



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Software auxiliar de Cálculo
Diferencial : La Derivada.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
MATEMATICA

P R E S E N T A :
SARA EDITH MIRANDA BARRETO

DIRECTOR DE TESIS :
M. EN C. WILFRIDO MARTINEZ TORRES

2001



298565



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
 Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
 Facultad de Ciencias
 Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Software auxiliar de Cálculo Diferencial: La Derivada

realizado por Sara Edith Miranda Barreto

con número de cuenta 8853008-0, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Wilfrido Martínez Torres	<i>[Firma]</i>
Propietario	Mat. María Juana Linares Altamirano	<i>[Firma]</i>
Propietario	Fis. Mat. Héctor de Jesús Argueta Villamar	<i>[Firma]</i>
Suplente	Dr. Carlos Hernández Garcíadiego	<i>[Firma]</i>
Suplente	Mat. Esteban Ruben Hurtado Cruz	<i>[Firma]</i>

Consejo Departamental de Matemáticas

[Firma]
M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONTENIDO

I. ACERCA DEL PROGRAMA	1
II. INSTALACION	
II.1 Requerimientos de Hardware y Software.....	1
II.2 Instalación del Programa y de las Fuentes.....	1
III. DESCRIPCION DEL PROGRAMA	
III.1 Navegación dentro del programa.....	2
III.2 Interactividad con el usuario	
III.2.1 Áreas Calientes.....	3
III.2.2 Arrastre de objetos y animación en pantalla.....	4
III.3 Estructura temática del programa	5
IV. EJECUTANDO EL PROGRAMA	
IV.1 Pantalla de Presentación.....	6
IV.1.1 Botón: Nota Importante, de la Pantalla de Presentación.....	7
IV.1.2 Botón: Continuar, de la Pantalla de Presentación.....	8
IV.2 Pantalla de Acceso a Derivada	9
IV.2.1 Botón: Derivada, de la Pantalla de Acceso.....	10
IV.3 Navegando por el menú: Más sobre la definición de Derivada	11
IV.3.1 Botón Más sobre la definición de Derivada.....	12
IV.3.2 Botón: Explicación, en el menú Más sobre la definición de Derivada.....	13
IV.3.3 Botón: Continuar, en el menú Más sobre la definición de Derivada.....	14
IV.3.4 Botón Ejemplos: funciones derivables, en el menú Más sobre la definición de Derivada..	15
IV.3.5 Botón Ejemplo: $h(x) = 2x^2 + 1$	16
IV.3.6 Botón Regresar en la Pantalla $h(x) = 2x^2 + 1$	17
IV.3.7 Botón Regresar en la Pantalla del menú de Ejemplos.....	18
IV.3.8 Botón Ejemplos: funciones no derivables en cero, en la Pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada.....	19
IV.3.9 Botón Ejemplo $f(x) = x $	20
IV.3.10 Botón Regresar en la Pantalla $f(x) = x $	21
IV.3.11 Botón Regresar en la Pantalla Ejemplos.....	22

IV.3.12 Botón Ejercicios en la Pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada.	23
IV.3.13 Botón Solución en la Pantalla Ejercicios.	24
IV.3.14 Botón Menú Anterior en la Pantalla de Ejercicios.	25
IV.3.15 Botón Problemas en la Pantalla Más sobre la definición de Derivada.	26
IV.3.16 Hipertexto en la Pantalla Problemas.	27
IV.3.17 Botón Menú Anterior en la Pantalla Problemas.....	28
IV.3.18 Botón Derivadas de orden superior en la Pantalla Más sobre la definición de Derivada.	29
IV.3.19 Botón Ejemplo en la Pantalla Derivadas de orden superior.....	30
IV.3.20 Botón Menú Anterior en la Pantalla Ejemplo.	31
IV.3.21 Botón Menú Anterior en la Pantalla Derivadas de orden superior.	32
IV.3.22 Botón Notas Históricas en la Pantalla Más sobre la Definición de Derivada.....	33

I. ACERCA DEL PROGRAMA

Software Auxiliar de Cálculo Diferencial: La Derivada, es un programa para computadoras PC-compatibles, cuya finalidad es servir como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, del concepto de DERIVADA de funciones reales de una variable real.

Este software aborda el aspecto formal del concepto de la derivada de funciones reales de una variable real; se ha tratado de reforzar este aspecto mediante interpretaciones geométricas, ejemplos, ejercicios y problemas.

II. INSTALACION

II.1 Requerimientos de hardware y software

- Computadora:
IBM PC, POWER MAC.
- Sistema Operativo:
Windows 95 en adelante
- Adaptador y Monitor compatible con uno de los siguientes:
SVGA, Plug and Play.
- Memoria RAM:
8 MB
- Unidades de Disco:
Disco duro

II.2 Instalación del Programa y de las Fuentes.

- Insertar el CD de instalación
- Ejecutar el programa **Instalar**
- En la caja de dialogo que aparece dar la carpeta donde se desea instalar el programa, por ejemplo en C:/, enseguida dar clic en finish.
- Una vez instalado el programa, instalar las fuentes de Math Type ejecutando el archivo Wintruetype que se encuentra en la carpeta donde se instalo el programa.

I. ACERCA DEL PROGRAMA

Software Auxiliar de Cálculo Diferencial: La Derivada, es un programa para computadoras PC-compatibles, cuya finalidad es servir como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, del concepto de DERIVADA de funciones reales de una variable real.

Este software aborda el aspecto formal del concepto de la derivada de funciones reales de una variable real; se ha tratado de reforzar este aspecto mediante interpretaciones geométricas, ejemplos, ejercicios y problemas.

II. INSTALACION

II.1 Requerimientos de hardware y software

- Computadora:
IBM PC, POWER MAC.
- Sistema Operativo:
Windows 95 en adelante
- Adaptador y Monitor compatible con uno de los siguientes:
SVGA, Plug and Play.
- Memoria RAM:
8 MB
- Unidades de Disco:
Disco duro

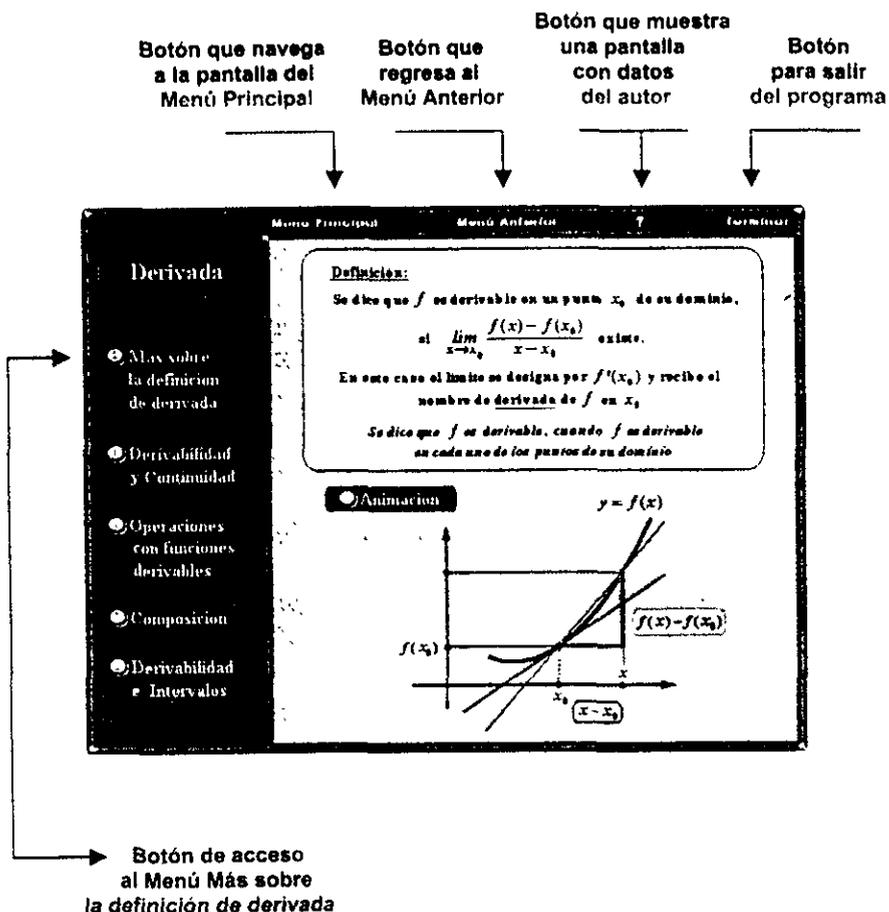
II.2 Instalación del Programa y de las Fuentes.

- Insertar el CD de instalación
- Ejecutar el programa **Instalar**
- En la caja de dialogo que aparece dar la carpeta donde se desea instalar el programa, por ejemplo en C:/, enseguida dar clic en finish.
- Una vez instalado el programa, instalar las fuentes de Math Type ejecutando el archivo Wintruetype que se encuentra en la carpeta donde se instalo el programa.

III. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

III.1 Navegación dentro del programa

La navegación en el programa se lleva a cabo mediante botones de acción. Como ejemplo, se muestra a continuación la pantalla del Menú Principal con una breve descripción de algunos de los botones que en ella aparecen.



III.2 Interactividad con el usuario

III.2.1 Áreas Calientes. En algunas de las pantallas aparecen áreas limitadas por un rectángulo de color rojo, al situar el puntero del ratón sobre ellas, se muestra información adicional de algún concepto, demostración o gráfico.

Teorema del Valor Medio Menú Principal Menú Anterior 7 Teoremas

Demostración: $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ \text{y derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Regresar

Demostración:

Sean: $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ y $h(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Evidentemente, h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Además,

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \quad \text{y} \quad h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

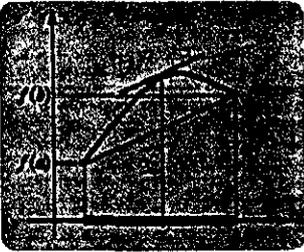
$\therefore h(a) = h(b)$.

$\therefore h$ cumple las hipótesis del **Teorema de Rolle**.

$\therefore \exists x_0 \in (a, b) \ni h'(x_0) = 0$.

y como $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

tenemos que $h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


Al situar el puntero del ratón sobre esta área, se resaltan las hipótesis y se despliega un recuadro con el Teorema de Rolle

Teorema del Valor Medio Menú Principal Menú Anterior 7 Teoremas

Demostración: $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ \text{y derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Regresar

Demostración:

Sean: $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ y $h(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Evidentemente, h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Además,

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \quad \text{y} \quad h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

$\therefore h(a) = h(b)$.

$\therefore h$ cumple las hipótesis del **Teorema de Rolle**.

$\therefore \exists x_0 \in (a, b) \ni h'(x_0) = 0$.

y como $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

tenemos que $h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema (de Rolle)

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua sobre } [a, b] \\ f \text{ derivable sobre } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\}$$

⇓

$$\exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0) = 0$$

III.2.2 Arrastre de objetos y animación en pantalla. Las opciones de arrastrar un objeto y animación en pantalla, despliegan información gráfica de teoremas o definiciones.

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminal

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

Objeto que se puede arrastrar con un clic sostenido del ratón.

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminal

Derivada

- Más sobre la definición de derivada
- Derivabilidad y Continuidad
- Operaciones con funciones derivables
- Composición
- Derivabilidad e Intervalos

Definición:
 Se dice que f es derivable en un punto x_0 de su dominio, si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

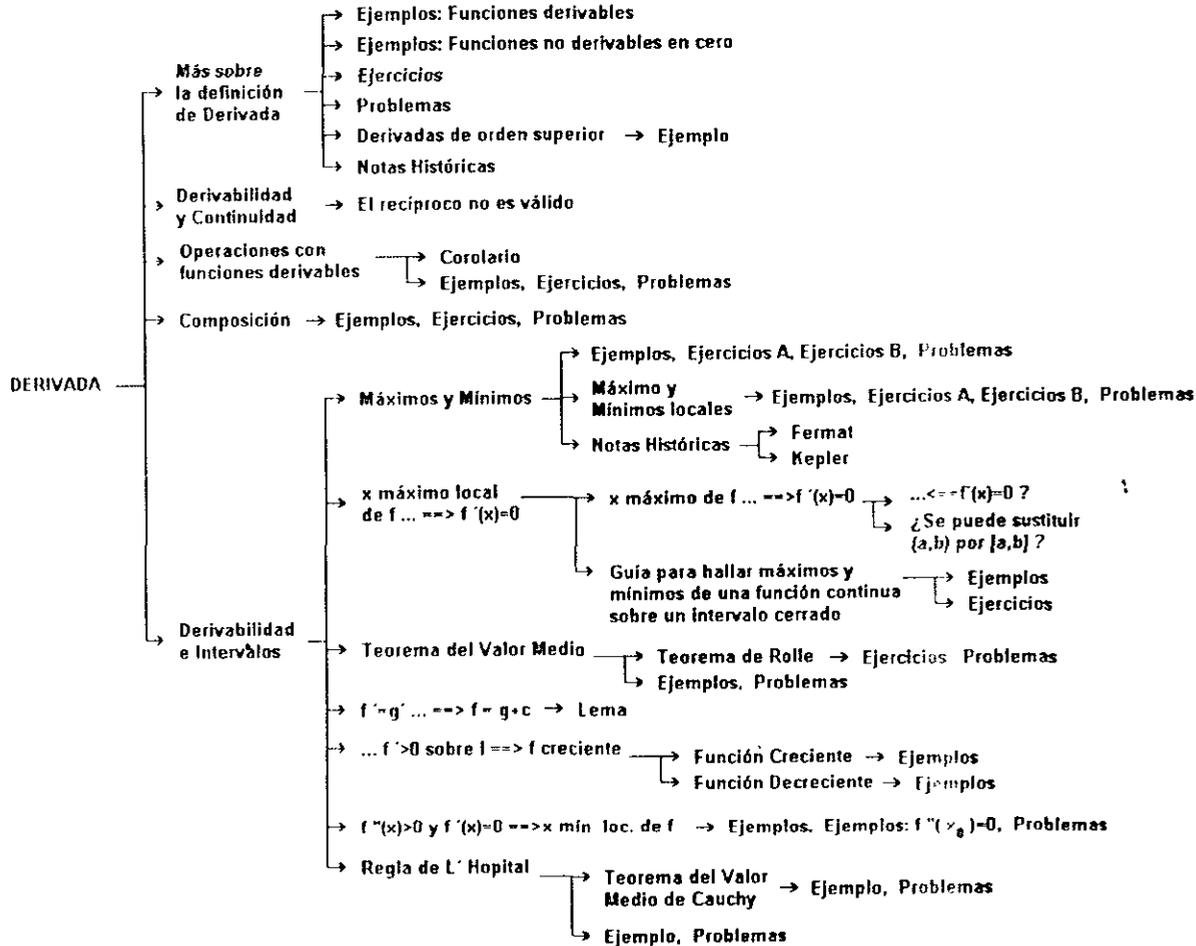
En este caso el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0

Se dice que f es derivable, cuando f es derivable en cada uno de los puntos de su dominio

Animación

Botón que muestra una animación en pantalla.

III.3 Estructura temática del programa



IV. EJECUTANDO EL PROGRAMA

IV.1 Pantalla de Presentación

Al correr el programa, se despliega la siguiente pantalla, que muestra el nombre del autor, el tema, el nombre del director de tesis y las instituciones que apoyaron el desarrollo de este trabajo.



Trabajo de tesis que para obtener
el título de Matemática, presenta

Sara Edith Miranda Barreto
(Módulo de Derivada)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota importante

Continuar

Nota:

Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, los autores recibieron el apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.

Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, los autores y el director de tesis recibieron el apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

IV.1.1 Botón: Nota Importante, de la Pantalla de Presentación.



Trabajo de tesis que para obtener el título de Matemática, presenta

Sara Edith Miranda Barreto
(Módulo de Derivadas)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Al oprimir el botón Nota Importante, aparece en la pantalla el siguiente recuadro.

Nota Importante Continuar

Nota

Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, los autores recibieron el apoyo de la Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.

Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, los autores y el director de tesis recibieron el apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.



Trabajo de tesis que para obtener el título de Matemática, presenta

Sara Edith Miranda Barreto
(Módulo de Derivadas)

Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

NOTA:

Continuar

- En muchas partes del programa, hay áreas rectangulares delimitadas por líneas rojas. al situar el cursor sobre éstas, aparece más información relacionada.

Ejemplo:

Teorema del Valor Medio

IV.1.2 Botón: Continuar, de la Pantalla de Presentación.



Trabajo de tesis que para obtener
el título de Matemática, presenta:

Sara Edith Miranda Barreto
(Módulo de Derivada)

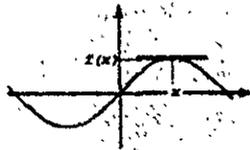
Director de tesis: M. en C. Wilfrido Martínez T.

Nota importante Continuar

Al oprimir el
botón de
Continuar, se
pasa a la
pantalla de
acceso al tema
Derivada

Nota.
Durante el desarrollo de la primera versión de este trabajo, los autores recibieron el apoyo de la
Dirección General de Servicios de Computo Académico de la UNAM.
Para el desarrollo de la versión final de este trabajo, los autores y el director de tesis recibieron
el apoyo del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

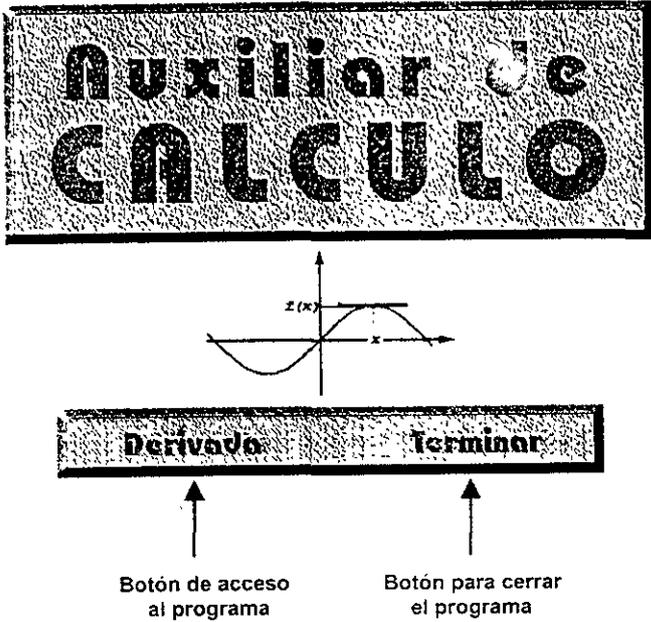
**Auxiliar de
CALCULO**



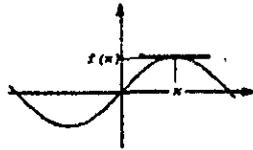
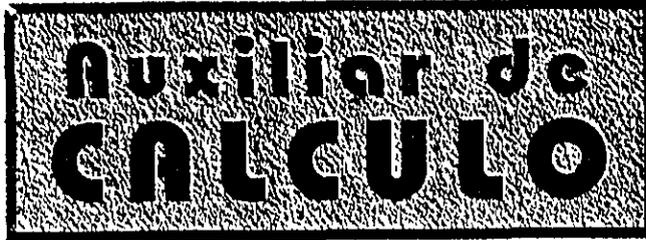
Derivada Terminar

IV.2 Pantalla de Acceso a Derivada

En la pantalla de acceso al tema Derivada, se tienen las siguientes opciones.



IV.2.1 Botón: Derivada, de la Pantalla de Acceso.



Al oprimir el botón Derivada, se pasa a la pantalla del Menú Principal



The screenshot shows a software interface with a dark background. At the top, there are labels for "Menú Principal", "Menú Anterior", and "Terminar". On the left side, there is a vertical menu titled "Derivada" with several options, each preceded by a radio button:

- Mas sobre la definicion de derivada
- Derivabilidad y Continuidad
- Operaciones con funciones derivables
- Composición
- Derivabilidad e Intervalos

The main area of the screen contains the following text:

Definición.
Se dice que f es derivable en un punto x_0 de su dominio, si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

En este caso el limite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0 .

Se dice que f es derivable, cuando f es derivable en cada uno de los puntos de su dominio.

Below the text, there is a section labeled "Animación" with a radio button. To its right is a graph of a function $y = f(x)$. A point x_0 is marked on the x-axis, and a tangent line is drawn to the curve at the point $(x_0, f(x_0))$. The vertical distance between the curve and the tangent line at a point x is labeled $f(x) - f(x_0)$.

IV.3 Navegando por el menú: Más sobre la definición de Derivada

En este manual se muestra sólo la manera de navegar por el menú Mas sobre la definición de Derivada, el acceso a los demás subtemas del menú Principal se hace de manera similar

The screenshot shows a software interface with a dark sidebar on the left and a main content area on the right. The sidebar contains a menu titled 'Derivada' with five radio button options: 'Más sobre la definición de derivada', 'Derivabilidad y Continuidad', 'Operaciones con funciones derivables', 'Composición', and 'Derivabilidad a Intervalos'. The 'Más sobre la definición de derivada' option is selected. The main content area has a title bar with 'Menú Principal', 'Menú Anterior', '?', and 'Terminar'. Below the title bar, the word 'Definición' is underlined. The text reads: 'Se dice que f es derivable en un punto x_0 de su dominio, si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. En este caso el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0 . Se dice que f es derivable, cuando f es derivable en cada uno de los puntos de su dominio.' Below this text is a button labeled 'Animación' with a radio button. To the right of the button is a graph of a function $y = f(x)$. A point x_0 is marked on the x-axis, and a tangent line is drawn at the point $(x_0, f(x_0))$. A right-angled triangle is formed with the tangent line as the hypotenuse, with the horizontal side labeled $x - x_0$ and the vertical side labeled $f(x) - f(x_0)$.

Botón de acceso al menú
Más sobre la definición de Derivada

IV.3.1 Botón Más sobre la definición de Derivada

Al oprimir el botón Más sobre la definición de Derivada, se pasa a la pantalla del menú asociado a él.

Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

Derivada

- Más sobre la definición de derivada
- Derivabilidad y Continuidad
- Operaciones con funciones derivables
- Composición
- Derivabilidad e Intervalos

Definición

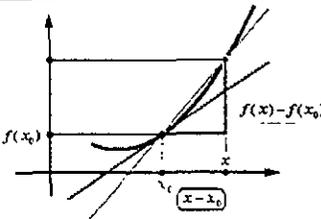
Se dice que f es derivable en un punto x_0 de su dominio, si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

En este caso el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0 .

Se dice que f es derivable, cuando f es derivable en cada uno de los puntos de su dominio

● Anunciación

$y = f(x)$



Derivada
Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

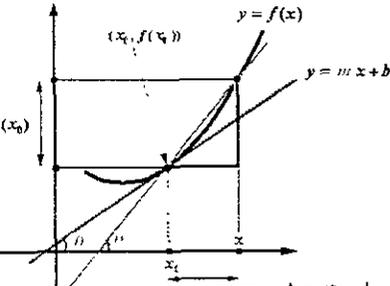
Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica $f'(v) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación



Arrastra el rectángulo

IV.3.2 Botón: Explicación, en el menú Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Explicación se despliega un recuadro en pantalla

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

Arrastra el rectángulo

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos:

Para $x \neq x_0$

$$\tan \theta' = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

por lo tanto

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \theta'$$

$$= \tan \theta'$$

$$=$$

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Continuar

Arrastra el rectángulo

IV.3.3 Botón: Continuar, en el menú Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Continuar se borra el recuadro

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos:

Para $x \neq x_0$

$$\tan \theta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

por lo tanto

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \theta,$$

$$= \tan \theta$$

$$= m$$

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Continuar

Arrastra el rectángulo

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación

Arrastra el rectángulo

IV.3.4 Botón Ejemplos: funciones derivables, en el menú Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Ejemplos pasamos a la pantalla

Derivadas Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

$x - x_0$ Arrastra el rectángulo

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplos Regresar

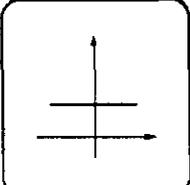
- $f(x) = c$
- $g(x) = x$
- $h(x) = 2x^2 + 1$

IV.3.5 Botón Ejemplo: $h(x) = 2x^2 + 1$

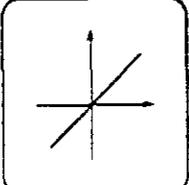
Menú Principal Menú Anterior ? Ejer. 7

Max sobre la definición de Derivada

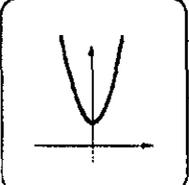
Ejemplos ● Regresar



● $f(x) = c$



● $g(x) = x$



● $h(x) = 2x^2 + 1$

Al oprimir el botón $h(x) = 2x^2 + 1$ se pasa a la siguiente pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Ejer. 7

Max sobre la definición de Derivada

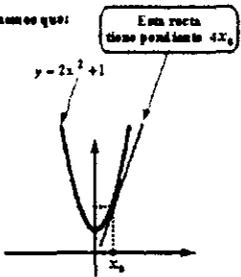
Ejemplos ● Regresar

Sea $h(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$. Encontrar la derivada de h .

Solución:

Sea $x_0 \in \mathfrak{R}$, aplicando la definición de derivada de h en x_0 , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 1 - (2x_0^2 + 1)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2(x + x_0) \\
 &= 2 \left[\lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} x_0 \right] = 2 \cdot (2x_0) = 4x_0
 \end{aligned}$$



$\therefore h'(x_0) = 4x_0$, para cualquier número $x_0 \in \mathfrak{R}$.

$\therefore \underline{A'(x) = 4x \quad \forall x \in \mathfrak{R}}$

IV.3.6 Botón Regresar en la Pantalla $h(x) = 2x^2 + 1$

Menú sobre la definición de Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Ejemplos

Sea $h(x) = 2x^2 + 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Encontrar la derivada de h . Regresar

Solución:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, aplicando la definición de derivada de h en x_0 , tenemos que:

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 1 - (2x_0^2 + 1)}{x - x_0}$$

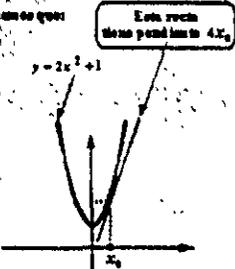
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 1 - 2x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 - x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 2(x + x_0)$$

$$= 2 \left[\lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} x_0 \right] = 2(2x_0) = 4x_0$$

$\therefore h'(x_0) = 4x_0$ para cualquier número $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\therefore h'(x) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

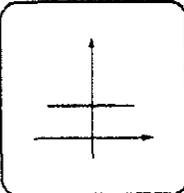


Al oprimir el botón regresar se pasa a la pantalla del menú Ejemplos

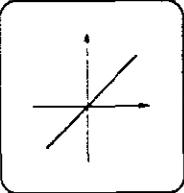
Menú sobre la definición de Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Ejemplos

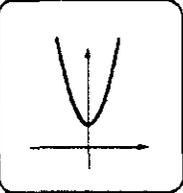
Regresar



$f(x) = c$

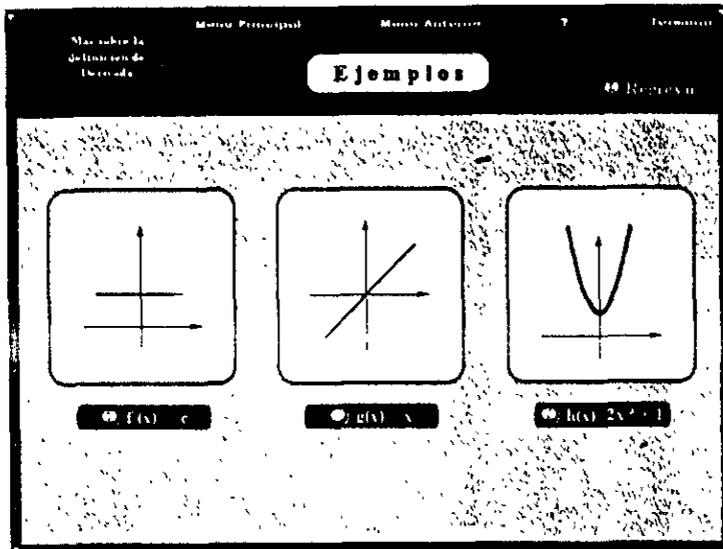


$g(x) = x$

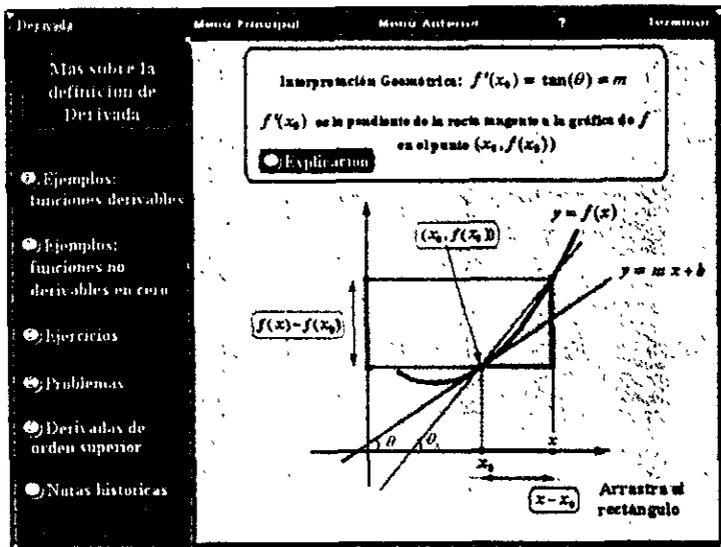


$h(x) = 2x^2 + 1$

IV.3.7 Botón Regresar en la Pantalla del menú de Ejemplos.



Al oprimir el botón regresar se pasa a la pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada



IV.3.8 Botón Ejemplos: funciones no derivables en cero, en la Pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Ejemplos se pasa a la pantalla

Derivada Menú Principal Menú Anterior Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

Arrastra el rectángulo

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior Terminar

Ejemplos

Regresar

f no es derivable en 0

$f(x) = |x|$

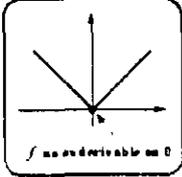
g no es derivable en 0

$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

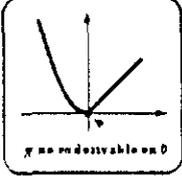
IV.3.9 Botón Ejemplo $f(x) = |x|$

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior 7 Terminar

Ejemplos ● Regresar



f no es derivable en 0



g no es derivable en 0

$f(x) = |x|$

$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Al oprimir el botón $f(x)=|x|$ se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior 7 Terminar

Ejemplos ● Regresar

Sea $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Mostrar que f no es derivable en 0.

Mostraremos que $f'(0)$ no existe, es decir, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ no existe.

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

Ahora bien, $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

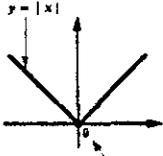
$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$.

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ no existe

$\therefore f'(0)$ no existe

$\therefore f$ no es derivable en 0.



f no es derivable en 0

IV.3.10 Botón Regresar en la Pantalla $f(x) = |x|$

Menú sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplos

Sea $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 Muestra que f no es derivable en 0.

Regresar

Mostraremos que $f'(0)$ no existe, es decir, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ no existe.

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$.

Ahora bien, $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$.

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ no existe.

$\therefore f'(0)$ no existe.

$\therefore f$ no es derivable en 0.

f no es derivable en 0

Al oprimir el botón regresar se pasa a la pantalla del menú Ejemplos

Menú sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplos

Regresar

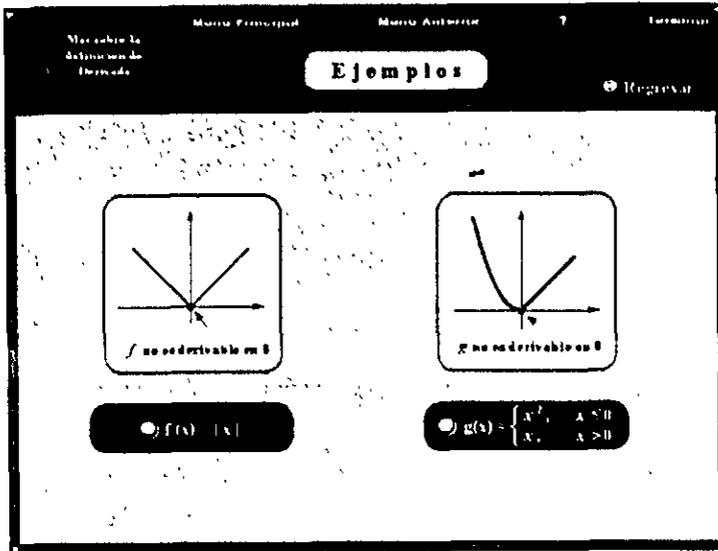
f no es derivable en 0

$f(x) = |x|$

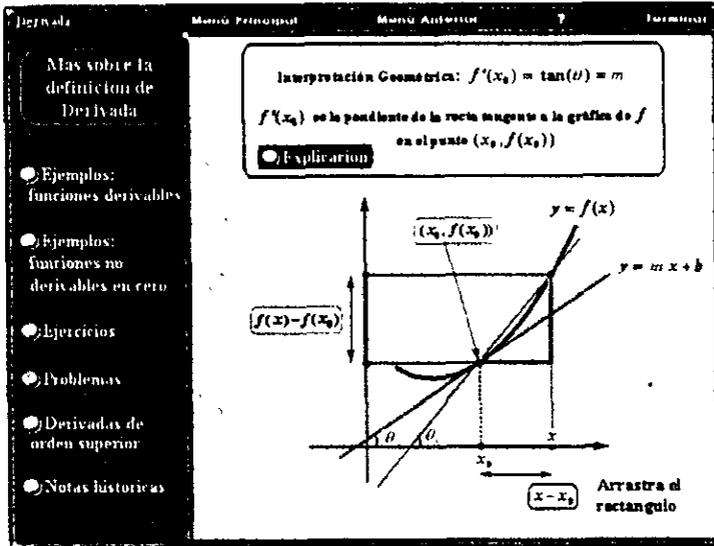
g no es derivable en 0

$g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

IV.3.11 Botón Regresar en la Pantalla Ejemplos.



Al oprimir el botón regresar se pasa a la pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada



IV.3.12 Botón Ejercicios en la Pantalla del menú Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Ejercicios se pasa a la pantalla

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación

$x - x_0$ Arrastra el rectangulo

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3

Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x, & x \geq 2 \end{cases}$

¿ f es derivable en 2 ?

Definición ¿ es derivable en 2 si ... Solución

IV.3.13 Botón Solución en la Pantalla Ejercicios.

Más sobre la definición de Derivada
Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

Ejercicios

- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3

Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x, & x \geq 2 \end{cases}$
 ¿f es derivable en 2?

Definición
 f es derivable en 2 si...
 Solución

Al oprimir el botón Solución se despliega el siguiente recuadro

Más sobre la definición de Derivada
Menú Principal
Menú Anterior
?
Terminar

Ejercicios

- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3

$y = f(x)$
 Pendiente: $f'(2) = 1/4$

Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x, & x \geq 2 \end{cases}$
 ¿f es derivable en 2?

Definición
 f es derivable en 2 si...
 Solución

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ existe
 $\therefore f$ es derivable en 2 y $f'(2) = -\frac{1}{4}$

IV.3.14 Botón Menú Anterior en la Pantalla de Ejercicios.

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Más sobre la Derivada

Menú Principal Menú Anterior

Ejercicios

- Ejercicio 1 ✓
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3

$y = f(x)$

Pendiente:
 $f'(2) = 1/4$

Sea $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4}x, & x \geq 2 \end{cases}$

¿ f es derivable en 2?

Definición No es derivable en 2 st. Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1/x - 1/4}{x - 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1/4 x - 1/4}{x - 2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ existe

$\therefore f$ es derivable en 2 y $f'(2) = 1/4$

Derivada

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

Arrastra el rectángulo

IV.3.15 Botón Problemas en la Pantalla Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el botón Problemas se pasa a la pantalla

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

Arrastra el rectángulo

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Problemas

- Problema 1 ✓
- Problema 2
- Problema 3

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Demstrar que f es derivable en 0.

Sol

IV.3.16 Hipertexto en la Pantalla Problemas.

[Más sobre la definición de Derivada](#)

[Menú Principal](#)
[Menú Anterior](#)
[?](#)
[Terminar](#)

Problemas

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$
 Demstrar que f es derivable en 0. Sol

- Problema 1 ✓
- Problema 2
- Problema 3

Al oprimir la palabra Solución de despliega el siguiente recuadro

[Más sobre la definición de Derivada](#)

[Menú Principal](#)
[Menú Anterior](#)
[?](#)
[Terminar](#)

Problemas

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$
 Demstrar que f es derivable en 0. Sol

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

Ahora bien

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x^2}{x} = x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

[Remover Solución](#)

- Problema 1 ✓
- Problema 2
- Problema 3

IV.3.17 Botón Menú Anterior en la Pantalla Problemas.

Más sobre la definición de Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Problemas

● Problema 1 ✓

● Problema 2

● Problema 3

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$
 Demostrar que f es derivable en 0. Sol

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Ahora hcen

$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x^2}{x} = x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$

con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

Remover Solución

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

● Ejemplos: funciones derivables

● Ejemplos: funciones no derivables en cero

● Ejercicios

● Problemas

● Derivadas de orden superior

● Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación

$f(x) - f(x_0)$

$x - x_0$ Arrastra el rectángulo

IV.3.18 Botón Derivadas de orden superior en la Pantalla Más sobre la definición de Derivada.

Al oprimir el Botón Derivadas de orden superior se pasa a la siguiente pantalla

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$
 $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación

Arrastra el rectángulo

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Derivadas de orden superior

- Ejemplo

Definición:

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0),$$

$$f^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k)})'(x_0), \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son llamadas derivadas de orden superior de f

La derivada de un orden determinado en un punto, solo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables.

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

IV.3.19 Botón Ejemplo en la Pantalla Derivadas de orden superior.

Al oprimir el Botón Ejemplo se pasa a la pantalla

Más sobre la definición de Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Derivadas de orden superior

Ejemplo

Definición.

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),$$

$$f^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k)})'(x_0), \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son llamadas derivadas de orden superior de f

La derivada de un orden determinado en un punto, sólo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables.

Derivadas de orden superior Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Ejemplo Regresar

Sea $f(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Encontrar las primeras tres derivadas de f .

$f(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f'(x) = f^{(1)}(x) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

IV.3.20 Botón Menú Anterior en la Pantalla Ejemplo.

Inicio Menú Principal Menú Anterior Terminar

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Encuentra las primeras tres derivadas de f .

Regresar

$f(x) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f'(x) = f^{(1)}(x) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

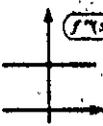
$f(x) = 2x^2 + 1$



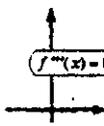
$f'(x) = 4x$



$f''(x) = 4$



$f'''(x) = 0$



Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Inicio Menú Principal Menú Anterior Terminar

Me gustaría la definición de Derivadas

Derivadas de orden superior

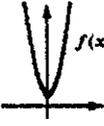
Ejemplo

Definición:

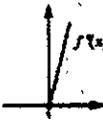
$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$.

$f^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k)})'(x_0)$, para $k \in \mathbb{N}$

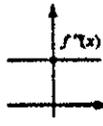
Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son llamadas derivadas de orden superior de f .



$f(x)$



$f'(x)$



$f''(x)$

La derivada de un orden determinado en un punto, sólo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables.

IV.3.21 Botón Menú Anterior en la Pantalla Derivadas de orden superior.

Más sobre la definición de Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Derivadas de orden superior

● Ejemplo

Definición:

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),$$

$$f^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k)})'(x_0), \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son llamadas derivadas de orden superior de f .

La derivada de un orden determinado en un punto, sólo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables.

Al oprimir el botón Menú Anterior se pasa a la pantalla

Derivada

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

● Ejemplos: funciones derivables

● Ejemplos: funciones no derivables en cero

● Ejercicios

● Problemas

● Derivadas de orden superior

● Notas históricas

Interpretación Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = \dots$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

● Explicación

Arrastra el rectángulo

IV.3.22 Botón Notas Históricas en la Pantalla Más sobre la Definición de Derivada.

Derivada Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

- Ejemplos: funciones derivables
- Ejemplos: funciones no derivables en cero
- Ejercicios
- Problemas
- Derivadas de orden superior
- Notas históricas

Intuición Geométrica: $f'(x_0) = \tan(\theta) = m$

$f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Explicación

$x - x_0$ Arrastra el rectángulo

Al oprimir el Botón Notas Históricas se pasa a la pantalla

Menú Principal Menú Anterior ? Terminar

Más sobre la definición de Derivada

Notas Históricas Regresar

Sir Isaac Newton

Gottfried Wilhelm von Leibniz

El concepto de derivada surgió principalmente como resultado de muchos siglos de esfuerzos dirigidos a resolver dos problemas:

Problema 1. dibujar una tangente a una curva
 Problema 2. encontrar la velocidad de un movimiento no uniforme

Estos problemas, merecieron ya a los matemáticos de los tiempos antiguos. Pero hasta el siglo XVI la exposición y el método de resolución de cada problema de esta clase tenían un carácter extremadamente específico. La acumulación de todo este extenso material se vio reducida a un sistema teóricamente completo en el siglo XVII gracias a los trabajos de Newton y Leibniz.