y]$ lo cual es una contradicción al hecho que los puntos eran distintos. ■

Ejemplo 1.5.25 *Sean $M=S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ y $G=\mathbb{Z}_2$, que como conjunto $\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$; y consideremos la acción $\Theta:\mathbb{Z}_2\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ dada por $1(x)=x$ y $-1(x)=-x$, que no es otra cosa que la transformación antípoda. La acción es libre y propiamente discontinua y además $S^{n-1}/G\cong P^{n-1}(\mathbb{R})$ que es el espacio proyectivo real de dimensión $n-1$. Como la acción es propiamente discontinua, tenemos como consecuencia que $P^{n-1}(\mathbb{R})$ es un espacio de Hausdorff y de hecho es una variedad.*

1.6 El Conjunto Límite

Definición 1.6.1 *Sea G un grupo Kleiniano.*

a)Un punto $x\in\widehat{\mathbb{C}}$ es un **Punto Límite** *de G, si existe $z\in\Omega^{\circ}$ y una sucesión infinita $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z)\to x$.*

b)El conjunto de puntos límites de G se llama el **Conjunto Límite** *de G y lo denotamos por $\Lambda(G)$ o simplemente por Λ.*

Obsérvese que, en principio, esta definición depende del punto z con el cual empezamos, y por lo tanto este conjunto debiera denotarse por $\Lambda_z(G)$; sin embargo, como veremos más adelante, la definición de conjunto límite no depende del punto con el que se empieza.

Ya que toda vecindad de un punto de $\Lambda(G)$ contiene un número infinito de traslaciones de algún punto $z \in \Omega^{\circ}$ tenemos que $\Lambda \cap \Omega^{\circ} = \emptyset$.

Teorema 1.6.2 *Sea x un punto límite para un grupo Kleiniano G, entonces existe un punto límite y, y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z) \to x$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$.*

Demostración: Ya que x es un punto límite de G existe $z_0 \in \Omega^{\circ}$ y una sucesión $\{g_m\}$ tal que $g_m(z_0) \to x$.

Conjugando por un elemento de G podemos suponer que $z_0 = \infty$. Escojamos una subsucesión $\{g_{m_n}\}$ de $\{g_m\}$ tal que $\alpha_m = g_{m_n}^{-1}(\infty) \to y$, donde y es un punto límite, descomponiendo g_{m_n} en la forma $g_{m_n} = r \circ q \circ p$, donde p es la reflexión en el círculo isométrico del elemento de la sucesión g_{m_n} y con r y q transformaciones Euclidianas. Vemos así que la sucesión formada por los centros de los círculos isométricos de los g_{m_n} converge al punto y. Tenemos que g_{m_n} aplica el exterior de su círculo isométrico sobre el interior del círculo isométrico de $g_{m_n}^{-1}$, su radio común tiende a cero, de donde los centros de los círculos isométricos de los $g_{m_n}^{-1}$ convergen al punto x. ∎

Se sigue de lo anterior que la definición de un punto límite depende solamente sobre la sucesión de elementos del grupo y no del punto en Ω°, es decir; si $\{g_n\}$ es una sucesión de elementos del grupo G y $g_n(z_0) \to x$ para algún $z_0 \in \Omega^{\circ}$ entonces existe una sucesión $\{g_m\}$ tal que $g_m(z) \to x$ para toda $z \in \Omega^\circ$.

Definición 1.6.3 *Si G actúa en X y Y es un subconjunto de X, el* ***Estabilizador*** *de Y en G, denotado por $Stab_G(Y)$, es $Stab_G(Y) = \{g \in G \mid g(Y) = Y\}$. $Stab_G(Y)$ es siempre un subgrupo de G.*

Un conjunto Y es ***G-Invariante*** *si y sólo si $Stab_G(Y) = G$.*

Teorema 1.6.4 *Sea G un grupo Kleiniano. Entonces Λ es cerrado, distinto del vacío y G-invariante.*

Demostración: Como G es un grupo Kleiniano, existe un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, una vecindad U de z y una sucesión $\{g_n\}$ de elementos distintos de G donde la acción es libremente discontinua. Consideremos la sucesión $\{g_n(z)\}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$; como $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio compacto tenemos que existe una subsucesión convergente de $\{g_n(z)\}$. De aquí se tiene que Λ es distinto del vacío.

Consideremos ahora un punto $x \in \Lambda$ y $g \in G$. Como x es un punto límite, existe una sucesión $\{g_m\}$ y un punto $z \in \Omega^\circ$ tales que $g_m(z) \to x$. Entonces la sucesión $g \circ g_m(z)$ converge y como g es continua, esto implica que $(g \circ g_m)(z) \to g(x)$. Luego, $g(x) \in \Lambda(G)$, para toda $g \in G$. Por lo tanto Λ es G-invariante.

Para ver que Λ es cerrado, sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos en Λ de tal manera que $x_m \to x$. Para cada x_m podemos encontrar un punto $z \in \Omega^\circ$ y sucesiones $\{g_{m,k}\}$ tal que $g_{m,k}(z) \to x_m$. Asumamos, sin pérdida de generalidad que los x_m son distintos entre si y diferentes de x. Sea δ_m=min$\{d(x_m, x_i) \mid i \in I\}$ y para cada m escojamos $k(m)$ de tal manera que $d\left(g_{m,k(m)}(z), x_m\right) \leq \frac{\delta_m}{2}$. Entonces $\{g_{m,k(m)}\}$ es una sucesión de elementos distintos de G que satisfacen que $g_{m,k(m)}(z) \to x$.

Esto implica que $x \in \Lambda$ y por lo tanto Λ es un conjunto cerrado. ■

1.7 Partición de la Esfera de Riemann

Definición 1.7.1 *Decimos que un grupo G* ***Actúa Discontinuamente*** *en un punto $x \in X$ si existe una vecindad U de x, con $U \subset X$ tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para toda $g \in G$ excepto un número finito.*

El conjunto de puntos donde la acción de G es discontinua se le llama el ***Conjunto de Discontinuidad*** *o* ***Conjunto Regular*** *y es denotado por $\Omega = \Omega(G)$.*

En general un conjunto Y se dice que es **Precisamente Invariante** bajo el subgrupo H de G si:

i) $H = Stab_G(Y)$.

ii) $g(Y) \cap Y = \emptyset$, para toda $g \in G - \{H\}$.

Entonces podemos decir que un punto $x \in \Omega^{\circ}$ si y sólo si existe una vecindad U del punto x, la cual es precisamente invariante bajo la identidad en G.

-De ahora en adelante en lo que resta de este apartado G será un grupo Kleiniano salvo se indique otra cosa.-

Proposición 1.7.2 $\mathrm{x} \in \Omega(\mathrm{G})$ *si y sólo si:*

i) $Stab_G(x)$ es finito.

ii) Existe una vecindad U de x la cual es precisamente invariante bajo el $Stab_G(x)$.

Demostración: Si G actúa discontinuamente en x, entonces $H = Stab_G(x)$

necesariamente es finito. Ya que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ para un número finito de $g \in G$, podemos encontrar una vecindad más pequeña V tal que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ solamente para $g \in H$. Entonces $\cap_{g \in H} g(V)$ es claramente una vecindad de x la cual es precisamente invariante bajo H. Si $Stab_G(x)$ es finito y U es precisamente invariante bajo $Stab_G(x)$ entonces $g(U) \cap U \neq \emptyset$ solamente para un número finito de elemento del grupo G, es decir; $x \in \Omega(G)$. ■

Definición 1.7.3 *Una vecindad U de un punto $x \in \Omega$ es una* ***Buena Vecindad*** *si es precisamente invariante bajo $Stab_G(x)$.*

Como toda vecindad en $\widehat{\mathbb{C}}$ contiene una vecindad homeomorfa a un disco con las mismas propiedades, sin pérdida de generalidad podemos asumir que éstas son circulares.

Teorema 1.7.4 *Para cualquier grupo Kleiniano G, tenemos que $\widehat{\mathbb{C}} = \Lambda \sqcup \Omega$, (union disjunta).*

Demostración: Si z es punto límite entonces cualquier vecindad U de z contiene una infinidad de traslaciones de algún punto, de donde existen una infinidad de elementos distintos de G para los cuales tenemos que $g(U) \cap U \neq \emptyset$, de donde deducimos que $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$ es decir que son conjuntos ajenos o disjuntos.

Asumamos que $x \notin \Omega$, entonces para toda U vecindad de x existen un número infinito de traslaciones U la cual la intersectan. De donde podemos encontrar una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G y una sucesión de puntos $\{z_m\}$, de tal manera que $g_m(z_m) \to x$ y además $z_m \to x$, entonces existe una subsucesión con $g_m(z) \to w$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de el complemento de y, donde y y w son puntos límites. Si $x = y$ entonces $x \in \Lambda$, si $x \neq y$ entonces $\{z_m\}$ no converge a y, así $g_m(z_m) \to w$, es decir $x = w \in \Lambda$. ■

En general Ω puede tener varias componentes conexas y éstas son llamadas las componentes del grupo G, como Ω es un conjunto abierto, G tiene a lo más un conjunto numerable de componentes.

Todo punto de $\Omega - \Omega^{\circ}$ es el punto fijo de un elemento elíptico de G, por lo que se ve ahora claro por que el $Stab_G(x)$ es finito, ya que en una acción libremente discontinua no tenemos los elementos elípticos que son elemento cíclicos de orden finito.

Proposición 1.7.5 $\Omega - \Omega^{\circ}$ *es un subconjunto discreto de* Ω.

Demostración: Sea $\{z_m\}$ una sucesión de puntos en $\Omega - \Omega^{\circ}$. Para cada m existe un elemento no trivial $g_m \in Stab_G(z_m)$. Ya que cada g_m tiene a lo más dos puntos fijos podemos encontrar una subsucesión tal que las g_m sean todas distintas. Escojamos por otra parte una subsucesión de la sucesión $\{z_m\}$ de tal manera que $z_m \to w$ y tal que $g_m(z) \to x$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$. Ya que $g_m(z_m) = z_m$ tenemos que $w = y$ ó $w = x$ en ambos casos $w \in \Lambda$. ■

Corolario 1.7.6 Ω° *es un conjunto denso en* $\sum$.

Esto nos implica inmediatamente que Λ es un subconjunto denso en ninguna parte.

Proposición 1.7.7 *Si existe una sucesión* $\{g_m\}$ *de elementos distintos de* G *y existe* $y \in \Omega$ *tal que* $g_m(y) \to x$, *entonces* $g_m(z) \to x$ *para toda* $z \in \Omega(G)$.

1.8 Superficies de Riemann

Recordemos que una **superficie de Riemann** es un par (X, Ψ), donde X es una variedad conexa bidimencional (real) y Ψ es una estructura compleja sobre X.

Teorema 1.8.1 *Sea G un grupo Kleiniano, entonces el cociente Ω/G es una superficie de Riemann (posiblemente disconexa).*

Demostración: Sea $S = \Omega/G$. Como G actúa propiamente discontinuamente sobre Ω este espacio es Hausdorff.

Sean x y y puntos no equivalentes en Ω, y sean U' y V' buenas vecindades de x y y respectivamente. Ya que U' , $V' \subset \Omega$ son buenas vecindades solamente un número finito de traslaciones de U' intersectan V', por lo que haciendo las vecindades más pequeñas obtenemos dos nuevas vecindades U, V de x y y respectivamente, tal que su intersección sea vacía. Ya que G tiene a lo más un conjunto numerable de componentes , S también por lo que tiene base numerable para su topología. Tomemos $z \in \Omega^{\circ}$ y sea U una buena vecindad de z. Sea $p : \Omega \to \Omega/G$ la proyección canónica al cociente. Ya que $p \mid U$ es inyectiva , obtenemos que p^{-1} está bien definida sobre $p\,(U)$ de donde podemos escoger $p^{-1}\,(p\,(z))$ como sistema local de coordenadas. Si U y U' se traslapan para algún punto entonces $p^{-1} \circ p$ define justamente un elemento de G.

Tomemos ahora $z \in \Omega - \Omega^{\circ}$ y una buena vecindad U para z. Denotemos por J al $Stab_G\,(z)$; como éste es un conjunto finito todo elemento no trivial de J es elíptico y todos tiene al segundo punto fijo en común digamos z'. Conjugando podemos obtener que $z = 0$ y $z' = \infty$, de donde los elementos de J son de la forma: $z \to \exp\left(\frac{2\pi i p}{q}\right) z$.

Como el conjunto es finito existe un común denominador n de tal manera que

$J = \{z \to \exp\left(\frac{2\pi i p}{q}\right)$ tal que $m = 1, 2, ..., n.\}$, es decir; J es cíclico.

La función $f(z) = z^n$ sirve como proyección de U en U/J lo que quiere decir que dos puntos z_1 y z_2 son J-equivalentes en U si y sólo si $f(z_1) = f(z_2)$.

La imagen de U bajo f es un disco centrado en el origen donde f, cubre a la imagen n veces excepto al origen. En ambos casos observamos que las funciones de transición de un sistema coordenado a otro en las intersecciones de sus dominios son elementos del grupo G, que es el que está actuando sobre el espacio y para este caso tenemos que estos elementos son transformaciones de Möbius, y estas son funciones holomorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ que a su vez son homeomorfismos, por lo que de manera natural al tener la acción de un grupo Kleiniano sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenemos en el espacio cociente una estructura de Superficie de Riemann. ∎

Dentro de toda la teoría de grupos Kleinianos el caso cuando el subgrupo que está actuando en $\widehat{\mathbb{C}}$ de el grupo de transformaciones de Möbius es finitamente generado fué estudiado primeramente por Ahlfors, L. V. (ver[Ah]) donde describe como son las Superficies de Riemann obtenidas por estos subgrupos, anexamos referencias para su demostración la cual no incluimos pues rebasa el propósito de esta exposición.

Definición 1.8.2 *Un **Grupo Kleiniano** G es **Analíticamente Finito** si Ω/G es una superficie de Riemann marcada, es decir; una superficie posiblemente disconexa sin un número finito de puntos. Análogamente se dice en este caso que Ω/G es una **Superficie de Riemann Analíticamente Finita**.*

Teorema 1.8.3 *Sea G un grupo Kleiniano finitamente generado. Entonces Ω/G es una union finita de Superficies de Riemann analíticamente finitas.*

Para la demostración puede consultarse [MT], pag. 108.

1.9 Dominio Fundamental

Definición 1.9.1 *Un **Dominio Fundamental** D para un grupo Kleiniano G, es un subconjunto abierto de Ω que satisface las siguientes condiciones:*

i) D es precisamente invariante bajo la identidad de G.

ii) Para toda $z \in \Omega$, existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \bar{D}$ es decir: $p : \bar{D} \cap \Omega \to \Omega/G$ es sobre.

iii) La frontera de D, denotada por ∂D, consiste de puntos límites de G y una colección finita o numerable de curvas,donde cada curva vive en D excepto por uno o ambos puntos finales en Ω, y que éstos al ser intersectados con Ω son los lados de D.

iv) Los lados son aplicados unos con otros por G, es decir; si s es un lado de D entonces existe un lado s' no necesariamente distinto de s y un elemento no trivial $g \in G$, llamada transformación de apareamiento de lados que cumple con: $g(s) = s'$ y $(s')' = s$, donde la transformación de s' a s es g^{-1}.

v) Si $\{s_m\}$ es una sucesión de lados de D, entonces el diámetro esférico denotado por $Diam\,(s_m)$, cumple que $Diam\,(s_m) \to 0$ y los lados de D solamente se acumulan en puntos límites.

vi) Solamente un número finito de traslaciones de D intersectan cualquier subconjunto compacto de Ω.

Observaciones:

La primera condición nos dice que D es disjunta de todas sus traslaciones, es decir; que ningún par de puntos de D son G-equivalentes o que la aplicación $p : \Omega \to \Omega/G$ es inyectivo sobre D.

La segunda dice que p aplica $\bar{D} \cap \Omega$ sobre Ω/G o que $\Omega \subset \cup_{g \in G} g\left(\bar{D}\right)$.

Para propósitos analíticos requerimos que la medida bidimencional de ∂D sea igual a cero.

Si existe un lado s y una transformación de apareamiento g, tal que $g(s) = s$ entonces, como la transformación de apareamiento de s' a s es g^{-1} tenemos que $g = g^{-1}$ por lo que $g^2 = 1_{Id}$.

Denotemos por $\tilde{D} = \bar{D} \cap \Omega$. Tenemos que las identificaciones de lados induce una relación de equivalencia sobre $\tilde{D}$.

Un punto interior será equivalente solamente a sí mismo, si x y y viven sobre lados de D y existe $g \in G$ que satisface $g(x) = y$ entonces x y y son equivalentes.

Sea D^* la factorización de $\tilde{D}$ por su relación de equivalencia es decir $D^* = \tilde{D}/\sim$, con la topología cociente.

Observemos que x y y son puntos equivalentes de $\tilde{D}$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.

De donde la proyección p da una aplicación natural de D^* en Ω/G que denotaremos por φ, expresando a $\rho : D^* \to \Omega/G$ y que satisface el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} & \longrightarrow_p & \Omega/G \\ \sim\searrow & & \nearrow_\varphi \\ & D^* & \end{array}$$

Teorema 1.9.2 *$\varphi : D^* \to \Omega/G$ es un homeomorfismo.*

Lema 1.9.3 *Si x es un punto de $\tilde{D} = \bar{D} \cap \Omega$ entonces existe a lo más un número finito de puntos en $\tilde{D}$ equivalentes a x.*

Demostración: (lema)

Consecuencia de la condición iv) de la definición de Dominio Fundamental. ■

Demostración: (teorema)

Por la condición ii) tenemos que φ es suprayectiva y la condición i) nos dice que φ restringida a D es inyectiva. Ya que D es abierto ,$\varphi \mid D$ es un homeomorfismo local.

1) Si x es un punto interior de un lado s entonces existe g y un lado s' tal que $g(s) = s'$ y denotemos por $x' = g(x)$.

a) $x' \neq x$.

Sean δ (δ') las mínimas distancias entre : $x(x')$ y $x'(x)$, cualquier vértice de D, cualquier punto límite de G o cualquier punto fijo de G respectivamente.

Por la condición v) δ y δ' son ambos positivos. Escojamos un número $\rho \leq \frac{\min(\delta,\delta')}{2}$ de tal manera que la bola de radio ρ de x sea una buena vecindad de x.

Escojamos puntos y_1, y_2 sobre s cada uno a cada lado de x sobre s dentro de el disco de radio ρ de x. Conectemos y_1 a y_2 por una curva la cual viva en D salvo por sus puntos finales y que también viva en el disco de radio ρ de x la cual define una vecindad U de x en $\tilde{D}$.

Similarmente escojamos una curva que conecte a los puntos $g(y_1)$, $g(y_2)$ y defina una vecindad U' de x' en $\tilde{D}$. Sabemos que todo punto de $D \cap U$ ó $D \cap U'$ es sólo equivalente a si mismo. También todo punto de $s \cap U$ es equivalente solamente al correspondiente punto de $s' \cap U'$.

Hagamos $V = U \cup g^{-1}(U')$, y notemos que V es una vecindad de x y ya que también está contenida en la bola de radio ρ, tenemos que es una buena vecindad de x. Ya que ningún par de puntos de $V - \{s\}$ son equivalentes obtenemos que ningún par de puntos de V son equivalentes , de donde ρ restringida a la proyección de $U \cup U'$ es un homeomorfismo.

b) Si $x' = x$. Entonces tenemos que $g^2 = 1_{Id}$.

En este caso sea δ la mínima distancia de x a: cualquier vértice de D, o a cualquier otro punto fijo de G o cualquier otro punto límite de G.

Escojamos ahora ρ, y_1, y_2 y una curva que los conecte como antes excepto que $y_2 = g(y_1)$, definiendo nuevamente una vecindad U de x en $\tilde{D}$. Los puntos de $U \cap D$ son equivalentes solo a si mismos, cada punto $z \in U \cap s$ excepto para x es equivalente solamente a $g(z)$, el cual por construcción también vive en U y x que es equivalente solo a si mismo. Sea $V = U \cup g(U)$ entonces V es una buena vecindad precisamente invariante de x, ya que s divide a V en dos partes una de las cuales es precisamente invariante bajo la identidad de G, tenemos que V es una buena vecindad de x por lo que φ restringida a la proyección de U es un homeomorfismo.

2) Sea ahora $x = x_1$ un vértice.

Entonces existe un lado s_1 el cual contiene a x_1 como punto final. Sea s_1' el lado de apareamiento y $g_1 : s_1 \to s_1'$ la correspondiente transformación de apareamiento. Hagamos $x_2 = g_1(x_1)$, entonces existe $s_2 \neq s_1'$ el cual tiene a x_2 como punto final y existe s_2' el correspondiente lado y g_2 tal que $g_2(s_2) = s_2'$, y así haciendo $x_3 = g_2(x_2)$ etc.

Como $x \in \tilde{D}$ solamente existe un número finito de puntos de $\tilde{D}$ equivalentes a x, por la condición vi) este proceso es finito, es decir existe una n tal que $s_n = s_1$.

Construiremos una vecindad de x escogiendo puntos y_m como antes sobre s_m y $y'_m = g_m(y_m)$ sobre s'_m y curvas τ_m de y'_{m-1} a y_m (τ_1 de y'_n a y_1) de tal manera que el sector abierto forma una región U_m acotada por s'_{m-1}, τ_m y s_m en D. La correspondiente región cerrada vive en una buena vecindad de x_m de tal manera que las U_m son todas disjuntas. La proyección U de la unión de las U_m es una vecindad de la proyección de x en D^*.

Notemos que $g_1^{-1}(D)$ colinda con D a lo largo de s_1. También $g_1^{-1} \circ g_2^{-1}(D)$ colinda $g_1^{-1}(D)$ a lo largo de $g_1^{-1}(s_2)$ etc. Sin embargo V que es la unión de U, $g_1^{-1}(U_2)$,..., $g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_1^{-1}(U_{n-1})$ no tiene porque ser vecindad de x.

Los diferentes conjuntos deben ser disjuntos, excepto a lo largo de sus fronteras, pero estos no necesariamente pueden llenar una vecindad de x. Podemos tener que $h = g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ g_1^{-1}$ sea un elemento no trivial del $Stab\,(x)$, aplicando s_1 sobre algún arco $h\,(s_1)$ que parte de x. Como ningún par de puntos de D son equivalentes tendremos que $h^m(V) \cap V = \emptyset$ o tendremos que $h^m \mid V = 1$ para toda m.

Sea V' la unión de V junto con las traslaciones de V distintas bajo las potencias de h, ya que $h\,(V)$ colinda con V a lo largo de $h\,(s_1)$ tendremos que V' es una vecindad de x. Como V° es precisamente invariante bajo la identidad de G, entonces $stab\,(x) = \langle h \rangle$ por lo que concluimos que V' es una buena vecindad de x.

El homeomorfismo de V , modulo la identificación de s_1 con $h\,(s_1)$ sobre $V'/\langle h \rangle$ es $\varphi \mid U$.

Tenemos que mostrar que φ es suprayectiva y un homeomorfismo local lo cual nos remite a mostrar que φ es inyectiva.

Si existen dos puntos x y y en ∂D que son G-equivalentes, entonces existe $g \in G$ que aplica una vecindad de x sobre una vecindad de y. De donde existe un punto de D aplicado por g a un punto de la vecindad de y construida anteriormente , ya que D es precisamente invariante bajo la identidad, g debe ser uno de los productos de transformaciones de apareamiento de lados mencionados arriba, de donde tenemos que $\varphi(x) = \varphi(y)$. ■

Notemos que si D es un dominio fundamental para G y z es un punto de $\bar{D}$, entonces z es un punto especial si es un vértice ó z es un punto fijo sobre un lado s de una transformación de apareamiento de lados g donde $g(z) = z$.

Definición 1.9.4 *Un* ***Conjunto Fundamental*** *es un subconjunto de* Ω° *el cual contiene exactamente un punto de cada clase equivalencia de puntos de* Ω°.

No hay restricción sobre la topología de un conjunto fundamental, podemos completar a uno añadiendo algunos puntos de ∂D a D.

Definición 1.9.5 *Un conjunto fundamental para* G *cuyo interior es un dominio fundamental es llamado un* ***Conjunto Fundamental obligado.***

1.10 El Conjunto Límite y el Dominio de Discontinuidad

Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y un grupo Γ actuando sobre X.

Definición 1.10.1 *La acción de Γ se dice que es* ***Propiamente Discontinua*** *sobre un subconjunto Γ-invariante Ω de X si para cualesquiera dos subconjuntos compactos C y D de Ω se cumple que $\gamma C \cap D \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $\gamma \in \Gamma$.*

La acción de Γ se dice ***Libre*** *(respectivamente* ***casi libre****) sobre un subconjunto Γ invariante Ω de X si para todo $p \in \Omega$ el subgrupo de isotropía $\Gamma_p = 1$(resp. Γ_p es finito).*

Claramente una acción propiamente discontinua es casi libre.

Nuestro propósito sera construir un subconjunto abierto $\Gamma-$invariante Ω distinto del vacío de X sobre el cual Γ actúe propiamente discontinuamente.

Definición 1.10.2 *Sea $\{A_\beta\}$ una familia de subconjuntos de X donde $\beta \in B$ para algún conjunto de índices infinito.*

Un punto $p \in X$ se dice que es un ***Punto Límite*** *de $\{A_\beta\}$ si toda vecindad de p intersecta A_β para un número infinito de β en B.*

Denotemos por:

$L_0(\Gamma)$ =La cerradura del conjunto de puntos en X con grupo de isotropía infinita.

$L_1(\Gamma)$ =La cerradura del conjunto de puntos límite de $\{\gamma z\}_{\gamma\in\Gamma}$ donde z corre sobre $X - L_0(\Gamma)$.

$L_2(\Gamma)$ =La cerradura del conjunto de puntos límite de $\{\gamma k\}_{\gamma\in\Gamma}$ donde k corre sobre subconjuntos compactos de $X - \{L_0(\Gamma) \cup L_1(\Gamma)\}$.

Definición 1.10.3 *A el conjunto $\Lambda(\Gamma) = L_0(\Gamma) \cup L_1(\Gamma) \cup L_2(\Gamma)$ se le llama el* ***Conjunto Límite*** *de Γ.*

Y a el conjunto $\Omega(\Gamma) = X - \Lambda(\Gamma)$ *se le llama el* ***Dominio de Discontinuidad*** *de* Γ.

Definición 1.10.4 *Decimos que* Γ *tiene la* ***Propiedad Kleiniana*** *si* $\Omega \neq \emptyset$.

Proposición 1.10.5 *Sean* X *y* Γ *como antes donde* Γ *está equipado con la topología compacto abierta entonces* L_0, L_1, L_2, Λ *y* Ω *son* $\Gamma-$*invariantes y* Γ *actúa propiamente discontinuamente sobre* Ω.

Si Γ *tiene la propiedad Kleiniana entonces es discreto , si* X *tiene base numerable para su topología entonces* Γ *es numerable.*

Demostración: Si p es un punto con grupo de isotropía infinito Φ, y $\varphi \in \Gamma$ entonces $\varphi\Phi\varphi^{-1}$ es el subgrupo de isotropía de $\varphi(p)$ el cual también es infinito.

De donde L_0 es invariante bajo Γ y análogamente si p es un punto límite de L_1, entonces existe una sucesión de puntos $\{\gamma z\}_{\gamma\in\Gamma}$ que converjan a p, esto lo podemos decir como $\gamma z \to p$; pero tendremos entonces que $\gamma' (\gamma z) \to \gamma' z$ lo que nos dice que L_1 es invariante bajo Γ. Claramente éste proceso lo podemos aplicar a L_2 de lo cual éste también será un conjunto invariante bajo Γ con lo cual obtenemos que L_0, L_1, L_2, Λ y Ω son conjuntos invariantes bajo Γ.

Sean C y D subconjuntos compactos de Ω, entonces el conjunto

$$S = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma C \cap D \neq \emptyset\},$$

debe ser finito, ya que si no, D deberá contener un punto límite de $\{\gamma C\}_{\gamma\in\Gamma}$ y este punto está por definición en L_2, lo cual contradice el hecho de que Ω y L_2 son disjuntos lo cual nos muestra que la acción de Γ sobre Ω es propiamente discontinua.

Ahora supongamos que Γ tiene la propiedad Kleiniana.

Sea C una vecindad compacta de un punto $p \in \Omega$, entonces el conjunto

$T = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma p \in C^{\circ}\} \subset T' = \{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma p) \cap C \neq \emptyset\}$.

Ya que Γ actúa propiamente discontinuamente sobre Ω tenemos que T' es finito por lo cual T es finito igualmente y por definición abierto en Γ. Como X es Hausdorff la topología de Γ es Hausdorff y como $T \neq \emptyset$ entonces T es discreto.

Finalmente si X tiene base numerable para su topología también Ω.

Sea $\{U_n\}_{n \in I}$ una base numerable de vecindades relativamente compactas sobre Ω y tomemos el siguiente conjunto: $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bar{U}_1 \cap \bar{U}_n \neq \emptyset\}$. Cada Γ_n es finito dado que la acción es propiamente discontinua y la unión de las Γ_n es Γ, de lo cual concluimos que Γ es numerable. ■

1.10.1 Comparación de la definición clásica del conjunto límite

En todo trabajo en el caso clásico de grupos Kleinianos de transformaciones de Möbius sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ uno toma la definición de $\Lambda(\Gamma)$ como la cerradura de puntos límites de las Γ-órbitas de puntos.

Debemos remarcar que en esta definición, uno usa implícitamente características especiales de la geometría conforme la cual ya no es válida en dimensiones mayores o mejor dicho en general .

Uno debe considerar puntos límites de Γ-órbitas de al menos ciertos conjuntos compactos como se tuvo que hacer en la definición de L_2 , lo cual podemos observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.10.6 *Consideremos el grupo Γ generado por la traslación en $\mathbb{R}^2$ dada por*

$$(x,y) \to \left(2x, \frac{y}{2}\right).$$

El único punto límite de Γ- órbitas es el origen, ya que si denotamos por ξ a la traslación y tomamos cualquier punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\xi^n(a,b) = (2^n a, \frac{b}{2^n})$, con lo cual tenemos que $\xi^n(a,b) \to (\infty, 0)$, es decir; no converge si $(a,b) \neq (0,b)$ para toda $b \in \mathbb{R}$. Pero tenemos que Γ no actúa propiamente discontinuamente en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$, ya que toda traslación de una curva cerrada que encierra al origen por un elemento de Γ tiene intersección no vacía con la curva. Con la definición aquí adoptada, $\Lambda(\Gamma)$ podría consistir del co-eje coordenado es decir el eje y.

En la definición del conjunto límite tenemos que tratar de tomar la menor parte Λ de X como sea posible tal que la acción de Γ sobre su complemento Ω sea propiamente discontinuamente. Si X es una variedad, se puede probar que podemos considerar sólo puntos límite de Γ-órbitas de discos cerrados en $X - \{L_0, L_1\}$ o en caso más general restringir la familia de conjuntos compactos que aparecen en la definición de L_2. Si $X = S^n$ y Γ actúa conformemente sobre S^n entonces es posible mostrar que $L_0 = L_1 = L_2$. Si X es el espacio proyectivo real o complejo y Γ es un grupo de transformaciones lineales proyectivas entonces podemos restringir las Γ-órbitas de segmentos de líneas cerrados en la definición de L_2.

Notemos que es posible extender Ω no canónicamente a algún Ω' sobre el cual Γ actúe propiamente discontinuamente, como en el ejemplo anterior podemos adherir el eje x menos el origen o el eje y menos el origen a Ω pero no ambos pues es claro que cualquier vecindad del origen se acumula en el eje x.

Para ver una mayor referencia al respecto puede consultarse [Ku].

1.11 Geometría Hiperbólica en Dimensión 3 y el Grupo de Möbius

Consideremos, en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$, a la bola unitaria que denotaremos por B^3, y que está definida por

$$B^3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\right\},$$

donde $\|\_\|$ denota la métrica Euclidiana estándar. Definamos sobre B^3 el siguiente elemento de linea:

$$ds_B^2 = \frac{4\,\|dp\|}{\left(1 - \|p\|^2\right)^2}, \text{ con } p \in B^3.$$

Definición 1.11.1 *A B^3 con la métrica ds_B^2 se le llama el* ***Modelo de la Bola Unitaria del Espacio Hiperbólico de Dimensión 3****, y a la métrica ds_B^2 se le llama la* ***Métrica Hiperbólica****.*

Al espacio Hiperbólico de Dimensión 3 general; es decir, no especificando un modelo particular lo denotaremos por $\mathbf{H}^3$.

Observemos que la métrica hiperbólica se obtiene de la métrica Euclidiana multiplicándola por una función con valores positivos, por lo que los ángulos en el modelo de la bola unitaria del espacio hiperbólico $\mathbf{H}^3$ pueden ser considerados como los ángulos Euclidianos.

Definición 1.11.2 *Una* ***Transformación de Congruencia*** *de un espacio métrico X es un automorfismo de X que preserva la distancia y los ángulos.*

La relación que existe entre el modelo (B^3, ds^2_B) y las transformaciones de Möbius es que las transformaciones de Möbius que preservan B^3 como conjunto, son exactamente las transformaciones de congruencia para el modelo de la bola unitaria, como veremos a continuación.

En general existen varias definiciones de transformaciones de Möbius, por lo que tomaremos el modelo de $\mathbf{H}^3$ que mejor se adapte para ver la relación antes mencionada.

Denotemos por $\widehat{\mathbb{R}}^3$ la compactificación de $\mathbb{R}^3$ al adjuntarle el punto ∞.

Definición 1.11.3 *Una **Similitud** S de R^3 es una aplicación de la forma:*

$$S(x) = \lambda \cdot A(x) + b; \text{ con } \lambda > 0,\ A \in O(3) \ \text{ y } b \in \mathbb{R}^3,$$

donde $O(3)$ denota al grupo de transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.11.4 *El automorfismo J de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ dado por:*

$$J(x) = \frac{x}{\|x\|^2};\ J(0) = \infty \ \text{ y } \ J(\infty) = 0\ ,$$

*se conoce como la **Reflexión Fundamental** de $\widehat{\mathbb{R}}^3$.*

Notemos que si $\|x\| < 1$ entonces $\|J(x)\| > 1$ ya que

$$\|J(x)\|^2 = (J(x) \bullet J(x)) = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^4} = \|x\|^{-2} > 1.$$

Definición 1.11.5 *Una **Transformación de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ es un automorfismo que preserva la orientación de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ y que es obtenida como la composición de un número finito de similitudes de $\mathbb{R}^3$ y de reflexiones fundamentales. Denotamos a este grupo por $M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{R}}^3)$.*

Con esta definición se observa que cualquier transformación de Möbius aplica esferas y planos en esferas y planos; más aún, estas transformaciones resultan ser conformes en los puntos de $\mathbb{R}^3$ que no son aplicados al punto ∞, pero esta dificultad la podemos solucionar definiendo las nociones de conformalidad en ∞ via la reflexión fundamental en el punto 0. Por lo cual, sólo se tendría que ver que la reflexión fundamental J es conforme en $\mathbb{R}^3$. Haciendo un cálculo sencillo vemos que la matriz Jacobiana de J en un punto $p \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas $p = (p_1, p_2, p_3)$ tiene la forma $\frac{1}{\|p\|^2}(I - 2Q(p))$, donde I denota la matriz identidad y la componente (i, j) de $Q(p)$ está dada por $Q_{ij}(p) = \frac{p_i p_j}{\|p\|^2}$; además, $I - 2Q(p)$ es una transformación ortogonal, con lo cual se tiene que la reflexión fundamental es conforme. De esta manera tenemos que una transformación de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^3$ es una aplicación conforme de $\widehat{\mathbb{R}}^3$.

Proposición 1.11.6 *Para cualquier transformación de Möbius $T : \widehat{\mathbb{R}}^3 \to \widehat{\mathbb{R}}^3$ se cumple que*

$$\|T(p) - T(q)\| = \|T'(p)\|^{\frac{1}{2}} \|T'(q)\|^{\frac{1}{2}} \|p - q\|,$$

donde $p, q, T(p), T(q) \in \mathbb{R}^3$.

La demostración de este resultado puede consultarse en [MT], Prop. 1.2; pag. 16. Para cualquier subconjunto E de $\widehat{\mathbb{R}}^3$, denotemos por $M\ddot{o}b(E)$ al conjunto de todas las transformaciones de Möbius que preservan a E, es decir:

$$M\ddot{o}b(E) = \left\{T \in M\ddot{o}b(\widehat{\mathbb{R}}^3) : T(E) = E\right\}.$$

Cuando tenemos que el conjunto $E = B^3$, cada elemento de $M\ddot{o}b(B^3)$ tiene la factorización canónica siguiente:

Proposición 1.11.7 *Una transformación de Möbius $T \in Möb(B^3)$ la cual aplica el punto $a \in B^3$ sobre el origen 0 es una transformación ortogonal si $a = 0$. Si $a \neq 0$, entonces tenemos que:*

$$T = A \circ J_A; \text{ con } A \in O(3),$$

donde $A \in O(3)$ y J_A es la reflexión con respecto a la esfera con centro en el punto $a^* = J(a)$ y de radio $\left(\|a^*\|^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

Para la demostración de este resultado se puede verse [MT], Prop. 1.3; pag. 17.

Explícitamente, la transformación J_A tiene la siguiente forma:

$$J_A(p) = a^* + \left(\|a^*\|^2 - 1\right) \cdot J(p - a^*),$$

y la esfera I con respecto a la cual J_A hace la reflexión es perpendicular a la frontera S^2 de B^3, pues $\left(\|a^*\|^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$ es precisamente la distancia del punto a^* a S^2. Esta esfera se llama la **Esfera Isométrica** de la transformación T como se muestra en el dibujo 1.13.

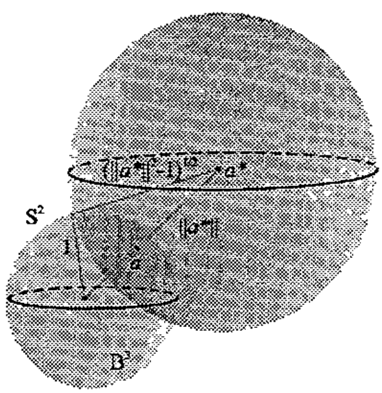

Figura 1.13 Esfera Isométrica de una transformación de Möbius

Teorema 1.11.8 *Cualquier elemento T de $M\ddot{o}b\,(B^3)$ es una isometría con respecto a la métrica hiperbólica sobre B^3; es decir, satisface que:*

$$\frac{\|T(p)\|}{1-\|T(p)\|^2}=\frac{1}{1-\|p\|^2},\ \textit{para toda}\ p\in B^3.$$

Ver ([MT] Teo. 1.5; pag. 17).

En otras palabras el resultado anterior quiere decir que $T^*\left(ds_B^2\right)$, el pullback de ds_B^2 por la transformación T es igual a ds_B^2. Denotemos ahora por $Isom^+\left(\mathrm{H}^3\right)$ al grupo de todos los automorfismos que preservan la orientación de $\mathbf{H}^3$, y que son isometrías con respecto a la métrica hiperbólica. Entonces podemos enunciar el resultado crucial que nos da la relación entre el grupo de transformaciones de Möbius y la geometría Hiperbólica de la siguiente manera:

Teorema 1.11.9 *El grupo $Isom^+\left(\mathrm{H}^3\right)$ se identifica con el grupo $M\ddot{o}b\,(B^3)$.*

Ver [MT], Teo. 1.7; pag. 19.

Notemos que nosotros hemos estado trabajando con el grupo de Möbius sobre $\widehat{\mathbb{R}}^3$, por lo que ahora veremos como se relaciona este grupo con el grupo $PSL\,(2,\,\mathbb{C})$. Como se mencionó anteriormente existen varios modelos del espacio hiperbólico H^3, por lo que ahora, para nuestros propósitos; trabajaremos con un modelo que es llamado el modelo del semi-espacio superior. Una manera de definir este modelo es la siguiente: Si consideramos el modelo de la bola unitaria B^3, podemos encontrar una transformación de Möbius que transforma este espacio en el semi-espacio superior

$$H^3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z>0\right\}.$$

Por ejemplo, consideremos el punto $e = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ y definamos un elemento Π del grupo $M(\widehat{\mathbb{R}}^3)$ por:

$$\Pi(p) = e + 2J\left(J(p) - e\right).$$

De esta manera tenemos que $\Pi(B^3) = H^3$.

Llamaremos a la aplicación Π la proyección estereográfica en dimensión 3.

Observemos que si hacemos $p = (p_1, p_2, p_3)$ y $q = \Pi(p) = (q_1, q_2, q_3)$ un cálculo directo nos muestra que:

$$q_j = \frac{2p_j}{\|p-e\|^2}, \text{ para } j = 1,2 \text{ y } q_3 = \frac{1-\|p\|^2}{\|p-e\|^2}.$$

Si restringimos Π a S^2 obtenemos la conocida fórmula de la proyección estereográfica de $S^2 - \{e\}$ sobre el plano $q_3 = 0$.

Observemos que de la proposición 1.11.6 y de la matriz jacobiana de la reflexión fundamental obtenemos el siguiente cálculo:

$$|dq| = \frac{2}{\|J(p)-e\|^2}\frac{\|dp\|}{\|p\|^2} = \frac{2\|dp\|}{\|p\|^{-2}\|e\|^{-2}\|p-e\|^2\|p\|^2} = 2q_3\frac{\|dp\|}{1-\|p\|^2}.$$

Por lo que, si definimos la métrica:

$$ds_H^2 = \Pi_*\left(ds_B^2\right) = \frac{\|dq\|^2}{(q_3)^2}$$

sobre el semi-espacio superior H^3, obtenemos un nuevo modelo del espacio hiperbólico.

Definición 1.11.10 *El semi-espacio superior H^3 con la métrica ds_H^2 es llamado el* ***Modelo del Semi-Espacio Superior del Espacio Hiperbólico*** $\mathbf{H}^3$ *y la métrica ds_H^2 es* ***llamada la Métrica Hiperbólica de*** H^3.

De la definición del modelo del semi-espacio superior (H^3, ds_H^2) tenemos que el grupo de transformaciones de Möbius, que denotaremos por $M\ddot{o}b\,(H^3)$, se identifica con el grupo $\Pi M\ddot{o}b\,(B^3)\,\Pi^{-3}$, las cuales preservan a H^3 y de igual manera este grupo se identifica con $Isom^+\,(\mathbf{H}^3)$.

Damos ahora una caracterización más conocida del grupo $M\ddot{o}b\,(H^3)$. Para esto identificaremos la frontera relativa de H^3 en $\widehat{\mathbb{R}}^3$ con la esfera de Riemann.

Teorema 1.11.11 *El grupo $M\ddot{o}b\,(H^3)$ se identifica con el grupo de las tranformaciones lineales $M\ddot{o}b = \left\{\frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc=1\right\}$, el cual es isomorfo al grupo $PSL\,(2,\mathbb{C})$.*

([MT], Teo. 1.8; pag. 20)

De aquí, obtenemos explícitamente la relación entre Geometría Hiperbólica y la teoría de transformaciones de Möbius.

Capítulo 2

ESTRUCTURAS

2.1 Estructuras sobre Variedades

Como vimos en el capítulo 1 una n-**Variedad Topológica** M es un espacio topológico Hausdorff con una base numerable para su topología la cual es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Esto es, para cada punto $p \in M$ existe una pareja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, donde U_α es una vecindad del punto p y φ_α es un homeomorfismo de U_α sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con n fija. A n se le llama la **dimensión topológica** de la variedad.

Si D es un subconjunto abierto de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), nos interesarán los siguientes conjuntos de funciones sobre D:

1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces:

a) $C^\infty(D)$ denota al conjunto de funciones real-valuadas infinitamente diferenciables sobre D. Esto es, $f \in C^\infty(D)$ si y sólo si f es una función con valores reales tal que las derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas en todos los puntos de D.

b) $C^{\omega}(D)$ denota a las funciones analítico-real con valores reales sobre D. Es decir: $f \in C^{\omega}(D)$ si y sólo si la expansión de Taylor de f converge a f en una vecindad de cualquier punto de D. De aquí podemos ver que $C^{\omega}(D) \subset C^{\infty}(D)$.

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:

a) $O(D)$ denota a las funciones holomorfas de valores complejos sobre D es decir: si $(z_1 , ... , z_n) = z$ son coordenadas en $\mathbb{C}^n$ entonces $f \in O(D)$ si y sólo si en una vecindad U de cada punto $z^{\circ} \in D$, existe una serie de potencias de la forma :

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} (z_1 - z_1^{\circ})^{\alpha_1} \ldots . (z_n - z_n^{\circ})^{\alpha_n}$$

la cual converge absolutamente a $f(z_1 , ... , z_n) = f(z)$ para toda $z \in U$.

Estas son algunas clases de funciones que usaremos para definir algunas de las clases de variedades que nos interesarán.

Supongamos que δ es una de las tres familias de funciones $\mathbb{K}-$valuadas definidas sobre los subconjuntos abiertos de $\mathbb{K}^n$ descritos anteriormente y $\delta(D)$ denota a las funciones de δ definidas sobre un subconjunto abierto D contenido en $\mathbb{K}^n$.

Definición 2.1.1 *Una $\delta-$**Estructura**, δ_M sobre una $k-$variedad M es una familia de funciones continuas con valores en K definidas sobre los subconjuntos abiertos de M que satisfacen las siguientes propiedades:*

a) Para todo $p \in M$, existe una vecindad abierta U de p y un homeomorfismo $h : U \to U'$ donde U' es abierto en $\mathbb{K}^n$ tal que para cualquier subconjunto abierto $V \subset U$ se tiene que $f : V \to \mathbb{K} \in \delta_M$ si y sólo si $f \circ h^{-1} \in \delta(h(V))$.

b) Si $f : U \to \mathbb{K}$ donde $U = \cup_{i\in I} U_i$ y las U_i son abiertos de M, entonces $f \in \delta_M$ si y sólo si $f \mid U_i \in \delta_M$ para toda $i \in I$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces $k = n$ y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces $k = 2n$ y son la dimensión real y compleja respectivamente de la variedad.

Definición 2.1.2 *Una variedad con una $\delta-$estructura es llamada una $\delta-$* ***Variedad*** *y es denotada por $(M,\ \delta_M)$. Los elementos de δ_M son llamados $\delta-$funciones sobre M.*

Definición 2.1.3 *Un $\delta-$* ***Sistema Coordenado*** *es un conjunto abierto $U \subset M$ y un homeomorfismo $h : U \to U' \subset K^n$ como en la condición a) de la definición 2.1.1.*

Para nuestros tres casos de funciones tenemos definidas:

a) Si $\delta = C^\infty$ se tiene una **Variedad Diferenciable** y las funciones en C^∞_M son llamadas **Funciones Diferenciables** sobre subconjuntos abiertos de M.

b) Si $\delta = C^\omega$ se tiene una **Variedad Analítica-Real** y las funciones en a_M son llamadas **Funciones Analítico-Reales** sobre subconjuntos abiertos de M.

c) Si $\delta = O$ se tiene una **Variedad Compleja** y las funciones en O_M son llamadas **Funciones Holomorfas** sobre subconjuntos abiertos de M.

Y para C^∞_M, a_M y O_M nos referiremos a éllas como **Estructuras Diferenciables, Analítico-Real y Complejas,** respectivamente.

Definición 2.1.4 *a) Un $\delta-$* ***Morfismo*** *$F : (M,\ \delta_M) \to (N,\ \delta_N)$ es una aplicación continua $F : M \to N$ tal que si $f \in \delta_N$ entonces $f \circ F \in \delta_M$.*

b) Un $\delta-$ ***Isomorfismo*** *es un $\delta-$morfismo $F : (M,\ \delta_M) \to (N,\ \delta_N)$ tal que $F : M \to N$ es un homeomorfismo y $F^{-1} : (N,\ \delta_N) \to (M,\ \delta_M)$ es un $\delta-$morfismo; es decir, si $f \in \delta_M$ entonces $f \circ F^{-1} \in \delta_N$.*

Se sigue de las definiciones anteriores que si sobre una $\delta-$variedad $(M,\ \delta_M)$ tenemos dos sistemas de coordenadas

$$h_1 : U_1 \to \mathbb{K}^n \text{ y } h_2 : U_2 \to \mathbb{K}^n,$$

tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ entonces tendremos que:

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1 (U_1 \cap U_2) \to h_2 (U_1 \cap U_2)$$

es un $\delta-$isomorfismo sobre subconjuntos abiertos de $(\mathbb{K}^n, \delta_{\mathbb{K}^n})$.

Recíprocamente, si tenemos una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de una variedad topológica M y una familia de homeomorfismos,

$$\{h_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbb{K}^n\}_{\alpha\in A}$$

que satisfacen la condición de que:

$$h_{\alpha_j} \circ h_{\alpha_i}^{-1} : h_{\alpha_i} (U_i \cap U_j) \to h_{\alpha_j} (U_i \cap U_j)$$

sea un $\delta-$isomorfismo sobre subconjuntos abiertos de $(K^n,\ \delta_{\mathbb{K}^n})$ para toda $i \neq j$, entonces éstas definen una $\delta-$estructura sobre M por medio de $\delta_M = \{f : U \to \mathbb{K}\}$ con U abierto de M y

$$f \circ h_\alpha^{-1} \in \delta\left(h_\alpha (U \cap U_\alpha)\right)$$

para toda $\alpha \in A$; es decir, las funciones en δ_M son pullbacks de funciones en δ por los homeomorfismos $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Definición 2.1.5 *La colección $\{(U_\alpha,\ h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es llamado un **Atlas** para $(M,\ \delta_M)$.*

Para nuestros casos tenemos nombres especiales para los $\delta-$morfismos y $\delta-$isomorfismos:

a) Si $\delta = C^\infty$ se tienen **Aplicaciones Diferenciables y Difeomorfismos** de M a N.

b) Si $\delta = a$ se tienen **Aplicaciones Analítico-Reales e Isomorfismos Analítico-Reales o Aplicaciones Bianalíticas** de M a N.

c) Si $\delta = O$ se tienen **Aplicaciones Holomorfas y Biholomorfismos** de M a N.

Si M y N son variedades diferenciables, se sigue de la definición de aplicación diferenciable $f : M \to N$, que ésta es una aplicación continua entre los espacios topológicos subyacentes, la cual tiene la propiedad de que en sistemas locales de coordenadas sobre M y N puede ser representada como una matriz de funciones C^∞ y ésta puede ser tomada como definición de aplicación diferenciable; lo similar se cumple para las otras categorías.

Resumiendo entonces, tenemos que una n-variedad topológica M, es un espacio topológico de Hausdorff, con una base numerable de subconjuntos abiertos con la propiedad adicional de que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Cada par (U, φ) donde U es un conjunto abierto de M y φ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es llamada una **Vecindad Coordenada;** a cada $q \in U$ asignamos las n coordenadas $x^1(q), \dots , x^n(q)$ que son la imagen de $\varphi(q) \in \mathbb{R}^n$, cada $x^i(q)$ es una función con valores reales sobre U, la i-ésima función coordenada. Si q está en una segunda vecindad coordenada (V, ψ), entonces tiene coordenadas $y^1(q), \dots , y^n(q)$ en esta segunda vecindad. Ya que φ y ψ son homeomorfismos, definen un nuevo homeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi (U \cap V) \to \psi (U \cap V)$, donde el dominio y el rango son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, los cuales corresponden a los puntos de $U \cap V$ por las dos aplicaciones coordenadas φ, ψ respectivamente.

En coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ está dada por funciones continuas $y^i = h^i(x^1, \dots , x^n)$, con $i = 1, \dots , n$; dando así las y-coordenadas de cada $q \in U \cap V$ en términos de sus x-coordenadas.

Similarmente $\varphi \circ \psi^{-1}$ denota la aplicación inversa, la cual expresa las x-coordenadas como funciones de las y-coordenadas: $x^i = g^i(y^1, \dots , y^n)$, con $i = 1, \dots , n$.

El hecho de que $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ sean homeomorfismos y sean inversa una de la otra es equivalente a la continuidad de $h^i(x)$ y $g^j(y)$, con $i, j = 1, \dots , n$ junto con las identidades

$$h^i\left(g^1(y), \dots , g^n(y)\right) \cong y^i, \text{ y } g^j\left(h^1(x), \dots , h^n(x)\right) \cong x^j,$$

para toda $i, j = 1, \dots , n$.

De donde todo punto de una variedad topológica M está en una colección muy amplia de vecindades coordenadas, pero siempre que hay intersecciones entre dos vecindades tenemos las fórmulas dadas por los cambios de coordenadas.

Entonces, la idea básica de considerar variedades con algún tipo de estructura es el de tratar de seleccionar una familia o subcolección de vecindades tal que los cambios de coordenadas satisfagan la propiedad de estar en la estructura deseada. Luego entonces podemos decir que (U, φ) y (V, ψ) son δ-**Compatibles** si $U \cap V \neq \emptyset$ implican que las funciones $h^i(x)$ y $g^j(y)$ dadas por los cambios de coordenadas, están en la δ-estructura.

De lo anterior podemos diferenciar dos estructuras dadas; simplemente considerando que para cualesquiera dos cartas coordenadas en las estructuras, digamos (U, φ) y

(V, ψ), estas sean o no δ-compatibles, y esto para todas las cartas con $U \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 2.1.6 *Sea M un espacio topológico Hausdorff con base numerable de conjuntos abiertos. Si $V = \{V_\beta, \psi_\beta\}$ es una cubierta de M por vecindades coordenadas C^∞-compatibles, entonces exite una única estructura C^∞ sobre M que contiene estas vecindades coordenadas.*

Demostración: Definiremos la estructura como la colección $\aleph$ de todas las vecindades coordenadas topológicas (U, φ), las cuales son C^∞-compatibles con cada una de la colección dada en V. Esta nueva colección claramente incluye a las de V, por lo que son una cubierta de M.

Supongamos que (U, φ) y (U', φ') son tales que $U \cap U' \neq \emptyset$ y están en la colección $\aleph$. Ya que éstas son vecindades coordenadas topológicas las funciones $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ dando los cambios de coordenadas son homeomorfismos bien definidos sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y solamente nos basta ver que son C^∞.

Sea $x = \varphi(p)$ un punto arbitrario de $\varphi(U \cap U')$. Entonces $p \in V_\beta$ para al menos una de las vecindades coordenadas (V_β, ψ_β). Haciendo $W = V_\beta \cap U \cap U'$ vemos que W es un conjunto abierto que contiene a p, y $\varphi(W)$ es un conjunto abierto que contiene a x. Nosotros tenemos que:

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \varphi^{-1}$$

sobre $\varphi(W)$, pero $\varphi' \circ \psi_\beta^{-1}$ y $\psi_\beta \circ \varphi^{-1}$ son C^∞ ya que (U, φ) y (U', φ') son ambas C^∞-compatibles con (V_β, ψ_β). De esto se sigue que su composición $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ sobre $\varphi(W)$; y ya que ésta es C^∞ sobre una vecindad de cualquier punto de su dominio, ésta es C^∞. Cualquier (U, φ) que es compatible con todas las vecindades coordenadas en nuestra colección $\aleph$ claramente tiene esta propiedad con respecto a la subcolección$\{V_\beta, \psi_\beta\}$, y está por lo tanto en la estructura diferenciable. ■

Observación:

Cuando consideramos las vecindades coordenadas (U, φ) en general se considera que $U \subset M$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Sin embargo, esto se puede hacer exactamente al revés; es decir, considerando $\psi = \varphi^{-1}$que claramente también es un difeomorfismo local; en este caso, la llamaremos una **Parametrización.**

Veamos ahora algunos ejemplos importantes de variedades con estructura:

Ejemplo 2.1.7 *La esfera S^2*

Consideremos a S^2 con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^3$, esto es, $U \subset S^2$ es abierto si $U = \tilde{U} \cap S^2$ para algún conjunto abierto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^3$. Esto implica inmediatamente que S^2 es Hausdorff y tiene base numerable.

Mostraremos que es localmente Euclidiana:

Para $i = 1,\ 2$ y 3 sean:

$\tilde{U}_i^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^i > 0\}$ *y* $\tilde{U}_i^- \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^i < 0\}$*; estos* $\tilde{U}_i^\pm$ *son conjuntos abiertos para los cuales el hiperplano $x^i = 0$ divide a $\mathbb{R}^3$. Los conjuntos abiertos relativos $U_i^\pm = \tilde{U}_i^\pm \cap S^2$ para $i = 1,\ 2$ y 3 cubren a S^2.*

Definimos $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^2$ por proyección:

$$\varphi_1^\pm\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^2, x^3\right),$$

$$\varphi_2^\pm\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1, x^3\right),$$

$$\varphi_3^\pm\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1, x^2\right).$$

Como los puntos $(x^1, x^2, x^3) \in S^2$ *cumplen con la ecuación* $X^2+Y^2+Z^2=1$ *tenemos que al proyectar sobre alguno de los planos coordenados, supongamos al plano* XY*, tendremos así que los puntos aplicados deben satisfacer la condición que* $X^2+Y^2 \leq 1$*. Estos son homeomorfismos sobre el conjunto abierto* $W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$*; por lo que* S^2 *es localmente Euclidiano y una variedad topológica. Más aún, las fórmulas para los cambios de coordenadas son* C^∞*. Para ver esto tomemos por ejemplo:*

$\varphi_1^+ \circ \left(\varphi_2^-\right)^{-1}$ *que está definida sobre* $U_1^+ \cap U_2^-$*. Luego,*

$$\varphi_1^+ \circ \left(\varphi_2^-\right)^{-1}\left(x^1, x^3\right) = \varphi_1^+\left(x^1, \, -\left(1-\left(x^1\right)^2-\left(x^3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, x^3\right) =$$

$$= \left(-\left(1-\left(x^1\right)^2-\left(x^3\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, x^3\right)$$

Haciendo un cambio de notación (u^1, u^2) *para las* U_2^-*-coordenadas y* (v^1, v^2) *para las* U_1^+*-coordenadas en lugar de* (x^1, x^3) *y* (x^2, x^3) *tenemos* $v^1 = -\left(1-\left(u^1\right)^2-\left(u^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *y* $v^2 = u^2$*.*

Las $v^i = v^i\left(u^i\right)$ *son* C^∞ *ya que el término de la raíz cuadrada nunca es cero sobre el conjunto* $\left\{\left(u^1, u^2\right) \mid \left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2 < 1\right\}$*.*

Análogamente tenemos también que $\varphi_2^- \circ \left(\varphi_1^+\right)^{-1}$ *es* C^∞ *sobre el conjunto*

$$\left\{\left(v^1, v^2\right) \mid \left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2 < 1\right\}.$$

Por lo cual son vecindades C^∞*-compatibles, y de manera similar aplicando la misma idea a los otros casos, tenemos una manera de cubrir a* S^2 *por ocho vecindades coordenadas y determinamos así su estructura* C^∞*.*

Recordemos además que S^2 *posee una estructura de superficie de Riemann, con lo cual tiene una estructura compleja también.*

Ejemplo 2.1.8 *Acción discontinua de un grupo*

Diremos que un grupo G **Actúa** *en una variedad diferenciable M si existe una aplicación $\varphi : G \times M \to M$ que cumple lo siguiente:*

i) Para cada $g \in G$ la aplicación $\varphi_g : M \to M$ dado por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$; $p \in M$ es un difeomorfismo, y $\varphi_e = Id$.

ii) Si $g_1, g_2 \in G$, entonces $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2}$.

También diremos que la acción de un grupo es **Propiamente Discontinua** *sobre una variedad diferenciable si para todo $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ del punto tal que $U \cap g(U) = \emptyset$ para toda $g \neq e$.*

Consideremos M una variedad diferenciable y una acción de un grupo G sobre M, $G \times M \to M$ que sea propiamente discontinua.

Vamos a mostrar que M/G tiene una estructura diferenciable con respecto a la cual la proyección $\pi : M \to M/G$ es un difeomorfismo local.

Para cada $p \in M$ escojamos una parametrización $x : V \to M$ en p tal que $x(V) \subset U$, donde $U \subset M$ es una vecindad de p que cumple con que $U \cap g(U) = \emptyset$ para $g \neq e$. Claramente $\pi \mid U$ es inyectiva, por lo cual $y = \pi \circ x : V \to M/G$ es inyectiva. La familia $\{(V,y)\}$ claramente cubren a M/G y para tal familia exhibiremos una estructura diferenciable. Para esto, es suficiente mostrar que dadas dos aplicaciones:

$$y_1 = \pi \circ x_1 : V_1 \to M/G \text{ y } y_2 = \pi \circ x_2 : V_2 \to M/G$$

que cumplen que si $y_1(V_1) \cap y_2(V_2) \neq \emptyset$, entonces $y_1^{-1} \circ y_2$ es diferenciable.

Para ver esto, sea π_i la restricción de π a $x_i(V_i)$, $i = 1, 2$.

Sea $q \in y_1(V_1) \cap y_2(V_2)$ y consideremos la aplicación $r = x_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q)$.

Tomemos $W \subset V_2$ *vecindad de* r *tal que:*

$$(\pi_2 \circ x_2)(W) \subset y_1(V_1) \cap y_2(V_2).$$

Entonces la restricción de $y_1^{-1} \circ y_2$ *a* W *está dada por:*

$$y_1^{-1} \circ y_2 \mid W = x_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ x_2.$$

Lo cual nos remite solamente a demostrar que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ *es diferenciable en* $p_2 = \pi_2^{-1}(q)$.

Sea $p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$. *Entonces* p_1 *y* p_2 *son equivalentes en* M *por lo cual existe* $g \in G$ *tal que* $g(p_2) = p_1$. *Se sigue que la restricción* $\pi_1^{-1} \circ \pi_2 \mid x_2(W)$ *coincide con el difeomorfismo* $\varphi_g \mid x_2(W)$, *lo cual prueba que* $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ *es diferenciable en* p_2 *como se requería.*

Ejemplo 2.1.9 *El haz tangente*

Sea M^n *una variedad diferenciable y sea* $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. *Dotaremos a* TM *con una estructura diferenciable de dimensión* $2n$, *con tal estructura* TM *es llamado el haz tangente de* M.

Sea $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *una estructura diferenciable maximal sobre* M.

Denotemos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ *las coordenadas de* U_α *y por* $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ *las bases asociadas a los espacios tangentes de* $x_\alpha(U_\alpha)$. *Para toda* α *definimos* $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ *dada por*

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right),$$

con $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Geométricamente esto significa que tomaremos como coordenadas de un punto $(p, v) \in TM$ *las coordenadas* $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ *de* p *junto con las coordenadas de* v *en la base* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$.

Vamos pues a mostrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ *es una estructura diferenciable sobre* TM.

Ya que $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ *y* $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$ *tenemos que*

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM.$$

Sea ahora $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \bigcap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$, *entonces podemos escribir a* (p,v) *como*

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)),$$

donde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$ *y* $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$.

Por lo cual tendremos que:

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha))$$

$$= \left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha(q_\alpha), d\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)(v_\alpha)\right).$$

Ya que $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ *es diferenciable,* $d\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)$ *también, con lo cual obtenemos que* $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ *es diferenciable mostrando así que las vecindades son* C^∞*-compatibles por lo cual* TM *es una variedad diferenciable.*

Observemos un poco más de cerca que es una estructura en una variedad:

Recordemos que una variedad topológica M de dimensión n, es un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$; esto es, su topología está definida por una colección de cartas locales $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$, donde U_α es un abierto de M; y para cada $\alpha \in I$, tenemos que $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ e I es un conjunto de índices.

Informalmente podemos decir entonces que, una estructura en una variedad es una familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$, tal que la familia de cambios de coordenadas

$$\phi_{ij} : \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j (U_i \cap U_j) \to \phi_i (U_i \cap U_j) ; i, j \in I,$$

que satisfacen ciertas hipótesis, y según el requerimiento se obtienen distintas estructuras. De los ejemplos anteriores podemos observar que por ejemplo, las funciones de cambios de coordenadas satisfacen las siguientes propiedades:

1) Si se restringe ϕ_{ij} a un abierto de su dominio,entonces la restricción satisface la misma propiedad que ϕ_{ij}.

2) Si se tiene que $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces tenemos los elementos de la familia ϕ_{ki} y ϕ_{ij} de los cambios de coordenadas, en este caso tiene sentido la composición $\phi_{ki} \circ \phi_{ij}$ y está satisface la misma propiedad.

3) Si ϕ_{ij} esta en la familia, entonces la composición inversa ϕ_{ji} satisface la misma propiedad.

Con lo cual, llegamos a que dar una estructura en una variedad; es decir, una manera específica de modelar localmente a M en $\mathbb{R}^n$, es pedir que la familia de cambios de coordenadas $\left\{\phi_{ij}; i, j \in I\right\}$ pertenezca a un pseudogrupo:

Definición 2.1.10 *Un **Pseudogrupo** de homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$, es un conjunto $G = \{\phi_i : U_i \to V_i; i \in I\}$ de homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$; es decir, para cada*

$i \in I$, $\phi_i : U_i \to V_i$ es un homeomorfismo del abierto U_i de $\mathbb{R}^n$ sobre el abierto V_i de $\mathbb{R}^n$; tal que satisfacen las siguientes propiedades:

1) Si $\phi \in G$ y U es un abierto contenido en el dominio de ϕ, entonces la restricción de ϕ a U, $\phi\,|_U$pertenece a G.

2) Si ϕ y ψ pertenecen a G y esta definida la composición $\psi \circ \phi$, entonces $\psi \circ \phi \in G$.

3) Si $\phi \in G$, entonces el homeomorfismo inverso $\phi^{-1} \in G$.

4) Si $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y si $\phi : U \to V$ es un homeomorfismo del abierto U sobre el abierto V, y si además la restricción $\phi\,|_{U_\alpha} \in G$ para toda α, entonces $\phi \in G$.

Definición 2.1.11 *Sea G un pseudogrupo. Por una G-**Variedad** entenderemos una variedad topológica M con un atlas $\{\phi_i;\, \phi_i : U_i \to V_i,\, i \in I\}$ tal que el conjunto $\{\phi_{ij};\, i, j \in I\}$ de los cambios de coordenadas está contenido en G. A un atlas de esta forma se le llama una G-**Estructura**.*

Ejemplo 2.1.12 *Pseudogrupos*

1) $G_1 = Loc\,(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$.

2) $G_2 = Loc_+\,(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ que preservan la orientación inducida en cada abierto por una orientación fija de $\mathbb{R}^n$.

3) $G_3 = Diff_r\,(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de todos los difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$, de clase C^r con $1 \leq r \leq \infty$.

4) $G_4 = Diff_r^+\,(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_3 de difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ que preservan la orientación.

5) $G_5 = Hol\,(\mathbb{C}^n)$: el pseudogrupo de todos los homeomorfismos locales de $\mathbb{C}^n$ que son biholomorfismos.

6) $G_6 = Aff\,(\mathbb{R}^n)$: el pseudogrupo de los homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ que son restricciones de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$.

7) $G_7 = \mathrm{Sim}\,(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_6 que consiste de los homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ que son restricciones de similitudes de $\mathbb{R}^n$.

8) $G_8 = Iloc\,(\mathbb{R}^n)$: el subconjunto de G_7 que consiste de las isometrías locales de $\mathbb{R}^n$.

En los ejemplos anteriores algunos de los pseudogrupos eran subseudogrupos de otros; es decir; un subconjunto G_0 de un pseudogrupo G, tal que G_0 es un pseudogrupo. Es conveniente ahora, ampliar la definición de pseudogrupo para permitir pseudogrupo de homeomorfismos locales de una variedad arbitraria y no solamente de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.13 *Por un* ***Pseudogrupo de Homeomorfismos Locales de una Variedad*** *M, entenderemos un subconjunto G de homeomorfismos locales entre abiertos de M sobre abiertos de M, que satisfacen las mismas condiciones de la definición de pseudogrupo.*

Ejemplo 2.1.14 *Pseudogrupo de una Variedad*

9) $G_9 = TI\,(G)$: el pseudogrupo de los homeomorfismos locales del grupo de Lie G, que son restricciones de traslaciones izquierdas de G. De manera análoga se define el pseudogrupo $TD\,(G)$ de las traslaciones derechas de G.

10) $G_{10} = \mathrm{Proy}\,(n)$: el pseudogrupo de los homeomorfismos locales del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ que son restricciones de transformaciones proyectivas.

11) $G_{11} = Iloc(M)$: el pseudogrupo de los homeomorfismos locales de M que son restricciones de isometrías de M con respecto a una métrica Riemanniana completa.

12) $G_{12} = Euc(n)$: el pseudogrupo del tipo G_{11} cuando M es el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Notemos que $G_{12} = G_8$.

13) $G_{13} = Elip(n)$: el pseudogrupo del tipo G_{11} cuando M es la esfera S^n con su métrica estándar.

14) $G_{14} = Hip(n)$: el pseudogrupo del tipo G_{11} cuando M es el espacio hiperbólico $\mathbf{H}^n$.

Definición 2.1.15 *Si G es un pseudogrupo de homeomorfismos locales de la variedad X, entonces una (G, X)-**Variedad**, es una variedad M que tiene un atlas modelado en X, $A = \{(\phi_i, U_i)\,;\, i \in I\}$, donde U_i es un abierto de M y $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo de U_i sobre el abierto $\phi_i(U_i) \subset X$, tal que los cambios de coordenadas,*

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j),$$

*pertenecen a G. Un atlas de esta forma se le llama una G-**Estructura** de M.*

Las (G, X)-variedades tienen diversas propiedades y nombres, como enlistaremos a continuación:

1) Una G_1-variedad es simplemente una variedad topológica de dimensión n.

2) Una G_2-variedad es una variedad topológica orientable.

3) Una G_3-variedad es una n-variedad diferenciable de clase C^r y su G_3-estructura se llama como vimos anteriormente una estructura diferenciable.

4) Una G_4-variedad es una n-variedad diferenciable y orientable.

5) Una G_5-variedad es una variedad analítico-compleja de dimensión compleja n.

6) Una G_6-variedad se llama una n-**Variedad Localmente Afín**, y una G_6-estructura se llama una **Estructura Afín**.

7) Una G_7-variedad se llama una n-**Variedad de Similitud** y su G_7-estructura se llama una **Estructura de Similitud**.

8) Una G_8-variedad o equivalentemente una G_{12}-variedad se llama una **Variedad Riemanniana Plana, Variedad Euclidiana o Variedad Parabólica**. Y a su G_8-estructura se le llama una **Estructura Euclidiana o Plana**.

9) Una G_9-variedad se llama una **Variedad Localmente de Lie**, modelada en el grupo de Lie G.

10) Una G_{10}-variedad se llama una **Variedad Localmente Proyectiva**.

11) Una G_{11}-variedad se llama una **Variedad Localmente Isométrica a** M.

12) Una G_{13}-variedad se llama una **Variedad Elíptica**.

13) Una G_{14}-variedad se llama una **Variedad Hiperbólica** de dimensión n. A su G_{14}-estructura se le llama una **Estructura Hiperbólica**.

Ahora, extenderemos de otra manera nuestra definición de una estructura sobre una variedad de la siguiente manera:

Sea S un espacio topológico, y G un grupo de homeomorfismos de S, actuando de manera natural sobre S.

Asumamos que G satisface la siguiente condición:

$\mathcal{U}$) Para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$, si su acción coincide sobre un subconjunto abierto no vacío de S, entonces $g_1 = g_2$.

Esta condición es conocida como de **Uniformización** y nos dice que los elementos de G están determinados únicamente por sus acciones sobre un subconjunto abierto.

De aquí en adelante el par (S, G) será fijo y nos referiremos a él como el **Espacio Modelo.**

Definición 2.1.16 *Un espacio topológico M se dice que es* ***Uniformizable*** *por (S, G) si cumple lo siguiente:*

U) Existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to S$ tal que para todo par α, $\beta \in A$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ la aplicación:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es la restricción de un elemento $g_{\alpha\beta} \in G$. Entonces diremos que el conjunto $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ define una ***Uniformización*** *sobre M con respecto a (S, G).*

Observación:

Notemos que dado un grupo G de homeomorfismos de un espacio topológico S como en la definición anterior, este determinan a un pseudogrupo $\{g_{\alpha\beta}\}$.

Consideremos ahora un refinamiento $\{V_{\alpha'}\}_{\alpha'\in A'}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Sea $j : A' \to A$ una aplicación de refinamiento y supongamos que existen homeomorfismos $\psi_{\alpha'} : V_{\alpha'} \to S$ tal que $\{(V_{\alpha'},\ \psi_{\alpha'})\}$ también definen una uniformización con respecto a (S, G). Diremos que $\{(V_{\alpha'},\ \psi_{\alpha'})\}$ es un **Refinamiento Admisible** de $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$ si existen elementos $\{g_{\alpha'}\}_{\alpha'\in A'}$ en G tal que $\psi_{\alpha'} = g_{\alpha'} \circ \varphi_{j(\alpha')}$ restringidos a $V_{\alpha'}$.

Si este es el caso tenemos que:

$$g_{\alpha'\beta'} = \psi_{\alpha'} \circ \psi_{\beta'}^{-1} = g_{\alpha'} \circ \varphi_{j(\alpha')} \circ \varphi_{j(\beta')}^{-1} \circ g_{\beta'}^{-1}.$$

Consideremos ahora $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ y $\{(V_{\alpha'}, \psi_{\alpha'})\}_{\alpha'\in A'}$ dos uniformizaciones de M con respecto al espacio modelo (S, G).

Diremos que las **Uniformizaciones** $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ y $\{(V_{\alpha'}, \psi_{\alpha'})\}_{\alpha'\in A'}$ son **Equivalentes,** si existe una uniformización $\{(W_{\alpha''}, \theta_{\alpha''})\}_{\alpha''\in A''}$ la cual es un refinamiento admisible común a ambas uniformizaciones $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(V_{\alpha'}, \psi_{\alpha'})\}$.

Definición 2.1.17 *Una clase de equivalencia de uniformizaciones es llamada una* (S, G)*-**Estructura** sobre* M.

Supongamos ahora que tenemos una variedad diferenciable S y que G es un grupo de difeomorfismos de S el cual actúa de manera natural sobre S.

Definición 2.1.18 *Una* (S, G)*-**Estructura** sobre una variedad diferencible* M *se dice que es **Diferenciable** si cada aplicación* φ_α *perteneciente a alguna uniformización de la* (S, G)*-estructura es un difeomorfismo. Análogamente puede ser definida la noción de una* (S, G)*-estructura analítica-real .*

Notemos que nuestras definiciones de variedad diferenciable podemos verlas ahora como una (S, G)-estructura donde $S = \mathbb{R}^n$ y G es el grupo de difeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$. De esta manera los ejemplos anteriores son ejemplos de variedades con una (S, G)-estructura.

Para mayor información de (S, G)-estructuras pueden consultarse [Vj] y [Rat], y para la teoría de uniformización puede consultarse [KP].

Capítulo 3

ESTRUCTURAS CONFORMES Y DE MÖBIUS

3.1 Estructuras Conformes

Definición 3.1.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$.*

*Dos productos interiores g_1 y g_2 definidos sobre V se dice que son **Conformes** uno a otro si $g_1 = \lambda g_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+$ denota al conjunto de los números reales positivos.*

Esta definición nos permite hablar de una relación de equivalencia que denotaremos por $\sim_C$, sobre el conjunto de productos interiores definidos sobre V. Esta relación está dada de la siguiente manera:

$g_1 \sim_C g_2$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $g_1 = \lambda g_2$.

Definición 3.1.2 *Una clase de equivalencia de productos interiores sobre V dada por* *la relación $\sim_C$ es llamada una **Clase de Equivalencia Conforme** sobre V o una **Estructura Conforme** sobre V.*

Observemos que si la dimensión de V sobre $\mathbb{R}$ es n y g es una métrica sobre V, entonces el grupo de automorfismos de V que preservan la estructura conforme sobre V es un grupo isomorfo al grupo $\mathbb{R}^+ \times O(n)$, donde $O(n)$ es el grupo transformaciones ortogonales sobre V con respecto a la métrica g.

Como sobre todo punto en una variedad diferenciable tenemos bien definido un espacio vectorial, a saber, el espacio tangente al punto, veamos como podemos extender nuestra definición de una estructura conforme para una variedad. Para esto, recordemos que una **Métrica Riemanniana** sobre una variedad diferenciable M; es una correspondencia la cual asocia a cada punto $p \in M$ un producto interior $\langle\ ,\rangle_p$, es decir; una forma bilineal simétrica, definida positiva sobre el espacio tangente T_pM, la cual varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ es un sistema de coordenadas alrededor del punto p, con $x(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(q)(0, ..., 1, ...0)$, entonces$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una función diferenciable sobre U. A las funciones g_{ij} se les llama la representación local de la métrica Riemanniana en los sistemas coordenados. Así una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana es llamada una **Variedad Riemanniana**.

Definición 3.1.3 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Una **Estructura Conforme Diferenciable** sobre M es una familia diferenciable de estructuras conformes sobre los espacios tangentes $T_p(M)$, con $p \in M$.*

Tenemos así que una estructura conforme sobre una variedad M equivale a tener una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ por subconjuntos abiertos U_α de M y métricas Riemannianas diferenciables g_α sobre U_α, tal que sobre intersecciones no vacías $U_\alpha \cap U_\beta$, tenemos definidas funciones positivas diferenciables

$$f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}^+,$$

que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad entre las métricas:

$$g_\alpha = f_{\alpha\beta} g_\beta.$$

Para el caso de Variedades Riemannianas la métrica Riemanniana claramente define su ambiente de estructura conforme diferenciable, y dos métricas Riemannianas sobre M tiene el mismo ambiente de estructura conforme diferenciable si y sólo si son conformes una a la otra para cada punto $p \in M$. Además tenemos que cuando se tiene una estructura conforme diferenciable sobre una variedad diferenciable M, ésta es ambiente de una métrica Riemanniana diferenciable. Ya que si tenemos una estructura conforme diferenciable $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in I}$, escogemos una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y definimos:

$$g = \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha g_\alpha,$$

que resulta ser una métrica Riemanniana sobre M y la estructura conforme diferenciable $\{U_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es ambiente de ésta. (Para más información sobre Particiones de la Unidad puede consultarse [Wr], pag. 8).

En general cuando se tiene una variedad Riemanniana M de dimensión n, con tensores métricos g y $\bar{g}$ conformes uno con otro, tenemos que, en cada vecindad coordenada

$U_\alpha \subset M$, los tensores métricos están relacionados de la siguiente manera:

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} \exp(2\sigma),$$

donde σ es una función de clase C^∞ en cada vecindad coordenada, y esta es la notación estándar en la literatura para expresar la relación entre métricas que son conformes una a otra. (Para mayor referencia se puede consultar [WJ], pag. 105).

Definición 3.1.4 *Sea M una variedad de dimensión n con una estructura conforme diferenciable. Un* ***Marco Conforme*** *en un punto $p \in M$ es una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p(M)$ con respecto a la métrica Riemanniana que tiene por ambiente a la estructura conforme diferenciable dada. Decimos que una estructura conforme diferenciable es* ***Integrable,*** *si cada punto p de M tiene una vecindad coordenada con coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que el conjunto de vectores tangentes $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ asociados a esta vecindad coordenada como base de $T_p(M)$, es un marco conforme definido localmente. Si la estructura es integrable llamaremos a estas coordenadas* ***Coordenadas Admisibles.***

Se sigue fácilmente de las definiciones anteriores que si $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ son dos sistemas coordenados admisibles definidos sobre algún subconjunto abierto común U, entonces la matriz jacobiana del cambio de base $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ define una función de $U \to \mathbb{R}^+ \times O(n)$ ya que esta es una transformación del espacio vectorial $T_p(M)$ en si mismo, que preserva la estructura conforme, para todo punto $p \in U$. Por lo que, en términos de un sistema coordenado admisible $\{x_1, ..., x_n\}$, una métrica Riemanniana compatible con la estructura conforme diferenciable tiene la forma:

$$ds^2 = \lambda(x) \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

donde λ es una función diferenciable sobre M con valores en $\mathbb{R}^+$. Así tenemos que una variedad con estructura conforme integrable puede también ser pensada como una variedad localmente conformemente Euclidiana. Por brevedad nos referiremos a estas variedades como **Variedades Conformemente Planas.**

Proposición 3.1.5 *La esfera de dimensión n*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\};$$

con la métrica inducida de $\mathbb{R}^{n+1}$ *es conformemente plana.*

Demostración: Consideremos un punto $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y π un plano de dimensión n contenido en $\mathbb{R}^{n+1}$ que sea paralelo a $T_p(S^n)$ pero diferente de $T_p(S^n)$.

Dado un punto $q \in S^n - \{p\}$, la linea con vector director $\overrightarrow{pq}$ intersecta al plano π en exactamente un punto $\bar{q}$, como se muestra en la figura 3.1 siguiente. La afirmación es que la proyección estereográfica $\Pi : S^n - \{p\} \to \pi$, dada por $\Pi(q) = \bar{q}$ es un homeomorfismo conforme. Tomemos dos vectores tangentes orientados v y w basados en el punto q. Entonces las ternas $\{p, q, v\}$ y $\{p, q, w\}$ determinan dos planos que intersectan al plano π en dos líneas orientadas l_v y l_w respectivamente. Para demostrar nuestra afirmación, es suficiente mostrar que los ángulos entre las parejas $\{v, w\}$ y $\{l_v, l_w\}$ son iguales, y por continuidad es suficiente demostrarlo para cualesquiera v y w. Por lo que para cualesquiera v y w, las líneas tangentes R_v y R_w al punto q con vectores directores v y w intersectan a $T_p(S^n)$ digamos en los puntos A y

B. Las líneas orientadas pA y pB sobre $T_p(S^n)$ son paralelas a las líneas l_v y l_w respectivamente en el plano π, pues estos planos son paralelos y los planos generados por las parejas $\{p, q, v\}$ y $\{p, q, w\}$ contienen a los puntos A y B. Además se tiene por geometría analítica elemental que $\left\|\overrightarrow{Ap}\right\| = \left\|\overrightarrow{Aq}\right\|$ ya que estas son las longitudes de los segmentos tangentes desde el punto A a S^n, como se muestra en la figura 3.2 siguiente. Similarmente se obtiene que $\left\|\overrightarrow{Bp}\right\| = \left\|\overrightarrow{Bq}\right\|$, obteniendo así que los triángulos ApB y AqB son congruentes. Por lo que tenemos entonces que los ángulos entre las parejas $\{v, w\}$, $\{pA, pB\}$ y $\{l_v, l_w\}$ son los mismos.

Finalmente notemos que la proyección estereográfica Π puede ser expresada por funciones racionales en coordenadas apropiadas, así que de hecho es una función real-analítica. ■

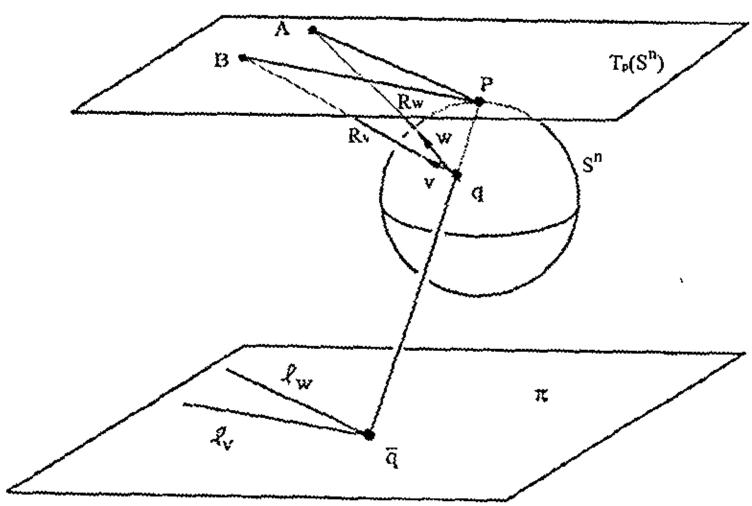

Figura 3.1

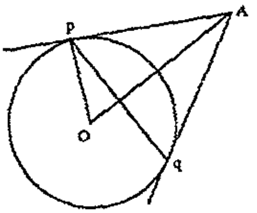

Figura 3.2

Daremos a continuación otra demostración de la proposición anterior la cual muestra que la proyección estereográfica aplica p-esferas en p-esferas, donde una p-esfera en $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es la intersección transversa de S^n con un plano π contenido en $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión $p+1$. Además consideraremos a $\mathbb{R}^n$ como $S^n - \{\infty\}$, y un p-plano puede ser también considerado como una p-esfera que pasa a través del punto $\{\infty\}$. Recordemos que una inversión en una n-esfera S^n en $S^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ es una aplicación dada por $P \to Q$ donde se cumple $\|OP\| \cdot \|OQ\| = r^2$, entendiendo además que $O \to \infty$ y $\infty \to O$. Tenemos que, por las propiedades de las inversiones, éstas aplican p-esferas en p-esferas contenidas en S^{n+1}. Consideremos así la proyección estereográfica desde el polo norte N sobre el plano tangente al polo sur S. Esta proyección coincide con la restricción a S^n de la inversión en la esfera $\sum^n$ con centro en el punto N y con radio $\left\|\overrightarrow{NS}\right\|$, que se muestra en la figura 3.3 siguiente.

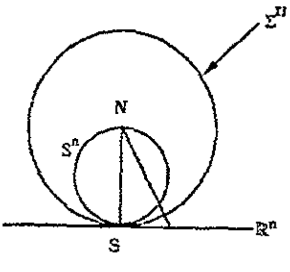

Figura 3.3

3.2 Cambio Conforme de una Métrica y Estructuras de Möbius

Lema 3.2.1 *Denotemos por (M, g) a una variedad Riemanniana M con métrica g. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y $\bar{g}$ un cambio conforme de la métrica dado por $\bar{g} = g\exp(2\varphi)$. Denotemos por D y por $\bar{D}$ las conexiones de Levi-Civita de g y $\bar{g}$ respectivamente. Sea $G = \operatorname{grad}\varphi$ el gradiente de φ en términos de la métrica g y definamos S sobre todos los campos vectoriales X y Y por:*

$$S\,(X,\, Y) = \bar{D}_X Y - D_X Y.$$

Entonces

$$S_X Y = X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X,\, Y\rangle\, G,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ representa el producto interior de la métrica g.

Demostración: Ya que las conexiones son las de Levi-Civita, éstas son libres de torsión, lo cual nos implica que $S_X Y = S_Y X$, es decir que S es simétrico; además vemos que este es el tensor diferencia de dos conexiones (ver apéndice A), por lo que es $C^\infty(M)$-lineal en ambos argumentos. Ahora por las propiedades de la derivada covariante y de los campos vectoriales como operadores tenemos:

$$0 = \bar{D}_X \bar{g} = \bar{D}_X\left(g\exp(2\varphi)\right) = X\left(\exp(2\varphi)\right)g + \exp(2\varphi)\bar{D}_X g$$

$$= \exp(2\varphi)\{2X\varphi\cdot g + D_X g + S_X g\} = \exp(2\varphi)\{2X\varphi\cdot g + S_X g\}.$$

Así, si para cualesquiera campos vectoriales Y y Z podemos definir:

$$S_X g\,(Y,\, Z) := \left(\bar{D}_X g - D_X g\right)(Y,\, Z) := \bar{D}_X g\,(Y,\, Z) - D_X g\,(Y,\, Z)\,,$$

entonces,

$$Xg(Y,\, Z) - g\left(\tilde{D}_X Y,\, Z\right) - g\left(Y,\, \tilde{D}_X Z\right) - Xg(Y,\, Z) + g(D_X Y,\, Z) + g(Y,\, D_X Z)$$

$$= -g\left(\tilde{D}_X Y - D_X Y,\, Z\right) - g\left(Y,\, \tilde{D}_X Z - D_X Z\right) = -g(S_X Y,\, Z) - g(Y,\, S_X Z)$$

$$= -\langle S_X Y,\, Z\rangle - \langle Y,\, S_X Z\rangle = -2X\varphi\langle Y,\, Z\rangle\,.$$

Si permutamos cíclicamente los campos X, Y y Z obtenemos:

$$\langle S_X Y,\, Z\rangle + \langle Y,\, S_X Z\rangle = 2X\varphi\langle Y,\, Z\rangle\,, \qquad 1)$$

$$\langle S_Y Z,\, X\rangle + \langle Z,\, S_Y X\rangle = 2Y\varphi\langle Z,\, X\rangle\,, \qquad 2)$$

$$\langle S_Z X,\, Y\rangle + \langle X,\, S_Z Y\rangle = 2Z\varphi\langle X,\, Y\rangle\,, \qquad 3)$$

Sustrayendo la ecuación 3) de la suma de las ecuaciones 1) y 2), y recordando que los tensores g y S son simétricos obtenemos por un lado:

$$\langle S_X Y,\, Z\rangle + \langle Y,\, S_X Z\rangle + \langle S_Y Z,\, X\rangle + \langle Z,\, S_Y\rangle - \langle S_Z X,\, Y\rangle - \langle X,\, S_Z Y\rangle$$

$$= 2\langle S_X Y,\, Z\rangle + \langle S_Y Z - S_Z Y,\, X\rangle + \langle S_X Z - S_Z X,\, Y\rangle = 2\langle S_X Y,\, Z\rangle\,,$$

Y junto con el otro lado de la igualdad obtemos:

$$2\langle S_X Y,\, Z\rangle = 2\left(X\varphi\langle Y,\, Z\rangle + Y\varphi\langle Z,\, X\rangle - Z\varphi\langle X,\, Y\rangle\right);$$

es decir

$$\langle S_X Y,\, Z\rangle = X\varphi\langle Y,\, Z\rangle + Y\varphi\langle Z,\, X\rangle - Z\varphi\langle X,\, Y\rangle\,. \qquad 4)$$

Observemos además que:

$$\langle X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X,\, Y\rangle G,\, Z\rangle$$

$$= \langle X\varphi Y,\, Z\rangle + \langle Y\varphi X,\, Z\rangle - \langle \langle X,\, Y\rangle G,\, Z\rangle$$

$$= X\varphi \langle Y,\, Z\rangle + Y\varphi \langle X,\, Z\rangle - \langle X,\, Y\rangle \langle G,\, Z\rangle = X\varphi \langle Y,\, Z\rangle + Y\varphi \langle X,\, Z\rangle - Z\varphi \langle X,\, Y\rangle,$$

ya que $\langle G,\, Z\rangle = D_Z\varphi = Z\varphi$; que no es otra cosa que la derivada direccional de φ en la dirección del campo Z. De aquí tenemos :

$$\langle X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X,\, Y\rangle G,\, Z\rangle = X\varphi \langle Y,\, Z\rangle + Y\varphi \langle X,\, Z\rangle - Z\varphi \langle X,\, Y\rangle \qquad 5)$$

Finalmente de las ecuaciones 4) y 5) obtenemos:

$$\langle S_X Y,\, Z\rangle = \langle X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X,\, Y\rangle G,\, Z\rangle,$$

lo cual implica que

$$S_X Y = X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X,\, Y\rangle G. \qquad 6)$$

■

Consideremos ahora $(M,\, g)$ una variedad Riemanniana M de dimensión n con métrica g y W una subvariedad de dimensión m con la métrica inducida de M. Denotemos por D y ∇ las conexiones definidas por g y la restricción de g a W respectivamente. Si tenemos que X y Y son dos campos vectoriales tangentes a W, entonces la conexión D se puede escribir de la siguiente manera:

$$D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,\, Y), \qquad 7)$$

donde $\nabla_X Y$ coincide con la componente tangencial de $D_X Y$ sobre W y $\alpha(X, Y)$ es la componente normal de $D_X Y$, que es una forma bilineal simétrica sobre el haz tangente de W con valores en su haz normal y que es llamada la Segunda Forma Fundamental de W.

Sea $\bar{g} = g\exp(2\varphi)$ un cambio conforme de la métrica como en el lema anterior, y definamos a S y σ los tensores diferencia de las conexiones de la siguiente manera:

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + S(X, Y) \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \qquad 8)$$

donde $\bar{D}$ y $\bar{\nabla}$ denotan las conexiones de $\bar{g}$ y de $\bar{g}$ restringida a W, respectivamente. A lo largo de W descomponemos de igual manera a $G = \operatorname{grad}\varphi$ con respecto a la métrica g como:

$$G = G_0 + G_1, \qquad 9)$$

donde G_0 y G_1 denotan las componentes tangencial y normal del gradiente de φ. Por la ecuación 6) del lema anterior y junto con la ecuación 9) tenemos que

$$S(X, Y) = X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X, Y\rangle G = X\varphi Y + Y\varphi X - \langle X, Y\rangle G_0 - \langle X, Y\rangle G_1,$$

es decir:

$$S(X, Y) = \sigma(X, Y) - \langle X, Y\rangle G_1, \qquad 10)$$

para todos los campos vectoriales tangentes a W. Si denotamos además por $\bar{\alpha}(X, Y)$ a la segunda forma fundamental de W con respecto a la métrica $\bar{g}$, entonces combinando las ecuaciones 7), 8) y 10) obtenemos:

$$\bar{\alpha}(X, Y) = \bar{D}_X Y - \bar{\nabla}_X Y = D_X Y + S(X, Y) - \nabla_X Y - \sigma(X, Y) =$$

$$\alpha(X, Y) + \sigma(X, Y) - \langle X, Y\rangle G_1 - \sigma(X, Y) = \alpha(X, Y) - \langle X, Y\rangle G_1,$$

es decir que la relación entre las segundas formas fundamentales en un cambio conforme de la métrica está dada por:

$$\bar{\alpha}(X, Y) = \alpha(X, Y) - \langle X, Y\rangle G_1. \qquad 11)$$

Si v es cualquier campo vectorial normal sobre W, se sigue de la ecuación 11) que las formas bilineales con valores en $\mathbb{R}$ dadas por $\langle\bar{\alpha}, v\rangle$ y $\langle\alpha, v\rangle$ difieren por un escalar, por lo que las multiplicidades de los valores propios del operador auto-adjunto asociado $S_v : T_p(W) \to T_p(W)$ dado por:

$$\langle S_v(X), Y\rangle = \langle\bar{\alpha}(X, Y), v\rangle ,$$

son los mismos, por lo que resultan ser un **Invariante Conforme** de W como una subvariedad de M. En particular las **Hipersuperficies Totalmente Umbílicas**, es decir; aquellas en las que la dimensión de W es $m = n - 1$ y cumplen que todos los valores propios de $\langle\bar{\alpha}(X, Y), v\rangle$ son iguales.

Se tiene un resultado conocido que para $n \geq 3$, las hipersuperficies totalmente umbílicas en $\mathbb{R}^n$ son precisamente subconjuntos abiertos de hiperplanos y las esferas de dimensión $n - 1$. Equivalentemente las hipersuperficies totalmente umbílicas en la esfera unitaria S^n son precisamente los subconjuntos abiertos de las esferas de dimensión $n - 1$. Este hecho es la base de la rigidez de las estructuras conformemente planas en dimensión $n \geq 3$. De los comentarios hechos anteriormente y usando aplicaciones conformes definidas localmente en $\mathbb{R}^n$ o S^n, se sigue que sobre toda variedad conformemente plana M de dimensión $n \geq 3$, existe una familia distinguida de subvariedades sobre M que son los subconjuntos abiertos de una $(n-1)$-esferas. Tomando intersecciones, tenemos que tiene un significado sobre M, la noción de un subconjunto abierto de una p-esfera para $1 \leq p \leq n - 1$. Por lo dicho anteriormente, en particular; una aplicación conforme entre variedades conformemente planas de las mismas dimensiones, digamos n, para $n \geq 3$, debe preservar estas piezas de p-esferas.

Sea M una variedad conformemente plana de dimensión $n \geq 3$.

Proposición 3.2.2 *El grupo de difeomorfismos conformes de M consiste precisamente de aquellas aplicaciones que preservan las $(n-1)$-esferas.*

Demostración: Denotemos por $Conf\,(M)$ al grupo de difeomorfismos conformes de M y por C el grupo de aquellos difeomorfismos que preservan las p-esferas. Como se observó anteriormente el grupo $Conf\,(M)$ está contenido en el grupo C. Sea $f \in C$. Nuestro problema es mostrar que en cada punto $p \in M$ la diferencial f_{*p} es una homotecia. Como la cuestión es local podemos asumir que f fija al punto p y más aún, que una vecindad de p está identificada conformemente con una vecindad del origen en $\mathbb{R}^n$, de tal forma que p se identifica con el origen. Usando la descomposición polar de f_{*p} y componiendo por un elemento del grupo $O\,(n)$, podemos considerar que f_{*p} sea la matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & & . & 0 \\ . & . & & & . \\ & & . & & \\ . & & & . & . \\ 0 & . & & . & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda_i > 0, \text{ para } i = 1, \ldots, n,$$

en términos del sistema coordenado estándar. Como f preserva $(n-1)$-esferas, f_{*p} actúa sobre $T_p(M)$ con la misma propiedad, resultando así que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, es decir que f_{*p} es una homotecia. ■

Denotemos por $M\,(n)$ al grupo de todos los difeomorfismos de S^n, para $n \geq 2$, el cual aplica $(n-1)$-esferas en ellas mismas. Por la proposición anterior tenemos que para $n \geq 3$ este grupo coincide con el grupo de difeomorfismos conformes que denotamos por $C(S^n)$. Un hecho básico en la teoría de Superficies de Riemann como se vio en el capítulo 1, es que esto también es cierto para $n = 2$, pero por motivos estructuralmente diferentes de los de la proposición.

Definición 3.2.3 *El grupo $M(n)$ se le llama el* ***Grupo de Möbius*** *en dimensión n, y a sus elementos* ***Transformaciones de Möbius.***

De ahora en adelante denotaremos a una variedad M de dimensión n por M^n.

Sea M^n una variedad conformemente plana. Entonces, para cada sistema coordenado admisible sobre M^n tenemos una aplicación conforme localmente definida sobre $\mathbb{R}^n$, donde identificamos a $\mathbb{R}^n$ con $S^n - \{\text{un punto}\}$ via la proyección estereográfica.

Definición 3.2.4 *Una* ***Estructura de Möbius*** *sobre una variedad M^n es un atlas máximo de cartas coordenadas admisibles, tal que las funciones de transición sobre las intersecciones de los dominios de las cartas son restricciones de transformaciones de Möbius. A una variedad con estructura de Möbius se le llama una* ***Variedad de Möbius*** *y a un difeomorfismo local que preserva la estructura de Möbius se le llama una* ***Aplicación de Möbius.***

3.3 Los Grupos $M(n)$ y $M(\mathbb{R}^n)$

Recordemos que cuando se tienen dos grupos topológicos G_1 y G_2, podemos dotar al producto cartesiano $G_1 \times G_2$ con la topología producto, una estructura de grupo, conocida como el producto directo de G_1 y G_2, obteniendo de esta manera un nuevo grupo topológico. Una generalización de este producto directo es el siguiente.

Sean G y N dos grupos topológicos, y consideremos el conjunto

$$\mathrm{Aut}\,(N) = \{f : N \to N : f \text{ es un automorfismo}\},$$

donde un automorfismo es un homomorfismo f que es un homeomorfismo de grupos topológicos.

Ahora, dada una aplicación $\theta : G \to \mathrm{Aut}\,(N)$, definimos una nueva aplicación $\acute{\theta} : G \times N \to N$, dada por

$$\acute{\theta}\,(g, n) = \theta\,(g)\,n, \text{ para toda } g \in G \text{ y } n \in N.$$

Si la aplicación $\acute{\theta}$ es continua, diremos que θ es contínua. Así dados N y G grupos topológicos y un homomorfismo continuo $\theta : G \to \mathrm{Aut}\,(N)$, definimos un nuevo grupo topológico $G \rhd_\theta N$, como:

Primero, como espacio topológico $G \rhd_\theta N$, es el espacio $G \times N$ con la topología producto. De acuerdo con esto un elemento de $G \rhd_\theta N$ se puede escribir como (g, n) con $n \in N$ y $g \in G$.

Segundo, la operación $\circ$ de $G \rhd_\theta N$, está definida por

$$(g, n) \circ (\acute{g}, \acute{n}) = (g\acute{g}, n\theta\,(g)\,(\acute{n}))\,; \text{ para } n, \acute{n} \in N \ \text{ y } g, \acute{g} \in G,$$

donde $\theta\,(g)\,(\acute{n}) \in N$ y tanto $n\theta\,(g)\,(\acute{n})$ como $g\acute{g}$ denotan las multiplicaciones en N y G, respectivamente.

Si denotamos al elemento identidad de N por 1, y al de G por e, es fácil verificar que $G \rhd_\theta N$ es un grupo, donde el elemento identidad de $G \rhd_\theta N$ es $(e, 1)$ y el inverso del elemento (g,n) está dado por $(g,n)^{-1} = (g^{-1}, \theta(g^{-1})(n^{-1}))$. Y de igual manera, es fácil ver que $G \rhd_\theta N$ es un grupo topológico conocido como el **Producto Semi-Directo** de los grupos topológicos N y G con respecto al homomorfismo continuo θ.

Conocer cuando un grupo es el producto semi-directo de dos grupos nos da una caracterización de este, como veremos a continuación:

Consideremos la sucesión de grupos topológicos G_k, $k \in \mathbb{N}$

$$... \to G_{i-1} \to^{f_{i-1}} G_i \to^{f_i} G_{i+1} \to ... ,$$

donde las f_k, $k \in \mathbb{N}$; son homomorfismos de grupos topológicos. Decimos que la **Sucesión es Exacta** en G_i, si $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$, donde $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \{f_{i-1}(g_{i-1}) : g_{i-1} \in G_{i-1}\}$ y $\ker(f_i) = \{g_i \in G_i : f_i(g_i) = e_{i+1}\}$. Si la sucesión es exacta en todo G_i, decimos que es una sucesión exacta.

Consideremos entonces la sucesión exacta corta

$$1 \to N \to^i A \to^j \to G \to 1,$$

de grupos topológicos, donde los grupos de los extremos son los triviales. Una **Escisión** para $j : A \to G$, es un homomorfismo de grupos topológicos $s : G \to A$ tal que $j \circ s$ es la identidad en G.

El siguiente resultado nos da una condición necesaria y suficiente para que un grupo topológico pueda escribirse en la forma de un producto semi-directo.

Proposición 3.3.1 *Sea*

$$1 \to N \to^i A \to^j \to G \to 1,$$

una sucesión exacta corta de grupos topológicos, tal que la topología sobre N coincide con la topología relativa de A vía la inclusión $i : N \to A$. Entonces, existe una escisión $s : G \to A$ para $j : A \to G$ si y sólo si existe un homomorfismo continuo $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$; y un isomorfismo $f : A \to G \rhd_\theta N$, tal que $f \circ i(n) = (e, n)$ y $j \circ f^{-1}(g, n) = g$. Más aún, el procedimiento de obtener θ a partir de s y el de obtener s a partir de θ es recíproco uno del otro.

La demostración de este resultado puede consultarse en [Kw].

Corolario 3.3.2 *Si $A \cong G \rhd_\theta N$, entonces el cociente A/N es un grupo topológico y $A/N \cong G$. Esto es, N es un subgrupo cerrado normal de $G \rhd_\theta N$.*

Observación:

Recordemos que cuando se tiene un homomorfismo continuo $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$, podemos obtener un nuevo homomorfismo $\hat{\theta} : G \times N \to N$. Es fácil ver que este homomorfismo $\hat{\theta}$ se puede ver como una acción de G en N por la izquierda.

Ahora, el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$, tiene claramente una estructura canónica de Möbius heredada de S^n vía la proyección estereográfica. Denotemos pues por $M(\mathbb{R}^n)$ al grupo de los difeomorfismos de Möbius sobre $\mathbb{R}^n$. Fijemos al origen 0 de $\mathbb{R}^n$. Fácilmente se puede observar que $M(\mathbb{R}^n)$ contiene a los siguientes grupos:

1) $O(n)$, que es el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ que fijan al origen 0.

2) $\mathbb{R}_+$, que es el grupo de homotecias dadas por: $x \to \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

3) $\mathbb{R}^n$, que denota el grupo de traslaciones.

El grupo de traslaciones $\mathbb{R}^n$ es normalizado por los grupos $O(n)$ y $\mathbb{R}_+$. Además, las acciones de estos grupos por conjugación son equivalentes a sus acciones lineales estándar. Más aún, estas acciones conmutan.

Por lo que tenemos que el grupo generado por $O(n)$, $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}^n$ es isomorfo al producto semi-directo:

$$(O(n) \cdot \mathbb{R}_+) \rhd \mathbb{R}^n.$$

Notemos además que este grupo contiene al grupo de isometrías Euclidianas:

$$E(n) := O(n) \rhd \mathbb{R}^n.$$

Teorema 3.3.3 *Para $n \geq 2$ se tiene que $M(\mathbb{R}^n) = (O(n) \cdot \mathbb{R}_+) \rhd \mathbb{R}^n$.*

Demostración: Denotemos por M_0 al grupo $(O(n) \cdot \mathbb{R}_+) \rhd \mathbb{R}^n$ y por M al grupo $M(\mathbb{R}^n)$. Por las observaciones antes hechas tenemos que $M_0 \subset M$. Consideremos ahora $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Via la proyección estereográfica, el grupo M puede ser identificado con el subgrupo de $M(n)$ cuyos elementos fijan el punto ∞. También, una $(n-1)$-esfera a través del punto ∞ corresponde a un $(n-1)$-plano en $\mathbb{R}^n$. Se sigue ahora de la proposición anterior que los elementos de M aplican $(n-1)$-planos sobre sí mismos, y por el así llamado teorema fundamental de la geometría proyectiva, válido para $n \geq 2$ se sigue que M está contenido en el grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$, $Aff(n)$. Ya que

$$Aff(n) = GL(n) \rhd \mathbb{R}^n, \text{ y } \; M \cap GL(n) = O(n) \cdot \mathbb{R}_+,$$

tenemos así:

$$M \subset M \cap GL(n) \rhd \mathbb{R}^n = (O(n) \cdot \mathbb{R}_+) \rhd \mathbb{R}^n.$$

por lo que $M = M_0$. ∎

Observación:

El teorema anterior muestra que $M(\mathbb{R}^n)$ es un grupo de Lie y consiste de transformaciones reales-analíticas. Ya que $M(\mathbb{R}^n)$ es el subgrupo de isotropía de $M(n)$ en el punto ∞, se sigue que $M(n)$ es también un grupo de Lie y consiste de transformaciones reales-analíticas. Esto nos implica que las funciones de transición de una estructura de Möbius y las aplicaciones que preservan la estructura de Möbius son también reales-analíticas. Tanto $M(n)$ como $M(\mathbb{R}^n)$ tienen dos componentes; la componente de la identidad consiste de aquellas aplicaciones que preservan la orientación y la otra componente consiste de las transformaciones que invierten la orientación.

3.3.1 Modelo lineal para $M(n)$

Consideremos a $\mathbb{R}^{n+2}$ con la forma cuadrática de signatura $(1, n+1)$ dada por:

$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ \ldots \ - x_{n+1}^2.$$

Denotemos por $O(Q) = O(n, 1)$ el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^{n+2}$ con la forma cuadrática Q. Este grupo preserva a la cuádrica:

$$X(Q) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : Q(x) = 0\},$$

el cual es un cono esférico recto en $\mathbb{R}^{n+2}$ con vértice en el origen. Este grupo tiene 4 componentes que son; dos que preservan la orientación, pero una de éllas intercambia las hojas del cono, y las otras dos son las que no preservan la orientación, y una de éllas invierte las hojas del cono. Entonces los subgrupos de $O(Q)$ los cuales preservan el semi-espacio superior $x_0 > 0$ contienen 2 de estas cuatro componentes, y denotaremos a este subgrupo por:

$$O_{\frac{1}{2}}(Q) = \{g \in O(Q) : \ g \text{ preserva } x_0 > 0\}.$$

Por otro lado tenemos que $O_{\frac{1}{2}}(Q)$ también actúa sobre el espacio de rayos en $X(Q)$ a través del origen que están en el semi-espacio $x_0 > 1$. Este espacio de semirayos puede ser identificado con:

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+2} \ : \ Q(x) = 0 \text{ y } x_0 = 1\} = S^n.$$

Las $(n-1)$-esferas en S^n son precisamente las intersecciones transversas de los $(n+1)$-planos en $\mathbb{R}^{n+2}$ a través del origen. Por lo que se sigue que $O_{\frac{1}{2}}(Q)$ actúa sobre S^n aplicando $(n-1)$-esferas en si mismas. Por la proposición anterior tenemos entonces que:

$$M(n) \approx O_{\frac{1}{2}}(Q).$$

Lo cual identifica igualmente a $M(n)$ como un grupo de Lie.

Teorema 3.3.4 *(Teorema de Liouville): Sean U y V subconjuntos abiertos de S^n para $n \geq 3$ y $f : U \to V$ una aplicación conforme. Entonces, f es la restricción de una transformación de Möbius $\tilde{f}$. Más aún, $\tilde{f}$ está determinada de manera única por f.*

Demostración: El grupo $M(n)$ contiene a los grupos $O(n+1)$ y al grupo de homotecias de $\mathbb{R}^n$ levantadas a S^n via la proyección estereográfica, además tenemos que $M(n)$ actúa transitivamente sobre n-bolas y una n-bola cerrada es conformemente equivalente a la semi-esfera superior cerrada. Denotemos por B a una n-bola contenida en U. Entonces $f(B)$ es una n-bola en V por la proposición anterior. Componiendo por un elemento de $M(n)$ podemos asumir que f aplica B sobre si misma y B es la semi-esfera superior. Sea $r: S^n \to S^n$ la reflexión en el ecuador ∂B. Entonces si $x \notin B$, la fórmula:

$$\tilde{f}(x) = rf(r(x)),$$

define una extensión conforme de f a S^n. Más aún, una extensión de f a una vecindad pequeña de B es única ya que cualquier punto en una de tales vecindades es un punto de la intersección de arcos circulares con alguno de sus extremos contenido en el interior de B y f aplica arcos circulares en arcos circulares. Un argumento sencillo de conexidad muestra que f tiene una única extensión conforme a S^n. Así $\tilde{f}$ es la extensión deseada y coincide con f sobre el dominio de definición de f. ∎

La importancia del teorema de Liouville está en que una variedad conformemente plana para dimensión $n \geq 3$ admite una estructura de Möbius canónica, de tal manera que las nociones de una variedad conformemente plana y una variedad de Möbius son equivalentes para $n \geq 3$. Para el caso $n = 2$, una variedad conformemente plana orientable es lo mismo que una superficie de Riemann. El estudio de estructuras de Möbius sobre una superficie de Riemann dada contiene como un subconjunto propio a la teoría de uniformizaciones junto con la teoría de grupos Fuchsianos y Kleinianos. Por otro lado el estudio de estructuras de Möbius sobre el disco unitario contenido en $\mathbb{R}^2$, que se denota por D^2, contiene como subconjunto propio la teoría de funciones univalentes. Así la noción de una estructura de Möbius nos da las bases geométricas de estas dos grandes teorías, y nos muestra una dirección en las cuales estas teorías admiten una fructífera generalización a dimensiones mayores.

Ejemplo 3.3.5 *Variedades de Möbius*

Una clase de Variedades de Möbius podemos obtenerlas de la siguiente manera.

Sea Ω *un subconjunto abierto de* S^n *y* Γ *un subgrupo de* $M(n)$ *el cual deja a* Ω *invariante y actúa libremente y propiamente discontinuamente sobre* Ω. *Entonces* Ω/Γ *tiene una estructura de Möbius canónica. Recordemos que la teoría clásica de grupos Kleinianos trata con los subgrupos* Γ de $M(2)$ *los cuales actúan propiamente discontinuamente sobre algún subconjunto abierto no vacío de* S^2 *como se vio en el capítulo* 1, *y por analogía llamaremos a éstas* ***Variedades Kleinianas***.

Otra diferencia entre los casos $n = 2$ y $n \geq 3$ es que en la demostración del teorema anterior la hipótesis $n \geq 3$ está siendo usada al usar la proposición 3.2.2. para su demostración. De igual manera, para $n = 2$ la demostración muestra que una aplicación definida sobre un subconjunto abierto de S^2 que preserva arcos circulares es la restricción de una transformación de Möbius. Pero por otro lado existe una familia muy amplia de aplicaciones conformes (los cuales coinciden con aplicaciones holomorfas y anti-holomorfas con jacobiana no nula) definidas sobre subconjuntos abiertos de la esfera de Riemann. Lo que es notable es que aún las aplicaciones conformes definidas globalmente sobre S^2 preservan círculos.

Nota:

Para $n \geq 3$ por el teorema de Liouville $M(n)$ coincide con el grupo de todos los difeomorfismos conformes de S^n. Este hecho es también válido para $n = 2$ y es esencialmente el hecho de que $M(2)$ coincide con $C(S^2)$.

3.4 La Relación con Geometría Hiperbólica

Sean H^n y D^n los siguientes conjuntos:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}.$$

$$H^n = \{x = (x_1, \ldots , x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}.$$

Dotemos a D^n y a H^n con las estructuras de Möbius inducidas de $\mathbb{R}^n$ y denotemos por $M(D^n)$ y por $M(H^n)$ a los grupos de todos los difeomorfismos que preservan la estructura de Möbius de D^n y H^n respectivamente.

Proposición 3.4.1 *D^n y H^n son equivalentes como variedades de Möbius. Además, el grupo $M(H^n)$ actúa transitivamente sobre H^n.*

Demostración: Via la proyección estereográfica desde el polo sur, podemos considerar a D^ncomo el hemisferio norte en S^n. Tomando ahora un n-plano π en $\mathbb{R}^{n+1}$ que sea tangente a S^n en el ecuador, digamos en el punto p, podemos hacer ahora una proyección estereográfica desde el punto antípoda de p, con lo cual, efectúando ambas aplicaciones tenemos que D^n es aplicado de una manera conforme sobre un semi-espacio del plano π, que claramente es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Como todos los semi-espacios de $\mathbb{R}^n$ son mutuamente isométricos, vemos que D^n y H^n son equivalentes como variedades de Möbius.

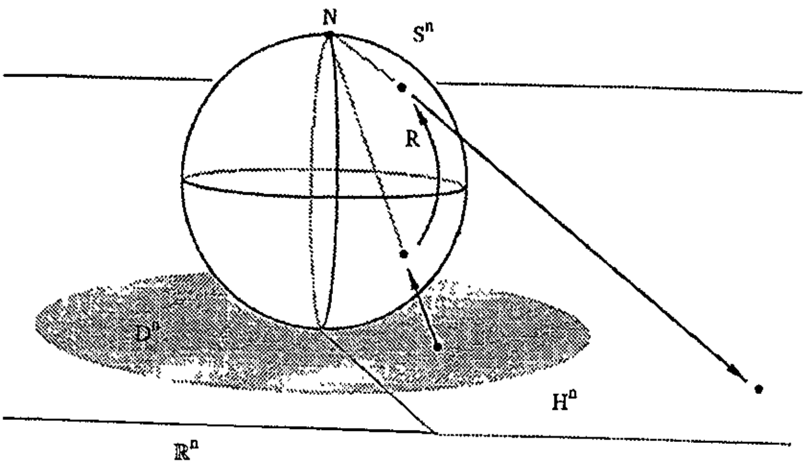

Figura 3.4 Esta aplicación entre D^n y H^n es

conocida como la transformación de Cayley

Es claro que las aplicaciones:

1) $x \to x + a$, donde $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ con $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n-1$,

2) $x \to \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$,

claramente pertenecen a $M(H^n)$ y el grupo que generan estas aplicaciones actúa transitivamente sobre H^n.

Para ver esto consideremos cualquier punto p en H^n, así $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$ con $p_n > 0$, entonces aplicando una transformación del tipo 1) con $a = (p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$ tenemos que el punto p es aplicado a un punto y de la forma $y = (0, \dots, 0, p_n)$, y como las aplicaciones del tipo 2) actúan de tal manera que para cualquier $\beta \in \mathbb{R}^+$

existe una $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda p_n = \beta$, tenemos que para cualesquiera dos puntos en H^n existe una transformación de $M(H^n)$ tal que aplica un punto en el otro. Por lo tanto la acción de $M(H^n)$ sobre H^n es transitiva. ∎

Una propiedad notable de D^n, que no poseen $\mathbb{R}^n$ ni S^n es la siguiente:

Proposición 3.4.2 *D^n admite una métrica Riemanniana $M(D^n)$-invariante. Esta métrica es completa y tiene curvatura constante negativa.*

Demostración: Consideremos a D^n como la semi-esfera superior en $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es decir:

$$D^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \text{ y } x_{n+1} > 0\}.$$

Consideremos la proyección estereográfica desde el polo norte, $P = (0, \ldots, 0, 1)$ sobre $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$. Esta aplicación aplica ∂D^n sobre la esfera unitaria S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$, como se muestra en la figura 3.5 siguiente.

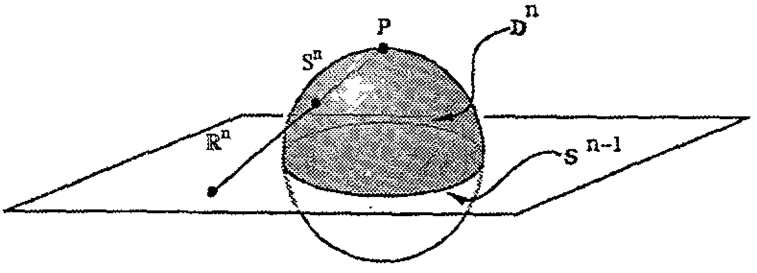

Figura 3.5

Denotemos por H al subgrupo de isotropía de $M(n)$ en el punto p. Entonces H puede ser identificado con $M(\mathbb{R}^n)$. Así, el subgrupo de isotropía K de $M(D^n)$ en el punto p es igual a $H \cap M(D^n)$. De esta manera, K puede ser identificado con el subgrupo de $M(\mathbb{R}^n)$ el cual deja invariante a S^{n-1}. De la descripción que se hizo anteriormente de $M(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $K \cong O(n)$.

En particular, tenemos de la teoría de grupos de Lie que este grupo es compacto. Así, tomando una métrica K-invariante sobre el espacio tangente $T_p(D^n)$ y trasladando por elementos de $M(D^n)$, obtenemos una métrica Riemanniana $M(D^n)$-invariante sobre D^n. Ya que el grupo $O(n)$ es transitivo sobre subespacios de dimensión 2 en $T_p(D^n)$, se sigue que la métrica tiene curvatura seccional constante, y como esto es cierto para cualquier métrica Riemanniana homogénea, resulta que esta métrica es completa. Por un teorema básico en geometría diferencial tenemos que D^n, descrito con esta métrica, y salvo un factor de escala, es isométrico a S^n, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, es decir, una Variedad Riemanniana simplemente conexa, completa con curvatura constante igual a $1, 0$ ó -1. Pero D^n no puede ser S^n ni $\mathbb{R}^n$ ya que estos espacios no admiten métricas invariantes bajo sus grupos de difeomorfismos de Möbius, pues la imagen de sus representaciones de isotropía no está contenida en el grupo ortogonal. Resultando de esta manera que D^n, o equivalentemente H^n deben de ser isométricos al espacio hiperbólico salvo un factor de escala. ■

Identifiquemos ahora a $M(D^n)$ como un grupo de Lie, para $n \geq 2$. Para esto identificamos a D^n con una bola B en S^n. Así, por el teorema de Liouville para $n \geq 3$, y por los comentarios hechos después para $n = 2$, tenemos:

$$M(D^n) = \{g \in M(n) : \ g(B) = B\}.$$

Es conveniente usar el modelo lineal de $M(n)$ pues en este modelo podemos identificar a D^n de la siguiente manera:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} : \; Q(x) = 0, x_0 = 1 \text{ y } x_n > 0\},$$

de lo que resulta que

$$M(D^n) = \{g \in O_{\frac{1}{2}}(Q) : \; g \;\; \text{preserva } x_{n+1} > 0\}.$$

El lado derecho de la igualdad anterior puede ser identificado con $O_{\frac{1}{2}}(Q_0)$, donde Q_0 es la forma cuadrática dada por $x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$ sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, el cual es ahora considerado como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+2}$ tomando a la última componente $x_{n+1} = 0$. Por lo que tenemos entonces que $M(D^n)$ es isomorfo a dos de las cuatro componentes de $O(1, n) \cong M(n-1)$, donde para $n = 2$, $M(1)$ es simplemente interpretado como las dos componentes apropiadas de $O(1, 2)$, otro motivo por el cual $M(2)$ coincide con el grupo de difeomorfismos conformes de S^2.

Veamos ahora la situación anterior desde otro punto de vista.

Consideremos a S^n como la frontera de D^{n+1}, que se denota por $\partial D^{n+1} = S^n$. Entonces, por la representación lineal de $M(D^{n+1})$, tenemos que el grupo de Möbius $M(n)$ se extiende de manera única a D^{n+1}, y además sobre D^{n+1} actúa como el grupo de isometrías de D^{n+1} con respecto a la métrica hiperbólica, lo cual nos muestra que existe una relación fundamental entre la geometría conforme y la geometría hiperbólica. Por un lado, una variedad hiperbólica, es decir, una variedad Riemanniana no necesariamente completa de curvatura constante negativa tiene una estructura canónica de Möbius. Por el otro lado, una variedad de Möbius resulta ser " frontera ideal " de alguna variedad hiperbólica. Este último enunciado, podemos expresarlo en forma más precisa de la siguiente manera:

Proposición 3.4.3 *Sea $M^n = \Omega/\Gamma$ una variedad Kleiniana tal que el subgrupo Γ es libre de torsión. Entonces, existe una variedad N^{n+1} con frontera igual a M^n tal que; si denotamos el interior de un conjunto V por* $\operatorname{int} V$, *tenemos que* $\operatorname{int} N^{n+1}$ *admite una métrica hiperbólica completa.*

Demostración: Por hipótesis tenemos que $M^n = \Omega/\Gamma$, donde Ω es un subconjunto abierto no vacío de S^n y Γ es un subgrupo de $M(n)$, tal que Γ deja invariante a Ω y actúa libremente y propiamente discontinuamente ahí. Consideremos

$$\tilde{N} = \Omega \cup D^{n+1}.$$

Como se acaba de explicar, la acción de Γ se extiende canónicamente sobre $\tilde{N}$, y de hecho actúa como un grupo de isometrías de D^{n+1}. Ya que Γ actúa propiamente discontinuamente sobre Ω resulta ser un subgrupo discreto (en la topología compacto abierta), como grupo de homeomorfismos de D^{n+1}. Ahora un grupo discreto de isometrías actúa propiamente discontinuamente. Como Γ es libre de torsión, su acción sobre D^{n+1} es tanto libre como propiamente discontinua, por lo que D^{n+1}/Γ es una variedad hiperbólica completa. Un punto sutil que no se demuestra aquí es que la acción de Γ sobre $\tilde{N}$ es también propiamente discontinuamente. Así, tenemos que $N^{n+1} = \tilde{N}/\Gamma$ es una variedad con frontera igual a M^n y cumple las propiedades requeridas. ∎

3.5 Desarrollamiento y Holonomia

Denotemos por σ_0 la estructura canónica de Möbius sobre S^n. Si se tiene una variedad diferenciable M^n y una inmersión diferenciable $f : M^n \to S^n$, claramente ésta induce una estructura de Möbius sobre M^n la cual denotaremos por $f^*\sigma_0$. Una importante consecuencia del teorema de Liouville es el siguiente teorema, que es un recíproco parcial del teorema de Liouville.

Teorema 3.5.1 *Sea (M^n, σ) una variedad de Möbius simplemente conexa. Entonces, existe una inmersión diferenciable*

$$\delta : M^n \to S^n,$$

tal que $\delta^*\sigma_0 = \sigma$. Más aún, si δ_1 y δ_2 son dos de tales inmersiones diferenciables, entonces existe un único elemento $g \in M(n)$ tal que $\delta_1 = g \circ \delta_2$.

Demostración: Fijemos un punto base $*$ en M y denotemos por $\wp$ el espacio de curvas que empiezan en $*$, es decir, aplicaciones continuas $f : [0,\ 1] \to M$ con $f(0) = *$. Dotemos a $\wp$ con la topología compacto abierta. Fijemos además una vecindad coordenada admisible U_* del punto $*$ y sea $\varphi : U_* \to S^n$ un encaje de Möbius. Sean U y V dos vecindades admisibles en M de tal manera que $U \cap V$ sea distinta del vacío y conexa. Denotemos por:

$$\varphi_U : U \to S^n \ \text{ y por } \ \varphi_V : V \to S^n,$$

los correspondientes encajes de Möbius para las vecindades U y V respectivamente. Entonces por el teorema de Liouville tenemos que:

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \subset S^n \to \varphi_U(U \cap V) \subset S^n,$$

es la restricción de un único elemento de Möbius.

Sea $f : [0, 1] \to M$ una curva y hagamos una partición del intervalo $[0, 1]$ de la siguiente forma:

$$0 = t_0 < t_1 < \ \ldots \ < t_n = 1,$$

de tal manera $f\left([t_{i-1},\ t_i]\right)$ este contenido en una vecindad admisible U_i, con $i = 1, \ldots, n$ y además $U_1 = U_*$. Reduciendo las vecindades U_i si es necesario, podemos asumir que $U_{i-1} \cap U_i$ es conexa. Fijemos ahora los encajes de Möbius $\varphi_i : U_i \to S^n$ definidos por estas vecindades coordenadas U_i con $\varphi_1 = \varphi_*$, y sean $g_i \in M(n)$ los elementos tales que:

$$g_i \mid_{U_{i-1} \cap U_i} = \varphi_{i-1} \circ \varphi_i^{-1} \mid_{U_{i-1} \cap U_i}, \text{ para } i = 2, \ \ldots \ , n.$$

Entonces desarrollaremos a f en S^n como sigue:

Como $\varphi_1 \circ f$ aplica una vecindad de $[t_0,\ t_1]$ en S^n y por definición de g_2, tenemos que $\varphi_1 \circ f$ y $g_2 \circ \varphi_2 \circ f$ coinciden en una vecindad de t_1. Similarmente $g_2 \circ \varphi_2 \circ f$ coincide con $g_2 \circ g_3 \circ \varphi_3 \circ f$ en una vecindad de t_2 y así sucesivamente, obtenemos una curva con punto inicial $\varphi_*(0)$ dada por:

$$\Delta_f : [0, 1] \to S^n.$$

Definamos ahora la aplicación

$$\Delta : \wp \to S^n \text{ dada por } \Delta(f) = \Delta_f(1).$$

De la parte de unicidad en el teorema de Liouville se sigue que las aplicaciones Δ_f y Δ son independientes de las elecciones de la partición del intervalo $[0, 1]$ y de las vecindades coordenadas. Más aún, si h está suficientemente cerca de f (en la topología compacto-abierta) y $f(1) = h(1)$, entonces $\Delta(f) = \Delta(h)$. Pero dentro de las hipótesis tenemos que M es simplemente conexa, así que para cualquier curva h con punto inicial $*$ y con $h(1) = f(1)$ tenemos que $\Delta(h) = \Delta(f)$, en otras palabras, tenemos que Δ define una aplicación

$$\delta : M^n \to S^n.$$

Queda además claro que δ es una inmersión diferenciable que cumple que $\delta^*\sigma_0 = \sigma$, y δ está determinada de manera única por la elección inicial de φ_*.

Sean ahora δ_1 y δ_2 dos de tales aplicaciones de Möbius. Haciendo la vecindad coordenada U_* más pequeña si es necesario, podemos asumir que $\delta_1 |_{U_*}$ y $\delta_2 |_{U_*}$ son encajes de Möbius. Nuevamente, por el teorema de Liouville existe un único elemento $g \in M(n)$ tal que $\delta_1 |_{U_*} = g \circ \delta_2 |_{U_*}$. Tanto δ_1 como $g \circ \delta_2$ pueden ser pensados como las aplicaciones obtenidas por el anterior "proceso de desarrollamiento" con la elección inicial de $\varphi_* = \delta_1 |_{U_*}$. Así, por los comentarios hechos en el párrafo anterior tenemos que $\delta_1 = g \circ \delta_2$. ∎

Definición 3.5.2 *Una Variedad de Möbius (M^n, σ) se dice que es* ***Desarrollable****, si existe una aplicación de Möbius $\delta : M^n \to S^n$ con las propiedades del teorema anterior. A una de tales aplicaciones de Möbius $\delta : M^n \to S^n$ se le conoce como un* ***Desarrollamiento*** *de M^n en S^n.*

En este lenguaje, el teorema anterior dice que una variedad de Möbius simplemente conexa es desarrollable y el desarrollamiento es esencialmente único; es decir, que cualesquiera dos desarrollamientos difieren por un elemento determinado de manera única de $M(n)$.

Consideremos ahora una variedad de Möbius desarrollable (M^n, σ) y $\delta : M^n \to S^n$ un desarrollamiento. Denotemos al grupo de todos los automorfismos de Möbius de M por $A(M)$. Entonces para cualquier $u \in A(M)$ claramente $\delta \circ u$ es también un desarrollamiento, y así, existe un único elemento $\rho(u) \in M(n)$ tal que:

$$\rho(u) \circ \delta = \delta \circ u. \qquad 1)$$

Proposición 3.5.3 *La aplicación $\rho : A(M) \to M(n)$ dada por $u \longmapsto \rho(u)$ define un homomorfismo δ-invariante.*

Demostración: La δ-equivarianza de ρ es justamente la ecuación 1).

Sean $u_1, u_2 \in A(M)$. Entonces, por definición de ρ tenemos:

$$\rho(u_1 \circ u_2) \circ \delta = \delta \circ u_1 \circ u_2 = \rho(u_1) \circ \delta \circ u_2 = \rho(u_1) \circ \rho(u_2) \circ \delta, \qquad 2)$$

lo cual muestra que ρ es un homomorfismo de grupos. ■

Sea ahora (M^n, σ) una variedad de Möbius desarrollable, y δ_1, δ_2 dos aplicaciones desarrolladoras. Como vimos anteriormente, $\delta_1 = g \circ \delta_2$ para un único elemento determinado $g \in M(n)$. Denotemos por ρ_1 y por ρ_2, a los homomorfismos δ_1 y δ_2 equivariantes respectivamente definidos por la ecuación 2). Entonces, para cualquier $u \in A(M)$ tenemos:

$$\rho_1(u) \circ \delta_1 = \rho_1(u) \circ g \circ \delta_2 = \delta_1 \circ u = g \circ \delta_2 \circ u$$

o equivalentemente

$$\left(g^{-1} \circ \rho_1(u) \circ g\right) \circ \delta_2 = \delta_2 \circ u = \rho_2(u) \circ \delta_2.$$

Ya que la ecuación 1) está determinada de manera única por u y por δ, se sigue de esto que:

$$\rho_2(u) = g^{-1} \circ \rho_1(u) \circ g.$$

Con lo cual tenemos:

Proposición 3.5.4 *Sea (M^n, σ) una variedad de Möbius desarrollable. Entonces, existe un homomorfismo canónico $\rho : A(M) \to M(n)$, el cual está determinado de manera única salvo conjugación por un elemento en $M(n)$.*

Sea ahora (M^n, σ) una variedad de Möbius no necesariamente desarrollable. Denotemos por $p : \tilde{M} \to M$ al cubriente universal de M y por $\tilde{\sigma} = p^*\sigma$ la estructura de Möbius inducida sobre $\tilde{M}$ por la aplicación cubriente p. Sea $\tilde{\delta} : \tilde{M} \to S^n$ una aplicación desarrolladora. Por un abuso de lenguaje algunas veces se refiere uno a $\tilde{\delta}$ como la aplicación desarrolladora de (M^n, σ). Denotemos por $\pi = \pi_1(M)$ al grupo de transformaciones cubrientes actuando sobre $\tilde{M}$. Por las propiedades de las transformaciones cubrientes tenemos que $\pi \subset A(\tilde{M})$. Sea $\rho : A(\tilde{M}) \to M(n)$ el homomorfismo definido anteriormente.

Definición 3.5.5 *Con la notación anterior a el homomorfismo $\rho\mid_\pi$ se le llama el **Homomorfismo de Holonomia** o la **Representación de Holonomia** de (M^n, σ).*

Nota:

Los invariantes geométrico-algebraico $\tilde{\delta}$ y ρ los cuales son esencialmente únicos, son los invariantes básicos de una estructura de Möbius. Estos indican por ejemplo la posibilidad de hacer deformaciones de una estructura de Möbius sobre la misma variedad ambiente.

3.5.1 Criterio para el Desarrollamiento

Proposición 3.5.6 *Sean (M^n, σ) una variedad de Möbius con p, π, $\tilde{\delta}$ y ρ como antes. Entonces:*

1) M^n es desarrollable si y sólo si $\rho\,|_\pi$ es trivial.

2) Más generalmente, sea $K = Núcleo(\rho\,|_\pi)$ y M_K el cubriente de M correspondiente a K. Entonces M_K es el menor cubriente desarrollable de M, en el sentido de que cualquier otro cubriente desarrollable $M_1 \to M$ se factoriza a través de M_K.

Demostración: Supongamos que M^n es una variedad desarrollable.

Sea $\delta : M^n \to S^n$ un desarrollamiento. Tenemos entonces que $\delta \circ p$ es una aplicación desarrolladora de $\tilde{M}$, así esta aplicación puede ser tomada como $\tilde{\delta}$. De ésta manera, $\tilde{\delta}$ aplica cada π-órbita en $\tilde{M}$ a un solo punto, por lo que, de la ecuación 1) obtenemos:

$$\left(\rho\,(u) \circ \tilde{\delta}\right)(*) = \rho\,(u)\,(\delta(q)) = \left(\tilde{\delta} \circ u\right)(*) = (\delta \circ p)u\,(*) = \delta\,(q)\,,$$

es decir

$$\rho\,(u)\,(\delta(q)) = \delta(q), \text{ para toda } u \in \pi.$$

Por lo tanto $\rho\,|_\pi = \{Id_{M(n)}\}$. El regreso se obtiene haciendo la misma demostración con los pasos al revés. Lo cual implica 1), y 2) se sigue de 1). ■

La proposición anterior explica la distinción entre una estructura de Möbius general y una estructura Kleiniana. Con la misma notación que en la proposición anterior, sea $\delta_K : M_K \to S^n$ un desarrollamiento. Entonces se tiene que (M^n, σ) es Kleiniana si y sólo si δ_K es un encaje. Una condición necesaria es que $\rho(\pi)$ actúe libremente y discontinuamente sobre la imagen de $\tilde{\delta}$, y $\tilde{\delta}$ sea una aplicación cubriente, no solamente un homeomorfismo local. Pues un homeomorfismo local es una aplicación cubriente si y sólo si este tiene la propiedad de levantamiento de curvas. Si ésta condición se satisface, entonces M es un cubriente de una variedad Kleiniana $\mathrm{im}\,\tilde{\delta}/\rho(\pi)$. Esta condición puede claramente no ser satisfecha, lo cual nos da muchas maneras de conseguir estructuras de Möbius que no sean Kleinianas.

3.6 Frontera Ideal, Clasificación de Estructuras de Möbius

Existen varias nociones de " Frontera Ideal " en la teoría de superficies de Riemann, sin embargo la noción que se introducirá aquí es nueva en este contexto clásico. La idea es "pegarle" una frontera ideal a una variedad de Möbius desarrollable, y ésta motivación proviene del hecho de que la aplicación desarrolladora puede extenderse continuamente a la frontera ideal.

Sea (M^n, σ) una variedad de Möbius desarrollable y $\delta : M^n \to S^n$ un desarrollamiento. Denotemos por g_0 a la métrica Riemanniana sobre S^n dada por el ambiente a su estructura conforme estándar. Sea $g = \delta^* g_0$ la métrica Riemanniana inducida sobre M^n y $\bar{M}$ la completación de Cauchy de M^n definida en términos de la métrica g.

Proposición 3.6.1 *$\bar{M}$ como espacio topológico no depende de las elecciones de g_0 ni* *de δ.*

Demostración: Sean g'_0 y δ' cualesquiera otras elecciones y $g' = \delta'^* g'_0$. Ya que S^n es compacto existe una constante c tal que:

$$\frac{1}{c} g \leq g' \leq cg,$$

pues la métrica es una función continua, y como S^n es compacto ésta alcanza su máximo y su mínimo. Por lo que, comparando la métrica g' con la métrica g y usando la propiedad Arquimedeana obtenemos la existencia de tal constante c. Así, de esta manera observamos que g y g' definen las mismas sucesiones de Cauchy. ∎

Observemos que la proposición anterior implica que $\bar{M}$ depende solamente de σ.

Definición 3.6.2 *Llamaremos al conjunto $\bar{M}$ la* ***Completación de Möbius*** *de M. Al conjunto $\bar{M} - M$ que denotaremos por $\partial_0 M$ le llamaremos la* ***Frontera Ideal*** *de (M^n, σ).*

Proposición 3.6.3 *Si (M^n, σ) es una variedad de Möbius desarrollable y si tenemos que $\delta : M^n \to S^n$ es un desarrollamiento, entonces δ se extiende $\bar{\delta} : \bar{M} \to S^n$.*

Demostración: Sea g_0 la métrica Riemanniana estándar sobre S^n y sea $g = \delta^* g_0$ la métrica inducida en M^n. Sea $p_0 \in \partial_0 M$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en M^n tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$. Entonces existen arcos rectificables en M que unen los puntos p_n con p_{n+1}, para toda $n \in \mathbb{N}$, y con longitud arbitrariamente cercana a la distancia entre los puntos p_n y p_{n+1}. Es fácil ver que existe un arco rectificable $f : [0,1) \to M$ tal que $\lim_{t\to 1} f(t) = p_0$, la longitud de f como arco parametrizado es finita, y todas estas longitudes son iguales a las longitudes de las curvas correspondientes bajo la aplicación . Ya que S^n es compacto, cualquier sucesión $\{\delta \circ f(t_n)\}_{t_n \to 1}$ tiene puntos de acumulación. Pero como la longitud de $\delta \circ f$ es finita, vemos que existe sólo un punto de acumulación. En otras palabras, $\lim_{t\to 1} \delta \circ f(t)$ existe. Lo cual claramente da la extensión requerida $\bar{\delta} : \bar{M} \to S^n$ de δ. ■

Proposición 3.6.4 *Sean (M_1, σ_1) y (M_2, σ_2) dos variedades de Möbius que son desarrollables y $f : M_1 \to M_2$ una aplicación de Möbius. Entonces, f se extiende a $\bar{f} : \bar{M}_1 \to \bar{M}_2$. Más aún, si $\bar{f}(\partial_0 M_1) \subseteq \partial_0 M_2$, entonces f es una aplicación cubriente y de hecho se tiene que $\bar{f}(\partial_0 M_1) = \partial_0 M_2$.*

Demostración: Sea $\delta_2 : M_2 \to S^n$ un desarrollamiento. Entonces $\delta_1 = \delta_2 \circ f$ es un desarrollamiento de M_1. Denotemos por g_0 a la métrica estándar sobre S^n, y por $g_i = \delta_i^* g_0$, con $i = 1, 2$. Entonces tenemos que $f^* g_2 = g_1$ y así tenemos que f es una isometría local. Aplicando el mismo argumento que en la demostración anterior, se tiene que f se extiende a una función $\bar{f} : \bar{M}_1 \to \bar{M}_2$, lo cual prueba nuestra primera afirmación.

Supongamos ahora que $\bar{f}(\partial_0 M_1) \subseteq \partial_0 M_2$. Sea $u_2 : [0, 1] \to M_2$ una curva rectificable y denotemos por $u_1 : [0, 1) \to M_1$ un levantamiento parcial de u_2, por lo que $f \circ u_1 = u_2$ sobre el intervalo $[0, 1)$. Por otro lado tenemos que las longitudes de u_1 y u_2 son finitas e iguales, por lo que $\lim_{t\to 1} u_1(t)$ existe en $\bar{M}_1$. Si este límite no existiera en M_1, entonces claramente tenemos una contradicción a la hipótesis de que $\bar{f}(\partial_0 M_1) \subseteq \partial_0 M_2$. Por lo que resulta entonces que f tiene la propiedad de levantamiento de curvas, de donde resulta ser una aplicación cubriente.

Por último, tomemos un punto $p_2 \in \partial_0 M_2$ y una curva rectificable $u_2 : [0,\, 1) \to M_2$ tal que $\lim_{t\to 1} u_2\,(t) = p_2$. Sea $u_1 : [0,\, 1) \to M_1$ un levantamiento de u_2. Ya que u_1 y u_2 tienen la misma longitud finita, entonces $\lim_{t\to 1} u_1\,(t)$ existe en $\bar{M}_1$. Si denotamos por $p_1 = \lim_{t\to 1} u_1\,(t)$, entonces tenemos que $\bar{f}\,(p_1) = p_2$. También p_1 debe ser un punto de $\partial_0 M_1$ pues de otra manera p_1 estaría en M_1 y esto implicaría que p_2 estaría en M_2, ya que f es un homeomorfismo local. Así, tenemos que $\bar{f}\,(\partial_0 M_1) = \partial_0 M_2$. ■

Proposición 3.6.5 *Sea $(M,\, \sigma)$ una variedad de Möbius desarrollable.*

1) Si $\partial_0 M = \emptyset$, entonces $(M,\, \sigma) \approx (S^n,\, \sigma_0)$.

2) Si $\partial_0 M = \{$ un punto$\}$, entonces $(M,\, \sigma) \approx (E^n,\, \sigma_0\,|_{E^n})$; donde consideramos a $E^n \approx S^n - \{\infty\}$.

Demostración: Sea $\delta : M \to S^n$ un desarrollamiento.

Si $\partial_0 M = \emptyset$, entonces tenemos que M es compacta, y por la proposición anterior tenemos que δ es una aplicación cubriente. Por lo tanto $(M,\, \sigma) \approx (S^n,\, \sigma_0)$.

Supongamos ahora que $\partial_0 M = \{*\}$, y que $\bar{\delta} : M \cup \{*\} \to S^n$ es la extensión de δ. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bar{\delta}\,(*) = \infty$. Denotemos por $M_1 = \bar{M} - \bar{\delta}^{-1}\,(\infty)$. Es claro que $\bar{M}_1 = \bar{M}$, $\delta\,(M_1) = E^n$ y que δ aplica $\partial_0 M_1$ en $\partial_0 E^n$. Así por la proposición anterior tenemos que $\delta\,|_{M_1}$es una aplicación cubriente. Como E^n es simplemente conexo, entonces $\delta\,|_{M_1}$es un homeomorfismo de Möbius. De donde $\partial_0 M_1 = \{$ un punto$\}$, así tenemos que $\partial_0 M_1 = \{*\}$, $M_1 = M$, y así $(M,\, \sigma) \approx (E^n,\, \sigma_0\,|_{E^n})$. ■

Por la proposición anterior tenemos una clasificación muy fructífera de estructuras de Möbius.

Definición 3.6.6 *Sea* (M, σ) *una variedad de Möbius y* $\left(\tilde{M}, \tilde{\sigma}\right)$ *su cubriente universal.*

Diremos que:

1) (M, σ) *es elíptica si* $\left(\tilde{M}, \tilde{\sigma}\right) \approx (S^n, \sigma_0)$.

2) (M, σ) *es parabólica si* $\left(\tilde{M}, \tilde{\sigma}\right) \approx (E^n, \sigma_0 |_{E^n})$.

3) En cualquier otro caso diremos que (M, σ) *es hiperbólica.*

Capítulo 4

EJEMPLOS DE VARIEDADES DE MÖBIUS

4.1 Ejemplos y Construcciones

Ejemplo 4.1.1 *El famoso teorema de la existencia de coordenadas isotérmicas en una variedad Riemanniana de dimensión dos* M^2 *nos dice que ésta variedad* M^2 *es conformemente plana. Sin embargo, no es claro a priori que ésta también admita una estructura de Möbius compatible. Por el teorema de Uniformización* M^2 *admite una métrica completa de curvatura constante conforme a la dada. Este hecho equipa a* M^2 *con una elección canónica de una estructura de Möbius. Excepto para el caso en el que* $M^2 = S^2$*, todos los demás casos admiten una familia bastante grande de otras estructuras de Möbius. Por ejemplo, para* $M^2 = \mathbb{R}^2$ *o* D^2*, consideradas como superficies de Riemann, cualquier función meromorfa con jacobiano no nulo dota a*

M^2 con una estructura de Möbius.

Para mayor referencia puede consultarse [Gu].

Ejemplo 4.1.2 *Sea $\Omega = S^n$. Como Ω es un espacio compacto, un grupo Γ actuando propiamente discontinuamente sobre Ω tiene que ser finito. Del modelo lineal que se dió para el grupo de Möbius $M(n)$ se tiene que el grupo $O(n+1)$ es un subgrupo compacto maximal de $M(n)$. Por un resultado estándar en teoría de Lie se tiene que Γ es conjugado a un subgrupo de $O(n+1)$. Así, los espacios cocientes Ω/Γ obtenidos de esta manera son precisamente los tipos conformes del espacio de formas esférico.*

Ejemplo 4.1.3 *Sea $\Omega = S^n - \{punto\}$ el cual es Möbius equivalente a $\mathbb{R}^n$. De la descripción que se tiene del grupo $M(\mathbb{R}^n)$ podemos observar que un elemento en $M(\mathbb{R}^n) - \mathbb{R}^n(n)$ es de orden infinito y tiene un punto fijo, por lo que no puede estar contenido en ningún subgrupo Γ que actúe libremente y propiamente discontinuamente sobre $\mathbb{R}^n$. En otras palabras si Γ es un subgrupo de $M(\mathbb{R}^n)$ el cual actúa libremente y propiamente discontinuamente sobre $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que Γ es un subgrupo de $\mathbb{R}^n(n)$. De esta manera se tiene que los espacios cocientes Ω/Γ son precisamente los tipos conformes del espacio de formas Euclidiano.*

Ejemplo 4.1.4 *Sea $\Omega = S^n - \{dos\ puntos\}$. Alternativamente podemos considerar a Ω como $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Tenemos de esta manera que $M(\Omega)$ contiene un subgrupo G de índice dos, el cual fija al 0 y a ∞, $G \cong \mathbb{R}_+ \times O(n)$ y G actúa transitivamente* *sobre* Ω *con subgrupo de isotropía en un punto isomorfo a* $O(n-1)$. *Ya que éste es un grupo compacto vemos que* Ω *admite una métrica Riemanniana* $M(\Omega)$*-invariante. De hecho, en términos de coordenadas polares podemos tomar esta métrica como*

$$\frac{dr^2}{r^2} + d\sigma_{n-1}^2,$$

donde $d\sigma_{n-1}^2$ *es la métrica estándar sobre* S^{n-1} *haciendo de está manera a* Ω *isométrico a* $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. *De esto se sigue claramente que un subgrupo discreto de* $M(\Omega)$ *actúa propiamente discontinuamente sobre* Ω. *Es fácil ver que cualquier subgrupo discreto de* G *es finito o contiene un subgrupo* $\Phi \approx \mathbb{Z}$ *de índice finito generado por un elemento de la forma* λA, $\lambda > 1$ *y* $A \in O(n)$, *donde* $A = e$ *o es de orden infinito. Entonces, obtenemos que* Ω/Φ *es difeomorfo a* $S^{n-1} \times S^1$. *Tanto* λ *como los ángulos de rotación de* A *son invariantes de la estructura de Möbius sobre* Ω/Φ. *Un cociente compacto de* Ω *por un subgrupo* Γ *de* $M(\Omega)$ *actuando libremente y propiamente discontinuamente sobre* Ω *es llamada una* **Variedad de Hopf**. *Como se menciono anteriormente una variedad de Hopf es finitamente cubierta por una variedad difeomorfa a* $S^{n-1} \times S^1$. *Una variedad de Hopf de dimensión dos es difeomorfa a un toro o a una botella de Klein, y su estructura de Möbius es diferente a la estructura canónica correspondiente a la métrica Euclidiana compatible con su estructura conforme.*

Ejemplo 4.1.5 *Sea* $\Omega = S^n - S^p$, $1 \leq p \leq n-1$ *y* S^p *denota una* p*-esfera en* S^n. *Tomando una proyección estereográfica desde un punto en* S^p *vemos que* Ω *es Möbius equivalente a* $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^p$, *donde* $\mathbb{R}^p$ *es un subespacio de dimensión* p.

Tenemos entonces el subgrupo

$$\{g \in M(\mathbb{R}^n) : \; g(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p\},$$

contiene traslaciones paralelas a $\mathbb{R}^p$*, rotaciones basadas en puntos de* $\mathbb{R}^p$ *dejando* $\mathbb{R}^p$ *invariante y homotecias basadas en puntos de* $\mathbb{R}^p$*. Además se tiene que este subgrupo es transitivo sobre* Ω*. Para determinar precisamente a* $M(\Omega)$ *es conveniente ir al modelo lineal de* $M(n)$*. Denotemos por* V *a un subespacio de dimesión* $(p+2)$ *de* $\mathbb{R}^{n+2}$ *tal que la forma cuadrática* $Q\mid_V$ *tenga tipo* $(1, p+1)$*. Entonces tenemos que* V *intersecta a* S^n *en una* p*-esfera. Luego,*

$$M(\Omega) = \{g \in M(n) : \; g(V) = V\}.$$

Si tenemos un subespacio W *tal que sea* Q*-ortogonal a* V *en* $\mathbb{R}^{n+2}$*, entonces tendremos que* $\mathbb{R}^{n+2} = V \oplus W$ *y* $Q\mid_W$ *tiene tipo* $(0, n-p)$*. Claramente tendremos entonces que:*

$$M(\Omega) \cong O_{\frac{1}{2}}(p+1, 1) \times O(n-p),$$

y además se tiene que el subgrupo de isotropía de $M(\Omega)$ *en un punto es isomorfo al grupo* $O(p+1) \times O(n-p-1)$*. Ya que este subgrupo es compacto tenemos que* Ω *admite una métrica Riemanniana* $M(\Omega)$*-invariante. De hecho, si tomamos las coordenadas cartesianas en* $\mathbb{R}^n$ *dadas por* $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$*, donde* $p+q = n$*, de esta manera se tiene que* $\mathbb{R}^p = \{(x_1, ..., x_p, 0, ...0)\}$*, y entonces, sobre* $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^p$ *tendremos que* $y_1^2 + ... + y_q^2 \neq 0$*. Escribiendo entonces las componentes coordenadas* $\{y_1, ..., y_q\}$ *en coordenadas polares podemos escribir a la métrica como:*

$$\sum_{i=1}^{q} dy_i^2 = dr^2 + r^2 d\sigma_{q-1}^2,$$

donde $d\sigma_{q-1}^2$ *es la métrica estándar sobre la esfera* S^{q-1}. *Por lo que obtenemos la siguiente expresión para la métrica:*

$$\frac{1}{r^2}\left\{\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=1}^{q} dy_i^2\right\} = \frac{1}{r^2}\left\{\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + dr^2\right\} + d\sigma_{q-1}^2, \qquad 1)$$

y esta métrica resulta ser $M(\Omega)$*-invariante, haciendo a* Ω *isométrico a* $\mathbb{H}^{p+1} \times S^{q-1}$, *con* $p + q = n$. *De esto se sigue que cualquier subgrupo discreto de* $M(\Omega)$ *actúa propiamente discontinuamente sobre* Ω.

Consideremos ahora un subgrupo discreto Γ *de* $M(\Omega)$ *el cual sea libre de torsión. Identifiquemos a* $M(\Omega)$ *con* $O_{\frac{1}{2}}(1, p+1) \times O(n-p)$, *y escribiremos a un elemento de* $M(\Omega)$ *como un par:*

$$g = (h, k), \text{ donde } h \in O_{\frac{1}{2}}(1, p+1) \;\; y \;\; k \in O(n-p).$$

Ya que $\Gamma \cap \{e \times O(n-p)\}$ *es compacto, discreto y, por hipótesis,* Γ *es libre de torsión, tenemos que*

$$\Gamma \cap \{e \times O(n-p)\} = e.$$

Así si $g \in \Gamma$, *y consideramos el homomorfismo* $g = (h, k) \to h$, *éste resulta ser un isomorfismo de grupos, y es claro que la imagen* Γ_1 *de* Γ *en* $O_{\frac{1}{2}}(1, p+1)$ *es también un subgrupo discreto. En otras palabras tenemos que* $\Gamma_1 \cong \pi_1$ *(de una variedad hiperbólica de dimensión* $p+1$ *). Esto es,* Γ_1 *es isomorfo al grupo fundamental de una variedad hiperbólica. De esta forma podemos escribir a* Γ *de la siguiente manera:*

$$\Gamma = \{(h, \rho(h)) : \; h \in \Gamma_1 \;\; y \;\; \rho : \Gamma_1 \to O(n-p)\}, \qquad 2)$$

donde ρ *es alguna representación de* Γ_1 *en* $O(n-p)$.

La aplicación $\Omega/\Gamma \to \mathbf{H}^{p+1}/\Gamma_1$ dota a Ω/Γ con una estructura de haz fibrado localmente plano con fibra S^{n-p-1} y grupo de estructura Γ_1 actuando sobre S^{n-p-1} via la representación ρ. Recíprocamente, dado un subgrupo Γ_1 de $O_{\frac{1}{2}}(p+1,1)$ actuando libremente y propiamente discontinuamente sobre el espacio hiperbólico H^{p+1} y una representación $\rho : \Gamma_1 \to O(n-p)$, podemos construir un grupo Γ como en la ecuación 1) y así una variedad de Möbius Ω/Γ.

Observación:

La construcción anterior nos da una clase muy amplia de variedades de Möbius con muchas posibilidades de tipos topológicos; más aún, las posibilidades de variación de la representación ρ indica la posibilidad para deformaciones de estructuras de Möbius. Como se vió en este ejemplo $M(\Omega) \cong O_{\frac{1}{2}}(p+1,1) \times O(n-p-1)$; es decir, que $M(\Omega)$ admite una representación lineal, por lo que si Γ es un subgrupo finitamente generado, entonces por una propiedad de los grupos lineales, Γ posee un subgrupo libre de torsión de índice finito. Así, cualquier cociente Ω/Γ con Γ finitamente generado (en particular cocompacto), admite un cubriente finito el cual es un S^{n-p-1}-haz ortogonal, localmente plano sobre una variedad hiperbólica de dimensión $p+1$.

Finalmente observemos los siguiente casos particulares:

1) Si $p = n-1$, entonces $S^0 = \{$ dos puntos$\}$ y $S^n - S^{n-1}$ tiene dos componentes cada una Möbius equivalente al espacio hiperbólico $\mathbf{H}^n$.

2) Si $p = n-2$, entonces Ω no es simplemente conexo. Pero su cubriente universal es Möbius equivalente al producto Riemanniano $\mathbf{H}^{n+1} \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.6 ***La relación con grupos Kleinianos***

Sea Γ un subgrupo discreto de $M(n)$. Cuando $n=2$, este subgrupo Γ es clásicamente llamado un grupo Kleiniano, y cuando $n=1$ es llamado un grupo Fuchsiano. Podemos pensar a Γ actuando sobre el espacio hiperbólico H^{n+1} o D^{n+1} como un grupo de isometrías hiperbólicas dada por la caracterización que obtuvimos de $M(D^n)$ en la sección 3.4. Para cada $p \in D^{n+1}$ denotemos por Λ el conjunto de puntos de acumulación en $D^{n+1} \cup S^n$, ya que Γ es un grupo discreto de isometrías de D^{n+1} se tiene que $\Lambda \subseteq S^n$. La observación básica que utilizaremos es que Γ actúa propiamente discontinuamente sobre $\Omega = S^n - \Lambda$ y de hecho sobre $D^{n+1} \cup \Omega$. Si $\Omega \neq \emptyset$ y Γ actúa libremente sobre Ω entonces se tiene que Ω/Γ es una variedad Kleiniana (no necesariamente conexa).

Ejemplo 4.1.7 ***Variedades de Schottky***

Denotemos por $\{C_i, C_i'\}$, con $i=1,...,g$ a una familia de $(n-1)$-esferas en S^n las cuales acotan a otra familia $\{D_i, D_i'\}$ de n-discos, de tal manera que los D_i y los D_i' para toda $i=1,...,g$ sean mutuamente ajenos.

Supongamos que existen elementos de Möbius $\gamma_i \in M(n)$, $i=1,...,g$, tal que $\gamma_i(D_i) = S^n - D_i'$ para toda i. Es fácil ver que cada γ_i con $i=1,...,g$, tiene dos puntos fijos: uno en D_i y el otro en D_i'. Si $g=1$ entonces tenemos que $\Lambda = \{$los puntos fijos de $\gamma_1\}$, y $\{S^n - \Lambda\}/\langle\gamma_1\rangle$ resulta ser una variedad de Hopf como en el ejemplo 4.1.4.

Consideremos ahora el caso en que $g=2$, como se muestra en la figura 4.1 *siguiente.*

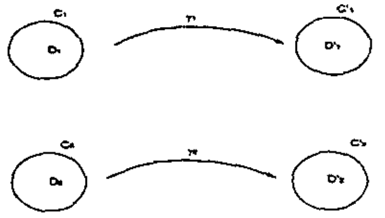

Figura 4.1

En este caso las imágenes de $S^n - D_1$ *bajo* $\gamma_1, \gamma_1^2, \ldots.$ *se verían como:*

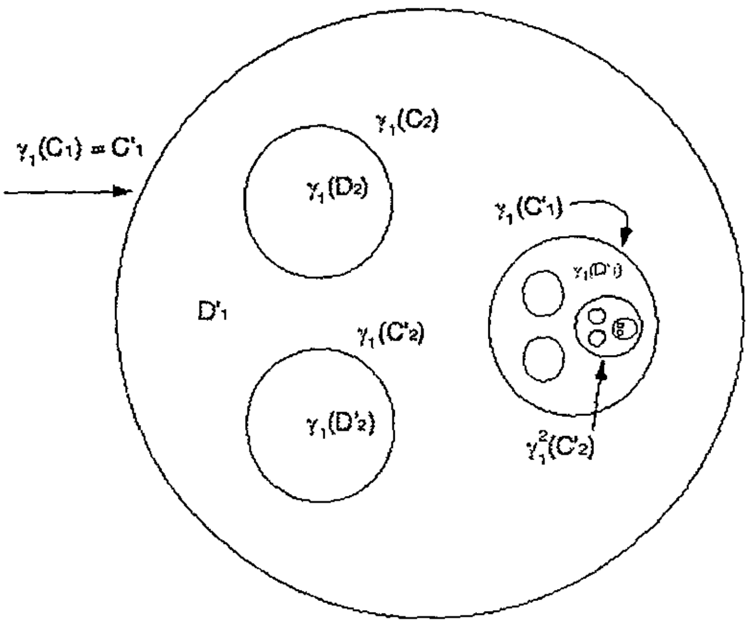

Figura 4.2

De estas imágenes que tenemos para $g = 2$, *vemos que* $S^n - \cup_{i=1}^{g} \{D_i \cup D'_i\}$ *es un dominio fundamental para* $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ *y* Λ *es un conjunto compacto, totalmente disconexo y perfecto; esto es,* Λ *es homeomorfo a un conjunto de Cantor. También,* Γ *resulta ser isomorfo a un grupo libre de rango* g. *Denotemos por* $\Omega = S^n - \Lambda$. *Ya que* $S^n - \cup_{i=1}^{g} \{D_i \cup D'_i\}$ *es un dominio fundamental para* Γ *vemos que* Ω/Γ *es* *homeomorfa a una suma conexa de g copias de $S^{n-1} \times S^1$. Éstas son las llamadas* **Variedades de Schottky**. *En un trabajo reciente (2000), Alberto Verjovsky y José A. Seade generalizaron esta construcción para construir grupos de Schottky complejos, proyectivos.*

Ejemplo 4.1.8 *Sumas Conexas*

Denotemos por M_i^n, con $i = 1, 2$, a dos variedades con fronteras W_1^{n-1} y W_2^{n-1} respectivamente. Supongamos que existe un homeomorfismo $h : W_1^{n-1} \to W_2^{n-1}$. Entonces a la variedad obtenida al hacer el pegado de M_1^n con M_2^n via h se le llama una ***Suma Conexa*** *de M_1^n y M_2^n a lo largo de h. Esta variedad la denotamos por $M_1^n \#_h M_2^n$.*

Las posibilidades de inversión en geometría conforme o de Möbius dan lugar a varios fenómenos interesantes. Por ejemplo, sean M_1^n y M_2^n dos variedades de Möbius o conformemente planas, y $D_i^n \subseteq M_i^n$, con $i = 1, 2$, dos n-discos respectivamente.(Si M_i^n es solamente por hipótesis conformemente plana, podemos escoger estos discos en algunas carta coordenadas admisibles). Denotemos por $M_{i0}^n = M_i^n - (\operatorname{int} D_i^n)$ con $i = 1, 2$. Así, ∂M_{i0}^n es una S^{n-1} esfera. Ya que se puede invertir en $(n-1)$-esferas, es claro que podemos pegar M_{01}^n con M_{02}^n a lo largo de sus fronteras de tal manera que la variedad resultante (la cual es una variedad diferenciable orientada o no orientada) admite una estructura conformemente plana o de Möbius. Se pueden hacer varias elecciones de los D_i, y al variar la posibilidad de pegados, resulta que las variedades resultantes estan en el mismo ambiente de variedad diferenciable, pero en general, resulta ser que sus estructuras de Möbius no son equivalentes.

Ejemplo 4.1.9 *Sumas Conexas a lo largo de Hipersuperficies*

Sean ahora M_i^n *con* $i = 1, 2$, *dos variedades de Möbius con fronteras* W_i^{n-1} *respectivamente. Supongamos que las fronteras* W_i^{n-1} *son conexas y sus vecindades tubulares son Möbius-difeomorfas. Sea* $h : W_1^{n-1} \to W_2^{n-1}$ *la restricción de uno de tales difeomorfismos. Denotemos por* $\tilde{M}_i^n$ *con* $i = 1, 2$, *a los cubrientes de* M_1^n *y* M_2^n, *y por* $\tilde{W}_i$ *alguna componente frontera de* $\tilde{M}_i^n$ *sobre* W_i^{n-1} *con* $i = 1, 2$. *Supongamos ahora que tanto* $\tilde{W}_1^{n-1}$ *como* $\tilde{W}_2^{n-1}$ *son Möbius-equivalentes a un subconjunto abierto de una* S^{n-1}*-esfera. Así, la inversión en ésta* S^{n-1}*-esfera puede ser usada para dar la vuelta a la vecindades tubulares de* $\tilde{W}_1^{n-1}$ *y de* $\tilde{W}_2^{n-1}$ *y hacer de esta manera la suma conexa via esta inversión, lo cual, intuitivamente, muestra que* $M_1^n \#_h M_2^n$ *admite una estructura de Möbius.*

Ejemplo 4.1.10 *Duplicación de una Variedad Hiperbólica*

Sea $M = D^n/\Gamma$ *una variedad hiperbólica completa. Consideremos a* D^n *como un disco en* S^n, *y* $\Lambda \subseteq S^n$ *de tal manera que* Γ *actúa libremente y propiamente discontinuamente sobre* $S^n - \Lambda$. *La variedad* $M_1^n = \{S^n - \Lambda\}/\Gamma$ *es esencialmente una suma conexa de* M^n *consigo mismo a lo largo de su "Frontera Ideal". (esta puede ser disconexa si* $\Lambda = S^{n-1}$*).*

Por los ejemplos 4.0.8 y 4.0.9 vemos que variedades de Möbius Elípticas (respectivamente Parabólicas), son precisamente las clases conformes del espacio de formas esférico (respectivamente Euclidianas), en el sentido de la geometría Riemanniana, y variedades de Möbius Hiperbólicas de dimensión $n \geq 2$ contiene propiamente a las clases conformes de espacios de formas hiperbólicas Riemannianas. En este sentido, esta tricotomía de Variedades de Möbius generaliza la bien conocida tricotomía entre Variedades Riemannianas de curvatura constante positiva, cero y negativa.

Sin embargo cualquier estructura de Möbius sobre una Superficie de Riemann Elíptica o Hiperbólica, es Elíptica o Hiperbólica respectivamente, pero por otro lado la estructura de Möbius canónica sobre $S^2 - \{\text{dos puntos}\}$ es Hiperbólica, mientras que como Superficie de Riemann está es usualmente considerada como Parabólica. Con lo cual vemos que esta generalización pierde parte de la información para el caso de superficies de Riemann.

Apéndice A

Geometría Riemanniana

A.1 Rango de una Aplicación Diferenciable

Consideremos $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre las variedades diferenciables N y M de dimensiones n y m respectivamente y sea $p \in N$.

Si (φ, U) y (ψ, V) son vecindades coordenadas de p y $F(p)$ respectivamente y si $F(U) \subset V$, tenemos entonces la expresión correspondiente para F en coordenadas locales: $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$.

Si $(x^1, ..., x^n)$ son las coordenadas de $\varphi(U)$, tendremos entonces que:

$$\tilde{F}(x^1, ..., x^n) = (f^1(x^1, ..., x^n), ..., f^m(x^1, ..., x^n)),$$

expresa a F en coordenadas locales como aplicación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Definición A.1.1 *El Rango de F en p es definido como el rango de $\tilde{F}$ en $\varphi(p) = a$ de la matriz Jacobiana:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_a .$$

Es decir de todos los posibles menores de la matriz con determinante no nulo de la matriz Jacobiana , este es el de orden máximo.

Definición A.1.2 *Sea $F : N \to M$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables N y M de dimensiones n y m respectivamente, y supongamos que $n \leq m$.Decimos que F es una* ***Inmersión*** *de N en M si el rango de F es igual a n en todo punto y esto se denota por* $\operatorname{rank} F = n$.

Definición A.1.3 *1) Si una inmersión $F : N \to M$ es inyectiva entonces decimos que la imagen $f(N) \subset M$ dotada con la topología y estructura diferenciable la cual hace de $F : N \to F(N)$ un difeomorfismo es una* ***Subvariedad Inmersa.***
2) Si una inmersión $F : N \to M$ es inyectiva, y es un homeomorfismo sobre su imagen $F(N) \subset M$, donde $F(N)$ tiene la topología de subespacio inducida por M, entonces decimos que F ***es un encaje.*** *En este caso, la imagen del encaje es llamada una* ***Subvariedad Encajada.*** *En particular si $N \subset M$ y la aplicación inclusión $i : N \to M$ es un encaje, decimos que N es una subvariedad encajada de M.*

A.2 El Espacio Tangente

Sea N una variedad C^∞ de dimensión n.

Para N tenemos definidos los conceptos de funciones C^∞ sobre un subconjunto abierto $U \subset N$ y las aplicaciones C^∞ de N en otra variedad diferenciable M.

Esto nos lleva a considerar a la colección de todas las funciones C^∞ sobre un subconjunto abierto U en N y verificar que este conjunto es un álgebra conmutativa con elemento unitario sobre $\mathbb{R}$.

Claramente $\mathbb{R}$ puede ser identificado de una manera natural con las funciones que son constantes y la constante 1 con la unidad. Las operaciones de suma, producto y producto por escalar están definidas puntualmente , es decir para $f, g \in C^\infty(U)$ definimos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Dado cualquier punto $p \in N$, denotamos por $C^\infty(p)$ al álgebra de funciones diferenciables cuyo dominio de definición incluye alguna vecindad del punto p, con funciones identificadas si éstas coinciden sobre cualquier vecindad del punto p. Este conjunto recibe el nombre de gérmenes de funciones diferenciables en el punto p.

Escogiendo una vecindad coordenada cualquiera (φ, U) de p se tiene que la función

$$\varphi^* : C^\infty(\varphi(p)) \to C^\infty(p)$$

dada por:

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

es un isomorfismo de álgebras de gérmenes de funciones C^∞ en $\varphi(p)$ sobre el álgebra de gérmenes de funciones diferenciables en p.

Definición A.2.1 *Definimos el* ***Espacio Tangente*** T_pN *a* N *en* p *como el conjunto de todas las aplicaciones* $X_p : C^\infty \to \mathbb{R}$ *que satisfacen, que para toda* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *y* $f, g \in C^\infty(p)$*; las siguientes condiciones:*

1) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$. *(Linealidad)*

2) $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$. *(Regla de Leibniz)*

Con las operaciones de espacio vectorial en T_pN *definidas por:*

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f \quad y \quad (\alpha X_p)f = \alpha(X_p f).$$

Por lo que un ***Vector Tangente*** *a* N *en* p *es cualquier* $X_p \in T_pN$.

Sea $\xi = (x^1, \dots , x^n)$ un sistema de coordenadas de N en p. Si $f \in C^\infty(p)$ hagamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}\xi(p),$$

con $i = 1, \dots, n$, donde $u^1, \dots, u^n$ son las funciones coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$.

Es fácil ver que las funciones $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

son vectores tangentes a N en p, y éstos forman una base del espacio vectorial T_pN.

Teorema A.2.2 *Sean* M *y* N *variedades diferenciables y sea* $F : N \to M$ *una aplicación diferenciable entre ellas.*

Entonces, para cada $p \in N$ *tenemos las aplicaciones:*

1) $F^* : C^\infty(F(p)) \to C^\infty(p)$ *definida por:* $F^*(f) = f \circ F$. F^* *es un homomorfismo de álgrebras.*

2) $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ *definida por:* $F_*(X_p)f = X_p(F^*f)$. F_* *es un homomorfismo de espacios vectoriales.*

3) Cuando $F = Id_N$ *tanto* F^* *como* F_* *son los isomorfismos identidad.*

4) Si $H = G \circ F$ *es una composición de funciones diferenciables entonces:*

$$H^* = F^* \circ G^* \text{ y } H_* = G_* \circ F_*.$$

Demostración: 1) Sean $f, g \in C^\infty(F(p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$F^*(\lambda f + g)(x) = ((\lambda f + g) \circ F)(x) = (\lambda f + g)(F(x))$$

$$= \lambda f(F(x)) + g(F(x)) = \lambda f(F(x)) + g(F(x))$$

$$= \lambda F^*(f)(x) + F^*(g)(x) = \lambda(F^*(f) + F^*(g))(x).$$

Por lo que $F^*(\lambda f + g) = \lambda F^*(f) + F^*(g)$.

Análogamente,

$$F^*(fg)(x) = (fg \circ F)(x) = (fg)(F(x)) = f(F(x))g(F(x))$$

$$= F^*(f)(x)\,[F^*(g)(x)] = [F^*(f)]\,[F^*(g)]\,(x).$$

Por lo que $F^*(fg) = F^*(f)F^*(g)$. Con lo cual tenemos que F^* es un homomorfismo de álgebras.

2) Sean $X_p, Y_p \in T_pN$, $f, g \in C^\infty(F(p))$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lo que tenemos que demostrar es que la aplicación $F_*(X_p) : C^\infty(F(p)) \to \mathbb{R}$ es lineal y satisface la regla de Leibniz.

i)

$$F_*(X_p + Y_p)(g) = (X_p + Y_p)F^*(g) = (X_p + Y_p)(g \circ F) =$$

$$X_p(g \circ F) + Y_p(g \circ F) = X_p(F^*(g)) + Y_p(F^*(g)) = (F_*X_p + F_*Y_p)(g).$$

Por lo tanto F_* es lineal.

ii)

$$F_*(X_p)(fg) = X_pF^*(fg) = X_p\left[(f \circ F)(g \circ F)\right]$$

$$= X_p(f \circ F)g(F(p)) + f(F(p))X_p(g \circ F)$$

$$= X_p(F^*(g))g(F(p)) + f(F(p))X_p(F^*(f))$$

$$= (F_*(X_p)(f))g(F(p)) + f(F(p))(F_*(X_p)(g)).$$

Por lo tanto F_* satisface la regla de Leibniz. Luego, F_* aplica T_pN en $T_{F(p)}M$.

Finalmente,

$$F_*(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = (\alpha X_p + \beta Y_p)(F \circ f) = \alpha X_p(F \circ f) + \beta Y_p(F \circ f)$$

$$= \alpha F_*(X_p)f + \beta F_*(Y_p)f = \left[\alpha F_*(X_p) + \beta F_*(Y_p)\right] f.$$

Por lo tanto F_* es un homomorfismo de espacios vectoriales.

3) Consideremos a F como la función identidad sobre N, es decir $F = Id_N$. Entonces tenemos que:

a) $F^* : C^\infty(F(p)) \to C^\infty(p)$ es lo mismo que $Id_N : C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ por lo se ve que $Id_N^*(f) = f \circ Id_N = f$ para toda $f \in C^\infty(p)$, es decir $F^* = Id_{C^\infty(p)}$.

b) $F_*(X_p)(g) = X_p(F^*(g)) = X_p(g)$ por lo que $F_*(X_p) = X_p$ es decir $F_* = Id_{T_pN}$.

4) Sean ahora N, M y L variedades diferenciables y $F : N \to M$, $G : M \to L$ aplicaciones diferenciables entre éllas y consideremos la composición $H = G \circ F$. Tenemos entonces lo siguiente:

a) $H^* : C^\infty(H(p)) \to C^\infty(p)$ y sea $f \in C^\infty(H(p))$ entonces:

$$H^*(f) = f \circ H = f \circ G \circ F = (f \circ G) \circ F = (G^*(f)) \circ F$$

$$= F^*(G^*(f)) = (F^* \circ G^*)(f),$$

con lo cual vemos que $H^* = (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

b) $H_* : T_pN \to T_{H(p)}L$, sean $X_p \in TN$ y $f \in C^\infty(H(p))$.

$$H_*(X_p)(f) = X_p(H^*(f)) = X_p(f \circ H) = X_p(f \circ G \circ F)$$

$$= F_*(X_p)(f \circ G) = (G_*(F_*(X_p)))(f) = (G_* \circ F_*)(X_p)(f),$$

con lo cual obtenemos que $H_* = (G \circ F)_* = G_* \circ F_*$. ■

Definición A.2.3 *El homomorfismo $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ es llamada* ***La Diferencial*** *de F en el punto p. Hay varias notaciones para F_* como por ejemplo: dF, DF, F', etc.*

Corolario A.2.4 *Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo de N sobre un subconjunto abierto $U \subset M$ y $p \in N$, entonces $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ es un isomorfismo sobre su imagen.*

Demostración: Si suponemos que G es la inversa de F, entonces tenemos que:

$$G_* \circ F_* : T_pN \to T_pN \text{ y } F_* \circ G_* : T_{F(p)}M \to T_{F(p)}M$$

son los isomorfismos identidad sobre los correspondientes espacios vectoriales y por lo tanto F_* es un isomorfismo sobre su imagen. ■

Recordemos que cualquier subconjunto abierto de una variedad diferenciable, es una subvariedad de la misma dimensión. Si (φ, U) es una vecindad coordenada sobre N, entonces la aplicación coordenada φ induce un isomorfismo: $\varphi_* : T_pN \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Por otro lado, la aplicación φ^{-1} aplica a $T_a\mathbb{R}^n$ con $a = \varphi(p)$, de manera isomorfa sobre T_pN.

Las imágenes $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, con $i = 1, \dots, n$, de la base natural $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ en cada punto $a \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ determinan en $p = \varphi^{-1}(a) \in N$ una base $E_{1p}, \dots, E_{np}$ de T_pN y estas bases reciben el nombre de marcos coordenados.

Corolario A.2.5 *A cada vecindad coordenada $U \subset N$ le podemos asociar una base natural $\{E_{ip}\}_{i=1}^n$ de T_pN para todo $p \in U$; en particular,* $\dim T_pN = \dim N$.

Consideremos ahora una función $f \in C^\infty(p)$ y $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ su expresión en coordenadas locales relativas a (φ, U). Entonces

$$E_{ip}(f) = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i})_{\varphi(p)}.$$

En particular, si $x^i(q)$ es la i-ésima función coordenada, $X_p x^i$ es la i-ésima componente de X_p en esta base; es decir,

$$X_p = \sum_{i=1}^n (X_p x^i) E_{ip}.$$

Hagamos $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$. Entonces,

$$E_{ip}(f) = \left(\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1}) \mid_{x=\varphi(p)} .$$

Si f es la i-ésima función coordenada, $f(q) = x^i(q)$ y $X_p = \sum \alpha^j E_{jp}$, entonces tenemos que

$$X_p(x^i) = \sum_j \alpha^j E_{jp}(x^i) = \sum_j \alpha^j (E_{jp} x^i) = \sum_j \alpha^j (\frac{\partial x^i}{\partial x^j})_{\varphi(p)} = \alpha^i.$$

Usaremos esta descripción para derivar la fórmula de la diferencial relativa a los sistemas de coordenadas locales.

Consideremos una aplicación diferenciable $F : M \to N$, y (φ, U), (ψ, V) vecindades coordenadas sobre M y sobre N respectivamente, con $F(U) \subset V$. Supongamos que en estas coordenadas locales F está dada por:

$$y^i = f^i(x^1, ..., x^n), \text{ con } i = 1, ..., m ,$$

y p es un punto con coordenadas $a = (a^1, ..., a^n)$. Entonces, $F(p)$ tiene y coordenadas determinadas por estas funciones, y denotemos por

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \text{ a las correspondientes } \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

Teorema A.2.6 *Sean*

$$E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}) \ y \ \tilde{E}_{jF(p)} = \psi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial y^j}),$$

con $i = 1, ..., n$, y $j = 1, ..., m$, *bases de* $T_p(M)$ *y* $T_{F(p)}(N)$ *respectivamente, determinadas por las vecindades coordenadas dadas. Entonces:*

$$F_*(E_{ip}) = \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_a \tilde{E}_{jF(p)} \ con \ i = 1, ..., \ n.$$

En términos de componentes, si $X = \sum \alpha^i E_{ip}$ *y* $F_*(X_p) = \sum \beta^j Y_{jF(p)}$ *entonces, tenemos*

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_a, \ con \ j = 1, ..., \ m.$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [Bo], Teo. 1.6, pag. 109.

Corolario A.2.7 *Sea $p \in U \cap \tilde{U}$, y sean $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ y $\tilde{E}_{ip} = \tilde{\varphi}_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i})$, bases de $T_p(M)$ correspondientes a los dos sistemas de coordenadas. Entonces,*

$$E_{ip} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial x^k}{\partial x^i})_{\varphi(p)} \tilde{E}_{kp} \text{ y } \tilde{E}_{ip} = \sum_{l=1}^{n} (\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j})_{\tilde{\varphi}(p)} E_{lp}.$$

Si $X_p = \sum \alpha^i E_{ip} = \sum \beta^j \tilde{E}_{jp}$, entonces,

$$\alpha^i = \sum_j \beta^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \text{ y } \beta^j = \sum_i \alpha^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}.$$

A.3 Campos Vectoriales

Definición A.3.1 *Un **Campo Vectorial** X sobre una variedad diferenciable M, es una función que asigna a cada punto p en M un elemento $X_p \in T_p(M)$.*

Una de las propiedades que tiene el Haz Tangente es que existe una proyección natural $\pi : T(M) \to M$ dada por:

$$\pi(X_p) = p, \text{ para todo } X_p \in T(M).$$

El campo vectorial como función $X : M \to T(M)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

1) Con respecto a la proyección natural se tiene que

$$\pi \circ X = Id_M.$$

Esto es, un campo vectorial es una sección del haz tangente.

2) Para $p \in M$ sea (φ, U) cualquier vecindad coordenada de p, y sea E_{ip} con $i = 1, ..., n$, la base correspondiente de $T_p(M)$. Entonces, el valor de X en p se escribe de manera

única como:

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i E_{ip}.$$

Si variamos el punto p sobre U, las componentes $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ son funciones bien definidas de $p \in U$. Es decir, en coordenadas locales tenemos las funciones

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1, \ldots, x^n) \text{ con } i = 1, \ldots, n$$

sobre $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, con imagen en $\mathbb{R}$.

Si se tiene que estas funciones son de clase C^r, con $r \geqslant 0$ sobre U para todo sistema local de coordenadas decimos que el campo vectorial X es de clase C^r o C^∞ si las funciones son infinitamente diferenciables; en este último caso y sólo en el que las funciones son de clase C^∞ diremos que X es un campo diferenciable.

Si tenemos que $F : N \to M$ es una aplicación diferenciable, entonces, para cada punto p en N tenemos bien definido el homomorfismo

$$F_* : T_p(N) \to T_{F(p)}(M).$$

Si X es un campo vectorial sobre N, se tiene que $F_*(X_p)$ es un vector tangente en $F(p)$, pero en general no se tiene que $F_*(X)$ sea un campo vectorial sobre M por varias razones:

1) Puede suceder que $F(N)$ no cubra todo M; es decir, dado un punto $q \in M$ puede suceder que no exista un punto $p \in N$ tal que $F(p) = q$.

2) Si $F^{-1}(q) \neq \emptyset$, éste puede contener más de un punto, digamos p_1 y p_2, distintos, para los cuales suceda que $F_*(X_{p_1}) \neq F_*(X_{p_2})$, de tal manera que no existe un único vector en q.

$$X_p(g \circ F) + Y_p(g \circ F) = X_p(F^*(g)) + Y_p(F^*(g)) = (F_*X_p + F_*Y_p)(g).$$

Por lo tanto F_* es lineal.

ii)

$$F_*(X_p)(fg) = X_pF^*(fg) = X_p\left[(f \circ F)(g \circ F)\right]$$

$$= X_p(f \circ F)g(F(p)) + f(F(p))X_p(g \circ F)$$

$$= X_p(F^*(g))g(F(p)) + f(F(p))X_p(F^*(f))$$

$$= (F_*(X_p)(f))g(F(p)) + f(F(p))(F_*(X_p)(g)).$$

Por lo tanto F_* satisface la regla de Leibniz. Luego, F_* aplica T_pN en $T_{F(p)}M$.

Finalmente,

$$F_*(\alpha X_p + \beta Y_p)(f) = (\alpha X_p + \beta Y_p)(F \circ f) = \alpha X_p(F \circ f) + \beta Y_p(F \circ f)$$

$$= \alpha F_*(X_p)f + \beta F_*(Y_p)f = \left[\alpha F_*(X_p) + \beta F_*(Y_p)\right] f.$$

Por lo tanto F_* es un homomorfismo de espacios vectoriales.

3) Consideremos a F como la función identidad sobre N, es decir $F = Id_N$. Entonces tenemos que:

a) $F^* : C^\infty(F(p)) \to C^\infty(p)$ es lo mismo que $Id_N : C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ por lo se ve que $Id_N^*(f) = f \circ Id_N = f$ para toda $f \in C^\infty(p)$, es decir $F^* = Id_{C^\infty(p)}$.

b) $F_*(X_p)(g) = X_p(F^*(g)) = X_p(g)$ por lo que $F_*(X_p) = X_p$ es decir $F_* = Id_{T_pN}$.

4) Sean ahora N, M y L variedades diferenciables y $F : N \to M$, $G : M \to L$ aplicaciones diferenciables entre éllas y consideremos la composición $H = G \circ F$. Tenemos entonces lo siguiente:

a) $H^*: C^\infty(H(p)) \to C^\infty(p)$ y sea $f \in C^\infty(H(p))$ entonces:

$$H^*(f) = f \circ H = f \circ G \circ F = (f \circ G) \circ F = (G^*(f)) \circ F$$

$$= F^*(G^*(f)) = (F^* \circ G^*)(f),$$

con lo cual vemos que $H^* = (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

b) $H_*: T_pN \to T_{H(p)}L$, sean $X_p \in TN$ y $f \in C^\infty(H(p))$.

$$H_*(X_p)(f) = X_p(H^*(f)) = X_p(f \circ H) = X_p(f \circ G \circ F)$$

$$= F_*(X_p)(f \circ G) = (G_*(F_*(X_p)))(f) = (G_* \circ F_*)(X_p)(f),$$

con lo cual obtenemos que $H_* = (G \circ F)_* = G_* \circ F_*$. ■

Definición A.2.3 *El homomorfismo $F_*: T_pN \to T_{F(p)}M$ es llamada* ***La Diferencial*** *de F en el punto p. Hay varias notaciones para F_* como por ejemplo: dF, DF, F', etc.*

Corolario A.2.4 *Si $F: N \to M$ es un difeomorfismo de N sobre un subconjunto abierto $U \subset M$ y $p \in N$, entonces $F_*: T_pN \to T_{F(p)}M$ es un isomorfismo sobre su imagen.*

Demostración: Si suponemos que G es la inversa de F, entonces tenemos que:

$$G_* \circ F_*: T_pN \to T_pN \text{ y } F_* \circ G_*: T_{F(p)}M \to T_{F(p)}M$$

son los isomorfismos identidad sobre los correspondientes espacios vectoriales y por lo tanto F_* es un isomorfismo sobre su imagen. ■

Recordemos que cualquier subconjunto abierto de una variedad diferenciable, es una subvariedad de la misma dimensión. Si (φ, U) es una vecindad coordenada sobre N, entonces la aplicación coordenada φ induce un isomorfismo: $\varphi_* : T_pN \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Por otro lado, la aplicación φ^{-1} aplica a $T_a\mathbb{R}^n$ con $a = \varphi(p)$, de manera isomorfa sobre T_pN.

Las imágenes $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, con $i = 1, \ldots , n$, de la base natural $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ en cada punto $a \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ determinan en $p = \varphi^{-1}(a) \in N$ una base $E_{1p}, \ldots , E_{np}$ de T_pN y estas bases reciben el nombre de marcos coordenados.

Corolario A.2.5 *A cada vecindad coordenada $U \subset N$ le podemos asociar una base natural $\{E_{ip}\}_{i=1}^n$ de T_pN para todo $p \in U$; en particular,* $\dim T_pN = \dim N$.

Consideremos ahora una función $f \in C^\infty(p)$ y $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ su expresión en coordenadas locales relativas a (φ, U). Entonces

$$E_{ip}(f) = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i})_{\varphi(p)}.$$

En particular, si $x^i(q)$ es la i-ésima función coordenada, $X_p x^i$ es la i-ésima componente de X_p en esta base; es decir,

$$X_p = \sum_{i=1}^n (X_p x^i) E_{ip}.$$

Hagamos $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$. Entonces,

$$E_{ip}(f) = \left(\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})\right) f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1}) \mid_{x=\varphi(p)} .$$

Si f es la i-ésima función coordenada, $f(q) = x^i(q)$ y $X_p = \sum \alpha^j E_{jp}$, entonces tenemos que

$$X_p(x^i) = \sum_j \alpha^j E_{jp}(x^i) = \sum_j \alpha^j (E_{jp} x^i) = \sum_j \alpha^j (\frac{\partial x^i}{\partial x^j})_{\varphi(p)} = \alpha^i.$$

Usaremos esta descripción para derivar la fórmula de la diferencial relativa a los sistemas de coordenadas locales.

Consideremos una aplicación diferenciable $F : M \to N$, y (φ, U), (ψ, V) vecindades coordenadas sobre M y sobre N respectivamente, con $F(U) \subset V$. Supongamos que en estas coordenadas locales F está dada por:

$$y^i = f^i(x^1, ..., x^n), \text{ con } i = 1, ..., m ,$$

y p es un punto con coordenadas $a = (a^1, ..., a^n)$. Entonces, $F(p)$ tiene y coordenadas determinadas por estas funciones, y denotemos por

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \text{ a las correspondientes } \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

Teorema A.2.6 *Sean*

$$E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}) \text{ } y \text{ } \tilde{E}_{jF(p)} = \psi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial y^j}),$$

con $i = 1, ..., n$, *y* $j = 1, ..., m$, *bases de* $T_p(M)$ *y* $T_{F(p)}(N)$ *respectivamente, determinadas por las vecindades coordenadas dadas. Entonces:*

$$F_*(E_{ip}) = \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_a \tilde{E}_{jF(p)} \text{ con } i = 1, ..., n.$$

En términos de componentes, si $X = \sum \alpha^i E_{ip}$ *y* $F_*(X_p) = \sum \beta^j Y_{jF(p)}$ *entonces, tenemos*

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_a, \text{ con } j = 1, ..., m.$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [Bo], Teo. 1.6, pag. 109.

Corolario A.2.7 *Sea $p \in U \cap \tilde{U}$, y sean $E_{ip} = \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ y $\tilde{E}_{ip} = \tilde{\varphi}_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i})$, bases de $T_p(M)$ correspondientes a los dos sistemas de coordenadas. Entonces,*

$$E_{ip} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial x^k}{\partial x^i})_{\varphi(p)}\tilde{E}_{kp} \text{ y } \tilde{E}_{ip} = \sum_{l=1}^{n}(\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j})_{\tilde{\varphi}(p)}E_{lp}.$$

Si $X_p = \sum \alpha^i E_{ip} = \sum \beta^j \tilde{E}_{jp}$, entonces,

$$\alpha^i = \sum_j \beta^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \text{ y } \beta^j = \sum_i \alpha^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}.$$

A.3 Campos Vectoriales

Definición A.3.1 *Un **Campo Vectorial** X sobre una variedad diferenciable M, es una función que asigna a cada punto p en M un elemento $X_p \in T_p(M)$.*

Una de las propiedades que tiene el Haz Tangente es que existe una proyección natural $\pi : T(M) \to M$ dada por:

$$\pi(X_p) = p, \text{ para todo } X_p \in T(M).$$

El campo vectorial como función $X : M \to T(M)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

1) Con respecto a la proyección natural se tiene que

$$\pi \circ X = Id_M.$$

Esto es, un campo vectorial es una sección del haz tangente.

2) Para $p \in M$ sea (φ, U) cualquier vecindad coordenada de p, y sea E_{ip} con $i = 1, ..., n$, la base correspondiente de $T_p(M)$. Entonces, el valor de X en p se escribe de manera

única como:

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i E_{ip}.$$

Si variamos el punto p sobre U, las componentes $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ son funciones bien definidas de $p \in U$. Es decir, en coordenadas locales tenemos las funciones

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1, \dots, x^n) \text{ con } i = 1, \dots, n$$

sobre $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, con imagen en $\mathbb{R}$.

Si se tiene que estas funciones son de clase C^r, con $r \geqslant 0$ sobre U para todo sistema local de coordenadas decimos que el campo vectorial X es de clase C^r o C^∞ si las funciones son infinitamente diferenciables; en este último caso y sólo en el que las funciones son de clase C^∞ diremos que X es un campo diferenciable.

Si tenemos que $F : N \to M$ es una aplicación diferenciable, entonces, para cada punto p en N tenemos bien definido el homomorfismo

$$F_* : T_p(N) \to T_{F(p)}(M).$$

Si X es un campo vectorial sobre N, se tiene que $F_*(X_p)$ es un vector tangente en $F(p)$, pero en general no se tiene que $F_*(X)$ sea un campo vectorial sobre M por varias razones:

1) Puede suceder que $F(N)$ no cubra todo M; es decir, dado un punto $q \in M$ puede suceder que no exista un punto $p \in N$ tal que $F(p) = q$.

2) Si $F^{-1}(q) \neq \emptyset$, éste puede contener más de un punto, digamos p_1 y p_2, distintos, para los cuales suceda que $F_*(X_{p_1}) \neq F_*(X_{p_2})$, de tal manera que no existe un único vector en q.

Definición A.3.2 *Si se tiene una aplicación diferenciable $F : N \to M$ y dos campos vectoriales X y Y sobre N y M respectivamente, tal que para cualquier $q \in M$ y $p \in F^{-1}(q) \subset N$ se tiene que $F_*(X_p) = Y_q$, entonces decimos que los campos X y Y están **F-relacionados**, y lo denotamos por $Y = F_*(X)$.*

Teorema A.3.3 *Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo, entonces cada campo vectorial X sobre N es F-relacionado a un único campo vectorial determinado Y sobre M.*

([Bo], Teo. 2.7, pag. 119)

Definición A.3.4 *Si $F : M \to M$ es un difeomorfismo y X es un campo vectorial de clase C^∞ sobre M tal que $F_*(X) = X$, es decir que X está F-relacionado consigo mismo, entonces se dice que el campo X es **Invariante** con respecto a F o también que X es **F-Invariante**.*

Denotemos por $C^\infty(M)$ al conjunto de funciones diferenciables sobre M, es decir una función $f : M \to \mathbb{R}$ está en $C^\infty(M)$ si para toda carta (φ, U) de M y para todo $p \in U$ se tiene que $f \in C^\infty(p)$; y por $C(M)$ el conjunto de funciones sobre M. Entonces, si X es un campo vectorial sobre M y $f \in C^\infty(M)$, se tiene que

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i E_{ip}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left[E_{ip}(f)\right].$$

Por lo que podemos pensar a un campo vectorial X como una aplicación

$$X : C^\infty(M) \to C(M).$$

En este contexto es inmediato que el campo X es C^∞ si y sólo si $Xf \in C^\infty(M)$ para toda $f \in C^\infty(M)$, es decir $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Además, tenemos que el conjunto de campos vectoriales diferenciables está dotado de otra estructura adicional dada por las siguientes observaciones:

1) Si X y Y son campos diferenciables sobre M dados localmente por $X_p = \sum_{i=1}^n \alpha^i E_{ip}$ y $Y_p = \sum_{i=1}^n \beta^i E_{ip}$, entonces definimos:

$$(X \pm Y)_p = \sum_{i=1}^{n} (\alpha^i \pm \beta^i) E_{ip}, \text{ para todo } p \in M.$$

2) Si X es un campo vectorial sobre M dado localmente por $X_p = \sum_{i=1}^n \alpha^i E_{ip}$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces definimos:

$$(fX)_p = \sum_{i=1}^{n} f(p) \alpha^i E_{ip}, \text{ para todo } p \in M.$$

Por lo que los campos vectoriales $X \pm Y$ y fX son campos vectoriales diferenciables sobre M, y de esta manera tenemos que si denotamos al conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre M por $\mathfrak{X}(M)$, entonces el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Definición A.3.5 *Por una* ***Derivación*** *sobre $C^\infty(M)$, entenderemos una aplicación $\mathfrak{D} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisface lo siguiente:*

1) $\mathfrak{D}$ es $\mathbb{R}$-lineal: Para toda a y $b \in \mathbb{R}$ y para toda $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\mathfrak{D}(af + bg) = a(\mathfrak{D}f) + b(\mathfrak{D}g).$$

2) $\mathfrak{D}$ satisface la Regla de Leibniz: Para todas $f, g \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\mathfrak{D}(fg) = \mathfrak{D}(f)g + f\mathfrak{D}(g).$$

La definición de vector tangente muestra que para un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función dada por $f \to Xf$ es una derivación sobre $C^\infty(M)$. Recíprocamente, toda derivación $\mathfrak{D}$ sobre $C^\infty(M)$ proviene de un campo vectorial. De hecho, para cada $p \in M$ definimos $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$X_p(f) = \mathfrak{D}(f)_p,$$

y por las propiedades anteriores de la derivación tenemos que X_p es un vector tangente en p, por lo que X es un campo vectorial bien definido sobre M. Además como $X(F) = \mathfrak{D}(F)$ para toda $f \in C^\infty(M)$, tenemos que X es un campo diferenciable sobre M y determina la derivación $\mathfrak{D}$.

Definición A.3.6 *Consideremos X y Y dos campos vectoriales diferenciables sobre M. El **Paréntesis o Corchete de Lie** es la función*

$$[X, Y] = XY - YX : C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

dada por

$$[X, Y](f) = (XY - YX)f = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Un cálculo sencillo muestra que esta función es una derivación bien definida y por lo tanto un campo vectorial diferenciable sobre M. En términos de la definición de un campo vectorial, $[X, Y]$ asigna a cada $p \in M$ el vector tangente $[X, Y]_p$ de la siguiente manera:

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Para más detalles respecto al corchete de Lie pueden consultarse [Wr] y [DC].

A.4 Diferenciación de Campos Vectoriales a lo largo de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea x una curva en $\mathbb{R}^n$ dada por $x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ con $a < t < b$.

Supongamos que $Z(t) = Z_{x(t)}$ es un campo vectorial definido sobre la curva x, entonces para cada $t \in (a,\, b)$ tenemos asignado un vector

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)} \in T_{x(t)}(\mathbb{R}^n).$$

Tenemos además que en $\mathbb{R}^n$ existe un isomorfismo natural entre $T_p(\mathbb{R}^n)$ y $T_q(\mathbb{R}^n)$ para cualesquiera puntos distintos p y q en $\mathbb{R}^n$, lo cual nos permite dar un significado a la expresión $Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)$, que es la diferencia de un vector en $T_{x(t_0+\Delta t)}(\mathbb{R}^n)$ y un vector en $T_{x(t_0)}(\mathbb{R}^n)$ y esta diferencia de vectores es realizada en este último espacio tangente. Todo esto nos permite definir el cociente diferencial:

$$\frac{1}{\Delta t}[Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i(t_0 + \Delta t) - a^i(t_0)}{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t_0)}.$$

Tomando ahora el límite cuando $\Delta t \to 0$ obtenemos lo siguiente:

$$\left(\frac{dZ}{dt}\right)_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{da^i(t_0)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t_0)} \in T_{x(t_0)}(\mathbb{R}^n). \qquad (1)$$

Una consecuencia de esta fórmula es que si introducimos un nuevo parámetro sobre la curva, s dado por $t = f(s)$ con $t_0 = f(s_0)$ entonces tenemos que:

$$\left(\frac{dZ}{ds}\right)_{s_0} = \left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0} \left(\frac{dZ}{dt}\right)_{t_0} \text{; donde } \left(\frac{dt}{ds}\right)_{s_0} \text{ es un escalar.}$$

Definición A.4.1 *Un Campo Vectorial $Z(t)$ es* ***Constante o Paralelo*** *a lo largo de la curva $x(t)$ si y sólo si $\frac{dZ}{dt} = 0$ para toda $t \in (a, b)$.*

Observación:

La igualdad en el cociente diferencial se debe al hecho de que la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$, es un campo de marcos paralelos, y estos son paralelos si y sólo si éllos tienen las mismas componentes. Por lo cual, las componentes del campo Z son las mismas en todo punto sobre la curva.

Supongamos que tenemos dos campos vectoriales $Z(t)$ y $W(t)$, que son paralelos a lo largo de la curva $x(t)$ y

que f es una función diferencia de t sobre el intervalo de definición de la curva. Entonces se puede comprobar fácilmente que los campos $[Z(t)+W(t)]$ y $f(t)Z(t)$ son campos vectoriales a lo largo de la curva $x(t)$ y se tienen los siguientes resultados:

1) $\frac{d}{dt}(Z+W) = \frac{dZ}{dt} + \frac{dW}{dt}$.

2) $\frac{d}{dt}[f(t)Z] = \frac{df}{dt}Z + f(t)\frac{dZ}{dt}$.

3) $\frac{d}{dt}\langle Z,\ W\rangle = \langle \frac{dZ}{dt},\ W\rangle + \langle Z,\ \frac{dW}{dt}\rangle$, donde $\langle\ ,\rangle$ denota el producto interior estándar de $\mathbb{R}^n$.

Observemos que la fórmula obtenida para $\frac{dZ}{dt}$ está dada en términos de las componentes del campo $Z(t)$ relativas a la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ en $\mathbb{R}^n$, las cuales son constantes a lo largo de la curva $x(t)$. Sin embargo a veces es conveniente el uso de otro campo de marcos, digamos $F_1(t)$, ... , $F_n(t)$ bien definido a lo largo de la curva $x(t)$, y en este caso tenemos que el campo $Z(t)$ tiene una única expresión como combinación lineal de este marco en cada punto $x(t_0)$ de la curva,

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} b^i(t)F_i(t).$$

Diferenciando y con ayuda de las propiedades anteriores obtenemos que:

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{db^i}{dt} F_i(t) + b^i(t) \frac{dF_i}{dt} \right).$$

Sin embargo, como $\frac{dF_i}{dt}$ son vectores a lo largo de la curva $x(t)$, éllos también son combinación lineal de los $F_k(t)$, con lo cual tenemos que:

$$\frac{dF_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_i^k(t) F_k(t).$$

lo cual nos conduce a la siguiente formula:

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{db^k}{dt} + \sum_{i=1}^{n} b^i(t) a_i^k(t) \right] F_k(t).$$

La cual es una buena generalización de nuestra formula (1) pues esta es un caso especial, ya que $a_i^k(t) = 0$ precisamente cuando los marcos $F_1(t), ..., F_n(t)$ son paralelos.

A.5 Diferenciación de Campos Vectoriales sobre Subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^n$. Al igual que en el caso de una curva, nos interesa considerar un campo vectorial Z que este definido en cada punto de M pero no necesariamente tangente a M; es decir, para cada $p \in M$, tenemos asignado un vector $Z_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Cuando Z es tal que Z_p es tangente a M, es decir, $Z_p \in T_p(M) \subset T_p(\mathbb{R}^n)$, entonces decimos que Z es un campo vectorial sobre M o que es un campo vectorial tangente. Sólo en este caso, Z tiene un significado para M como una variedad en abstracto, independiente de cualquier encaje o inmersión en

$\mathbb{R}^n$. Pero en cualquier caso, la diferenciabilidad de Z tiene un significado, ya que sus componentes relativas a la base canónica de marcos de $\mathbb{R}^n$ en los puntos de M son funciones sobre M, dadas en la expresión $Z_p = \sum_{i=1}^n a^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, y por definición decimos que el campo vectorial Z es de clase C^r, si las funciones $a^i(p)$, con $i = 1, ..., n$, son de clase C^r sobre M. En particular, los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ de $\mathbb{R}^n$, restringidos a M, son campos vectoriales de clase C^∞ a lo largo de M, pero raramente sobre M.

Si $p \in M$, entonces $T_p(\mathbb{R}^n)$ y su subespacio $T_p(M)$ poseen el producto interior estándar de $\mathbb{R}^n$, por lo que M tiene la métrica Riemanniana inducida. Estos nos permite descomponer cualquier vector Z_p, con $p \in M$ de una manera única como:

$$Z_p = \hat{Z}_p + \check{Z}_p, \text{ con } \hat{Z}_p \in T_p(M) \text{ y } \check{Z}_p \in T_p^{\perp}(M),$$

que es el complemento ortogonal de $T_p(M)$.

Esto refleja la descomposición en suma directa de $T_p(\mathbb{R}^n)$ en dos subespacios mutuamente ortogonales, a saber:

$$T_p(\mathbb{R}^n) = T_p(M) \oplus T_p^{\perp}(M),$$

llamados el espacio tangente y el espacio normal a M en p.

Denotemos a las correspondientes proyecciones sobre cada subespacio por $\hat{\pi}$ y $\check{\pi}$, es decir:

$$\hat{\pi}(Z_p) = \hat{Z}_p \text{ y } \check{\pi}(Z_p) = \check{Z}_p;$$

que son transformaciones lineales de $T_p(\mathbb{R}^n)$ sobre los subespacios tangente y normal respectivamente.

Si Z un campo vectorial como antes, entonces, para cada $p \in M$, $\hat{Z}_p \in T_p(M)$ y si denotamos por $(\, ,)$ al producto interior en $T_p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\left(\hat{Z}_p, \check{Z}_p\right) = 0$. Si f es una función de clase C^r sobre M, entonces se tiene que

$$\hat{\pi}(fZ) = f\hat{\pi}(Z) \;\; \text{y} \;\; \check{\pi}(fZ) = f\check{\pi}(Z).$$

Más aún, dados dos campos vectoriales Z y W entonces:

$$\hat{\pi}(Z + W) = \hat{\pi}(Z) + \hat{\pi}(W) \;\; \text{y} \;\; \check{\pi}(Z + W) = \check{\pi}(Z) + \check{\pi}(W).$$

Consideremos un campo vectorial Y tangente a $M \subset \mathbb{R}^n$; es decir , para cada $p \in M$ se tiene que $Y(p) \in T_p(M)$ o equivalentemente $\hat{\pi}(Y) = Y$. Si $p(t)$ es una curva diferenciable sobre M definida para algún intervalo con valores de t, entonces la función $Y(t) = Y_{p(t)}$ es un campo vectorial a lo largo de la curva $p(t)$. Como tal, podemos entonces ignorar a M y diferenciar $Y(t)$ como un campo vectorial a lo largo de una curva en $\mathbb{R}^n$ obteniendo de esta manera otro campo vectorial $\frac{dY}{dt}$ a lo largo de la curva. En general sucede que $\frac{dY}{dt}$ no será tangente a M; sin embargo, en cada punto $p(t)$ podemos proyectar $\frac{dY}{dt}$ a el vector tangente $\hat{\pi}(\frac{dY}{dt})$.

Definición A.5.1 *A la proyección $\hat{\pi}\left(\frac{dY}{dt}\right)$, que denotaremos por $\frac{DY}{dt}$; se le llama la* ***Derivada Covariante*** *del campo vectorial tangente Y sobre M a lo largo de la curva $p(t)$.*

Como ambos campos Y y $\frac{DY}{dt}$ son campos vectoriales tangentes; estos tienen significado para la variedad M. Sin embargo, el proceso por el cual $\frac{DY}{dt}$ es obtenido de Y y de $p(t)$ hace uso del encaje de M en $\mathbb{R}^n$. Es importante notar además que $Y(t)$ no necesita ser la restricción de un campo vectorial Y sobre M para que $\frac{DY}{dt}$ esté definido. La única suposición que se necesita es que $Y(t)$ sea un campo vectorial a lo largo de $p(t)$ de tal manera que sea siempre tangente a M. Entonces $\frac{DY}{dt} = \hat{\pi}\left(\frac{dY}{dt}\right)$ donde $\frac{dY}{dt}$ es la derivada del campo vectorial a lo largo de la curva.

Teorema A.5.2 *Supongamos que $Y(t)$, $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ son campos vectoriales tangentes a una variedad M y f es una función diferenciable de t sobre M. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) $\frac{D}{dt}(Y_1 + Y_2) = \frac{DY_1}{dt} + \frac{DY_2}{dt}$.

2) $\frac{D}{dt}(f(t)Y(t)) = \frac{df}{dt}Y(t) + f(t)\frac{DY}{dt}$.

3) $\frac{d}{dt}(Y_1, Y_2) = \left(\frac{DY_1}{dt}, Y_2\right) + \left(Y_1, \frac{DY_2}{dt}\right)$, *donde (,) denota la métrica Riemanniana sobre M.*

([Bo], Teo. 2.3, pag. 306)

Definición A.5.3 *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad y $Y_{p(t)}$ un campo vectorial tangente a M a lo largo de una curva $p(t)$. Entonces, decimos que el Campo $Y_{p(t)}$ es* ***Constante o Paralelo*** *si $\frac{DY}{dt} = 0$. Más generalmente, si Y es un campo vectorial tangente sobre todo M, entonces este es constante o paralelo si tiene la propiedad a lo largo de toda curva en M.*

Observación:

Notemos que puede suceder que $\frac{DY}{dt}$ sea identicamente cero sin que necesariamente $\frac{dY}{dt}$ sea cero, por lo que un campo vectorial a lo largo de una curva puede ser constante, considerado como un campo vectorial sobre una subvariedad M de $\mathbb{R}^n$, aunque no sea constante considerado como un campo vectorial a lo largo de la misma curva pero en $\mathbb{R}^n$. En general, la derivada de un campo vectorial tangente a M a lo largo de una curva $p(t)$ en M puede tener componente tangencial y componente normal distintas de cero.

Definición A.5.4 *Si una curva sobre M es tal que $\frac{D}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right) \equiv 0$; es decir, que la derivada covariante del vector tangente unitario a la curva es cero a lo largo de la curva, entonces llamaremos a tal curva una* ***Geodésica de*** M.

Estudiemos un poco más a fondo la derivada covariante.

Supongamos que la dimensión de M es m, y consideremos una carta coordenada (φ, U) de M con $\varphi(U) = W$, donde W es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotemos las coordenadas locales por $u^1, ..., u^m$, y remarquemos el hecho de que la parametrización $\varphi^{-1} : W \to M$ es un encaje de W cuya imagen es U, que es un subconjunto abierto de M. Sea $u = (u^1, ..., u^m) \in W$. Entonces se tiene que $\varphi^{-1}(u) = (g^1(u), ..., g^n(u))$, representa a φ^{-1} en términos de sus funciones coordenadas $g^\alpha(u)$. [Consideraremos en este apartado que los índices α, β, $\gamma, ...$ corren desde 1 hasta n, y los índices $i, j, k, ...$ corren desde 1 hasta m.]. Denotemos a los marcos coordenados por $F_1, ..., F_m$; que son los que generan el espacio tangente a M en cada punto. Ya que este espacio tangente $T_p(M)$ es un subespacio de $T_p(\mathbb{R}^n)$, estos vectores son combinación lineal de la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$.

$$f_{ip} = \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial g^\alpha}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{1}$$

Supongamos ahora que $p(t)$ es una curva diferenciable y que $Y(t) = Y_{p(t)}$ es un campo vectorial a lo largo de la curva el cual es siempre tangente a M. Entonces $Y(t)$ se puede escribir como una combinación lineal de $F_1, \ldots, F_m$, de la siguiente manera

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{m} b^k(t) F_k,$$

por lo que tenemos entonces

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{db^k}{dt} F_k + b^k \frac{dF_k}{dt} \right),$$

que en general no es tangente a M, así que proyectando obtenemos:

$$\frac{DY}{dt} = \hat{\pi}\left(\frac{dY}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{db^k}{dt} F_k + b^k \hat{\pi}\left(\frac{dF_k}{dt}\right)\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{db^k}{dt} F_k + b^k \frac{DF_k}{dt} \right). \qquad (2)$$

Sin embargo, sabemos que los vectores $\frac{DF_i}{dt}$ con $i = 1, \ldots, m$, son vectores tangentes a M y pueden ser expresados como combinación lineal del marco $F_1, \ldots, F_m$.

Supongamos que la curva $p(t)$ está dada en coordenadas locales por

$$\varphi(p(t)) = \left(u^1(t), \ldots, u^m(t)\right).$$

Entonces tenemos, de la ecuación (1) que las componentes son funciones $\left(\frac{\partial g^\alpha}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p(t))}$ que dependen de t via $u^1(t), \ldots, u^m(t)$, y en cada $p(t)$ tenemos:

$$\frac{DF_i}{dt} = \hat{\pi}\left(\frac{dF_i}{dt}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 g^\alpha}{\partial u^j \partial u^i} \frac{du^j}{dt} \hat{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right),$$

por la regla de la cadena aplicada a la ecuación (1), y las propiedades de $\hat{\pi}$. Vemos además que las derivadas $\frac{\partial g^\alpha}{\partial u^j \partial u^i}$ son funciones de $u^1, \ldots, u^m$ y son evaluadas en $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t))$ en esta fórmula. Recordemos que cuando M está encajada en $\mathbb{R}^n$ por un encaje diferenciable, entonces $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ restringido a M es un campo vectorial diferenciable a lo largo de M. Además tenemos que $\hat{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$ define un campo vectorial tangente sobre M, el cual debe tener una única expresión de la forma

$\hat{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{m} a_\alpha^k(u) F_k$ sobre U donde las a_α^k son funciones diferenciables sobre M. Usando estas funciones y las funciones coordenadas $g^\alpha(u)$ de la parametrización de φ^{-1} definimos las funciones diferenciables $\Gamma_{ij}^k(u)$ como:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 g^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} a_\alpha^k = \Gamma_{ji}^k, \text{ con } 1 \leq i,\, j,\, k \leq m.$$

La simetría en los subíndices es consecuencia del intercambio en el orden de diferenciación. Entonces, podemos escribir a $\frac{DF_i}{dt}$ de la siguiente manera:

$$\frac{DF_i}{dt} = \sum_{j,\, k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} F_k, \text{ con } i = 1, \ldots, m.$$

Para cada $p = p(t)$, las funciones Γ_{ij}^k serán evaluadas en $(u^1(t), \ldots, u^m(t))$. Un caso particular es cuando la curva está dada como: u^i es constante para $i \neq j$ y $u^j = t$, lo cual nos da la fórmula para la derivada covariante del campo vectorial F_i a lo largo de la j-ésima curva coordenada, y es convenientemente denotada por $\frac{DF_i}{\partial u^j}$ que está dada por:

$$\frac{DF_i}{\partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k F_k.$$

Esto nos da una interpretación del significado de las funciones $\Gamma_{ij}^k(u)$; ésta es la k-ésima componente de la derivada covariante de F_i a lo largo de la curva en la cual solamente la j-ésima coordenada varía; es decir, a lo largo de la j-ésima curva coordenada.

Usando todas estas fórmulas finalmente escribimos la ecuación (2) en la siguiente forma:

$$\frac{DY}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{db^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(u(t)) b^i(t) \frac{du^j}{dt} \right) F_k. \qquad (3)$$

Consideremos ahora el caso en que Y es un campo vectorial tangente el cual está definido sobre todo M. Sobre una vecindad coordenada (φ, U) lo escribimos de la siguiente manera $Y = \sum_{k=1}^{m} b^k(u)F_k$. Sea p un punto en U tal que tenga coordenadas dadas por $\varphi(p) = (u_0^1, ..., u_0^m)$ y sea $X_p = \sum_{j=1}^{m} a^j F_{jp}$ un vector tangente en p con a^j constante para toda j. Tomemos una curva diferenciable $p(t)$ cualquiera que cumpla con $p(t_o) = p$ y $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t_0} = X_p$, así que en coordenadas está definida por $u(t) = (u^1(t), ..., u^m(t))$ con $u^i(t_0) = u_0^i$ y $\left(\frac{du^i}{dt}\right)_{t_0} = a^i$. Entonces podemos calcular $\left(\frac{DY}{dt}\right)_{t=t_0}$ como antes observando primero que $Y(t) = \sum_{k=1}^{m} b^k(u(t))F_k$ implica que:

$$\left(\frac{db^k}{dt}\right)_{t_0} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial b^k}{\partial u^j}\right)_{u_0} a^j = X_p b^k.$$

Tomando esta expresión, la fórmula (3) se puede rescribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0} = \sum_{k=1}^{m} \left(X_p b^k + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(u_0) b^i(u_0) a^j \right) F_k. \qquad (4)$$

Observemos que el lado derecho de la fórmula (4) no depende de la curva $p(t)$ si no solamente de su vector tangente X_p en el punto p. Ya que $\left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0}$ es un vector tangente en $T_p(M)$, esta fórmula define una función de $T_p(M)$ en $T_p(M)$, dada por

$$X_p \to \left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0}.$$

Denotemos a la imagen de está función por $\nabla_{X_p} Y$, es decir, $\nabla_{X_p} Y = \left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0}$ a lo largo de cualquier curva $p(t)$ con $p(t_0) = p$ y $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t_0} = X_p$. Como en el caso en que $X_p \in T_p(M)$ y f sea una función diferenciable, podemos considerar a $X_p f$ como la derivada direccional de f con respecto al vector X_p. Lo que se acaba de obtener es una manera similar de definir la razón de cambio de un campo vectorial Y en un punto p en la dirección del vector X_p. Y esta razón es medida por el vector $\nabla_{X_p} Y$. A lo largo de la curva $p(t)$ tenemos en cada punto dada por nuestra notación e hipótesis, que $\nabla_{\frac{dp}{dt}} Y = \frac{DY}{dt}$.

Teorema A.5.5 *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Para cualquier campo vectorial Y de clase C^r sobre M, con $r > 1$, tenemos en cada punto $p \in M$ una aplicación lineal dada por $X_p \to \nabla_{X_p} Y$ de $T_p(M)$ en $T_p(M)$. Entonces $\nabla_{X_p} Y$ definido como antes tiene las siguientes propiedades:*

1) Si X y Y son campos vectoriales de clase C^r (o C^∞) sobre M, entonces $\nabla_X Y$ definido por $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$ es un campo vectorial sobre M de clase C^{r-1} (C^∞) respectivamente.

2) La aplicación de $T_p(M) \times \mathfrak{X}(M) \to T_p(M)$ dada por $(X_p, Y) = \nabla_{X_p} Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas variables. Si f es una función diferenciable sobre una vecindad de p, se tiene que:

$$\nabla_{X_p}(fY) = (X_p f) Y_p + f(p) \nabla_{X_p} Y.$$

3) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $[X, Y] = \nabla_X Y$ -$\nabla_Y X$.

4) Si Y_1 y Y_2 son campos vectoriales y su producto interior lo denotamos por (Y_1, Y_2), entonces:

$$X_p (Y_1, Y_2) = \left(\nabla_{X_p} Y_1, Y_{2p}\right) + \left(Y_{1p}, \nabla_{X_p} Y_2\right).$$

([Bo], Teo. 2.11, pag. 311)

A.6 Diferenciación sobre Variedades Riemannianas

El propósito de esta sección es poder desarrollar una teoría de diferenciación sobre estas variedades que sea un análogo al estudiado en la sección anterior, la manera más natural es definir un operador $\nabla_X Y$ que cumpla las propiedades antes dichas y que extienda el caso de subvariedades en $\mathbb{R}^n$.

Definición A.6.1 *Una* ***Conexión Afín Diferenciable*** ∇ *sobre una variedad* M *es una aplicación* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *denotada por* $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ *, tal que para toda* $f, g \in C^\infty(M)$ *y* $X, \tilde{X}, Y$ *y* $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ *se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $\nabla_{fX+g\tilde{X}} Y = f(\nabla_X Y) + g(\nabla_{\tilde{X}} Y)$.

2) $\nabla_X(fY + g\tilde{Y}) = f\nabla_X Y + g\nabla_X \tilde{Y} + (Xf)Y + (Xg)\tilde{Y}$.

Notemos que $\nabla_X Y$ es un operador que tiene simetrías en los papeles que toman la primera y la segunda variable en los campos vectoriales X y Y; la conexión ∇ es $C^\infty(M)$-lineal en X pero no en Y; sin embargo, si f es una función constante entonces, $Xf = 0$, por lo que ∇ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas variables.

Definición A.6.2 *Si la conexión diferenciable* ∇ *fatisface además las siguientes condiciones, entonces es llamada una* ***Conexión Riemanniana:***

3) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

4) $X(Y, \tilde{Y}) = (\nabla_X Y, \tilde{Y}) + (Y, \nabla_X \tilde{Y})$, *donde* $(\ ,\ )$ *denota el producto interior en la variedad Riemanniana* M.

Teorema A.6.3 *(Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana)*

Sea M una variedad Riemanniana. Entonces existe una única conexión Riemanniana determinada sobre M.

([Bo], Teo. 3.3, pag. 314)

Definición A.6.4 *Dada una variedad Riemanniana a la única conexión compatible con la métrica se le llama la* ***Conexión de Levi-Civita.***

Analicemos un poco más qué es lo que define a la conexión de Levi-Civita:

Sea (φ, U) una carta coordenada de M y denotemos por $x^1, ..., x^n$ las coordenadas locales y por $E_1, ..., E_n$ los marcos coordenados. Denotando el producto interior de X y Y por (X, Y), tenemos las componentes de la métrica que son las funciones diferenciables $g_{ij}(q) = (X_q,\ Y_q)$ sobre $U \subset M$. Como la matriz $(g_{ij}(q))$ es simétrica y definida positiva, entonces existe una única matriz inversa $(g^{ij}(q))$ cuyas entradas son funciones diferenciables sobre U también. Tenemos entonces que por las propiedades 1) y 2) tenemos determinadas las funciones diferenciables Γ_{ij}^k, $1 \leq i, j, k \leq n$ definidas por:

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k.$$

De hecho, si $X = \sum_{i=1}^n b^i(x) E_i$ y $Y = \sum_{j=1}^n a^j(x) E_j$ sobre U, entonces de las propiedades 1), 2) y de nuestra definición de Γ_{ij}^k tenemos:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X a^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k a^j b^i \right) E_k.$$

Sin embargo, las funciones Γ_{ij}^k no son arbitrarias pues tiene que satisfacer las condiciones 3) y 4). Dado que $[E_i,\ E_j] = 0$ para los marcos coordenados, tenemos que la propiedad 3) es equivalente a:

$$0 = [E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) E_k,$$

lo cual muestra la simetría de Γ_{ij}^k en los subíndices $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Por otro lado, de la condición 4) se tiene que para cada entrada de la matriz de la métrica:

$$E_k g_{ij} = E_k (E_i, E_j) = (\nabla_{E_k} E_i, E_j) + (E_i, \nabla_{E_k} E_j),$$

o equivalentemente

$$E_k g_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \left(\Gamma_{ki}^s g_{sj} + \Gamma_{kj}^s g_{si}\right), \text{ con } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Si utilizamos la matriz inversa (g^{ij}) de (g_{ij}), y definimos $\Gamma_{ijk} = \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ij}^s g_{sk}$, lo cual implica que $\Gamma_{ij}^k = \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ijs} g^{sk}$, tenemos que:

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \text{ y } \ E_k g_{ij} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}. \qquad (1)$$

Si consideramos a g_{ij} como funciones de las coordenadas locales, denotemos por $E_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$. Entonces tenemos que las funciones de la ecuación (1) estan dadas de la siguiente manera:

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right).$$

Resumiendo tenemos el siguiente:

Teorema A.6.5 *Para cada $p \in U$ se tiene que*

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial a^k}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k a^i b^j \right) E_k$$

con

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} \right).$$

([Bo], Cor. 3.8, pag. 318)

Definición A.6.6 *Un campo vectorial Y sobre una variedad Riemannian M se dice que es* ***Constante o Paralelo*** *si $\nabla_{X_p} Y = 0$ para toda $p \in M$ y $X_p \in T_p(M)$.*

En general tales campos vectoriales no existen ni siquiera en vecindades pequeñas de M. Sin embargo, dada una curva diferenciable $p(t)$ con $0 \leq t \leq T$, puede existir un campo vectorial $X(t) = X_{p(t)}$ que es constante o paralelo a lo largo de $p(t)$, por lo cual entendemos que $\frac{DX}{dt} = 0$.

Teorema A.6.7 *Sea $p = p(0)$ el punto inicial de la curva $p(t)$, con $0 \leq t \leq T$, y sea $X_p \in T_p(M)$ un vector arbitrario. Entonces, existe un único campo vectorial constante $X_{p(t)}$ a lo largo de $p(t)$ tal que $X_{p(0)}$ tiene el vector dado. Si $E_{1p}, ..., E_{np}$ es un marco ortonormal en $p(0)$, entonces existe un único campo paralelo de marcos ortonormales sobre $p(t)$ el cual coincide con el dado en $p(0)$.*

([Bo], Teo. 3.12, pag. 319)

Definición A.6.8 *Una curva parametrizada $p(t)$ se dice que es una* **Geodésica** *si su vector velocidad es constante; es decir, si ésta satisface la condición:*

$$\left(\frac{D}{dt}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0.$$

Esta es la ecuación que define en general una geodésica para $a < t < b$.

Sean $(x^1, ..., x^n)$ las coordenadas locales en una vecindad coordenada (φ, U) de una variedad donde este definida una geodésica $p(t)$. Entonces, la ecuación de una geodésica $\left(\frac{D}{dt}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0$, es equivalente al sistema de ecuaciones diferencial de segundo orden dado por:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, \text{ con } k = 1, \dots, n.$$

Una solución del sistema anterior es una colección de n funciones $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ que satisfacen al sistema. Algo que resulta en cierto modo sorprendente es que dado cualquier punto p en M y cualquier vector tangente $X_p \in T_p(M)$, existe una curva geodésica $p(t)$ en una vecindad U del punto p, tal que $p(0) = p$ y $\frac{dp}{dt}_{t=0} = X_p$. Por otro lado, tenemos que si $p(t)$ es una geodésica, entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dp}{dt}, \frac{dp}{dt}\right) = 2\left(\frac{D}{dt}\frac{dp}{dt}, \frac{dp}{dt}\right) = 0.$$

Es decir, que la longitud del vector velocidad de la curva $\frac{dp}{dt}$ es constante y podemos suponer que distinto de cero pues excluimos el caso en que puntos sean geodésicas. Tenemos además que para cualquier curva $\alpha(t)$, $t_0 \leq t \leq a$ con punto inicial fijo, digamos $t = t_0$, la longitud de arco $s(t)$ está definida por la fórmula:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt, \text{ donde } \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que esta integral siempre existe pues el integrando es una función continua de t. Esta fórmula, nos permite definir una función de distancia d_M sobre M si M es conexa , de tal manera que si p y q son puntos de M entonces d_m está dada por:

$$d_M(p, q) = \inf_{\alpha}\{s_\alpha(t)\},$$

donde el ínfimo está tomado sobre el conjunto de todas las curvas α que unen a los puntos p y q, y donde $s_\alpha(t)$ denota la longitud de arco de una de tales curvas. De está manera podemos hacer de cualquier variedad Riemanniana un espacio métrico, donde la métrica está determinada por la métrica Riemanniana (g_{ij}). Diferentes métricas Riemannianas (g_{ij}) dan diferentes métricas d_M, pero las topologías métricas para M son siempre la topología original de la variedad.

Definición A.6.9 *Una variedad Riemanniana M es* ***Geodésicamente Completa*** *si cualquier geodésica $\alpha(t)$ que empieza en un punto $p \in M$, se puede extender con parámetro t en todo $\mathbb{R}$.*

Teorema A.6.10 *(Hopf-Rinow)*

Sea M una variedad Riemanniana y sea p un punto sobre ella. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) Los conjuntos cerrados y acotados en M son compactos.

2) M es un espacio métrico completo con la métrica d_M.

3) M es geodésicamente completo.

Además, cualquiera de las afirmaciones anteriores implican:

4) Para cualquier $q \in M$ existe una geodésica $\beta(t)$, para $a \leq t \leq b$, con punto inicial $\beta(a) = p$ y punto final $\beta(t) = q$ tal que:

$$d_M(p, q) = s_\beta(b);$$

es decir, que la geodésica $\beta(t)$ realiza la menor distancia entre los puntos.

([DC], Teo. 2.8, pag. 146)

A.7 Inmersiones Isométricas

Supongamos que tenemos $f : M \to \bar{M}$ una inmersión diferenciable entre una variedad M de dimensión n y una variedad Riemanniana $\bar{M}$ de dimensión $k = n+m$. Entonces, para cada $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ es una subvariedad de $\bar{M}$. Esto significa que existe una vecindad $\bar{U} \subset \bar{M}$ de $f(p)$ y un difeomorfismo $\phi : \bar{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ a un subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^k$, de tal manera que ϕ aplica $f(U) \cap \bar{U}$ difeomorficamente sobre un conjunto abierto de un subespacio de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. La métrica Riemanniana induce de una manera natural una métrica Riemanniana sobre M de la siguiente manera:

Si $v,\, w \in T_p(M)$, definimos $\langle v,\, w\rangle = (df_p(v),\, df_p(w))$ en M.

En esta situación, f resulta ser una inmersión isométrica de M en $\bar{M}$. Para simplificar un poco la notación identificaremos a U con $f(U)$ y cada vector $v \in T_q(M)$ donde $q \in U$, con $df_q(v) \in T_{f(q)}(\bar{M})$. También usaremos esta identificación para extender por ejemplo un campo vectorial que está definido sobre U en M, a un campo vectorial que esté definido en $\bar{U}$ en $\bar{M}$; tal extensión siempre es posible si U es suficientemente pequeña.

Para cada $p \in M$, el producto interior sobre $T_p(\bar{M})$ se descompone en una suma directa:

$$T_p(\bar{M}) = T_p(M) \oplus (T_p(M))^{\perp},$$

donde $(T_pM)^{\perp}$ es el complemento ortogonal de $T_p(M)$ en $T_p(\bar{M})$. Si $v \in T_p(\bar{M})$ con $p \in M$ entonces podemos escribir:

$$v = v^T + v^N, \text{ donde } v^T \in T_p(M) \text{ y } v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Llamaremos a v^T la componente tangencial de v y a v^N la componente normal de v. Tal decomposición es diferenciable en el sentido que las proyecciones a cada factor son funciones diferenciables de $T\bar{M}$ en $T\bar{M}$. Denotemos a la conexión Riemanniana sobre $\bar{M}$ por $\bar{\nabla}$. Si X y Y son campos vectoriales sobre M, y $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son extensiones locales a $\bar{M}$, definimos:

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\right)^T.$$

Se verifica fácilmente que esto define una conexión sobre la variedad M. Ahora, sean X y Y campos vectoriales sobre M, entonces definimos:

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

que es un campo vectorial sobre $\bar{M}$ normal a M. Se verifica fácilmente que $B(X, Y)$ no depende de las extensiones $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de los campos vectoriales, por lo que está bien definido. Denotemos por $(\mathfrak{X}(U))^{\perp}$ a los campos diferenciables sobre U que son normales a $f(U)$.

Proposición A.7.1 *Sean X y $Y \in \mathfrak{X}(U)$.*

Entonces la aplicación $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to (\mathfrak{X}(U))^{\perp}$ dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

es bilineal y simétrica.

([DC], Prop. 2.1, pag. 127)

Consideremos ahora un punto $p \in M$ y un vector $\eta \in (T_p(M))^{\perp}$.

Definimos ahora la aplicación $H_\eta : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$H_\eta(x, y) = (B(x, y), \eta), \text{ para } x, y \in T_p(M).$$

Entonces, por la proposición anterior tenemos que ésta es una forma bilineal simétrica.

Definición A.7.2 *La forma cuadrática* $\mathbb{I}_\eta$ *definida sobre* $T_p(M)$ *por:*

$$\mathbb{I}_\eta(x) = H_\eta\,(x,\,x)\,,$$

es llamada ***la Segunda Forma Fundamental*** *de* f *en* p *a lo largo del vector normal* η.

Algunas veces también se usa el nombre de segunda forma fundamental a la aplicación B la cual es en todo punto $p \in M$, una aplicación bilineal y simétrica con valores en $(T_p(M))^\perp$. Observemos que la aplicación bilineal H_η está asociada a un operador auto-adjunto $S_\eta : T_p(M) \to T_p(M)$ por:

$$< (S_\eta(x),\,y) = H_\eta(x,\,y) = (B(x,\,y),\,\eta)\,.$$

Proposición A.7.3 *Sean* $p \in M$, $x \in T_p(M)$ *y* $\eta \in (T_p(M))^\perp$. *Consideremos a* N *como una extensión local de* η *normal a* M. *Entonces:*

$$S_\eta(x) = -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T.$$

([DC], Prop. 2.3, pag. 128)

Como vimos anteriormente, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de campos diferenciables sobre una variedad diferenciable es un módulo sobre $C^\infty(M)$, que es el conjunto de funciones diferenciables sobre la variedad; esto, entre otras cosas, quiere decir que $\mathfrak{X}(M)$ tiene una estructura lineal con las funciones diferenciables tomadas como escalares. Por lo tanto, muchas de las nociones del álgebra lineal, tienen un análogo en este contexto.

Definición A.7.4 *Un Tensor T de Orden p con valores en $C^\infty(M)$ sobre una variedad Riemanniana M es una aplicación multilineal de la siguiente forma:*

$$T \ : \ \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ ... \ \times \mathfrak{X}(M)}_{p\text{-veces}} \rightarrow C^\infty(M).$$

Esto significa que dados $Y_1, \ ... \ , Y_p \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \ ... \ , Y_p)$ es una función diferenciable sobre M y que T es lineal en cada variable, es decir:

$$T(Y_1, \ ... \ , fX + gY, \ ... \ , Y_p) = fT(Y_1, \ ... \ , X, \ ... \ , Y_p) + gT(Y_1, \ ... \ , Y, \ ... \ , Y_p),$$

para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y para toda f, $g \in C^\infty(M)$.

Sea p un punto en M y U una vecindad de p sobre la que es posible definir campos vectoriales $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M^n)$, de tal manera que en cada $q \in U$ los vectores $\{E_i(q)\}_{i=1}^n$ formen una base de $T_q(M)$; es este caso se dice que el conjunto $\{E_i\}_{i=1}^n$ es un marco móvil sobre U. Entonces, cada $Y_j \in \mathfrak{X}(M)$, con $j = 1, \ ... \ , p$ se puede escribir sobre U de la siguiente manera:

$$Y_j = \sum_{i_j} y_{i_j} E_{i_j}, \text{ con } i_j = 1, ..., n.$$

Que es expresar a los campos vectoriales Y_j, $j = 1, \ ... \ , p$, en la base móvil $\{E_i\}_{i=1}^n$. Entonces, por la linealidad de T se tiene que

$$T(Y_1, \ ... \ , Y_p) = \sum_{i_1, \ ... \ , i_p = 1}^{n} y_{i_1} ... y_{i_p} T\left(E_{i_1}, \ ... \ , E_{i_p}\right).$$

Las funciones $T\left(E_{i_1}, ..., E_{i_p}\right) = T_{i_1 ... i_p}$ sobre U son llamadas las componente de T en el marco móvil $\{E_i\}$. Esto nos implica que el valor de $T(Y_1, ..., Y_p)$ en un punto $p \in M$ depende solamente de los valores en p de las componentes de T y de los valores de $Y_1, \dots, Y_p$. Es posible definir la noción de un tensor sobre una variedad diferenciable que no tenga una métrica Riemanniana, pero en este caso hay que distinguir la diferencia entre los tensores covariantes y contravariantes, donde los tensores contravariantes se definen de igual manera pero sobre el espacio dual de $\mathfrak{X}(M)$, que se denota por $\mathfrak{X}^*(M)$.

Sobre una variedad Riemanniana, esto no es necesario pues la métrica Riemanniana asocia a cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ un único elemento $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ dado por $\omega(Y) = (X, Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y donde $(\, , \,)$ denota la métrica Riemanniana. Esta correspondencia nos permite identificar los tensores contravariantes con los covariantes. Un ejemplo de un tensor es la métrica Riemanniana, y al igual que se puede aplicar una especie de diferenciación sobre la métrica es también posible definir una diferenciación covariante sobre los tensores.

Definición A.7.5 *Sea T un tensor de orden p. La **Diferencial Covariante** ∇T de T es un tensor de orden $p+1$ dado por:*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_p, Z) = ZT(Y_1, \dots, Y_p) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_p) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_p).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, la Derivada Covariante $\nabla_Z T$ de T relativa a Z es un tensor de orden p dado por:

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_p) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_p, Z).$$

Como un ejemplo de esto vemos que para el tensor métrico su diferencial covariante es el tensor cero, ya que si X, Y, Z son campos vectoriales, entonces:

$$\nabla G(X, Y, Z) = Z(X, Y) - (\nabla_Z X, Y) - (X, \nabla_Z Y) =$$

$$(\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) - (\nabla_Z X, Y) - (X, \nabla_Z Y) = 0.$$

En general hay muchos tipos de tensores con valores en algún módulo que se pueden definir en una variedad Riemanniana, pero en particular nos interesan los siguientes:

1) El **Tensor de Torsión** de una conexión ∇ es un tensor con valores en campos vectoriales, denotado por Tor, que asigna a cada par de campos vectoriales diferenciables X y Y con dominio $U \subset M$, un campo vectorial diferenciable $\mathrm{Tor}\,(X, Y)$ con dominio U definido por:

$$\mathrm{Tor}\,(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\,.$$

Se puede probar por medio de las definiciones del corchete de Lie y de conexión, que Tor cumple las siguiente propiedades:

1.a) $\mathrm{Tor}\,(X, Y) = -\,\mathrm{Tor}\,(Y, X)$.

1.b) $\mathrm{Tor}\,(X + Y, Z) = \mathrm{Tor}\,(X, Z) + \mathrm{Tor}\,(Y, Z)$.

1.c) $\mathrm{Tor}\,(fX, Y) = f\,\mathrm{Tor}\,(X, Y)$ donde $f \in C^\infty(U)$.

Por estas propiedades se puede ver que el valor de $\mathrm{Tor}\,(X, Y)$ en un punto $p \in U$ depende únicamente de los valores de X y Y en p. Una mejor notación para el tensor Tor es Tor_∇ haciendo referencia a la conexión que se está utilizando, y con está notación si sucede que $\mathrm{Tor}_\nabla = 0$, diremos que la conexión ∇ es simétrica o que es libre de torsión.

Para mayor información se puede consultar el libro de [Hi].

2) El **Tensor Diferencia.**

Para este segundo caso supongamos que M es una variedad Riemanniana en la cual están definidas dos conexiones ∇ y $\tilde{\nabla}$. Dados dos campos vectoriales X y Y definimos el Tensor Diferencia de las dos conexiones como el tensor con valores en campos vectoriales mediante:

$$S(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

La linealidad del tensor S resulta de la definición de conexión y la definición del tensor diferencia. Un caso especial de este tensor es, por ejemplo, la segunda forma fundamental $B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$, que es un tensor sobre M con valores en $(\mathfrak{X}(M))^{\perp}$.

Para mayor información de Geometría Riemanniana pueden consultarse los libros de [DC], [Bo] y [Hi].

Bibliografía

KP " Conformal Structures and Möbius Structures ", Conformal Geometry, edit.

Ravi S. Kulkarni and Pinkall, Aspects of Mathematics, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, pags.1-39.

JS " Complex Functions an Algebraic and Geometric Viewpoint ", Autores: Gareth A. Jones y David Singerman ,edit. Cambridge University Press.

Mk " Kleinian Groups ", Bernard Maskit, Springer Verlag #287.

BE " The Geometry of Discrete Groups ", Alan F. Beardon, Springer Verlag #91.

Rat " Foundations of Hyperbolic Manifolds ",John G. Ratcliffe, edit. Springer Verlag #149.

KP " Uniformizations of Geometric Structures and Aplications to Conformal Geometry ", R. S. Kulkarni and U. Pinkall, Differential Geometry Peñiscola, Lecture Note in Math. 1209, Springer-Verlag (1986). pag. 190-209.

Ku " Groups with domains of discontinuity ", R. S. Kulkarni, Math. Ann. #237 (1978) pags 253-272.

Ah " Finitely generated Kleinian groups ", L. V. Ahlfors, Amer. J. Math #86 1964 pag. 413-429.

Wr " Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups ", Frank W. Warner, edit. Scott Foresman and Company.

Fo " Lectures on Riemann Surfaces ", Otto Foster, Edit. Spriger-Verlag, Graduate texts in Mathematics #81.

Bo " An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry ", William M. Boothby, edit. Academic Press.

Vj " Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas ", Alberto Verjovsky, edit. IPN, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Oaxtepec, Morelos julio de 1982.

DC " Riemannian Geometry ", Manfredo P. do Carmo, Ed. Birkhäuser.

Hi " Notes on differential geometry ", Noel J.Hicks, edit. Van Nostrand Reinhold Company, Ltd Londres, 1974.

MT " Hyperbolic Manifolds and Klienian Groups ",

Katsuhiko Matsuzaki and Nasahiko Taniguchi, Edit Clarendon Press•Oxford, 1998. Oxford Mathematical Monographs.

el Tensor Diferencia de las dos conexiones como el tensor con valores en campos vectoriales mediante:

$$S(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

La linealidad del tensor S resulta de la definición de conexión y la definición del tensor diferencia. Un caso especial de este tensor es, por ejemplo, la segunda forma fundamental $B(X,Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$, que es un tensor sobre M con valores en $(\mathfrak{X}(M))^{\perp}$.

Para mayor información de Geometría Riemanniana pueden consultarse los libros de [DC], [Bo] y [Hi].

WJ " Riemannian Geometry ", T. J. Willmore, Edit. Clarendon Press-Oxford 1993.

Kw " The Theory of Transformation Groups ", Katsuo Kawakubo, Edit. Oxford University Press 1991.

Gu " Special co-ordinate coverings of Riemann Surfaces ", R. C. Gunning, Math Ann. 170 (1967), 67-86.