

00576



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

1

"MODELO MATEMATICO EN LA ACTIVACION  
NEUTRONICA CON DECAIMIENTO ISOMERICO  
E ISOBARICO"

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS QUIMICAS  
( Q U I M I C A N U C L E A R )  
P R E S E N T A :  
FIS. JOSE LUIS REYES JIMENEZ

ASESOR DE TESIS: DR JUAN MANUEL NAVARRETE TEJERO

MEXICO, D. F.

SEPTIEMBRE 2001





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN CIENCIAS QUÍMICAS

OF.CPCQ.321/01



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**BIÓL. FRANCISCO INCERA UGALDE**

Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado

Presente

Me es grato informarle que el alumno **JOSÉ LUIS REYES JIMÉNEZ**, No. de cuenta 95807807 y expediente 5951025, presentará su examen para optar por el grado de Maestro en Ciencias Químicas (Química Nuclear), quien defenderá el proyecto de investigación titulado: **"Modelo Matemático en la Activación Neutrónica con decaimiento isomérico e isobárico"**, ante el siguiente jurado:

Presidente	M. en C. Juan Lartigue Gordillo	Facultad de Química, UNAM
Vocal	Dr. Miguel Balcázar García	ININ
Secretario	M. en C. Trinidad Martínez Castillo	Facultad de Química, UNAM
Primer suplente	Dr. Luis Carlos Longoria Gándara	ININ
Segundo suplente	M. en C. Rubén Ortega Carmona	Facultad de Química, UNAM

Sin otro particular de momento, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cd. Universitaria, D.F. a 22 de mayo de 2001.

**DR. RAYMUNDO CEA OLIVARES**

Coordinador del Programa

c.c.p. Integrantes del Jurado  
Presidente del SAO  
Departamento de Control Escolar  
Interesado  
Expediente

**Dr. Raymundo Cea Olivares**  
Tel. 55-50-13-37 Fax 55 50 91 96  
pcquimicas@dgep.posgrado.unam.mx

A las personas que me dieron la vida y me ofrecieron la oportunidad de ser alguien

A mi madre

**María Jiménez Gutiérrez (Doña Merri)**

Nunca te olvidare,  
¡ Qué fijas están las estrellas en el cielo !

A mi padre

**Elias Reyes Ceja (Elias Reyes)**

Gracias por ser tu amigo,  
¡ El curso de la naturaleza parece deleitarse con  
transmutaciones !

A las personas que le dan sentido a mi vida:

**María del Rosario, Mariana, María Fernanda y José Luis.**

Somos marinos surcando los mares en un mismo  
velero.

A mis hermanos:

Nuestros amores tan fielmente paralelos, aunque  
infinitos nunca coincidirán.

## **AGRADECIMIENTOS:**

A mi director de tesis Dr. Juan Manuel Navarrete Tejero, por la dirección y el apoyo dado en el presente trabajo.

Al M. en C. Marco Antonio Ruiz Cristóbal, por su apoyo y valiosas sugerencias en la orientación de la presente investigación, así como por su inapreciable amistad.

## RESUMEN

Se desarrolla un modelo matemático para describir la variación en el tiempo de núcleos radiactivos obtenidos durante la activación neutrónica y su decaimiento radiactivo, basado en la aplicación de la transformada de Laplace y el método de fracciones parciales para resolver las ecuaciones de balance que describe el número de átomos radiactivos en el tiempo. En el proceso a modelar se considera la obtención de estados metaestables e isomérico del material activado, así como su correspondiente decaimiento isobárico e isomérico. Las restricciones a considerar en el modelo, son: aplica a un solo isótopo a activar, no se consideran procesos de reactivación ni de atenuación, las transformaciones permitidas son la isobárica e isomérica y el flujo de neutrones térmicos es constante y uniforme. Los resultados obtenidos en la aplicación del modelo matemático para el caso particular de obtención de I-131 a partir de la activación neutrónica del Te-130 y del Tc-99m a partir del Mo-98 fueron comparados con la base de datos del The Health Physics and Radiological Health Handbook <sup>(1)</sup>.

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN.</b>	1
Justificación.	1
Objetivo general	2
Objetivo específico	2
<b>CAPÍTULO 1.</b>	
<b>ECUACIONES DE BALANCE Y SU SOLUCIÓN DURANTE LA ACTIVACIÓN.</b>	3
1 1 Ecuaciones por activación neutrónica	3
1 2 Ecuaciones de balance por decaimiento radiactivo en la activación	4
1 3 Solución al sistema de ecuaciones	4
<b>CAPÍTULO 2.</b>	
<b>ECUACIONES DE BALANCE Y SU SOLUCIÓN DESPUÉS DE LA ACTIVACIÓN.</b>	16
2 1 Ecuaciones por decaimiento radiactivo.	16
2 2 Solución al sistema de ecuaciones	17
<b>CAPÍTULO 3.</b>	
<b>ANÁLISIS.</b>	24
3 1 Actividad de saturación	24
3 2 Comparación de la actividad de saturación de los productos radiactivos obtenidos en la irradiación.	25
3 3 Comparación con las ecuaciones de Bateman	25
3 4 Estudio de casos particulares	26
3 4 1 Primer caso	26
Solución cuando $n_3(t) = 0$ ,	
a Actividad en el tiempo de decaimiento de los núcleos radiactivos producto de la irradiación	28
b Relación del producto radiactivo en la irradiación con el producto de decaimiento en el enfriamiento	29
c Tiempo $t$ de enfriamiento en el que la actividad del producto radiactivo es igual al producto de decaimiento	30

3 4.2 Segundo caso	31
Solución cuando $n_1(t) = 0$ ,	
a. Actividad en el tiempo de decaimiento de los núcleos radiactivos producto de la irradiación.	32
<b>CAPÍTULO 4.</b>	
<b>APLICACIONES DEL MODELO PROPUESTO</b>	34
4 1 Obtención de I-131 a partir de la activación neutrónica de Te-130	34
4 2 Obtención de Tc-99m a partir de la activación neutrónica de Mo-98	35
4 3 Validación del modelo propuesto	36
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>CONCLUSIONES.</b>	37
<b>GLOSARIO.</b>	39
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	41
<b>ANEXOS.</b>	
<b>ANEXO I</b>	42
Esquema 1: Activación y decaimiento del sistema a considerar para su modelación.	43
Esquema 2. Parámetros de interés durante y después de la irradiación	43
Esquema 3 Sistema a considerar para el estudio del primer caso. $n_3(t) = 0$	44
Esquema 4 Sistema a considerar para el estudio del segundo caso $n_1(t) = 0$	44
<b>ANEXO II</b>	45
Tabla 1 - Transformadas de Laplace.	46
Tabla 2.- Valores del factor de saturación	46
Tabla 3 - Distribución isotópica del telurio natural	47
Tabla 4.- Resultados con el modelo propuesto y los reportados por Bernard Shleien <sup>(1)</sup> para la producción de I-131, durante la activación neutrónica del Te-130, a distintos tiempos de irradiación	47
Tabla 5 - Resultados para el enfriamiento, en la producción de I-131 por activación neutrónica de Te-130, para una irradiación de 1 h	48
Tabla 6.- Resultados para el enfriamiento, en la producción de I-131 por activación neutrónica de Te-130, para una irradiación de 24 h	48

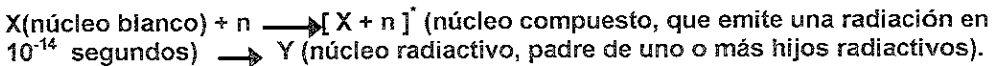


Tabla 7.- Distribución isotópica del molibdeno natural	49
Tabla 8.- Resultados para la obtención de $^{99m}_{43}\text{Tc}$ por activación neutrónica del Mo-98, segundo caso de estudio	49
Tabla 9 Resultados para el enfriamiento, en la producción de Tc-99m por activación neutrónica de Mo-98, para una irradiación de 24 h	50
<b>ANEXO III</b>	51
Gráfica 1.- Comportamiento de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante la irradiación	52
Gráfica 2 - Comportamiento de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante el enfriamiento.	52
Gráfica 3 - Comportamiento de los núclido Mo-99, Tc-99m y Tc-99 durante la activación	53
Gráfica 4.- Comportamiento de los núclido Mo-99, Tc-99m durante el enfriamiento.	54

## INTRODUCCIÓN

Aún cuando los casos de equilibrio secular, transitorio y no equilibrio entre padres e hijos radiactivos ha sido muy estudiado en los radioisótopos naturales, no existe todavía una ecuación diferencial que relacione las dimensiones que intervienen en el proceso de activación que produzca 2 radioisótopos, uno de ellos metaestable, que a su vez decaigan. cada uno, en dos especies radiactivas, también relacionadas por un estado metaestable. Por ello, este trabajo tiene por objeto relacionar las magnitudes físicas que intervienen en los procesos de activación y decaimiento, tales como flujo de partículas irradiantes, constante de decaimiento, abundancia isotópica, sección eficaz de activación y rendimiento de variedades de decaimiento, con el fin de resolver los niveles de actividad alcanzados por los hijos radiactivos, en función de los tiempos de irradiación y decaimiento en condiciones específicas.

Se ha tratado de establecer un modelo lo más general posible, aplicable al mayor número de casos, en los cuales cuando no se encuentre el evento previsto de activación baste con suponer la sección eficaz  $\sigma = 0$ , o cuando no se encuentre el tipo previsto de decaimiento baste con suponer la constante de decaimiento  $\lambda = 0$ , o lo que es lo mismo, la vida media  $t_{1/2} = \alpha$ , para el caso general de producción de un núcleo compuesto por captura neutrónica para obtener un radioisótopo que a su turno engendra hijos radiactivos con los cuales puede alcanzar un equilibrio transitorio, o bien sólo un equilibrio instantáneo con una actividad máxima del hijo, para decaer posteriormente cada uno por su lado, según su propia vida media. Este proceso general puede ser representado esquemáticamente como:



### Justificación.

De acuerdo a la literatura revisada, en el país no se ha logrado aún la producción y caracterización a nivel industrial de algunos radioisótopos utilizados, por ejemplo, en la medicina esto debido entre otros factores a la falta de estudio de factibilidad de la producción y en su caso cuando es aplicable, de una buena optimización del proceso de obtención. Una parte de la solución a este problema puede lograrse teniendo bien caracterizados los tiempos de irradiación y de enfriamiento que en consecuencia evidenciarían las actividades en el tiempo de los isótopos de interés. Debido a esto surge la idea de plantear un modelo matemático que de solución a este problema.

### **Objetivo general.**

En el desarrollo de este trabajo, se desarrolla un modelo matemático que describe de forma general el comportamiento de un elemento químico, activado durante la irradiación con neutrones y posterior comportamiento.

### **Objetivo específico.**

De una gran variedad de parámetros físicos que intervienen en el proceso de activación, el modelo se restringe a los mínimos posibles, pero deberá de funcionar o ser aplicable con sus respectivas condiciones a los ya establecidos en la literatura <sup>(1,5,7,8)</sup>

Las restricciones a considerar en el modelo son las siguiente:

- i) - Aplica a un sólo isótopo a irradiar, no se considera procesos de reactivación ni de atenuación, las transformaciones permitidas son la isobárica e isomérica, la activación es neutrónica y el flujo de neutrones térmicos es constante y uniforme
- ii) - El esquema de activación y decaimiento es como se indica en el **esquema 1** del Anexo I.
- iii) - Los parámetros de interés a considerar durante la irradiación y decaimiento radiactivo en la modelación del fenómeno, son indicados en el **esquema 2** del Anexo I

# CAPÍTULO 1

## ECUACIONES DE BALANCE Y SU SOLUCIÓN DURANTE LA ACTIVACIÓN

Cuando un elemento monoisotópico se bombardea con un flujo de neutrones de una energía determinada se produce una reacción nuclear característica, con una cierta probabilidad dada por su sección eficaz correspondiente. En el caso de la existencia de varios isótopos del mismo elemento, cada uno de los isótopos sufre la reacción nuclear correspondiente con su respectiva sección eficaz y produciendo un radionúclido de características propias y bien determinadas.

El número de átomos radiactivos que se obtienen directamente de la activación neutrónica en la unidad de tiempo, es proporcional al flujo neutrónico ( $\phi$ ) y al número de átomos existentes del isótopo estable ( $n_0$ ), siendo la constante de proporcionalidad la sección eficaz de activación ( $\sigma$ ) del elemento.

Ahora bien, el isótopo que se forma es radiactivo y se desintegra proporcionalmente al número de átomos del mismo, con su constante de desintegración característica ( $\lambda$ ).

Entonces, la ecuación de balance queda establecida como, la velocidad de formación neta por unidad de tiempo de los átomos del isótopo radiactivo obtenido es igual a la velocidad de formación menos la desintegración

Para describir el comportamiento en el tiempo durante la activación y decaimiento en la activación del proceso a modelar, **esquema 1** del Anexo I, en este capítulo se establecen las ecuaciones de balance por activación neutrónica, las ecuaciones de balance por decaimiento radiactivo en la activación, así como su solución.

### 1.1).- Ecuaciones por activación neutrónica <sup>(6)</sup>.

Consideremos el caso general en el cual mediante la activación del elemento (o isótopo)  ${}_Z^AX$  se produce el isótopo radiactivo del elemento irradiado  ${}_Z^{A+1m}X$  y/o  ${}_Z^{A+1}X$  que decae al elemento  ${}_{z+1}^{A+1m}Y$  y/o  ${}_{z+1}^{A+1}Y$  el cual a su vez decae a un elemento estable o radiactivo.

Como es natural  ${}_Z^{A+1m}X$ ,  ${}_Z^{A+1}X$ ,  ${}_{z+1}^{A+1m}Y$  y  ${}_{z+1}^{A+1}Y$  decaen con sus propios y característicos esquemas de desintegración y sus correspondientes constantes radiactivas que les hace únicos y perfectamente distinguibles e identificables

Para el análisis cuantitativo de la población de átomos (o actividad) en el tiempo, durante y después de la irradiación del núclido de interés, se consideraran tres términos

- 1) La actividad del núclido  ${}_{z+1}^{A+1}Y$  formado durante la irradiación.
- 2) La actividad del núclido  ${}_{z+1}^{A+1}Y$  formado por el decaimiento del  ${}_Z^{A+1}X$  y/o  ${}_Z^{A+1m}X$  después de terminada la irradiación
- 3) La desaparición de los átomos del núclido  ${}_{z+1}^{A+1}Y$  a consecuencia de su propio decaimiento.

Aplicando la ecuación de balance a lo indicado en el **esquema 2** del Anexo I, tenemos que el número de átomos producto radiactivos  $n_1(T)$  y  $n_2(T)$  presentes en el tiempo T de irradiación es la diferencia entre el número total de átomos producto formados y el número de átomos que decaen en el tiempo dT, esto es:

$$\frac{dn_1}{dT} = n_0 \sigma_1 \phi - (b_{12} + b_{1c}) \lambda_1 n_1 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{dn_2}{dT} = (n_0 - n_1) \sigma_2 \phi + b_{12} \lambda_1 n_1 - (b_{23} + b_{2c}) \lambda_2 n_2 \quad (1.1.2)$$

$$\text{con las condiciones iniciales } n_1(0) = n_2(0) = 0 \quad (1.1.3)$$

### 1.2).- Ecuaciones de balance por decaimiento radiactivo en la activación.

De acuerdo a lo descrito en el **esquema 2** del Anexo I, la velocidad de formación de los núclidos radiactivos  $n_3(T)$  y  $n_4(T)$  en el tiempo T de irradiación, viene dada por la diferencia de la formación a partir del decaimiento de  $n_2(T)$  para  $n_3(T)$ ; de  $n_1(T)$ ,  $n_2(T)$  y  $n_3(T)$  para  $n_4(T)$ , y de su propia desintegración al siguiente núclido, es decir:

Para  $n_3(T)$ ,

$$\frac{dn_3}{dT} = b_{23} \lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3 \quad (1.2.1)$$

$$\text{con la condición inicial } n_3(0) = 0 \quad (1.2.2)$$

Para  $n_4(T)$ ,

$$n_4(T) = \sum n_{i4}(T) \quad (1.2.3)$$

donde  $n_{i4}(t)$  es la aportación del i-ésimo núclido al número de átomos de  $n_4$

y

$$\frac{dn_{14}}{dT} = b_{14} \lambda_1 n_1 - \lambda_4 n_{14} \quad (1.2.4)$$

$$\frac{dn_{24}}{dT} = b_{24} \lambda_2 n_2 - \lambda_4 n_{24} \quad (1.2.5)$$

$$\frac{dn_{34}}{dT} = \lambda_3 n_3 - \lambda_4 n_{34} \quad (1.2.6)$$

$$\text{con las condiciones iniciales } n_{14}(0) = n_{24}(0) = n_{34}(0) = 0 \quad (1.2.7)$$

### 1.3).- Solución al sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes obtenidas pueden resolverse sistemáticamente. Puesto que la Transformada de Laplace<sup>(2)</sup> convierte una ecuación diferencial donde la incógnita es una función  $f(t)$ , en una ecuación algebraica para  $F(s)$  y es más fácil resolver ecuaciones

algebraicas que ecuaciones diferenciales El sistema de ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente serán resueltas aplicando este método.

### 1.3.1).- Solución a la ecuación ( 1.1.1 )

De acuerdo a lo indicado en el **esquema 2** del Anexo I esta ecuación describe el número de átomos producto radiactivos  $n_1(T)$  presentes en el tiempo T de irradiación, es decir;

$$\frac{dn_1}{dT} = n_0\sigma_1\phi - (b_{12} + b_{14})\lambda_1 n_1$$

y puesto que la suma de los porcentajes de las formas en que decae el producto radiactivo  $n_1(T)$  es la unidad. se tiene que  $b_{12} + b_{14} = 1$ , así

$$\frac{dn_1}{dT} = n_0\sigma_1\phi - \lambda_1 n_1$$

de donde,

$$\frac{dn_1}{dT} + \lambda_1 n_1 = n_0\sigma_1\phi$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación , tenemos;

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{dn_1}{dT}\right\} + \mathfrak{T}\{\lambda_1 n_1\} = \mathfrak{T}\{n_0\sigma_1\phi\}$$

de las propiedades de la transformada indicadas en la **tabla 1** <sup>(2)</sup> del Anexo II, y aplicando la condición ( 1 1 3 ),  $n_1(0) = 0$ ,

$$s\mathfrak{T}\{n_1\} - n_1(0) + \lambda_1 \mathfrak{T}\{n_1\} = n_0\sigma_1\phi \mathfrak{T}\{1\}$$

es decir,

$$sN_1(s) + \lambda_1 N_1(s) = \frac{n_0\sigma_1\phi}{s}$$

$$(s + \lambda_1)N_1(s) = \frac{n_0\sigma_1\phi}{s}$$

despejando  $N_1(s)$ .

$$N_1(s) = \frac{n_0\sigma_1\phi}{s(s + \lambda_1)}$$

aplicando la transformada inversa <sup>(2)</sup> a esta última ecuación. se obtiene

$$\mathfrak{T}^{-1}\{N(s)\} = \mathfrak{T}^{-1}\left\{\frac{n_0\sigma_1\phi}{s(s + \lambda_1)}\right\}$$

de las propiedades de la transformada inversa.

$$n_1(t) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{s(s + \lambda_1)} \right\} = n_0 \sigma_1 \phi \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_1)} \right\} \quad (1.1.1a)$$

resolviendo la transformada inversa de esta ecuación, mediante el empleo del método de fracciones parciales<sup>(2)</sup>, se tiene

$$\frac{1}{s(s + \lambda_1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda_1} \quad (1.1.1b)$$

así,

$$1 = A(s + \lambda_1) + Bs$$

de donde combinando términos del mismo grado en s,

$$sA + sB = 0 \quad \& \quad \lambda_1 A = 1$$

resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentra que

$$A = 1/\lambda_1, \quad B = -1/\lambda_1,$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (1.1.1b),

$$\frac{1}{s(s + \lambda_1)} = \frac{1}{\lambda_1 s} - \frac{1}{\lambda_1 (s + \lambda_1)}$$

luego entonces, la transformada inversa indicada en la ecuación (1.1.1a) queda expresada como:

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_1)} \right\} = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 s} - \frac{1}{\lambda_1 (s + \lambda_1)} \right\}$$

aplicando las propiedades de la transformada inversa y de **tabla 1** del Anexo II, se obtiene

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_1)} \right\} = \frac{1}{\lambda_1} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{\lambda_1} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_1} \right\} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \quad (1.1.1c)$$

por lo tanto, sustituyendo (1.1.1c) en la ecuación (1.1.1a), obtenemos la solución a la ecuación (1.1.1) es decir,

$$n_1(T) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) \quad (1.1.1d)$$

donde se puede observar que hay dos términos distintos que representan

- a).- La actividad del primer núcleo radiactivo obtenido durante la activación (irradiación)
- b).- La desaparición de los átomos del primer núcleo radiactivo obtenido a consecuencia de su propio decaimiento,

### 1.3.2).- Solución a la ecuación ( 1.1.2 ).

Esta ecuación describe el número de átomos producto radiactivos  $n_2(T)$  presentes en el tiempo T de irradiación, de la forma,

$$\frac{dn_2}{dT} = (n_0 - n_1)\sigma_2\phi + b_{12}\lambda_1 n_1 - (b_{23} + b_{24})\lambda_2 n_2$$

sustituyendo la ecuación ( 1.1.1d ) en esta relación y puesto que en el decaimiento de  $n_2(T)$  se tiene  $b_{23} + b_{24} = 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dT} &= (n_0 - n_1)\sigma_2\phi + b_{12}\lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 \\ &= n_0\sigma_2\phi - (\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)k_1(1 - e^{-\lambda_1 T}) - \lambda_2 n_2 \end{aligned}$$

luego entonces,

$$\frac{dn_2}{dT} + \lambda_2 n_2 = n_0\sigma_2\phi - (\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)k_1(1 - e^{-\lambda_1 T}) \quad (1.1.2a)$$

donde

$$k_1 = \frac{n_0\sigma_1\phi}{\lambda_1} \quad (1.1.2b)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (1.1.2a), tenemos

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{dn_2}{dT}\right\} + \mathfrak{S}\{\lambda_2 n_2\} = \mathfrak{S}\{n_0\sigma_2\phi - k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)(1 - e^{-\lambda_1 T})\}$$

de las propiedades de la transformada indicadas en la **tabla 1** del Anexo II y aplicando la condición (1.1.3),  $n_2(0) = 0$ ,

$$s\mathfrak{S}\{n_2\} - n_2(0) + \lambda_2\mathfrak{S}\{n_2\} = n_0\sigma_2\phi\mathfrak{S}\{1\} - k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\mathfrak{S}\{1 - e^{-\lambda_1 T}\}$$

de donde,

$$(s + \lambda_2)\mathfrak{S}\{n_2\} = n_0\sigma_2\phi\mathfrak{S}\{1\} - k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\left[\mathfrak{S}\{1\} - \mathfrak{S}\{e^{-\lambda_1 T}\}\right]$$

es decir,

$$(s + \lambda_2)N_2(s) = \frac{n_0\sigma_2\phi}{s} - k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda_1}\right]$$

despejando  $N_2(s)$  y efectuando la operación indicada entre corchetes,

$$N_2(s) = \frac{n_0\sigma_2\phi}{s(s + \lambda_2)} - k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\left[\frac{\lambda_1}{s(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}\right]$$

aplicando la transformada inversa a esta ecuación, se obtiene



$$\mathfrak{F}^{-1}\{N_2(s)\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{n_0\sigma_2\phi}{s(s+\lambda_2)}\right\} -$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\left[\frac{\lambda_1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right]\right\}$$

es decir,

$$n_2(T) = n_0\sigma_2\phi \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_2)}\right\} -$$

$$k_1\lambda_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right\} \quad (1.1.2c)$$

cuya solución de la primera transformada inversa del segundo miembro de esta ecuación, se resuelve de manera análoga como se resolvió la transformada de la ecuación (1.1.1a), es decir

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_2)}\right\} = \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 T}) \quad (1.1.2d)$$

Para el caso de la segunda transformada inversa del segundo miembro de la ecuación (1.1.2c), empleando fracciones parciales, se tiene,

$$\frac{1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda_1} + \frac{C}{s+\lambda_2} \quad (1.1.2e)$$

así,

$$1 = A(s+\lambda_1)(s+\lambda_2) + Bs(s+\lambda_2) + Cs(s+\lambda_1)$$

de donde, combinando términos del mismo grado en s

$$A+B+C=0, \quad (\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_2B+\lambda_1C=0 \quad \& \quad \lambda_1\lambda_2A=1$$

resolviendo este sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, se encuentra que

$$A = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \quad B = -\frac{1}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} \quad \& \quad C = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}$$

sustituyendo estas soluciones en la ecuación (1.1.2e) y aplicando las propiedades de la transformada inversa, se tiene que

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right\} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\lambda_1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\lambda_2}\right\}$$

así, de la **tabla 1** del Anexo II;

$$\mathfrak{S}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right\} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}$$

o equivalentemente,

$$\mathfrak{S}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right\} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)}\right) \quad (1.1.2f)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (1.1.2f) y (1.1.2d) en la ecuación (1.1.2c) obtenemos la solución a la ecuación (1.1.2), es decir:

$$n_2(T) = \frac{n_0\sigma_2\phi}{\lambda_2}(1-e^{-\lambda_2 T}) - \frac{k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_2} \left[1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)}\right] \quad (1.1.2g)$$

### 1.3.3).- Solución a la ecuación (1.2.1).

De acuerdo a lo indicado en el **esquema 2** del Anexo I, esta ecuación describe la formación de los núclidos radiactivos  $n_3(T)$  en el tiempo T de irradiación a partir de la diferencia del decaimiento de  $n_2(T)$  y del propio decaimiento de  $n_3(T)$ , es decir;

$$\frac{dn_3}{dT} = b_{23}\lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3$$

Poniendo todos los términos de  $n_3$  en el primer miembro de la ecuación, sustituyendo  $n_2(T)$  por lo indicado en la ecuación (1.1.2g), aplicando la transformada de Laplace, **tabla 1** del Anexo II, y la condición (1.2.2),  $n_3(0) = 0$ , se tiene,

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{dn_3}{dT}\right\} - n_3(0) + \lambda_3 \mathfrak{S}\{n_3\} = b_{23}\lambda_2 \mathfrak{S}\{n_2\}$$

es decir,

$$(s+\lambda_3)\mathfrak{S}\{n_3\} = b_{23}n_0\sigma_2\phi \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda_2}\right) - b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1) \left(\frac{1}{s} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(s+\lambda_1)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right)$$

Efectuando las operaciones de las fracciones parciales indicadas entre paréntesis, aplicando la transformada inversa y despejando  $n_3$ , obtenemos,

$$n_3(t) = b_{23}n_0\sigma_2\phi\lambda_2 \mathfrak{S}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)}\right\}$$

$$-b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1) \left[ \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+\lambda_3)} \right\} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_3)} \right\} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)} \right\} \right] \quad (1.2.1a)$$

de donde, por analogía con la ecuación (1.1.2f),

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)} \right\} = \frac{1}{\lambda_2\lambda_3} \left( 1 - \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)} \right) \quad (1.2.1b)$$

por analogía con la ecuación (1.1.1c),

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+\lambda_3)} \right\} = \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 T}) \quad (1.2.1c)$$

además, por fracciones parciales;

$$\frac{1}{(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)} = \frac{A}{s+\lambda_2} + \frac{B}{s+\lambda_3}$$

y aplicando la misma metodología que se hizo a la ecuación (1.1.2e), se tiene;

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)} \right\} = \frac{e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)} \quad (1.2.1d)$$

sustituyendo la ecuación (1.2.1d), (1.2.1c) y (1.2.1b) en (1.2.1a), se obtiene finalmente la solución.

$$n_3(T) = \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_3} \left( 1 - \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_3-\lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{\lambda_3-\lambda_2} \right) - \frac{b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_3} \left[ 1 - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \right] \quad (1.2.1e)$$

### 1.3.4.- Solución a la ecuación ( 1.2.4 ).

Esta ecuación describe la formación de los núclidos radiactivos  $n_4(T)$  en el tiempo  $T$  de irradiación a partir del decaimiento del número de átomos producto radiactivos  $n_1(T)$  presentes en el tiempo  $T$  y de su propio decaimiento de  $n_4(T)$ , es decir,

$$\frac{dn_{14}}{dT} = b_{14}\lambda_1 n_1 - \lambda_4 n_{14}$$

Sustituyendo la ecuación (1.1.1d) en esta relación, aplicando la transformada de Laplace, **tabla 1** del Anexo II, y la condición (1.2.7),  $n_{14}(0) = 0$ ,

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{dn_{14}}{dT}\right\} - n_{14}(0) + \lambda_4 \mathfrak{T}\{n_{14}\} = b_{14}\lambda_1 \mathfrak{T}\{n_1\}$$

es decir,

$$(s + \lambda_4)\mathfrak{T}\{n_{14}\} = b_{14}n_0\sigma_1\phi\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda_1}\right)$$

De donde, despejando la transformada y aplicando la transformada inversa a la relación, obtenemos;

$$n_{14}(T) = b_{14}n_0\sigma_1\phi\left[\mathfrak{T}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + \lambda_4)}\right\} - \mathfrak{T}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)}\right\}\right] \quad (1.2.4a)$$

así, por analogía con la ecuación (1.2.1d);

$$\mathfrak{T}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)}\right\} = \frac{e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)} \quad (1.2.4b)$$

por analogía con la ecuación (1.1.1c),

$$\mathfrak{T}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + \lambda_4)}\right\} = \frac{1}{\lambda_4}(1 - e^{-\lambda_4 T}) \quad (1.2.4c)$$

sustituyendo la ecuación (1.2.4c) y (1.2.4b) en (1.2.4a), obtenemos

$$n_{14}(T) = \frac{b_{14}n_0\sigma_1\phi}{\lambda_4}\left(1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_1}\right) \quad (1.2.4d)$$

### 1.3.5).- Solución a la ecuación ( 1.2.5 ).

Esta ecuación describe la formación de los núclidos radiactivos  $n_4(T)$  en el tiempo  $T$  de irradiación a partir del decaimiento del número de átomos producto radiactivos  $n_2(T)$  presentes en el tiempo  $T$  y de su propio decaimiento de  $n_4(T)$ , es decir,

$$\frac{dn_{24}}{dT} = b_{24}\lambda_2 n_2 - \lambda_4 n_{24}$$

Sustituyendo la ecuación (1.1.2g) en esta relación, aplicando la transformada de Laplace, **tabla 1** del Anexo II y la condición (1.2.7)  $n_{24}(0) = 0$ , se tiene;

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{dn_{24}}{dT}\right\} - n_{24}(0) + \lambda_4 \mathfrak{L}\{n_{24}\} = b_{24} \lambda_2 \mathfrak{L}\{n_2\}$$

es decir,

$$(s + \lambda_4) \mathfrak{L}\{n_{24}\} = b_{24} n_0 \sigma_2 \phi \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda_2} \right) - b_{24} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) \left( \frac{1}{s} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(s + \lambda_1)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(s + \lambda_2)} \right)$$

despejando la transformada de  $n_{24}$  y aplicando la transformada inversa.

$$\begin{aligned} n_{24}(T) &= b_{24} n_0 \sigma_2 \phi \left( \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_4)} \right\} - \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \right) \\ &\quad - b_{24} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) \left[ \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5a)$$

por analogía con la ecuación (1.2.1d),

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} = \frac{e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_2)} \quad (1.2.5b)$$

sustituyendo la ecuación (1.2.4c), (1.2.4b) y (1.2.5b) en (1.2.5a), obtenemos

$$\begin{aligned} n_{24}(T) &= \frac{b_{24} n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} \right) \\ &\quad - \frac{b_{24} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1)}{\lambda_4} \left[ 1 - \frac{\lambda_2 \lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_1 \lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5c)$$

### 1.3.6).- Solución a la ecuación ( 1.2.6 ).

Esta ecuación describe la formación del núcleo radiactivo  $n_4(T)$  en el tiempo  $T$  de irradiación a partir del decaimiento de los núcleos radiactivos  $n_3(T)$  presentes en el tiempo  $T$  y de su propio decaimiento de  $n_4(T)$ , es decir;

$$\frac{dn_{34}}{dT} = \lambda_3 n_3 - \lambda_4 n_{34}$$

o equivalentemente,

$$\frac{dn_{34}}{dT} + \lambda_4 n_{34} = \lambda_3 n_3$$

sustituyendo la ecuación (1.2.1e) en esta ecuación, aplicando la transformada de Laplace, **tabla 1** del Anexo II, y la condición (1.2.7),  $n_{34}(0) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} (s + \lambda_4) \mathfrak{T}\{n_{34}\} = & b_{23} n_0 \sigma_2 \phi \left( \frac{1}{s} - \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_2)} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_3)} \right) \\ & - b_{23} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) \left[ \frac{1}{s} - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(s + \lambda_1)} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_3)} \right] \end{aligned}$$

despejando la transformada de  $n_{34}$  y aplicando la transformada inversa,

$$\begin{aligned} n_{34}(T) = & b_{23} n_0 \sigma_2 \phi \left( \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_4)} \right\} - \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)} \right\} \right) \\ & - b_{23} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) \left[ \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\ & - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)} \right\} \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \\ & \left. - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{T}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.2.6a)$$

por analogía con la ecuación (1.2.1d),

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\lambda_3)(s+\lambda_4)}\right\} = \frac{e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_4-\lambda_3)} - \frac{e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4-\lambda_3)} \quad (1.2.6b)$$

sustituyendo la ecuación (1.2.4c), (1.2.4b), (1.2.5b) y (1.2.6b) en (1.2.6a), obtenemos

$$\begin{aligned} n_{34}(T) = & \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_3\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)} + \frac{\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \right. \\ & \left. - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \right) \\ & - \frac{b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_4} \left[ 1 - \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)} \right. \\ & + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \\ & \left. + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)} \right] \quad (1.2.6c) \end{aligned}$$

### Por lo tanto:

La variación de núclidos radiactivos en el tiempo T de irradiación queda expresado por las ecuaciones (1.1.1d), (1.1.2g), (1.2.1e) y la suma de (1.2.4d) con (1.2.5c) y (1.2.6c).

Es decir;

$$n_1(T) = \frac{n_0\sigma_1\phi}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 T})$$

$$\begin{aligned} n_2(T) = & \frac{n_0\sigma_2\phi}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 T}) \\ & - \frac{k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_2} \left[ 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3(T) = & \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_3} \left( 1 - \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_3-\lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{\lambda_3-\lambda_2} \right) \\ & - \frac{b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_3} \left[ 1 - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} + \right. \\ & \left. \frac{\lambda_1\lambda_3 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2(T) = & \frac{b_{14}n_0\sigma_1\phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} \right) + \\
& \frac{b_{24}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} \right) - \frac{b_{24}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_4} \left[ 1 - \frac{\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_1\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right] + \\
& \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_3\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) \\
& - \frac{b_{23}k_1(\sigma_2\phi - b_{12}\lambda_1)}{\lambda_4} \left[ 1 - \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right. \\
& + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_4 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \\
& \left. + \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right]
\end{aligned}$$



## CAPÍTULO 2

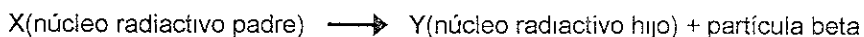
### ECUACIONES DE BALANCE Y SU SOLUCIÓN DESPUES DE LA ACTIVACIÓN

El decaimiento radiactivo es una transformación nuclear espontánea que no es afectada por presión, temperatura, forma química, etc. Esta insensibilidad a condiciones extranucleares nos permite caracterizar núcleos radiactivos por su período de decaimiento, modo y energía de decaimiento sin considerar sus condiciones físicas ni químicas. En este capítulo se analiza, se establecen las ecuaciones y sus soluciones para describir el comportamiento en el tiempo de este fenómeno

#### 2.1).- Ecuaciones por decaimiento radiactivo.

El proceso de degradación por el cual los núcleos emiten partículas o radiación gamma, perdiendo masa o energía, y convirtiéndose en algún otro elemento en el primer caso o el mismo elemento en otro estado de energía en el segundo, es conocido como decaimiento radiactivo. Este es un proceso espontáneo y al azar, independiente de factores externos.

El proceso general para una transición isobárica puede ser escrito simbólicamente como:



En el decaimiento radiactivo, así como en otras reacciones nucleares, un número de leyes de conservación deben de cumplirse, tales leyes ponen limitaciones en los eventos que pueden ocurrir, siendo estas <sup>(5)</sup>

- La energía total del sistema debe ser constante
- El momento lineal debe ser conservado en el sistema
- La carga total (número atómico) del sistema debe ser constante
- El número de masa en el sistema debe ser constante

El decaimiento radiactivo es un proceso aleatorio, es decir, de una cierta cantidad de átomos radiactivos no es posible identificar que átomos específicos serán los próximos a decaer.

La ecuación de balance que describe el número de átomos radiactivos en el tiempo, viene expresada como:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Rapidez de cambio} \\ \text{del \# de átomos} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Rapidez de producción} \\ \text{de átomos} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{Decaimiento radiactivo} \\ \text{de los átomos} \end{array} \right]$$

Aplicando esta relación para el decaimiento radiactivo, después de la irradiación, a lo indicado en el **esquema 2** del Anexo I, obtenemos que las ecuaciones serán

análogas a las indicadas en el **capítulo 1**. excepto que no hay término de activación ( $\sigma = 0$ ), es decir

$$\frac{dn_1}{dt} = -(b_{12} + b_{14})\lambda_1 n_1 \quad (2.1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = b_{12}\lambda_1 n_1 - (b_{23} + b_{24})\lambda_2 n_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = b_{23}\lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3 \quad (2.3)$$

$$\frac{dn_4}{dt} = b_{14}\lambda_1 n_1 + b_{24}\lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 - \lambda_4 n_4 \quad (2.4)$$

con las condiciones iniciales  $n_i(0) = n_i(T)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (2.5)

donde  $n_i(T)$ , según el caso, es la evaluación de la solución de la ecuación en el **capítulo 1**, en el tiempo T de irradiación

## 2.2).- Solución al sistema de ecuaciones.

De la misma forma en que fueron resueltas las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes obtenidas en el capítulo 1, las ecuaciones (2.1) a (2.4), con las condiciones iniciales indicadas en la (2.5), serán resueltas aplicando Transformada de Laplace <sup>(2)</sup>

### 2.2.1).- Solución a la ecuación ( 2.1 ).

De acuerdo a lo indicado en el **esquema 2** del Anexo I, la ecuación (2.1) describe el comportamiento en el tiempo t de decaimiento, después del tiempo T de irradiación, de la población del producto radiactivo  $n_1(t)$ , es decir;

$$\frac{dn_1}{dt} = -(b_{12} + b_{14})\lambda_1 n_1$$

aplicando la transformada de Laplace a esta relación, la condición inicial indicada en la ecuación (2.5),  $n_1(0) = n_1(T)$ , y puesto que la suma de los porcentajes de las formas en que decae el producto radiactivo  $n_1(t)$  es la unidad,  $b_{12} + b_{14} = 1$ , se obtiene,

$$s\mathfrak{S}\{n_1\} - n_1(T) = -\lambda_1 \mathfrak{S}\{n_1\}$$

de donde,

$$(s - \lambda_1)\mathfrak{S}\{n_1\} = n_1(T)$$

así,

$$\mathfrak{S}\{n_1\} = \frac{n_1(T)}{(s + \lambda_1)}$$

aplicando la transformada inversa a esta relación;

$$n_1(t) = n_1(T) \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)} \right\} \quad (2.1a)$$

de la **tabla 1**, Anexo II.

$$\mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)} \right\} = e^{-\lambda_1 t} \quad (2.1b)$$

finalmente, sustituyendo (2.1b) en (2.1a), se obtiene,

$$n_1(t) = n_1(T) e^{-\lambda_1 t} \quad (2.1c)$$

o equivalentemente, sustituyendo la ecuación (1.1d) en la (2.1c),

$$n_1(t) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t} \quad (2.1d)$$

En donde, esta expresión describe el comportamiento en el tiempo durante el decaimiento radiactivo de la población de núcleos radiactivos  $n_1(t)$ , en función del tiempo de decaimiento e irradiación

### 2.2.2).- Solución a la ecuación ( 2.2 ).

Esta ecuación (2.2), describe el comportamiento en el tiempo  $t$  de decaimiento, después del tiempo  $T$  de irradiación, de la población del producto radiactivo  $n_2(t)$  como el balance con el decaimiento del producto radiactivo  $n_1(t)$  y el propio decaimiento del producto radiactivo  $n_2(t)$ , es decir;

$$\frac{dn_2}{dt} = b_{12} \lambda_1 n_1 - (b_{23} + b_{24}) \lambda_2 n_2$$

en donde, poniendo términos que contengan a  $n_2(t)$  en el primer miembro de la ecuación y dado que  $b_{23} + b_{24} = 1$ , se tiene

$$\frac{dn_2}{dt} + \lambda_2 n_2 = b_{12} \lambda_1 n_1$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, tenemos

$$\mathfrak{F} \left\{ \frac{dn_2}{dt} \right\} + \mathfrak{F} \{ \lambda_2 n_2 \} = \mathfrak{F} \{ b_{12} \lambda_1 n_1 \}$$

de las propiedades de la transformada indicadas en la **tabla 1** del Anexo II, aplicando la condición (2.5),  $n_2(0) = n_2(T)$ , y sustituyendo la ecuación (2.1c),

$$s \mathfrak{F} \{ n_2 \} - n_2(T) + \lambda_2 \mathfrak{F} \{ n_2 \} = b_{12} \lambda_1 \mathfrak{F} \{ n_1(T) e^{-\lambda_1 t} \}$$

$$s N_2(s) + \lambda_2 N_2(s) = b_{12} \lambda_1 n_1(T) \mathfrak{F} \{ e^{-\lambda_1 t} \} + n_2(T)$$

así.

$$(s + \lambda_2)N_2(s) = b_{12}\lambda_1 n_1(T)\mathfrak{F}\{e^{-\lambda_1 t}\} + n_2(T)$$

de donde,

$$N_2(s) = \frac{b_{12}\lambda_1 n_1(T)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} + \frac{n_2(T)}{(s + \lambda_2)}$$

aplicando la transformada inversa a esta última ecuación, se obtiene

$$\mathfrak{F}^{-1}\{N_2(s)\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{b_{12}\lambda_1 n_1(T)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} + \frac{n_2(T)}{(s + \lambda_2)}\right\}$$

de las propiedades de la transformada inversa,

$$n_2(t) = b_{12}\lambda_1 n_1(T)\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}\right\} + n_2(T)\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_2)}\right\} \quad (2.2a)$$

por analogía con (1.2.1d) y (2.1b) para resolver las transformadas inversas indicadas en (2.2a), obtenemos

$$n_2(t) = b_{12}\lambda_1 n_1(T)\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) + n_2(T)e^{-\lambda_2 t} \quad (2.2b)$$

### 2.2.3).- Solución a la ecuación ( 2.3 ).

En esta ecuación (2.3) se describe el comportamiento en el tiempo t de decaimiento, después del tiempo T de irradiación, de la población de núclidos radiactivos  $n_3(t)$  como el balance con el decaimiento del producto radiactivo  $n_2(t)$  y el propio decaimiento del núclido radiactivo  $n_3(t)$ , es decir,

$$\frac{dn_3}{dt} = b_{23}\lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3$$

de donde,

$$\frac{dn_3}{dt} + \lambda_3 n_3 = b_{23}\lambda_2 n_2$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, tenemos

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{dn_3}{dt}\right\} + \mathfrak{F}\{\lambda_3 n_3\} = \mathfrak{F}\{b_{23}\lambda_2 n_2\}$$

de las propiedades de la transformada indicadas en la **tabla 1** del Anexo II, aplicando la condición (2.5),  $n_3(0) = n_3(T)$ , y sustituyendo la ecuación (2.2b),

$$s\mathfrak{F}\{n_3\} - n_3(T) + \lambda_3 \mathfrak{F}\{n_3\} = b_{23}\lambda_2 \mathfrak{F}\left\{b_{12}\lambda_1 n_1(T)\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) + n_2(T)e^{-\lambda_2 t}\right\}$$

así,

$$(s + \lambda_3)\mathfrak{F}\{n_3\} = b_{23}\lambda_2\mathfrak{F}\left\{b_{12}\lambda_1n_1(T)\left(\frac{e^{-\lambda_1t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) + n_2(T)e^{-\lambda_2t}\right\} + n_3(T)$$

o equivalentemente,

$$(s + \lambda_3)\mathfrak{F}\{n_3\} = \frac{b_{23}\lambda_2b_{12}\lambda_1n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathfrak{F}\{e^{-\lambda_1t} - e^{-\lambda_2t}\} + b_{23}\lambda_2n_2(T)\mathfrak{F}\{e^{-\lambda_2t}\} - n_3(T)$$

de donde,

$$\mathfrak{F}\{n_3\} = \frac{b_{23}\lambda_2b_{12}\lambda_1n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_3)} - \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)}\right) + b_{23}\lambda_2n_2(T)\left(\frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)}\right) + n_3(T)\left(\frac{1}{s + \lambda_3}\right)$$

aplicando la transformada inversa a esta última ecuación, se obtiene

$$n_3(t) = \frac{b_{23}\lambda_2b_{12}\lambda_1n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_3)}\right\} - \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)}\right\}\right) + b_{23}\lambda_2n_2(T)\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)}\right\} + n_3(T)\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda_3}\right\} \quad (2.3a)$$

por analogía con (1.2.1d) y (2.1b), obtenemos:

$$n_3(t) = b_{23}\lambda_2b_{12}\lambda_1n_1(T)\left(\frac{e^{-\lambda_1t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\right) + b_{23}\lambda_2n_2(T)\left(\frac{e^{-\lambda_2t}}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_3t}}{\lambda_3 - \lambda_2}\right) + n_3(T)e^{-\lambda_3t} \quad (2.3b)$$

#### 2.2.4).- Solución a la ecuación ( 2.4 ).

Esta ecuación (2.4), describe el comportamiento en el tiempo t de decaimiento, después del tiempo T de irradiación, de la población de núclidos radiactivos  $n_4(t)$  como el balance con el decaimiento del producto radiactivo  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ , el decaimiento del núclido radiactivo  $n_3(t)$  y el propio decaimiento del núclido radiactivo  $n_4(t)$ , es decir,

$$\frac{dn_4}{dt} = b_{14}\lambda_1n_1 + b_{24}\lambda_2n_2 + \lambda_3n_3 - \lambda_4n_4$$

de donde

$$\frac{dn_4}{dt} + \lambda_4 n_4 = b_{14} \lambda_1 n_1 + b_{24} \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, tenemos

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{dn_4}{dt}\right\} + \mathfrak{S}\{\lambda_4 n_4\} = \mathfrak{S}\{b_{14} \lambda_1 n_1 + b_{24} \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3\}$$

de las propiedades de la transformada indicadas en la tabla 1 del Anexo II, aplicando la condición (2.5),  $n_4(0) = n_4(T)$ , y sustituyendo la ecuación (2.3b), (2.2b) y (2.1c),

$$\begin{aligned} s\mathfrak{S}\{n_4\} - n_4(T) + \lambda_4 \mathfrak{S}\{n_4\} &= b_{14} \lambda_1 n_1(T) \mathfrak{S}\{e^{-\lambda_1 t}\} + b_{24} \lambda_2 \left[ \frac{b_{12} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_1 t}\} \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{S}\{e^{-\lambda_2 t}\}) + n_2(T) \mathfrak{S}\{e^{-\lambda_2 t}\} \right] + \lambda_3 \left[ b_{23} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_1 t}\}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_2 t}\}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_3 t}\}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) + b_{23} \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_2 t}\}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathfrak{S}\{e^{-\lambda_2 t}\}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) + n_3(T) \mathfrak{S}\{e^{-\lambda_3 t}\} \right] \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} (s + \lambda_4) \mathfrak{S}\{n_4\} &= \frac{b_{14} \lambda_1 n_1(T)}{s + \lambda_1} + \frac{b_{24} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{s + \lambda_1} - \frac{1}{s + \lambda_2} \right) \\ &\quad + \frac{b_{24} \lambda_2 n_2(T)}{s + \lambda_2} + \lambda_3 b_{23} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(s + \lambda_1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_2)} + \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(s + \lambda_3)} \right) \\ &\quad + \frac{b_{23} \lambda_3 \lambda_2 n_2(T)}{\lambda_3 - \lambda_2} \left( \frac{1}{s + \lambda_2} - \frac{1}{s + \lambda_3} \right) + \frac{\lambda_3 n_3(T)}{s + \lambda_3} \end{aligned}$$

aplicando la transformada inversa a esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} n_4(t) &= b_{14} \lambda_1 n_1(T) \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)} \right\} + \frac{b_{24} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \right) + b_{24} \lambda_2 n_2(T) \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_3 b_{23} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_4)} \right\} \right. \\
& - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} \\
& + \left. \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)} \right\} \right) \\
& + \frac{b_{23} \lambda_3 \lambda_2 n_2(T)}{\lambda_3 - \lambda_2} \left( \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_2)(s + \lambda_4)} \right\} - \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)} \right\} \right) \\
& + \lambda_3 n_3(T) \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)} \right\} + n_4(T) \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_4)} \right\} \quad (2.4a)
\end{aligned}$$

por analogía con (1.2.1d) y (2.1b) para resolver las transformadas inversas indicadas en (2.4a), obtenemos:

$$\begin{aligned}
n_4(t) = & \frac{b_{14} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + b_{24} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right. \\
& - \left. \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{b_{24} \lambda_3 n_2(T)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) \\
& + \lambda_3 b_{23} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right. \\
& - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \\
& - \left. \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) + b_{23} \lambda_3 \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right. \\
& - \left. \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) \\
& + \frac{\lambda_3 n_3(T)}{(\lambda_4 - \lambda_3)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + n_4(T) e^{-\lambda_4 t} \quad (2.4b)
\end{aligned}$$

### **Por lo tanto:**

La variación de núclidos radiactivos en el tiempo  $t$  de enfriamiento (decaimiento), después del tiempo  $T$  de irradiación (activación) queda expresado por las ecuaciones (2.1c), (2.2b), (2.3b) y (2.4b)

Es decir;

$$n_1(t) = n_1(T)e^{-\lambda_1 t}$$

$$n_2(t) = b_{12}\lambda_2 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_2} \right) + n_2(T)e^{-\lambda_2 t}$$

$$n_3(t) = b_{23}\lambda_2 b_{12}\lambda_2 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) + b_{23}\lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) \\ + n_3(T)e^{-\lambda_3 t}$$

$$n_4(t) = \frac{b_{14}\lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + b_{24}\lambda_2 b_{12}\lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{b_{24}\lambda_2 n_2(T)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) \\ + \lambda_3 b_{23}\lambda_2 b_{12}\lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)((\lambda_4 - \lambda_1))} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) + b_{23}\lambda_3 \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) \\ + \frac{\lambda_3 n_3(T)}{(\lambda_4 - \lambda_3)} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_4 t}) + n_4(T)e^{-\lambda_4 t}$$



## CAPÍTULO 3

### ANÁLISIS

#### 3.1 Actividad de saturación <sup>(7)</sup>.

La actividad de saturación de cada uno de los núcleos productos radiactivos obtenidos durante la irradiación, es la actividad máxima que puede alcanzar y esta es determinada por el tiempo en el que se llega a un equilibrio entre la formación y desintegración de átomos radiactivos, dependiendo pues del período de semidesintegración del radioisótopo producido en la activación

La población de átomos activados en el tiempo T de irradiación, para el caso que nos ocupa, queda establecido por las ecuaciones (1.1.1d) y (1.1.2g) del **capítulo 1**,

$$n_1(T) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) \quad (1.1.1d)$$

$$n_2(T) = \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) - \frac{k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1)}{\lambda_2} \left[ 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] \quad (1.1.2g)$$

siendo los núcleos productos radiactivos obtenidos en la irradiación, con sus respectivos decaimientos  $n_3(T)$  y  $n_4(T)$ , según corresponda, cuando no existe reactivación en el sistema.

La expresión  $(1 - e^{-\lambda T})$  es llamada el **factor de saturación**. Su comportamiento en por ciento de la actividad de saturación como función del tiempo de irradiación expresado en múltiplos de tiempo del período de semidesintegración, se establece de la siguiente forma:

Aplicando la condición  $T \rightarrow \infty$  (tiempo de irradiación infinitamente grande) a la ecuación (1.1.1d), para obtener la actividad de saturación de  $n_1(T)$ , y puesto que la actividad (A) viene dada por  $A = \lambda n$ , se obtiene;

$$A_{s1} = A_1(\infty) = \lambda_1 n_1(\infty) = n_0 \sigma_1 \phi \quad (3.1.1)$$

ya que  $e^{-\lambda_1(\infty)} \rightarrow 0$

Como los tiempo de irradiación infinitos ( $T \rightarrow \infty$ ) no son posibles, se determina el tiempo (T) de irradiación para obtener un porcentaje (Z%) deseado de la actividad de saturación ( $A_{s1}$ ), es decir  $Z * A_{s1} / 100$  ( ó  $Z * n_0 \sigma_1 \phi / 100$  ). Por lo tanto, de la ecuación (1.1.1d) se tiene

$$A_1(T) = \lambda_1 n_1(T) = n_0 \sigma_1 \phi (1 - e^{-\lambda_1 T}) \quad (3.1.2)$$

así,

$$A_1(T) = \frac{Z n_0 \sigma_1 \phi}{100} = n_0 \sigma_1 \phi (1 - e^{-\lambda_1 T})$$

por lo que  $\frac{Z}{100} = 1 - e^{-\lambda T}$ , o equivalentemente  $T = \frac{\ln(1 - Z/100)}{-\lambda_1}$  (3.1.3)

donde  $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$ .

Evaluando la ecuación (3.1.3) con tiempos de irradiación en valores múltiplos enteros de la vida media ( $T_{1/2}$ ) se obtienen los porcentajes de la actividad de saturación, los cuales se indican en la **tabla 2** del Anexo II.

### 3.2 Comparación de la actividad de saturación de los productos radiactivos obtenidos en la irradiación ( $A_{s1}$ vs $A_{s2}$ ).

De la ecuación (1.1.2g), se tiene para un tiempo T de irradiación:

$$A_2(T) = \lambda_2 n_2(T) = n_0 \sigma_2 \phi (1 - e^{-\lambda_2 T}) - k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) \left[ 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] \quad (3.2.1)$$

Aplicando la condición  $T \rightarrow \infty$  a la ecuación (3.2.1), se tiene que la actividad de saturación de  $A_2(T)$  es;

$$A_{s2} = A_2(\infty) = \lambda_2 n_2(\infty) = n_0 \sigma_2 \phi - k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) = n_0 \sigma_2 \phi - \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1) = n_0 \sigma_1 \phi \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 \phi}{\lambda_1} + b_{12} \right) \quad (3.2.2)$$

sustituyendo (3.1.1) en (3.2.2),

$$A_{s2} = A_{s1} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 \phi}{\lambda_1} + b_{12} \right) \quad (3.2.3)$$

interpretando esta relación, se tiene que

$$A_{s2} \text{ es mayor que } A_{s1}, \text{ si } \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 \phi}{\lambda_1} + b_{12} \right) > 1 \quad (3.2.3a)$$

$$A_{s2} \text{ es menor que } A_{s1}, \text{ si } \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2 \phi}{\lambda_1} + b_{12} \right) < 1 \quad (3.2.3b)$$

### 3.3 Comparación con la ecuaciones de Bateman<sup>(5)</sup>.

La solución general para el caso de decaimientos sucesivos de la forma,  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \dots$ , es usualmente referido como las ecuaciones de Bateman:

$$N_n(t) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} N_1^0 \sum_1^n C_i e^{-\lambda_i t} \quad (3.3.1)$$

donde  $N_n(t)$  es el número de átomos de la especie n al tiempo t de decaimiento,  $N_1^0$ , es el número de átomos de  $X_1$  al tiempo t = 0, y

$$C_i = \prod_{j=1}^{j=i} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \quad \text{para } i \neq j \quad (3.3.1a)$$

Para  $i = 1$ , se obtiene el caso del decaimiento radiactivo simple.

Considerando el caso en que  $N_i^0 = 0$  para  $i > 1$ . Por ejemplo, si  $i = 3$  entonces  $N_2^0 = N_3^0 = 0$  y de la ecuaciones (3.3.1) se obtiene

$$N_3(t) = \lambda_1 \lambda_2 N_1^0 (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + C_3 e^{-\lambda_3 t}) \quad (3.3.2)$$

donde,

$$C_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1} \quad (3.3.2a)$$

$$C_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (\lambda_3 - \lambda_2)^{-1} \quad (3.3.2b)$$

$$C_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)^{-1} (\lambda_2 - \lambda_3)^{-1} \quad (3.3.2c)$$

Para nuestro caso, de la ecuación (2.4b) con  $\sigma_1 = 0$ ,  $b_{12} = b_{14} = b_{24} = 0$ , y  $b_{23} = 1$ , se tiene.

$$n_4(t) = \lambda_3 \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) \quad (3.3.3)$$

Considerando;  $n_2(t) = N_1(t)$ ,  $n_3(t) = N_2(t)$ ,  $n_4(t) = N_3(t)$ ,  $N_i(T) = N_i^0$ , y cambiando las constantes de desintegración indicadas en la ecuación (3.3.3) en la forma,  $\lambda_2 = \lambda_1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_2$ ,  $\lambda_4 = \lambda_3$ , se tiene:

$$N_3(t) = \lambda_2 \lambda_1 N_1^0 \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) \quad (3.3.3a)$$

el cual corresponde a la ecuación (3.3.2).

### 3.4 Estudio de casos particulares.

#### 3.4.1 Primer caso

Del **esquema 2 Anexo 1**, resolvamos el caso cuando  $n_3(t) = 0$ , el cual está indicado en el **esquema 3** del Anexo 1, para encontrar la actividad en el tiempo de decaimiento de los núcleos radiactivos producto de la irradiación, su

relación con los productos de decaimiento en el enfriamiento y el tiempo en el cual alcanzan una actividad igual.

Para este caso, las ecuaciones que describen el comportamiento de la población de núcleos en el tiempo T de irradiación son la (1.1.1d), (1.1.2g) y la suma de (1.2.4d), (1.2.5c) con (1.2.6c), es decir;

$$n_1(T) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) \quad (1.1.1d)$$

$$n_2(T) = \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) - \frac{k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1)}{\lambda_2} \left[ 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] \quad (1.1.2g)$$

$$n_4(T) = \frac{b_{14} n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} \right) + \frac{b_{24} n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} \right) - \frac{b_{24} k_1 (\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1)}{\lambda_4} \left[ 1 - \frac{\lambda_2 \lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1 \lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right] \quad (3.4.1)$$

En tanto que las ecuaciones que describen el comportamiento de la población de núcleos en el tiempo t de decaimiento (enfriamiento) son la (2.1c), (2.2b), y (2.4b), es decir;

$$n_1(t) = n_1(T) e^{-\lambda_1 t} \quad (2.1c)$$

$$n_2(t) = b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + n_2(T) e^{-\lambda_2 t} \quad (2.2b)$$

$$n_4(t) = \frac{b_{14} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + b_{24} \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{b_{24} \lambda_2 n_2(T)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) + n_4(T) e^{-\lambda_4 t} \quad (3.4.2)$$

**a. Actividad en el tiempo de decaimiento de los núcleos radiactivos producto de la irradiación <sup>(6)</sup>.**

Puesto que en el caso en estudio solo se considera a los núcleos productos radiactivos  $z^{A+1m}X$  y  $z^{A+1}X$ , ver **esquema 3** del Anexo I, para encontrar su actividad en el tiempo de decaimiento se establecen las ecuaciones (2.1c) con (1.1.1d) y (2.2b) con (1.1.2g) y (1.1.1d), es decir:

**a.1.-** Sustituyendo (1.1.1d) en (2.1c), se obtiene el primer producto,

$$n_1(t) = n_1(T)e^{-\lambda_1 t} = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t}$$

así,

$$A_1(t) = \lambda_1 n_1(t) = n_0 \sigma_1 \phi (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t}$$

en donde,

$A_1(t)$  = actividad al tiempo t de decaimiento del primer producto radiactivo.

T = tiempo de irradiación

t = tiempo de decaimiento (enfriamiento).

**a.2.-** Sustituyendo (1.1.2g) y (1.1.1d) en (2.2b), se obtiene el segundo producto;

$$n_2(t) = b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + n_2(T) e^{-\lambda_2 t}$$

$$n_2(t) = b_{12} \lambda_1 \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} \\ - \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} \left( \frac{\sigma_2 \phi - b_{12} \lambda_1}{\lambda_2} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t}$$

es decir,

$$n_2(t) = \frac{b_{12} n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t} - \frac{b_{12} n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} + \\ \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} + \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} \left( \frac{b_{12} \lambda_1}{\lambda_2} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t}$$

reduciendo esta expresión,

$$n_2(t) = \frac{n_0 \phi}{\lambda_2} \left\{ \sigma_2 (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} + \frac{b_{12} \sigma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t} - \right. \right. \\ \left. \left. \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} \right] \right\}$$

así,

$$A_2(t) = n_0 \phi \left\{ \sigma_2 (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} + \frac{b_{12} \sigma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} \right] \right\}$$

en donde,

$A_2(t)$  = actividad al tiempo  $t$  de decaimiento del segundo producto radiactivo.

$T$  = tiempo de irradiación.

$t$  = tiempo de decaimiento (enfriamiento).

a.3.- Sustituyendo (1.1.1d), (1.1.2g) y (3.4.1) en (3.4.2), se obtiene la actividad del producto de decaimiento  $z_1^{A+1} Y$ .

$$A_4(t) = n_0 \phi \left\{ \left( b_{14} + \frac{b_{12} \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left[ \frac{\sigma_1 \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\sigma_1 \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_4 T}) e^{-\lambda_4 t} \right] + \left( \sigma_2 - \frac{b_{12} \sigma_1 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left[ \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_4 T}) e^{-\lambda_4 t} \right] \right\}$$

## b. Relación del producto radiactivo en la irradiación con el producto de decaimiento en el enfriamiento.

Para esto, las ecuaciones (1.1.1d), (1.1.2g) y (3.4.1) establecen la población de núcleos radiactivos al tiempo  $T$  de irradiación para  $n_1(T)$ ,  $n_2(T)$  y  $n_4(T)$ .

En tanto que la población de núcleos radiactivos en el tiempo  $t$  de enfriamiento de  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$  y  $n_4(t)$  es descrito por las ecuaciones (2.1c) (2.2b) y (3.4.2)

Para establecer la relación de las actividades del producto de decaimiento con el producto radiactivo al tiempo  $t$  de enfriamiento, se tiene de la ecuación (2.4b) con las condiciones  $b_{24} = 1$  y  $b_{23} = 0$ , para el caso en estudio,

$$\lambda_4 n_4(t) = \frac{\lambda_4 b_{14} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + \lambda_4 b_{12} \lambda_2 \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(T)}{\lambda_4 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) + \lambda_4 n_4(T) e^{-\lambda_4 t} \quad (3.4.3)$$

de donde,

$$\lambda_4 n_4(t) = \frac{\lambda_4 b_{14} \lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_4 - \lambda_1} \left( 1 - e^{-(\lambda_4 - \lambda_1)t} \right) + \lambda_4 b_{12} \lambda_2 \lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t} \left( \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} - \frac{e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{e^{-(\lambda_4 - \lambda_1)t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(T) e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_4 - \lambda_2} \left( 1 - e^{-(\lambda_4 - \lambda_2)t} \right) + \lambda_4 n_4(T) e^{-\lambda_4 t}$$

aplicando tiempos mucho mayores al tiempo en que la actividad del producto radiactivo es igual al del producto de decaimiento, se tiene de la relación anterior.

$$\lambda_4 n_4(t) = \frac{\lambda_4 b_{14} \lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_4 b_{12} \lambda_2 \lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(T) e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_4 - \lambda_2}$$

es decir,

$$\lambda_4 n_4(t) = \frac{\lambda_4 b_{14} \lambda_1 n_1(t)}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_4 b_{12} \lambda_2 \lambda_1 n_1(t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(t)}{\lambda_4 - \lambda_2}$$

por lo que la relación de actividades es:

$$\lambda_4 n_4(t) = \left( b_{14} + \frac{b_{12} \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \frac{\lambda_4 \lambda_1 n_1(t)}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(t)}{\lambda_4 - \lambda_2} \quad (3.4.4)$$

**c. Tiempo t de enfriamiento en el que la actividad del producto radiactivo es igual a la del producto de decaimiento.**

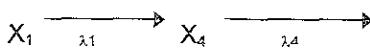
Para que las actividades sean iguales durante el decaimiento, se deberá de cumplir al tiempo t;

$$\lambda_1 n_1(t) + \lambda_2 n_2(t) = \lambda_4 n_4(t) \quad (3.4.5)$$

Sustituyendo la ecuaciones (2.1c), (2.2b) y (3.4.3) en la (3.4.5), se obtiene.

$$\lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 b_{12} \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + \lambda_2 n_2(T) e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_4 b_{14} \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} \left( e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t} \right) + \lambda_4 b_{12} \lambda_2 \lambda_1 n_1(T) \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right) + \frac{\lambda_4 \lambda_2 n_2(T)}{\lambda_4 - \lambda_2} \left( e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t} \right) + \lambda_4 n_4(T) e^{-\lambda_4 t} \quad (3.4.6)$$

En particular, para el caso de decaimientos radiactivos sucesivos de la forma,



la ecuación (3.4.6), con  $\lambda_2 = b_{12} = 0$  y  $b_{14} = 1$ , se transforma en,

$$\lambda_1 n_1(T) e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_4 \lambda_1 n_1(T)}{\lambda_4 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_4 t}) + \lambda_4 n_4(T) e^{-\lambda_4 t}$$

de donde, ordenando términos semejantes en cada miembro y despejando  $t$ , obtenemos que el tiempo que transcurre durante el enfriamiento para que la actividad del producto radiactivo sea igual a la del producto de decaimiento, es;

$$t = \frac{\ln \left( \frac{\lambda_4 (\lambda_1 n_1(T) - (\lambda_4 - \lambda_1) n_4(T))}{\lambda_1 \lambda_4 n_1(T)} \right)}{\lambda_4 - \lambda_1} \quad (3.4.7)$$

con;

$$n_1(T) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T})$$

$$n_4(T) = \frac{n_0 \sigma_1 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_1} \right)$$

### 3.4.2 Segundo caso.

Del **esquema 2** Anexo 1, resolvamos el caso cuando  $n_1(t) = 0$ , el cual está indicado en el **esquema 4** del Anexo 1, para encontrar la actividad en el tiempo de decaimiento del núcleo radiactivo producto de la irradiación, su relación con los productos de decaimiento en el enfriamiento y el tiempo en el cual alcanzan una actividad igual.

Para este caso, las ecuaciones que describen el comportamiento de la población de núcleos en el tiempo  $T$  de irradiación son la (1.1.2g), (1.2.1e), la suma de (1.2.5a) con (1.2.6a), con  $\sigma_1 = 0$ , son;

$$n_2(T) = \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) \quad (1.1.2g)$$

$$n_3(T) = \frac{b_{23} n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_3} \left( 1 - \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_3 T}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) \quad (1.2.1e)$$

$$n_4(T) = \frac{b_{24} n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_4 e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_4 T}}{\lambda_4 - \lambda_2} \right) + \frac{b_{23} n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_4} \left( 1 - \frac{\lambda_3 \lambda_4 e^{-\lambda_2 T}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \lambda_4 e^{-\lambda_3 T}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right)$$



$$-\frac{\lambda_2 \lambda_3 e^{-\lambda_4 T}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \quad (3.4.8)$$

En tanto que las ecuaciones que describen el comportamiento de la población de núcleos en el tiempo t de el decaimiento (enfriamiento) son la (2.2b), (2.3b) y (2.4b), con  $\lambda_1 = b_{12} = 0$ , son,

$$n_2(t) = n_2(T) e^{-\lambda_2 t} \quad (2.2b)$$

$$n_3(t) = b_{23} \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_3 - \lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) + n_3(T) e^{-\lambda_3 t} \quad (2.3b)$$

$$\begin{aligned} n_4(t) = & \frac{b_{24} \lambda_2 n_2(T)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) \\ & + b_{23} \lambda_3 \lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right. \\ & \left. - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) \\ & + \frac{\lambda_3 n_3(T)}{(\lambda_4 - \lambda_3)} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_4 t}) + n_4(T) e^{-\lambda_4 t} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

### a. Actividad en el tiempo de decaimiento del núcleo radiactivo producto de la irradiación <sup>(6)</sup>.

Para el caso en estudio solo se considera al núcleo producto radiactivo  ${}_{z-1}^{A+1m}Y$ , ver **esquema 4** del Anexo I, para encontrar su actividad en el tiempo se tiene

a.1.- Sustituyendo (1.1.2g) en (2.2b), se obtiene el producto radiactivo,

$$n_2(t) = n_2(T) e^{-\lambda_2 t} = \frac{n_0 \sigma_2 \phi}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t}$$

así,

$$A_2(t) = \lambda_2 n_2(t) = n_0 \sigma_2 \phi (1 - e^{-\lambda_2 T}) e^{-\lambda_2 t}$$

en donde,

$A_2(t)$  = actividad al tiempo t de decaimiento del producto radiactivo.

T = tiempo de irradiación.

t = tiempo de decaimiento (enfriamiento)

a.2.- La actividad de los núcleos  $n_3$  al tiempo t de enfriamiento, viene dada por sustitución de la ecuación (1.1.2g) y (1.2.1e) en (2.3b), es decir;

$$n_3(t) = \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)} (\lambda_3(1 - e^{-\lambda_2 T})e^{-\lambda_3 t} - \lambda_2(1 - e^{-\lambda_3 T})e^{-\lambda_2 t})$$

por lo que,

$$A_3(t) = \frac{b_{23}n_0\sigma_2\phi}{\lambda_3 - \lambda_2} (\lambda_3(1 - e^{-\lambda_2 T})e^{-\lambda_3 t} - \lambda_2(1 - e^{-\lambda_3 T})e^{-\lambda_2 t})$$

en donde,

$A_3(t)$  = actividad al tiempo  $t$  de decaimiento del producto de decaimiento.

$T$  = tiempo de irradiación

$t$  = tiempo de decaimiento (enfriamiento).

a.3.- La actividad de los núcleos  $n_4$  al tiempo  $t$  de enfriamiento, viene dada por sustitución de la ecuación (1.1.2g), (1.2.1e) y (3.4.8) en (3.4.9), es decir,

$$n_4(t) = \frac{b_{24}\lambda_2 n_2(T)}{(\lambda_4 - \lambda_2)} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_4 t}) + b_{23}\lambda_3\lambda_2 n_2(T) \left( \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) + \frac{\lambda_3 n_3(T)}{(\lambda_4 - \lambda_3)} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_4 t}) + n_4(T)e^{-\lambda_4 t}$$

por lo tanto,

$$A_4(t) = n_0\sigma_2\phi \left\{ \left( b_{24} + \frac{b_{23}\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) \frac{\lambda_4(1 - e^{-\lambda_2 T})e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_4 - \lambda_2} - \frac{b_{23}\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} (1 - e^{-\lambda_3 T})e^{-\lambda_3 t} + \left( -b_{24} + \frac{b_{23}\lambda_3\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_3} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_2} (1 - e^{-\lambda_3 T})e^{-\lambda_4 t} \right\}$$

## CAPÍTULO 4

### APLICACIONES DEL MODELO PROPUESTO

Debido a la demanda que existe en México de desarrollar técnicas de producción de radiofármacos usados en medicina nuclear, la aplicación del modelo propuesto se centrara en la obtención por activación neutrónica de dos radiosótopos de interés especial. I-131 y Tc-99m, ampliamente usados en el diagnóstico clínico.

#### 4.1 Obtención de I-131, a partir de la activación neutrónica de Te-130.

El I-131 es un elemento radiactivo que se obtiene, entre otros procesos, por la activación neutrónica del  $^{130}_{52}\text{Te}$ .

El telurio natural esta compuesto de varios isótopos, siendo el isótopo más abundante el del Te-130 con 34.5%. En la **tabla 3** del Anexo II se muestra la distribución isotópica del telurio natural <sup>(11)</sup>.

En el proceso de activación neutrónica del telurio ( $^{130}_{52}\text{Te}$ ) se obtiene  $^{131m}_{52}\text{Te}$  y  $^{131}_{52}\text{Te}$ , los cuales decaen a  $^{131}_{53}\text{I}$ . El **esquema 3** del Anexo I indica el proceso de obtención y decaimiento, donde <sup>(11)</sup>;

$$n_1(t) = \text{átomos de } ^{131m}_{52}\text{Te al tiempo } t, \quad \lambda_1 = 0.0231 \text{ h}^{-1}, \quad \sigma_1 = 0.02 \text{ bam},$$

$$b_{12} = 0.222, \quad b_{14} = 0.778$$

$$n_2(t) = \text{átomos de } ^{131}_{52}\text{Te al tiempo } t, \quad \lambda_2 = 1.663 \text{ h}^{-1}, \quad \sigma_2 = 0.27 \text{ bam}$$

$$b_{24} = 1.$$

$$n_4(t) = \text{átomos de } ^{131}_{53}\text{I al tiempo } t. \quad \lambda_4 = 0.00361 \text{ h}^{-1}$$

Con lo desarrollado en el primer caso de estudio del Capítulo 3 y aplicándolo al caso del I-131, se tiene.

##### 4.1.1 Durante la irradiación.

En la **tabla 4** del Anexo II se presentan los resultados obtenidos por la aplicación del modelo propuesto y comparativamente con los reportados por Bernard Shleien <sup>(11)</sup> para la producción de I-131, durante la activación neutrónica del Te-130, a tiempos de irradiación de 1/60, 1 y 24 h, así como la actividad de saturación del Te-131m, Te-131 y I-131, a un flujo de neutrones de  $1\text{E}07$  neutrones/seg  $\text{cm}^2$  y un gramo de telurio natural a irradiar. Los valores son expresados en unidades de  $\mu\text{Ci}$

En la **gráfica 1** del Anexo III se muestra el comportamiento en el tiempo de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante la irradiación.

#### 4.1.2 Durante el enfriamiento.

En la **tabla 5** y **tabla 6** del Anexo II se indica el comportamiento de la actividad de los núclidos durante el enfriamiento, con una actividad inicial establecida en tiempos de irradiación de 1 y 24 h

En este caso, el tiempo de enfriamiento (decaimiento) en el cual el I-131 alcanza su máxima actividad es al tiempo:

$$t = 3.6 \text{ h}$$

con una actividad de  $4.18398\text{E-}04 \mu\text{Ci}$  de I-131 .

En la **gráfica 2** del Anexo III se muestra el comportamiento en el tiempo de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante el enfriamiento

#### 4.2 Obtención de Tc-99m, a partir de la activación neutrónica de Mo-98.

El producto de decaimiento  $^{99\text{m}}_{43}\text{Tc}$  tiene un interés especial en las aplicaciones de diagnóstico clínico, por su vida media (6.03 h) y energía del rayo gamma de 140 keV.

Este elemento radiactivo se obtiene, entre otros procesos, por la activación del  $^{98}_{42}\text{Mo}$ .

El molibdeno natural esta compuesto de varios isótopos, siendo el isótopo más abundante el del Mo-98 con 24.13%. En la **tabla 7** del Anexo II se muestra la distribución isotópica del molibdeno natural <sup>(11)</sup>

En el proceso de activación neutrónica del molibdeno ( $^{98}_{42}\text{Mo}$ ) se obtiene  $^{99}_{42}\text{Mo}$  el cual decae a  $^{99\text{m}}_{43}\text{Tc}$  y  $^{99}_{43}\text{Tc}$ . El **esquema 4** del Anexo 1 indica el proceso de obtención y decaimiento, donde:

$$n_2(t) = \text{átomos de } ^{99}_{42}\text{Mo} \text{ al tiempo } t, \quad \lambda_2 = 0.0104 \text{ h}^{-1} \quad \sigma_2 = 0.13 \text{ barn},$$

$$b_{23} = 0.876 \quad b_{24} = 0.124$$

$$n_3(t) = \text{átomos de } ^{99\text{m}}_{43}\text{Tc} \text{ al tiempo } t, \quad \lambda_3 = 0.1149 \text{ h}^{-1}$$

$$n_4(t) = \text{átomos de } ^{99}_{43}\text{Tc} \text{ al tiempo } t \quad \lambda_4 = 3.95\text{E-}10 \text{ h}^{-1}$$

Con lo desarrollado en el segundo caso de estudio del Capítulo 3 y aplicándolo al caso del  $^{99\text{m}}_{43}\text{Tc}$ , se tiene:

##### 4.2.1 Durante la irradiación

En la **tabla 8** del Anexo II se presentan los resultados obtenidos por la aplicación del modelo propuesto en la producción de Tc-99m, por la activación neutrónica del Mo-98, para un tiempo de irradiación de 24 h, así como la actividad de saturación del Tc-99m, Tc-99 y Mo-99, a un flujo de neutrones de

1E07 neutrones/seg cm<sup>2</sup> y un gramo de molibdeno natural a irradiar. Los valores son expresados en unidades de  $\mu\text{Ci}$

En la **gráfica 3** del Anexo III se muestra el comportamiento en el tiempo de los núclidos Mo-99, Tc-99m y Tc-99 durante la irradiación.

#### 4.1.2 Durante el enfriamiento.

En la **tabla 9** del Anexo II se indica el comportamiento de la actividad de los núclidos durante el enfriamiento, con una actividad inicial establecida al tiempo de irradiación de 24 h.

En este caso, el tiempo de enfriamiento (decaimiento) en el cual el Tc-99m alcanza su máxima actividad con las consideraciones indicadas, es al tiempo,

$$t = 8 \text{ h.}$$

**con una actividad de 0.320  $\mu\text{Ci}$ .**

En la **gráfica 4** del Anexo III se muestra el comportamiento en el tiempo de los núclidos Mo-99 y Tc-99m durante el enfriamiento

#### 4.3 Validación del modelo propuesto.

Comparando los resultados para un tiempo de irradiación de 1 hora por la aplicación del modelo propuesto con lo establecido por Bernard Shleien<sup>(11)</sup>, para el caso de obtención de I-131, se tiene:

Aplicación del método	Actividad del Te-131m ( $\mu\text{Ci}$ )	Actividad del Te-131 ( $\mu\text{Ci}$ )	Actividad del I-131 ( $\mu\text{Ci}$ )
Modelo propuesto	1.97494E-04	9.46457E-02	2.16103E-04
Bernard Shleien <sup>(11)</sup>	1.97E-04	9.45E-02	2.14E-04

En donde, se obtiene que la diferencia máxima que se presenta entre ambos métodos es del 0.973%.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

El análisis de los mecanismos de producción de radioisótopos, juega un papel importante en el desarrollo de los métodos de producción, ya que por medio de este se puede proveer las condiciones materiales, humanas y radiológicas, para que el proceso este dentro de los límites de control.

Es por esto, que en el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático para describir el comportamiento de los núcleos activados durante el tiempo de irradiación y enfriamiento, y el de sus productos de decaimiento. Tomando en cuenta en la activación la producción de radioisótopos metaestables y sus isómeros, además de transiciones isobáricas (ver **esquema 1**)

El establecimiento de este modelo es resolviendo las ecuaciones de balance que describen el número de átomos radiactivos en el tiempo, por medio de transformadas de Laplace y la aplicación del método de fracciones parciales

Para validar el modelo propuesto, este se comparo con resultados ya establecidos en la literatura,

a - Actividad de saturación (**sección 3.1**).

Del análisis realizado, se concluye con los valores dados en la **tabla 2** del Anexo II, los cuales concuerdan con los dados en la literatura

b.- Actividad de saturación de los productos radiactivos (**sección 3.2**)

Se determina mediante la **ecuación (3.2.3a) y (3.2.3b)**, que radioisótopo producto de la activación tiene una mayor actividad de saturación.

c - Comparación con las ecuaciones de Bateman (**sección 3.3**)

Se realiza un análisis comparativo con un caso especial de las ecuaciones de Bateman, llegando al mismo resultado para las **ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3a)**.

d - Estudio de casos particulares.

Se plantean la solución a dos casos típicos.

i.- Primer caso.

Se considera el caso cuando  $n_3(t) = 0$ , el cual es indicado en el **esquema 1** o simplificado en el **esquema 3** del Anexo 1

Determinando las expresiones que describen la actividad durante la activación y en el decaimiento radiactivo de cada una de las poblaciones de núcleos implicados, coincidiendo con lo establecido en la literatura revisada.

Además, se establecen las expresiones de la relación de actividades de los productos radiactivos y el producto de decaimiento, el tiempo de enfriamiento en el que la actividad del producto radiactivo es igual al producto de decaimiento.

## ii. Segundo caso

Se considera el caso cuando  $n_1(t) = 0$ , el cual es indicado en el **esquema 1** o simplificado en el **esquema 4** del Anexo 1.

Determinando las expresiones que describen la actividad durante la activación y en el decaimiento radiactivo de cada una de las poblaciones de núcleos implicados, para su análisis del comportamiento en el tiempo.

Además, se determina que la actividad de un radionúclido formado por activación se incrementa como una función del tiempo  $t$  de irradiación, de acuerdo a la **ecuación (1.1.1d)** y **(1.1.2g)**. Como podrá observarse en estas ecuaciones, la rapidez de este incremento depende de la constante de decaimiento ( $\lambda$ ) del radionúclido formado. Similarmente, de las **ecuaciones (2.1d)** y **(2.2b)**, el decremento en actividad como una función del tiempo  $t$  del final de la activación también depende de la constante de decaimiento.

Esto significa que cuando se activa una mezcla de elementos productores de radionúclidos de vidas medias diferentes, la proporción entre las actividades de los diferentes radionúclidos depende del tiempo de irradiación y enfriamiento (decaimiento) que es seleccionado. En base a este principio estos tiempos son seleccionados para maximizar la actividad del radionúclido deseado y minimizar la actividad de los otros radionúclidos. En particular, la actividad del radionúclido que dificulte la diferenciación del elemento deseado deberá ser minimizado.

Finalmente, se hace una aplicación numérica del modelo para la obtención del I-131 a partir de la activación neutrónica del Te-130, llegando al siguiente resultado el tiempo de enfriamiento (decaimiento) en el cual el I-131 alcanza su máxima actividad es de  **$t = 3.6$  h** con una actividad de  **$4.18398E-04$   $\mu$ Ci de I-131**, para el caso en que el tiempo de irradiación de 1 hora.

Por último, al emplear el modelo para el caso de la obtención del Tc-99m a partir de la activación neutrónica del Mo-98, se llegó a resultados tales como el tiempo de enfriamiento en el que el Tc-99m alcanza su actividad máxima es de  **$t = 8$  h** con una actividad de  **$0.320$   $\mu$ Ci de Tc-99m**, para el caso en que el tiempo de irradiación de 24 horas.

Luego entonces se tiene que el modelo propuesto presenta ciertas ventajas con respecto a los modelos citados en la literatura revisada, siendo éstas su empleo hace entendible el fenómeno de la producción y la optimización de radioisótopos, la alternativa de obtener estados metaestables y sus isómeros al mismo tiempo en la activación, la descripción en el tiempo de enfriamiento de los núclidos en cualquier caso. Por lo que, el uso del modelo podrá representar en un futuro no muy lejano una mayor eficiencia en la producción de una gran variedad de elementos radiactivos ya empleados en la medicina, industria, agricultura, hidrología, investigación, etc.

## GLOSARIO

### **Decaimiento beta.**

Decaimiento  $\beta^-$ :

Se produce cuando en el núcleo, un neutrón se convierte en un protón y en un electrón, el cual es emitido fuera del núcleo

Decaimiento  $\beta^+$ :

Se produce cuando en el núcleo, un protón se convierte en un neutrón y en un positrón, el cual es emitido fuera del núcleo.

En ambos casos (  $\beta^-$  y  $\beta^+$  ), el núclido obtenido tiene el mismo número de masa pero diferente número atómico.

### **Decaimiento gamma.**

Es la emisión de energía del núcleo en forma de radiación electromagnética, debido a una energía residual ( llamado estado excitado ) del núcleo. En general, la emisión de este tipo de radiación sigue a la emisión de partículas en un tiempo menor a  $10^{-9}$  s

### **Equilibrio secular.**

Es una condición de estado estable en el que la rapidez de decaimiento del hijo es igual a la rapidez de decaimiento del padre, pero la cantidad de átomos radiactivos del padre es muchísimo mayor que la del hijo. Este equilibrio se presenta cuando  $\lambda_p \ll \lambda_h$  ( o equivalentemente  $T_{1/2h} \ll T_{1/2p}$  ).

También es conocido como equilibrio radioactivo.

### **Equilibrio transitorio.**

Condición en el cual la actividad del hijo disminuye a la misma rapidez que la del padre, es decir, la razón de actividad hijo/padre es constante. Este equilibrio se presenta cuando  $\lambda_p < \lambda_h$  ( o equivalentemente  $T_{1/2h} < T_{1/2p}$  ).

### **Flujo de neutrones térmicos.**

Neutrones lentos ( $< 0.025$  eV ) que se dirigen a la muestra a irradiar procedentes de todas direcciones.

### **Isómero.**

Núclidos que tienen el mismo número atómico y número de masa

### **Núclido.**

Cualquier especie nuclear específica.

### **Período de semidesintegración.**

Tiempo necesario para que el número inicial de núcleos radiactivos se reduzca a la mitad



**Sección eficaz.**

También conocida como sección transversal, es la probabilidad de que una partícula incidente reaccione con un núcleo y depende del tipo de núcleo, del tipo de partícula, de su energía y de la reacción nuclear considerada.

**Sección eficaz de activación.**

Suma de las secciones eficaces de todas las reacciones nucleares que conducen a la formación de un núclido radiactivo. A veces corresponde a una reacción nuclear de activación específica, que conduce a un producto radiactivo dado.

**Reacción nuclear.**

Cambios o transformaciones inducidas en los núcleos por la interacción de partículas nucleares de todo tipo (neutrones, protones, deuterones, partículas alfa, fotones, núcleos pesados, etc.) conducentes a la producción de nuevos núclidos, generalmente inestables y por ende radiactivos, y a la emisión de partículas nucleares iguales o distintas de las iniciadoras de la reacción

**Transformación isobárica.**

Desintegración  $\beta^+$  o  $\beta^-$ , es decir, núcleo original y resultante con el mismo número de masa.

**Transformación nuclear.**

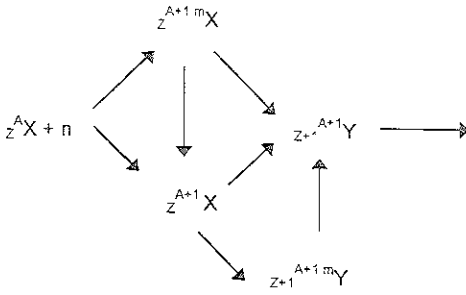
Transformación de unas partículas en otras, se incluyen: la desintegración, transmutación, fisión, etc..

**Transición isomérica.**

Algunas veces el estado excitado de un núcleo persiste por un tiempo apreciable; esto es entonces llamado a ser metaestable. El átomo en esta condición es un isómero del núcleo producto final, teniendo el mismo número de masa y atómico y solo una diferencia en la energía interna. Como en este caso la radiación gamma es emitida algún tiempo después que la partícula, el isómero puede aparecer como emisor puro de rayos gamma. Tales átomos son conocidos con períodos medios de una fracción de segundo a varios meses

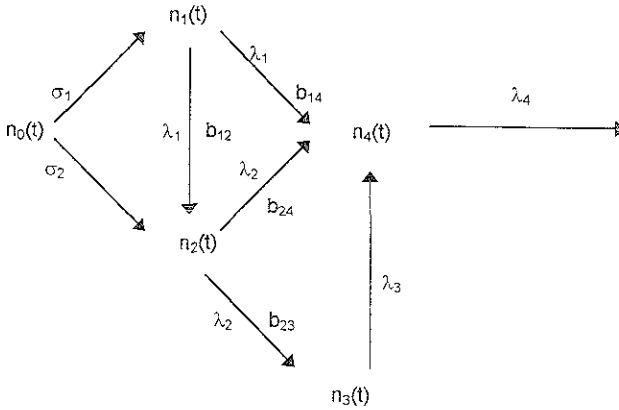
## BIBLIOGRAFIA

- 1.- J. Alanís M. "Estudio de investigación y optimización de los parámetros del proceso de obtención de yodo-131 del ININ"  
Tesis doctoral en Ciencias Químicas, UNAM (2000).
- 2.- S.L. Ross, "Differential Equations"  
John Wiley & Sons, 1974.
- 3.- E. Ley Koo. "Radioisótopos: Teoría y Experimentación"  
Tesis de Maestría en Ciencias Físicas, UAP (1959)
- 4.- M. Navarrete, L. Cabrera. "Introducción al estudio de los radioisótopos"  
UNAM, Fac. de Química. 1993.
- 5.- G.R. Choppin & J. Rydberg. " Nuclear Chemistry, Theory and Applications"  
Pergamon Press, 1980.
- 6.- M. Rakovic. "Activation Analysis"  
Iiffe Books LTD, 1970.
- 7.- A. Travesi. "Análisis por activación neutrónica, teoría, práctica y aplicaciones"  
Ediciones J.E.N , Madrid, 1975.
- 8.- F.L. Elizalde V., E. Parra M. y M. Rosenbaum P. "Evaluación de métodos para la producción de I-131 en México".  
Rev. Soc. Quím Mex., vol. 18 (1974)
- 9.- E. H. Quimby, S. Feitelberg, S. Silver. " Radioactive isotopes in Clinical Practice"  
Lea & Febiger, 1958.
10. F. Herbert A., "Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry"  
John Wiley & Sons, Inc. 1986
11. Berbard Shleien, "The Health Physics Radiological Health Handbook"  
Scinta, Inc., 1992.



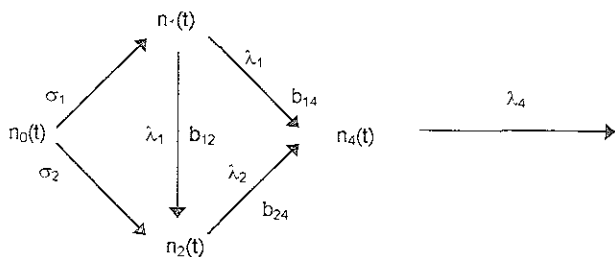
donde,  
 X, Y = elemento ( o isótopo)  
 A = número de masa (número de nucleones)  
 Z = número atómico (número de protones en el núcleo)  
 m = estado metaestable

**Esquema 1:** Activación y decaimiento del sistema a considerar para su modelación

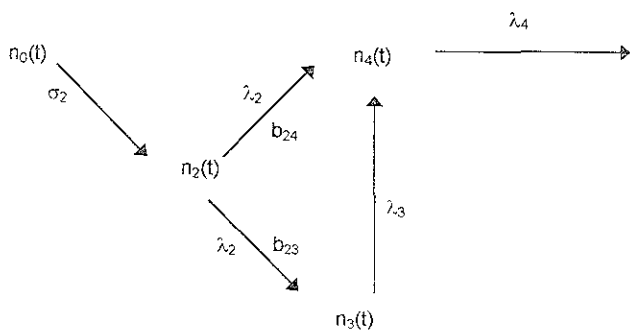


donde:  
 $n_0$  = número de átomos iniciales de  $Z^A X$ .  
 $n_1$  = número de átomos en el tiempo de  $Z^{A+1 m} X$   
 $n_2$  = número de átomos en el tiempo de  $Z^{A+1} X$   
 $n_3$  = número de átomos en el tiempo de  $Z+1^{A+1 m} Y$   
 $n_4$  = número de átomos en el tiempo de  $Z+1^{A+1} Y$   
 $\sigma_1$  = sección eficaz de activación de  $Z^A X$  para obtener  $Z^{A+1 m} X$   
 $\sigma_2$  = sección eficaz de activación de  $Z^A X$  para obtener  $Z^{A+1} X$   
 $\lambda_1$  = constante de desintegración de  $Z^{A+1 m} X$   
 $\lambda_2$  = constante de desintegración de  $Z^{A+1} X$   
 $\lambda_3$  = constante de desintegración de  $Z+1^{A+1 m} Y$   
 $\lambda_4$  = constante de desintegración de  $Z+1^{A+1} Y$   
 $b_{12}$ ,  $b_{14}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{24}$  = porcentaje de átomos que decaen a un núcleo determinado

**Esquema 2:** Parámetros de interés durante y después de la irradiación



**Esquema 3.** Sistema a considerar para el estudio del primer caso,  $n_3(t) = 0$



**Esquema 4.** Sistema a considerar para el estudio del segundo caso  $n_1(t) = 0$

Función	Transformada
$f(t)$	$F(s)$
$a f(t) + b g(t)$	$a F(s) + b G(s)$
$f'(t)$	$s F(s) - f(0)$
1	$1/s$
$e^{at}$	$1/(s - a)$

**Tabla 1:** Transformadas de Laplace

Tiempo de irradiación en número de periodos de semidesintegración	Valor del factor de saturación en % de la actividad de saturación
1	50
2	75
3	87.50
4	93.75
5	96.87
6	98.44
7	99.10
8	99.61
9	99.80
10	99.90

**Tabla 2.** Valores del factor de saturación

Isótopo	Abundancia isotópica (%)
Te-120	0.09
Te-122	2.4
Te-123	0.908
Te-124	4.6
Te-125	7.14
Te-126	18.7
Te-128	31.8
Te-130	34.5

**Tabla 3.-** Distribución isotópica del telurio natural

Tiempo de irradiación (h)	Modelo propuesto (μCi)			Bernard Shleien <sup>(11)</sup> (μCi)		
	Te-131m	Te-131	I-131	Te-131m	Te-131	I-131
1/60	3.32E-06	3.19E-03	9.65E-08	3.33E-06	3.19E-03	9.59E-08
1	1.97E-04	9.46E-02	2.16E-04	1.97E-04	9.45E-02	2.14E-04
24	3.68E-03	1.17E-01	9.62E-03	3.68E-03	1.17E-01	9.40E-03
Actividad de saturación	8.64E-03	1.18E-01	1.25E-01	8.64E-03	1.17E-01	1.17E-01

**Tabla 4** Resultados con el modelo propuesto y los reportados por Bernard Shleien<sup>(11)</sup> para la producción de I-131, durante la activación neutrónica del Te-130, a distintos tiempos de irradiación

Tiempo de enfriamiento (h)	Te-131m ( $\mu\text{Ci}$ )	Te-131 ( $\mu\text{Ci}$ )	I-131 ( $\mu\text{Ci}$ )
0	1.97494E-04	9.4645789E-02	2.16103E-04
1	1.92984E-04	1.797696E-02	3.82079E-04
2	1.88577E-04	3.442101E-03	4.1287E-04
3	1.84271E-04	6.85953E-03	4.18023E-04
3.5	1.82155E-04	3.21607E-04	4.1839E-04
3.6	1.81735E-04	2.78522E-04	4.18398E-04
3.7	1.81315E-04	2.42025E-04	4.18392E-04
4	1.80063E-04	1.62709E-04	4.18306E-04

**Tabla 5** Resultados para el enfriamiento, en la producción de I-131 por activación neutrónica de Te-130, para una irradiación de 1 h

Tiempo de enfriamiento (h)	Te-131m ( $\mu\text{Ci}$ )	Te-131 ( $\mu\text{Ci}$ )	I-131 ( $\mu\text{Ci}$ )
0	3.680719E-03	1.175583E-01	9.62436E-03
1	3.596669E-03	2.2938091E-02	9.80772E-03
1,7	3.538979E-03	7.705279E-03	9.82499E-03
1,75	3.534894E-03	7.153147E-03	9.82505E-03
1,8	3.530813E-03	6.644996E-03	9.82502E-03
2	3.514539E-03	4.986083E-03	9.82407E-03
3	3.434283E-03	1.568368E-03	9.80858E-03

**Tabla 6.** Resultados para el enfriamiento, en la producción de I-131 por activación neutrónica de Te-130, para una irradiación de 24 h

Isótopo	Abundancia isotópica (%)
Mo-92	14.84
Mo-94	9.25
Mo-95	15.92
Mo-96	16.68
Mo-97	9.55
Mo-98	24.13
Mo-100	9.63

**Tabla 7.-** Distribución isotópica del molibdeno natural.

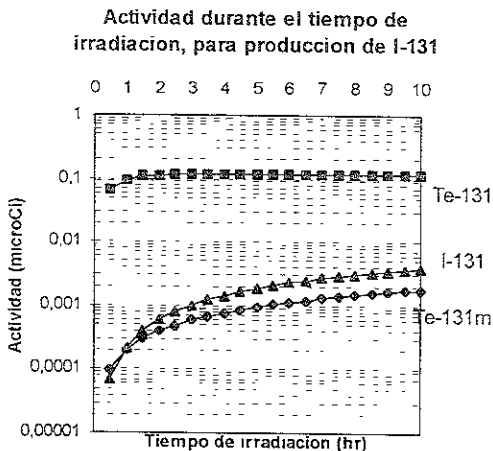
Tiempo de irradiación (h)	Modelo propuesto (μCi)			Bernard Shleien <sup>(11)</sup> (μCi)		
	Mo-99	Tc-99m	Tc-99	Mo-99	Tc-99m	Tc-99
24	1.198E-2	0.21E-2	3.279E-11	1.17E-2		5.53E-11
Actividad de saturación	5.37E-02	4.71E-2	5.37E-02	5.27E-02		5.27E-02

**Tabla 8.** Resultados para la obtención de  $^{99m}_{43}\text{Tc}$  por activación neutrónica del Mo-98, segundo caso de estudio.

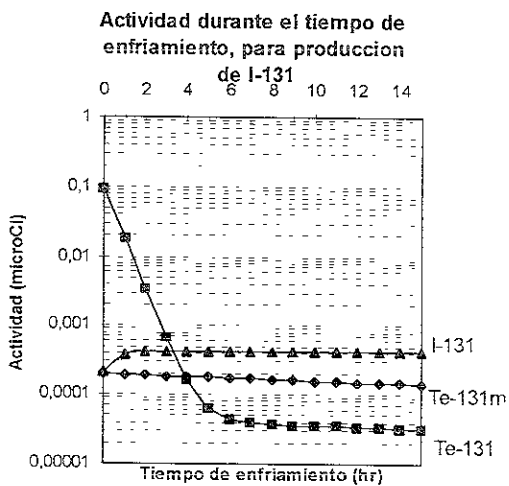


Tiempo de enfriamiento (h)	Actividad del Mo-99 ( $\mu\text{Ci}$ )	Actividad del Tc-99m ( $\mu\text{Ci}$ )
0	1.198E-02	0.213E-02
1	1.185E-02	0.252E-02
2	1.173E-02	0.278E-02
3	1.161E-02	0.296E-02
4	1.148E-02	0.307E-02
5	1.136E-02	0.314E-02
6	1.125E-02	0.318E-02
7	1.113E-02	0.320E-02
8	1.101E-02	0.321E-02
9	1.090E-02	0.320E-02
10	1.078E-02	0.318E-02
11	1.067E-02	0.316E-02
12	1.056E-02	0.314E-02
13	1.045E-02	0.311E-02

**Tabla 9** Resultados para el enfriamiento, en la producción de Tc-99m por activación neutrónica de Mo-98, para una irradiación de 24 h

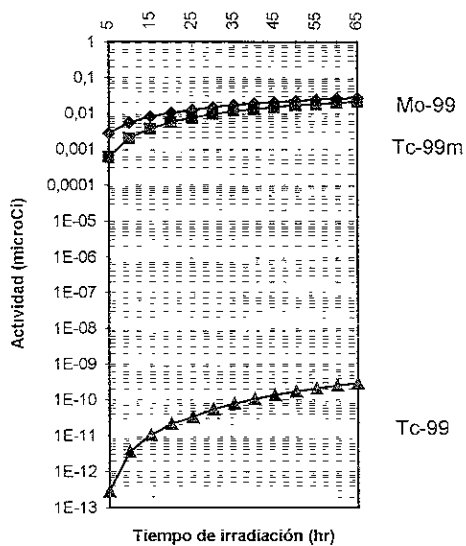


**Gráfica 1** - Comportamiento de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante la irradiación

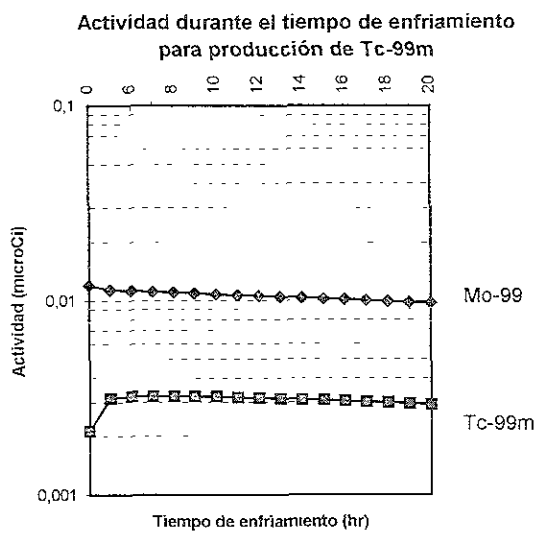


**Gráfica 2** - Comportamiento de los núclido Te-131m, Te-131 y I-131 durante el enfriamiento.

Actividad durante la irradiación para la producción de Tc-99m



Gráfica 3 - Comportamiento de los núclido Mo-99, Tc-99m y Tc-99 durante la activación.



**Gráfica 4.-** Comportamiento de los núcleo Mo-99, Tc-99m durante el enfriamiento