



00362

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS**

2

**EXCITÓN DE WANNIER-MOTT EN AROS  
CUÁNTICOS COPLANARES Y CONCÉNTRICOS**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**Maestro en Ciencias (Física)**

P R E S E N T A:

**FRANCISCO JAVIER BECERRA CAMACHO**

Directores de Tesis:

**Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes**

**Dr. Marcelo del Castillo Mussot**



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

México, D.F.



2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## DEDICATORIAS

*Con amor dedico esta tesis a:*

*Mercedes*

*Porque estás junto a mí dando significado a mi vida con tu amor, cariño y apoyo.*

*Adelita y Javier*

*Porque me dieron vida, su amor y su vida.*

*Adriana, Felipe y Rocío*

*Por su cariño de toda la vida.*

*Hugo, Aurea y Oscar*

*Por su amistad.*

*Fernanda, Diana y Frida*

*Porque son encantadoras.*

*Sr. Abraham, Sra. Lupita y Guillermo*

*Por el cariño y amistad que me han brindado.*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los doctores Juan Adrián Reyes Cervantes y Marcelo del Castilla Mussot por su amistad y el gran apoyo que me han brindado.

También agradezco a los miembros del jurado:

Dr. Luis Mochan Backal

Dr. Gerardo García Naumis

Dr. Miguel Ángel Solís Atila

Dra. Lorena Zogail Achcar

Dr. Oracio Navarro Chávez

Por sus valiosas sugerencias y comentarios.

A todos mis amigos por obsequiarme su amistad íntegra y sincera.

Al Instituto de Física de la UNAM por brindarme las facilidades para realizar esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México a la que debo mi formación y vida académica.

# Índice General

0.1	Introducción . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Excitones en heteroestructuras</b>	<b>9</b>
1.1	Excitones en 3D . . . . .	9
1.2	Excitones en sistemas cuasi-unidimensionales . . . . .	12
1.3	Excitón en un alambre cuántico tipo I . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Excitón de Wannier en aros cuánticos</b>	<b>19</b>
2.1	Modelo . . . . .	20
2.2	Desarrollo multipolar . . . . .	26
2.3	Soluciones numéricas y resultados . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>Fabricación de Nanoestructuras</b>	<b>44</b>
A.1	Litografía . . . . .	45
A.2	Grabado . . . . .	47
A.3	Implantación de Iones . . . . .	47
A.4	Metalización . . . . .	48
A.5	Estabilización . . . . .	49
<b>B</b>	<b>Funciones propias del momento angular total</b>	<b>50</b>
<b>C</b>	<b>Estados de energía negativa en sistemas periódicos</b>	<b>53</b>

# Índice de Figuras

1-1	Esquema de transición electrónica en el espacio $k$ lejos de la zona de Brillouin. La transición de un electrón de la banda de valencia (BV) a una de conducción (BC) se efectúa mediante la absorción de un fotón de energía $\hbar\Gamma^{0117}$ dejando un hueco en la BV. . . . .	10
1-2	Se muestra un alambre cuántico en cuyo interior están confinados el electrón y el hueco. Se muestran también la partes radiales de las funciones de onda asociadas a estas partículas. . . . .	14
1-3	Energía de amarre excitónica $E_b/E_0$ como función del radio del alambre cuántico $R/a_{exc}$ . Aquí $E_0$ denota la energía de Rydberg. . . . .	18
2-1	Esquema de aros coplanares y concéntricos con confinamientos en $r$ y $z$ . Por simplicidad sólo se muestran los grosores del aro externo, los potenciales parabólicos de confinamiento y las funciones de onda en la dirección $y$ . $\Gamma^{011E}$ indica el ángulo relativo entre electrón y hueco. Los radios son medidos desde los centros de los aros. . . . .	21
2-2	Eigenfunción para el estado base $\Phi_0$ como función de $\Gamma^{011E}/2\Gamma^{0119}$ para $a_1 = 800 \overset{0}{\text{Å}}$ , $a_2 = 400 \overset{0}{\text{Å}}$ y $\Gamma^{011B} = 40 \overset{0}{\text{Å}}$ . . . . .	37
2-3	Igual que en la Fig. 2-2 pero para $\Phi_1$ . . . . .	38
2-4	Igual que en la Fig. 2-2 pero para $\Phi_2$ . . . . .	39
2-5	Igual que en la Fig. 2-2 pero para $\Phi_3$ . . . . .	39
2-6	Igual que en la Fig. 2-2 pero para $\Phi_4$ . . . . .	40
2-7	Igual que en la Fig. 2-2 pero para $\Phi_5$ . . . . .	40

## 0.1 Introducción

Actualmente es común diseñar y preparar multicapas semiconductoras haciéndolo capa por capa atómica, con un estricto control en el envenenamiento por impurezas (dopaje) y composición llegando a construir prácticamente una por una cada capa atómica, de tal manera de que el tamaño de éstas conste de unas cuantas capas atómicas. Con dichas estructuras se pueden generar dispositivos ópticos y optoelectrónicos muy eficientes además de motivar la investigación de nuevas e interesantes áreas en la física del Estado Sólido y la Mecánica Cuántica. Es decir, además del entendimiento de la física básica asociada al estudio de propiedades electrónicas y ópticas de las nanoestructuras semiconductoras tales como pozos, alambres y puntos cuánticos, existe también interés debido a su importancia tecnológica.

Dentro de esta área general de las heteroestructuras en materiales semiconductores nos restringiremos a estudiar las propiedades electrónicas de un sistema excitónico de baja dimensionalidad. Referencias importantes de revisión sobre excitones están dadas en las referencias [1]-[3]. En particular investigaremos teóricamente una heteroestructura del tipo II, esto es, una heteroestructura para la cual el electrón y el hueco que conforman al excitón se encuentran separados espacialmente. Estos sistemas que exhiben separación espacial entre el electrón y el hueco tienen la ventaja de que su vida media es mayor que la correspondiente a sistemas del tipo I en donde ambos portadores de carga comparten la misma región de confinamiento [4].

La literatura científica sobre excitones en estructuras tipo I es muy extensa [5]-[14] por lo que solo mencionaremos a continuación algunos trabajos representativos. Viri y Del Sole [11] estudiaron el excitón en una heteroestructura cuando el electrón y el hueco están confinados en la superficie de una esfera. Un ejemplo de soluciones tipo hidrogenoides en una dimensión que han sido comparadas con resultados experimentales se encuentra en el trabajo de Corella-Madueno et al. [12] quienes variaron la posición relativa de la impureza en el interior de un alambre cuántico. Los efectos del grosor de anillos nanoscópicos en la energía excitónica fueron analizados por Hu et al. [13]. Existen

# Capítulo 1

## Excitones en heteroestructuras

A continuación revisamos algunas de las características generales de los excitones en tres dimensiones (3D), es decir, en medios sólidos sin confinamiento, así como su espectro de energías y funciones de onda para los casos de confinamientos unidimensional y cuasiunidimensional. Estos tipos de confinamiento se definirán en la sección 1.2. Revisaremos con más detalle este último tipo de heteroestructura, mejor conocida como alambre cuántico, debido a que el confinamiento transversal al que se somete al excitón es bidimensional y, por ende, similar al confinamiento necesario para obligar al excitón a moverse en los aros cuánticos que investigaremos en el siguiente capítulo.

### 1.1 Excitones en 3D

En los cristales aislantes o semiconductores, cuando se excita un electrón de la banda de valencia hacia la banda de conducción, en la banda de valencia se crea una vacancia de carga positiva denominada hueco. En la figura 1-1 se ilustra esquemáticamente un diagrama de bandas que contiene solamente las dos bandas más importantes en el proceso de creación de pares electrón-hueco, es decir, una banda de valencia y una banda de conducción. La interacción coulombiana entre el electrón y el resto de los electrones en la banda de valencia se puede modelar como la interacción entre un electrón y un hueco,

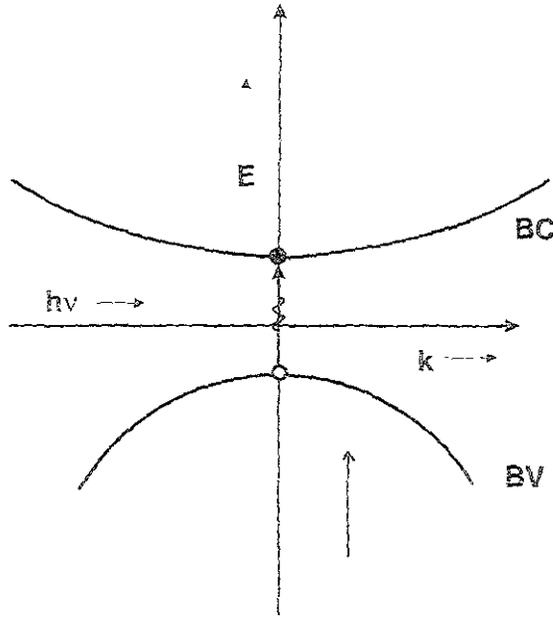


Figura 1-1: Esquema de transición electrónica en el espacio  $k$  lejos de la zona de Brillouin. La transición de un electrón de la banda de valencia (BV) a una de conducción (BC) se efectúa mediante la absorción de un fotón de energía  $h\nu$  dejando un hueco en la BV.

donde el hueco se comporta como una partícula (o más bien cuasipartícula, concepto que se refiere a las excitaciones entre partículas individuales en un sistema de electrones interactuantes [24]) con una carga positiva de la misma magnitud que la del electrón. Por su parte el electrón presenta una masa efectiva en el interior del sólido  $m_e$  debido a su interacción con la red cristalina de iones, y el hueco presenta una masa efectiva  $m_h$  que no es necesariamente la misma que el electrón. Es posible crear un par electrón-hueco excitando un electrón de la banda de valencia con un fotón de energía  $h\nu$ . La interacción coulombiana entre el electrón y el hueco une a ambas partículas de tal forma que el sistema compuesto es neutro y a este sistema unido de partículas cargadas en un medio se le conoce como *excitón*, el cual es análogo al átomo de hidrógeno, con la diferencia de que, en vez del protón, hay un hueco positivo.

De hecho, los espectros de reflectancia y absorción de radiación electromagnética muestran estructura para energías fotónicas por debajo de la brecha, o gap, de energía.

en donde se esperaría que los cristales fueran transparentes. Esta estructura es causada por la absorción de un fotón, con la creación de un excitón.

La energía de amarre de un excitón se puede medir de varias formas, entre las que sobresalen:

1) En transiciones ópticas a partir de la banda de valencia, por la diferencia entre la energía requerida para crear un excitón y la energía necesaria para tener un electrón y un hueco libres en la red.

2) En luminiscencia, comparando la energía de recombinación de la línea de electrón y hueco libres con la energía de la línea de recombinación de excitón.

3) Por fotoionización de excitones, para formar portadores libres, el cual es un experimento difícil por que requiere una alta concentración de excitones.

Mencionaremos los dos diferentes tipos de excitones: uno, conocido como excitón de Frenkel, el cual describe excitones en confinamientos pequeños y apretados, y el otro, conocido como excitón de Wannier-Mott, para el cual el amarre es débil y la separación entre el electrón y el hueco es grande, comparada con el tamaño típico de la red atómica. Para el tamaño y tipo de confinamiento que nos interesa en este trabajo, este último tipo de excitón es el adecuado, porque consideramos estructuras con confinamiento de decenas de angstroms. Ya que los excitones de Frenkel son mucho más localizados, éstos podrían modificar su estructura interna bajo confinamiento aún más estrecho.

Si consideramos un electrón en la banda conductora y un hueco en la banda de valencia, ambos se atraerán entre sí debido al potencial de Coulomb

$$V(r) = -e^2/\epsilon r, \quad (1.1)$$

en donde  $e$  es la carga eléctrica fundamental,  $r$  es la distancia entre las partículas y  $\epsilon$  es la constante dieléctrica de apantallamiento del material. Aparecerán estados confinados del sistema excitónico, cuyas energías totales están por debajo de la energía de la banda de conducción. Este problema es similar al átomo de hidrógeno, si la superficie de energía para el hueco y el electrón es esférica. Por analogía con el átomo de hidrógeno

(sustituyendo  $e^2$  por  $e^2/\epsilon$  y  $\mu_H$  por  $\mu$ , donde  $\mu_H$  y  $\mu$  representan las masas reducidas del sistema hidrogenoide y del sistema electrón-hueco respectivamente). los niveles de energía se miden con respecto a la parte más alta de las bandas de valencia, y éstas están dadas por una expresión de Rydberg modificada

$$\begin{aligned} E_n &= E_g - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2 n^2} \\ &= E_g - \frac{e^2}{\epsilon a_{exc} n^2}. \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aquí  $n$  es el número cuántico principal,  $a_{exc} = \epsilon \hbar^2 / \mu e^2$  es el radio excitónico de Bohr y  $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$  es la masa reducida del sistema, en donde  $m_e$  y  $m_h$  son las masas efectivas del electrón y el hueco respectivamente. Una estimación del orden de magnitud de  $a_{exc}$  se puede obtener usando la constante de apantallamiento  $\epsilon = 13.13$  y la masa efectiva del electrón  $m = 0.07 m_e$  del GaAs [25], en donde  $m_e$  es la masa del electrón. De esta forma,  $a_{exc} = 199 \text{ \AA}$ , lo cual nos muestra que el tamaño típico de este excitón es mucho mayor que el parámetro de red, que es de orden de angstroms.

El estado base de la energía del excitón se obtiene sustituyendo  $n = 1$  en la ecuación (1.2). Por ejemplo, se han estudiado las líneas de absorción ópticas en óxidos de cobre ( $\text{Cu}_2\text{O}$ ) a bajas temperaturas y se han encontrado que los resultados experimentales están en excelente acuerdo con la expresión de Rydberg modificada [26].

El umbral del proceso de creación de un excitón por un fotón de frecuencia  $\omega$  está dado por  $\hbar\omega > E_g - (e^2/\epsilon a_{exc})$ , donde  $E_g$  es la brecha de energía y  $\hbar = h/2\pi$ , donde  $h$  es la constante de Planck.

## 1.2 Excitones en sistemas cuasi-unidimensionales

Los físicos y matemáticos están interesados en sistemas donde la dimensionalidad sea diferente a las tres dimensiones a las que estamos acostumbrados. En las últimas décadas ha sido posible fabricar estructuras semiconductoras que exhiben una dimensionalidad reducida cuyas propiedades físicas han sido resumidas, por ejemplo, en la referencia

[27]. En efecto, una estructura cuasiunidimensional es aquella en la cual dos de las dimensiones del sistema están restringidas a tamaños muy pequeños tales que los efectos cuánticos en esas direcciones son importantes. Una definición más precisa de un sistema cuasiunidimensional implica que las partículas más energéticas del sistema están en los estados más bajos de energía  $E_{n,m}^{(0)}$  en las direcciones de confinamiento, es decir  $n, m < 10$ . Por ejemplo, en el caso de un alambre cuántico infinito la energía de los electrones está dada por  $E_{n,m,k} = E_{nm}^{(0)} + \hbar^2 k_z^2 / 2m_e$ , donde  $n$  y  $m$  son enteros y  $k_z$  es real. Esta expresión de la energía muestra claramente el concepto de sub-bandas que son una familia de parábolas en  $k_z^2$  paralelas entre sí. El caso más extremo de confinamiento en dos direcciones es el de los sistemas *cuasiunidimensionales* en los que  $n$  y  $m$  toman los valores más bajos. Ejemplos realistas de estos sistemas son los alambres cuánticos semiconductores, donde los electrones y los huecos son libres de moverse en un espacio unidimensional. En el Apéndice I de esta tesis se revisan brevemente las técnicas de fabricación de alambres cuánticos. Artículos de revisión sobre alambres cuánticos se encuentran en las referencias [4] y [28] en donde el primero es de carácter experimental y el segundo es teórico.

En el sistema estrictamente unidimensional donde se desprecia completamente el grueso del alambre cuántico se busca una solución unidimensional en el Apéndice I de esta tesis  $\psi = \psi(z)$  en vez de una solución  $\psi = \psi(\vec{r})$  en donde  $\vec{r}$  es un vector de posición tridimensional. El problema estrictamente unidimensional no es realista pero es interesante desde el punto de vista de la física matemática y ha dado origen a controversias que se iniciaron desde el trabajo original de Loudon [29]. En este punto es interesante analizar las posibles analogías entre los sistemas excitónicos y los sistemas hidrogenoides con respecto a la dimensión. En 3D las soluciones de un excitón y las del átomo de hidrógeno son similares como se aprecia en la ecuación (1.2) con la diferencia de que las masas son diferentes y la interacción coulombiana se ve apantallada a través de constante dieléctrica que caracteriza al semiconductor. Sin embargo, en el caso estrictamente 1D el sistema excitónico se ha construido experimentalmente con materiales semiconductores mientras que el sistema hidrogenoide requeriría de campos magnéticos muy intensos [30]

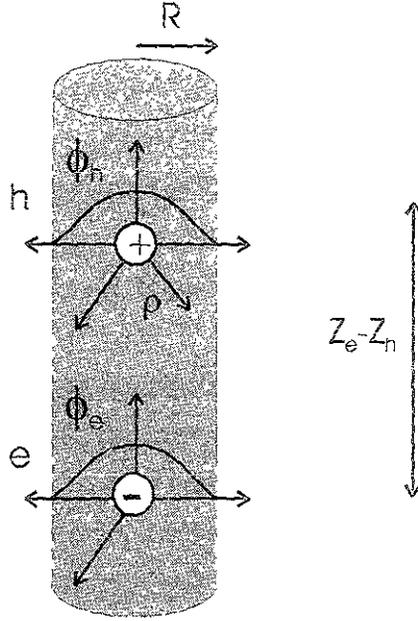


Figura 1-2: Se muestra un alambre cuántico en cuyo interior están confinados el electrón y el hueco. Se muestran también la partes radiales de las funciones de onda asociadas a estas partículas.

lo cual está fuera del tema principal de esta tesis.

### 1.3 Excitón en un alambre cuántico tipo I

Revisaremos un modelo de un excitón en un alambre cilíndrico cuántico con un radio finito  $R$  como se muestra en la figura 1-2 que fue investigado por Banyai et al. [32]. Los electrones y huecos están confinados en un potencial cilíndrico y las funciones de onda se anulan en las fronteras.

Se resuelve la ecuación de Schrödinger tridimensional

$$V(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 |\vec{r}_e - \vec{r}_h|}, \quad (1.3)$$

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_e^2 + \frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_h^2 + V_e(\vec{r}_e) + V_h(\vec{r}_h) + V(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right] \Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = E\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h), \quad (1.4)$$

donde  $V_e(\vec{r}_e)$  y  $V_h(\vec{r}_h)$  son los potenciales de confinamiento del electrón y el hueco, respectivamente, debido al alambre. Para resolver esta ecuación, si se toma en cuenta el alambre es muy estrecho en la dirección  $\rho$  tal que las funciones de onda en esta dirección permanecen en el estado más bajo de energía, se supone que la función de onda  $\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$  es separable y tiene simetría cilíndrica en torno al eje  $z$  ( $l_z = 0$  o bien  $\partial\Psi/\partial\phi = 0$ ). Cambiando a coordenadas cilíndricas  $\{\vec{r}_e\} \rightarrow \{\rho_e, z_e, \phi_e\}$  para el electrón y similarmente para el hueco se escribe

$$\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = \phi_e(\rho_e)\phi_h(\rho_h)\Psi(z_e, z_h). \quad (1.5)$$

Aquí  $\phi_e$  y  $\phi_h$  son funciones de onda del estado base de una partícula, correspondiente a la solución de

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial \rho_e} \rho_e \frac{\partial}{\partial \rho_e} + V_e(\rho_e) \right] \phi_e(\rho_e) = E_e \phi_e(\rho_e), \quad (1.6)$$

y similarmente para  $\phi_h(\rho_h)$  cambiando  $e \rightarrow h$ , para el modelo de barrera infinita se escriben esas funciones analíticamente

$$\phi_e(\rho_e) = \frac{J_0(\alpha_0 \rho_e / R)}{\sqrt{\pi R J_1(\alpha_0)}}, \quad (1.7)$$

en donde  $J_n(r)$  es la función de Bessel de orden  $n$ . La energía de confinamiento correspondiente es

$$E_e = \frac{\alpha_0^2 \hbar^2}{2m_e R^2}. \quad (1.8)$$

$\alpha_0 = 2.405$  es el primer cero de  $J_0(x) = 0$ . El denominador en la ecuación (1.7) es sólo un factor de normalización de la función de onda.

Regresando al problema, se puede usar ahora la ecuación (1.6) para simplificar la solución. Sustituyendo la ecuación (1.5) en (1.4), multiplicando por  $\phi_e \phi_h$ , e integrando

sobre el plano transversal. tanto para el electrón y el hueco. se obtiene:

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} + \frac{\hbar^2}{2m_h} \frac{\partial^2}{\partial z_h^2} + V_{ef}(z_e, z_h) \right] \Psi_e(z_e, z_h) = (E - E_e - E_h) \Psi_e(z_e, z_h), \quad (1.9)$$

en donde

$$V_{ef}(z_e, z_h) = -\frac{e^2}{\epsilon_0 \pi^2 R^4 J_1^4(\alpha_0)} \int_0^R \rho_e d\rho_e \int_0^R \rho_h d\rho_h \int_0^{2\pi} d\phi_e \int_0^{2\pi} d\phi_h \\ \times \frac{J_0^2(\alpha_0 \rho_e / R) J_0^2(\alpha_0 \rho_h / R)}{[(z_e - z_h)^2 + (\rho_e \cos \phi_e - \rho_h \cos \phi_h)^2 + (\rho_e \sin \phi_e - \rho_h \sin \phi_h)^2]^{1/2}}. \quad (1.10)$$

Este es el potencial efectivo para el problema del excitón cuasi unidimensional. Notemos que  $V_{ef}$  es simplemente un promedio sobre la coordenada radial del potencial entre el electrón y el hueco, y depende sólo de su separación. Con esto en mente, se pueden utilizar las coordenadas de centro de masa  $Z$  y relativa  $z$ :

$$Z = \frac{z_e + z_h}{2}, \\ z = z_e - z_h. \quad (1.11)$$

en donde se supuso [32] que las masas efectivas del electrón y del hueco son iguales.

Como es usual, el movimiento del centro de masa describe el movimiento del excitón como un todo. Aquí estamos interesados en el movimiento relativo.  $z$ , el cual determina la energía de amarre. Esto nos lleva a:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(z) + V_{ef}(z) = E_b \Psi(z), \quad (1.12)$$

donde ahora  $E_b = E - E_e - E_h - E_{cm}$  se define como la energía de amarre. Aquí  $E_{cm}$  es la energía cinética del centro de masa del excitón.

Ahora se calculan las funciones de onda y las energías de amarre del excitón. lo cual se consigue a través del potencial efectivo. Se puede resolver esta ecuación de

Schrödinger con  $V_{ef}(z)$  usando métodos variacionales, numéricamente o haciendo alguna aproximación a  $V_{ef}(z)$ , lo cual permitiría una solución analítica. En relación con este último método, Banyai et al. [32] eligieron la aproximación siguiente

$$V(z) = \frac{e^2}{\epsilon_0(|z| + \gamma R)} \quad (1.13)$$

y ajustaron el parámetro  $\gamma$  de tal manera que se aproxime a la expresión de  $V_{ef}(z)$  dada por la ecuación (1.10).

Usando el potencial e introduciendo las variables adimensionales  $\rho = z\alpha$ .

$\alpha = \sqrt{-8m_e E_b / \hbar^2}$  y  $\lambda = (e^2 / \hbar^2 \epsilon_0) \sqrt{m_e / 2E_b}$  la ecuación (1.12) se convierte en

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho_c + |\rho|} \right] \psi = \frac{\psi}{4}$$

siempre y cuando

$$\rho_c = R\gamma\alpha, \quad (1.14)$$

con lo que se muestra que el radio finito del alambre cuántico introduce una regulación natural (corte) del potencial de Coulomb en el origen. Las soluciones pares de esta ecuación (y en particular el estado base) están dadas en términos de las funciones  $W$  de Whittaker [33], definidas como:

$$\Psi_\lambda(|z|) = W_{\lambda, 1/2} \left( \frac{2(|z| + \alpha R)}{\lambda a_{exc}} \right), \quad (1.15)$$

con la condición de frontera

$$\left. \frac{d\Psi(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (1.16)$$

que determina  $\lambda$ . Aquí  $a_{exc} = \epsilon \hbar^2 / \mu e^2$  es el radio de Bohr del excitón 3D. La función de Whittaker puede definirse [33] por medio de

$$W_{\lambda, 1/2}(x) = \frac{e^{-x/2}}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty dy e^{-y} \left[ \frac{x}{y} + 1 \right]^\lambda. \quad (1.17)$$

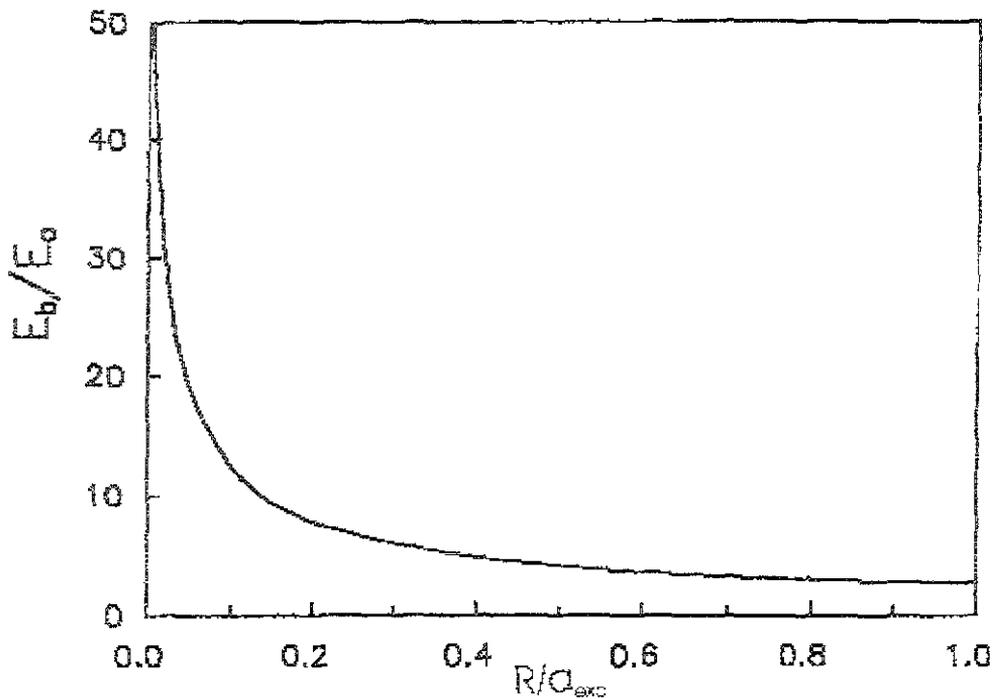


Figura 1-3: Energía de amarre excitónica  $E_b/E_0$  como función del radio del alambre cuántico  $R/a_{exc}$ . Aquí  $E_0$  denota la energía de Rydberg.

Con este método se calcula la energía de amarre del excitón como función del radio del alambre  $R$ . La figura 1-3 muestra la energía de amarre excitónico que se incrementa fuertemente cuando decrece el radio. Debe notarse que los resultados matemáticos mostrados en la figura 3 no son válidos para radios menores que el radio límite para la construcción de alambres cuánticos. Este radio límite debe ser del orden de unos cuantos parámetros de red del material en cuestión.

## Capítulo 2

# Excitón de Wannier en aros cuánticos

El problema central de esta tesis [18] es analizar un excitón de Wannier-Mott, en el cual el electrón está restringido a moverse en un anillo cuántico muy estrecho y el hueco a moverse en otro anillo cuántico concéntrico y coplanar también muy estrecho. En la figura 2-1 mostramos esquemáticamente las posiciones del electrón y el hueco en donde usamos coordenadas cilíndricas para describir sus posiciones. Como se mencionó en la introducción se encontró que las energías excitónicas de una heteroestructura tipo II formada por dos alambres paralelos cuánticos son muy pequeñas (del orden de meV) [19], por lo que es deseable pensar en una estructura similar con excitones de mayor energía de amarre. Por tanto, la razón básica al proponer esta nueva estructura de anillos cuánticos coplanares y concéntricos es que, debido a su geometría acotada, la energía electrostática de interacción entre el par electrón-hueco se incrementará con respecto a la energía electrostática del par en los alambres cuánticos paralelos [19], lo cual a su vez se espera que dé lugar a energías de amarre mayores, las cuales son más fáciles de detectar experimentalmente. Es decir, a diferencia del caso de los alambres cuánticos paralelos en los que las funciones de onda pueden extenderse a toda la longitud de los alambres, en el caso de los anillos paralelos la distancia máxima de separación entre las funciones de

onda del electrón y del hueco es del orden del diámetro del anillo mayor.

Es importante mencionar que dicho sistema de electrón y hueco espacialmente separado se verá favorecido por la presencia de una carga en el centro de los anillos. la cual podría ser una impureza con una carga neta (de cualquier signo) que produce un campo eléctrico radial. Por ejemplo, si la impureza tuviese carga neta positiva, el electrón tendería a confinarse en el anillo interior y el hueco en el anillo exterior. El campo eléctrico producido por la impureza también modificará los potenciales de confinamiento que mantienen al electrón y al hueco en sus respectivos anillos. Es decir, los potenciales de confinamiento totales que consideraremos en nuestros cálculos toman en cuenta los efectos del potencial de la impureza, debido a la presencia de ésta los radios efectivos de cada anillo estarán más separados.

El procedimiento que seguiremos consiste en plantear el Hamiltoniano del sistema y utilizar el hecho de que los confinamientos del electrón y el hueco son tan estrechos que las funciones de onda en las direcciones de confinamiento están en los estados más bajos de energía; esto permite plantear una ecuación unidimensional de Schrödinger para el excitón. la cual involucra un potencial efectivo unidimensional entre electrón y hueco; este potencial es el resultado de integraciones ponderadas en las variables de confinamiento.

A continuación desarrollamos dicho potencial de interacción en términos de multipolos. Supondremos que tanto el electrón como el hueco experimentan confinamientos transversales en las coordenadas cilíndricas radial  $\rho$  y axial  $z$ , y por tanto permanecen en sus respectivos estado base. Calcularemos las energías propias más bajas y sus respectivas eigenfunciones para la ecuación de Schrödinger resultante que dependerá de la coordenada cilíndrica  $\phi$ .

## 2.1 Modelo

En esta sección plantearemos las ecuaciones del sistema formado por dos anillos cuánticos semiconductores de radios  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente. Uno de los aros porta un electrón y

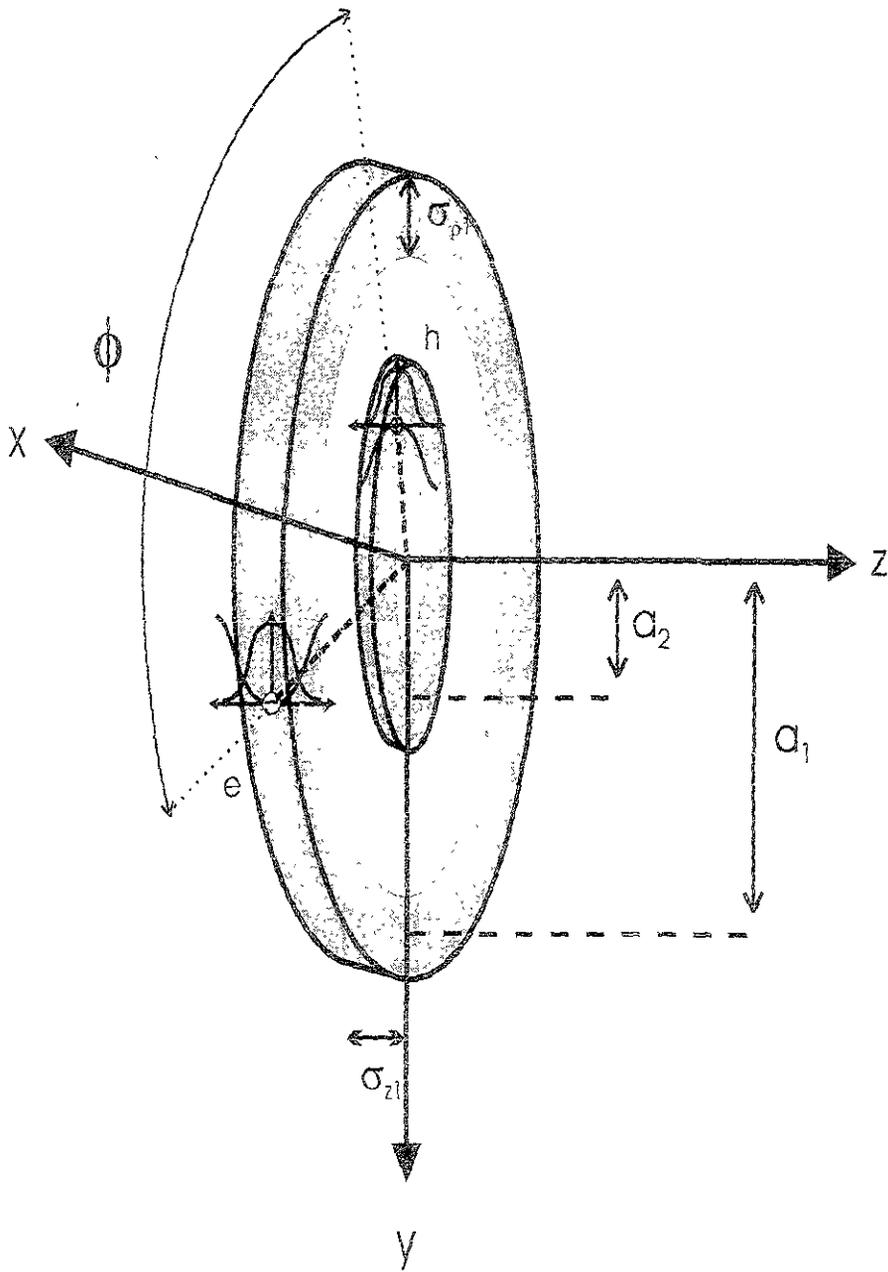


Figura 2-1: Esquema de aros coplanares y concéntricos con confinamientos en  $r$  y  $z$ . Por simplicidad sólo se muestran los grosores del aro externo, los potenciales parabólicos de confinamiento y las funciones de onda en la dirección  $y$ .  $\phi$  indica el ángulo relativo entre electrón y hueco. Los radios son medidos desde los centros de los aros.

el otro un hueco. El hamiltoniano del sistema es

$$H = H_1 + H_2 + V_{int} \quad (2.1)$$

donde  $H_1$  y  $H_2$  representan a los hamiltonianos de las partículas  $p_1$  y  $p_2$ , los cuales en coordenadas cilíndricas se pueden escribir en la forma:

$$H_i = \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + \frac{\hat{L}_{z_i}^2}{2m\rho_i^2} + V_i(\rho_i, \phi_i), \quad (2.2)$$

en donde  $\hat{L}_{z_i} = i\hbar d/d\phi_i$  son las componentes  $z$  de los momentos angulares individuales con  $i = 1, 2$  que pueden identificar indistintamente al electrón o al hueco.  $V_i$  son los potenciales de confinamiento transversal que mantienen a las partículas dentro del alambre. El potencial de interacción eléctrica electrón-hueco, representado en coordenadas cilíndricas, está dado por:

$$V_{int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{e^2}{\epsilon \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 4\rho_1\rho_2 \sin(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2})}}, \quad (2.3)$$

donde  $\epsilon$  es la constante de apantallamiento dieléctrico propio del material y  $\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$  es el ángulo polar relativo entre el electrón y hueco.

Nuestro sistema cuántico está gobernado por la siguiente ecuación de Schrödinger de dos partículas

$$H\psi = E_t\psi \quad (2.4)$$

en donde  $E_t$  es la energía total del sistema.

Ahora supondremos que las dimensiones transversales que caracterizan a los confinamientos de los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  son muy pequeñas y, como ocurre en el caso del pozo de paredes infinitas, debido al incremento en la separación de niveles energéticos resultará muy difícil sacar a las partículas de sus estados más bajos de energía [19]. Esto permite asegurar que la función de onda  $\psi$  del sistema de dos portadores de carga es separable.

de la siguiente forma:

$$\psi = \psi_1^0(\rho_1, z_1)\psi_2^0(\rho_2, z_2)F_l(\phi_1, \phi_2)\Phi(\phi). \quad (2.5)$$

Aquí,  $\psi_i^0(\rho_i, z_i)$  son las funciones de onda de la  $i$ -ésima partícula, donde el índice 0 representa el estado base y  $F_l(\phi_1, \phi_2)$  son las funciones propias de la componente  $z$  del momento angular total  $\hat{L}_z = \hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}$  cuya forma explícita se deduce y discute en el apéndice B. Aquí  $I_i = m_i \langle \Psi^0 | \rho_i^2 | \Psi^0 \rangle$ , con  $i = 1, 2$ , representa al momento de inercia respecto al eje  $z$  de cada partícula.

Para obtener la ecuación de Schrödinger excitónica para  $\Phi(\phi)$  calcularemos la expresión

$$\langle \Psi_1^0 \Psi_2^0 F_l(\phi_1, \phi_2) | H | \Psi_1^0 \Psi_2^0 F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \rangle. \quad (2.6)$$

que es similar a un braket excepto por el hecho de que la expresión del lado derecho de  $H$  contiene a  $\Phi(\phi)$  mientras que el lado izquierdo no. Esto causará que el resultado de esta operación aún dependa de  $\Phi(\phi)$ , como veremos a continuación, lo que da lugar a la ecuación buscada. Al aplicar  $H$  sobre  $\Psi_1^0 \Psi_2^0 F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi)$  y multiplicarlo por  $\rho_1^2 \rho_2^2$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \rho_1^2 \rho_2^2 H | \Psi_1^0 \Psi_2^0 F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \rangle \\ = & -\rho_1^2 \rho_2^2 \Psi_2(\rho_2, z_2) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \frac{\hbar}{2m_1} \left[ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right] \Psi_1 \\ & -\rho_1^2 \rho_2^2 \Psi_1(\rho_1, z_1) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \frac{\hbar}{2m_2} \left[ \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right] \Psi_2 \\ & -\Psi_1(\rho_1, z_1) \Psi_2(\rho_2, z_2) \left( \frac{\hbar^2}{2m_1} \rho_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2} \rho_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} \right) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \\ & +\rho_1^2 \rho_2^2 V_{int} \Psi_1(\rho_1, z_1) \Psi_2(\rho_2, z_2) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \\ = & \rho_1^2 \rho_2^2 E_t \Psi_1(\rho_1, z_1) \Psi_2(\rho_2, z_2) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aquí utilizaremos las siguientes ecuaciones de eigenvalores que cumplen los confina-

mientos transversales del electrón y del hueco:

$$\frac{\hbar^2}{2m_\nu} \left[ - \left( \frac{1}{\rho_\nu} \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} \rho_\nu \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z_\nu^2} \right) + V(\rho_\nu) + V(z_\nu) \right] \psi_\nu^0 = E_{\nu 0}^t \psi_\nu^0, \quad (2.8)$$

donde  $\nu = 1, 2$ . De esta forma la Ec.(2.7) queda como

$$\begin{aligned} & \Psi_1 \Psi_2 \left( \frac{-\hbar^2}{2m_1} \rho_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \rho_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} \right) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) + \rho_1^2 \rho_2^2 V_{int} \Psi_1 \Psi_2 F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \\ & = (\rho_1^2 \rho_2^2) (E_t - E_1^t - E_2^t) \Psi_1 \Psi_2 F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sobre esta expresión hacemos actuar el Bra  $\langle \Psi_1^0 \Psi_2^0 |$ , notando que  $\langle \rho_i^2 \rangle = \langle \Psi_i^0 | \rho_i^2 | \Psi_i^0 \rangle$ , para obtener:

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2m_1} \langle \Psi_2^0 | \rho_2^2 | \Psi_2^0 \rangle \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) + \\ & \frac{-\hbar^2}{2m_2} \langle \Psi_1^0 | \rho_1^2 | \Psi_1^0 \rangle \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) + \\ & \langle \Psi_1^0 \Psi_2^0 | \rho_1^2 \rho_2^2 V_{int} | \Psi_1 \Psi_2 \rangle F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \\ & = \langle \rho_1^2 \rangle \langle \rho_2^2 \rangle (E_t - E_1^t - E_2^t) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora dividimos por  $\langle \rho_1^2 \rangle \langle \rho_2^2 \rangle$  y utilizando las variables  $\eta$  y  $\phi$  se obtiene:

$$\frac{1}{m_1} \frac{1}{\langle \rho_1^2 \rangle} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{1}{\langle \rho_2^2 \rangle} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} = \frac{\hat{L}_z^2}{I_{tot}} + \frac{1}{I_\mu} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.11)$$

En esta ecuación  $I_\mu = I_1 I_2 / (I_1 + I_2)$  representa el momento de inercia reducido e  $I_{tot} = I_1 + I_2$  el momento total de inercia. Sustituyendo la ecuación (2.11) en la ecuación (2.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{L}_z^2}{I_{tot}} - \frac{\hbar^2}{I_\mu} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) + \frac{\langle \Psi_1^0 \Psi_2^0 | \rho_1^2 \rho_2^2 V_{int} | \Psi_1 \Psi_2 \rangle}{\langle \rho_1^2 \rangle \langle \rho_2^2 \rangle} F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi) \\ & = (E_t - E_1^t - E_2^t) F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi), \end{aligned} \quad (2.12)$$

y como se cumple

$$\hat{L}_z F_l(\phi_1, \phi_2) = l F_l(\phi_1, \phi_2), \quad (2.13)$$

en donde  $\hat{L}_z$  es la componente en la dirección  $z$  del momento angular del par  $p_1 - p_2$ . se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2I_\mu} \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} + V_{ef} \Psi(\phi) = \left( E_t - E_1^t - E_2^t - \frac{l^2}{2I_{tot}} \right) \Psi(\phi). \quad (2.14)$$

en donde  $l$  es un número entero que representa el valor propio del operador  $\hat{L}_z$ .

Aquí hemos definido el potencial efectivo  $V_{ef}$  que es resultado de integraciones de  $V_{int}$  ponderado por las densidades de probabilidad  $|\Psi_1^0|^2$  y  $|\Psi_2^0|^2$ , en las variables de confinamiento dado por

$$V_{ef} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1^0|^2 |\Psi_2^0|^2 V_{int} d\rho_1 d\rho_2 dz_1 dz_2, \quad (2.15)$$

y también definimos la energía excitónica  $E$  como

$$E = E_t - E_1^t - E_2^t - \frac{l^2}{2I_{tot}}, \quad (2.16)$$

con lo que tenemos la expresión final

$$\frac{-\hbar^2}{2I_\mu} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + V_{eff}(\phi) \Phi(\phi) = E \Phi(\phi), \quad (2.17)$$

donde  $E$  se obtiene al restarle a la energía total las contribuciones de las energías de confinamiento y angular.

Para obtener las energías y las funciones propias del excitón, basta con resolver la ecuación anterior que, como se observa, tiene la forma conocida de la ecuación de Schrödinger angular.

## 2.2 Desarrollo multipolar

En este punto, restringiremos nuestro modelo a potenciales de confinamiento armónicos: sin embargo, el modelo es válido para cualquier potencial de confinamiento transversal, cuyas integrales de momento sean conocidas y estén bien definidas. Para encontrar la expansión multipolar del potencial es útil escribir la densidad de probabilidad asociada al estado base del oscilador armónico bidimensional [34] en términos de sus desviaciones estándar  $\sigma_{z\nu} = \langle (z^\nu)^2 \rangle_0 - \langle z^\nu \rangle_0^2$  y  $\sigma_{\rho\nu} = \langle (\rho^\nu)^2 \rangle_0 - \langle \rho^\nu \rangle_0^2$  en donde  $\langle \ \rangle_0$  indican los valores esperados cuánticos en los respectivos estados base, es decir,

$$\begin{aligned} |\Psi_0(1, 2)|^2 &= |\Psi_1^0|^2 |\Psi_2^0|^2 \\ &= \frac{e^{-\frac{z_1^2}{(\sigma_{z1})^2} - \frac{(\rho_1 - a_1)^2}{(\sigma_{\rho1})^2}} e^{-\frac{z_2^2}{(\sigma_{z2})^2} - \frac{(\rho_2 - a_2)^2}{(\sigma_{\rho2})^2}}}{\pi \sigma_{z1} \sigma_{\rho1} \pi \sigma_{z2} \sigma_{\rho2}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

con  $\nu = 1$  y  $2$ .

Es claro que  $|\Psi_0(1, 2)|^2$  tiende a la función delta de Dirac  $\delta(z_1)\delta(z_2)\delta(\rho_1 - a_1)\delta(\rho_2 - a_2)$  cuando  $\sigma_{z1}, \sigma_{z2}, \sigma_{\rho1}$  y  $\sigma_{\rho2}$  tienden a cero [36]. Por esta razón podemos aproximar el potencial electrostático dentro de la expresión del potencial efectivo dada por la ecuación (2.15), por una serie de Taylor en torno al máximo de  $|\Psi_0(1, 2)|^2$  como función de  $\sigma_{z1}, \sigma_{z2}, \sigma_{\rho1}$  y  $\sigma_{\rho2}$  obteniéndose en términos de las desviaciones estándar la expresión siguiente

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi) &= -\frac{e^2}{\epsilon} \sum_{ijkl} \frac{I(\sigma_{\rho1}, \sigma_{\rho2}, \sigma_{z1}, \sigma_{z2})}{(i+j+k+l)!} \times \\ &\quad \frac{\partial^{i+j+k+l}}{\partial \rho_1^i \partial \rho_2^j \partial z_1^k \partial z_2^l} \left. \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi}} \right|_{\substack{z_1=0 \\ z_2=0 \\ \rho_1=a_1 \\ \rho_2=a_2}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde los momentos estadísticos de la distribución están dados por

$$I(\sigma_{\rho1}, \sigma_{\rho2}, \sigma_{z1}, \sigma_{z2}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\rho_1 d\rho_2 dz_1 dz_2 \times$$

$$|\Psi_1^{0|2}| |\Psi_2^{0|2}| z_1^k z_2^l (\rho_1 - a_1)^l (\rho_2 - a_2)^l. \quad (2.20)$$

Calcularemos primero las derivadas respecto a  $z_1$  y  $z_2$ , es decir

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial z_1^k \partial z_2^l} \left[ (z_1 - z_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi \right]^{-1/2} \Big|_{z_1=z_2=0}, \quad (2.21)$$

pero si definimos  $W^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi$  y  $t = z_1 - z_2$ , esta expresión se convierte en

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial z_1^k \partial z_2^l} \left[ (z_1 - z_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi \right]^{-1/2} \Big|_{z_1=z_2=0} = (-1)^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^{k+l}} [t^2 + W^2]^{-1/2} \quad (2.22)$$

y si además  $s = t/W$ , entonces la ecuación (2.21) toma la forma

$$\begin{aligned} (-1)^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^{k+l}} [t^2 + W^2]^{-1/2} &= (-1)^l \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^{k+l}} \left[ \frac{1}{W} (1 + s^2)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{(-1)^l}{W^{k+l}} \frac{\partial^{k+l}}{\partial s^{k+l}} \left[ \frac{1}{W} (1 + s^2)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sabemos que la función generadora de los polinomios de Legendre [36] está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}, \quad (2.24)$$

así que tomando  $x = 0$  y  $t = \text{sen} \phi$  en (2.24) tenemos que las derivadas en la ecuación (2.23) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{k+l}}{\partial z_1^k \partial z_2^l} \left[ (z_1 - z_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi \right]^{-1/2} \Big|_{z_1=z_2=0} \\ &= \frac{(-1)^k}{W^{k+l+1}} (k+l)! P_{k+l}(0) \\ &= \frac{(-1)^k (k+l)! P_{k+l}(0)}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi)^{\frac{k+l+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora calcularemos las derivadas respecto a  $\rho_1$  y  $\rho_2$  indicadas en la ecuación (2.19),

las cuales se obtienen derivando la ecuación anterior, es decir,

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^{k+l+k+l}}{\partial z_1^k \partial z_2^l \partial \rho_1^i \partial \rho_2^j} [(z_1 - z_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi]^{-1/2} \right|_{\substack{z_1=z_2=0 \\ \rho_1=a_1, \rho_2=a_2}} \\
&= \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial \rho_1^i \partial \rho_2^j} \frac{(-1)^k (k+l)! P_{k+l}(0)}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi)^{\frac{k+l+1}{2}}} \right|_{\rho_1=a_1, \rho_2=a_2} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Sea  $u = (\rho_2/\rho_1 - a_2/a_1)$  para que la expresión en el denominador de (2.26) pueda escribirse como

$$\begin{aligned}
1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - 2\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \phi &= u^2 + 2u \left(\frac{a_2}{a_1} - \cos \phi\right) + 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_1} \cos \phi \\
&= q^2 \left( v^2 + 2v \left(\frac{a_2}{a_1} - \cos \phi\right) + 1 \right), \quad (2.27)
\end{aligned}$$

en donde  $q^2 = 1 - \frac{2a_2}{a_1} \cos \phi + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$  y donde  $v = u/q$ . En términos de estas nuevas variables, las derivadas con respecto a  $\rho$  en la ecuación (2.26) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial \rho_1^i \partial \rho_2^j} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi)^{-\frac{k+l}{2}-\frac{1}{2}} \right|_{\substack{\rho_1=a_1 \\ \rho_2=a_2}} \\
&= \frac{\partial^{i+j}}{\partial \rho_1^i \partial \rho_2^j} \rho_1^{-(k+l+1)} \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - 2\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \phi \right)^{-\frac{k+l}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\partial^i}{\partial \rho_1^i} \rho_1^{-(k+l+1)} \frac{\partial^j}{\partial \rho_2^j} \left( 1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - 2\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \phi \right)^{-\frac{k+l}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\partial^i}{\partial \rho_1^i} \rho_1^{-(k+l+1)} \frac{q^{-(k+l+1)}}{(q\rho_1)^j} \frac{\partial^j}{\partial v^j} \left[ v^2 - v \left( \cos \phi - \frac{a_2}{a_1} \right) + 1 \right]^{-\frac{k+l}{2}-\frac{1}{2}} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Por otra parte, se conoce que la función generadora de los polinomios de Gegenbauer [35] tiene la forma siguiente

$$\frac{2\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(1+h^2-2hz)^{\beta+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n T_n^\beta(z), \quad |h| < 1, \quad (2.29)$$

en donde  $T_n^\beta(z)$  son los polinomios de Gegenbauer [36]. Si tomamos  $\beta = (k+l)/2$ ,  $h = v$

y  $z = [\cos \phi - (a_2/a_1)]/q$ , la función generadora de los polinomios Gegenbauer queda entonces como

$$\begin{aligned}
& \frac{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left[ v^2 - \frac{v \left( \cos \phi - \frac{a_2}{a_1} \right)}{q} + 1 \right]^{-\frac{k+l}{2} - \frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_n^{\frac{k+l}{2}} \left( \frac{\cos \phi - \frac{a_2}{a_1}}{q} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} v^n \frac{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j} \left[ v^2 - \frac{v \left( \cos \phi - \frac{a_2}{a_1} \right)}{q} + 1 \right]^{-\frac{k+l}{2} - \frac{1}{2}} \Bigg|_{v=0}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Nótese que el hecho de que  $h = \nu < 1$  implica  $\rho_1 > \rho_2$ ; lo cual siempre puede hacerse sin perder generalidad en nuestra deducción. Desarrollando en serie de Taylor podemos identificar cada una de las derivadas con los polinomios  $T_n^\beta(z)$ ; esto es

$$\frac{\partial^j}{\partial v^j} \left[ v^2 - \frac{v \left( \cos \phi - \frac{a_2}{a_1} \right)}{q} + 1 \right]^{-\frac{k+l}{2} - \frac{1}{2}} \Bigg|_{v=0} = \frac{\sqrt{\pi} j!}{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l}{2} + \frac{1}{2}\right)} T_j^{\frac{k+l}{2}} \left( \frac{\cos \phi - \frac{a_2}{a_1}}{q} \right). \quad (2.31)$$

Así que la derivada dada por la ecuación (2.28) queda como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^i}{\partial \rho_1^i} \rho_1^{-(k+l+1)} \frac{q^{-(k+l+1)}}{(q\rho_1)^j} \frac{\partial^j}{\partial v^j} \left[ v^2 - \frac{v \left( \cos \phi - \frac{a_2}{a_1} \right)}{q} + 1 \right]^{-\frac{k+l}{2} - \frac{1}{2}} \\
&= q^{-(k+l+j+1)} \frac{\partial^i}{\partial \rho_1^i} \rho_1^{-(k+l+j+1)} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} j!}{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l}{2} + \frac{1}{2}\right)} T_j^{\frac{k+l}{2}} \left( \frac{\cos \phi - \frac{a_2}{a_1}}{q} \right) \right\}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

en donde la derivada respecto a la variable  $\rho_1$  da como resultado

$$\frac{\partial^i}{\partial \rho_1^i} \frac{1}{\rho_1^{j+k+l+1}} \Bigg|_{\rho_1=a_1} = \frac{(j+k+l+i)!}{\rho_1^{j+k+l+i+1}} \frac{(-1)^i}{(j+k+l)!}. \quad (2.33)$$

Sustituyendo la ecuación (2.32) en la ecuación (2.28) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{i+j}}{\partial \rho_1^i \partial \rho_2^j} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \phi)^{-\frac{k+l}{2}-\frac{1}{2}} \Big|_{\substack{\rho_1=a_1 \\ \rho_2=a_2}} \\
&= \frac{(j+k+l+i)!}{q^{k+l+j+1} a_1^{j+k+l+i+1}} \frac{(-1)^i}{(j+k+l)!} \\
& \times \left\{ \frac{\sqrt{\pi} j!}{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l}{2} + \frac{1}{2}\right)} T_j^{\frac{k+l}{2}} \left( \frac{\cos \phi - \frac{a_2}{a_1}}{q} \right) \right\}. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (2.34) y a su vez en la expresión para  $V_{ef}$  dada por la ecuación (2.19), obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi) &= \frac{-e^2}{\epsilon} \sqrt{\pi} \sum_{ijkl} \frac{I(\sigma_{\rho_1}, \sigma_{\rho_2}, \sigma_{z_1}, \sigma_{z_2})}{2^{(k+l)/2} \Gamma\left(\frac{k+l+1}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+i} j! (k+l)! P_{k+l}(0)}{(j+k+l)! a_1^i (a_1^2 - 2a_2 a_1 \cos \phi + a_2^2)^{\frac{j+k+l+1}{2}}} \times \\
& T_j^{\frac{k+l}{2}} \left( \frac{a_1 \cos \phi - a_2}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2 a_1 \cos \phi + a_2^2}} \right). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

A continuación calcularemos las integrales de momentos dadas por la ecuación (2.20) utilizando las distribuciones de probabilidad, que en términos de las desviaciones estándar ya mencionadas, se escriben en la siguiente forma

$$|\Psi_0(1)|^2 = \frac{\exp\left(-\frac{z_1^2}{\sigma_{z_1}^2} - \frac{(\rho_1 - a_1)^2}{\sigma_{\rho_1}^2}\right)}{\pi \sigma_{\rho_1} \sigma_{z_1}} \tag{2.36}$$

y

$$|\Psi_0(2)|^2 = \frac{\exp\left(-\frac{z_2^2}{\sigma_{z_2}^2} - \frac{(\rho_2 - a_2)^2}{\sigma_{\rho_2}^2}\right)}{\pi \sigma_{\rho_2} \sigma_{z_2}}. \tag{2.37}$$

Cabe mencionar que aun cuando no existe solución analítica para los osciladores bidimensionales fuera del origen, la solución unidimensional dada por la ecuación (2.37) es una buena aproximación cuando  $a_2 \gg \sigma_{\rho_2}$ .

La ecuación (2.20) toma la forma

$$I(\sigma_{\rho_1}, \sigma_{\rho_2}, \sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left(-\frac{z_1^2}{\sigma_{z_1}^2} - \frac{z_2^2}{\sigma_{z_2}^2}\right)}{\pi \sigma_{z_1} \sigma_{z_2}} \times \frac{z_1^k z_2^l (\rho_1 - a_1)^i (\rho_2 - a_2)^j}{\pi \sigma_{\rho_1} \sigma_{\rho_2}} \times \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{\sigma_{\rho_1}^2} - \frac{\rho_2^2}{\sigma_{\rho_2}^2}\right) d\rho_1 d\rho_2 dz_1 dz_2, \quad (2.38)$$

Separando las integrales en variables independientes y utilizando la siguiente identidad [37]

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)}{\pi \sigma_z} Z^k dZ = \begin{cases} \frac{\sigma_z^i}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right), & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}, \quad (2.39)$$

en donde  $\Gamma$  es la función gamma [38]. De forma similar, se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{(\rho_1 - a_1)^2}{\sigma_{\rho_1}^2}\right)}{\sqrt{\pi} \sigma_{\rho_1}} (\rho_1 - a_1)^i d\rho_1 = \frac{\sigma_{\rho_1}^i}{2\sqrt{\pi}} \left( \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) + (-1)^i \gamma\left(\frac{a_1}{\sigma_{\rho_1}}, \frac{i+1}{2}\right) \right), \quad (2.40)$$

en donde  $\gamma$  es la función gama incompleta la cual está dada aproximadamente por  $\Gamma((i+1)/2)$  cuando  $a_1 \gg \sigma_{\rho_1}$ ; es decir, la ecuación (2.40) se reduce a una expresión similar a la ecuación (2.39). Así, la ecuación (2.20) toma la forma

$$I(\sigma_{\rho_1}, \sigma_{\rho_2}, \sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}) = \begin{cases} \frac{\sigma_{z_1}^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\sigma_{z_2}^l}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \frac{\sigma_{\rho_1}^i}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \frac{\sigma_{\rho_2}^j}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right), & k, l, i \text{ y } j \text{ son todos pares} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (2.41)$$

De esta manera, sustituyendo (2.41) en (2.19), obtenemos

$$V_{\text{ef}}(\phi) = \frac{-e^2 \sqrt{\pi}}{\epsilon \pi^2} \sum_{ijkl} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right)}{2^{k+l} \Gamma\left(k + l + \frac{1}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+l} (2j)! (2k + 2l - 1)!!^2 \sigma_{z_1}^{2k} \sigma_{z_2}^{2l} \sigma_{\rho_1}^{2i} \sigma_{\rho_2}^{2j}}{(j + 2k + 2l)! a_1^{2i} (a_1^2 - 2a_2 a_1 \cos \phi + a_2^2)^{k+l+j+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\begin{aligned}
& T_{2j}^{k+l} \left( \frac{a_1 \cos \phi - a_2}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2}} \right) \\
&= \frac{-e^2}{\epsilon} \sum_{ijkl} \frac{(2k-1)!!(2l-1)!!(2i-1)!!(2j-1)!!}{2^{j+i+k+l} (j+2k+2l)! a_1^{2i}} \\
& \frac{(-1)^{k+l} (2j)!!(2k+2l-1)!! \sigma_{z_1}^{2k} \sigma_{z_2}^{2l} \sigma_{\rho_1}^{2i} \sigma_{\rho_2}^{2j}}{(a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2)^{k+l+j+\frac{1}{2}}} \times \\
& T_{2j}^{k+l} \left( \frac{a_1 \cos \phi - a_2}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2}} \right), \tag{2.42}
\end{aligned}$$

en donde hemos usado el hecho de que sólo los momentos pares con respecto a  $k$  y  $l$  son no nulos, así como el valor  $P_n(x) = (-1)^n (2n-1)!! / (2n)!!$ . Si desarrollamos  $V_{ef}$  para tomar en cuenta el término dominante y sólo los primeros términos correctivos, obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi) &= \frac{-e^2}{\epsilon \sqrt{a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2}} \left( 1 + \frac{\sigma_{\rho_1}^2 (a_1^2 + \frac{3}{2}\sigma_{\rho_1}^2)}{2a_1^2 (a_1^2 + \sigma_{\rho_1}^2/2)} \right. \\
& \frac{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2}{2(a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2)} + \frac{\sigma_{\rho_2}^2 (a_2^2 + \frac{3}{2}\sigma_{\rho_2}^2)}{2(a_2^2 + \sigma_{\rho_2}^2/2)} \\
& \left. \frac{[(3 \cos^2 \phi - 1)a_1^2 - 4a_2a_1 \cos \phi + 2a_2^2]}{(a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2)^2} \right). \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Aquí se observa que para el punto en donde la interacción electrostática es más grande (cerca de  $\phi = 0$ ), si  $\sigma_{z_1}$  y  $\sigma_{z_2}$  decrecen o  $\sigma_{\rho_1}$  y  $\sigma_{\rho_2}$  se incrementan, entonces el potencial coulombiano desnudo, o término monopolar ( $-e^2/\epsilon\beta(\phi)$ ) aumenta. en donde  $\beta(\phi) = \sqrt{a_1^2 - 2a_2a_1 \cos \phi + a_2^2}$ . El segundo término dentro del paréntesis en (2.42) corrige la magnitud de la contribución monopolar para  $\sigma_{\rho_1} \neq 0$ . Nótese que después del término monopolar dominante hay un término del tipo cuadrupolar, que va como  $\beta(\phi)^{-3}$ . La ausencia del término dipolar se debe a la simetría del estado base  $|\psi_0(1, 2)|^2$  con respecto a los centros de los anillos, la cual sólo será válida para anillos delgados ( $\sigma \ll a_1, a_2$ ). En efecto, si los anillos fueran más gruesos la atracción electrostática entre sus densidades de carga induciría momentos dipolares en cada una de estas distribuciones. En la vecindad

de  $\phi = 0$ , en donde la interacción es más fuerte, el término negativo proporcional a las  $\sigma_z^2$ 's compite con el término positivo proporcional a las  $\sigma_\rho^2$ 's. Los signos de estas contribuciones se explican con base en los siguientes argumentos. Al redistribuir la densidad de carga frontal aumentando las  $\sigma_z^2$ 's se obtiene una distancia promedio efectiva mayor, entre  $q_1$  y  $q_2$ , y por ende una interacción más débil. En contraste, al redistribuir radialmente la densidad de carga aumentando las  $\sigma_\rho^2$ 's se produce una interacción más fuerte, debido al hecho de que el potencial entre la parte interna del anillo exterior de carga y la parte externa del anillo exterior de carga domina sobre las cargas localizadas en las partes externa del anillo grande e interna del anillo pequeño.

## 2.3 Soluciones numéricas y resultados

Supondremos que los confinamientos se escogen de tal forma que  $\sigma = \sigma_{z_1} = \sigma_{z_2} = \sigma_{\rho_1} = \sigma_{\rho_2}$ . Si sustituimos  $V_{\text{eff}}(\phi)$  de la ecuación (2.43) en la ecuación (2.17) obtenemos la ecuación excitónica

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\phi}} \left( 1 - \frac{\sigma'^2}{(1+p^2-2p\cos\phi)} + \frac{\sigma'^2(1+3\sigma'^2/2)}{(2+\sigma'^2)} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma'^2(p^2+3\sigma'^2/2)[3\cos^2\phi-4p\cos\phi+2p^2-1]}{(2p^2+\sigma'^2)(1+p^2-2p\cos\phi)^2} \right) \Phi(\phi) \\ = & \mathcal{E}\Phi(\phi), \end{aligned} \tag{2.44}$$

en donde hemos introducido los parámetros adimensionales

$$\alpha = 2I_\mu e^2 / (\epsilon \hbar^2 a_1)$$

$$\mathcal{E} = - (2I_\mu E^{1D} / \hbar^2)$$

$$p = a_2/a_1$$

$$\sigma' = \sigma/a_1$$

$$I_\mu = m_1 m_2 a_1^2 (1 + \sigma'^2) (p^2 + \sigma'^2) / (m_1 (1 + \sigma'^2) + m_2 (p^2 + \sigma'^2))$$

Puesto que  $\phi$  es una variable angular, tiene que cumplir que  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ . Como puede observarse los coeficientes de la ecuación (2.44) satisfacen esta condición periódica, por lo que con base en el teorema de Floquet [40], sabemos que tiene una solución con el mismo periodo. El hecho de que  $V_{\text{eff}}(\phi)$  sea par en  $\phi$  nos permite separar sus soluciones en eigenfunciones pares e impares.

Debido a que nuestro sistema define un problema de condiciones de frontera periódicas, resolvemos numéricamente la ecuación (2.44) utilizando el método de “disparo” (shooting) [39] para el semiconductor AsGa, cuyos valores de parámetros físicos son  $\epsilon = 13.13$ ,  $m_1 = 0.07m_e$  y  $m_2 = 0.12m_e$ , ( $m_e$ : masa del electrón) y para las dimensiones y gruesos de los anillos  $a_1 = 800 \text{ \AA}$ ,  $a_2 = 400 \text{ \AA}$ ,  $\sigma = 50 \text{ \AA}$ ,  $40 \text{ \AA}$ ,  $30 \text{ \AA}$ . Usamos los siguientes tipos de condiciones de frontera

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0 \text{ para eigenfunciones impares} \quad (2.45)$$

y

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) = A \neq 0 \text{ para eigenfunciones pares,} \quad (2.46)$$

las cuales toman en cuenta la periodicidad de  $\Phi(\phi)$ . Esta condición periódica para  $\Phi(\phi)$  hace que esta función no sólo se anule en  $\phi = 0$ , sino que también en  $\phi = \pi$ , cuando  $n$  es par. Similarmente, la misma condición hace que  $\Phi_n(\phi)$  sea simétrica no sólo con respecto

a  $\phi = 0$ , sino también con respecto a  $\phi = \pi$ , cuando  $n$  es par.

Encontramos un número finito de estados de energía negativa que resultan ser ocho para los valores de parámetros dados arriba. Calculamos todas las  $\Phi_n(\phi)$  tales que las condiciones de frontera correspondientes, ecuación (2.45) o ecuación (2.46), se satisficieron con una precisión de hasta seis órdenes de magnitud y, asimismo, con una precisión de hasta tres órdenes de magnitud, se verificó que se cumplieran todas las condiciones de ortogonalidad.

Calculamos la magnitud de las energías propias negativas, que se muestra en la tabla 1 en unidades de meVs. Nótese que la energía del estado base es aproximadamente 1.5 veces la energía de un excitón en un alambre cuántico 1D, para el mismo semiconductor y el mismo grueso [32], aunque sería más apropiado comparar esta energía con un sistema de dos alambres paralelos, en donde el electrón se halla en un alambre y el hueco en el otro. Para este último sistema tipo II de dos alambres cuánticos paralelos se encontró que las energías de amarre son mucho más pequeños siendo del orden de 0.7 meV. Es decir, el hecho de que el sistema de alambres cuánticos se “doble” sobre si mismo origina un incremento de la energía de amarre por un factor de 20 a pesar de que los alambres forman anillos de radios  $a_1 = 800 \text{ \AA}$  y  $a_2 = 400 \text{ \AA}$  que corresponden a circunferencias de longitudes de  $4800 \text{ \AA}$  y de  $2400 \text{ \AA}$  aproximadamente. Este sistema de electrón y hueco separado espacialmente tiene una energía de amarre más baja para la misma distancia de separación, que es de un orden de magnitud más pequeña que la de los anillos concéntricos [19]. Esto es una consecuencia de que los anillos cuánticos son estructuras más confinantes en comparación con los alambres cuánticos. Es decir, la función de onda en un alambre tiene más “espacio” a lo largo de la dirección “libre”.

$ E_n  \setminus \sigma$	$50.0 \text{ \AA}$	$40.0 \text{ \AA}$	$30.0 \text{ \AA}$
$ E_0 $	14.188	14.130	14.085
$ E_1 $	10.563	10.530	10.504
$ E_2 $	8.187	8.155	8.132
$ E_3 $	6.613	6.584	6.531
$ E_4 $	5.753	5.725	5.705
$ E_5 $	4.569	4.540	4.519
$ E_6 $	4.568	4.538	4.490
$ E_7 $	2.091	2.061	2.037
$ E_8 $	2.091	2.061	2.037

Tabla. Energías propias excitónicas en meV como función de los gruesos de los aros para Ga As con parámetros físicos  $\varepsilon = 13.13$ ,  $m_1 = 0.07m_e$  y  $m_2 = .12m_e$  ( $m_e$  es la masa del electrón) y geométricos:  $a_1 = 800 \text{ \AA}$ ,  $a_2 = 400 \text{ \AA}$ ,  $\sigma = 50 \text{ \AA}$ ,  $40 \text{ \AA}$  y  $30 \text{ \AA}$ .

Es importante mencionar que nuestro sistema debe comportarse asintóticamente en forma similar al de los alambres cuánticos paralelos estudiado en la referencia. [19] cuando  $a_1$  y  $a_2$  son muy grandes manteniendo  $d = a_1 - a_2$  constante. Para analizar este caso extremo utilizaremos un resultado del Apéndice 4.2 que muestra que el número de estados de energía negativa  $N$  es proporcional a  $N \propto \sqrt{\alpha}$ . el cual a su vez está dado aproximadamente por  $\alpha \approx a_2^2/a_1$ . De esta manera, sustituyendo  $a_2$  por  $d$  y tomando el límite  $a_1 \rightarrow \infty$  encontramos que  $N$  diverge, por lo que el número de estados de energía negativa no es finito, esto mismo ocurre en el sistema de alambres paralelos [19]. Lo

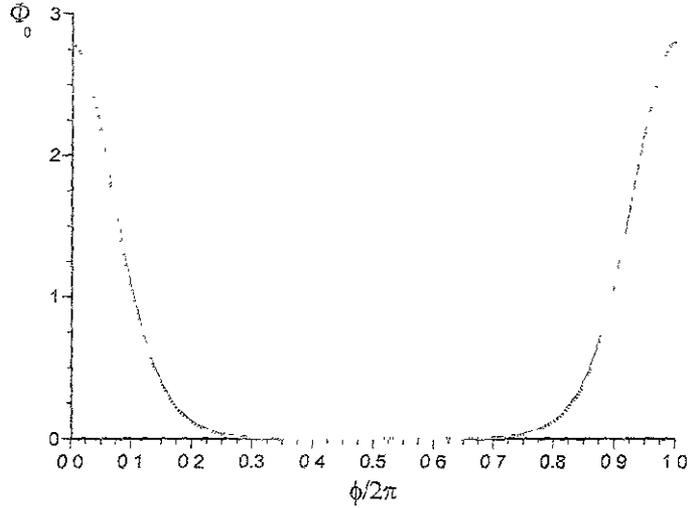


Figura 2-2: Eigenfunción para el estado base  $\Phi_0$  como función de  $\phi/2\pi$  para  $a_1 = 800 \text{ \AA}$ ,  $a_2 = 400 \text{ \AA}$  y  $\sigma = 40 \text{ \AA}$ .

anterior significa que la densidad de estados ligados en un intervalo de energías negativas debe aumentar considerablemente en este límite.

Obsérvese en la tabla que al aumentar  $n$  el sistema tiende a ser degenerado, de tal forma que  $\mathcal{E}_{2n} \rightarrow \mathcal{E}_{2n+1}$ , lo cual se esperaba porque cuando aumenta la energía cinética el potencial  $V_{\text{eff}}$  puede despreciarse y nuestro sistema comienza a parecer un rotor plano. Como es bien conocido en un rotor plano existen eigenestados con momentos  $\hbar m$  y  $-\hbar m$ , los cuales son degenerados en pares, y cuyas eigenfunciones puede expresarse como estados pares e impares, dados por  $\sin(\phi/2\pi)$  o  $\cos(\phi/2\pi)$ . Las eigenfunciones de los estados de energía negativa se grafican en las figuras 2-2-2-9. En el estado base se muestra cómo  $|\Phi_0|$  tiene un pico muy pronunciado localizado en la vecindad de  $\phi = 0$ . Los siguientes eigenestados tienen más picos, pero aún se nota una clara tendencia a ser atraídos hacia el punto  $\phi = 0$ , en donde está el centro de fuerza. Se debe mencionar que las eigenfunciones casi no cambian para los tres valores de  $\sigma$ , pero  $|E_n|$  crece un poco como función de

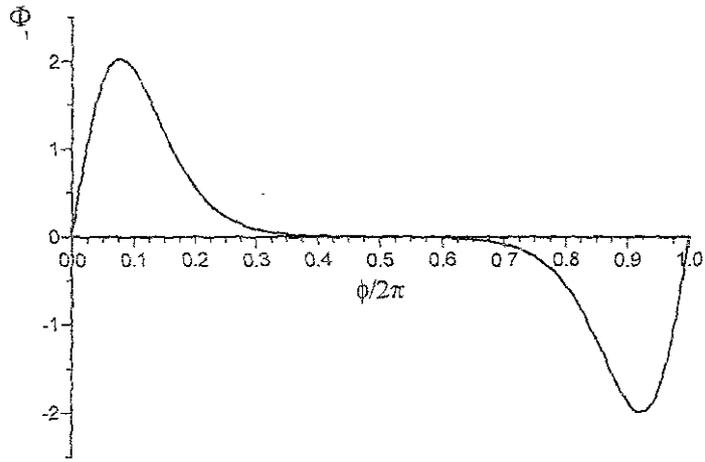


Figura 2-3: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_1$ .

$$\sigma = \sigma_{z_1} = \sigma_{z_2} = \sigma_{\rho_1} = \sigma_{\rho_2}.$$

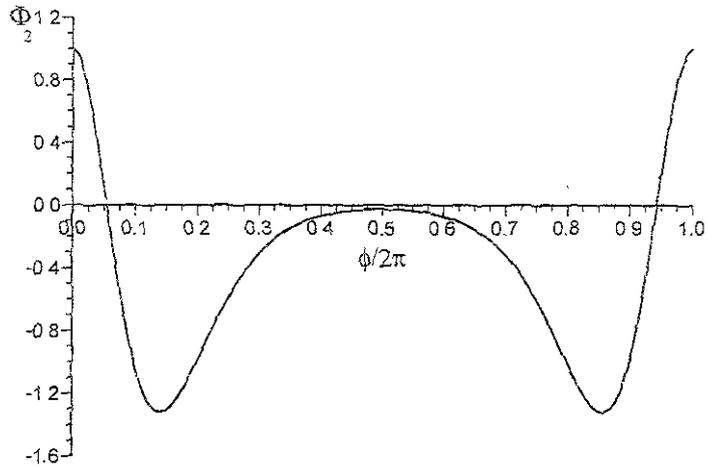


Figura 2-4: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_2$ .

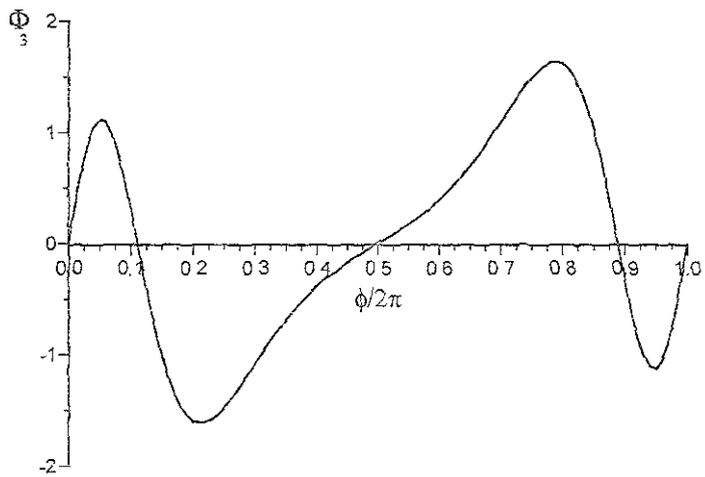


Figura 2-5: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_3$ .

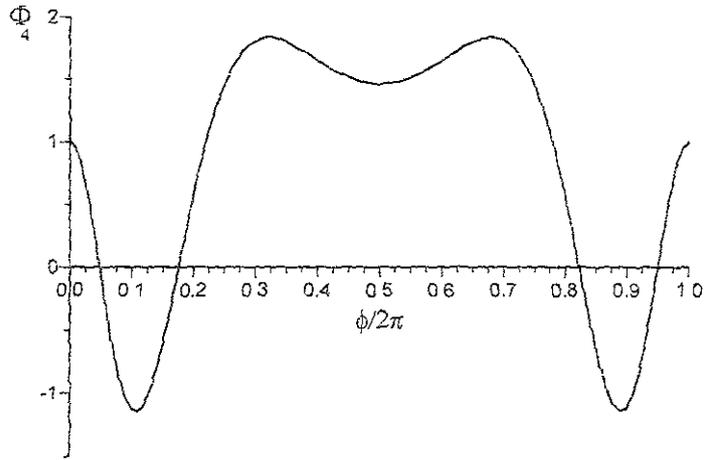


Figura 2-6: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_4$ .

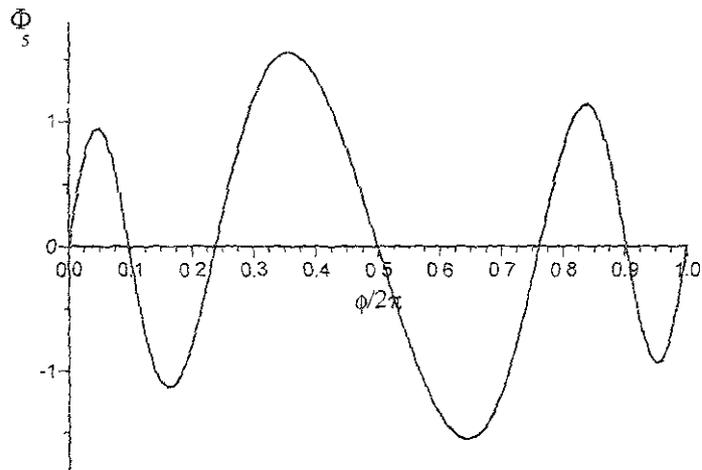


Figura 2-7: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_5$ .

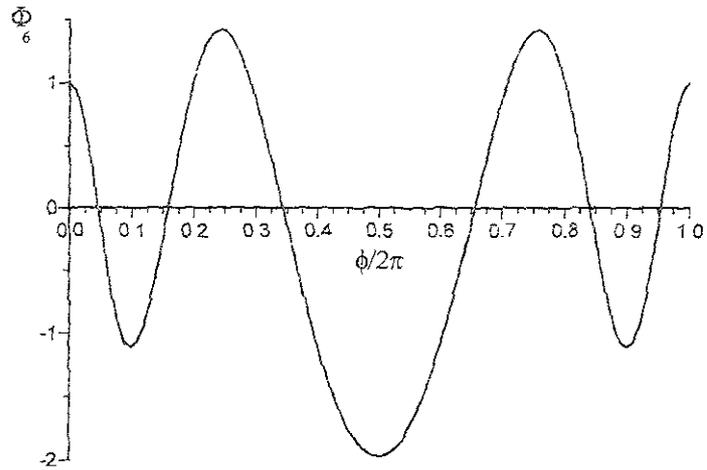


Figura 2-8: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_6$ .

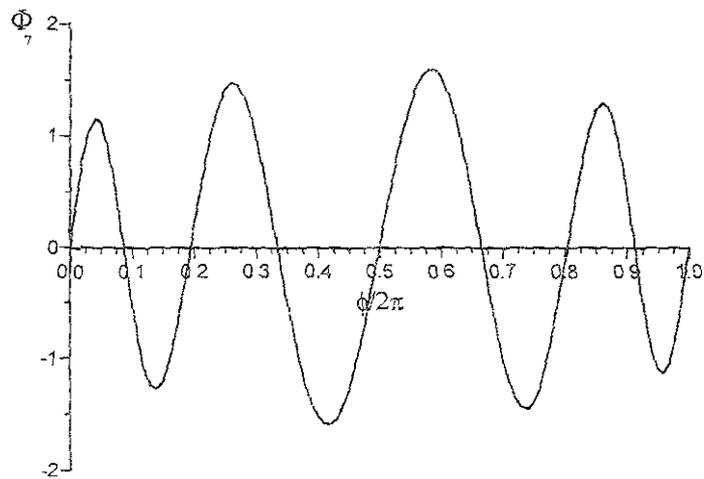


Figura 2-9: Igual que en la Fig. 2-2 pero para  $\Phi_7$ .

# Capítulo 3

## Conclusiones

Investigamos teóricamente un excitón de Wannier-Mott, en el cual el electrón está restringido a moverse en un anillo cuántico muy estrecho y el hueco a moverse en otro anillo cuántico concéntrico y coplanar también muy estrecho. La investigación en este arreglo novedoso fué motivada por el interés de obtener energías de amarre mayores a las obtenidas en un sistema similar formado por un excitón con un electrón en un alambre cuántico y el hueco en otro alambre cuántico paralelo. Este sistema tipo II tiene energías excitónicas muy pequeñas siendo estas energías del orden de meV [19].

Encontramos para nuestro sistema, de electrón y hueco separados espacialmente, una ecuación excitónica unidimensional para la coordenada angular relativa. Supusimos que en las direcciones de confinamiento tanto el electrón como el hueco se hallaban en los respectivos estados bases de sus potenciales parabólicos. Efectuamos un desarrollo multipolar del potencial coulombiano efectivo de interacción. Este método podría utilizarse para cualquier otro tipo de confinamiento, conduciendo a diferentes expansiones multipolares.

Mostramos que las contribuciones de los anchos de los anillos en el potencial efectivo de interacción son diferentes; pues existen términos en su desarrollo multipolar que debilitan el potencial efectivo (aquéllos proporcionales a  $\sigma_z^2$ 's) mientras que otros tienden a fortalecerlo (aquéllos proporcionales a  $\sigma_p^2$ 's).

Aplicamos nuestro formalismo a sistemas reales para obtener las energías propias negativas, resolviendo numericamente nuestra ecuación central para un conjunto de valores específicos y realistas de nuestro sistema de anillos concéntricos. Las energías así obtenidas resultaron ser aproximadamente 1.5 veces [32] la energía de un excitón en un alambre cuántico 1D del tipo I para el mismo semiconductor y el mismo grueso y 20 veces mayor que la energía del sistema tipo II de alambres cuánticos paralelos arriba mencionado [19]. Este resultado sugiere que en este sistema es más fácil detectar las eigenenergías, no sólo porque éstas son mayores, sino porque el excitón es más estable en una hetroestructura del tipo II como la aquí considerada, y por tanto, su vida media es más larga.

También encontramos las funciones propias correspondientes a los estados de energía negativa y dimos un criterio para encontrar el número total de estos estados para sistemas con potenciales periódicos como el nuestro (Apéndice II).

Esperamos que nuestros resultados sirvan de guía en la construcción y estudio experimental de sistemas con simetría cilíndrica, en los que el electrón y el hueco se encuentran separados espacialmente.

# Apéndice A

## Fabricación de Nanoestructuras

Aquí incluimos tres apéndices abocados a revisar temas que, si bien son de interés en función del tema central de esta tesis, su inclusión dentro del cuerpo principal de este trabajo sería una digresión que distraería a el lector de la secuencia de temas, procedimientos y resultados principales de nuestra investigación. En efecto, por una parte, la revisión breve de algunas de las diversas técnicas de fabricación de heteroestructuras nos permite apreciar la plausibilidad del nuevo tipo de estructura que se propuso en este trabajo teórico, para la cual calculamos sus eigenestados, enseguida construimos las funciones propias de la componente  $z$  del momento angular total de dos partículas y por último, el criterio para el número de estados ligados aplicado a nuestro sistema nos dará una idea del comportamiento de nuestro sistema para otros semiconductores y distintas dimensiones a las utilizadas en nuestros cálculos.

En los años 60s los transistores que operaban como elementos de memoria tenían longitudes de fracciones de milímetro. Desde entonces se ha logrado la miniaturización de estos elementos, de manera que hoy en día se les puede encontrar en tamaños de fracciones de micra.

La finalidad de esta sección es describir las diversas técnicas implementadas en la fabricación de semiconductores microestructurales. Estas técnicas son extrapolaciones de las utilizadas en la preparación de circuitos integrados, ya sean de Si o de GaAs.

La fabricación de una microestructura con fines de investigación óptica o electrónica requiere de la preparación de un substrato semiconductor. e incluye la aplicación de diferentes métodos para modelar diferentes capas. alternar propiedades electrónicas u ópticas en posiciones preseleccionadas del material, conformar contactos electrónicos o conductores, añadir o remover material de la superficie y proteger las superficies libres de las estructuras terminadas de ataques químicos o eléctricos [41].

## A.1 Litografía

En esta técnica, la superficie de un semiconductor se cubre con una capa dura de algún material orgánico polimérico. Estos materiales juegan un papel muy importante en la fabricación de pequeñas estructuras y de circuitos integrados. El espesor de la película (de 0.5 a 2  $\mu\text{m}$ ) se controla a través de la concentración del monómero en el solvente. El endurecimiento se lleva a cabo cuando se calienta por unos 10 minutos a temperaturas del orden de 160 °C. Existen dos tipos de películas: resistentes positivos y resistentes negativos. Ejemplos de los primeros son las sales comunes, y de los segundos se tienen a los compuestos calcogenuros (As-S, Ge-Se). Cuando el material resistente positivo se expone a la acción de la luz. o de un rayo de electrones, se descompone en partículas orgánicas más pequeñas. que pueden disolverse con mucha facilidad con solventes adecuados que no atacan a las zonas no expuestas. En contraste, los resistentes negativos se endurecen más cuando son expuestos a la luz, por lo que los solventes atacan aquellas zonas que han sido expuestas a la acción de la luz.

El único límite natural para transferir un patrón con la mayor fidelidad a un substrato más pequeño es la longitud de onda de la luz, que para la luz visible es de 0.4-0.8  $\mu\text{m}$  y para los rayos X es de 0.01  $\mu\text{m}$ . Por este motivo, suelen utilizarse estructuras adicionales a los bordes para que interfieran con la luz difractada, con la finalidad de lograr un contraste exacto en el material resistente.

En el diseño de microscopios ópticos de alta resolución, se utilizan lentes magnéticos controlados por computadoras que guían el haz de electrones. Este dispositivo puede

utilizarse para dirigir el haz sobre un material delgado cubierto por una capa resistente. Mientras más elevada sea la energía del rayo electrónico, más fino es el enfoque, y se facilita lograr un punto muy pequeño en la superficie. Este proceso, sin embargo, tiene sus limitaciones, ya que los electrones primarios alcanzan energías tales que interactúan con la película resistente, de manera que forman una cascada de electrones secundarios con energía suficiente para romper otros enlaces que debilitan la película. Esta reacción limita el uso de esta técnica con dimensiones de  $0.02 \mu\text{m}$ .

En algunas ocasiones se han utilizado iones en lugar de electrones, con los cuales se consigue una resolución del orden de  $0.01 \mu\text{m}$ , aunque se ve reducido, en general, el intervalo de penetración de la superficie de película resistente.

La principal diferencia entre la técnica óptica (rayos X) y la litográfica es la rapidez de la primera, ya que basta con exponer la máscara a un destello para imprimirla en el sustrato, mientras que la técnica litográfica equivale a redefinir toda la máscara. Las máscaras ópticas pueden hacerse, fabricarse y repararse usando las técnicas de rayos de electrones. Detalles de este método pueden verse en la literatura [41].

Después de haber removido las partes débiles del material resistente, hemos alcanzado la etapa donde un patrón se ha copiado en la superficie. Este patrón será tan profundo como el material resistente, es decir, se espera que los solventes hayan sido capaces de remover todo el material resistente debilitado. De hecho, uno de los principales defectos encontrados en dispositivos y estructuras es la incompleta remoción del material resistente. Ahora quedará la posibilidad de explotar este patrón de diferentes formas: el material subyacente puede ser removido por diferentes formas de grabado. Muchos materiales, como metales, dieléctricos o semiconductores, pueden ser depositados creciéndolos en áreas seleccionadas. Las propiedades eléctricas pueden ser alteradas por las técnicas de implantación de iones. Estas son las opciones que someramente discutiremos a continuación.

## A.2 Grabado

Existen dos formas principales de grabado: por medio de soluciones químicas y por plásmas. Cada una tiene sus ventajas y desventajas.

El uso de las soluciones químicas ha sido útil desde los inicios de la fabricación de los circuitos integrados. La cantidad de sustancias alcalinas y ácidos que se utilizan es muy amplia, así como sus propiedades: algunos atacan al material de manera isotrópica: otros son muy sensibles a los planos cristalinos. Este método es muy simple, y es más confiable cuando se trata con rasgos gruesos y separados. En algunos casos, las soluciones químicas producen franjas de interferencia generadas por las capas delgadas de película resistente, las cuales sirven como una guía para saber cuando se ha removido completamente la película.

Las exigencias en la calidad de grabado han dado una importancia relevante al uso del método de plasma. En este caso se utiliza una cámara que contiene gas (cloro, metano, etc.), donde los radicales atacan en forma diferenciada a las partes del semiconductor y al material resistente. También aquí encontramos algunos agentes que atacan isotrópicamente, y otros lo hacen en planos específicos. Las variables importantes son: composición del gas, temperatura, potencia de radiofrecuencia, voltajes aplicados a los radicales y razón de flujo. Una de las desventajas de esta técnica es que los átomos del plasma pueden penetrar algunos nanómetros en el material, cambiando el perfil de dopaje. Sin embargo, la versatilidad y relativa simpleza de esta técnica permite producir estructuras más elaboradas, día con día.

## A.3 Implantación de Iones

El propósito de esta técnica es el de crear capas conductoras de alguna polaridad deseada (transporte de electrones o huecos) o proporcionar capas no conductoras (implantación de hidrógenos). Este proceso conlleva algunos inconvenientes. Al implantar iones, particularmente iones pesados, se rompe la periodicidad de la red, lo cual hace necesario

recocer la muestra, para dar oportunidad a los iones de reacomodarse. Estudios de TEM (Microscopía por Transmisión de Electrones) revelan que, a veces, son necesarias varias etapas de recocido [42]. En ocasiones, las temperaturas y tiempos necesarios en este proceso producen pérdida de elementos en cantidades inacceptables, de manera que se debe depositar una capa para proteger la superficie durante el recocido. Otro problema inherente a esta técnica es la penetración de los iones a grandes profundidades, destruyendo capas sensibles en profundas partes de el material. Puede verse una discusión de esta técnica en Morgan y Eisen [43] y Sealy [44].

Actualmente se hacen estudios combinando implantación de iones y litografía, con los cuales se puede modificar sólo una parte de la super red [45].

## A.4 Metalización

La principal forma de depositar un metal en una área seleccionada se conoce como "lift-off". En esta técnica se deposita por evaporación una película metálica (o de una aleación) sobre el modelo grabado en la superficie. En las áreas donde la resistencia ha sido removida, el metal hace contacto con la superficie subyacente. De otra forma, ésta cubre al material resistente. Posteriormente, se usa un poderoso solvente para remover el material resistente y levantar con él al metal que lo cubre. Una metalización efectiva depende de una buena adhesión del metal superpuesto al semiconductor, por lo que puede ser necesario un recocimiento posterior. A esto debe añadirse la necesidad de tener contactos óhmicos o tipo Schottky. Los materiales tradicionalmente usados para formar contactos óhmicos en materiales tipo n, como GaAs, incluyen aleaciones de Au-Ge-Ni, los cuales tienen un bajo punto de fusión. El germanio ayuda a formar capas adyacentes a la capa de contacto. El níquel fácilmente forma una aleación con GaAs y el oro proporciona una fuerte adhesión entre la superficie y los alambres de contacto. En casos especiales, puede usarse Ag Pd en lugar de oro. Los contactos de materiales tipo p usualmente incluyen Zn en lugar de Ni y Ge. Donde se requieren contactos tipo Schottky se tiende a usar metales refractarios que incluyen aleaciones de W y W-Si, ya que estos

materiales resisten reacciones químicas y, por tanto, sólo ocurren cambios menores en su morfología y sus propiedades eléctricas durante los tratamientos térmicos requeridos. Las técnicas para formar contactos metal-semiconductor se basan en desarrollos pragmáticos y unas cuantas reglas empíricas. Los comentarios anteriores se aplican también a otros materiales, incluyendo dieléctricos u otros semiconductores. Los dieléctricos son usados en dispositivos ópticos y espejos dieléctricos. El arte de depositar éstos en varias capas está aún en la etapa de perfeccionamiento, aunque capas mezcladas de  $(\text{Ca},\text{Ba})\text{Fe}_2$  han dado buen resultado.

## A.5 Estabilización

Una vez que se ha preparado una estructura semiconductor con contactos eléctricos, se hace necesario completar la etapa final de preparación de la muestra, con lo que llamamos estabilización de la superficie. El problema radica en que finas capas de óxidos u otros materiales que permanezcan en la superficie pueden ser eléctricamente activos, es decir, ligeramente dopados o químicamente activos, de forma que lentamente erosionan el dispositivo. Para estabilizar la superficie se deposita algún material inerte, para saturar los enlaces químicos libres y, al mismo tiempo, formar una cubierta resistiva. Los materiales más usados incluyen dióxidos de silicio y nitruros de silicio. Las resinas epóxicas proporcionan además una rigidez adecuada al dispositivo. Después de estabilizar la superficie, debemos protegerla del medio ambiente agresivo, las temperaturas extremas, o medio ambiente químicamente activo. La estabilización del dispositivo es esencial para su buen funcionamiento.

# Apéndice B

## Funciones propias del momento angular total

La ecuación de Schrödinger dada por la ecuación (2.12) que sólo depende de las variables angulares  $\phi_1$  y  $\phi_2$  está dada por

$$\hat{H}_r S = \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{L}_z^2}{I_{tot}} - \frac{\hbar^2}{I_\mu} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) S + V_{ef}(\phi) S = E_r S(\phi_1, \phi_2), \quad (\text{B.1})$$

Mostraremos primero que las funciones propias de esta ecuación se puede expresar como el producto  $S(\phi_1, \phi_2) = F_l(\phi_1, \phi_2) \Phi(\phi)$ , en donde  $F_l(\phi_1, \phi_2)$  es el vector propio de  $\hat{L}_z$  y  $\Phi(\phi)$  satisface la ecuación asociada a la coordenada relativa dada por la ecuación (2.44). Nótese que el operador  $\hat{L}_z = \hat{L}_{z1} + \hat{L}_{z2}$  conmuta con  $\hat{H}_r$  por lo que si  $l$  y  $E_r$  son los valores propios asociados a dichos operadores, éstos números cuánticos permiten caracterizar completamente al vector propio  $S = S(l, E_r)$ . Mas aún, el hecho de que  $\hat{L}_z$  y  $\hat{H}_r$  conmuten permite asegurar que  $S$  es simultaneamente vector propio de ambos operadores y se podrá construir con el producto de los eigenvectores  $F_l(\phi_1, \phi_2)$  y  $\Phi(\phi)$ .

Como segundo punto construiremos las funciones propias  $F_l(\phi_1, \phi_2)$  de  $\hat{L}_z$  definidas por

$$\hat{L}_z F_l(\phi_1, \phi_2) = l F_l(\phi_1, \phi_2), \quad (\text{B.2})$$

a partir de las funciones propias  $|m_1\rangle$  y  $|m_2\rangle$  de las partículas individuales cuyos operadores están dados por

$$\hat{L}_{zi} |m_i\rangle = m_i |m_i\rangle \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.3})$$

en donde  $m_i$  son los valores propios del momento angular de cada partícula restringidos a ser enteros y  $|m_i\rangle$  están dadas por

$$|m_i\rangle = \frac{e^{im_i\phi_i}}{2\pi} \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.4})$$

La teoría general para la adición de momentos angulares nos asegura que el vector propio del momento angular conjunto  $\hat{L}_z$  resulta del acoplamiento de los momentos individuales de las partículas  $\hat{L}_{zi}$  a través de la expresión [46]

$$|j_1 j_2 j l\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j l\rangle, \quad (\text{B.5})$$

en donde los coeficientes de acoplamiento de Clebsh-Gordan satisfacen

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j l\rangle = 0 \quad \text{a menos que } m_1 + m_2 = l. \quad (\text{B.6})$$

Para el sistema que aquí analizamos las únicas componentes no nulas del momento angular son  $\hat{L}_{zi}$  por lo que  $j_1 = m_1$ ,  $j_2 = m_2$  y  $l = j$ . De esta manera la notación en la ecuación (B.5) se puede simplificar y da lugar a la expresión

$$F_l(\phi_1, \phi_2) = \sum_{m_1+m_2=l} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2 | l\rangle, \quad (\text{B.7})$$

que, junto con la convención usual que restringe los coeficientes de Clebsh-Gordan a ser números reales, permite escribir al vector propio del momento angular como

$$F_l(\phi_1, \phi_2) = \frac{C_l}{(2\pi)^2} \sum_{m_1+m_2=l} e^{im_1\phi_1 + im_2\phi_2}, \quad (\text{B.8})$$

en donde  $C_l$  es una constante de normalización determinada por la condición

$$1 = \frac{C_l^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m_1=0}^l \sum_{m'_1=0}^l e^{i(m_1-m'_1)(\phi_1-\phi_2)} \Phi^2(\phi_1 - \phi_2) d\phi_1 d\phi_2. \quad (\text{B.9})$$

# Apéndice C

## Estados de energía negativa en sistemas periódicos

Estimaremos el número total,  $N$ , de estados ligados para nuestro sistema con parámetros arbitrarios, utilizando una extensión para potenciales periódicos de un resultado general [47], válido para potenciales de soporte acotado. Un potencial de soporte acotado es aquél cuya integral definida sobre todo el eje real existe. Este criterio establece que  $N$  se halla en el intervalo dado por

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{-V_{\min}}} \int_0^{2\pi} V(\phi)d\phi \leq N \leq \int_0^{2\pi} \phi V(\phi)d\phi, \quad (\text{C.1})$$

en donde  $V_{\min} < 0$  denota el mínimo de  $V(\phi)$ . La sustitución de el término dominante de la ecuación (2.43) en esta expresión conduce a la desigualdad

$$\frac{2\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2}}}{\pi(1-p)} K\left(-\frac{4p}{(1-p)^2}\right) \leq N \leq \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2}} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-p^2-2p\cos(2\pi x)}}, \quad (\text{C.2})$$

en donde  $K(x)$  es la integral elíptica completa de primera clase [31] y los parámetros  $\alpha$  y  $p$  están definidos en la sección 2.3. Nótese de esta expresión que  $N$  es proporcional a  $\sqrt{\alpha}$ , así que tomando valores grandes de  $\alpha$  el número de eigenestados aumenta.  $N$

también crece cuando  $p$  tiende a 1; esto es, cuando ambos anillos se acercan. Más aún, en el caso especial en que ambos portadores de carga se encuentran en el mismo anillo ( $p = 1$ ), ambas cotas dadas por la ecuación (C.2) divergen, y  $N$  también. Utilizando los parámetros materiales dados arriba para GaAs, obtenemos  $\alpha_{\text{GaAs}} = 3.5310$  y  $N = 8$ , mientras que para InSb, cuyos parámetros están dados por  $\epsilon = 17.88$ ,  $m_1 = 0.015m_e$  y  $m_2 = 0.021m_e$ , obtenemos  $\alpha_{\text{InSb}} = 0.544$  y  $N \simeq 3$ , lo que muestra que el estado base para InSb está menos ligado que en el GaAs. Debemos mencionar que la estimación así obtenida de  $N$  para GaAs coincide con el valor numérico obtenido en la Tabla I.

Probaremos aquí sólo la primera desigualdad de la ecuación (C.1), puesto que la otra se efectúa de forma similar [47]. Obsérvese primero que el número de estados de energía negativa o ligados de la ecuación de Schrödinger con potencial periódico  $V(x)$ , dada por

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = -p^2\psi, \quad -x_c < x < 1 - x_c, \quad (\text{C.3})$$

coincide con el número de ceros reales  $\zeta_j$  de la función definida por la ecuación

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = V(x)\varphi(x), \quad (\text{C.4})$$

con condición de frontera

$$\varphi(-x_c) = 1, \quad \frac{d\varphi(-x_c)}{dx} = 0, \quad (\text{C.5})$$

que están dados por

$$\varphi(\zeta_j) = 0, \quad \zeta_j > \zeta_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{C.6})$$

en donde  $x_c$  es el punto para el cual  $V$  es mínimo. Este resultado se puede inferir notando que la solución de la ecuación (C.4) tiene el mismo número de ceros que la eigenfunción de la ecuación (C.3) asociada al estado ligado con energía más alta, ya que su correspondiente eigenvalor es muy pequeño ( $-p_N^2 \approx 0$ ), y porque este estado tiene

exactamente  $N$  ceros.

Una vez teniendo este resultado, es útil construir una función para la fase  $\theta$  de la función  $\varphi(x)$ , definida por la expresión

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{y} \tan \theta, \quad (\text{C.7})$$

siendo  $y$  una constante positiva arbitraria. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (C.4) obtenemos

$$\frac{d\theta}{dx} = -yV(x) \cos^2 \theta + \frac{1}{y} \sin^2 \theta, \quad (\text{C.8})$$

en donde  $\theta$  satisface la condición de frontera

$$\theta(-x_c) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Es importante percatarse que, de las ecuaciones (C.6) y (C.7), es evidente que cada cero de  $\varphi(x)$  corresponde a un polo de  $\tan \theta$ , es decir

$$\theta(\zeta_i) = \left( j - \frac{1}{2} \right) \pi; \quad (\text{C.10})$$

asimismo, de la ecuación (C.8) obtenemos  $d\theta(\zeta_j)/dx = y^{-1} > 0$ . El hecho de que  $V(x)$  sea periódico implica que  $\varphi(-x_c) = \varphi(1 - x_c)$ . Por tanto, de esta expresión sustituida en la ecuación (C.7) se encuentra que  $\theta(1 - x_c)$  debe ser un múltiplo entero de  $\pi$ , el cual por la ecuación (C.10) debe de ser exactamente  $\theta(1 - x_c) = N\pi$ . Finalmente, podemos acotar el lado derecho de la ecuación (C.8) para obtener

$$\frac{d\theta}{dx} \geq \min[-yV(x), \frac{1}{y}], \quad (\text{C.11})$$

puesto que el mínimo valor de  $(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)$ , para toda  $\theta$ , es  $\min[a, b]$  que, junto con

la ecuación (C.9), permite escribir

$$\theta(1 - x_c) \geq \int_{-x_c}^{1-x_c} dx \min[-yV(x), \frac{1}{y}]. \quad (\text{C.12})$$

Esta expresión junto con  $\theta(1 - x_c) = N\pi$  se transforma en

$$N \geq -\frac{1}{\pi\sqrt{-V_{\min}}} \int_0^1 dx V(x), \quad (\text{C.13})$$

después de haber seleccionado el valor especial  $y^{-1} = \sqrt{-V_{\min}}$ .

# Bibliografía

- [1] R. S. Knox, *Theory of Excitons* (Academic Press, New York, 1963).
- [2] D. L. Dexter y R. S. Knox. *Excitons* (Wiley-Interscience, New York, 1965).
- [3] J. O. Dimmock, *Introduction to the theory of exciton states in Semiconductors and Semimetals* (P. K. Willardson and A. C. Beer, eds., Academic Press, New York, 1967), Vol 3, pag. 259.
- [4] W. Hansen, en *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, Vol. 254 of NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics, ed. B. Kramer (Plenum, New York, 1991), pag. 23.
- [5] G. H. Wannier, *Phys Rev.* **52**, 191 (1937).
- [6] Véase aproximación de masa efectiva en; G. Dresselhaus. *J. Phys. Chem. Solids* **1** 14 (1956).
- [7] Véase intensidad de absorción óptica por excitones en; R. J. Elliott, *Phys. Rev.* **108**, 1384 (1957).
- [8] Series de líneas excitónicas bien definidas fueron observadas en absorción óptica en: D. G. Thomas y J. J. Hopfield, *Phys. Rev.* **124**, 657 (1961)
- [9] Absorción óptica de AsGa observada en M. D. Sturge *Phys. Rev.* **127**, 768 (1962).

- [10] Teoría de absorción óptica por excitones en; Y. Toyozawa, M. Inoue, T. Inui, M. Okazaki y E. Hanamura, *J. Phys. Soc. Japan* **22**, 1337 (1967); J. Hermanson, *Phys. Rev.* **166**, 893 (1968).
- [11] D. Viri, *R. Del Sole. Sol. Sta. Commun.* **97**, 985 (1996).
- [12] A. Corella-Madueno, R. Rosas, J. L. Marin y R. Riera, *Phys. Low-dim Struct.* **5**, 75 (1999).
- [13] H. Hu , D. J. Li, J. L. Zhu, J. J. Xiong, *J. Phys. Condens. Matt.* **12**, 9145 (2000).
- [14] H. H. Cheng, R. J. Nicholas, M. J. Lawless, D. E. Ashenford, B. Lunn *Sol.-Sta. Electron.* **40**, 69 (1996).
- [15] G. Bastard, E. E. Mendez, L. L. Chang y L. Esaki, *Phys. Rev. B* **26**, 1974 (1982).
- [16] Y. E. Lozovik y V. N. Nishanov, *Fiz. Tverd Tela* (Leningrad) **18**, 3267 (1976) (*Sov. Phys. Solid State*, **18**, 1905 (1976)).
- [17] G. J. Vázquez, J. A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, M. A. Solís y R. A. Vázquez-Nava. *Rev. Mex. Fis.*, **46**, 253 (2000).
- [18] F. J. Becerra, J. A. Reyes and M. del Castillo-Mussot, *Physica E*, xxx (2001).
- [19] J. A. Reyes y M. del Castillo-Mussot, *Phys. Rev. B.* **57**, 1690 (1998).
- [20] J. A. Reyes, M. del Castillo-Mussot, M. A. Molero Milo y G. J. Vázquez, *Helv. Phys. Acta*, **72**, 180 (1999).
- [21] Z. S. Piao, M. Nakayama y H. Nishimura, *Phys. Rev. B* **53**, 1485 (1996).
- [22] G.H. Coccoletzi, S. E. Ulloa, *Phys. Rev. B* **61**, 13099 (2000).
- [23] M. Nakayama, M. Ando, Y. Kumamoto, H. Nishimura, N. Ohtani, N. Egami, K. Fujiwara, M. Hosoda, *Phys. Rev. B* **58**, 7216 (1998).

- [24] La teoría del líquido de Fermi donde se investiga a fondo el concepto de cuasipartícula se debe a Landau: L. Landau, "*Theory of a Fermi liquid*", Soviet Physics LETP **3**, 920 (1957) y también D. Pines y P. Nozieres, *Theory of Quantum Liquids*, Benjamin 1966, Vol 1.
- [25] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*, 5th edition. (John Wiley. New York 1976), Cap 18.
- [26] P. W. Baumeister Phys. Rev. **121**, 359 (1961).
- [27] *Physics of Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Ed. por P. Butcher. N. H. March y M. P. Tosi (Plenum Press, New York, 1993).
- [28] G. Bastard, J. A. Brum y R. Ferreira, en *Solid State Physics, Advances in Research and Applications*, Ed. por H. Ehrenreich and D. Turnbull (Academic Press, New York. 1991) Vol. **44**, 229.
- [29] R. Loudon, Am. J. Phys. **27**, 649 (1959).
- [30] H. Friedich, Phys. Rev. A **26** 1827 (1982).
- [31] *Handbook of Mathematical Functions*. edited by M. Abramowitz y I. Stegun, (Dover. New York, 1965), Secuación 15.3.
- [32] L. Banyai, I. Galbraith, C. Ell y H. Haug, Phys Rev. **B 36**, 6099 (1987).
- [33] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2a edición (Cambridge University Press. Cambridge, 1952).
- [34] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*. (John Wiley & Sons. 1977) Cap. 8.
- [35] P. M. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill. New York, 1953).
- [36] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, (Addison-Wesley. Reading MA, 1976). Secuación 12.1.

- [37] I.S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. (Academic Press, San Diego. 1980 )
- [38] J. E. Marsden y M. H. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, (W. H. Freeman, New York, 1987).
- [39] William H. Press, *Numerical Recipes in Fortran 90*. 2a edición (Cambridge University Press. Cambridge, 1996).
- [40] W. Magnus y S. Winkler, *Hill's Equation*, (Dover, New York 1999).
- [41] M. J. Kelly, *Low-Dimensional Semiconductors. Materials, Physics Technology, Devices* (Clarendon Press. Oxford Science Publications, 1995), 61-72.
- [42] E. G. Bithell, W. M. Phillips, C. C. Ecclestones, R. y R. G. William , J. Appl. Phys. **67**. 1279 (1990).
- [43] D. V. Morgan y F. H. Eisen , (1985) Ion-implantation and damage in GaAs. *In: Gallium arsenide: Materials, devices and circuits* (ed. M. J. Howes y D. V. Morgan), 161-94.
- [44] B. J. Sealy. Ion implantation of GaAs: overview. en *Properties of Gallium Arsenide* (2a. edición), p. 685-8, y referencias citadas en EMIS Datareviews Series 2. INSPEC, Institution of Electrical Engineers. London (1990).
- [45] J. Cibert, P. M. Petroff. G. J. Dolan, S. J. Pearton, A. C. Gossard, y J. H. English. Appl. Phys. Lett. **49**. 1275 (1986).
- [46] Vease Ref.[34] Sec. 16.6.
- [47] F. Calogero y A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons*. (North Holland. Amsterdam, 1982). Appendix A.1.