

00362



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS

11

"EL CAMPO ESCALAR COMO MATERIA OSCURA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)

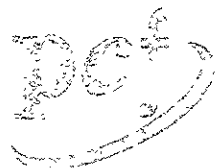
P R E S E N T A :

ENA ERANDY RAMIREZ PEREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA



2001



posgrado en ciencias físicas unam



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ  
 DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 P R E S E N T E

Con fecha 8 de Julio de 2001, le informo que después de haber revisado el trabajo presentado por el alumno (a) del Posgrado en Ciencias Físicas Ena Erandy Ramírez Pérez titulado

"El Campo Escalar como Materia Oscura"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de  
 (SÍ / NO)

Maestra en Ciencias Físicas

ATENTAMENTE

Dr. Darío Núñez Zúñiga  
 GRADO, NOMBRE COMPLETO

Darío Núñez  
 FIRMA

RFC: NUZD-580211

ANTIGUEDAD EN LA UNAM 16 años

LUGAR DE TRABAJO Instituto de Ciencias Nucleares

TELÉFONO: 5622-4692, 343

CORREO ELECTRÓNICO nunez@nuclecu.unam.mx



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ  
DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
P R E S E N T E

Con fecha 10 de Julio de 2001, le informo que  
después de haber revisado el trabajo presentado por el alumno (a) del Posgrado  
en Ciencias Físicas Ena Erandy Ramírez Pérez titulado.

"El Campo Escalar como Materia Oscura"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de  
(SI/NO)

Maestra en Ciencias Físicas

ATENTAMENTE

Dr. José Antonio de Diego Onsurbe

GRADO, NOMBRE COMPLETO

FIRMA

RFC DIOA-600111

ANTIGUEDAD EN LA UNAM: 6 años

LUGAR DE TRABAJO Instituto de Astronomía

TELEFONO 56-22-39-89

CORREO ELECTRONICO jdo@astroscu.unam.mx



ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ  
 DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 P R E S E N T E

Con fecha 8 de Julio de 2001, le informo que después de haber revisado el trabajo presentado por el alumno (a) del Posgrado en Ciencias Físicas Ena Erandy Ramírez Pérez titulado:

"El Campo Escalar como Materia Oscura"

considero que Si reúne los méritos necesarios para obtener el grado de (SÍ/NO)

Maestra en Ciencias Físicas

ATENTAMENTE

Dr. Tonatiuh Matos Chassin  
 GRADO, NOMBRE COMPLETO

Y

FIRMA

RFC: MACT-580920

ANTIGUEDAD EN LA UNAM: 0

LUGAR DE TRABAJO Depto. de Física, CINVESTAV

TELEFONO 57-47-38-34

CORREO ELECTRONICO tmatos@fis.cinvestav.mx



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ  
DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
P R E S E N T E

Con fecha 14 de Julio de 2001, le informo que después de haber revisado el trabajo presentado por el alumno (a) del Posgrado en Ciencias Físicas Ena Erandy Ramírez Pérez titulado

"El Campo Escalar como Materia Oscura"

considero que SÍ reúne los méritos necesarios para obtener el grado de  
(SÍ/NO)

Maestra en Ciencias Físicas

ATENTAMENTE

Dr. Luis Gustavo Cabral Rosetti

GRADO, NOMBRE COMPLETO Y FIRMA

RFC CARL- 630623

ANTIGÜEDAD EN LA UNAM 4 meses

LUGAR DE TRABAJO Instituto de Ciencias Nucleares

TELÉFONO: 56-22-46-90, 333

CORREO ELECTRÓNICO luis@nuclecu.unam.mx



posgrado en ciencias físicas  
UNAM

ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ  
DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
P R E S E N T E

Con fecha 29 de Octubre de 2001, le informo que después de haber revisado el trabajo presentado por el alumno (a) del Posgrado en Ciencias Físicas Ena Erandy Ramírez Pérez titulado

"El Campo Escalar como Materia Oscura"

considero que SI reúne los méritos necesarios para obtener el grado de (SI/NO)

Maestra en Ciencias Físicas

ATENTAMENTE

Dr. Axel de la Macorra Pettersson

GRADO, NOMBRE COMPLETO Y

FIRMA

RFC: MAPA- 620309

ANTIGÜEDAD EN LA UNAM: 8 años

LUGAR DE TRABAJO Instituto de Física

TELEFONO 56-22-51-40

CORREO ELECTRONICO: macorra@fisica.unam.mx

## AGRADECIMIENTOS

ME ES GRATO MANIFESTAR MI AGRADECIMIENTO A

LAS SIGUIENTES PERSONAS

- DR. DARIO NÚÑEZ ZÚÑIGA
- DR. TONATIUH MATOS CHASSÍN
- DR. LUIS GUSTAVO CABRAL ROSSETTI
- DR. JOSÉ ANTONIO DE DIEGO ONSURBE
- DR. ROBERTO SUSSMAN
- DR. DANIEL SUDARSKY SAIONZ
- DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ
- DR. ALEJANDRO CORICHI
- DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSON
- A LA COMUNIDAD DEL ICN-UNAM Y CINVESTAV.

AL HONORABLE JURADO



# ÍNDICE

PÁGINA

PREFACIO	1
CAPÍTULO 1: MATERIA OSCURA EN EL UNIVERSO	7
CAPÍTULO 2: CONDICIONES GEOMÉTRICAS	25
CAPÍTULO 3: ACOPLA NO MÍNIMO	47
CONCLUSIONES	63
APÉNDICES	
APÉNDICE A	68
APÉNDICE B	71
APÉNDICE C	73
APÉNDICE D	75
APÉNDICE E	77
BIBLIOGRAFÍA	79

# Prefacio

El objetivo que nos planteamos alcanzar en este trabajo es determinar las condiciones que nos permitan obtener información sobre la naturaleza de la materia oscura a nivel galáctico. Uno de los problemas más importantes a los que se enfrenta la Cosmología actual es la identificación y determinación de las cantidades de los diferentes tipos de materia y energía que componen al Universo. Esencialmente, los componentes actuales del Universo están a su vez formados por materia y energía de vacío,  $\Omega_0 = \Omega_M + \Omega_\Lambda$  [2], donde  $\Omega$ , es el parámetro de densidad asociado a cada cantidad, en este caso,  $\Omega_\Lambda$  está asociada a la constante cosmológica. Además, hay evidencia que apunta hacia el hecho de que el Universo es plano, esta evidencia proviene de la teoría, donde el modelo más aceptado para el Universo temprano es inflación, así como de datos observacionales, los cuales implican que  $\Omega_0 = 1 \pm 0.12$  (por ejemplo [3]). El método para obtener la masa de los cúmulos de galaxias es quizá una de las formas más confiables para determinar la componente de materia  $\Omega_M$ . Las observaciones indican que  $\Omega_M \sim 0.3$  [1], sin embargo, las componentes más visibles de  $\Omega_M$ , bariones, neutrinos, forman una fracción muy pequeña de  $\Omega_M$ . Además de que las estrellas y el polvo (bariones) representan aproximadamente el 5% de la materia total del Universo. Es decir  $\Omega_M \sim \Omega_b + \Omega_{DM} \sim 0.05 + \Omega_{DM}$ , donde  $\Omega_{DM}$  representa la parte de materia oscura (Dark Matter) de las contribuciones que deben tener un valor de  $\Omega_{DM} \sim 0.25$ . El valor dado de la cantidad de materia bariónica está en concordancia con los límites impuestos por nucleosíntesis (ver por ejemplo [4]). Una gran cantidad de materia bariónica podría cambiar los valores predichos para el hidrógeno (H) primordial y el helio ( $^4\text{He}$ ) en el modelo estándar de la cosmología que coincide con las observaciones.

La necesidad de considerar la existencia de la materia oscura en el Universo ha sido establecida por observaciones astronómicas a varias escalas, desde el

nivel galáctico hasta cúmulos de galaxias. Ésto proviene del hecho de que al aplicar un análisis dinámico a los sistemas mencionados, no es posible reproducir los resultados que se observan en los mismos. Varias de las propuestas que han surgido para tratar de explicar este hecho, sugieren la existencia de materia exótica [5], es decir, materia que interactúa débilmente con la materia bariónica, hasta modificaciones no relativistas de la mecánica Newtoniana [6] y teorías que no incluyen a la relatividad general [7]. También es posible que ésta materia oscura interactúe de una manera tan débil con la materia ordinaria, que haga muy difícil su detección por medios que no incluyan los efectos gravitacionales con la materia bariónica, tal como está establecido en el escenario de materia oscura fría (CDM)[8, 9]. El hecho es que la materia oscura es uno de los componentes más importantes del Universo y su naturaleza es desconocida.

A escala galáctica, las observaciones astronómicas indican que las curvas de rotación, es decir, el movimiento coplanar orbital del gas en las partes exteriores de las galaxias, muestra ser constante para valores grandes del radio luminoso [10, 12]. Es en el momento en que queremos aplicar un análisis Newtoniano para explicar el problema cuando surgen inconsistencias; de acuerdo a la mecánica Newtoniana, la mencionada velocidad debería decrecer conforme nos alejamos del centro galáctico, lo cual no sucede, esto nos lleva a pensar que existe algún tipo de materia que no estamos detectando salvo por su interacción gravitacional con la materia bariónica. Una de las explicaciones más aceptadas es la de que existe un halo esférico de materia oscura de naturaleza desconocida el cual rodea a la galaxia y que contribuye como la materia que se necesita para producir el comportamiento plano de las curvas de rotación.

En éste trabajo, nos proponemos el objetivo de estudiar el problema de la materia oscura a nivel galáctico, y concretamente para galaxias espirales utilizando un análisis relativista. Seguimos un desarrollo que continúa con la idea planteada en el trabajo comenzado por Matos y Guzmán [13] en donde hacen un análisis dinámico preliminar en el contexto de galaxias espirales. En el segundo capítulo trabajamos en un espacio tiempo estacionario y axisimétrico, utilizando las condiciones que nos garantizan que los objetos de prueba que estamos considerando sigan un movimiento geodésico circular, encontramos expresiones para la energía y el momento angular, que posteriormente utilizaremos para determinar la velocidad tangencial de dichos objetos

en el plano galáctico y poder establecer una condición para la mencionada velocidad en la región en donde se observan las curvas de rotación con características planas. Esto nos permite establecer una ecuación de constricción entre los coeficientes métricos Ec.(2.21), que nos lleva a la siguiente condición: La velocidad tangencial de los objetos de prueba es independiente del radio si los coeficientes métricos satisfacen la ecuación de constricción, Ec.(2.21). Además, para el caso estático, esta ecuación puede ser fácilmente integrada, dejando el espacio tiempo en el plano ecuatorial con un solo coeficiente métrico independiente. Con la geometría fija, calculamos el tensor de Einstein y lo igualamos a un tensor de energía momento arbitrario, de esta forma, buscamos encontrar condiciones que nos permitan discriminar a la materia que pueda conformar a la materia oscura eligiendo varios candidatos que han sido propuestos, y cuyos tensores de energía momento aplicamos en las ecuaciones de campo que contienen la información de la constricción sobre los coeficientes métricos que obtuvimos previamente Ec.(2.34). Junto con la utilización de una aproximación, deducimos una ecuación de constricción para las componentes del tensor de energía, y de este modo podemos decir cuales de ellos podrían formar a la materia oscura. Además, presentamos el caso esféricamente simétrico y estático y aplicamos el mismo proceso para un tensor de energía para el fluido perfecto, lo cual permite recuperar el resultado Newtoniano, así como también el obtenido para el caso axisimétrico, incluimos un análisis en el caso esférico, para un campo escalar mínimamente acoplado con la gravedad. Junto con esto, presentamos argumentos sobre las ventajas de la utilización de la Relatividad General para hacer este análisis, lo cual permite analizar otros tipos de materia distintos al polvo, entre los cuales se encuentra el campo escalar.

En el capítulo 3, nos centramos en el análisis de un campo escalar no masivo, y no mínimamente acoplado a la gravedad como materia oscura, esto con el objetivo de encontrar la expresión que debe seguir el factor de acople entre el campo escalar y la gravitación la cual nos permita reproducir el comportamiento observado en las curvas de rotación y encontrar una solución para el campo escalar que nos dé información acerca de su comportamiento tanto en las regiones cercanas al núcleo galáctico, como en las regiones externas al mismo, es decir, en este análisis, no nos estamos centrado únicamente en la región donde las curvas de rotación conservan un perfil plano en su forma, sino que estamos extendiendo el análisis a toda la región galáctica.

Dentro de estas consideraciones, analizamos un caso particular como solu-

ción a las ecuaciones de Einstein que contiene una singularidad cubierta por un horizonte lo cual nos garantiza que el escalar de Ricci no diverge en el valor de  $\tau$  correspondiente al horizonte. Para esto proponemos un elemento de línea estático y esféricamente simétrico que nos permite reproducir el comportamiento observado en las curvas de rotación siguiendo el mismo análisis que para el caso anterior, pero con la salvedad de que la velocidad de rotación para los objetos de prueba mantiene una expresión concordante con el perfil de las curvas de rotación observadas, es decir, se obtiene una ecuación diferencial para el coeficiente métrico  $g_{tt}(r)$ , en términos de una velocidad arbitraria, y posteriormente imponemos que esta, siga una expresión que la haga coincidir con las observaciones. A partir de un Lagrangiano que incluye un factor de acople que deberá ser determinado, variamos la acción respecto a la métrica para llegar a las ecuaciones de Einstein igualadas a un tensor de energía para el campo escalar. Variamos nuevamente la acción ahora respecto al campo escalar, y obtenemos el equivalente de la ecuación de Klein-Gordon para un acople no mínimo arbitrario. Dado que determinamos la expresión que sigue el coeficiente de la métrica  $g_{tt}(r)$  anteriormente, es posible simplificar las ecuaciones de Einstein y quedarnos con uno de los coeficientes métricos en forma independiente y obtener un sistema de ecuaciones acopladas. Al proponer una solución particular para la métrica, encontramos una ecuación diferencial que al ser resuelta nos permite dar la forma que debe seguir el factor de acople en forma exacta en las dos regiones bajo consideración. Así mismo, nos es posible encontrar dos ecuaciones diferenciales para el campo escalar en ambos casos, una de las cuales resolvemos numéricamente y la otra en forma exacta, de tal manera que encontramos el comportamiento para el factor de acople y  $\phi$  en función del parámetro  $r$ , y posteriormente, podemos dar la relación entre ambos, es decir,  $f(\phi)$  y obtener información acerca de como se encuentra acoplado el campo escalar con la gravitación en las regiones que estamos considerando.

El trabajo es desarrollado de la siguiente forma: el capítulo 1 es una introducción cualitativa al problema que queremos tratar, en él, exponemos los resultados que han llevado a los científicos a proponer la existencia de la materia oscura y cuales han sido los modelos propuestos para explicar su naturaleza. En el capítulo 2, determinamos el tipo de geometría que en un espacio tiempo axisimétrico, permite tener una velocidad tangencial con una magnitud independiente del radio. Posteriormente, trabajamos con las ecuaciones de Einstein para ésta geometría determinada y para un tensor de

energía momento arbitrario, obteniendo de este modo constricciones sobre las componentes de éste tensor, y probamos con distintos tipos de materia dentro de la constricción, para restringir de éste modo, cuales pueden cumplir con la condición de ser materia oscura. En el capítulo 3, analizamos el caso para un campo escalar no mínimamente acoplado con la gravedad como materia oscura para un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, variamos la acción para obtener las ecuaciones de Einstein y el tensor del campo escalar, así como el equivalente de la ecuación de Klein-Gordon para un factor de acople arbitrario. Esto, junto con la condición sobre el primer coeficiente de la métrica, permite llegar a un sistema de ecuaciones que es posible resolver analizando el problema para dos casos distintos cuando expresamos al parámetro  $r$  y a una de las constantes involucradas en la métrica en términos de la masa del agujero negro y consideramos las regiones en las cuales nos encontramos cerca y lejos del horizonte respectivamente, para tomar los límites correspondientes dentro de las ecuaciones diferenciales. De este modo llegamos a una ecuación diferencial para el factor de acople en función de  $r$  que resolvemos en forma exacta y graficamos para observar su comportamiento. El otro caso, corresponde a la región donde la materia oscura domina, es decir, en las regiones exteriores de la galaxia lejos del centro, así, llegamos a otra ecuación diferencial para el factor de acople que también podemos resolver en forma exacta y graficar, por lo cual, estamos encontrando como es la forma que debe tener el factor de acople entre el campo escalar y la gravedad para éste caso en particular, sin apelar a una teoría específica.

Dado que podemos encontrar el comportamiento que sigue el factor de acople, nos encontramos en posición de determinar al campo escalar mismo, obtenemos dos ecuaciones diferenciales para el campo escalar siguiendo la misma consideración que hicimos para encontrar las ecuaciones para el factor de acople, es decir, considerar dos regiones para el análisis del problema. Las ecuaciones a las que llegamos pueden ser resueltas en forma numérica, y exacta respectivamente, encontrando el perfil que sigue el campo escalar en los dos casos antes mencionados. Una vez determinadas ambas cantidades, nos es posible saber cual es el comportamiento del factor de acople en términos del campo escalar para ambas regiones lo que nos permite la comparación de estos resultados con los que obtuvimos en el caso del acople mínimo.

Es importante señalar que nos fué posible determinar el comportamiento que

el factor de acople debe seguir para el caso que estamos considerando, sin haber hecho suposiciones sobre el mismo, de tal forma que el resultado que obtuvimos nos permite saber la manera en la que el campo escalar se encontraría acoplado a la gravedad en caso de ser el constituyente principal o el *único constituyente de la materia oscura a nivel galáctico*. El comportamiento que observamos es el siguiente: cerca del centro de la galaxia, el campo escalar se encuentra muy acoplado con la gravedad, y en las regiones externas el acople es mínimo, (el factor de acople es una constante que puede ser tomada como 1) es decir, recuperamos el caso que analizamos en el *segundo capítulo*, lo cual asegura que hay consistencia entre ambos resultados, para la solución que estamos proponiendo. A partir de estos resultados, podemos considerar que encontramos una solución particular que nos permite tener información sobre el comportamiento que el campo escalar como materia oscura a nivel galáctico sigue cuando se encuentra acoplado con la gravedad en la *forma que determinamos a partir del análisis de las ecuaciones*, además de que podemos encontrar consistencia entre éste resultado y el obtenido en el caso de acople mínimo con la gravedad, el cual se analiza previamente en este trabajo. También es importante señalar, que los resultados descritos anteriormente corresponden a la dependencia del factor de acople y del campo escalar con respecto a  $r$ , y a la dependencia de  $f$  con respecto a  $\phi$ , y en la literatura generalmente se reportan expresiones para el factor de acople en función del campo escalar, [40], [41], [42], por lo cual también nos será posible, posteriormente, realizar un análisis más profundo sobre la información que la forma funcional que sigue el factor de acople  $f$  como función de  $\phi$  nos está proporcionando.

# Capítulo 1

## Materia Oscura en el Universo

De acuerdo a la evidencia astronómica, se puede decir que mucha de la materia presente en el Universo es oscura [11]. Varias de las observaciones astronómicas de los siglos pasado y antepasado, llevaron a los astrónomos a observar líneas espectrales de absorción para el H (hidrógeno), que atribuyeron a las estrellas que orbitaban colectivamente alrededor del centro de la galaxia en observación. Del lado del núcleo donde la rotación de la galaxia lleva a las estrellas hacia el observador, las líneas espectrales tenían un corrimiento hacia el azul del espectro respecto a la velocidad central. En el lado opuesto, donde la rotación lleva a las estrellas lejos del observador, las líneas se encontraban corridas hacia la región espectral del rojo. Algún tiempo después se comprobó que el movimiento de rotación de las estrellas era el responsable de estas líneas espectrales. Para los primeros años del siglo veinte, los astrónomos sabían que vivimos en una galaxia compuesta de billones de estrellas distribuidas principalmente en un disco, rotando todas alrededor de un centro distante. Cada galaxia, es un sistema gigante de billones de estrellas unidas gravitacionalmente orbitando alrededor de un centro común. Hay varios procedimientos observacionales disponibles hoy en día para estudiar la rotación de las estrellas y el gas en una galaxia espiral [11]. Un espectrógrafo puede registrar la luz que surge de todas las estrellas en una galaxia a lo largo de la línea de visión. El espectro resultante estará compuesto, por la suma de los espectros estelares individuales. Un movimiento estelar hacia el observador desplazaré cada línea espectral hacia el rojo. Las medidas de los desplazamientos sucesivos a lo largo de la línea espectral darán la velocidad media de las estrellas correspondiente a su localización en la galaxia. La forma y el ancho de la línea contienen información concerniente a



los movimientos aleatorios a los largo de la línea de visión.

La luz proveniente de las galaxias más lejanas es generalmente muy débil para permitir una exposición espectral apropiada. Otro procedimiento, es observar la región espectral correspondiente a las ondas de radio en la longitud de onda de 21 cm. emitida por el átomo de hidrógeno. El gas de Hidrógeno es uno de los mayores constituyentes del polvo que se puede observar en la región de las ondas de radio en las galaxias espirales. De las medidas para la velocidad hechas a cada uno de los lados del núcleo, se vá formando una curva promedio que describe la velocidad de rotación en el plano de la galaxia como función de la distancia al núcleo. Las curvas de rotación varían sistemáticamente con la luminosidad. Para una galaxia de poca luminosidad, la velocidad surge gradualmente del núcleo y alcanza una velocidad máxima solo en las regiones exteriores. Para una galaxia de luminosidad alta, la velocidad rotacional surge "rápidamente" del núcleo y llega a una región aproximadamente plana en una fracción pequeña del radio de la galaxia. Una galaxia de poca luminosidad ( $6 \times 10^9$  veces la luminosidad del sol) tiene una velocidad rotacional máxima  $V_{max}$  cercana a 100 Km/seg., comparada con  $V_{max}$  cercana a 225 Km/seg. de una de luminosidad más elevada ( $2 \times 10^{11}$  luminosidades solares).

Para poder determinar la distribución de masa atribuida a una curva de rotación, es necesario asumir un modelo para poder deducirla. Hay tres tipos de modelos que pueden seguirse.

1.-Masa central: En el sistema solar, donde esencialmente toda la masa esta concentrada en el Sol,  $M(r)$  es constante para todas las distancias más allá del radio del mismo. Las velocidades de todos los planetas decrecen como  $1/r^{1/2}$ , esto es, un decrecimiento Kepleriano. Para las galaxias, la forma de las curvas de las velocidades indican que la mayor parte de la masa no está localizada en las regiones centrales.

2.-Cuerpo sólido: Para un cuerpo de densidad uniforme,  $M(r)$  va como  $r^3$ , entonces, la velocidad se incrementa linealmente con  $r$ . Esta variación describe las velocidades que observamos en las galaxias. La densidad  $M(r)/r^3$ , decrece como  $1/r^2$  cuando  $r$  se incrementa, para modelos esféricos. A pesar de que la densidad decrece hacia afuera de la galaxia, la masa es la misma para toda  $r$ . Entonces una curva de rotación que es plana, indica que la masa no está convergiendo a un valor límite hasta el punto en que las observaciones ópticas pueden ser hechas para una galaxia modelada como un esferoide. En el disco de una galaxia espiral típica, la luminosidad en la superficie decrece exponencialmente cuando la distancia radial se incrementa, mientras que las

curvas de rotación implican que la densidad de masa cae más lentamente, como  $1/r^2$ . Entonces, localmente, la razón de la masa a la luminosidad  $M/L$  se incrementa conforme crece la distancia desde el núcleo.

Las observaciones de las curvas de rotación llevan a inferir la existencia de halos masivos no luminosos que rodean a las galaxias espirales. La atracción gravitacional de estas masas de materia no observada, mucha de ella localizada más allá de lo que la imagen óptica de la galaxia permite ver, mantienen a las velocidades rotacionales sin decrecer. El incremento de la razón  $M/L_B$ , con  $L_B$  la luminosidad en las regiones del azul, con la distancia desde el núcleo, indica que ésta masa no luminosa está mucho menos concentrada hacia el centro de la galaxia de lo que las estrellas visibles y el polvo lo están. Aún a distancias del centro muy grandes, el promedio de la densidad de la materia no luminosa es en muchos órdenes de magnitud, más grande que la densidad media de masa en el Universo.

Hay evidencia de que un halo masivo rodea a nuestra galaxia y proviene de las estrellas y el gas a distancias más grandes del centro de la galaxia que el Sol, cuyas velocidades rotacionales continúan creciendo. A longitudes de escala del orden del tamaño de galaxias,  $20 < R < 100$  Kpc., las curvas de rotación observadas en las longitudes de onda correspondientes al óptico y a las ondas de radio, y el consecuente incremento de la razón de la masa con la luminosidad, ofrecen evidencia para la existencia de halos masivos. Más aún, la dinámica de los cúmulos globulares y de las galaxias enanas que orbitan la nuestra como satélites, implican una masa que se incrementa aproximadamente en forma lineal conforme el radio crece, a distancias tan grandes como 75 o 100 Kpc.

Para estas distancias, existe igualmente evidencia de que la masa gravitacional excede a la masa luminosa, parte de ella viene de las órbitas de las galaxias binarias, movimientos aleatorios de galaxias en cúmulos, y la distribución de gas caliente en cúmulos de galaxias como es posible observar gracias a la emisión en rayos  $x$ . Tales observaciones dan soporte al concepto de que hay halos masivos alrededor de las galaxias individuales.

A continuación mostramos ejemplos de varias curvas de rotación [12], que muestran el comportamiento que se esperaría encontrar de acuerdo a un análisis Newtoniano (líneas punteadas), las líneas continuas muestran el comportamiento observado, y las líneas compuestas por rayas muestran el com-

portamiento que tendría que seguir el halo de materia oscura para que se obtengan las curvas observadas.  $M_I$  es un parámetro que indica la luminosidad de cada galaxia.

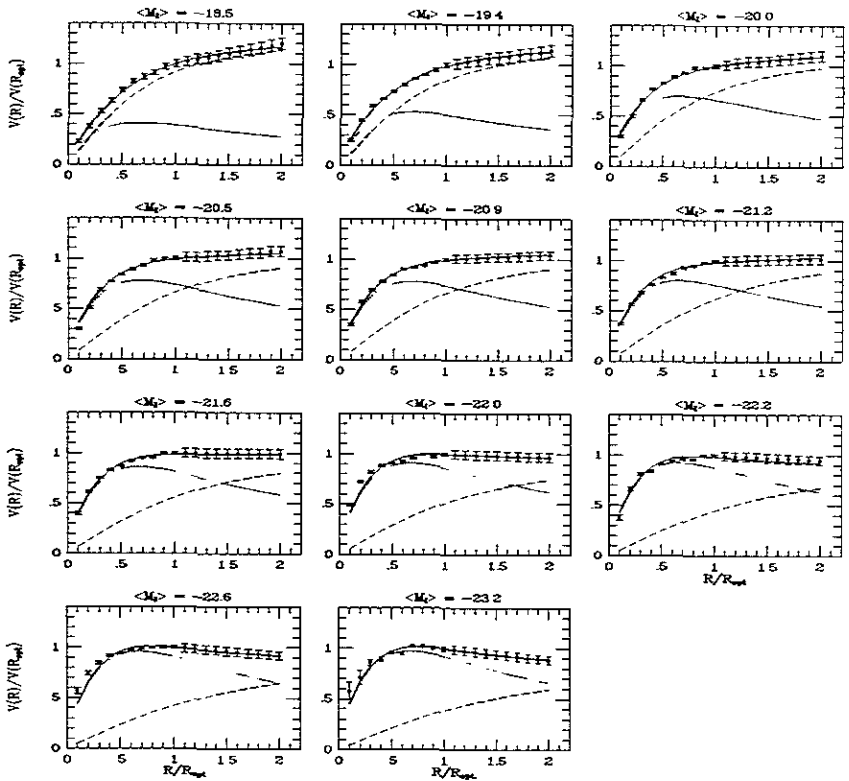


Figura 1.1: Curvas de rotación de varias galaxias espirales, M. Persic, P. Salucci and F. Steel, (1996).

El interés en las curvas de rotación, ha llevado a los astrónomos a determinar las velocidades rotacionales más allá de la imagen óptica para algunas galaxias en las cuales la distribución de hidrógeno neutro se extiende mucho más que la galaxia óptica. Esto ha sugerido que las curvas de rotación decaen fuera de la galaxia observable en el óptico quizá en un 10% de la velocidad sobre distancias radiales pequeñas, pero después vuelven a subir. Las observaciones en una variedad de rangos espectrales no han podido detectar a

la materia oscura. Los halos masivos no parecen radiar significativamente en el ultravioleta, visible, infrarrojo, o en las regiones de rayos  $x$ ; no están compuestos de gas o de estrellas comunes de baja luminosidad. Otras posibilidades incluyen fragmentos de materia que nunca fueron luminosos (planetas como Júpiter, hoyos negros, neutrinos, etc.). Ahora, hay estudios sistemáticos que indican que virtualmente, todas las galaxias espirales tienen velocidades rotacionales que permanecen en un valor elevado hacia los límites de la galaxia óptica, lo cual lleva a la conclusión de que sólo se ha podido estudiar del 5 al 10 % del universo que es luminoso.

Es posible pensar como ya se mencionó antes, que la idea de la materia oscura aparezca en dos contextos, el primero, es el conjunto de resultados dinámicos que indican que la mayor parte de la masa en las galaxias, y en sistemas de galaxias, se encuentra afuera de la región central donde la masa de las estrellas luminosas domina. El segundo argumento, lleva a considerar la posibilidad de que hay otro factor de 10 en la masa oscura fuera de los sistemas de galaxias, dando un total de  $\Omega = 1$ . Aún utilizando mecánica Newtoniana a nivel galáctico, las observaciones establecen la presencia de materia oscura en ellas.

Las primeras estimaciones detalladas de la masa del Universo empezaron con Hubble en 1926, y están basadas en contar el número de galaxias y en la masa de cada una de ellas derivada de la cantidad de energía necesaria para mantener los movimientos de estrellas y gas en ellas. Esta técnica no toma en cuenta el material que se encuentra fuera de las partes brillantes de las galaxias. La primera evidencia de que una fracción considerable de la masa no estaba siendo tomada en cuenta vino de las observaciones de las velocidades de las galaxias en los cúmulos de Virgo y Coma. La masa necesaria para mantener a las galaxias moviéndose de esta manera en estos cúmulos necesitaba de valores mayores en dos órdenes de magnitud a los estimados por Hubble.

Utilizando mecánica Newtoniana como una aproximación para explicar la dinámica de las galaxias y los cúmulos formados por ellas, sus masas se encuentran dominadas por la materia oscura. La evidencia indica que la masa correspondiente a las partes internas de la galaxia esta principalmente formada por estrellas visibles. Por lo tanto, es necesario considerar halos masivos como ya se mencionó antes para producir los perfiles cercanamente planos de las curvas de rotación en las partes externas de las galaxias espirales aisladas. Smith (1936) notó que para detectar la masa total en una nube de

materia que rodea a una galaxia (halo oscuro), es necesario medir los efectos gravitacionales de éste halo sobre los movimientos en él o más allá de él, siguiendo la ley de la gravitación, la aceleración no se ve afectada en las partes centrales de la galaxia debido a la presencia del halo esférico, y muy poco afectada por la presencia de un plano.

Posteriormente, las medidas de las curvas de rotación en los discos de galaxias espirales, los corrimientos Doppler de la línea de 21 cm. del hidrógeno atómico y líneas ópticas de gas en el disco, han dado evidencia de que bajo consideraciones Newtonianas, hay galaxias espirales en las cuales la masa se encuentra más ampliamente distribuida que la luminosa (Rubin). Como las galaxias espirales son comunes, es razonable suponer que la masa oscura se encuentra en una distribución estable con una dispersión en los valores de la velocidad más grande que la observada para el disco luminoso. La masa necesitada para producir la aceleración gravitacional  $v^2/r$  en una curva de rotación dada  $v(r)$ , es aproximadamente la misma tanto si la masa está distribuida en un disco como si lo está en un halo esférico.

Un modelo simple para explicar la contribución al valor medio de la densidad de masa por los halos masivos es el siguiente; las galaxias se encuentran en un rango muy grande de luminosidades y dispersión de velocidades. Pero hay una estimación estándar como función de la luminosidad que indica que la mayor parte de ésta en el Universo viene de las galaxias y lo mismo es cierto para la masa. Suponiendo que cada una de esas galaxias con luminosidad  $L_*$  y una densidad  $n_* = 0.01h^3(Mpc)^{-3}$ , donde ( $Mpc$ ) es 1 Megaparsec ( $1parsec = 3.086 \times 10^{18}cm.$ ), y  $h$  es el parámetro de Hubble que se encuentra entre  $0.5 \leq h \leq 0.85$ , tiene una curva de rotación plana, con una densidad de masa  $\rho$  que va como  $r^{-2}$ , y un radio  $r_h$  (o radio de corte) para el cual la curva de rotación termina. Entonces, la masa por galaxia es [2]:

$$M(< r_h) = v^2 r_h / G = 1.1 \times 10^{10} r_h (kpc) M_\odot$$

El símbolo  $M_\odot$  indica masas solares,  $G$  es la constante Universal de la Gravitación. El radio de corte ( $r_h$ ) es expresado en kiloparsecs, y el valor genérico asume que  $v = 220kms^{-1}$ , característico de una galaxia  $L_*$ . La densidad de masa promedio con la que contribuyen estos halos, es el producto de la masa del halo  $M(< r_h)$  con la densidad numérica  $n_*$ , el parámetro de densidad

resultante es:

$$\Omega_{halo} = \rho_{halo} / \rho_{crit} = n_v^2 r_h / G \rho_{crit} = 0.4 h r_h (Mpc)$$

Esto indica que los halos oscuros proveerían la densidad de masa crítica si los radios se extendieran típicamente hasta distancias de  $2.5h^{-1}$  Mpc. El radio de corte es comparable a la distancia promedio entre las galaxias  $L_*$ . Esto es, si el halo de cada galaxia termina aproximadamente donde el próximo empieza, el parámetro de densidad podría estar cerca del valor teórico preferencial,  $\Omega = 1$ .

Sin embargo, es probable que esto no sea lo que está pasando porque la masa por galaxia obtenida de esta manera, excedería la observada en cúmulos. Es posible que mucha de la masa esté distribuida en forma más extensa.

Dentro de los modelos teóricos que proponen halos esféricos de materia conteniendo a cada galaxia espiral, se han desarrollado algunos particularmente interesantes. Sin embargo, quizá la idea más radical para explicar las curvas de rotación fue propuesto por Joel E. Tohline, e independientemente por M. Milgrom y J. Bekenstein. Ellos propusieron que para grandes distancias, la teoría de la gravitación de Newton debería ser modificada: en vez de tener una fuerza que decrezca con el cuadrado de la distancia deberíamos tener otra que decreciera con otro exponente. Esta hipótesis mostró fallas que la hicieron poco factible.

Como sabemos una de las mayores interrogantes que existe es saber de que están compuestos estos halos masivos; dentro de las primeras ideas que surgieron [30], estaba, como ya se mencionó, la de considerar que eran de origen bariónico (nucleones) como hoyos negros, estrellas de neutrones, enanas blancas frías, estrellas de escasa masa para encenderse en combustión, planetas, e incluso asteroides. Sin embargo, la gran cantidad de materia no detectada que presumimos existe, tuvo que jugar un papel importante en la evolución del Universo, ya que su interacción gravitatoria fué fundamental para que éste tenga la estructura que actualmente se observa. Si esta materia es de origen bariónico, los bariones extra invalidarían una parte importante de la teoría que explica las proporciones de los elementos detectados en la materia luminosa. Este equilibrio ha sido calculado como una consecuencia de la síntesis de los núcleos atómicos en el Universo primitivo. Este es una de las razones por las cuales se cree que la materia oscura es de origen no bariónico.

Otro de los candidatos para constituir a los halos son los neutrinos que interactúan muy débilmente con la materia ordinaria lo que los hace difíciles de detectar.

Sabemos que una partícula puede ser atrapada gravitacionalmente por otro cuerpo de masa  $M$  y radio  $R$  si su velocidad es menor que la velocidad de escape

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para galaxias típicas con  $M \sim 10^{11}M_{\odot}$  y  $R \sim 10(kpc)$ , obtenemos  $v_{esc} \sim 10^{-3}(\frac{m}{g})$ . Si los neutrinos tienen masa, se volvieron no relativistas en algún momento de la evolución cosmológica y fueron atrapados por las galaxias, formando el halo oscuro. Para que esto pase, hay una condición que tiene que ser satisfecha [35]. Y viene del hecho de que los neutrinos son fermiones, y por lo tanto, no puede haber más de un neutrino en una unidad de volumen en el espacio fase. Como la velocidad máxima que pueden alcanzar al estar atrapados en una galaxia es  $v_{esc}$ , el momento máximo es  $m_{\nu}v_{esc}$  para la masa del neutrino  $m_{\nu}$ . En una esfera de radio  $R$  en el espacio fase tenemos que:

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \cdot \frac{4\pi}{3}(m_{\nu}v_{esc}),$$

La masa total de los neutrinos está acotada por

$$M < \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 m_{\nu}^4 (2GM R)^{\frac{3}{2}},$$

utilizando la expresión para la velocidad de escape. Entonces

$$m_{\nu} \geq (G^3 R^3 M)^{-\frac{1}{8}}.$$

Como ya se mencionó antes, la materia no luminosa constituye la parte principal de la masa de la galaxia, entonces, en primera instancia, un valor para  $M$  en esta ecuación que funcionara como límite inferior, puede ser el valor de la masa luminosa que es del orden de  $10^{11}M_{\odot}$ , utilizando  $R \simeq 10kpc$ , obtenemos

$$m_{\nu} \geq 10eV.$$

Este límite inferior, se encuentra muy por abajo de las cotas superiores obtenidas en las masas de  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ , y por lo tanto, estos últimos podrían formar los halos oscuros de las galaxias. Las cotas superiores más recientes para cada uno de los neutrinos son [44]:

$$m_{\nu_e} < 2.2eV$$

$$m_{\nu_\mu} < 170keV$$

$$m_{\nu_\tau} < 18MeV$$

En el modelo del big-bang, el Universo se asume como homogéneo e isotrópico. Las observaciones de la radiación de fondo indican que esto es probablemente cierto a gran escala. Sin embargo, la suposición de homogeneidad no es válida a escalas pequeñas donde podemos ver estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias con un vasto espacio vacío en medio. Uno se puede preguntar como se formaron éstas estructuras si el Universo primigenio era isotrópico.

Se puede considerar que el Universo temprano tuvo fluctuaciones muy pequeñas de densidad a todas las escalas. El origen de estas fluctuaciones puede ser explicado con modelos inflacionarios. Una vez que las fluctuaciones están ahí, pueden aumentar o desaparecer dependiendo de su tamaño y de la dinámica del Universo. En el momento en que se forman los átomos (era de la recombinación), la densidad de la fluctuación de los fotones tiene que ser relacionada con la de los bariones. Las observaciones en la radiación de fondo indican que [36]

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_\gamma \leq 10^{-4}.$$

A partir de este valor, las perturbaciones bariónicas pudieron crecer en la era de la recombinación. Pero el universo es dominado por la materia en éste tiempo, y las perturbaciones crecen como el factor de escala  $a$ . Como  $z \sim 10^{-3}$  en la era de la recombinación, la densidad de las perturbaciones puede crecer hasta  $10^{-1}$ , pero como el espacio intergaláctico es casi vacío

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) \simeq 1$$



en el universo presente. Esta discrepancia indica que la materia no bariónica es un factor muy importante en la dinámica del universo.

Si los neutrinos masivos dominaran la densidad de energía del universo, el escenario de formación de estructura sería muy distinto. Mientras los neutrinos son relativistas, las fluctuaciones no pueden crecer [37], lo cual se detiene en la era en que los neutrinos se vuelven no relativistas. Se puede ver [36] que las primeras estructuras en formarse en un universo dominado por los neutrinos serían los supercúmulos de galaxias.

Las galaxias tienen masas típicas del orden de  $10^{11} M_{\odot}$ . Ellas se pueden formar cuando el tamaño de las estructuras de los supercúmulos evoluciona para desarrollar inestabilidades gravitacionales [38]. Simulaciones numéricas, indican sin embargo, que les toma un tiempo muy largo crecer a estas inestabilidades, así que las galaxias sólo se pueden formar en el tiempo en que [39]  $z < 2$ . Sin embargo, a partir de los valores dados de distintas formas de medir las edades de las galaxias, se puede saber cuales de ellas fueron formadas a  $z > 3$ . Pricipalmente, debido a esta discrepancia, la posibilidad de un universo dominado por neutrinos masivos es poco probable aún.

Otro de los más recientes candidatos es el Dilatón, una partícula que aparece en todos los modelos y teorías modernas de unificación (Kaluza-Klein, supergravedad y supercuerdas). Trabajos recientes han propuesto al dilatón como constituyente de la materia oscura entre los que destacan Y.M. Cho y Y.Y. Keum que encontraron que el dilatón puede actuar como materia oscura si su masa es de 0.5 keV o 270 MeV. Para otros valores de masa el dilatón podría cerrar o no el Universo. En otro trabajo [26] se pone de manifiesto que el dilatón puede realmente jugar el papel de materia oscura a escalas galácticas. Se propone un modelo para la materia oscura en las galaxias espirales, en el cual se supone que la materia oscura es un campo escalar (el dilatón, el cual aparece como el campo escalar necesario en las teorías de unificación) dotado de un potencial escalar.

Dentro de los datos experimentales que resulta necesario considerar para imponer restricciones al tipo de modelos que se utilizan para describir al Universo, uno de los más importantes lo constituyen las supernovas tipo Ia. Este tipo de eventos cósmicos proveen de información sobre las medidas de la densidad de masa  $\Omega_M$ , y la densidad de energía asociada a la constante cosmológica,  $\Omega_{\Lambda}$ , del universo basándose en el análisis de las supernovas tipo

1a [47]. La magnitud del corrimiento al rojo o redshift de éstas supernovas (entre 0.18 y 0.83), se utiliza para dar valores a los parámetros cosmológicos.

Desde los primeros estudios de las supernovas, se ha sugerido que estos eventos luminosos pueden ser usados como “velas estándar” para medidas cosmológicas (Baade 1938). A distancias cortas podrían ser usadas para medir la constante de Hubble si se pudiera establecer una escala de medida absoluta, mientras que a altos redshifts podrían determinar el parámetro de desaceleración (Tammann 1979; Colgate 1979). La determinación de la constante de Hubble se volvió una posibilidad real en la década de los 80’s cuando la subclase más homogénea de supernovas tipo 1a (SNe 1a) fué identificada (Branch 1998). Los intentos para medir el parámetro de desaceleración, sin embargo, fueron infructuosos debido a la falta de supernovas de alto redshift. El proyecto Cosmológico de Supernovas empezó en 1988 con la intención de determinar los parámetros cosmológicos del universo utilizando la relación entre magnitud y redshift de las supernovas tipo 1a. En particular, Goobar y Perlmutter (1995) mostraron la posibilidad de separar las contribuciones relativas de la densidad de masa  $\Omega_M$ , y la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$  contra cambios en la tasa de expansión estudiando supernovas en el rango de los redshifts. Dentro de los resultados obtenidos [47], se encuentra lo siguiente; Las regiones mostradas en la figura 1.2 y la gráfica residual de la figura 1.3(b) llevan a considerar que si las teorías inflacionarias son correctas y el universo es espacialmente plano, entonces los datos de las supernovas implican que hay un valor significativo y positivo de la constante cosmológica. Entonces, el universo puede ser plano, o puede haber un valor pequeño o cero de la constante cosmológica, pero los datos no son consistentes con las dos posibilidades simultáneamente.

Los datos indican directamente la edad del universo relativo al tiempo de Hubble,  $H_0$ . La figura 1.4 muestra que las regiones  $\Omega_M - \Omega_\Lambda$  son casi paralelas a contornos que corresponden a la misma edad. Para cualquier valor de la constante de Hubble menor que  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , la edad del universo es mayor que 13 Gyr, (giga años), dando así, suficiente tiempo a las estrellas más viejas en los cúmulos globulares a evolucionar (Chaboyer et al. 1998; Gratton et al. 1997). Integrando sobre  $\Omega_M$  y  $\Omega_\Lambda$ , el mejor valor para la edad del universo en unidades de tiempo de Hubble es  $H_0 t_0 = 0.93_{-0.06}^{+0.06}$  o equivalentemente  $t_0 = 14.5_{-1.0}^{+1.0} (\frac{0.63}{h}) \text{ Gyr}$ . La edad sería más grande en un universo plano:  $H_0 t_0^{\text{plano}} = 0.96_{-0.07}^{+0.09}$  o equivalentemente  $t_0^{\text{plano}} = 14.9_{-1.1}^{+1.4} (\frac{0.63}{h}) \text{ Gyr}$ .

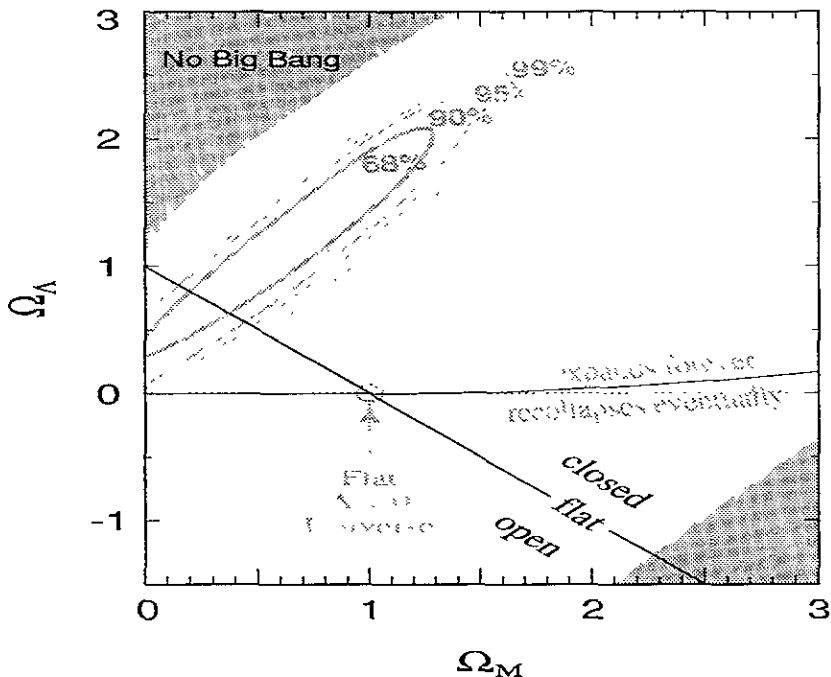


Figura 1.2: Regiones de mejor ajuste en el plano  $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ . Perlmutter, et al. 1998.

Aún si el universo no es plano, las regiones de la figura 1.2 sugieren que la constante cosmológica es un constituyente significativo de la densidad de energía del universo. El mejor modelo indica que la densidad de energía en la constante cosmológica es  $\sim 0.5$  más que aquella en la forma de densidad de masa energía. Si el universo tuviera una constante cosmológica  $\Lambda = 0$ , entonces habría que tomar en cuenta algún efecto adicional o “conspiración” de efectos estadísticos que estarían operando, lo que haría que el efecto de las supernovas de alto redshift apareciera 0.15 mag ( $\sim 15$  en flujo) más débil que las supernovas de bajo redshift. De éste análisis [47], [48] se observa que un universo plano requiere de una constante cosmológica, y sólo una pequeña región espacial de baja densidad de masa, podría permitir  $\Lambda = 0$ .

Para imponer cotas a la cantidad de materia oscura fría que puede encontrarse en el Universo, actualmente se utilizan las constricciones impuestas

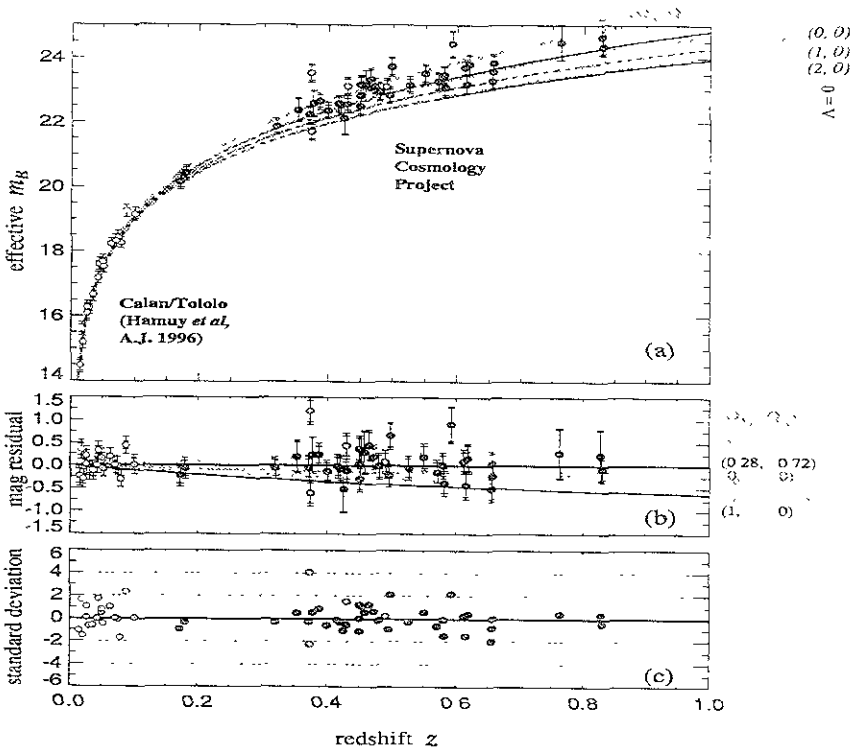


Figura 1.3: Diagrama de Hubble para 42 supernovas tipo 1a de alto redshift. Perlmutter et al. 1998.

sobre parámetros cosmológicos a partir del experimento MAXIMA [45], en donde se usa el espectro angular de potencia de la radiación cósmica de fondo correspondiente a la región de las microondas, junto con los resultados que también provee el COBE/DMR. El espectro angular de potencia de la radiación cósmica de fondo (CMB) de las anisotropías en la temperatura, depende fuertemente de los valores de muchos de los parámetros cosmológicos y de los procesos físicos en el Universo temprano [45]; es por lo tanto, una herramienta poderosa para acotar a los modelos cosmológicos. Utilizando un modelo inflacionario adiabático, se ha encontrado lo siguiente [45], [46]:  $\Omega = 1.0^{+0.15}_{-0.30}$ ,  $\Omega_b h^2 = 0.03 \pm 0.01$ ,  $\Omega_{cdm} h^2 = 0.2^{+0.2}_{-0.1}$ , con un 95% de confianza. Estas constricciones son consistentes con otras realizadas en análisis recientes (Melchiorri et al. 1999; Dodelson and Knox 1999; Tegmark and

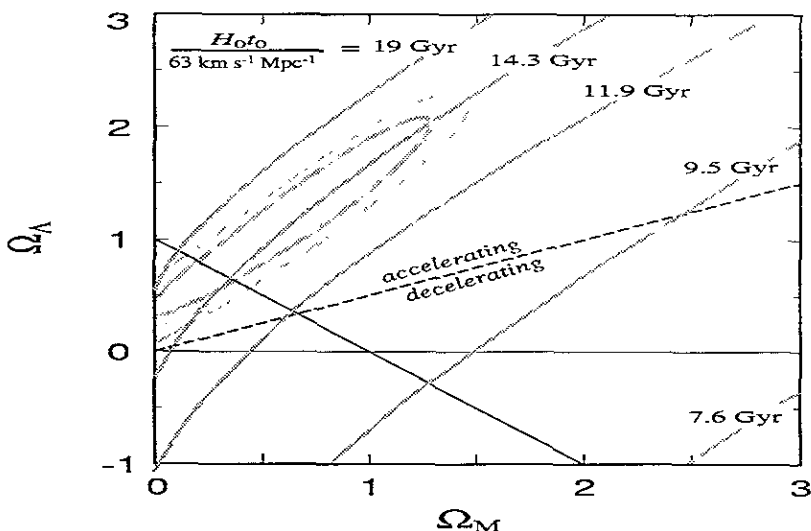


Figura 1.4: Isócronas para  $H_0 t_0$  constante, la edad del universo relativa al tiempo de Hubble  $H_0$ . Balbi et al. 2001

Zaldarriaga 2000; Lange et al. 2000) y dan un soporte sólido a la idea de un Universo plano.

La posición del primer pico en el espectro de potencia angular de los modelos adiabáticos puede ser usado para constreñir la geometría del universo (Doroshkevich, Zel'dovich and Sunyaev 1978). Los perfiles en los patrones de radiación correspondientes a la era de la recombinación, están establecidos por la distancia máxima que las ondas del sonido han viajado en esa época. La relación diámetro-distancia nos permite relacionar la escala física de esos perfiles con el ángulo que subtendían en el cielo lo cual depende fuertemente de la curvatura del universo, que es determinada por la densidad total de energía del universo  $\Omega \equiv \Omega_M + \Omega_\Lambda$ . Otros parámetros cosmológicos tienen mucha menos influencia en esta relación.

La figura 1.6 muestra el perfil de la densidad total de energía del universo,  $\Omega$ . La línea sólida se obtiene al maximizar sobre el resto de los demás parámetros

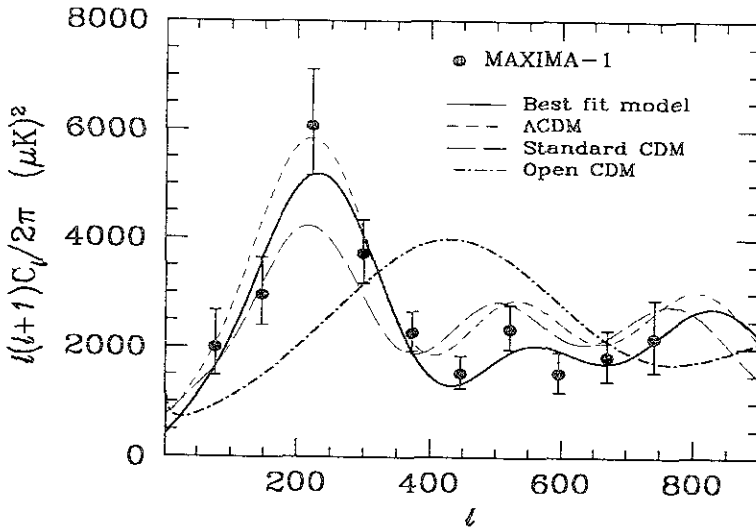


Figura 1.5: Espectro de Potencia Angular a partir de MAXIMA-1 (Hanany et al. 2000). La línea sólida corresponde al modelo usado en [45]. La línea a rayas largas corresponde al modelo estándar de materia oscura fría (CDM). La línea a rayas cortas es el modelo de Constante cosmológica y CDM. La línea punteada corresponde al modelo CDM abierto con la densidad igual a 0.3.

cosmológicos [45]; la línea punteada es obtenida al imponer la restricción del big bang nucleosíntesis (BBN)  $\Omega_b h^2 = 0.0190 \pm 0.0024$  (Burles et al. 1999, Tytler et al. 2000), y restringir  $H_0 = 65 \pm 7 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (Freedman 1999). A partir de la línea sólida vemos que  $0.7 < \Omega < 1.15$  con un nivel del 95% de confianza.

En la figura 1.7 se grafican otros parámetros cosmológicos que son acotados por las observaciones [45], tales como la densidad física de bariones,  $\Omega_b h^2$ , la densidad física de materia oscura fría,  $\Omega_{cdm} h^2$ , y el índice espectral de las fluctuaciones primordiales escalares,  $n_s$ . El perfil para cada parámetro fue obtenido al maximizar sobre el resto de los parámetros restantes. Se ha

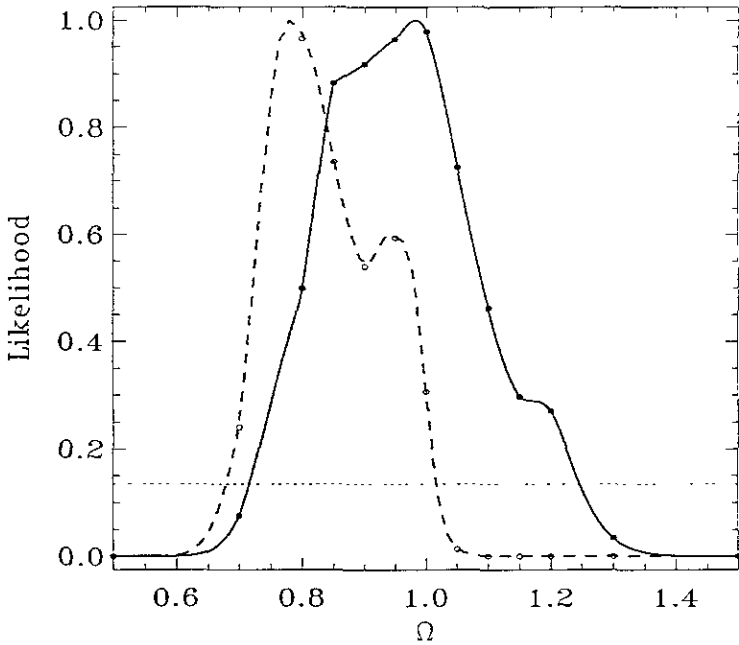


Figura 1.6: Densidad Total de energía del Universo. Balbi et al. 2001

encontrado [45] que:  $0.02 < \Omega_b h^2 < 0.04$ ,  $0.1 < \Omega_{cdm} h^2 < 0.4$ , y  $0.98 < n_s < 1.18$ , todo con el 95% de confianza. La restricción sobre  $\Omega_b h^2$  es independiente de la que viene de BBN (Burles et al. 1999). Sin embargo, éste valor es mucho más grande que aquél otro, el imponer la condición de BBN tiene el efecto de mover la región más ajustable hacia los modelos abiertos (ver figura 1.6). La restricción sobre  $n_s$  indica que la combinación de los datos de MAXIMA-1 y COBE/DMR son consistentes con un espectro invariante de escala.

Uno de los desarrollos más interesantes que han surgido en la cosmología observacional es la posible existencia de una componente suave de presión negativa, por ejemplo una constante cosmológica, resultando en una expansión acelerada del universo (Perlmutter et al. 1999, Riess et al. 1998). Mientras que los datos del CMB son preponderantes para acotar la densidad total de energía del universo, la determinación precisa e independiente de  $\Omega_M$  y  $\Omega_\Lambda$  es limitada por la presencia de la degeneración geométrica discutida por Efstat-

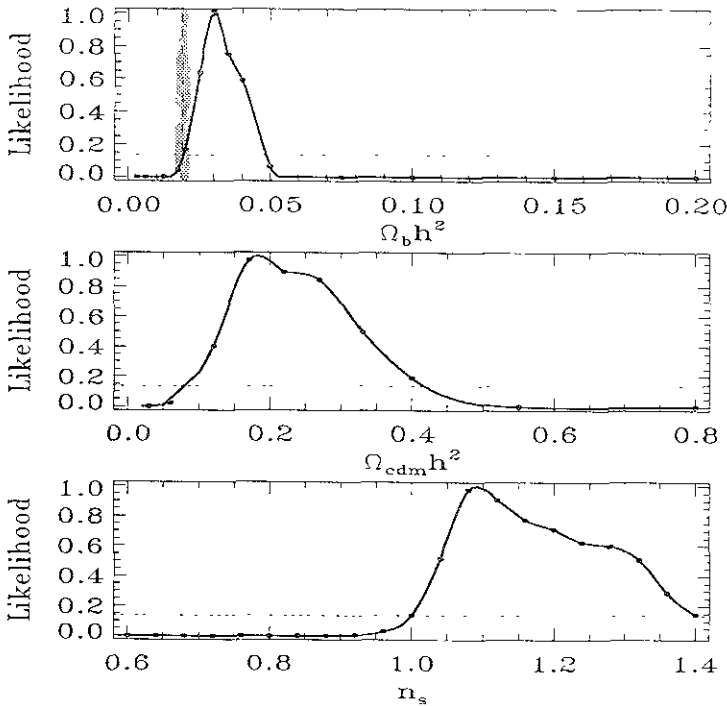


Figura 1.7: Tres parámetros cosmológicos; densidad de Bariones, la densidad de materia oscura fría (CDM), y el índice escalar espectral  $n_s$ . Balbi et al. 2001

chiu y Bond (1999) (la cual puede ser rota si se detecta un lente gravitacional impreso en el CMB). De la figura 1.8 el hecho de que los datos de MAXIMA-1 se extiendan a valores grandes de  $l$ , ayuda a afilar los contornos a lo largo de la dirección de degeneración  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = \text{constante}$ . Sin embargo, una porción significativa del plano  $\Omega_M - \Omega_\Lambda$  es excluido, y se necesitaría de datos adicionales para romper la degeneración. Los resultados de MAXIMA-1 son sobrepuestos a los perfiles de los datos encontrados para las supernovas de alto redshift [47] y Riess et al. (1998) y se calculan los perfiles combinados. Las cotas resultantes son  $0.45 < \Omega_\Lambda < 0.75$  y  $0.25 < \Omega_M < 0.50$ , con el 95% de confianza.



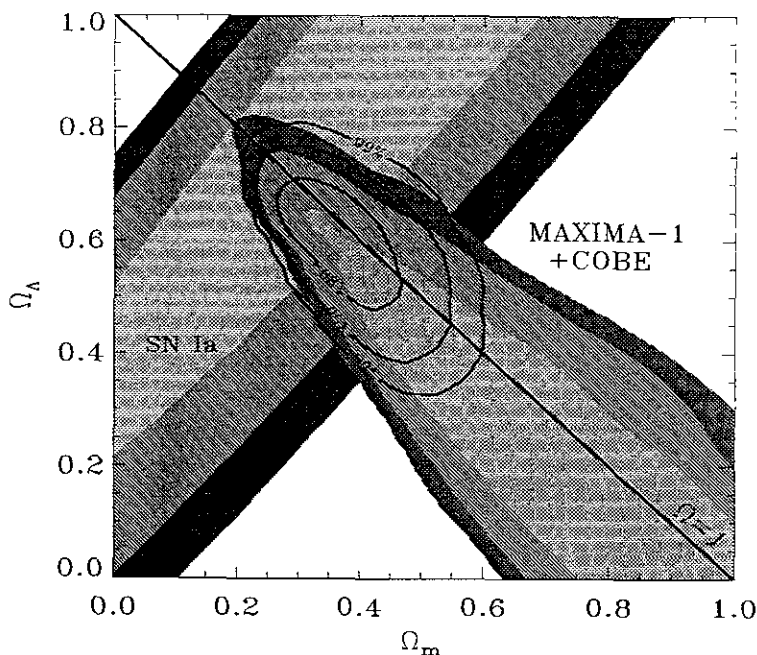


Figura 1.8: Constricciones sobre las densidades de materia y constante cosmológica impuestas por los datos de MAXIMA-1 y COBE/DMR. Balbi et al. 2001

Como hemos visto a lo largo de éste capítulo, la presencia de materia oscura en el Universo es totalmente aceptada por los cosmólogos de hoy, y su existencia está respaldada por las observaciones hechas durante los últimos 60 años. Si aceptamos que las perturbaciones apreciadas en galaxias y cúmulos de galaxias son debidas puramente a efectos gravitacionales, cabría esperar que estos fueran causados por la presencia de enormes cantidades de materia no luminosa, la cual no hemos sido capaces de detectar; materia oscura, que interactúa débilmente con la materia común, razón por la que aún no hemos podido detectarla. Debe estar agrupada de tal forma que cause que las curvas de rotación de las galaxias sean aproximadamente planas a partir de cierto radio de las mismas. También debe ser capaz de explicar la estructura y estabilidad de los cúmulos galácticos.

# Capítulo 2

## Condiciones Geométricas

En éste capítulo estudiaremos, entre otros aspectos, las condiciones que la restricción sobre la velocidad tangencial impone sobre los coeficientes métricos, los resultados que se presentan en ésta sección son independientes del tensor de energía materia que se encuentra en el espacio tiempo curvándolo, por lo tanto, el siguiente es un análisis puramente geométrico.

Como se mencionó en el primer capítulo, los datos observacionales muestran que las galaxias están compuestas por casi 90% de materia oscura. Por lo tanto, podemos suponer que contribuye en una forma significativa a la densidad total de energía de la galaxia en la región donde las curvas de rotación observan el comportamiento descrito anteriormente. En forma consistente con lo anterior, consideraremos que la materia oscura es el factor determinante en la dinámica, y trataremos a la materia luminosa como un fluido de prueba, es decir, consideraremos que no afecta al espacio tiempo de fondo. Además, supondremos que el halo de materia oscura es simétrico con respecto al eje de rotación de la galaxia, y ésto implica que estaremos tomando la simetría del espacio tiempo como axialmente simétrica. Además, las observaciones sobre el valor de la velocidad de rotación de las estrellas (objetos de prueba) en el plano galáctico nos permite considerar al espacio tiempo como estacionario. Por lo tanto, el espacio tiempo que vamos a estudiar es uno estacionario y axisimétrico. El elemento de línea de un espacio tiempo de este tipo esta dado por Papapetrou y es:

$$ds^2 = -e^{2\psi}(dt + \omega d\varphi)^2 + e^{-2\psi} [e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \mu^2 d\varphi^2], \quad (2.1)$$

donde  $\psi$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ , y  $\mu$ , son funciones de  $(\rho, z)$ , y las cantidades  $t$ ,  $\varphi$ ,  $\rho$  y  $z$  son las

coordenadas del espacio tiempo.

Como mencionamos antes, ahora realizaremos un análisis dinámico en éste elemento de línea que nos permita encontrar las expresiones para la energía y el momento angular de las partículas de prueba que se están moviendo en geodésicas circulares y la condición que los coeficientes métricos deben cumplir para poder obtener el movimiento observado en el plano ecuatorial es  $z = \dot{z} = 0$ , donde el punto significa la derivada con respecto al tiempo propio  $\tau$ . En esta sección derivaremos las expresiones para el espacio tiempo estático y en el apéndice 3 lo haremos para el caso estacionario. Esto lo hacemos considerando que la velocidad observada en las estrellas que orbitan una galaxia en la región de nuestro interés no es relativista (del orden de 230 Km/seg.), de lo que podemos inferir que el espacio tiempo (curvado por la materia oscura), no se encuentra rotando rápidamente.

Para describir el movimiento de una partícula de prueba moviéndose en el espacio tiempo descrito por la métrica (2.1), consideramos primero el Lagrangiano dado por la misma en el caso en que  $\omega = 0$ , esto es, para el caso estático:

$$2\mathcal{L} = -e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi}[e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + \mu^2\dot{\varphi}^2], \quad (2.2)$$

El punto se refiere a la derivada respecto al tiempo propio  $\tau$  y los momentos canónicos asociados están dados por  $p_{x^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}$ , y son:

$$\begin{aligned} p_t = -E &= -e^{2\psi}\dot{t}, \\ p_\varphi = L &= \mu^2 e^{-2\psi}\dot{\varphi}, \\ p_\rho &= e^{-2(\psi-\gamma)}\dot{\rho}, \\ p_z &= e^{-2(\psi-\gamma)}\dot{z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde gracias a las simetrías del espacio tiempo que estamos considerando,  $E$ , y  $L$ , son constantes de movimiento para cada geodésica. De las ecuaciones anteriores, podemos expresar a las cantidades  $\dot{t}$ , y  $\dot{\varphi}$  en términos de  $E$ ,  $L$ , y los coeficientes métricos como

$$\begin{aligned} \dot{t} &= e^{-2\psi}E, \\ \dot{\varphi} &= \frac{e^{2\psi}}{\mu^2}L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como no hay una dependencia explícita sobre el tiempo  $t$  en los coeficientes métricos, el Hamiltoniano,  $\mathcal{H} = p_a \dot{x}^a - \mathcal{L}$ , es otra cantidad conservada, la cual normalizaremos para que sea igual a  $-\frac{1}{2}$  para las geodésicas tipo tiempo. Además restringiremos el movimiento al plano ecuatorial, esto es  $\dot{z} = 0$ . De ésta manera obtenemos la siguiente ecuación para el movimiento geodésico radial:

$$\dot{\rho}^2 - e^{2(\psi-\gamma)} [E\dot{t} - L\dot{\varphi} - 1] = 0. \quad (2.5)$$

Considerando el hecho de que queremos analizar movimientos circulares estables para los objetos de prueba, las siguientes tres condiciones tienen que ser satisfechas para poder conseguirlo:

i)  $\dot{\rho} = 0$ ,

ii)  $\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} = 0$ , donde  $V(\rho) = -e^{2(\psi-\gamma)} [E\dot{t} - L\dot{\varphi} - 1]$ , y

iii)  $\frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial \rho^2} |_{extr} > 0$ , para estar en un mínimo.

Con estas tres condiciones, de la Ec.(2.5), obtenemos un conjunto de dos ecuaciones que están restringiendo el movimiento a ser circular en el plano ecuatorial, de las dos primeras tenemos que:

$$\begin{aligned} E\dot{t} - L\dot{\varphi} - 1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( e^{2(\psi-\gamma)} [E\dot{t} - L\dot{\varphi} - 1] \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando las ecuaciones (2.4) en las de restricción y recordando que  $E$  y  $L$  son constantes para cada órbita circular, podemos llegar a que:

$$\mu^2 e^{-2\psi} (1 - e^{-2\psi} E^2) + L^2 = 0, \quad (2.7)$$

$$-(e^{-2\psi})_{,\rho} E^2 + \left( \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} \right)_{,\rho} L^2 = 0, \quad (2.8)$$

donde el subíndice se refiere a la derivada respecto a  $\rho$ . Resolviendo para  $E$  y  $L$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= e^\psi \sqrt{\frac{\frac{\mu_\rho}{\mu} - \psi_\rho}{\frac{\mu_\rho}{\mu} - 2\psi_\rho}}, \\
 L &= \mu e^{-\psi} \sqrt{\frac{\psi_\rho}{\frac{\mu_\rho}{\mu} - 2\psi_\rho}}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

La segunda derivada para el potencial  $V(\rho)$  evaluada en el extremo, en éste caso significa evaluar en los valores de  $E$  y  $L$  que restringen al movimiento a ser circular y extremal, está dada por:

$$V_{\rho\rho}|_{extr} = \frac{2e^{2(\psi-\gamma)}}{\frac{\mu_\rho}{\mu} - 2\psi_\rho} \left( \frac{\mu_\rho}{\mu} \psi_{\rho\rho} - \frac{\mu_{\rho\rho}}{\mu} \psi_\rho + 4\psi_\rho^3 - 6\frac{\mu_\rho}{\mu} \psi_\rho^2 + 3 \left( \frac{\mu_\rho}{\mu} \right)^2 \psi_\rho \right) \tag{2.10}$$

Ahora podemos obtener una expresión para la velocidad angular de una partícula de prueba,  $\Omega$ , moviéndose circularmente en el plano ecuatorial, en términos de los coeficientes métricos y siguiendo a Chandrasekhar [14]:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}}, \tag{2.11}$$

y usando las Ecs. (2.4) y (2.9), en ésta última ecuación para la velocidad angular, obtenemos que:

$$\Omega = \frac{e^{2\psi}}{\mu} \sqrt{\frac{\psi_\rho}{\frac{\mu_\rho}{\mu} - \psi_\rho}}. \tag{2.12}$$

Para poder expresar la velocidad tangencial de las partículas de prueba que se están moviendo en órbitas circulares estables en el plano ecuatorial en términos de los coeficientes métricos, necesitamos encontrar una expresión para la misma, y nuevamente, siguiendo a Chandrasekhar [14], podemos reescribir el elemento de línea dado en la Ec.(2.1) como:

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} \mu^2 d\varphi^2 + e^{-2(\psi-\gamma)}(d\rho^2 + dz^2), \tag{2.13}$$

y en términos del tiempo propio,  $d\tau^2 = -ds^2$ , tenemos que

$$d\tau^2 = e^{2\psi} dt^2 \left[ 1 - e^{-4\psi} \mu^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - e^{2\gamma} e^{-4\psi} \left( \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right], \quad (2.14)$$

de lo cual podemos escribir que

$$1 = e^{2\psi} u^{0^2} [1 - v^2], \quad (2.15)$$

donde  $u^0 = \frac{dt}{d\tau}$  es la componente temporal de la cuatrivelocidad, y la velocidad espacial,  $v^2$ , es de esta manera:

$$v^2 = e^{-4\psi} \mu^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + e^{2\gamma} e^{-4\psi} \left( \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right). \quad (2.16)$$

Ésta velocidad espacial es la 3-velocidad de una partícula medida respecto a un sistema ortonormal (ver Sección 52 de [14]), con componentes:

$$v^2 = v^{(\varphi)^2} + v^{(\rho)^2} + v^{(z)^2}. \quad (2.17)$$

De éstas dos últimas expresiones obtenemos para la componente  $\varphi$ — la velocidad espacial:

$$v^{(\varphi)} = e^{-2\psi} \mu \Omega, \quad (2.18)$$

y sustituyendo  $\Omega$  de la Ec.(2.12), finalmente obtenemos una expresión para la velocidad tangencial de una partícula de prueba en movimiento circular estable, en términos de los coeficientes métricos del elemento de línea general dado por la Ec.(2.1), y esta velocidad tangencial tiene la forma:

$$v^{(\varphi)} = \sqrt{\frac{\psi_\rho}{\mu} - \psi_\rho}. \quad (2.19)$$

Dado que hemos obtenido una expresión para la velocidad tangencial en términos de los coeficientes métricos, ahora nos es posible imponer la condición observada sobre la misma para la región en que estamos centrando nuestro análisis, es decir que sea independiente del radio, lo cual nos permite llegar a una ecuación de restricción para los coeficientes métricos que usaremos dentro de las ecuaciones de Einstein para analizar los distintos tipos de materia que consideraremos como candidatos a formar la materia

obscura. En particular, la velocidad tangencial para trayectorias circulares en cada órbita es constante, esto es  $v^{(\varphi)}_{,\rho} = 0$ , entonces  $v^{(\varphi)} = v_c^{(\varphi)}$ , con  $v_c^{(\varphi)}$  una constante, representando el valor de la velocidad, de la Ec. (2.19), tenemos que:

$$\frac{\mu_{\rho}}{\mu} = \frac{1 + v_c^{(\varphi)2}}{v_c^{(\varphi)2}} \psi_{\rho}. \quad (2.20)$$

Para considerar el movimiento respecto a  $z$ , dado que en el plano ecuatorial no solamente  $\dot{z} = 0$ , sino que además  $\ddot{z} = 0$ , de la ecuación geodésica para  $z$ , usando la Ec.(2.20), obtenemos que esta relación sobre los coeficientes métricos debe mantenerse para las derivadas con respecto a  $z$ :

$$\frac{\mu_z}{\mu} = \frac{1 + v_c^{(\varphi)2}}{v_c^{(\varphi)2}} \psi_z. \quad (2.21)$$

De ésta manera, llegamos a la siguiente condición: si las Ecs. (2.20), (2.21) se satisfacen, entonces la velocidad tangencial para órbitas estables en el plano ecuatorial es constante. Esto es, si la velocidad tangencial para órbitas circulares estables en el plano ecuatorial es constante, entonces los coeficientes métricos tienen que satisfacer las Ecs. (2.20), (2.21). Notamos que si la funciones  $\psi$  y  $\mu$  están relacionadas por

$$e^{\psi} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^l. \quad (2.22)$$

con  $l = const$ , obtenemos que ésta es una relación necesaria y suficiente para la velocidad  $v_c^{(\varphi)}$  la cual será la misma para dos órbitas a distintos radios en el plano ecuatorial, dando que

$$l = \frac{(v_c^{(\varphi)})^2}{(1 + (v_c^{(\varphi)})^2)}.$$

La ecuación (2.22) es la condición que nos permite encontrar una restricción sobre los coeficientes métricos de tal manera que obtengamos el movimiento observado sobre las partículas de prueba en el plano ecuatorial, posteriormente, utilizaremos esta relación entre ambos dentro de las ecuaciones de campo para analizar los distintos tensores de energía materia. El movimiento analizado es determinado sólo por dos coeficientes métricos, que ahora se

encuentran relacionados por ésta última ecuación, Ec.(2.21), dejando el problema en términos de sólo uno de ellos. En la siguiente sección será posible apreciar el hecho de que  $\gamma$  queda determinada por los otros dos coeficientes y algunas componentes de la materia presente en el espacio tiempo, cuando analicemos las ecuaciones de campo, lo cual implicará que no es una función independiente.

Utilizando la Ec.(2.22), podemos substituir la expresión para  $e^\psi$  dentro del elemento de línea, de lo cual vemos que nos faltan por determinar dos coeficientes más, y para tener velocidades tangenciales de objetos circulando en el plano ecuatorial de las galaxias, cuya magnitud sea independiente del radio, la forma de elemento de línea para esta región tiene que ser:

$$ds^2 = - \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{2l} dt^2 + \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-2l} \left[ e^{2\gamma} d\rho^2 + \mu^2 d\varphi^2 \right]. \quad (2.23)$$

Podemos notar que este espacio tiempo no es asintóticamente plano ni tiene la forma asociada a un agujero negro central, lo que podemos decir es que describe la región en que las curvas de rotación son constantes, y que posteriormente tendrá que ser unido en las regiones internas y externas a otros elementos de línea que las describan apropiadamente.

Tomando en cuenta la restricción entre  $\psi$  y  $\mu$  dada por la Ec.(2.22), la energía, el momento angular, la velocidad rotacional, y la segunda derivada del potencial tienen las expresiones finales:

$$E = \frac{\left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^l}{\sqrt{l_-}}, \quad (2.24)$$

$$L = \frac{\mu_0 v_c^{(\varphi)} \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-1/l_+}}{\sqrt{l_-}}, \quad (2.25)$$

$$\Omega = \frac{v_c^{(\varphi)}}{\mu_0} \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-l_-/l_+}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial \rho^2} \Big|_{extr} = 2 e^{2(\psi-\gamma)} \frac{l_+ - l_-}{l_+^2} \left( \frac{\mu_\rho}{\mu} \right)^2. \quad (2.27)$$

con  $l_+ = 1 + (v_c^{(\varphi)})^2$  y  $l_- = 1 - (v_c^{(\varphi)})^2$ .



Notamos que la segunda derivada del potencial evaluada en el extremo es siempre positiva, entonces, las curvas circulares en el ecuador con velocidad tangencial constante son estables.

Ahora pasaremos a analizar las ecuaciones de Campo.

## 2.1 Ecuaciones de Campo

Ahora podemos examinar cualquier tipo de materia para determinar si puede ser o no la que produzca la curvatura en el espacio tiempo tal que el movimiento de las partículas de prueba puede ser circular y estable, además de que su velocidad tangencial es constante para una región radial grande en el plano ecuatorial.

Obtenemos la forma general para el tensor de Einstein para el espacio tiempo axisimétrico descrito por la Ec. (2.1), con  $\omega = 0$ , y lo igualamos a un tensor arbitrario de momento y energía. Después de ciertas manipulaciones [13], concluimos que las ecuaciones de campo son un conjunto de dos ecuaciones que contienen a los coeficientes métricos  $\psi$ , y  $\mu$ , (ver Apéndice D):

$$\mu(\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz}) + \mu_{\rho}\psi_{\rho} + \mu_z\psi_z = 4\pi\mu[e^{-2(\psi-\gamma)}(e^{-2\psi}T_{tt} + \frac{e^{2\psi}}{\mu^2}T_{\varphi\varphi}) + T_{\rho\rho} + T_{zz}], \quad (2.28)$$

$$\mu_{\rho\rho} + \mu_{zz} = 8\pi\mu[T_{\rho\rho} + T_{zz}] \quad (2.29)$$

Además, hay dos ecuaciones de primer orden para el otro coeficiente  $\gamma$ :

$$\gamma_{\rho}\mu_{\rho} - \gamma_z\mu_z - \mu(\psi_{\rho}^2 - \psi_z^2) + \mu_{zz} = 8\pi\mu T_{\rho\rho}, \quad (2.30)$$

$$\gamma_{\rho}\mu_z + \gamma_z\mu_{\rho} - 2\mu\psi_{\rho}\psi_z - \mu_{\rho z} = 8\pi\mu T_{\rho z}, \quad (2.31)$$

y finalmente, las ecuaciones de campo nos dan otra ecuación para las segundas derivadas de  $\gamma$  que resulta redundante, la ecuación es:

$$\gamma_{\rho\rho} + \gamma_{zz} + (\psi_{\rho})^2 + (\psi_z)^2 = 8\pi\frac{e^{2\gamma}}{\mu^2}T_{\varphi\varphi}. \quad (2.32)$$

El análisis presentado en esta última sección es exacto y las relaciones entre los coeficientes métricos y sus primeras derivadas debe satisfacerse en el plano ecuatorial para describir el movimiento observado en la región que estamos analizando. Usando las ecuaciones de Einstein, necesitamos las segundas derivadas de éstos coeficientes. Aquí, tenemos que hacer la aproximación de que las relaciones obtenidas para ellos, se sigue cumpliendo para una región cercana al plano ecuatorial. Con esta aproximación y de las ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.22), se puede obtener la siguiente expresión:

$$\mu(\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz}) + \mu_\rho \psi_\rho + \mu_z \psi_z = (v_c^{(\varphi)})^2 / \left(1 + (v_c^{(\varphi)})^2\right) (\mu_{\rho\rho} + \mu_{zz}). \quad (2.33)$$

Entonces, con esta última relación, de las ecuaciones de Einstein, Ecs. (2.28) y (2.29) obtenemos una constricción sobre las componentes del tensor de energía momento la cual, con la aproximación hecha en las Ecs.(2.20), (2.21), (2.22) fuera del plano ecuatorial, tiene que ser cumplida por cualquier tipo de materia para tener velocidades tangenciales constantes en las regiones externas de la galaxia:

$$-\left(\frac{1 - (v_c^{(\varphi)})^2}{1 + (v_c^{(\varphi)})^2}\right) (T_{\rho\rho} + T_{zz}) = e^{-2(\psi-\gamma)} \left( e^{-2\psi} T_{tt} + \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} T_{\varphi\varphi} \right), \quad (2.34)$$

Además de la ecuación anterior, hay otra de las ecuaciones de campo que dá información sobre el tipo de materia que podría conformar a la materia oscura, la ecuación (2.31), en la cual podemos aplicar las condiciones de las Ecs.(2.20), (2.21), (2.22) por lo que llegamos a la siguiente expresión:

$$\gamma_\rho \mu_z + \gamma_z \mu_\rho - 2 \frac{\mu_\rho \mu_z}{\mu} \left( \frac{(v_c^{(\varphi)})^2}{1 + (v_c^{(\varphi)})^2} \right)^2 = 8\pi \mu T_{\rho z} \quad (2.35)$$

Esta ecuación, aplicada a los diferentes tipos de materia que ha continuación analizaremos resulta ser una constricción en todos los casos excepto para el campo escalar, debido a que su dependencia en las coordenadas  $(\rho, z)$  éste caso en particular dá como resultado que la componente del tensor de energía momento asociada a éstas coordenadas sea distinta de cero, por lo que, éste tendrá que dar alguna información extra respecto a la solución referente al campo escalar, así como a los demás casos aquí analizados. De igual forma,

habrá que considerar la información que la ecuación anterior aporta sobre la consistencia entre los casos del campo escalar y el fluido perfecto. Es decir, la analogía que existe entre ambos tendrá que ser sustentada a partir del análisis que arroje la consideración de ésta última ecuación.

Ahora pasamos a examinar varios tipos de materia descritos por sus respectivos tensores de energía, para ver si son capaces de deformar la geometría de tal manera que la velocidad tangencial en el plano ecuatorial para objetos rotando en él sea constante, esto es, que satisfagan la Ec.(2.34).

### 2.1.1 Vacío

Para el caso del vacío, con  $T_{\mu\nu} = 0$ , la Ec.(2.34) se satisface trivialmente, y procedemos a analizar las ecuaciones de Einstein directamente, de la Ec.(2.29), la solución mas fácil implica  $\mu = \rho$ . Y de la Ec.(2.28), obtenemos que  $\psi = l \ln \rho$  la otra ecuación de Einstein implica entonces que  $\gamma = l^2 \ln \rho$ , con  $l = (v_c^{(\varphi)})^2 / (1 + (v_c^{(\varphi)})^2)$ . De ésta manera, obtuvimos una solución para el vacío para las ecuaciones de Einstein que produce el que las partículas de prueba circulando en el plano ecuatorial se comporten de acuerdo a las observaciones:

$$ds^2 = -\rho^{2l} dt^2 + \rho^{-2l} (\rho^{2l^2} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2). \quad (2.36)$$

La singularidad en el valor  $\rho = 0$ , nos dice que el objeto central es de tipo cuerda, aunque la existencia de éste tipo de objetos no ha sido comprobada por las observaciones, éste resultado constituye un ejemplo de un tipo de objeto que podría producir el movimiento observado sobre las partículas de prueba y cuya densidad no vá como  $r^{-2}$ , porque se trata del vacío. Entonces, tal comportamiento en la densidad es una condición suficiente pero no necesaria para observar las curvas planas.

### 2.1.2 Fluido Perfecto

Para el fluido perfecto,  $T_{\mu\nu} = (d + p) u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} p$ , con  $d$  la densidad del fluido y  $p$  su presión. En este caso, estamos pensando en algo como un fluido oscuro, que podría estar compuesto de planetoides o WIMPS o MACHOS, que no se han observado pero que se piensa que podrían estar afectando la

geometría en la forma en que necesitamos para tener las observaciones de las velocidades tangenciales de la materia luminosa. Tomando a éste fluido oscuro como estático, la cuadrivelocidad está dada por  $u^\alpha = (u^0, 0, 0, 0)$  con el elemento de línea dado por la Ec.(2.1) con  $\omega = 0$ ,  $u^0 = E e^{-2\psi}$ , y  $L = 0$ . Entonces  $u_0 = -E$ , y de  $u_\alpha u^\alpha = -1$ , concluimos que  $E = e^\psi$ . El tensor de energía momento para el fluido oscuro tiene la forma:

$$T_{tt} = d E^2 = d e^{2\psi} \quad (2.37)$$

$$T_{\rho\rho} = T_{zz} = e^{-2(\psi-\gamma)} p, \quad (2.38)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \mu^2 e^{-2\psi} p. \quad (2.39)$$

Sustituyendo en la Ec.(2.34), obtenemos que en el plano ecuatorial para satisfacer el comportamiento observado en las velocidades tangenciales, el fluido perfecto tiene que satisfacer:

$$-2 \left( \frac{1 - (v_c^{(\varphi)})^2}{1 + (v_c^{(\varphi)})^2} \right) p = (d + p), \quad (2.40)$$

Entonces, obtenemos una ecuación de estado para las partículas del “fluido oscuro” en el plano ecuatorial:

$$p = -\frac{1 + (v_c^{(\varphi)})^2}{3 - (v_c^{(\varphi)})^2} d, \quad (2.41)$$

la cual, comparada con la ecuación de estado para un fluido perfecto,  $p = \omega d$ , implica que  $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$ , para  $v_c^{(\varphi)}$  entre la velocidad de la luz y cero. Este resultado coincide con el tipo de ecuación de estado derivada en el modelo de Quintaesencia [18, 19, 20, 21] a nivel cosmológico. Este tipo de materia ha sido llamado materia exótica [22] y estudiada en muchos contextos [23]. Nuestro resultado puntualiza el hecho de que la materia oscura podía ser exótica. Queremos remarcar que, debido a la aproximación tomada para el comportamiento de los coeficientes métricos fuera del plano ecuatorial, no estamos excluyendo la posibilidad de que la materia oscura esté compuesta de materia bariónica usual, de hecho, de la aproximación Newtoniana, sabemos que ésta materia puede producir éste tipo de movimiento. Éste hecho no se reproduce aquí, debido a la aproximación, sin embargo podemos concluir que la materia exótica también podría producir el movimiento observado.

### 2.1.3 Constante Cosmológica

Para una constante cosmológica,  $\Lambda$ ,  $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ . Tenemos  $T_{tt} = -e^{2\psi} \Lambda$ ,  $T_{\rho\rho} = T_{zz} = e^{-2(\psi-\gamma)} \Lambda$ ,  $T_{\varphi\varphi} = e^{-2\psi} \mu^2 \Lambda$ , y entonces, de la Ec.(2.34), obtenemos

$$\left( \frac{1 - (v_c^{(\varphi)})^2}{1 + (v_c^{(\varphi)})^2} \right) \Lambda = 0, \quad (2.42)$$

De ésta forma vemos que con nuestra aproximación, una constante cosmológica distinta de cero no puede explicar el comportamiento observado porque implicaría que la velocidad tangencial tendría que ser igual a 1, i.e., tendría que ser igual a la velocidad de la luz, y algo similar ocurre con el campo escalar.

### 2.1.4 Campo Escalar

Para el Campo Escalar  $\phi$  con potencial,  $T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + g_{\mu\nu} V(\phi)$ . Tenemos que, debido a la simetría de nuestro espacio tiempo  $\phi = \phi(\rho, z)$  las componentes de  $T_{\mu\nu}$  son:

$$T_{tt} = \frac{1}{2} e^{2(2\psi-\gamma)} (\phi_{,\rho}^2 + \phi_{,z}^2) - e^{2\psi} V(\phi), \quad (2.43)$$

$$T_{\rho\rho} = \frac{1}{2} (\phi_{,\rho}^2 - \phi_{,z}^2) + e^{-2(\psi-\gamma)} V(\phi), \quad (2.44)$$

$$T_{zz} = -\frac{1}{2} (\phi_{,\rho}^2 - \phi_{,z}^2) + e^{-2(\psi-\gamma)} V(\phi), \quad (2.45)$$

$$T_{\rho z} = \phi_{,\rho} \phi_{,z}, \quad (2.46)$$

$$T_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} e^{-2\gamma} \mu^2 (\phi_{,\rho}^2 + \phi_{,z}^2) + e^{-2\psi} \mu^2 V(\phi). \quad (2.47)$$

Insertando éstas componentes en la Eq.(2.34), obtenemos que, como en el caso de la constante cosmológica

$$\left( \frac{1 - (v_c^{(\varphi)})^2}{1 + (v_c^{(\varphi)})^2} \right) V(\phi) = 0. \quad (2.48)$$

De nuevo, las partículas tendrían que moverse a la velocidad de la luz, o el potencial del campo escalar en el plano ecuatorial tendría que ser cero, cuando ésto sucede, tenemos un campo escalar no masivo y la Ec.(2.34) se satisface,

tenemos que regresar a las ecuaciones de Einstein como en el caso del vacío. De la Ec.(2.29), tomamos la solución  $\mu = \rho$ , y, como en el caso para el vacío, obtenemos  $\psi = l \ln \rho$ . El último coeficiente de la métrica  $\gamma$ , puede ser obtenido en términos del campo escalar, y tener completa la solución salvo por la Ecuación de Klein Gordon para el campo escalar:  $D^2\phi + \frac{1}{\mu}D\phi D\mu = 0$ , que resulta ser la misma ecuación para el coeficiente métrico  $\psi$ . Sin embargo, en éste caso no tenemos condiciones de frontera bien definidas: el espacio tiempo no es asintóticamente plano; no es conocida su forma cerca y en el origen, sólo estamos analizando la región donde las curvas de rotación son planas; no hay condiciones sobre el campo escalar en el plano ecuatorial. Lo que se puede concluir de ésta sección, es que el campo escalar puede quedar como un candidato para ser materia oscura, y entonces, contribuir con aproximadamente el 25% de la materia del Universo.

### 2.1.5 Caso Esférico

Como mencionamos anteriormente, para recobrar el resultado Newtoniano en el que un fluido tipo polvo puede funcionar como materia oscura tenemos que analizar el caso esférico. En esta sección, presentamos una derivación análoga para las condiciones que la velocidad tangencial para órbitas circulares, al ser una constante, impone sobre los coeficientes métricos para el caso esférico y estático. En éste caso, presentamos las ecuaciones de Einstein para un tensor de energía momento general.

Debido a las simetrías, aquí no tenemos que restringir el análisis a las órbitas ecuatoriales, y las condiciones mencionadas arriba, llevan a una forma cerrada para el coeficiente métrico  $g_{tt}$ .

Comenzamos con el elemento de línea

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + a^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.49)$$

El Lagrangiano para una partícula de prueba es

$$2\mathcal{L} = -\alpha^2(r)\dot{t}^2 + a^2(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (2.50)$$

Podemos inferir las cantidades conservadas, la energía  $E = \alpha^2(r)\dot{t}$ , el momento  $\varphi$ :  $L_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ , y el momento angular total  $L^2 = L_\theta^2 + (\frac{L_\varphi}{\sin \theta})^2$ , con  $L_\theta = r^2 \dot{\theta}$ . La ecuación de movimiento radial puede ser escrita como

$$\dot{r}^2 + V(r) = 0, \quad (2.51)$$

con el potencial  $V(r)$  dado por

$$V(r) = -\frac{1}{a^2(r)} \left( \frac{E^2}{\alpha^2(r)} - \frac{L^2}{r^2} - 1 \right). \quad (2.52)$$

Notemos que debido a la simetría esférica, no necesitamos restringir el análisis a las órbitas ecuatoriales, esta última ecuación radial es válida para cualquier ángulo  $\theta$ . Para órbitas circulares estables, tenemos de nuevo las condiciones  $\dot{r} = 0$ ,  $V_{,r} = 0$ , y  $V_{,rr} > 0$ , lo cual implica las siguientes expresiones para la energía y el momento angular total de las partículas en tales órbitas:

$$E^2 = \frac{\alpha^3(r)}{\alpha(r) - r\alpha_{,r}}, \quad (2.53)$$

$$L^2 = \frac{r^3\alpha_r}{\alpha(r) - r\alpha_{,r}}, \quad (2.54)$$

y para la segunda derivada del potencial evaluada en el extremo

$$V(r)_{,rr} = \frac{2}{r a^2(r) [1 - \frac{r\alpha_{,r}(r)}{\alpha(r)}]} \left[ \frac{r\alpha_{,rr}(r)}{\alpha(r)} + \frac{\alpha_{,r}(r)}{\alpha(r)} \left[ 3 - \frac{\alpha_{,r}(r)}{\alpha(r)} \right] \right] \quad (2.55)$$

Por otro lado, de una manera similar a la que fuera presentada anteriormente, obtenemos que la velocidad tangencial,  $(v_c)^2 = \frac{r^2}{\alpha^2(r)} ((\frac{d\theta}{dt})^2 + \sin^2 \theta (\frac{d\varphi}{dt})^2)$ , para partículas en órbitas circulares estables está dada por:

$$(v_c)^2 = \frac{r\alpha_{,r}}{\alpha(r)}. \quad (2.56)$$

Entonces, imponiendo la condición de que la velocidad tangencial es constante para varios radios, esta última ecuación puede ser integrada para el coeficiente métrico

$$\alpha(r) = \alpha_0 r^{(v_c)^2}, \quad (2.57)$$

con  $\alpha_0$  como una constante de integración.

De ésta manera, podemos establecer que: para un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, la velocidad tangencial  $v_c$  de las partículas en movimiento en órbitas circulares estables es independiente del radio, si y sólo si el coeficiente métrico  $g_{tt}$  tiene la forma  $g_{tt} = \alpha_0^2 r^{2(v_c)^2}$ .

En éste caso, uno de los coeficientes métricos fué completamente determinado, y el otro permanece arbitrario. Además, como se mencionó, en el análisis no hicimos suposiciones sobre el plano del movimiento, así que el resultado es válido para cualquier trayectoria circular estable.

Para el tensor de energía momento consideramos un fluido perfecto estático, esntonces, la cuadrivelocidad de la partícula de prueba dá  $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ , con  $u^0 = \dot{t}$ . Para la métrica esféricamente simétrica, Ec.(2.66), sabemos que  $\dot{t}$  es asociado a una cantidad conservada, la energía, y esta dado por:  $\dot{t} = \frac{E}{\alpha^2(r)}$ , y de la normalización de la cuadrivelocidad  $u_\alpha u^\alpha = -1$ , obtenemos que  $E = \alpha(r)$ . Entonces, considerando aquellos espacios tiempos para los cuales la velocidad tangencial ( $v_c$ ) de las partículas de prueba en órbitas circulares es independiente del radio, usamos la ecuación Ec.(2.57), obteniendo que  $u^0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} r^{-(v_c)^2}$ , entonces,  $u_0 = -\sqrt{\alpha_0} r^{(v_c)^2}$ . Podemos construir el tensor de Einstein y llegar a las siguientes ecuaciones que nos dan información sobre el tipo de materia que está curvando el espacio tiempo de tal manera que el movimiento es el observado:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0 r^{(v_c)^2}}{a(r)^4} (2ra(r)a_{,r} + a^2(r)(a^2(r) - 1)) &= 8\pi T_{tt}, \\ \frac{(v_c)^2 + 1 - a^2(r)}{r^2} &= 8\pi T_{rr}, \\ \frac{r((v_c)^2 + 1)2a(r)a_{,r} - 2v_c^4 a^2(r)}{2a(r)^4} &= 8\pi T_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (2.58)$$



Las componentes distintas de cero del fluido estático esféricamente simétrico son

$$\begin{aligned} T_{tt} &= d \alpha_0 r^{2(v_c)^2}, \\ T_{rr} &= p a^2(r), \\ T_{\theta\theta} &= p r^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Substituyendo éstas expresiones en las ecuaciones de Einstein Ec.(2.58) resulta que las ecuaciones pueden ser completamente resueltas, dando:

$$a^2(r) = \frac{b}{2 \left(1 - a_0 r^{\frac{b}{k}}\right)}, \quad (2.60)$$

$$d = \frac{(2+k) a^2(r) - k - b}{8 \pi k r^2 a^2(r)}, \quad (2.61)$$

$$p = \frac{1 + 2(v_c)^2 - a^2(r)}{8 \pi r^2 a^2(r)}, \quad (2.62)$$

con  $b = 2 \left(1 + 2(v_c)^2 - v_c^4\right)$ ,  $k = 1 + (v_c)^2$ , y  $a_0$  una constante de integración. Tomando el caso particular para la constante de integración  $a_0 = 0$ , obtenemos:

$$a^2(r) = \frac{b}{2}, \quad (2.63)$$

$$d = \frac{(v_c)^2 \left(1 - \frac{(v_c)^2}{2}\right)}{2 \pi b r^2}, \quad (2.64)$$

$$p = \frac{(v_c)^4}{4 \pi b r^2}. \quad (2.65)$$

De ésta manera, obtenemos una solución particular donde las partículas se mueven en la forma observada, en un espacio tiempo con un déficit de ángulo  $g_{rr} = cte.$ , y en el cual la densidad va como  $d \sim (v_c)^2/r^2$  y la presión como  $p \sim (v_c)^4/r^2$ , entonces, es una solución tipo polvo. Para una ecuación de estado  $p = \omega d$ , ésta solución implica que  $\omega = (v_c)^2 / \left(2 \left(1 - (v_c)^2/2\right)\right)$ , que se encuentra entre 0 y 1, para la velocidad tangencial entre estos valores y por lo tanto, es un tipo de fluido determinado. De ésta manera, podemos recuperar las hipótesis para polvo con nuestra aproximación. Para el caso general en donde la constante de integración  $a_0$  es distinta de cero, tomando

la ecuación de estado como antes  $p = \omega d$ , obtenemos que  $\omega$  es una función de  $r$  y como en el caso axial, es negativa, y se trata de el tipo de materia exótica obtenida en el caso axisimétrico.

Una de las justificaciones para utilizar relatividad general en este trabajo, es la siguiente; en la descripción Newtoniana, es sabido que el espacio tiempo puede ser descrito como;

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2d\Omega^2$$

con  $\Phi = \Phi(r)$  el potencial gravitacional Newtoniano. Para el caso esféricamente simétrico obtenemos

$$-g_{tt} = r^{2(v_c)^2} = e^{2(v_c)^2 \ln(r)} = 1 + 2(v_c)^2 \ln(r) + \dots$$

de aquí determinamos que  $\Phi = (v_c)^2 \ln(r)$ . En ésta aproximación Newtoniana, el conjunto de diez ecuaciones de Einstein se reduce a una, la ecuación de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi Gd$ . De éste resultado, obtenemos que la densidad,  $d$ , vá como  $d \sim (v_c)^2 / r^2$ , que es la expresión conocida para la densidad de la materia oscura.

Sin embargo, en ésta aproximación, no se puede saber más acerca de la materia que está produciendo el movimiento observado. La aproximación Newtoniana, condiciona a la materia a que sea de tipo polvo o fluido perfecto. La forma en que se hace este razonamiento es la siguiente: se supone a priori que la materia oscura es un polvo que se puede describir en forma Newtoniana y se llega a una descripción consistente del problema de la cual sólo se puede dilucidar la forma del potencial gravitacional.

En éste trabajo el procedimiento es distinto, no hemos hecho ningún tipo de suposición sobre la materia. De las observaciones en el movimiento de las partículas de prueba, determinamos la geometría y entonces, por medio de las ecuaciones de Einstein obtenemos constricciones sobre el tipo de materia.

Hemos visto que podemos recuperar el resultado Newtoniano, pero tambien es claro que éste es un resultado particular para un tipo específico de materia. En general, no fijamos ni el tipo de materia ni la ecuación de estado, obteniendo de éste modo, resultados más generales.

Para llegar al límite Newtoniano, tenemos que satisfacer tres condiciones:

- 1) Las velocidades bajo las cuales las partículas de prueba se están moviendo deben ser mucho menores que la velocidad de la luz,
- 2) El campo gravitacional debe ser débil, y
- 3) Las presiones asociadas con la materia en estudio deben ser mucho menores que las densidades correspondientes.

Es ésta última condición la que se toma a priori usualmente y que no se satisface en el caso más general como mostramos, y por lo tanto, es una justificación en el hecho de utilizar relatividad general, para ser capaces de considerar cualquier tipo de materia en el análisis. Dentro de estas consideraciones, la teoría de Big-Bang nucleosíntesis impone cotas muy estrictas sobre el porcentaje de materia bariónica dentro del resto de las componentes del Universo. Si la materia oscura fuera un tipo de fluido bariónico, el valor de éste porcentaje se encontraría muy por arriba de los valores establecidos por las constricciones de la teoría. Y, aunque una materia compuesta por cierto tipo de fluido bariónico no puede ser descartada por medio de argumentos dinámicos, las constricciones cosmológicas la hacen improbable.

## 2.2 Caso Esférico para el Campo Escalar

En ésta sección estudiaremos el caso para el cual consideramos a la materia oscura como un campo escalar con simetría esférica y mostraremos que éste podría ser el caso para la materia oscura en las galaxias [2]. Nuestros motivos para considerar a un campo escalar como uno de los candidatos viables para formar a la materia oscura corresponden principalmente al hecho de que si la materia oscura estuviera formada por partículas como neutrinos u otras, este tipo de estructuras ya habrían sido detectadas anteriormente debido a la temperatura a la que se encontrarían. Asumimos que el halo de la galaxia es una fluctuación de un campo escalar con simetría esférica y estudiamos las consecuencias para el espacio tiempo de fondo a orden galáctico. Ésta sección presenta, en sus primeros análisis, resultados similares a la anterior en el sentido de que obtenemos las condiciones que la velocidad tangencial independiente del radio impone sobre los coeficientes métricos, llegando a los resultados ya mencionados, pero, posteriormente, utilizamos un tensor de energía momento para un campo escalar con acople mínimo a la gravedad en las ecuaciones de Einstein.

Al igual que en la sección anterior, las simetrías del problema permiten que no tengamos que restringir el análisis a las orbitas ecuatoriales y llegar a una expresión cerrada para el coeficiente métrico  $g_{tt}$ . Utilizamos el mismo elemento de línea que en la sección anterior:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + a^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.66)$$

donde el Lagrangiano para una partícula de prueba que se obtiene de aquí es:

$$2\mathcal{L} = -\alpha^2(r)\dot{t}^2 + a^2(r)\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \quad (2.67)$$

Con las mismas cantidades conservadas: la energía  $E = \alpha^2(r)\dot{t}$ , el momento  $\varphi$ :  $L_\varphi = r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$ , y el momento angular total  $L^2 = L_\theta^2 + (\frac{L_\varphi}{\sin\theta})^2$ , con  $L_\theta = r^2\dot{\theta}$ . La ecuación de movimiento radial puede ser escrita como

$$\dot{r}^2 + V(r) = 0, \quad (2.68)$$

con el potencial  $V(r)$  dado por

$$V(r) = -\frac{1}{a(r)^2} \left( \frac{E^2}{\alpha^2(r)} - \frac{L^2}{r^2} - 1 \right). \quad (2.69)$$

donde las condiciones sobre el potencial para obtener orbitas ciculares estables siguen siendo las mismas que se mencionaron en la sección anterior. De ésta forma, la expresión para la velocidad tangencial permite llegar a una condición que cumple el coeficiente métrico  $g_{tt}$

$$\alpha(r) = \alpha_0 r^{2(v_c)^2}, \quad (2.70)$$

con  $\alpha_0$  como una constante de integración.

De ésto, podemos mantener las consideraciones a las que llegamos en el caso anterior respecto a que en un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, las partículas que se mueven en orbitas circulares estables y para las cuales la velocidad tangencial es independiente del radio, se cumple que el

coeficiente métrico  $g_{tt}$  debe seguir necesariamente la forma antes mencionada y que se dedujo anteriormente  $g_{tt} = \alpha_0^2 r^{(v_c)^2}$ .

Al igual que en el caso anterior, uno de los coeficientes métricos fué determinado completamente y el otro permanece arbitrario y tendrá que ser encontrado a partir de las ecuaciones de Einstein. A diferencia del caso anterior, aquí asumimos un tensor de energía momento muy específico, esto es, un tensor para un campo escalar esférico, lo cual implica que el halo de una galaxia es una fluctuación esférica de la materia oscura cosmológica escalar. El tensor de energía momento para el campo escalar es  $T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - 1/2g_{\mu\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - g_{\mu\nu}V(\phi)$ , con  $\phi$  el campo escalar y,  $V(\phi)$  el potencial escalar. La ecuación de Klein-Gordon y las ecuaciones de Einstein respectivamente son:

$$\phi^{;\mu}_{;\mu} - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.71)$$

$$R_{\mu\nu} = \kappa_0[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi)], \quad (2.72)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $\sqrt{-g}$ , el determinante de la métrica,  $\kappa_0 = 8\pi G$ , y el símbolo “;” indica derivada covariante de acuerdo a la métrica de fondo;  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

Del resultado sobre la velocidad, tenemos que la métrica puede ser escrita en la siguiente forma:

$$ds^2 = -\alpha_0 r^l dt^2 + a^2(r) d\tau^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.73)$$

con  $l = (v^c)^2$ . Dado que el potencial Newtoniano  $\psi$  es definido como  $g_{00} = -exp(2\psi) = -1 - 2\psi - \dots$ , y por otro lado, el perfil observado para las curvas de rotación en la región donde la materia oscura domina, es tal que la velocidad tangencial es constante, la fuerza está entonces dada por  $F = -(v_c)^2/r$ , cuyo potencial Newtoniano es  $\psi = (v_c)^2 \ln(r)$ . Si ahora obtuviéramos el potencial Newtoniano asociado a la expresión anterior para la métrica, llegaríamos al mismo resultado. Por lo tanto, la expresión anterior de la métrica, es la versión relativista de una distribución de materia cuyas partículas de prueba, se mueven en curvas rotacionales constantes. La función  $a^2$  vá a ser determinada por el tipo de materia que estamos suponiendo que compone a la materia oscura. Considerando la condición para curvas planas, podemos escribir las ecuaciones de campo y la ecuación de Klein-Gordon como:

$$\phi_{,rr} + \frac{1}{2r} \left[ l + 4 - \frac{2a_r}{a} r \right] \phi_{,r} - a^2 \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (2.74)$$

y las ecuaciones de Einstein son:

$$\frac{a^2 - (l + 1)}{r^2} = -\kappa_0 \left[ \frac{1}{2} \phi_{,r}^2 - a^2 V(\phi) \right] \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{4r^2} \left[ l^2 - \frac{2a_r}{a} r (l + 2) \right] = -\kappa_0 \left[ \frac{1}{2} \phi_{,r}^2 + a^2 V(\phi) \right] \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[ 1 - a^2 - \frac{2a_r}{a} r \right] = -\kappa_0 \left[ \frac{1}{2} \phi_{,r}^2 + a^2 V(\phi) \right] \quad (2.77)$$

Para resolver las ecuaciones (2.75-2.77), observemos que la combinación  $[(2 - l)\text{Ec.}(2.75) - 4\text{Ec.}(2.76) + (2 + l)\text{Ec.}(2.77)]$  implica

$$V = -\frac{l}{\kappa_0(2 - l)} \frac{1}{r^2} \quad (2.78)$$

Esto es, el potencial escalar vá siempre como  $1/r^2$  para una métrica esféricamente simétrica que incluya la condición de curvas rotacionales planas. La solución general de las ecuaciones (2.75-2.77) es

$$a^2(r) = (4 - l^2) / (4 + C (4 - l^2) r^{-(l+2)}),$$

con  $C$  una constante de integración, y de aquí podemos integrar a la función  $\phi$ . Considerando la solución mas simple con  $C = 0$ , el tensor de energía momento va como  $1/r^2$ . El tensor de energía momento está compuesto de dos partes, una incluye al potencial escalar, y la otra contiene productos de las derivadas del campo escalar, ambos van como  $1/r^2$ . Además, como  $(\phi_{,r})^2 \sim 1/r^2$ , esto significa que  $\phi \sim \ln(r)$ , lo cual implica que el potencial escalar es exponencial  $V \sim \exp(2\alpha\phi)$  cuyo comportamiento ha sido de utilidad en esenarios para formación de estructura como [31, 32] y escalando soluciones con un campo escalar primordial en el contexto cosmológico [31, 32, 33] incluyendo esenarios para quintaesencia [34]. Entonces, una solución particular para el sistema (2.74-2.77) que estamos considerando es

$$a^2 = \frac{4 - l^2}{4}, \quad (2.79)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{l}{\kappa_0}} \ln(r) + \phi_0, \quad (2.80)$$

$$V(\phi) = -\frac{l}{2-l} \exp \left[ -2\sqrt{\frac{\kappa_0}{l}} (\phi - \phi_0) \right] \quad (2.81)$$

La función  $a^2$  corresponde a una solución exacta de las ecuaciones de Einstein para un espacio tiempo esféricamente simétrico conteniendo como materia, a un campo escalar con un potencial exponencial. Haciendo el escalamiento  $r^2 \rightarrow 4r^2/(4-l^2)$ , en este caso, el espacio tres dimensional corresponde a un caso análogo al déficit de ángulo, la métrica da

$$ds^2 = -\alpha_0 r^l dt^2 + dr^2 + \frac{4}{4-l^2} r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (2.82)$$

para la cual, el área de la hipersuperficie dos dimensional es  $4\pi r^2 \times 4/(4-l^2) = 4\pi r^2/(1-(v_c)^4)$ . Si la velocidad rotacional de las partículas de prueba fuera la velocidad de la luz  $v_c \rightarrow 1$ , esta área crecería muy rápido. Sin embargo, para una galaxia típica, las velocidades rotacionales son  $v_c \sim 10^{-3}$  (300km/s); en este caso, la razón entre el área de esta hipersuperficie y una plana es  $(v_c)^4/(1-(v_c)^4) \sim 10^{-12}$ , que es muy pequeña para ser medida, pero lo suficientemente grande para dar el comportamiento adecuado al movimiento de las estrellas en una galaxia.

## Capítulo 3

# Acople no Mínimo

En éste capítulo analizaremos el caso de un campo escalar esférico con acople no mínimo a la gravedad como un posible candidato para constituir a la materia oscura, en el caso de un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, con el objetivo de encontrar una solución que nos permita evitar la divergencia observada sobre el campo escalar tal como vimos en la última sección del capítulo anterior. El proceso que seguiremos es similar al que mostramos anteriormente, con la salvedad de que la velocidad tangencial de las partículas de prueba que se están moviendo en orbitas circulares estables, vá a ser una función arbitraria de  $r$  hasta el momento en que analicemos las soluciones para las ecuaciones de Einstein, esto es, no vá a continuar siendo una constante independiente del radio. Utilizaremos un elemento de línea estático esféricamente simétrico y realizaremos el mismo análisis que presentamos antes para el caso de la velocidad independiente del radio, llegando a una condición para el coeficiente  $g_{tt}$ , la cual utilizaremos en las ecuaciones de Einstein que obtendremos a partir de un principio variacional, [17]. Es decir, partiremos de la expresión para la acción, [40]:

$$I = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ M^2 f(\phi) R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (3.1)$$

donde  $M^2 = \frac{1}{16\pi}$ , esto es  $M^2 = \frac{1}{2\kappa}$ ,  $g_{\mu\nu}$  es la métrica física,  $R$  es el escalar de curvatura construido a partir de  $g_{\mu\nu}$ ,  $f$  es el factor de acople del campo escalar con la gravedad, y  $V(\phi)$  es el potencial escalar asociado al campo escalar. Donde además, estamos usando unidades geométricas para escribir



las expresiones aquí presentadas, es decir  $c = G = 1$ . En este capítulo, a diferencia del anterior, el valor de  $f$  vá a ser distinto de 1. La forma de ésta función, representa el tipo de teoría que se esta considerando para el acople del campo escalar con la gravedad, es una función que depende de  $\phi$ , que a su vez depende de las coordenadas, aquí consideraremos el caso particular en que  $\phi$  es función de  $r$ , por lo cual,  $f$  en última instancia, es una función de  $r$  a su vez. En éste caso, no asumiremos una forma funcional para  $f$  a priori, sino que permitiremos que las condiciones que encontraremos en las ecuaciones de movimiento así como la forma que proponemos como solución pra la métrica, sean las que decidan el tipo de función que será  $f$  cuando encontremos una solución numérica en las ecuaciones de movimiento. Variando primero con respecto a  $g_{\mu\nu}$  :

$$0 = \int \delta\sqrt{-g}d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa}f(\phi)R - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi) \right] \\ + \int \sqrt{-g}d^4x\delta \left[ \frac{1}{2\kappa}f(\phi)R - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi) \right],$$

ahora utilizamos que:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \quad \nabla_\mu\phi = \phi_{,\mu}, \quad \nabla^\mu\phi = \phi^{;\mu} \\ \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi = g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu, \quad \delta(g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu) = \phi_\alpha\phi_\beta, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}$$

y,

$$\delta R = R_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}, \quad \delta V(\phi) = 0$$

porque estamos variando respecto a la métrica.

$$\Rightarrow 0 = \int \sqrt{-g}d^4x \frac{1}{2\kappa}f(\phi)G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi) \right] + \\ \int \sqrt{-g}d^4x \left[ \left( \frac{1}{2\kappa}f(\phi)g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \right) \right].$$

En el último término utilizamos ahora que [17]:

$$f(\phi)g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = f\nabla_{\alpha}(fv^{\alpha}) - v^{\alpha}\nabla_{\alpha}f,$$

con

$$v^{\alpha} = \nabla_{\beta}(\delta g^{\alpha\beta} - g_{\gamma\delta}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\gamma\delta})).$$

Lo que después de algunas manipulaciones nos permite llegar a que:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f}f_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square f + \frac{\kappa}{f}[\phi_{,\nu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - g_{\mu\nu}V(\phi)] \quad (3.2)$$

La variación de la acción respecto al campo escalar será mostrada a continuación; de la expresión para la acción (3.1), tomamos la variación respecto al campo escalar  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \delta I = 0 &= \int \delta\sqrt{-g}d^4x \left[ M^2 f(\phi)R - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi - V(\phi) \right] \\ &+ \int \sqrt{-g}d^4x \delta \left[ M^2 f(\phi)R - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi - V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde

$$\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi = g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} \quad (3.4)$$

y

$$\delta\sqrt{-g} = 0 \quad (3.5)$$

porque estamos variando respecto al campo escalar  $\phi$  y tenemos que:

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{-g}d^4x \delta \left[ M^2 f(\phi)R - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi - V(\phi) \right] = \\ &\int \sqrt{-g}d^4x \left[ M^2 R\delta f(\phi) - \frac{1}{2}\nabla^{\mu}\phi\nabla_{\mu}\delta\phi - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\delta\phi - \delta V(\phi) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

como

$$\delta A(\phi) = A_{,\phi}\delta\phi \quad (3.7)$$

donde  $A(\phi)$  es una función arbitraria de  $\phi$  y  $M^2 = \frac{1}{2\kappa}$ , entonces:

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{-g}d^4x \left[ \frac{R}{2\kappa}\delta f(\phi) - \frac{1}{2}\nabla^{\mu}\phi\nabla_{\mu}\delta\phi - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\delta\phi - \delta V(\phi) \right] = \\ &\int \sqrt{-g}d^4x \left[ \frac{R}{2\kappa}f_{,\phi}\delta\phi - \frac{1}{2}\nabla^{\mu}\phi\nabla_{\mu}\delta\phi - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\delta\phi - V_{,\phi}\delta\phi \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado

$$[\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \delta \phi] = \nabla_\mu [\nabla^\mu \phi \delta \phi] + \nabla^\mu [\nabla_\mu \phi \delta \phi] - 2\Box \phi \delta \phi \quad (3.9)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior;

$$\int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{R}{2\kappa} f_{,\phi} \delta \phi - \Box \phi \delta \phi - V_{,\phi} \delta \phi \right] = 0 \quad (3.10)$$

Como estamos haciendo una variación arbitraria respecto al parámetro  $\phi$ , podemos igualar el integrando a cero

$$\frac{R}{2\kappa} f_{,\phi} + \Box \phi - V_{,\phi} = 0 \quad (3.11)$$

La ecuación anterior contiene un término adicional a la ecuación de Klein-Gordon en el caso en que el acople es mínimo. Podemos observar que recuperamos la ecuación de K-G haciendo  $f = 1$ . En el caso en que el acople es mínimo, existen teoremas que indican que las únicas soluciones para el campo escalar, dadas las condiciones iniciales de que sea cero o de que diverja, corresponderán al mismo comportamiento, [43], es decir, dado que el campo escalar es cero, siempre va a ser cero, y si diverge, siempre va a observar el mismo comportamiento, debido a que no puede haber cambio de signos en la ecuación de K-G. Pero, la Ec.(3.11) nos permitirá considerar la posibilidad de otro tipo de soluciones dado el hecho de que contiene el término extra que proviene del acople no mínimo con la gravedad, y que admite contemplar cambios de signo que lleven a la existencia de una solución no trivial o no divergente para el campo escalar. De la ecuación (3.2) podemos calcular al escalar de curvatura

$$R = 3 \frac{\Box f}{f} + \frac{\kappa}{f} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} + \frac{4\kappa V(\phi)}{f} \quad (3.12)$$

Y sustituirlo en la ecuación anterior para obtener:

$$\frac{3}{2\kappa} \frac{\Box f}{f} f_{,\phi} + \frac{f_{,\phi}}{2f} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} + \frac{2f_{,\phi} V(\phi)}{f} + \Box \phi - V_{,\phi} \phi = 0 \quad (3.13)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\square f = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} f_{\phi\phi,\mu})_{,\nu} \quad (3.14)$$

Esto implica que

$$\square f = f_{,\phi} \square \phi + f_{,\phi\phi} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \quad (3.15)$$

Y finalmente obtenemos que:

$$\square \phi = \frac{f V_{,\phi} - 2 f_{,\phi} V(\phi) + \frac{1}{2} f_{,\phi} (1 + \frac{3}{\kappa} f_{,\phi\phi}) \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda}}{f + \frac{3}{2\kappa} (f_{,\phi})^2} \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.16) nos indican respectivamente la forma del tensor de energía momento para el campo escalar, y el equivalente de la ecuación de Klein-Gordon para el caso en que  $f$  es distinto de 1.

Consideraremos un elemento de línea para un espacio tiempo estático, esféricamente simétrico dado por

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.17)$$

Siguiendo el análisis considerado en el capítulo anterior, encontramos las mismas cantidades conservadas es decir la energía  $E$ , y el momento angular  $L$  para cualquier partícula moviéndose en una geodésica, obtenemos que la ecuación para el movimiento radial tiene la forma:

$$\dot{r}^2 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{E^2}{\alpha^2} - \frac{L^2}{r^2} - 1 \right) = 0. \quad (3.18)$$

Recordando el procedimiento del capítulo anterior, podemos mostrar que para una partícula en un movimiento geodésico circular, su energía y momento angular deben tener la forma

$$E^2 = \frac{\alpha^3}{\alpha - r \alpha_{,r}}, \quad (3.19)$$

$$L^2 = \frac{r^3 \alpha_{,r}}{\alpha - r \alpha_{,r}}. \quad (3.20)$$

La cual es una expresión válida para cualquier espacio tiempo esféricamente simétrico, y la velocidad tangencial de tales objetos,  $v$ , puede ser expresada en términos de los coeficientes métricos como:

$$v^2 = \frac{r a_{,r}}{\alpha}. \quad (3.21)$$

De la ecuación (3.21), podemos expresar al coeficiente métrico  $\alpha$  como una cuadratura en términos de la velocidad tangencial:

$$\alpha(r) = \exp \left( \int \frac{v^2(r)}{r} dr \right) \quad (3.22)$$

donde estamos dejando a la velocidad tangencial como una función de  $r$ , la cual puede ser dada por una función que reproduzca el comportamiento observado en las curvas de rotación para todos los valores de  $r$  en la región galáctica, como veremos más adelante. En éste caso, el tensor de Einstein incluyendo la condición sobre el coeficiente métrico  $\alpha$ , puede ser expresado en la forma:

$$\begin{aligned} G_t^t &= -\frac{a(a^2 - 1) + 2r a_{,r}}{a^3 r^2}, \\ G_r^r &= \frac{2v^2 + 1 - a^2}{a^2 r^2}, \\ G_\theta^\theta &= \frac{a v (v^3 + 2r v_{,r}) - r a_{,r} (v^2 + 1)}{a^3 r^2}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

y  $G_\varphi^\varphi = G_\theta^\theta$  debido a la simetría del espacio tiempo que estamos considerando. El resto de las componentes del tensor de Einstein son cero. Estas ecuaciones, junto con las que obtuvimos gracias a aplicar el principio variacional en la expresión para la acción, nos dan un sistema de ecuaciones que tendremos que resolver analítica y numéricamente:

Encontramos una ecuación de constricción:

$$\chi^2 - \frac{2f}{\kappa r} (2 + v^2) f_{,\phi} \chi + 2 \frac{f(a^2 - 1 - 2v^2)}{\kappa r^2} - 2a^2 V(\phi) = 0 \quad (3.24)$$

Y tres ecuaciones de movimiento:

$$\phi_{,r} = \chi, \quad (3.25)$$

Para la velocidad:

$$v_{,r} = -\frac{\kappa r(1-v^2)}{2v} \left[ \frac{(2f f_{,\phi\phi} - f_{,\phi}^2)\chi^2 + 2a^2 f_{,\phi}(fV_{,\phi} - 2f_{,\phi}V)}{2(2\kappa f + 3f_{,\phi}^2)} + \frac{a^2 V}{f} \right] - \frac{a^2 v}{2r}. \quad (3.26)$$

Para el coeficiente métrico  $a(r)$ :

$$a_{,r} = a \left( \frac{1+v^2-a^2}{r} + f_{,\phi}\chi + \right. \\ \left. + \kappa r \left[ \frac{(2f f_{,\phi\phi} - f_{,\phi}^2)\chi^2 + 2a^2 f_{,\phi}(fV_{,\phi} - 2f_{,\phi}V)}{2(2\kappa f + 3f_{,\phi}^2)} + \frac{a^2 V}{f} \right] \right). \quad (3.27)$$

Y para la variable  $\chi(r)$ :

$$\chi_{,r} = -\frac{(1+a^2)\chi}{r} + f_{,\phi}\chi^2 + \frac{\kappa r a^2 \chi V}{f} +$$

$$\frac{(f f_{,\phi\phi} - \frac{f_{,\phi}^2}{2})\chi^3 \kappa r + \kappa(r\chi f_{,\phi} + 2)a^2(fV_{,\phi} - 2f_{,\phi}V) - f_{,\phi}(\kappa + 3f_{,\phi\phi})\chi^2}{(2\kappa f + 3f_{,\phi}^2)}. \quad (3.28)$$

De éstas ecuaciones, podemos encontrar una forma mas simple para el coeficiente métrico  $a(r)$ , sustituyendo la Ec.(3.26) en la Ec.(3.27) obtenemos:

$$a_{,r} = \frac{a(f_{,\phi}\phi_{,r} + 1 - v^4 - a^2 - 2rvv_{,r})}{r(1-v^2)}. \quad (3.29)$$

De ésta expresión para  $a_{,r}$ , podemos notar que el último término  $f_{,\phi}\phi_{,r}$ , es de hecho, la derivada de  $f$  respecto a  $r$ , y que también se encuentra en la ecuación de constricción, por lo tanto, podemos despejar de ésta ecuación a éste término y sustituirlo en la otra de lo cual obtendremos una ecuación para  $f_{,r}$ . Como ya mencionamos antes, vamos a proponer una forma específica para la velocidad tangencial de los objetos de prueba que se mueven en órbitas geodésicas circulares, la cual coincida con el perfil de las curvas de rotación en la mayoría de las galaxias espirales. Esto lo podemos hacer así

porque vamos a proponer una solución particular para el elemento de línea que cumple con el hecho de que no tener singularidades desnudas, [49]. La forma del elemento de línea es la siguiente

$$ds^2 = -\alpha_0 (r^2 + b^2)^{v_0^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{a_0^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.30)$$

Donde  $M$  representa la materia que colapsó en el agujero negro y no se refiere a la masa del campo escalar, que en éste caso vá a ser cero. Los términos  $\alpha_0$ ,  $a_0$ ,  $v_0$  y  $b$ , son constantes cuyo valor será indicado mas adelante. Observemos que éste elemento de línea contiene una singularidad cubierta; el horizonte se encuentra en  $r = 2M$  por lo que podemos considerarla como una solución particular para analizar en las ecuaciones de Einstein. El escalar de Ricci asociado a éste elemento de línea es:

$$R = \frac{2}{r^2 a_0^2 (r^2 + b^2)^2} \times \left[ r^2 b^2 (2a_0^2 - 3v_0^2 - 2) + M v_0^2 r^3 (2v_0^2 - 1) + 3v_0^2 b^2 M r + b^4 (a_0^2 - 1) - r^4 (v_0^4 + v_0^2 - a_0^2 + 1) \right] \quad (3.31)$$

Ya que tenemos dado el valor del coeficiente  $g_{tt}(r)$  y la relación (3.21), así como la expresión para el coeficiente  $g_{rr}(r)$ , podemos encontrar una expresión para la velocidad y sustituirla en las ecuaciones de campo. La expresión para la velocidad es :

$$v^2 = \frac{r^2 v_0^2}{r^2 + b^2} + \frac{M}{r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (3.32)$$

Es posible encontrar una expresión para  $f_{,r}$  de las ecuaciones de campo, sustituyendo el término entre paréntesis cuadrado de la Ec.(3.26), en la Ec.(3.27) y llegar a que:

$$f_{,r} = \frac{a_{,r}}{a} - \frac{v^4 + a^2 + 2rvv_r - 1}{r(1 - v^2)} \quad (3.33)$$

para  $f(r)_{,r}$ , y sustituimos aquí la Ec.(3.29) y la Ec.(3.32) para  $v(r)$ , posteriormente la forma funcional del coeficiente métrico  $a(r)$  que nos dá el elemento de línea, de lo cual obtenemos:

$$f_{,r} = \frac{[(a_0^2 - 1)(r^2 + b^2)^2 + v_0^2 r(2b^2 r + 3Mr^2 - Mb^2) + r^3 v_0^4 (r - 2M)]}{8\pi (r^2 + b^2)[(r^2 + b^2)(r - 3M) - v_0^2 r^2 (r - 2M)]} \quad (3.34)$$

Ahora consideraremos dos regiones para resolver ésta ecuación y las que siguen; una cercana al centro de la galaxia y al horizonte, y otra alejada del mismo. Para continuar con el análisis, expresaremos las cantidades involucradas en la ecuación anterior en términos de la masa colapsada en el agujero negro que en éste caso estamos tomando como  $M = 10^8 M_\odot = 1.4 \times 10^{13} \text{cm}$ . y dado que  $1 \text{Kpc} = 2.7 \times 10^{21} \text{cm}$ ., el valor de la constante  $b = 3 \text{Kpc}$ , puede ser expresado como  $b = (5.78 \times 10^7)M = AM$ , donde  $A$  es una constante adimensional  $A = 5.78 \times 10^7$ . También podemos relacionar a  $r$  con el radio del horizonte y la masa colapsada dentro del mismo de la siguiente manera:  $r = nr_+ = 2nM$  con  $n$  un entero positivo y  $r_+$  el radio del horizonte. Podemos sustituir  $b$  y  $r$  en términos de la masa del objeto colapsado en la expresión para  $f_{,r}$  y obtenemos:

$$f_{,n} = \frac{(a_0^2 - 1)(4n^2 + A^2)^2 + 2nv_0^2(4nA^2 + 12n^2 - A^2) + 16n^3v_0^4(n - 1)}{4\pi (4n^2 + A^2)[(4n^2 + A^2)(2n - 3) - 8n^2v_0^2(n - 1)]} \quad (3.35)$$

El hecho de considerar la región cercana al horizonte es equivalente a hacer  $n \ll A$  en la ecuación anterior, lo cual nos permite simplificarla considerablemente y llegar a lo siguiente:

$$f_{,n} = \frac{(a_0^2 - 1)A^2 + 2n(4n - 1)v_0^2}{4\pi A^2(2n - 3)} \quad (3.36)$$

para  $n \ll A$ . Esta ecuación puede ser resuelta analíticamente, de lo cual obtenemos la siguiente expresión:



$$f(n) = \frac{v_0^2}{8\pi A^2} [2n(2n + 5) + 15 \ln(2n - 3)] + f_0 \quad (3.37)$$

Tomando el valor de la constante  $a_0 = 1$ , y dando el valor de 0.002 a la velocidad  $v_0$ , la constante que se encuentra multiplicando a la ecuación anterior asume el valor  $4.76 \times 10^{-25}$ , y la constante de integración  $f_0$  nos ayudará a unir éste resultado, con el obtenido en el capítulo anterior en el caso del acople mínimo. Dados los valores anteriores, nos es posible graficar el comportamiento que sigue el factor de acople en la región que estamos considerando, esto es, de 2 a 10 Kpc, lo cual se observa como lo muestra la figura 3.1:

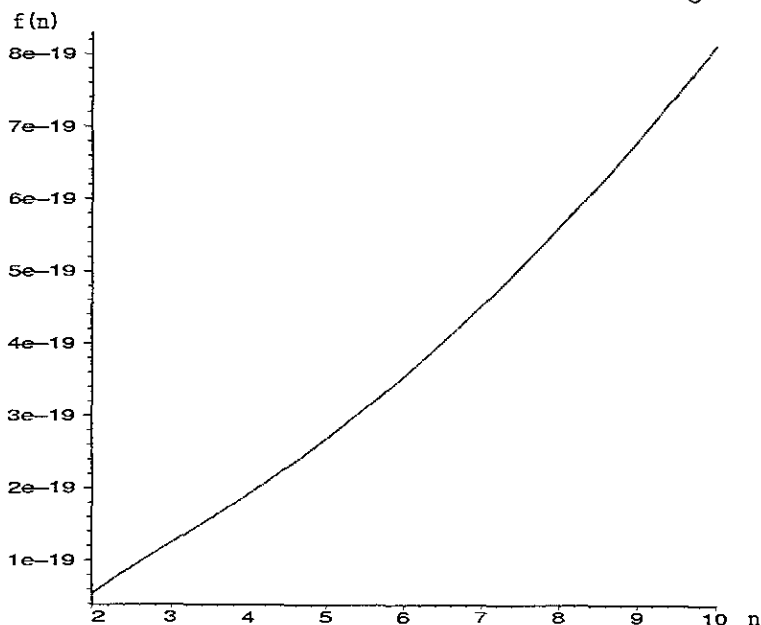


Figura 3.1: Factor de acople en términos del parámetro  $n$ , en la región cercana al horizonte

En la gráfica, el eje vertical se encuentra en unidades de  $\frac{v_0^2}{8\pi A^2}$ , los valores que asume el factor de acople crecen rápidamente conforme  $n$ , es decir  $r$ , aumenta, lo cual nos permite pensar que éste resultado es compatible con el hecho de encontrar que el factor de acople es una constante en la región lejana al centro galáctico tal y como obtendremos mas adelante, así, la constante de

integración en la expresión para  $f = f(n)$ , puede ser elegida para concordar con el valor constante que la función asumirá en la otra región, lo cual nos permitirá dar la forma global que sigue  $f$  como función de  $n$ , es decir de  $r$ . Una vez obtenido éste resultado, podemos encontrar el comportamiento que sigue el campo escalar  $\phi$  para esta región, resolviendo la ecuación que obtenemos de la siguiente manera; la ecuación de constricción (3.24), con el potencial  $V = 0$ , nos permite encontrar una ecuación para  $\phi_{,r}$  en términos de  $r$ , en la que podemos aplicar las sustituciones que hicimos para  $r$  y  $b$  en función de la masa del objeto colapsado. La ecuación que obtenemos para  $\phi$  en términos de  $n$  a partir de las ecuaciones de Einstein es:

$$\phi_{,n}^2 = \frac{f}{8\pi n(n-1)A^2} \left[ \frac{1}{4\pi} (8v_0^2 n(n-1) - (a_0^2 - 1)(4n^2 + A^2)) \right. \\ \left. + f_{,n} ((4n^2 + A^2)(4n-3) + 8v_0^2 n^2(n-1)) \right] \quad (3.38)$$

En la cual podemos aplicar la condición  $n \ll A$  y considerar a  $a_0 = 1$  como en el caso del factor de acople, sustituimos el valor correspondiente a  $f_{,n}$  y a  $f$  para esta región, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\phi_{,n} = \frac{v_0}{4\pi A} \sqrt{4 + \frac{(4n-3)(4n-1)}{(n-1)(2n-3)}} \quad (3.39)$$

Que resolvemos numéricamente dentro del rango donde nos encontramos trabajando, esto es de 2 a 10 Kpc, la gráfica que muestra el resultado es la siguiente:

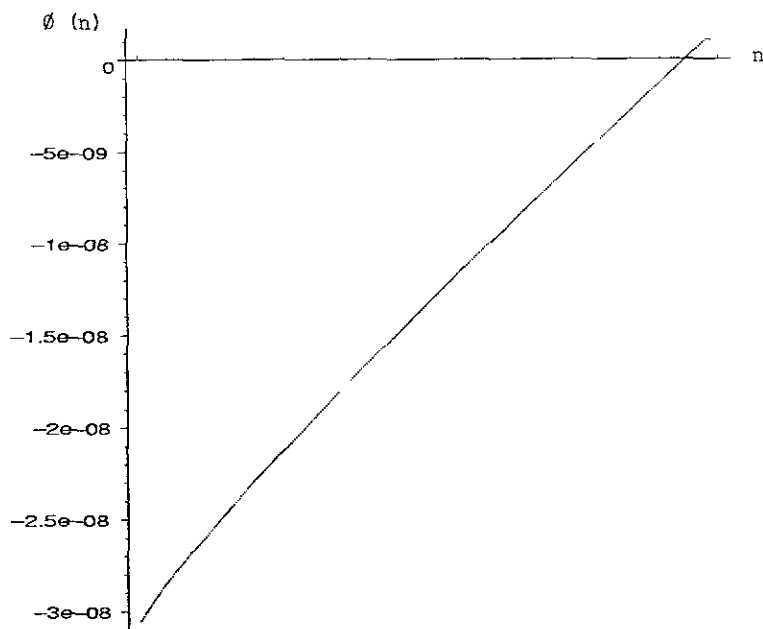


Figura 3.2: Campo Escalar en función del parámetro  $n$  cerca del horizonte. La escala horizontal corresponde al valor de  $n$  de 2 a 10 Kpc.

Como podemos observar de la gráfica, el campo escalar asume valores negativos cerca del horizonte, lo cual podemos eliminar considerando una constante de integración con un valor adecuado. Es importante señalar, que hemos podido encontrar una solución para el campo escalar dado un factor de acople no mínimo entre el mismo y la gravitación.

En éste caso, nos interesa obtener el comportamiento del factor de acople en función del campo escalar mismo, puesto que es así como se reporta en la literatura generalmente, [42], [41], [40].

Podemos hacer ésto expresando al factor de acople en forma paramétrica con respecto al campo escalar mismo y el resultado que obtenemos es mostrado en la página siguiente:

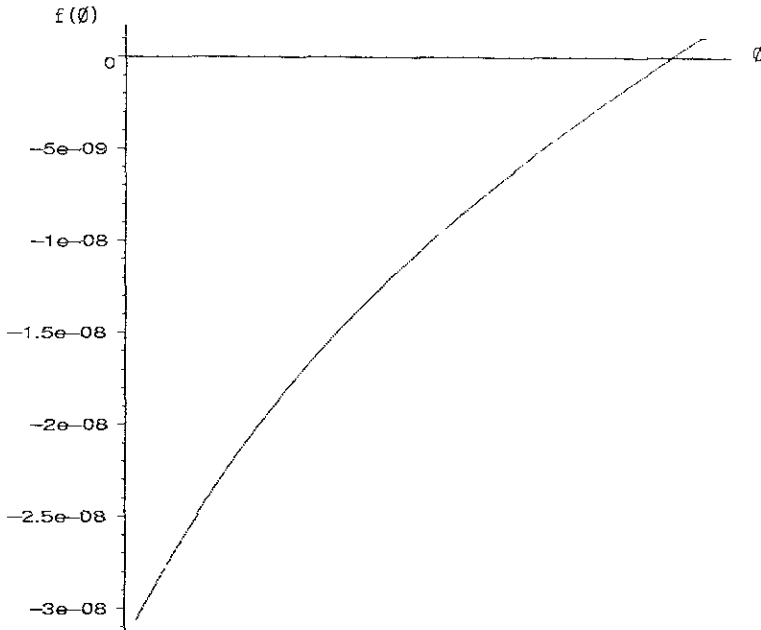


Figura 3.3: Factor de acople en términos del Campo Escalar cerca del horizonte, la línea horizontal representa los valores que asume el campo en el intervalo de 2 a 10 Kpc.

Como parte de la discusión que estamos desarrollando, va a ser necesario analizar con más detalle las implicaciones físicas del resultado que estamos obteniendo con ésta última gráfica, en particular, lo que podemos decir acerca de la forma en que el campo escalar se encuentra acoplado con la gravedad cerca del horizonte es que el acople no mínimo es preponderante en ésta región, es decir, la autointeracción del campo escalar consigo mismo se encuentra fuertemente ligada a la zona en que nos encontramos analizando el problema y responde a la cercanía del mismo con la región donde se encuentra el horizonte. Así mismo, la forma funcional del factor de acople en términos del campo escalar, nos tiene que dar información respecto a como es el tipo de autointeracción.

En la siguiente sección, consideraremos un análisis equivalente al expuesto anteriormente, con la salvedad de que será aplicado a la región contraria a la que estuvimos considerando, es decir, la región lejana al horizonte y por consiguiente, al centro galáctico.

Podemos partir de las expresiones generales que encontramos para el factor de acople y para el campo escalar en función de  $n$  en la última sección y aplicar el límite que corresponde a este caso. Sobre las ecuaciones (3.35) y (3.38) aplicaremos ahora la condición  $n \gg A$ , analizaremos el caso para el factor de acople primeramente. Para aplicar correctamente el rango de valores que  $n$  puede asumir en este intervalo, hacemos los siguientes cálculos; como  $r = 2nM$  y  $b = AM = 3Kpc$ , como ya habíamos mencionado, la región donde  $n \gg b$  es

$$\begin{aligned} 5Kpc < r < 10Kpc, \\ \frac{5Kpc}{2M} < n < \frac{10Kpc}{2M}, \\ \frac{5(2.7 \times 10^{21})}{2(1.4 \times 10^{13})} < n < \frac{10(2.7 \times 10^{21})}{2(1.4 \times 10^{13})}, \end{aligned}$$

y obtenemos que:

$$5 \times 10^8 < n < 1 \times 10^9$$

Las consideraciones anteriores nos llevan a encontrar las siguientes expresiones en (3.35):

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{v_0^2 A^2 (1 - v_0^2)}{4\pi(2v_0^2 - 3)} \times \\ &\left[ (1 - v_0^2) \ln(2n(1 - v_0^2) + 2v_0^2 - 3) - (1 - v_0^2) \ln(n) - \frac{1}{2n} \right] \simeq \\ k(1 - v_0^2) \left[ \ln(2n(1 - v_0^2) + 2v_0^2 - 3) - \ln(n) - \frac{1}{2n(1 - v_0^2)} \right] &\simeq \quad (3.40) \\ k(1 - v_0^2) \left[ \ln(2n) + \ln(1 - v_0^2) - \ln(n) - \frac{1}{2n(1 - v_0^2)} \right] &\simeq \\ k(1 - v_0^2) [\ln(2) - 10^{-8}] &\simeq k(1 - v_0^2) \ln(2) = f_k = cte. \end{aligned}$$

Donde  $k = \frac{v_0^2 A^2 (1 - v_0^2)}{4\pi(2v_0^2 - 3)}$ , y podemos observar que el factor de acople es una constante para los valores de  $n$  o de  $r$  que nos encontramos analizando, a

partir de éste resultado, vemos que junto con el obtenido en la sección anterior pueden ser “unidos” al considerar un valor adecuado sobre la constante de integración  $f_0$  en la ecuación (3.37) que corresponda al factor de acople cerca del horizonte, en términos de  $n$  o  $r$  en forma equivalente.

Ahora procederemos a analizar el campo escalar, sobre la ecuación (3.38) aplicamos el límite  $n \ll A$ , lo que nos permite llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_{,n}^2 &\simeq \frac{f_k}{8\pi n(n-1)4n^2} \left[ \frac{2v_0^2 n(n-1)}{\pi} \right] \\ \phi_{,n}^2 &\simeq \frac{f_k v_0^2}{16\pi^2 n^2} \\ \phi_n &= \frac{v_0 \sqrt{f_k}}{4\pi n} \\ \phi(n) &= cte. \ln(n) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Éste resultado está en concordancia con el encontrado para el caso del acople mínimo en la región donde las curvas de rotación son planas, es decir, independientes del radio, y que corresponde a los valores que hemos asumido aquí para hacer el análisis lejos del horizonte. Por lo mismo, éste resultado es consistente con el anterior y nos dice que estamos recuperando el caso con acople mínimo en las regiones externas de la galaxia, tal y como también lo obtuvimos para el factor de acople.

En éste punto, es necesario encontrar una expresión para el factor de acople pero en términos de  $\phi$ , el campo escalar, de la misma forma en que lo hicimos para las regiones cercanas al horizonte. Para hacer ésto podemos considerar lo siguiente;

Dado que  $f = f(\phi(r))$ , tenemos que:

$$f_{,r} = f_{,\phi} \phi_{,r},$$

y de acuerdo a lo que obtuvimos en la ecuación (3.40),  $f(r) = cte$ , por lo tanto,  $f_{,r} = 0$  lo cual implica que

$$f_{,\phi} \phi_{,r} = 0,$$

y sabemos que  $\phi$  va como un logaritmo en esta región Ec.(3.41), por lo tanto  $f_{,\phi} = 0$  de lo cual obtenemos que

$$f = f(\phi) = cte. \quad (3.42)$$

y la constante la podemos elegir como 1, es decir, recuperamos el acople mínimo. De ésta forma, tenemos completa concordancia con el resultado que encontramos en el análisis hecho en el capítulo anterior para un campo escalar con simetría esférica mínimamente acoplado con la gravedad.

# Conclusiones

En el segundo capítulo encontramos que para un espacio tiempo estático esféricamente simétrico una condición necesaria y suficiente para tener un perfil constante en las curvas de rotación en el plano ecuatorial de ese espacio tiempo es que su tensor métrico debe tener la forma dada por la ecuación (2.23). Ésta forma de la métrica es la requerida para la región de las galaxias en donde el perfil de las curvas de rotación de las estrellas es plano. Es importante remarcar el hecho de que, en la deducción de esta expresión, únicamente estuvo involucrada la geometría del espacio tiempo, entonces, es independiente del tipo de materia que pueda estarla generando; por lo tanto, sin importar la materia bajo consideración, la ecuación (2.23) debe ser la forma del elemento de línea en el plano galáctico para un espacio tiempo estático y axisimétrico que se pueda expresar en la forma de Papapetrou, Ec. (2.1) con  $\omega = 0$ .

Utilizando ésta relación entre los coeficientes de la métrica, podemos encontrar las ecuaciones de Einstein las cuales incluirán ésta información que la geometría está imponiendo pero que a su vez, es la que debe cumplir el tipo de materia que pueda estar curvando el espacio tiempo de ésta manera. Al haber hecho la aproximación de que la relación que obtuvimos entre los coeficientes métricos en el plano galáctico, a partir de las ecuaciones (2.22), era también válida en una región cercana fuera del mismo, perdimos cierta generalidad en nuestros resultados, pero obtuvimos una relación para las segundas derivadas de los coeficientes métricos, Ec.(2.33).

Con ésta aproximación, pudimos obtener una ecuación de costricción entre las componentes de un tensor de energía momento general,  $T^{\alpha\beta}$  Ec.(2.34), la cual utilizamos para poner a prueba cuatro tipos de tensores de energía momento que son considerados como los candidatos más viables para formar



la materia oscura en los halos galácticos, esto es, vacío, un fluido perfecto, constante cosmológica y un campo escalar. Obtuvimos que para el caso del vacío una singularidad en el valor  $\rho = 0$  o cuerda cósmica genera el movimiento observado en las partículas de prueba. Este es un ejemplo de que el comportamiento Newtoniano de la densidad,  $\rho(r) \sim 1/r^2$ , no es una condición necesaria para describir el movimiento observado.

También analizamos el caso de un fluido perfecto estático, y a diferencia del caso en que se utiliza únicamente una descripción Newtoniana, con la formulación de la relatividad general, podemos obtener condiciones para la ecuación de estado del fluido que nos permiten tener más generalidad en el tipo de materia que podría ser el fluido perfecto.

A pesar de esto, no podemos reproducir el resultado conocido para un fluido tipo polvo debido a la aproximación que hicimos para poder obtener las segundas derivadas de los coeficientes métricos. Mostramos que un fluido oscuro con un tipo de materia exótica, es un candidato para conformar a la materia oscura.

Estos resultados representan el tipo de materia que se obtiene en los modelos de Quintaesencia pero encontrados a nivel galáctico. Presentamos el estudio para el fluido perfecto en el caso de un espacio tiempo esféricamente simétrico y estático en la penúltima sección del capítulo 2 y vemos que recobramos el resultado Newtoniano, esto es, el fluido perfecto oscuro puede ser polvo. El caso de la constante cosmológica junto con la inclusión de nuestra aproximación, implica que no puede ser considerada como candidato para formar a la materia oscura debido a que tendría que ser no masiva, y el campo escalar *no masivo permanece como uno de los candidatos posibles para formar a la materia oscura.*

Como ya habíamos mencionado, nuestros resultados son útiles para describir la región donde se observa el comportamiento plano en las curvas de rotación que describen las partículas de prueba alrededor del centro galáctico, sin embargo, es claro que resulta necesario continuar el análisis para poder considerar la región galáctica completa. Algunos resultados indican que la combinación de un fluido perfecto con materia bariónica podría dar resultados satisfactorios [13]. Además, la aproximación que hemos hecho para poder obtener las segundas derivadas de los coeficientes métricos tendrá que

ser analizada también. En éste sentido, sería de gran ayuda tener una muestra del perfil de las velocidades de los objetos que se mueven fuera del plano galáctico en el caso esférico donde no es necesario hacer ésta aproximación, aunque se tiene una restricción mayor sobre la geometría. Además, hay razones para creer que el halo de materia oscura es esférico [24], por éste motivo, estudiamos el caso para el campo escalar con acople mínimo en ésta simetría al final del capítulo 2, estos resultados también se presentan en [25].

En el análisis, pudimos obtener una solución para los coeficientes métricos y el campo escalar, nuevamente en la región donde las curvas de rotación de los objetos de prueba son planas, así como una expresión para el potencial del campo escalar en términos de una exponencial. Este análisis, nos permite considerar que el campo escalar es un candidato probable para formar a la materia oscura, dentro de las limitantes que nos impone el hecho de que restringimos nuestro análisis a la región exterior de la galaxia donde se sabe que la materia oscura domina.

Considerando los resultados obtenidos en el capítulo 2, el siguiente paso que seguimos fué analizar el caso de un espacio tiempo estático, esféricamente simétrico, pero ahora sin restringirnos a la región en donde las curvas de rotación para los objetos de prueba que siguen geodésicas circulares sean una constante, y obtuvimos una relación que condiciona al coeficiente métrico  $g_{tt}(r)$  en términos de una forma funcional para la velocidad tangencial que reproduce certeramente el perfil de las curvas de rotación dado que estamos proponiendo una solución particular para las ecuaciones de Einstein que incluye una singularidad cubierta por un horizonte lo cual nos garantiza que el escalar de Ricci no diverge en el valor de  $r$  correspondiente al horizonte.

Obtuvimos las ecuaciones de movimiento a partir de un Lagrangiano que incluye un factor de acople arbitrario entre el campo escalar y la gravitación, con el objetivo de averiguar si es posible encontrar una solución para el campo escalar en toda la región galáctica que no sea divergente en el valor cerca del centro de la galaxia, como fue observado en el caso con acople mínimo.

Utilizando el principio variacional e incluyendo la condición sobre el coeficiente métrico  $g_{tt}(r)$  llegamos a un sistema de ecuaciones que podemos trabajar hasta quedar con dos ecuaciones diferenciales para el factor de acople y el campo escalar que podemos resolver al considerar la forma explícita de la

solución que estamos proponiendo, [49] y al analizar dos regiones distintas para resolver el problema; primeramente, escribimos los parámetros de las ecuaciones en términos de la masa colapsada en el objeto central, el radio se expresa como  $2nM$  con  $n$  un número entero y  $M$  la masa del agujero negro, y al parámetro  $b$  que aparece en la expresión del coeficiente  $g_{tt}$  de la métrica como  $b = AM$  donde  $A$  es una constante.

De esta forma, podemos establecer dos límites a los que tienden las ecuaciones diferenciales del factor de acople y el campo escalar en función del radio cuando consideramos las regiones en que  $n \gg A$  o  $n \ll A$  respectivamente. Esto nos lleva a expresiones más compactas para el factor de acople y el campo escalar que resolvemos como ya se indicó en el capítulo 3, y cuyo comportamiento mostramos en las gráficas correspondientes.

A partir de los resultados que encontramos en función del parámetro de distancia, podemos dar el comportamiento del factor de acople en términos de  $\phi$  en ambas regiones galácticas, lo que nos permite comprobar que cerca del horizonte, el campo escalar se encuentra no mínimamente acoplado a la gravedad y que lejos del mismo, recuperamos el caso del acople mínimo lo que se encuentra en concordancia con el resultado obtenido en el capítulo 2. En éste caso, el resultado corresponde a un campo escalar no masivo, lo cual nos invita a seguir con el análisis para encontrar los resultados apropiados para el caso masivo. Independientemente de esto, la solución particular que estamos proponiendo, nos está permitiendo tener consistencia con los resultados que obtuvimos anteriormente, además de darnos la oportunidad de encontrar una expresión para el factor de acople sin recurrir a una teoría que nos diga su comportamiento a priori. Independientemente del hecho de que ésta solución constituye un resultado interesante por si misma debido a que funge como *contraejemplo* a las suposiciones de que no pueden existir este tipo de soluciones aún considerando un acople no mínimo con la gravedad [41].

De acuerdo a lo anterior, los resultados que obtuvimos aquí nos permiten seguir considerando que el campo escalar es un posible candidato para formar a la materia oscura. Además de que como se mencionó en el capítulo 2, la forma en que desarrollamos nuestro análisis, nos permite imponer condiciones geométricas sobre el tipo de materia que podría formar a la materia oscura, y en este sentido, la condición sobre el coeficiente métrico  $g_{tt}$  que estamos considerando en el análisis del último capítulo, tiene la ventaja de

corresponder al perfil que siguen las curvas de rotación, y por lo tanto, la información que estamos obteniendo sobre el factor de acople y el campo escalar, corresponde a toda la región galáctica fuera del horizonte de la solución que estamos proponiendo, por lo que los resultados que obtenemos aquí tienen más generalidad que los obtenidos para el caso de acople mínimo, en el que sólo considerábamos la región externa de la galaxia. Por eso mismo, es que podemos comparar el comportamiento que observa el campo escalar en las dos regiones, con el que obtuvimos anteriormente sólo para una de ellas.

Los resultados encontrados constituyen un primer paso para continuar analizando el problema, en éste sentido, lo que corresponde hacer ahora es encontrar la forma funcional de el factor de acople con el campo escalar para el caso en que éste sea masivo, porque el resultado que obtuvimos aquí corresponde a un potencial  $V(\phi) = 0$ . Será necesario que encontremos la forma en que el potencial depende de  $\phi$  lo cual, aunado a la expresión para el factor de acople  $f$  nos permitirá obtener mas información acerca de la manera en que el campo escalar se comporta en el caso en que fuera el constituyente de la materia oscura a nivel galáctico, y probablemente a nivel cosmológico.

# Apéndice A

En éste apéndice, presentamos la generalización de la derivación de la ecuación de constricción entre los coeficientes métricos, Ec.(2.21), para el caso estacionario, donde  $\omega \neq 0$ , descrito por el elemento de línea (2.1).

De la Ec.(2.3), expresamos  $\dot{t}$ , y  $\dot{\phi}$ . en términos de  $E$ ,  $L$ , y los coeficientes métricos como

$$\dot{t} = \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} [(\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2) E - \omega L] . \quad (A.1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} (\omega E + L) . \quad (A.2)$$

Usando esta ecuación en las de constricción, Eqs.(2.6) llegamos a que:

$$\mu^2 e^{-2\psi} (1 - e^{-2\psi} E^2) + (\omega E + L)^2 = 0 . \quad (A.3)$$

$$-(e^{-2\psi})_{,\rho} E^2 + \left( \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} \right)_{,\rho} (\omega E + L)^2 + \frac{2 e^{2\psi}}{\mu^2} (\omega E + L) \omega_{,\rho} E = 0 . \quad (A.4)$$

Resolviendo para  $E$  y  $L$ , obtenemos:

$$E = e^{\psi} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} . \quad (A.5)$$

$$L = \frac{\mu e^{-\psi}}{\sqrt{\mathcal{B}}} \left( \sqrt{\mathcal{A} - \mathcal{B}} - \frac{\omega e^{2\psi}}{\mu} \sqrt{\mathcal{A}} \right) , \quad (A.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & 2 e^{-4\psi} (\mu_{\rho} - \mu \psi_{\rho})(\mu_{\rho} - 2 \mu \psi_{\rho}) - (\omega_{\rho})^2 + \\ & \pm \omega_{\rho} \sqrt{(\omega_{\rho})^2 - 4 \mu \psi_{\rho} e^{-4\psi} (\mu_{\rho} - \mu \psi_{\rho})} . \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\mathcal{B} = 2 e^{-4\psi} (\mu_{\rho} - 2 \mu \psi_{\rho})^2 - 2 (\omega_{\rho})^2 . \quad (A.8)$$

Para la segunda derivada del potencial  $V(\rho)$  evaluada en el extremo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 V_{\rho\rho}|_{extr} = & -\frac{2e^{2(\psi-\gamma)}}{\mathcal{B}} \left[ \left( 2\psi_{\rho\rho} - \frac{\mu_{\rho\rho}}{\mu} + 3\left(\frac{\mu_{\rho}}{\mu}\right)^2 - 4\frac{\mu_{\rho}}{\mu}\psi_{\rho} + \frac{e^{4\psi}}{\mu^2}(\omega_{\rho})^2 \right) \mathcal{A} \right. \\
 & - \left( \psi_{\rho\rho} - \frac{\mu_{\rho\rho}}{\mu} + 2(\psi_{\rho})^2 + 3\left(\frac{\mu_{\rho}}{\mu}\right)^2 - 4\frac{\mu_{\rho}}{\mu}\psi_{\rho} \right) \mathcal{B} + \\
 & \left. \left( 4\left(\psi_{\rho} - \frac{\mu_{\rho}}{\mu}\right)\omega_{\rho} + \omega_{\rho\rho} \right) \frac{\sqrt{\mathcal{A}(\mathcal{A}-\mathcal{B})}}{\mu} \right]. \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones (A.2), y (A.6), en la expresión para la velocidad angular, Ec.(2.11) obtenemos que

$$\Omega = \frac{e^{2\psi}}{\mu} \frac{\sqrt{\mathcal{A}-\mathcal{B}}}{\sqrt{\mathcal{A}-\frac{\omega e^{2\psi}}{\mu^2}} \sqrt{\mathcal{A}-\mathcal{B}}}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  estan dados por las Ecs.(A.7) y (A.8).

Como en el caso estático, siguiendo a Chandrasekhar [14], reescribimos el elemento de línea dado en la Ec.(2.1) como:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{\mu^2 e^{-2\psi}}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} dt^2 + e^{2\psi} (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2) \left( d\varphi - \frac{\omega}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} dt \right)^2 + \\
 & e^{-2(\psi-\gamma)} (d\rho^2 + dz^2). \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

En términos del tiempo propio,  $d\tau^2 = -ds^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 d\tau^2 = & \frac{\mu^2 e^{-2\psi}}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} dt^2 \left[ 1 - \frac{e^{4\psi} (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2)^2}{\mu^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\omega}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. - \frac{e^{2\gamma} (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2)}{\mu^2} \left( \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right], \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

de donde podemos escribir que

$$1 = \frac{\mu^2 e^{-2\psi}}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} u^{02} [1 - v^2], \quad (\text{A.13})$$

donde  $u^0 = \frac{dt}{d\tau}$  es la componente temporal de la cuadrivelocidad, y una definición de la velocidad espacial,  $v^2$ , surge de esta manera

$$v^2 = \frac{e^{4\psi} (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2)^2}{\mu^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\omega}{\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2} \right)^2 + \frac{e^{2\gamma} (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2)}{\mu^2} \left( \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right), \quad (A.14)$$

que es la tres velocidad de una partícula, medida respecto a un sistema de referencia ortonormal, con componentes:

$$v^2 = v^{(\varphi)^2} + v^{(\rho)^2} + v^{(z)^2}. \quad (A.15)$$

Para la componente  $\varphi$ - de la velocidad espacial obtenemos:

$$v^{(\varphi)} = \frac{e^{2\psi}}{\mu} \left[ (\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2) \Omega - \omega \right], \quad (A.16)$$

y sustituyendo  $\Omega$  de la Ec.(A.10) obtenemos una expresión para la velocidad tangencial de una partícula de prueba en movimiento en una orbita circular estable:

$$v^{(\varphi)} = \frac{\mu e^{-2\psi} \sqrt{\mathcal{A} - \mathcal{B}} - \omega \sqrt{\mathcal{A}}}{\mu e^{-2\psi} \sqrt{\mathcal{A}} - \omega \sqrt{\mathcal{A} - \mathcal{B}}}, \quad (A.17)$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  estan dadas por las Ecs.(A.7) y (A.8).

Imponiendo la condición de que sea constante para todo radio, esto es  $v_p^{(\varphi)} = 0$ , entonces  $v^{(\varphi)} = v_c^{(\varphi)}$ , con  $v_c^{(\varphi)}$  una constante, representando el valor de la velocidad, de la Ec. (A.17), tenemos que:

$$\mathcal{B} = (1 - v_c^{(\varphi)^2}) F^2 \mathcal{A}, \quad (A.18)$$

donde

$$F = \frac{(\mu^2 e^{-4\psi} - \omega^2)}{(\mu e^{-2\psi} + v_c^{(\varphi)} \omega)^2}.$$

Ésta última expresión, representa una constricción entre tres de los coeficientes de la métrica, y podemos expresar a uno de ellos, por ejemplo  $\omega$ , en términos de los otros dos:  $\psi$ , y  $\mu$ . De ésta manera, llegamos a la siguiente condición: La velocidad tangencial de una partícula de prueba moviéndose en una órbita ecuatorial y circular en un espacio tiempo de fondo axisimétrico y estacionario, tiene una magnitud independiente del radio si los coeficientes de la métrica satisfacen la ecuación de constricción (A.18).

# Apéndice B

En éste apéndice incluiremos el análisis hecho sobre los resultados obtenidos en el capítulo 2 para el caso de Schwarzschild y comprobando que ésto nos permite recuperar resultados conocidos dando una transformación de coordenadas. Empezando con el elemento de línea en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (B.1)$$

realizamos la transformación coordenada

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} + \frac{M^2}{4\sqrt{\rho^2 + z^2}} + M, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{z}\right). \quad (B.2)$$

La transformación inversa es  $\rho = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$ , con

$$R = \frac{1}{2} (r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr}),$$

para obtener el elemento de línea en la forma de Papapetrou, Ec.(2.1), con

$$\begin{aligned} e^{2\psi} &= \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2} - \frac{M}{2}}{\sqrt{\rho^2 + z^2} + \frac{M}{2}} \right)^2, \\ e^{2\gamma} &= \left( 1 - \frac{M^2}{4(\rho^2 + z^2)} \right)^2, \\ \mu &= \rho \left( 1 - \frac{M^2}{4(\rho^2 + z^2)} \right), \\ \omega &= 0. \end{aligned}$$

El horizonte en éstas coordenadas esta localizado en  $\sqrt{\rho^2 + z^2} = \frac{M}{2}$ . Restringiendo las expresiones al plano ecuatorial,  $z = 0$ , tenemos que

$$\psi|_{z=0} = \ln \left( \left( \rho - \frac{M}{2} \right) / \left( \rho + \frac{M}{2} \right) \right),$$



$$\mu|_{z=0} = \rho \left(1 - M^2/4\rho^2\right),$$

entonces, de las Ecs.(2.9), obtenemos para la energía y el momento angular:

$$E = \frac{\left(\rho - \frac{M}{2}\right)^2}{\left(\rho + \frac{M}{2}\right) \sqrt{\rho^2 - 2M\rho + \frac{M^2}{4}}}. \quad (B.3)$$

$$L = \left(\rho + \frac{M}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{M}{\rho(\rho^2 - 2M\rho + \frac{M^2}{4})}}. \quad (B.4)$$

Para la velocidad angular de las partículas de prueba, de la Ec.(2.12):

$$\Omega = \sqrt{M} \rho^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^{-3}, \quad (B.5)$$

lo cual nos dá la ley de Kepler. Para la velocidad tangencial de la Ec.(2.19) obtenemos

$$v^{(\varphi)} = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^{-1}, \quad (B.6)$$

que es conocida como la dependencia inversa en la raíz cuadrada de la distancia. Transformando de nuevo a coordenadas esféricas, se puede ver que nuestras expresiones coinciden con las usuales, por ejemplo [16]. Para la segunda derivada del potencial es útil escribir  $\rho$  en términos del radio del horizonte,  $\rho = n \frac{M}{2}$ , con  $n$  un número y de la Ec.(2.10) obtenemos:

$$V_{\rho\rho}|_{extr} = \frac{4 e^{2(\psi-\gamma)}}{M^2 n (n+1)^3} \frac{(n^2 - 10n + 1)}{(n^2 - 4n + 1)}. \quad (B.7)$$

Esta segunda derivada es positiva para valores menores a  $\rho = (5 + 2\sqrt{6}) \frac{M}{2}$ , lo cual denota la última órbita estable, y corresponde al resultado conocido de  $r = 6M$  en coordenadas esféricas.

## Apéndice C

En éste apéndice comprobamos el hecho de que la velocidad tangencial es proporcional al corrimiento al rojo dado que las observaciones están basadas en medidas para el corrimiento al rojo, no en la velocidad tangencial directamente. Si el espacio tiempo es plano, las dos cantidades son proporcionales. Pero estamos trabajando en espacios tiempos curvos, así que necesitamos comprobar que esa proporcionalidad continua siendo válida. Siguiendo [17], usamos el hecho de que la frecuencia de un fotón está dada por  $\nu = u^\alpha p_\alpha$ , con  $u^\alpha$  la cuadrivelocidad del objeto y  $p^\alpha$  el momento del fotón, tenemos que el corrimiento al rojo,  $z$ , es

$$z = 1 - \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}}, \quad (C.1)$$

entonces, para un objeto orbitando el centro galáctico en el plano ecuatorial a una distancia  $\rho$  del centro, con velocidad tangencial  $v^{(\varphi)}$  y emitiendo un fotón con frecuencia  $\nu_0$ , para un observador en reposo localizado en infinito, esto es, lejos de la emisión, el fotón detectado tiene la frecuencia  $\nu_\infty$ , se puede mostrar que el corrimiento al rojo está dado por:

$$z = 1 - \frac{(1 + v^{(\varphi)})}{\sqrt{1 - v^{(\varphi)2}}} \sqrt{\frac{g_{tt}(\rho)}{g_{tt}(\infty)}}. \quad (C.2)$$

Para las velocidades observadas tenemos que  $v \ll 1$ , lo cual implica que son mucho menores que la velocidad de la luz, y tenemos que suponer que lejos de la galaxia observada, su influencia gravitacional termina, de otra forma no podríamos detectar la velocidad tangencial, y nos estaríamos moviendo junto con el objeto observado. Por lo tanto, podemos tomar  $g_{tt}(\infty) = -1$  y tenemos que a primer orden en la velocidad, con  $g_{tt}(\rho) = -e^\psi = -1 - \psi - \dots$ , obtenemos:

$$z = -(v^{(\varphi)} + \psi + \dots). \quad (C.3)$$

Y tenemos que calcular esto para el caso analizado

$$\psi = v^{(\varphi)^2} / (1 + v^{(\varphi)^2}) \ln(\mu/\mu_0) \sim 2 v^{(\varphi)^2} (\mu - 1)/(\mu + 1),$$

entonces

$$\psi \sim v^{(\varphi)^2},$$

y concluimos que

$$z \sim v^{(\varphi)}.$$

En ésta forma, vemos que la independencia del radio del valor medido para el corrimiento al rojo puede ser relacionado con la independencia del valor de la velocidad tangencial.

# Apéndice D

En éste apéndice se presentan las expresiones para las ecuaciones de Einstein de la métrica de Papapetrou Ec.(2.1), presentada en el capítulo 2 con el coeficiente métrico  $\omega = 0$ , i.e., la expresión para la métrica es:

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)} d\rho^2 + e^{(\gamma-\psi)} dz^2 + \mu^2 e^{-2\psi} d\phi^2$$

Para la cual, los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \psi_\rho, \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = 0, \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \psi_z, \Gamma_{11}^0 = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = 0, \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = 0, \Gamma_{22}^0 = 0, \Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = 0, \Gamma_{33}^0 = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 = e^{2(2\psi-\gamma)} \psi_\rho, \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = 0, \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = 0, \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = (\gamma_\rho - \psi_\rho), \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = (\gamma_z - \psi_z),$$

$$\Gamma_{22}^1 = e^{-2\gamma} (\mu^2 \psi_\rho - \mu \mu_\rho), \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0, \Gamma_{33}^1 = (\psi_\rho - \gamma_\rho), \Gamma_{00}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = 0, \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = 0, \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = 0, \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\mu_\rho}{\mu} - \psi_\rho, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{\mu_z}{\mu} - \psi_z, \Gamma_{33}^2 = 0, \Gamma_{00}^3 = e^{2(2\psi-\gamma)} \psi_z,$$

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = 0, \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = 0, \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^3 = \psi_z - \gamma_z, \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \gamma_\rho - \psi_\rho,$$

$$\Gamma_{22}^3 = (\mu^2 \psi_z - \mu \mu_z) e^{-2\gamma}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = 0, \Gamma_{33}^3 = \gamma_z - \psi_z$$

Las componentes del tensor de curvatura son:

$$R_{1010} = e^{2\psi} [\psi_{\rho\rho} + \psi_\rho (2\psi_\rho - \gamma_\rho) - \psi_z (\psi_z - \gamma_z)]$$

$$R_{2020} = -e^{2(\psi-\gamma)} [\mu^2 (\psi_\rho^2 + \psi_z^2) - \mu (\mu_\rho \psi_\rho + \mu_z \psi_z)]$$

$$R_{3030} = e^{2\psi} [\psi_{zz} + \psi_z (2\psi_z - \gamma_z) - \psi_\rho (\psi_\rho - \gamma_\rho)]$$

$$\begin{aligned}
 R_{2121} &= e^{-2\psi} [\mu\psi_\rho(2\mu_\rho - \mu\psi_\rho) + \mu(\mu\psi_{\rho\rho} - \mu_{\rho\rho})] \\
 &+ e^{-2\psi} [(\gamma_\rho - \psi_\rho)(\mu^2\psi_\rho - \mu\mu_\rho) - (\psi_z - \gamma_z)(\mu^2\psi_z - \mu\mu_z)] \\
 R_{0301} &= e^{2\psi} [\psi_{\rho z} + \psi_\rho(3\psi_z - \gamma_z) - \psi_z\gamma_\rho] \\
 R_{2321} &= \mu e^{-2\psi} [\psi_\rho(\mu_z - \mu\gamma_z) + \mu\psi_{\rho z} + \mu_\rho\gamma_z]
 \end{aligned}$$

Y de éste modo podemos calcular las componentes del tensor de Ricci distintas de cero:

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= e^{2(2\psi-\gamma)} \left[ \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \frac{\mu_\rho\psi_{\rho\rho}}{\mu} + \frac{\mu_z\psi_z}{\mu} \right] \\
 R_{\rho\rho} &= \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} - \gamma_{\rho\rho} - \gamma_{zz} - 2\psi_\rho^2 + \frac{1}{\mu}(\mu_z\psi_z + \mu_\rho\psi_\rho + \mu_\rho\gamma_\rho - \mu_z\gamma_z - \mu_{\rho\rho}) \\
 R_{\phi\phi} &= e^{-2\gamma} [\mu^2\psi_{\rho\rho} - \mu\mu_{\rho\rho} + \mu\mu_z\psi_z + \mu^2\psi_{zz} - \mu\mu_{zz} + \mu\mu_\rho\psi_\rho] \\
 R_{\rho z} &= \frac{1}{\mu}(\mu_\rho\gamma_z + \mu_z\gamma_\rho - \mu_{\rho z}) - 2\psi_\rho\psi_z \\
 R_{zz} &= \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} - \gamma_{\rho\rho} - \gamma_{zz} - 2\psi_z^2 + \frac{1}{\mu}(\mu_\rho\psi_\rho + \mu_z\gamma_z - \mu_\rho\gamma_\rho + \mu_z\psi_z - \mu_{zz}) \\
 R_{z\rho} &= -R_{\rho z}
 \end{aligned}$$

Y el escalar de curvatura es:

$$R = 2e^{2(\psi-\gamma)} \left[ \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} - \gamma_{\rho\rho} - \gamma_{zz} - \psi_z^2 - \psi_\rho^2 + \frac{1}{\mu}(\mu_\rho\psi_\rho + \mu_z\psi_z - \mu_{\rho\rho} - \mu_{zz}) \right]$$

Con lo cual, las componentes del tensor de Einstein son:

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= e^{2\psi} e^{2(\psi-\gamma)} \left[ 2\psi_{\rho\rho} + 2\psi_{zz} - \gamma_{\rho\rho} - \gamma_{zz} - \psi_\rho^2 - \psi_z^2 + \frac{1}{\mu}(2\mu_\rho\psi_\rho + 2\mu_z\psi_z - \mu_{\rho\rho} - \mu_{zz}) \right] \\
 G_{\rho\rho} &= \psi_z^2 - \psi_\rho^2 + \frac{1}{\mu}(\mu_\rho\gamma_\rho - \mu_z\gamma_z + \mu_{zz}) \\
 G_{\phi\phi} &= \mu^2 e^{-2\gamma} (\gamma_{\rho\rho} + \gamma_{zz} + \psi_z^2 + \psi_\rho^2) \\
 G_{zz} &= \psi_\rho^2 - \psi_z^2 + \frac{1}{\mu}(\mu_{\rho\rho} + \mu_z\gamma_z - \mu_\rho\gamma_\rho) \\
 G_{\rho z} &= R_{\rho z}
 \end{aligned}$$

# Apéndice E

En éste apéndice mostraremos la analogía entre un campo escalar masivo y un fluido perfecto y comprobaremos que la misma nos permite llegar a una ecuación de estado análoga a la obtenida en la Ec.(2.41) del capítulo 2.

Recordando que el tensor de energía momento para el campo escalar y el fluido perfecto son, respectivamente:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + g_{\mu\nu}V(\phi)$$

Y

$$T_{\mu\nu} = (d + p)u_{\mu}u_{\nu} + g_{\mu\nu}p$$

Ahora hacemos la sustitución  $\phi_{,\mu} = ku_{\mu}$ , donde  $k$ , es una constante, sustituimos en la expresión para el tensor que describe al campo escalar y obtenemos:

$$T_{\mu\nu} = k^2u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{\alpha}\phi_{,\alpha} - 2V(\phi)]$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{2}[\phi^{\alpha}\phi_{,\alpha} - 2V(\phi)]$$

y

$$k^2 = d + p \Rightarrow k^2 = d - \frac{1}{2}(\phi^{\alpha}\phi_{,\alpha} - 2V(\phi))$$

Considerando a  $\phi = \phi(t)$ , las componentes del tensor de energía momento del campo escalar quedan como

$$T_{00} = T_{tt} = de^{2\psi}$$

$$T_{11} = T_{\rho\rho} = pe^{2(\gamma-\psi)}$$

$$T_{22} = T_{\phi\phi} = p\mu^2e^{-2\psi}$$

$$T_{33} = T_{zz} = pe^{2(\gamma-\psi)}$$

Las cuales se sustituyen en la ecuación (2.34) lo que nos lleva a la siguiente ecuación de estado análoga a la que habíamos encontrado en el capítulo 2 en el caso del fluido perfecto:

$$p = -\frac{(1 + v_c^2)}{(3 - v_c^2)}d$$

De lo cual podemos observar que al hacer la analogía entre fluido perfecto y campo escalar, es posible conservar la forma de la ecuación de estado a la que llegábamos en el capítulo 2 para el caso de fluido perfecto únicamente.