



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

“ESPACIOS DE CONFIGURACIONES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C A
P R E S E N T A:
MADININA MAUVOIS ROMERO

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Javier Bracho Carpizo



2001

297353





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

“Espacios de Configuraciones”

realizado por **Madinina Mauvois Romero**
con número de cuenta **9450341-0**, pasante de la carrera de **Matemáticas**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert

Propietario

Dr. Víctor Neumann-Lara

Suplente

Dr. Javier Paez Cardenas

Suplente

Mat. Ricardo Strausz Santiago

Consejo Departamental de  Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dedico este trabajo muy especialmente
a mi mamá,
a mi papá,
a mis hermanos André, Martín y Roger,
a mis abuelas Yveth y Esperanza
y a mi abuelo George.
Con todo mi amor.

Agradezco muy sinceramente al Roli no solo por haber guiado este trabajo,
sino por su enorme paciencia, comprensión y amistad.

También un enorme agradecimiento a Páez que sin él esto no hubiera sido
realidad.

A mi mamá.

Y a todos mis amigos-hermanos por poder tener el gusto de compartir.

Muchas gracias.

Índice General

1	Introducción.	2
2	Geometría Afín.	4
2.1	Subespacios Afines.	4
2.2	El Generado Afín.	9
2.3	Dependencia e Independencia Afín.	11
2.4	El Espacio Afín.	14
2.5	Transformaciones Afines.	16
3	Conjuntos Convexos.	18
3.1	Separoides.	19
3.2	Puntos Ordenados.	21
3.3	Separoides de Puntos.	22
3.4	Teorema de Radon.	24
4	Espacios de Configuraciones	29
4.1	$C(d+2, d)$	31
4.1.1	$C(3, 1)$	31
4.1.2	$C(4, 2)$	32
4.1.3	El caso general: $C(d+2, d)$	35
4.2	$C(4, 1)$	35
5	Grassmannianas.	38
5.1	$C(n+1, d) \approx G(n-d, n)$	38

Capítulo 1

Introducción.

Éste es el texto de mi tesis de licenciatura. Éste, está enfocado al estudio y, ejemplificación de una manera constructiva, de los **Espacios de Configuraciones**. Básicamente esto nos lleva al estudio de **conjuntos finitos ordenados** (o coloreados) en \mathbb{R}^d , donde la idea principal para esta coloración es que cada punto se distingue de los otros.

Partimos del ya conocido \mathbb{R}^d y sus d-adas de número reales $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Suponemos familiaridad con la geometría vectorial o lineal que surge en este espacio al establecer un origen y una métrica; familiaridad con conceptos como subespacios lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, funciones lineales, etc...: familiaridad también en el manejo de la topología usual de este espacio.

Las ideas de este texto saltan de conceptos lineales a conceptos afines, por ello de una manera introductoria en el primer capítulo dotaremos a \mathbb{R}^d de una estructura afín para poder desarrollar algunas de las nociones básicas de la **geometría afín** de este espacio. También definiremos a grandes rasgos el espacio afín \mathbb{A}^k , este es isomorfo a \mathbb{R}^k , pero en él se ha perdido la noción del origen. Para hacer distinción en algunas ocasiones utilizamos la palabra vector para las ideas lineales y la palabra punto para las ideas afines.

Una vez construido el país edificaremos las ciudades: para ello desarrollaremos algunos conceptos y resultados de la teoría de los conjuntos convexos relacionados con los conjuntos finitos de puntos ordenados. Dos son los pilares principales de esta construcción: el primero es una estructura combinatoria

llamada los **Separoides**; el segundo es el **Teorema de Radon** y una versión que llamamos **Radon Fuerte**. Estos están íntimamente relacionados y nos proporcionan herramientas combinatorias muy fuertes para estudiar la geometría de los conjuntos finitos de puntos ordenados.

Finalmente en el tercer capítulo, que es el central de este trabajo, describimos a los personajes: los **Espacios de Configuraciones**. Estudiaremos principalmente a una familia, la correspondiente a las configuraciones de $d + 2$ puntos en \mathbb{R}^d . Se demostrará un importante teorema que establece el homeomorfismo existente entre las **Variedades de Grassmann** y los **Espacios de Configuraciones**.

Capítulo 2

Geometría Afín.

En un espacio vectorial (o lineal) hay un punto distinguido llamado origen o cero; de tal manera que todos los demás puntos se pueden pensar como vectores (o segmentos dirigidos) anclados a este origen. Un espacio afín es como un espacio vectorial en el cual se ha perdido la noción de este origen.

Las ideas de este texto saltan de conceptos lineales a conceptos afines, por ello, en este primer capítulo dotaremos a \mathbb{R}^d de una estructura afín, para así desarrollar algunas de las nociones básicas de la geometría afín de este espacio.

2.1 Subespacios Afines.

Un subespacio afín, de un espacio vectorial, es la traslación de un subespacio lineal, es decir, y abusando un poco del termino, es un “subespacio lineal” que no pasa necesariamente por el origen.

Dado cualquier subconjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ y un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, denotamos por $C + \mathbf{a}$ al conjunto C trasladado por \mathbf{a} . es decir

$$C + \mathbf{a} = \{\mathbf{x} + \mathbf{a} ; \mathbf{x} \in C\}$$

De esta manera, un **subespacio afín** es un subconjunto A de \mathbb{R}^d que se puede ver de la forma $A = V + \mathbf{a}$. donde \mathbf{a} es un vector de \mathbb{R}^d y V es un subespacio vectorial.

Una **combinación afín** de un número finito de puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ de \mathbb{R}^d ,

es una expresión de la forma

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \quad \text{con} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Es importante observar que una combinación afín es una combinación lineal donde los coeficientes cumplen la propiedad específica de que su suma da uno.

Proposición 1 *Todo conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ que sea cerrado bajo combinaciones afines de dos elementos es cerrado bajo combinaciones afines finitas arbitrarias.*

Demostración. Esta demostración la haremos por inducción:

Tomemos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ tres puntos de C y sea

$$\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{con} \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

una combinación afín de ellos. Para no caer en un caso trivial, supongamos que $\lambda_i \neq 0$ para toda i ; y como alguna λ_i debe ser distinta de uno, suponemos sin pérdida de generalidad que $1 - \lambda_0 \neq 0$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \\ &= \lambda_0 \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_2 \right) \end{aligned}$$

de hecho

$$\mathbf{y} := \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_2$$

es una combinación afín de dos elementos de C . ya que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_0$, entonces $\mathbf{y} \in C$, esto nos da entonces que $\mathbf{x} \in C$.

Supongamos ahora que toda combinación afín arbitraria de k elementos está en C . Tomemos entonces una combinación afín arbitraria de $k + 1$ elementos de C .

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Podemos suponer que $\lambda_i \neq 0$ para toda i , y también que alguna $\lambda_i \neq 1$, y que sin pérdida de generalidad $1 - \lambda_0 \neq 0$. Entonces como $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, se tiene que

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_0} = 1$$

de modo que

$$\mathbf{y} := \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_i,$$

por hipótesis de inducción, esta en C . Ahora, como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} \mathbf{x}_i = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda_0) \mathbf{y},$$

es decir, \mathbf{x} es una combinación afín de dos elementos de C , por lo que $\mathbf{x} \in C$.

Proposición 2 Sea $A \subset \mathbb{R}^d$, $A \neq \emptyset$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) A es subespacio afín.
- b) A es cerrado bajo combinaciones afines.

Demostración. (a \Rightarrow b) Si A es un subespacio afín, existe $V \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio lineal y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ tales que $A = V + \mathbf{a}$

Tomamos $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k$ puntos de A , y sea

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{y}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

una combinación afín de ellos. Por definición para cada \mathbf{y}_i , existe \mathbf{x}_i un vector de V tal que $\mathbf{y}_i = (\mathbf{x}_i + \mathbf{a})$, entonces

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{y}_i = \sum_{i=0}^k \lambda_i (\mathbf{x}_i + \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + \mathbf{a}.$$

pues la suma de las λ_i 's es uno.

Como V es un subespacio vectorial, es cerrado bajo combinaciones lineales, así que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \in V.$$

por lo tanto $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a} \in A$. Lo que demuestra que A es cerrado bajo combinaciones afines.

($\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}$) Como $A \neq \emptyset$, tomemos $\mathbf{a} \in A$ y sea $V = A - \mathbf{a} = A + (-\mathbf{a})$. Lo que tenemos que demostrar es que V es un subespacio vectorial. Lo haremos demostrando que es cerrado bajo combinaciones lineales.

Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ vectores de V . y sea

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$$

una combinación lineal de ellos. Sabemos que $\mathbf{x}_i = (\mathbf{y}_i - \mathbf{a})$ para algún punto $\mathbf{y}_i \in A$, así tenemos que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}.$$

Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a} \right) + \mathbf{a} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{y}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \mathbf{a}$$

si hacemos $\mathbf{y}_0 = \mathbf{a}$ y $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$ sucede que

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{y}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

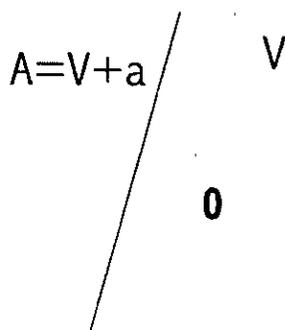
Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ es una combinación afín de elementos de A , y por hipótesis $\mathbf{x} + \mathbf{a} \in A$, que es cerrado bajo combinaciones afines. Esto implica que $\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{a} \in V$, esto demuestra que V es un espacio vectorial, ya que es cerrado bajo combinaciones lineales. ■

El subespacio lineal que le corresponde a cada subespacio afín es único:

Proposición 3 Sea A un subespacio afín, entonces para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ se tiene que $V = A - \mathbf{a} = A - \mathbf{b}$.

Demostración. Por la segunda parte de la demostración anterior [Proposición 2] $V = A - \mathbf{a}$ es un subespacio vectorial, y además $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in V$. Así que $V = V - (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (V + \mathbf{a}) - \mathbf{b} = A - \mathbf{b}$. ■

Se dice que dos subespacios afines son **paralelos** si les corresponde el mismo subespacio lineal. La **dimensión** de todo subespacio afín, es la misma que la de su subespacio vectorial correspondiente. Un **hiperplano** en \mathbb{R}^d es un subespacio afín de \mathbb{R}^d que tiene dimensión $d-1$.



Dibujo 1.

Proposición 4 La intersección no vacía de subespacios afines es un subespacio afín.

Demostración. Veamos que la intersección $\cap A_\alpha$, donde cada A_α es un subespacio afín, y α corre sobre un conjunto arbitrario, es un subespacio afín.

Ya que los A_α son subespacios afines se pueden ver de la siguiente forma $A_\alpha = L_\alpha + \mathbf{c}$, notando que L_α es un subespacio lineal y por la Proposición 3, se puede tomar la misma C .

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\cap A_\alpha = \cap (L_\alpha + \mathbf{c}) = \cap L_\alpha + \mathbf{c} = L + \mathbf{c}.$$

Como la intersección arbitraria y no vacía de subespacios lineales es un subespacio lineal, L es un subespacio lineal y esto muestra que $\cap A_\alpha$ es un subespacio afín. ■

2.2 El Generado Afín.

Hemos definido los subespacios afines de manera global, ahora veremos como se generan.

Llamamos el **generado afín** de un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^d$, $C \neq \emptyset$, al conjunto de todas sus combinaciones afines: es decir,

$$\langle C \rangle := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; \mathbf{x} \text{ es una combinación afín de elementos de } C \}$$

Proposición 5 *El generado afín es un subespacio afín.*

Demostración. Tomemos una combinación afín de dos elementos \mathbf{x} y \mathbf{y} en $\langle C \rangle$, $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$ donde $\lambda + \mu = 1$.

Por ser elementos de $\langle C \rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \quad \text{para } \mathbf{x}_i \in C, \mathbf{y} \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=0}^l \mu_i \mathbf{y}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^l \mu_i = 1 \quad \text{para } \mathbf{y}_i \in C. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = \lambda \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \right) + \mu \left(\sum_{i=0}^l \mu_i \mathbf{y}_i \right) = \sum_{i=0}^k \lambda \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=0}^l \mu \mu_i \mathbf{y}_i$$

donde los coeficientes cumplen lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^k \lambda \lambda_i + \sum_{i=0}^l \mu \mu_i = \lambda \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \right) + \mu \left(\sum_{i=0}^l \mu_i \right) = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 = 1$$

de modo que \mathbf{z} es una combinación afín de elementos de C , es decir $\mathbf{z} \in \langle C \rangle$.

Esto demuestra que $\langle C \rangle$ es cerrado bajo combinaciones afines de dos elementos, y por las Proposiciones 1 y 2 es un subespacio afín que contiene a C . ■

Ejemplo 6 *Dos puntos distintos generan afínmente a la recta que los contiene.*

Sean \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 dos puntos distintos de \mathbb{R}^d , su generado afín es:

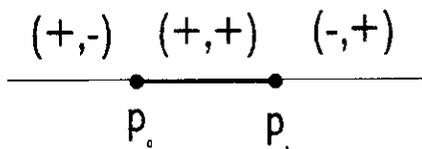
$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle = \{ \lambda_0 \mathbf{p}_0 + \lambda_1 \mathbf{p}_1 ; \lambda_0 + \lambda_1 = 1 \} \quad (1)$$

$$= \{ (1 - \lambda) \mathbf{p}_0 + \lambda \mathbf{p}_1 \} \\ = \{ \mathbf{p}_0 + \lambda (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) ; \lambda \in \mathbb{R} \} \quad (2)$$

La ecuación (2) es la ecuación paramétrica de la recta, en la cual por medio de un parámetro ($\lambda \in \mathbb{R}$), se puede identificar cualquier punto \mathbf{x} que se encuentre en la recta generada por estos dos puntos. Observemos que cuando $\lambda = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0$, y que cuando $\lambda = 1$, $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$; además, si $\lambda \in (0, 1)$, \mathbf{x} se encuentra en el interior del segmento comprendido entre los dos puntos.

Notemos aquí que este interior no siempre coincide con el interior topológico usual, ya que el interior usual (por ejemplo de un segmento en \mathbb{R}^n) algunas veces es vacío; aquí nos referimos al **interior relativo** al generado afín de estos dos puntos.

La ecuación (1) es la de las combinaciones afines, para identificar a cualquier punto de la recta juegan dos parámetros $\mathbf{x} \mapsto (\lambda_0, \lambda_1)$. En este caso podemos observar, que cuando $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0$, y cuando $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$. También cuando $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ el punto se encuentra en el interior del segmento comprendido entre \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 . Esto, como se vera más adelante, nos da un sistema baricéntrico de coordenadas cuya base son los dos puntos [Sección 2.4], en donde se determina cualquier punto sobre la recta de manera única. En el Dibujo 2. se muestra la posición del punto determinada por los signos de los parámetros $\{+, -, 0\}$.



Dibujo 2.

Veremos que el generado afín de un conjunto C es el subespacio afín “mas pequeño” que contiene a C .

Proposición 7 *El generado afín de un conjunto C es la intersección de todos los subespacios afines que contienen a C .*

Demostración. Queremos demostrar que $\langle C \rangle = \bigcap A_\alpha$ donde A_α corre sobre todos los subespacios afines que contienen a C .

Como $\langle C \rangle$ es un subespacio afín que contiene a C [Proposición 5], $C = A_j$ para alguna j . Por tanto $\bigcap A_\alpha \subset A_j = C$.

Ahora sea $\mathbf{x} \in \langle C \rangle$, entonces \mathbf{x} es una combinación afín de elementos de C , y como $\bigcap A_\alpha$ es un subespacio afín [Proposición 4] que contiene a C es un subespacio cerrado bajo combinaciones afines por tanto $\mathbf{x} \in \bigcap A_\alpha$.

Así queda demostrado que los dos subespacios son iguales. ■

2.3 Dependencia e Independencia Afín.

Llamamos una **combinación homogénea** de vectores $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ a una expresión de la forma

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$$

Proposición 8 Dado un subconjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}^d$, sea V el conjunto de combinaciones homogéneas de elementos de C . Entonces V es el espacio vectorial (o lineal) paralelo al generado afín $\langle C \rangle$.

Demostración. Queremos ver que $V = \langle C \rangle - \mathbf{c}$ para alguna $\mathbf{c} \in \langle C \rangle$.

Sea $\mathbf{x} \in V$ entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i \in C$$

y tomemos $\mathbf{c} \in \langle C \rangle$, que por estar en el generado afín lo podemos ver como

$$\mathbf{c} = \sum_{i=0}^r \mu_i \mathbf{y}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^r \mu_i = 1$$

para $\mathbf{y}_i \in C$, y escalares μ_i .

Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{c} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=0}^r \mu_i \mathbf{y}_i$$

donde los coeficientes cumplen que

$$\sum_{i=0}^r \mu_i + \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

es decir, $\mathbf{x} + \mathbf{c}$ es una combinación afín de elementos de C , y por tanto $\mathbf{x} + \mathbf{c} \in \langle C \rangle$, $\mathbf{x} \in \langle C \rangle - \mathbf{c}$.

El regreso es análogo.

Ver dibujo1. ■

Al igual que en la geometría lineal, los conceptos de dependencia e independencia afín nos permiten saber que relación existe entre los puntos y la dimensión de sus subespacios generados afínmente.

Se dice que los puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \subset \mathbb{R}^d$ son **afínmente dependientes** si existe una combinación homogénea de ellos igual a cero, donde no todas las λ_i sean nulas. Son **afínmente independientes** si no son afínmente dependientes, i.e., si la única combinación homogénea de ellos que da cero es cuando todas las λ_i 's son nulas.

Lema 9 *Los puntos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \subset \mathbb{R}^d$ son afínmente independientes si y solo si los vectores $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes.*

Demostración. (\Rightarrow) Demostremos primero que los vectores

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)$$

son linealmente independientes.

Sea

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

una combinación lineal de ellos que da cero. Lo que tenemos que ver es que todos las λ_i 's son nulas.

Sucede que

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_0$$

si hacemos

$$\lambda_0 = - \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau.$$

en la ecuación anterior, tenemos que

$$\sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau \mathbf{x}_\tau = \mathbf{0}.$$

y además

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i = \lambda_0 + \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau = - \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau + \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau = 0.$$

Entonces obtuvimos una combinación homogénea de los \mathbf{x}_i 's que por hipótesis eran afinmente independientes entonces las $\lambda_i = 0$ para toda i , y esto demuestra que $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)$ son puntos linealmente independientes.

(\Leftarrow) Ahora el regreso.

Tomemos una combinación homogénea que de cero

$$\sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau \mathbf{x}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{talque} \quad \sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau = 0$$

entonces tenemos que

$$\mathbf{0} = \sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau \mathbf{x}_\tau - 0\mathbf{x}_0 = \sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau \mathbf{x}_\tau - \sum_{\tau=0}^k \lambda_\tau \mathbf{x}_0 = \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau (\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_0)$$

como $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes, entonces las $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$, y como $\lambda_0 = - \sum_{\tau=1}^k \lambda_\tau$ también $\lambda_0 = 0$, lo que demuestra que $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ son puntos afinmente independientes. ■

De lo anterior se sigue que, en \mathbb{R}^d , el número máximo de puntos afinmente independientes es $d+1$;

Teorema 10 *Cualesquiera $d+2$ puntos en \mathbb{R}^d son afinmente dependientes.*

Demostración. Supóngase lo contrario tomemos $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$ puntos afinmente independientes entonces, por el lema anterior [Lema 9].

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \dots, (\mathbf{x}_{d+1} - \mathbf{x}_0)$$

son linealmente independientes. Esto nos lleva a una contradicción, porque $d+1$ vectores en \mathbb{R}^d siempre son linealmente dependientes. ■

2.4 El Espacio Afín.

Cuando nos referimos a un **espacio afín** \mathbb{A}^r , estamos pensando en un subespacio afín de dimensión r de \mathbb{R}^d .

Llamamos una **base afín** de un espacio afín \mathbb{A}^r a una familia de puntos $\beta = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$ afinmente independientes tales que $\langle \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \mathbb{A}^r$, (se debe tener que $k = r$).

A partir de una base afín $\beta = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r\}$ todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^r$ lo podemos escribir de la forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1.$$

Si se hace una asociación $\mathbf{x} \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ se obtienen unas coordenadas que nos determinan un sistema de referencia de \mathbb{A}^r , este se llama **sistema de coordenadas baricéntricas** donde β es la **base de referencia**.

Proposición 11 (Unicidad) *Las coordenadas baricéntricas asociadas a $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^r$ a partir de una base β de \mathbb{A}^r , son únicas.*

Demostración. Sea $\beta = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r\}$ una base afín para \mathbb{A}^r . Supongamos que $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^r$ tiene dos expresiones afines con la misma base afín, es decir, que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^r \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=0}^r \mu_i \mathbf{x}_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = \sum_{i=0}^r \mu_i = 1.$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=0}^r \mu_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=0}^r (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{x}_i = 0.$$

$$y \sum_{i=0}^r (\lambda_i - \mu_i) = \sum_{i=0}^r \lambda_i - \sum_{i=0}^r \mu_i = 0$$

Es decir tengo una combinación homogénea de puntos afinmente independientes entonces $\lambda_i - \mu_i = 0$ para toda i , por tanto $\lambda_i = \mu_i$. ■

2.5 Transformaciones Afines.

En el terreno de las funciones nos interesan aquellas que conservan esta estructura afín que hemos venido desarrollando.

Una función $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ es una **función afín** si conserva combinaciones afines. Es decir, si tomamos una combinación afín,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i, \text{ con } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

de puntos $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, entonces T es una función afín si:

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i T(\mathbf{x}_i).$$

Otra manera común de verlas es la siguiente:

Proposición 13 *A toda función afín $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ se le asocia de manera única una matriz $B \in M_{l \times d}(\mathbb{R})$ y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ tal que $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{b}$*

Demostración. Sea $\mathbf{b} := T(\mathbf{0})$ y $T_o(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$.

Como T es función \mathbf{b} es único.

Demostraremos ahora que T_o es una función lineal. Sean λ y μ escalares, y \mathbf{x} , \mathbf{y} dos vectores de \mathbb{R}^d , entonces tenemos que

$$T_o(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) - T(\mathbf{0})$$

Tomemos la siguiente combinación afín de \mathbf{x} , \mathbf{y} y $\mathbf{0}$.

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + (1 - \lambda - \mu)\mathbf{0}.$$

entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} & T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + (1 - \lambda - \mu)\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) \\ &= \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y}) + (1 - \lambda - \mu)T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) \\ &= \lambda(T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0})) + \mu(T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{0})) \\ &= \lambda T_o(\mathbf{x}) + \mu T_o(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Esto demuestra que T_o es una función lineal y por tanto se le asocia una matriz $B \in M_{l \times d}(\mathbb{R})$ tal que $T_o(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, así $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{b}$. ■

A \mathbf{b} se le llama la traslación de T , y a B la parte lineal.

Proposición 14 Si $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín suprayectiva, entonces $h^{-1}(0)$ es un hiperplano de \mathbb{R}^d . E inversamente, para todo hiperplano H existe una función afín $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h^{-1}(0) = H$.

Demostración. Veamos lo primero. Sea $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función afín suprayectiva, por la proposición anterior [Proposición 13], se le asocian h_0 una función lineal y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, tales que $h = h_0 + \mathbf{b}$.

Tomemos $\mathbf{y} \in h^{-1}(0)$, entonces $0 = h(\mathbf{y}) = h_0(\mathbf{y}) + \mathbf{b}$, es decir $h_0(\mathbf{y}) = -\mathbf{b}$, esto es que $\mathbf{y} \in h_0^{-1}(-\mathbf{b})$, sucede entonces que $h^{-1}(0) \subset h_0^{-1}(-\mathbf{b})$. La contención inversa se ve de manera análoga lo que demuestra que $h^{-1}(0) = h_0^{-1}(-\mathbf{b})$.

Como h_0 es una función lineal sucede que $h_0^{-1}(-\mathbf{b}) = h_0^{-1}(0) + \mathbf{c}$ donde $h_0(\mathbf{c}) = -\mathbf{b}$, y como $h^{-1}(0) = h_0^{-1}(-\mathbf{b}) = h_0^{-1}(0) + \mathbf{c}$ queda demostrado que $h^{-1}(0)$ es la traslación de un subespacio lineal de dimensión $d - 1$.

E inversamente: Sea H un hiperplano de \mathbb{R}^d , entonces $H = V + \mathbf{a}$ donde V es un subespacio lineal de dimensión $d - 1$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$.

Sea $l : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre V^\perp , l es una función lineal tal que $l^{-1}(0) = V$. Definimos $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, de la siguiente manera: $h := l - \mathbf{c}$ donde $\mathbf{c} = l^{-1}(\mathbf{a})$, entonces $H = V + \mathbf{a} = l^{-1}(0) + \mathbf{a} = l^{-1}(\mathbf{c}) = h^{-1}(0)$. ■

Si $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función afín biyectiva hablamos de una **transformación afín**, en cuyo caso B sera una matriz invertible de $d \times d$.

Toda transformación afín queda completamente determinada por sus valores sobre una base afín, esto gracias al resultado sobre la unicidad de las coordenadas baricéntricas. En particular, si tenemos dos bases afines distintas de \mathbb{R}^d , $P = \{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_d\}$ y $Q = \{\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_d\}$, existe una única transformación, $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, que manda una en la otra: definida como $T(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ para toda $i = 0, \dots, d$ (e inversamente).

Capítulo 3

Conjuntos Convexos.

Decimos que un conjunto es convexo cuando contiene a todo segmento comprendido entre cualesquiera dos de sus puntos.

Mucho se ha desarrollado en lo que a teoría de conjuntos convexos se refiere, aquí nos restringiremos a algunos resultados, clásicos y no tan clásicos, relacionados con conjuntos finitos ordenados, relevantes para este trabajo.

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ es un **conjunto convexo** si para cualesquiera \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 puntos de C , el segmento

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

esta completamente contenido en C .

Una **combinación convexa**, de un conjunto finito de puntos, $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$, es una expresión de la forma

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0.$$

Es decir, una combinación convexa es una combinación afín cuyos coeficientes son positivos [Ejemplos 6 y 12].

Proposición 15 *Todo conjunto convexo C es cerrado bajo combinaciones convexas arbitrarias.*

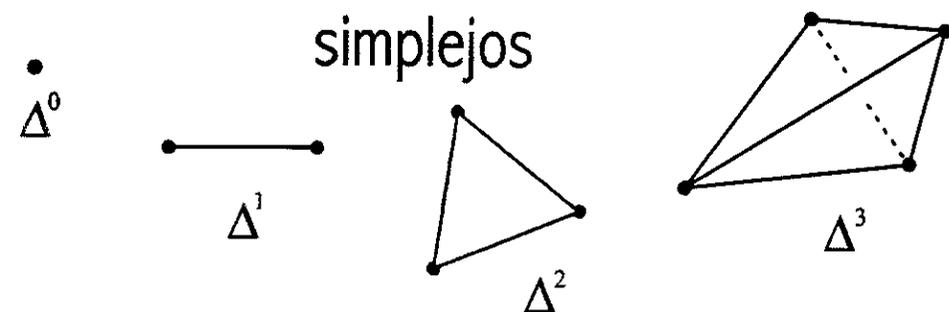
Demostración. Esta demostración se sigue igual que para el caso afín [Proposición 1]. Solo que aquí \mathbf{y} y \mathbf{x} resultan ser combinaciones convexas, ya que los coeficientes son estrictamente positivos. ■

Llamamos el **casco convexo** de un conjunto C , al conjunto de todas las combinaciones convexas de sus elementos, es decir

$$[C] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i, \text{ con } \mathbf{x}_i \in C, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

El casco convexo de un conjunto C es, como su nombre lo indica, un conjunto convexo; es más resulta ser la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a C , por ello se dice que es el conjunto convexo “más pequeño” que contiene a C . La demostración de estos hechos es análoga a los resultados dados para el generado afín [Proposiciones 4, 5 y 7]

Quando se trata del casco convexo de un conjunto finito nos referiremos a él como **politopo**. Si además el conjunto finito es afinmente independiente lo llamaremos **simplejo**; para denotarlo utilizaremos la notación Δ^k si el subespacio que genera afinmente es de dimensión k , los puntos son una base baricéntrica del subespacio afín que generan. El interior de un simplejo serán aquellos puntos cuyas coordenadas béricentricas son estrictamente positivas [Ejemplos 6 y 12]. Anteriormente ya habíamos notado que el interior de un simplejo no es necesariamente su interior topológico en el sentido usual [Ejemplo 6], sino que es el interior relativo al generado afín de los vertices del politopo. Todo politopo tiene interior relativo no vacío. En el caso de un punto (Δ^0) tenemos que el casco convexo y su interior son el punto mismo.



Dibujo 4.

3.1 Separoides.

Un problema clásico de la teoría de conjuntos convexos es pensar en cuando los conjuntos se pueden separar por un hiperplano. Se dice que un hiperplano

H separa a dos conjuntos C_1 y C_2 , si estos quedan en los dos diferentes semiespacios que define H , que denotamos por H^+ y H^- ; es decir, como H está definido como $h^{-1}(0)$ para alguna función afín $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ [Proposición 14], entonces H separa a C_1 y C_2 si $h(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in C_1$ y $h(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in C_2$, o viceversa.

Un teorema fundamental sobre este tema es el siguiente, que aquí solo enunciaremos y discutiremos brevemente [cf. [5] o [6]].

Teorema 16 *Dos conjuntos C_1 y C_2 se separan por un hiperplano si y sólo si sus cascos convexos no se intersectan.*

Demostración. Supongamos que $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín que cumple $h(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in C_1$ y $h(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in C_2$. Puesto que el casco convexo está formado por combinaciones convexas y una función afín las preserva, entonces $h(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in [C_1]$ y $h(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in [C_2]$. Lo cual implica que $[C_1] \cap [C_2] = \emptyset$.

El recíproco es más difícil y sólo indicaremos como demostrarlo en un caso sencillo que es cuando $[C_1]$ y $[C_2]$ son compactos pues es el que nos interesará más adelante. En este caso se puede tomar el segmento más corto entre $[C_1]$ y $[C_2]$ (que existe por la compacidad). Y entonces el hiperplano perpendicular a este segmento en su punto medio es uno que separa a los dos conjuntos. ■

Al generalizar la idea de “separar” de una familia de dos conjuntos (C_1 y C_2 arriba) a familias con más de dos conjuntos surge un concepto más abstracto y combinatorio que llamamos los separoides.

Un **separoide** es una relación, denotada por $|$, que se da entre los subconjuntos de un conjunto X ; cuando A y B están relacionados, se escribe $A | B$ y decimos A se separa de B . Esta relación debe cumplir las siguientes propiedades:

Sean $A, B \subset X$.

1. $A | B \implies B | A$
2. $A | B \implies A \cap B = \emptyset$
3. $A | B$ y $A' \subset A \implies A' | B$

Nos referimos a las parejas $(A, B) \subset 2^X \times 2^X$ con $A | B$ como las **separaciones**, y a A y B como las **componentes** de la separación. Definimos el **orden** de un separoide como la cardinalidad del conjunto X ; del mismo modo nos referimos al orden de las componentes.

El complemento de las separaciones son las **no-separaciones**, que se describen $A \nmid B$ y se lee A no se separa de B . Es claro que cualquiera de las dos, separaciones o no separaciones, determina el separoide.

3.2 Puntos Ordenados.

Antes de desarrollar los ejemplos de separoides que aquí nos son de interés, estudiaremos los conjuntos sobre los que estos serán definidos.

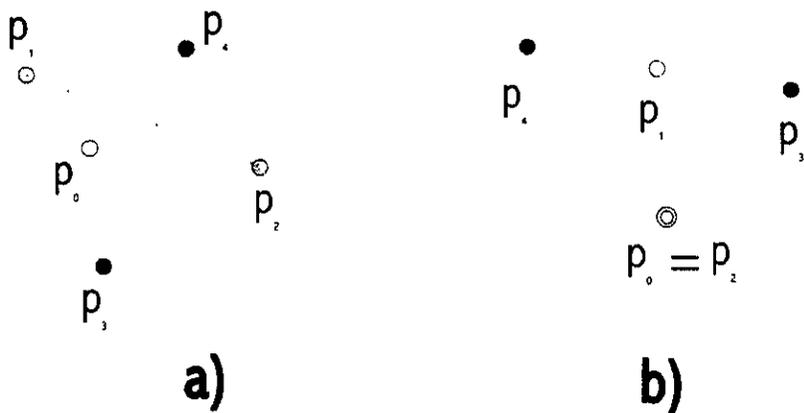
Pensemos en un **conjunto finito de puntos ordenados**, dándole la siguiente notación, $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) \subset \mathbb{R}^d$. Es importante destacar el uso de esta notación, ya que con ella nos referimos a un conjunto, pero en el cual la idea de orden es muy importante. no por que uno esté adelante de otro, sino porque cada punto se distingue de entre los otros, cada punto “tiene un color distinto”; de tal manera, la idea de que dos puntos ocupen el mismo lugar no cabe en la definición. Se puede pensar a P como una función $P : I_n \rightarrow \mathbb{R}^d$, donde $I_n = \{0, \dots, n\}$ es el conjunto de índices y $P(i) = \mathbf{p}_i$. Una idea de esta coloración, es pensar en I_n como una paleta de colores.

Se dice que P está en **posición general** si todo subconjunto ordenado de $d + 1$ puntos (o menos), $A = (\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_d})$, es afinmente independiente. Por otro lado, cuando un subconjunto de $r + 1$ puntos, $A = (\mathbf{p}_{i_0}, \dots, \mathbf{p}_{i_r})$ con $r \geq k$ genera un subespacio afín de dimensión k , hablamos de que P contiene una **k -aglomeración de $r + 1$ puntos**; a estos casos los llamamos también **degeneraciones**.

El **soporte** de $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ es el conjunto $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\}$, es decir, los puntos que se “ven”.

Ejemplo 17 *Dos diferentes maneras de “ver” 5 puntos ordenados en \mathbb{R}^2 .*

Sea $P = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \subset \mathbb{R}^2$, un conjunto de puntos ordenados; pensemos en las dos siguientes acomodaciones de ellos:



Dibujo 5.

a) En el primer caso los puntos están en posición general, ya que si vemos todas las diferentes posibilidades de tomar subconjuntos de 3 puntos de P , estas forman subconjuntos afínmente independientes.

b) Aquí solo “vemos” 4 puntos. el cardinal del soporte es menor al cardinal del conjunto, esto nos dice que existe una 0-aglomeración, que en este caso es de 2 puntos correspondiente a $A = (p_0, p_2)$. También P contiene varias 1-aglomeraciones de 3 puntos, por ejemplo: $B = (p_0, p_2, p_3)$ y $C = (p_1, p_3, p_4)$.

3.3 Separoides de Puntos.

Los dos ejemplos de estructuras de separación que daremos a continuación se asocian a esta clase de conjuntos y los llamamos **Separoides de puntos** (P) .

1) Sea $P = (p_0, \dots, p_n)$ un conjunto ordenado de puntos en \mathbb{R}^d . Dados los subconjuntos ordenados $A, B \subset P$ definimos que A se separa de B , y escribimos $A \mid B$, si existe un hiperplano H , tal que $A \subset H^+$ y $B \subset H^-$.

2) Dado $P = (p_0, \dots, p_n)$ como arriba, sea $I_n = \{0, \dots, n\}$ el conjunto de índices. Definimos un separoide en I_n declarando que A se separa de B , $A \mid B$, para $A, B \subset I_n$, si

$$[p_i; i \in A] \cap [p_i; i \in B] = \emptyset.$$

Los dos ejemplos anteriores satisfacen las propiedades de un Separoide, por el Teorema de Separación [Teorema 16] son equivalentes; así, se puede

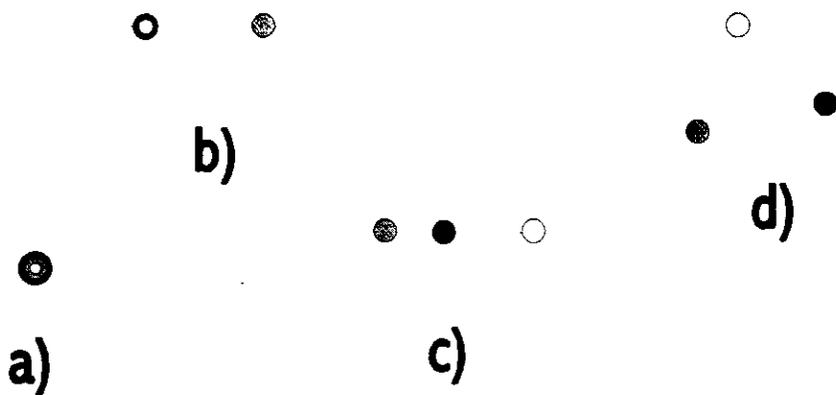
pensar que la estructura de separación está en los índices o en los puntos mismos (nosotros lo utilizaremos indistintamente).

Geoméricamente dos conjuntos **no se separan**. $A \nmid B$, si sus cascos convexos se intersectan. Diremos que una no-separación es **minimal** si cualquier subconjunto propio de A se separa de B . y cualquier subconjunto propio de B se separa de A .

Nota: Estas estructuras se puede generalizar fácilmente al caso cuando cambiamos los puntos por conjuntos convexos.

Ejemplo 18 ¿De cuántas maneras, en terminos de su separación, podemos encontrar acomodados 3 puntos coloreados en \mathbb{R}^2 ?

Éstas son las cuatro maneras básicas:



Dibujo 6.

- a) Nadie se separa de nadie. hay una 0-aglomeración de 3 puntos.
 - b) Hay una 0-aglomeración de 2 puntos.
 - c) Hay una 1-aglomeración de 3 puntos.
 - d) Todos se separan de todos. los puntos están en posición general.
- Sin perder generalidad podemos pensar que la paleta de coloración es la siguiente: 0 = blanco, 1 = gris. 2 = negro. entonces en terminos de separoides tendremos lo siguiente:

a) $0 \nmid 1; 1 \nmid 2, 0 \nmid 2, 0 \nmid 12. 1 \nmid 02. 2 \nmid 01.$

Las no separaciones minimales son: $0 \nmid 1. 1 \nmid 2$ y $0 \nmid 2$

b) $0 \mid 1, 1 \mid 2, 0 \nmid 2, 0 \nmid 12. 1 \mid 02. 2 \nmid 01.$

La no separación minimal es: $0 \nmid 2.$

c) $0 \mid 1, 1 \mid 2, 0 \mid 2, 0 \mid 12, 1 \mid 02, 2 \nmid 01$.

La no separación minimal es: $2 \nmid 01$.

d) $0 \mid 1, 1 \mid 2, 0 \mid 2, 0 \mid 12, 1 \mid 02, 2 \mid 01$.

No hay no separaciones.

Decimos que estas son las cuatro maneras básicas, porque cualquier otra que se nos ocurra, en términos de separación, será alguno de estos casos. lo único que puede variar es el orden (o coloración).

Varias son las cosas que comienzan a despuntar en este ejemplo, una de ellas es el de distinguir las no-separaciones minimales. Esto se hace porque a partir de las no-separaciones minimales queda totalmente descrita toda la estructura de separación; esto es, que dado solamente las no-separaciones minimales podemos deducir lógicamente todas las demás separaciones y no separaciones que hay en el conjunto.

Hay ciertas nociones que podemos rescatar a partir del separoide subyacente. Es más, podemos plantear la siguiente pregunta: si solo se conoce el separoide, ¿se puede encontrar un conjunto finito que lo cumpla?. A este problema se le llama **la realización de un separoide**, y se puede plantear en terminos mucho más amplios (como para conjuntos convexos, por ejemplo) [cp. [1]], nosotros no desarrollaremos mucho más, y lo manejaremos así a grandes rasgos.

Un ejemplo de lo anteriores es el siguiente: Llamamos un **simploide de rango k** a un separoide de orden $k + 1$ que tiene todas las separaciones posibles. Este puede ser realizado por los vértices de un simplejo Δ^k . En general definimos el **rango de un separoide** como el máximo rango de los simploides contenidos en él, es decir el máximo subconjunto de puntos afínmente independiente. Observese que para cualquier subconjunto en \mathbb{R}^d , la dimensión del espacio ya estableció una cota para el rango, este a lo mas será d .

3.4 Teorema de Radon.

A continuación daremos dos teoremas muy importantes para el desarrollo posterior de este trabajo; aunque estos estén descritos en términos de conjuntos finitos de puntos “normales”, sin orden, estos son válidos para conjuntos con color, y en los corolarios y notas intentaremos traducirlos a estos términos e hilarlos con estas ideas.

que son combinaciones convexas, ya que

$$\sum_{i \in A} \lambda'_i = \sum_{i \in B} \lambda'_i = 1$$

y además $\lambda'_i \geq 0$.

Así obtuvimos dos conjuntos, los correspondientes a A y B , cuyos cascos convexos se intersectan. ■

Proposición 20 *Un conjunto finito ordenado, $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k)$ es afinmente independiente si y sólo si todo subconjunto propio de P se separa de su complemento.*

Demostración. Sea $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k)$ un conjunto afinmente independiente, y sea \mathbb{A} el generado afin de P .

Extendemos P a una base afin para todo \mathbb{R}^d , $P^e = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_d)$.

Sea A cualquier subconjunto propio (ni el vacío ni el total) sobre los índices I_k de P ; entonces la función $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\varphi(\mathbf{p}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i \in I_k \text{ y } i \in A \\ -1 & \text{si } i \in I_k \text{ y } i \notin A \\ 0 & \text{si } i \notin I_k \end{array} \right\}$$

sobre todas $\mathbf{p}_i \in P^e$, es una función afin, donde $\varphi^{-1}(0)$ es un hiperplano de \mathbb{R}^d , y $\varphi^{-1}(0) \cap \mathbb{A}$ separa al conjunto dado de su complemento.

El regreso lo haremos por contradicción.

Supongamos sin pérdida de generalidad que para todo subconjunto propio $A \subsetneq P$, $A \mid A^c$; y que los puntos de P son afinmente dependientes. Se sigue que la demostración anterior [Teorema 19], aquí $A = A$ y $B = A^c$. Así sucede que A y A^c se intersectan en el casco convexo, es decir no se separan, lo que nos lleva a una contradicción. ■

Al traducirl el Teorema de Radon en terminos de separoide y conjuntos ordenados diría lo siguiente: El separoide asociado a un conjunto finito que tiene $d+2$ puntos (o más) ordenados en \mathbb{R}^d tiene al menos una no separación donde $0 \neq A \subsetneq P$ sucede que $A \nmid A^c$.

La aplicación para caracterizar los conjuntos de puntos de acuerdo a su separoide asociado es la siguiente:

Corolario 21 *Dado un conjunto finito y ordenados de puntos en \mathbb{R}^d , $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ y siendo $S(P)$ su separoide asociado, sucede que P genera afinmente a \mathbb{R}^d si y sólo si el rango de $S(P)$ es d .*

Demostración. Si los puntos generan afinmente entonces P contienen un subconjunto de $d + 1$ puntos afinmente independientes, es decir, el rango de $S(P)$ es mayor o igual a d . Si fuera mayor quiere decir que tengo más de $d + 1$ puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^d , lo cual es un absurdo.

Ahora, el rango de $S(P)$ es d . por lo tanto P contiene a $d + 1$ puntos afinmentes independientes que generan a \mathbb{R}^d . ■

El Teorema de Radon tiene una versión más fuerte que nos servirá para caracterizar, en párticular, los separoides asociados a $d + 2$ puntos ordenados. con la petición especial de que generen \mathbb{R}^d .

Teorema 22 (Radon fuerte) *Para todo conjunto de $d+2$ puntos en \mathbb{R}^d que generan afinmente existen dos subconjuntos disjuntos y únicos tales que los simplejos que forman se intersectan en un único punto en su interior.*

Demostración. Esta demostración tiene una base muy parecida a la anterior.

La primera diferencia aparece al construir los subconjuntos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A &= \{i \text{ tales que } \lambda_i > 0\}, \\ B &= \{i \text{ tales que } \lambda_i < 0\}, \\ C &= \{i \text{ tales que } \lambda_i = 0\}: \end{aligned}$$

esto se hace para asegurar la intersección en el interior del casco convexo. Las constantes λ y λ_i s se definen de la misma manera. Así.

$$0 = \sum_{i=0}^{d+1} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \in A} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i \in B} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i \in C} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

como el último termino es nulo sucede que

$$\sum_{i \in A} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i \in B} -\lambda_i \mathbf{x}_i,$$

y dividiendo por λ como en el caso anterior, obtengo, en este caso, dos combinaciones convexas con $\lambda_i > 0$. así aseguro que la intersección se realiza en el interior de los casco convexos.

Unicidad. Como el conjunto finito genera a \mathbb{R}^d , sin pérdida de generalidad tomemos a $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d$ afínmente independientes, es decir una base afín de este espacio; entonces podemos expresar a \mathbf{x}_{d+1} de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_{d+1} = \sum_{i=0}^d \mu_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^d \mu_i = 1.$$

Por lo anterior, tenemos también que

$$\mathbf{x}_{d+1} = \sum_{i=0}^d -\frac{\lambda_i}{\lambda_{d+1}} \mathbf{x}_i,$$

por el resultado de unicidad de coordenadas baricéntricas [Proposición 11] sucede que

$$-\frac{\lambda_i}{\lambda_{d+1}} = \mu_i,$$

lo cual nos asegura que la partición A, B, C de los índices es única. ■

En términos de separoides:

Corolario 23 Sea $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{d+1})$ un conjunto de $d+2$ puntos en \mathbb{R}^d y sea $S(P)$ su separoide asociado. Entonces P genera afínmente a \mathbb{R}^d si y sólo si $S(P)$ es de rango d y tiene una única no separación minimal.

Demostración. Como P genera a \mathbb{R}^d existen $d+1$ puntos en P afínmente independientes, el simplexide generado por estos es de rango d , y por Radon Fuerte tiene una única no separación minimal. A este tipo de no separaciones minimales las llamamos **no-separaciones de Radon**.

Para el regreso basta con ver que contienen un simplexide de rango d que genera a \mathbb{R}^d . ■

Capítulo 4

Espacios de Configuraciones

Todo lo anteriormente desarrollado nos permitira ahora abordar el capítulo central de la tesis; en este definiremos, y ejemplificaremos de una manera constructiva, los Espacios de Configuraciones. La idea básica, es pensar en cuántas maneras distintas, en terminos de separación, se pueden encontrar k puntos ordenados (o coloreados) en \mathbb{R}^d .

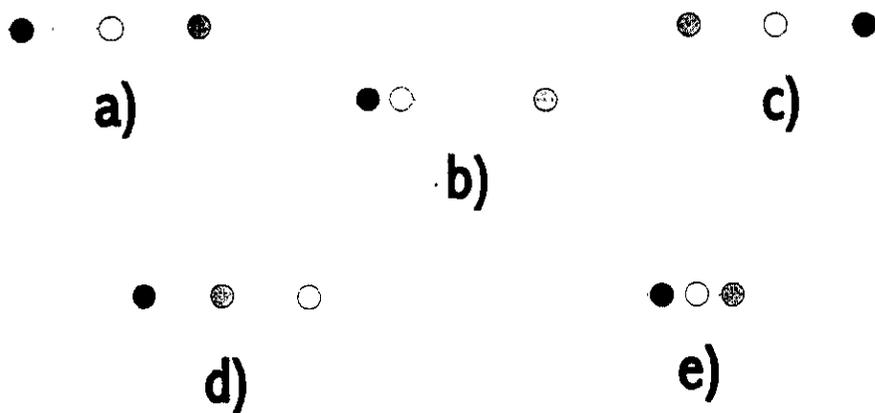
Definimos una **k -constelación** como un conjunto finito de k puntos ordenados que generán afínmente a \mathbb{R}^d ($k \geq d + 1$), $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1})$.

Decimos que dos k -constelaciones, $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1})$ y $Q = (\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{k-1})$, son **afínmente equivalentes** si existe, $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, una transformación afín que mande una en la otra preservando el orden. es decir tal que $T(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ para toda $i = 0, \dots, k - 1$.

Gracias a las propiedades de las transformaciones afines [sección 2.5] la equivalencia afín establece una relación de equivalencia entre las k -constelaciones de \mathbb{R}^d . Por estas propiedades dos constelaciones equivalentes conservan sus posiciones relativas. es decir, los coeficientes con respecto a una base de coordenadas bariéntricas se conservan; se mantiene la proporcionalidad entre los puntos. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 24 *Cinco diferentes 3-constelaciones en la recta:*

La coloración es la siguiente: 0 = blanco , 1 = gris y 2 = negro.



Dibujo 7.

Las únicas 3-constelaciones que son afinmente equivalentes son: a, c y e; que en ellas se conserva la proporcionalidad, es decir, p_0 se encuentra en el punto medio (posición relativa) del segmento comprendido entre p_1 y p_2 .

Es a las clases de equivalencia que surgen de esta relación a las que llamamos **k-configuraciones** (\mathbf{P}): de esta manera definimos el **Espacio de Configuraciones de k puntos en \mathbb{R}^d** como:

$$C(k, d) := \{ \mathbf{P} ; \mathbf{P} \text{ es una } k\text{-configuración en } \mathbb{R}^d \}.$$

El conjunto de las k -constelaciones es un subespacio de $(\mathbb{R}^d)^k$, y entonces tiene una topología natural. Al espacio $C(k, d)$ se le asocia la topología cociente.

Ejemplo 25 $C(d + 1, d)$

Pensemos en $d+1$ puntos en \mathbb{R}^d (dos puntos en la recta, tres en el plano, cuatro en \mathbb{R}^3 , etc...). La condición para que formen una constelación es que los puntos generen afinmente. esto hace que siempre tengamos bases afines; así, todas las $d + 1$ -constelaciones son equivalentes [ver sección 2.5], por tanto el espacio $C(d + 1, d)$ consta de una sola configuración. un sólo punto.

Notemos que una k -configuración \mathbf{P} hereda el separoide asociado a sus representantes (que denotamos por $S(\mathbf{P})$), ya que dos k -constelaciones equivalentes tiene el mismo separoide asociado. Lo inverso no sucede; veamos que

en el Ejemplo 24 (a y b) tienen la misma estructura de separación, mas sin embargo no son afinmente equivalentes.

De este hecho definimos otra relación de equivalencia, pero ahora entre las k -configuraciones en \mathbb{R}^d : decimos que dos k -configuraciones, \mathbf{P} y \mathbf{Q} , son **equivalentes**, si $S(\mathbf{P}) = S(\mathbf{Q})$.

Esta relación, en los casos que aquí veremos, imprime una descomposición celular en el espacio de configuraciones de acuerdo a las clases de equivalencia.

4.1 $C(d+2, d)$

Ahora desarrollaremos, de una manera constructiva, la secuencia de ejemplos correspondientes a los espacios de $(d+2)$ -configuraciones de \mathbb{R}^d . Comenzaremos por los dos más sencillos, para después intentar explicar la generalización.

4.1.1 $C(3, 1)$

La pregunta es: ¿De cuántas maneras, en términos su separoide, podemos encontrar diferentes 3-constelaciones en la recta?

Los casos básicos son dos:



Dibujo 8.

“Ver” dos puntos o “ver” tres puntos. Cuando se “ven” dos puntos [Dibujo 8 (a)], el cardinal del soporte es 2: quiere decir que la 3-constelación contiene una 0-aglomeración de 2 puntos; esto traduciendo a separoides es el caso cuando en la estructura existe una no-separación de Radon con componentes de cardinalidad 1. Hay tres posibilidades de que esto suceda (de acuerdo a las diferentes coloraciones que podemos dar) que son: $0 \uparrow 1$, $0 \uparrow 2$, $1 \uparrow 2$; estas corresponden a los tres vértices del espacio $C(3, 1)$.

La otra posibilidad [Dibujo 8 (b)], que es “ver” tres puntos, implica que alguno de los puntos se encuentra en el interior del casco convexo de los otros dos; en términos de separación es cuando en la estructura tenemos una no-separación de Radon con componentes de cardinalidades 1 y 2, respectivamente.

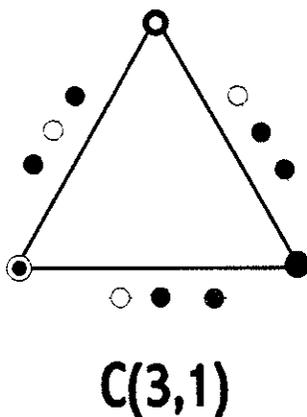
Para fijar ideas, supongamos la siguiente coloración en el Dibujo 8: 0 = blanco. 1 = gris y 2 = negro. Tenemos entonces que p_0 se encuentra en el casco convexo de p_1 y p_2 , entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$p_0 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \quad \text{donde} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

De acuerdo a todas las posibilidades de que esto suceda (las diferentes posiciones relativas de p_0 con respecto a p_1 y p_2), y recordando que las coordenadas baricéntricas son invariantes afines, tenemos que las 3-configuraciones correspondientes a las no-separaciones de Radon del tipo $0 \uparrow 12$ forman una celda abierta de dimensión 1, o **arista**, que tiene como vértices a $0 \uparrow 1$ y a $0 \uparrow 2$.

Observación: obtengo la misma arista si la coloración es: 0 = blanco, 1 = negro y 2 = gris.

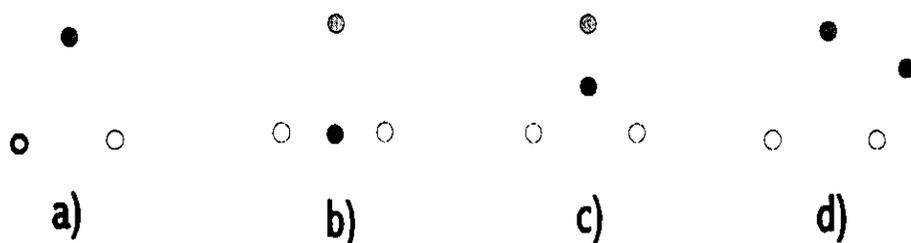
Así, pensando en todas las diferentes posibilidades de coloración que puedo tener, el espacio de configuraciones $C(3, 1)$ es el siguiente:



Dibujo 9.

4.1.2 $C(4, 2)$

¿De cuántas maneras distintas, en términos su separoide, puedo encontrar acomodadas constelaciones de cuatro puntos en el plano? Los casos básicos son los siguientes:



Dibujo 10.

El primer caso es uno de los casos degenerados [Dibujo 10, (a)], el cardinal del soporte es menor a cardinal del conjunto, ya que el conjunto contiene una 0-aglomeración de dos puntos. Estos son los casos correspondientes a las no-separaciones de Radon del tipo $i \nmid j$ con $i, j \in I_4$, correspondientes a los vértices (Δ^0) de \mathbb{R}^4 , y que de acuerdo a las diferentes parejas de puntos que se pueden formar son seis.

El siguiente caso [Dibujo 10, (b)], es cuando la 4-configuración contiene una 1-aglomeración de 3 puntos. Estos casos se corresponden, de acuerdo a la terna que esté alineada, con las 3-configuraciones de \mathbb{R}^1 , que como ya vimos, son la frontera de un triángulo. Así, éstas parametrizan doce aristas (Δ^1) cuyas no separaciones de Radon son del tipo $i \nmid jk$, ubicadas cada una entre los vértices $i \nmid j$ y $i \nmid k$.

Luego tenemos dos casos en posición general [Dibujo 10 (c) y (d)]. El primero de ellos, corresponde a las no-separaciones de Radon del tipo $i \nmid jkl$. Este tipo de 4-configuraciones parametrizan triángulos (Δ^2) de $C(4, 2)$, que se pegan con las aristas $i \nmid jk$, $i \nmid jl$ y $i \nmid kl$, así como con sus vértices respectivos: $i \nmid j$, $i \nmid l$ y $i \nmid k$. De este tipo de celdas hay cuatro.

Finalmente tenemos otro caso en posición general, pero cuyo casco convexo se ve como un cuadrado, y cuyas no-separaciones de Radon corresponde al tipo $ij \nmid kl$. Son tres las posibilidades y como veremos a continuación parametrizan un cuadrado ($\Delta^1 \times \Delta^1$).

Para fijar ideas, consideremos la siguiente coloración en el Dibujo 10: 0 = blanco, 1 = gris claro, 2 = gris oscuro y 3 = negro. Entonces, en este caso, corresponde a la no-separación de Radon $03 \nmid 12$. Tenemos entonces, por el Teorema de Radon Fuerte, que existen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, todas ellas positivas, con $\lambda_0 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y tales que

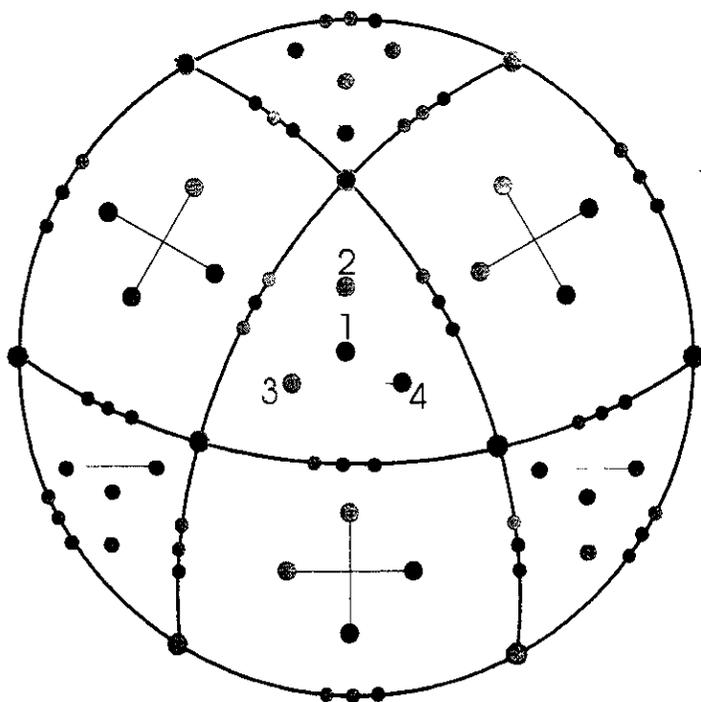
$$\lambda_0 \mathbf{p}_0 + \lambda_3 \mathbf{p}_3 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2.$$

A esta configuración le asociamos la pareja $(\lambda_0, \lambda_3) \times (\lambda_1, \lambda_2) \in \Delta^1 \times \Delta^1$, donde expresamos los puntos de Δ^1 por sus coordenadas baricéntricas. Puesto que las transformaciones afines preservan coordenadas baricéntricas esta asociación es independiente de la constelación representante.

Inversamente, a cada punto (x, y) del cuadrado unitario, $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ se le puede asociar la configuración $\mathbf{p}_0 = (0, y)$, $\mathbf{p}_1 = (1, y)$, $\mathbf{p}_2 = (x, 0)$ y $\mathbf{p}_3 = (x, 1)$. Entonces las λ 's del párrafo anterior son $\lambda_0 = 1 - x$, $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = 1 - y$ y $\lambda_3 = y$.

Es fácil ver que el cuadrado $03 \uparrow 12$ se pega a las aristas $0 \uparrow 12$, $1 \uparrow 03$, $2 \uparrow 03$, $3 \uparrow 12$. Y de manera análoga se comportan las configuraciones de las clases de equivalencia correspondientes a los separoides cuya no-separación de Radon es $01 \uparrow 23$ y $02 \uparrow 13$.

Hemos descrito completamente cuales son las celdas del espacio $C(4, 2)$ y como se pegan. Al hacerlo se obtiene el plano proyectivo:



Dibujo 11.

4.1.3 El caso general: $C(d+2, d)$.

Las ideas básicas para la descripción combinatoria del caso general son iguales a las del ejemplo anterior.

Hemos visto que el separoide de una configuración de $d+2$ puntos en \mathbb{R}^d está determinado por su no-separación de Radon. De tal manera que las clases de equivalencia de configuraciones corresponden a las parejas de subconjuntos disjuntos A y B de $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ donde $n = d+2$. Definamos entonces el **orden parcial de Radon de rango n** como

$$R_n = \{(A, B) \mid A, B \subset I_n, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset \neq B\},$$

ordenado por la relación $(A, B) \leq (A', B')$ si $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$; y donde identificamos a la pareja (A, B) con la pareja (B, A) , y esto no causa confusión en el orden pues los conjuntos son disjuntos.

A cada clase de equivalencia de configuraciones le corresponde, por el Teorema de Radon fuerte, un único elemento (A, B) de R_n , donde $A \nmid B$ es su no-separación de Radon. Y veremos que cualquier elemento del orden parcial de Radon viene de alguna configuración:

Sean $a = \#A$, $b = \#B$ y $c = \#C = I_n - (A \cup B)$, de tal manera que $a + b + c = n$. En el subespacio \mathbb{R}^{a-1} de \mathbb{R}^d generado por las primeras $a-1$ coordenadas podemos colocar los puntos correspondientes a A de tal manera que generen un simplejo con el origen en su interior. En el subespacio \mathbb{R}^{b-1} de \mathbb{R}^d generado por las siguientes $b-1$ coordenadas, ponemos los puntos correspondientes a B generando un simplejo con el origen también en su interior. Así que la no-separación de Radon de los puntos de $A \cup B$ en \mathbb{R}^{a+b-2} es precisamente $A \nmid B$. Los puntos que nos falta definir son justo los de C , que se necesitan para generar afinmente a \mathbb{R}^d , y que colocamos en la base canónica de \mathbb{R}^c . Se puede demostrar, como lo hicimos en el caso anterior, que las configuraciones que tienen no-separación de Radon $A \nmid B$ se parametrizan por $\Delta^{a-1} \times \Delta^{b-1}$, correspondiendo a dónde quedó el origen en la demostración anterior. De tal manera que a $(A, B) \in R_n$ le corresponde una celda $\Delta^{a-1} \times \Delta^{b-1}$ y esta se pegará a las correspondientes de los $(A', B') \leq (A, B)$.

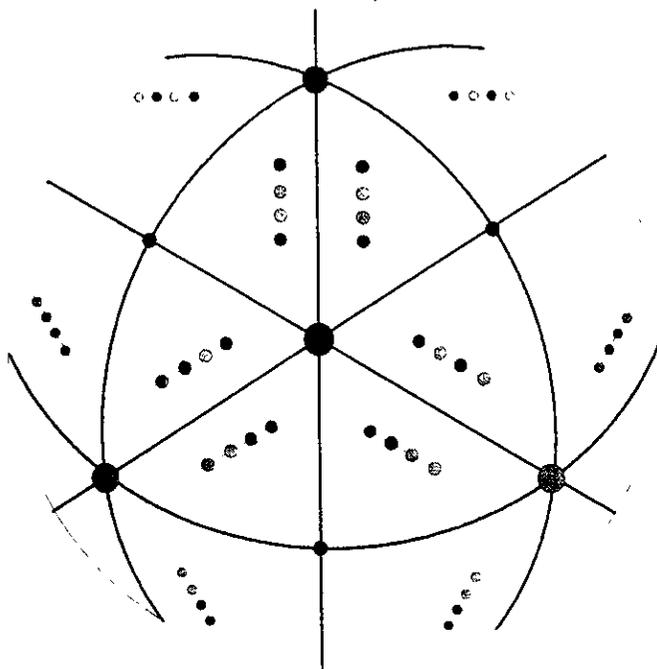
Muy a grandes razgos esto describe a $C(d+2, d)$.

4.2 $C(4, 1)$

Por último desarrollaremos brevemente este ejemplo.

con $\lambda_1 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_3 = 1$, donde $\lambda_1 > \mu_1$ y $\lambda_3 < \mu_3$, si a esta configuración le asociamos la pareja $(\lambda_1, \lambda_3) \times (\mu_1, \mu_3) \in \Delta^1 \times \Delta^1$, obtenemos la parametrización del interior de uno de los triángulos determinados por una diagonal del cuadrado $\Delta^1 \times \Delta^1$.

El espacio $C(4,1)$ es el siguiente:



Dibujo 13.

Capítulo 5

Grassmannianas.

Las Grassmannianas o variedades de Grassmann son los espacios que surgen de tomar como elementos a los subespacios lineales de una cierta dimensión k en \mathbb{R}^m , es decir:

$$G(k, m) := \{V \subset \mathbb{R}^m ; V \text{ es un subespacio lineal de dimensión } k\}.$$

5.1 $C(n+1, d) \approx G(n-d, n)$.

Teorema 26 *El espacio de $n+1$ -configuraciones en \mathbb{R}^d es isomorfo a la Grassmanniana correspondiente a los subespacios lineales de dimensión $n-d$ de \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sea $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ una configuración del espacio $C(n+1, d)$, sin pérdida de generalidad suponemos $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ (si no trasladamos al origen).

Definimos $f_{\mathbf{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ como la extensión lineal de $f_{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i$, definimos también $\Psi : C(n+1, d) \rightarrow G(n-d, n)$ como $\Psi(\mathbf{P}) = \ker f_{\mathbf{P}}$, que está bien definida, como $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{p}_n)$ genera afinmente, tenemos que $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ generan linealmente. entonces $f_{\mathbf{P}}$ es una función suprayectiva y por tanto la dimensión de su $\ker \Psi(\mathbf{P})$, es $n-d$.

Ya construida la función demostraremos la sobreyectividad e inyectividad.

1) Sea $V \in G(n-d, n)$ y sea V^\perp su complemento ortogonal, la dimensión de V^\perp es d .

Sea la proyección ortogonal $\Pi_V : \mathbb{R}^n \rightarrow V^\perp$. Entonces $P = (\mathbf{0}, \Pi(\mathbf{e}_1), \dots, \Pi(\mathbf{e}_n))$ es una constelación en $C(n+1, d)$ ya que Π_V es sobreyectiva.

Al establecer cualquier isomorfismo lineal entre V^\perp con \mathbb{R}^d , obtenemos una configuración en \mathbb{R}^d . Por construcción $f_{\mathbf{P}} = \Pi_V$ de modo que $V = \ker f_{\mathbf{P}} = \Psi(\mathbf{P})$. Esto prueba que Ψ es sobreyectiva.

2) Tomemos $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ y $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n)$ dos constelaciones del espacio $C(n+1, d)$, y supongamos que $\Psi(\mathbf{P}) = \Psi(\mathbf{Q})$ esto es $\ker f_{\mathbf{P}} = \ker f_{\mathbf{Q}}$.

Sin perder generalidad, podemos tomar $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, y a $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ como una base lineal de \mathbb{R}^d .

Definimos $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una transformación afín tal que $g(\mathbf{p}_i) = \mathbf{q}_i$ para $i \in \{1, \dots, d\}$. Nos queda demostrar que $g(\mathbf{p}_j) = \mathbf{q}_j$ para $j > d$.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tales que

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{p}_i \quad \text{para } j > d.$$

Por definición de $f_{\mathbf{P}}$ tenemos que

$$\mathbf{p}_j = f_{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_i).$$

Esto implica que

$$\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i f_{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_i) \right) - f_{\mathbf{P}}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0},$$

de donde se obtiene que

$$f_{\mathbf{P}} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \right) = \mathbf{0}.$$

esto es,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$$

está en el kernel de $f_{\mathbf{P}}$.

Tenemos por hipótesis que $\Psi(\mathbf{P}) = \Psi(\mathbf{Q})$, entonces

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$$

también está en el kernel de f_Q por tanto

$$f_Q \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i - e_j \right) = 0.$$

es decir,

$$\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i f_Q(e_i) \right) - f_Q(e_j) = 0,$$

lo que nos lleva a que

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_Q(e_i) = f_Q(e_j) = \mathbf{q}_j.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}_j) &= g \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{p}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_i g(\mathbf{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{q}_i \\ &= \mathbf{q}_j. \end{aligned}$$

Así vemos que las λ_i se conservan, esto nos lleva deducir que \mathbf{P} y \mathbf{Q} son constelaciones equivalentes. es decir, representan a la misma configuración. ■

Aquí se explica porque $C(4,2)$ y $C(4,1)$ resultan ser el mismo espacio topológico (el plano proyectivo). Esto es debido a que las Grassmanianas tienen dualidad.

Como a cada subespacio de dimensión k de \mathbb{R}^m se le puede asociar su ortogonal V^\perp que tiene dimensión $k - m$, y esta asociación es claramente una biyección, tenemos la dualidad de Grassmanianas:

$$G(k, m) = G(m - k, m).$$

Entonces para los Espacios de configuraciones obtenemos que:

$$\begin{array}{ccc} C(n+1, d) & = & G(n-d, n) \\ \parallel & & \parallel \\ C(n+1, n-d) & = & G(d, n) \end{array}$$

Obsérvese, solamente, que sin embargo, las descomposiciones celulares son diferentes.

Bibliografía

- [1] J.Bracho y R. Strausz; *Separoids and a characterization of linear acyclic uniform oriented matroids*; paper (december 1999).
- [2] R. Strausz; *Separoides*; Situs, serie B, No.5, Universidad Nacional Autonoma de México (octubre 1998) pp. 36-41.
- [3] J. Eckhoff; *Helly, Radon and Carathéodory type theorems*; Handbook of Convex Geometry, Ed. P. M. Gruber and J. M. Wills, Elsevier Science Publishers (1993) pp. 389-448.
- [4] L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee; *Helly's theorem and its relatives*; Convexity vol.7, Proc Sypos. Pure Math, AMS (1963) pp. 101-180.
- [5] B. Grünbaum; *Convex Polytopes*; John Wiley and sons.
- [6] Arne Bronsted; *An introduction to Convex Polytopes*; Graduate texts in mathematics:90, Springer-Verlag New York. QA640.3/B75.
- [7] E. G. Rees; *Notes on Geometry*; Springer-Verlag. QA445/R44.
- [8] P. J. Ryan; *Euclidean and Non-euclidean Geometry an Analytic Approach*; Cambridge University Press. QA445/R93.