

03043

1

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

---

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS  
Y EN SISTEMAS**

**APLICACION DE MODELOS ARIMA A LAS LINEAS  
TELEFONICAS DE LA REPUBLICA MEXICANA,  
1941-1994.**

**T E S I S I N A**

**QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE LA  
ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA APLICADA**

**P R E S E N T A  
MIGUEL ANGEL GONZALEZ GUADARRAMA**

**DIRECTOR: DRA. GUILLERMINA ESLAVA GOMEZ**

**MEXICO, D.F.**

204635

**2001**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A mis padres:  
Luis González Vega y  
Ma. Edith Guadarrama de González  
Por su amor y apoyo de toda la vida**

**A Beatriz,  
Mi amada compañera**

**A la Dra. Guillermina Eslava,  
por dirigir este trabajo con una paciencia  
a toda prueba**

## INDICE:

	<b>Resumen</b>	
1.	Introducción	1
2.	Antecedentes	2
3.	Elementos Teóricos Entorno al Mercado de Telecomunicaciones	4
4.	Modelos ARIMA	5
4.1	Series de Tiempo: Definición	5
4.2	Estacionariedad	5
4.3	Transformaciones a Series Estacionarias	6
4.4	Procesos Estacionarios ARMA	12
4.5	Función de Autocorrelación (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF)	15
4.6	El Estadístico AICC	16
4.7	Modelos ARIMA	17
4.8	Análisis en el Dominio de las Frecuencias	19
5	Aplicación de Modelos ARIMA a las Líneas Telefónicas de la República Mexicana, 1941-1988	21
5.1	Análisis Estadístico	21
5.2	Transformación de la Serie a una Serie Estacionaria	23
5.3	Ajustando un Modelo	26

5.3.1	Modelo 1: ARIMA(1,2,0)	27
5.3.1.1	Diagnóstico del Modelo 1	27
5.3.1.2	Análisis en el Dominio de las Frecuencias del Modelo 1	29
5.3.2	Modelo 2: ARIMA(0,2,2)	31
5.3.2.1	Diagnóstico del Modelo 2	31
5.3.2.2	Análisis en el Dominio de las Frecuencias del Modelo 2	33
5.4	Proyección 1989-1990	35
6.	Conclusiones	40
	Bibliografía	42

## Resumen

El mercado de telecomunicaciones ha sufrido dramáticos cambios en las últimas décadas, tanto en su operación como en su estructura. El cambio ha sido conducido por la revolución tecnológica, la cual ha creado nuevos patrones de demanda y nuevos servicios. Estos factores han contribuido de manera fundamental a lo que aquí se denomina como la *Reforma* en telecomunicaciones. Entre los principales resultados de las experiencias de los países que han realizado una reforma telefónica se observa un acelerado desarrollo y modernización de las redes de telecomunicaciones en general. México no ha permanecido al margen del fenómeno reformista, siendo más bien uno de los primeros países en desarrollo en comenzar una reestructuración a fondo de sus telecomunicaciones. La Hipótesis del trabajo es que la *Reforma* de la telefonía en México como factor causal, se ha traducido ya en un cambio significativamente favorable para el sector telecomunicaciones en términos de la expansión del servicio telefónico. Lo que se está evaluando en este trabajo, bajo la forma de la expansión del servicio telefónico, es sólo una primera etapa del proceso de *Reforma* de este sector, es decir, aquella etapa correspondiente a la preparación de tal sector para la privatización de *Teléfonos de México*, así como del primer año de esta firma como compañía privada, años importantes en la preparación del sector para la introducción de competencia en todos los mercados que lo constituyen. Esta etapa corresponde a los años 1989-1990. La expansión del servicio telefónico correspondiente al periodo 1941-1988 para la República Mexicana fue ajustada con 2 modelos, un  $ARIMA(1,2,0)$  y un  $ARIMA(0,2,2)$ . Se eligió el primer modelo basándose en el estadístico AICC y a la lógica propia del fenómeno. Al respecto, tomando en cuenta las bandas de confianza (a un nivel del 95%) de los datos predichos por el modelo  $ARIMA(1,2,0)$ , no se puede concluir que la Reforma a sido benéfica para la expansión del servicio telefónico pues la banda de confianza superior se empalma con la serie real de los datos, tampoco se puede concluir lo contrario. Si bien desde un punto de vista estrictamente estadístico no se puede concluir sobre la hipótesis planteada al principio de la investigación, existen algunos elementos correspondientes a la esfera económica que apuntan hacia una mejora del sector a partir de 1989.

## 1. INTRODUCCION

El mercado de telecomunicaciones ha sufrido dramáticos cambios en las últimas décadas, tanto en su operación como en su estructura. El cambio ha sido conducido por la llamada revolución tecnológica, la cual ha creado nuevos patrones de demanda y nuevos servicios, alterando las formas en las cuales los servicios tradicionales eran prestados, y fundamentalmente expandiendo las oportunidades de la oferta disponible tanto para los usuarios residenciales como para los comerciales. A la par, el surgimiento de la información como factor productivo de capital importancia en el nuevo entorno de economía globalizada ha jugado el papel de *catalizador* que ha "fijado" y a su vez promovido en medida significativa tales avances tecnológicos. Estos factores han contribuido de manera fundamental a lo que aquí se denomina como la *Reforma* en telecomunicaciones. Por *Reforma* nos referimos al proceso de liberalización, privatización y reordenamiento regulatorio del sector.

El cambio tecnológico y la creciente importancia de la información como factor productivo han derivado en la reestructuración de la industria telefónica a escala internacional. Al respecto, los Estados Unidos son los primeros en iniciar una reestructuración a fondo tanto en la estructura como en la regulación de sus telecomunicaciones. Formalmente la *Reforma* inicia con el fallo del Juicio Final Modificado (MFJ) emitido en 1982 por la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC) de los Estados Unidos sobre el Monopolio *AT&T Communications*, a raíz de éste se ha desencadenado un movimiento reformista internacional primero al nivel de los principales países desarrollados, e inmediatamente después al nivel de los países en vías de desarrollo.

Entre los principales resultados de las experiencias de los países que han realizado una reforma telefónica se observa un acelerado desarrollo y modernización de las redes de telecomunicaciones en general<sup>1</sup>.

México no ha permanecido al margen del fenómeno reformista, siendo más bien uno de los primeros países en desarrollo en comenzar una reestructuración a fondo de sus telecomunicaciones

### Hipótesis

La Hipótesis del trabajo es que la *Reforma* de la telefonía en México (el proceso de privatización, liberalización y reordenamiento regulatorio del sector), como razón principal, se ha traducido ya en un cambio significativamente favorable para el sector telecomunicaciones y debido a su importancia se infiere que para el resto de la economía, en términos de la expansión del servicio telefónico. Es poco probable que la propia inercia del mercado preexistente hasta antes de la *Reforma* condujere a este resultado sin el cambio

---

<sup>1</sup> Experiencias de Estados Unidos, Reino Unido, Francia, Japón, Canadá, Chile, Argentina, entre otros. Véanse OCDE (1997) y Hudson (1997).

institucional y de estructura del mercado que se derivan de la misma *Reforma*.

Lo que se está evaluando en este trabajo, bajo la forma de la expansión del servicio telefónico, es sólo una primera etapa del proceso de *Reforma* de este sector, es decir, aquella etapa correspondiente a la preparación de tal sector para la privatización de *Teléfonos de México*, así como del primer año de esta firma como compañía privada, años importantes en la preparación del sector para la introducción de competencia en todos los mercados que lo constituyen. Esta etapa corresponde a los años 1989-1990

### Metodología

Para explorar esta hipótesis recurrimos a un *análisis de series de tiempo*. Se elige un modelo ARIMA<sup>2</sup>, de dos ajustes posibles, para la serie temporal correspondiente al número de líneas telefónicas instaladas<sup>3</sup> en la República Mexicana para el periodo 1941-1988, a partir del cual se hacen una proyección para los años 1989-1990, tal proyección sirve como escenario sin Reforma. La finalidad es comparar la proyección con respecto a los datos reales, es decir, con los datos producto de la *Reforma* telefónica. El análisis estadístico de las series de tiempo se realiza tanto en el *dominio del tiempo* como en el *dominio de las frecuencias*.

Si bien se trata sólo de una variable (número de líneas telefónicas instaladas en la República Mexicana para el periodo 1941-1988), esta es fundamental, pues constituye la base para la expansión del servicio telefónico de larga distancia, así como uno de los medios más importantes de la super-carretera de la información, de servicios tales como los de valor agregado<sup>4</sup>, casi inexistentes hasta antes de la reforma<sup>5</sup>.

## 2. ANTECEDENTES

Numerosos factores domésticos aunados a la creciente competencia en los mercados internacionales y la conciencia de la experiencia de los países desarrollados en la liberalización y privatización de sus sistemas telefónicos, trajeron consigo un cambio radical en la política mexicana de telecomunicaciones a principios de la administración del presidente Carlos Salinas. La *Reforma* de las telecomunicaciones en México fue planteada como condición necesaria para hacer más eficiente<sup>6</sup> el aparato productivo nacional y atraer

<sup>2</sup> *Auto-Regressive Integrated Moving Average*.

<sup>3</sup> Nótese que se está tomando a las líneas como un agregado, es decir, no se hace distinción alguna entre líneas comerciales y residenciales.

<sup>4</sup> Son aquellos servicios digitales que van más allá del servicio básico de telefonía tradicional como por ejemplo el correo de voz, el correo electrónico, las llamadas en espera, reuniones virtuales (llamadas donde intervienen más de dos usuarios), servicios de diseminación de información (como infosel en México), internet, etc.

<sup>5</sup> Para un análisis detallado sobre las condiciones tecnológicas y de infraestructura de la telefonía en México, vease Cowey (1989).

<sup>6</sup> En el sentido de expandir el servicio telefónico, introducir y desarrollar servicios de valor agregado, y de acercar las tarifas de los servicios a sus respectivos costos, en resumen de reducir el costo de transacción de hacer negocios en México.

nuevas inversiones.

Como en la mayor parte de los países latinoamericanos, el monopolio público sobre las telecomunicaciones se caracterizaba por serios rezagos en la prestación de los servicios, y en la calidad de los mismos. De tal suerte que para 1988, un año antes del inicio de la reforma, se tenía:

- Baja densidad en la penetración telefónica (5.2 líneas por cada 100 habitantes).
- Tiempo de espera para la instalación de una nueva línea considerable en relación con los países desarrollados (de 2 a 3 años) aunque relativamente corto comparado con otros países del tercer mundo, como Argentina, el cual oscilaba alrededor de los 20 años, Indonesia 9 años, y Venezuela 8 años<sup>7</sup>.
- Un rezago considerable en relación con la demanda. Desde 1972 TELMEX expandió la red de 1.1 a 4.4 millones de líneas, las cuales cubrían sólo el 18% de los hogares; de las 13,500 comunidades rurales de entre 500 y 2500 habitantes, sólo 5000 tenían acceso al servicio telefónico; había un promedio diario de 67 mil teléfonos fuera de servicio y cerca de un millón y medio de solicitudes de servicio no atendidas<sup>8</sup>.
- Obsolescencia de la red. El 20% de la capacidad en líneas era totalmente obsoleta, y la mayoría de las centrales telefónicas eran analógicas, es decir basadas en cambios y enlaces manuales o eléctricos de las líneas telefónicas.

Por otra parte, entre la década de los 70's y los 80's, TELMEX invirtió en forma intensiva los recursos de los que disponía, para modernizar y expandir el sistema a una tasa promedio anual del 6%. Para el año de 1981, 99% de las llamadas eran automáticas. Desde 1982 únicamente equipo digital se utilizaba en la expansión del sistema, llevando el porcentaje de digitalización de casi cero en ese año a 22% en 1989. En ese mismo año, el porcentaje diario de líneas fuera de servicio era del 10% contra el 1% en los Estados Unidos, 7% en Chile y el 45% en Argentina. Asimismo, en el promedio de líneas por empleado era superado únicamente por Chile en Latinoamérica (10 empleados por cada 1000 líneas contra 8 empleados por cada 1000 líneas en Chile)<sup>9</sup>. Sin embargo, el desarrollo de las telecomunicaciones se vio severamente restringido después de 1982 debido a que la crisis económica limitó los recursos, además los terremotos de 1985 en la Ciudad de México causaron la pérdida de toda la capacidad de telefonía de larga distancia de la capital y de una buena parte del país, debido a la dependencia de la conexión central<sup>10</sup>.

---

<sup>7</sup> Ramamurti (1994), p. 74

<sup>8</sup> Ruelas (1995), cap.6

<sup>9</sup> Ramamurti (1994), p. 74

<sup>10</sup> Kathleen Griffith, "Telecommunications in Mexico" en Center for Telecommunications Research, Columbia University, 1997, Home Page de Internet.

### 3. ELEMENTOS TEORICOS ENTORNO AL MERCADO DE TELECOMUNICACIONES

Al hablar de *Reforma* en telecomunicaciones necesariamente tenemos que hacer referencia –por lo menos- a términos tales como *monopolio natural*, *economías de escala*, y *economías de alcance*, términos básicos fundamentales para entender la evolución de la estructura de mercados multiproducto. Es por ello que es necesario definir tales términos aunque sea de forma un tanto superficial<sup>11</sup>.

A escala internacional, la industria telefónica es un caso típico de cómo el avance tecnológico ha transformado la estructura de una industria monopolística a una (sobre todo en telefonía de larga distancia) capaz de sostener un mayor número de compañías. Tal transformación va acompañada de un cambio de *paradigma*, de uno que gira en torno a la teoría del monopolio natural hacia otro más enfocado a la competencia y a la amenaza potencial de la misma, con relación a este último es conveniente aclarar que se encuentra en formación<sup>12</sup>.

La teoría del **monopolio natural** ha sido sumamente importante para la industria de las telecomunicaciones. Se dice que una industria es un monopolio natural si una sola empresa puede satisfacer la demanda de mercado más eficientemente que varias empresas.

Esta teoría fue el escudo bajo el cual los monopolios públicos y privados de telecomunicaciones de todo el mundo lograron defenderse por algunas décadas de los embates de sus potenciales competidores. El grado de las **economías de escala** y las **economías de alcance** - ambas reflejo de las condiciones tecnológicas subyacentes de la industria - ocupan un papel capital como condiciones causales del monopolio natural.

Brevemente diremos que se tienen economías de escala si conforme se incrementa el nivel del producto (o servicio) el costo promedio disminuye. Se tienen economías de alcance entre dos productos o servicios, si el incremento de la producción de uno de ellos redundaría en la disminución del costo promedio del otro<sup>13</sup>. La existencia de fuertes economías de escala y alcance a todos los niveles de producto dan como resultado la existencia de monopolio natural. Al respecto, numerosos estudios a escala mundial indican la existencia de numerosas y complejas estructuras de economías de escala, correspondientes a diversas tecnologías y rutas de acceso en la prestación de los servicios de telecomunicaciones. Lo anterior ha permitido la introducción de competencia en la mayor parte de los mercados que configuran la industria de las telecomunicaciones<sup>14</sup>.

---

<sup>11</sup> Para un análisis económico-teórico detallado véase Schmalensee y Willing (1989).

<sup>12</sup> Véase Schmalensee y Willing (1989) y Crandall y Flam (1988).

<sup>13</sup> Para un desarrollo formal véase Tirole (1992).

<sup>14</sup> Para una compilación de tales estudios véase Leonard Waverman, "U.S. Interexchange Competition" en Crandall y Flam (1988), p.62-113.

## 4 MODELOS ARIMA

### 4.1 Series de Tiempo: Definición

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias indexadas  $X(\omega, t)$  donde  $\omega$  pertenece a un espacio muestral y  $t$  pertenece a un conjunto indexado. Para un  $t$  dado,  $X(\omega, t)$  es una variable aleatoria. Para un  $\omega$  dado  $X(\omega, t)$  como función de  $t$ , se denomina una realización. Entonces una serie de tiempo es una realización de un cierto proceso estocástico. Por convención a  $X(\omega, t)$  se le suprime  $\omega$  y simplemente se le denomina  $X_t$ <sup>15</sup>. Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones  $x_t$ , cada una de las cuales se registra a un tiempo específico  $t$ .

El propósito de un análisis en series de tiempo, puede ser:

- Discutir características particulares tales como
  - Tendencia
  - Estacionalidad
  - Persistencia de perturbaciones o “shocks”
- Pronóstico de datos
  - ¿Cuántas unidades de un producto se venderán la próxima semana?
  - ¿Cómo se cotizaran las acciones de Telmex el próximo mes?
- Prueba de hipótesis.

### 4.2 Estacionariedad

En la mayor parte de los métodos estadísticos, el *muestreo aleatorio* permite obtener observaciones bajo idénticas condiciones. Además estas observaciones son independientes. Por contraste, en el análisis en series de tiempo nos enfrentamos con una sola observación por unidad de tiempo, observaciones que por lo regular son dependientes a través del tiempo. La estacionariedad es un concepto útil que garantiza cierta regularidad en los datos a través del tiempo<sup>16</sup>. La estacionariedad (no-tendencia a largo plazo) significa que la correlación de un día a otro, de una semana a otra, de un tiempo a otro, no depende de que días, semanas o unidades de tiempo se tomen. Si, por ejemplo, se consideran los conteos del número de líneas instaladas por cada año desde la segunda mitad del siglo XX en la República Mexicana, el supuesto de estacionariedad significa que la correlación entre el número de líneas de los años 1951 y 1952 (o de cualquier otro par de años  $n$  y  $n+1$ ) debe ser la misma que entre 1983 y 1984 por ejemplo, o que cualquier otro par de años  $n$  y  $n+1$  contemplados en el periodo referido.

En términos formales, se dice que la serie de tiempo  $\{X_t, t \in Z\}$ , con el conjunto indexado  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  es estacionaria de 2º orden si:

<sup>15</sup> Wei (1990). p.6

<sup>16</sup> UNSW, *Stochastic Models For Actuarial Applications*, Sidney, Australia, 2001.

- (i)  $E(|X_t|^2) < \infty$  para todo  $t \in Z$   
 (ii)  $E(X_t) = m$  para todo  $t \in Z$

y

- (iii) La covarianza  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k)$  para todo  $t_1, t_2, k \in Z$

La varianza de una serie es

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(X_t) = \gamma(0)$$

y la función de autocorrelación  $\rho(h)$  se define como:

$$\rho(h) = \gamma(h) / \sigma^2(X_t) = \gamma(h) / \gamma(0)$$

El primer supuesto se refiere a la existencia de la varianza, tal que la covarianza pueda existir también. Este supuesto implica que  $\sigma_t^2 = \sigma^2$  para toda  $t$  y por tanto es constante. El segundo supuesto implica que la esperanza de los datos no depende del tiempo:  $\mu_t = \mu$ . Del tercer supuesto sobre la covarianza se deduce que la correlación:

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t_1 + k, t_2 + k)$$

Haciendo  $t_1 = t - k$  y  $t_2 = t$  tenemos que:

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k$$

y

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t - k, t) = \rho(t, t + k) = \rho_k$$

Entonces para un proceso estacionario la covarianza y la correlación entre  $Z_t$  y  $Z_{t+k}$  dependen únicamente de  $k$ .

En series de tiempo la característica más importante a explotar es la correlación entre las medidas a diferentes puntos en el tiempo. Es la correlación la que nos dice en qué grado las variables están relacionadas entre ellas, y por tanto nos da información importante para ser utilizada en la predicción de valores futuros.

### 4.3 Transformaciones Hacia Series Estacionarias

De lo anterior se deduce que los procesos estacionarios juegan un papel crucial en el análisis de series de tiempo. Frecuentemente tales series no son estacionarias, por lo cual será necesario transformarlas, de tal manera que puedan ser razonablemente modeladas como realizaciones de procesos estacionarios. En particular se requiere eliminar los componentes de ciclo y tendencia, así como lograr que la varianza de la serie sea aproximadamente constante.

El comportamiento de una serie puede sugerir la representación de los datos como una realización del proceso (*modelo clásico*):

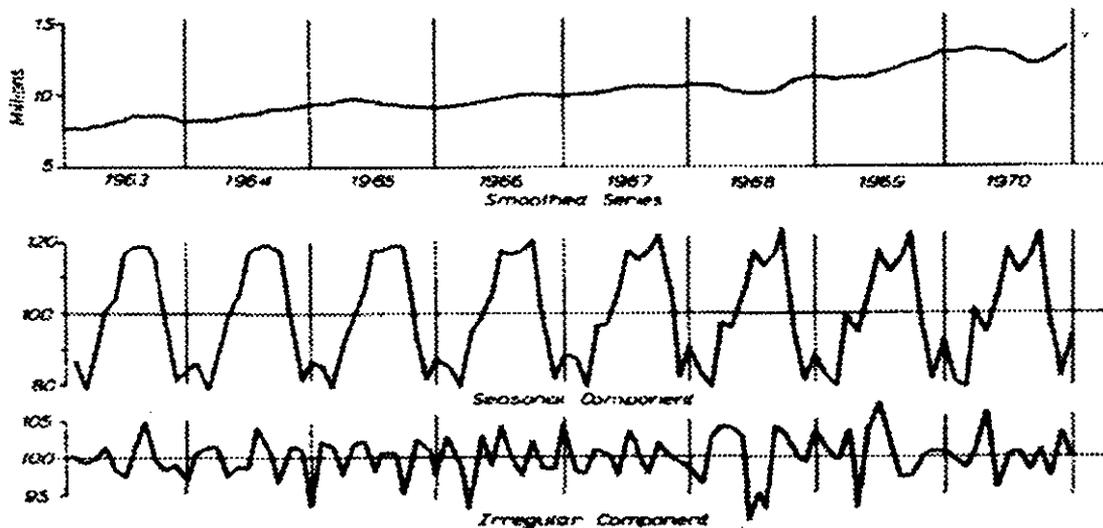
$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (1)$$

donde:

- $X_t$  es la observación al tiempo  $t$ ,
- $m_t$  es el componente de tendencia (determinístico, de cambio lento, es perfectamente predecible),
- $s_t$  es el componente estacional (determinístico, de conocido periodo  $d$ , es perfectamente predecible) y
- $Y_t$  es el componente de ruido blanco, el cual es estacionario y tiene media cero (sin embargo puede estar correlacionado, y por tanto puede ser parcialmente predecible)<sup>17</sup>.

La figura 1 relativa a la demanda de vuelos para los años 1963-1970, presenta un ejemplo gráfico claro de los componentes expresados por el modelo (1).

Figura 1: Componentes de Tendencia ( $m_t$ ), Estacional ( $s_t$ ), y de Ruido Blanco ( $Y_t$ )



Tomado de Kendal,(1976) p.65.

Si las fluctuaciones estacionales se incrementan con el tiempo, entonces es necesaria una transformación preliminar de los datos, de tal forma que estos sean compatibles con el modelo (1).

<sup>17</sup> En la siguiente sección sobre procesos estacionarios se define el ruido blanco.

### Transformación de Box-Cox

En general, para estabilizar la varianza, se puede utilizar la transformación de Box y Cox:

$$T(X_t) \equiv X_t^{(\lambda)} \equiv (X_t^\lambda - 1)/\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\lambda$  recibe el nombre de parámetro de transformación. Algunos de los valores más utilizados de  $\lambda$  y sus transformaciones asociadas son:

Valores de $\lambda$	Transformación
-1.0	$1/X_t$
-0.5	$1/\sqrt{X_t}$
0.0	$\text{Ln}X_t$
0.5	$\sqrt{X_t}$
1.0	$X_t$ (sin transformación)

Para ver porque  $\lambda = 0$  corresponde a la transformación logarítmica, obsérvese que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (X_t^\lambda - 1)/\lambda = \ln(X_t)$$

Como ya se observó, cualquier transformación estabilizadora de la varianza, será la primera transformación que se le aplicará en caso de ser requerida. El encontrar la transformación apropiada de Box-Cox para casos específicos es realmente cuestión de prueba y error<sup>18</sup>. Tales métodos de transformación aplican siempre que la variabilidad de los datos presente una tendencia con relación al tiempo, sea esta creciente o decreciente.

### Estimación y Eliminación de Tendencia y Estacionalidad.

Dada la representación de los datos como una realización del proceso:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

El objetivo es estimar y extraer los componentes determinísticos  $m_t$  y  $s_t$ , con la esperanza de que el residual o componente de ruido  $Y_t$  sea un proceso aleatorio estacionario. Entonces, se puede utilizar la teoría de tales procesos para encontrar un modelo probabilístico satisfactorio para el proceso  $\{Y_t\}$ , para analizar sus propiedades, y utilizar esto en conjunto con  $m_t$  y  $s_t$  con propósitos de predicción y control de  $\{X_t\}$

En ausencia de un componente estacional tenemos

$$X_t = m_t + Y_t \quad t = 1, 2, \dots, n$$

<sup>18</sup> Bladt (1995), p.12

donde, sin pérdida de generalidad, se supone  $E(Y_t) = 0$ . Un método para estimar  $m$  es el de mínimos cuadrados. Bajo este procedimiento se busca ajustar una familia paramétrica de funciones, por ejemplo

$$m_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

a los datos, estimando los parámetros por minimización  $\sum_t (x_t - m_t)^2$ . Entonces se resta el estimado

$$\hat{m}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2 + \dots + \hat{a}_n t^n$$

de  $X_t$  para obtener una secuencia estacionaria  $\{Y_t\}$

Un segundo método (este no paramétrico) para eliminar tendencia es el alisamiento por promedios móviles. Sea  $q$  un entero no negativo, y considérese el promedio móvil

$$W_t = 1/(2q + 1) \sum_{j=-q}^q X_{t+j}$$

del proceso  $\{X_t\}$  definido por  $X_t = m_t + Y_t$ . Entonces para  $q + 1 \leq t \leq n - q$

$$W_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q m_{t+j} + (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q Y_{t+j} \cong m_t$$

Suponiendo que  $m_t$  es aproximadamente lineal sobre el intervalo  $[t - q, t + q]$  y que el promedio de los términos de error sobre este intervalo es cercano a cero. Los promedios móviles nos dan la siguiente estimación

$$\hat{m}_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q + 1 \leq t \leq n - q$$

La principal ventaja del método de mínimos cuadrados es que proporciona una función que es conocida más allá del tiempo observado, tal que las predicciones no son problema. Su principal desventaja es la poca flexibilidad en el número de posibles tendencias, dado que tenemos que mantener el número de parámetros convenientemente reducido para aplicaciones ordinarias.

La principal desventaja del método no paramétrico es que este aún cuando casi seguramente removerá la tendencia dentro del tiempo observado, no nos provee con algún estimado o estimación sobre la posible tendencia en el futuro. Entonces este método es más descriptivo que útil para predecir.

Para el caso donde están presentes tanto el componente estacional  $s_t$ , como el de tendencia  $m_t$ , se puede hacer algo similar. Supóngase que tenemos observaciones  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , primero se estima la tendencia aplicando un filtro de medias móviles elegido para eliminar el componente estacional y contrarrestar el ruido. Si el periodo  $d$  es par,  $d = 2q$ , entonces se utiliza

$$\hat{m}_t = (0.5x_{t-q} + x_{t-q+1} + \dots + x_{t+q-1} + 0.5x_{t+q})/d \quad q < t \leq n - q$$

Si el periodo es impar,  $d = 2q + 1$ , entonces se utiliza el promedio móvil simple

$$\hat{m}_t = (2q + 1)^{-1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q + 1 \leq t \leq n - q$$

El segundo paso es estimar el componente de estacionalidad. Por cada  $k = 1, \dots, d$  se calcula el promedio de las desviaciones  $w_k \{(x_{k+jd} - m_{k+jd}) : q < k + jd \leq n - q\}$ . Dado que desviaciones del promedio no necesariamente suman cero, se estima el componente estacional  $s_k$  como

$$\hat{s}_k = w_k - d^{-1} \sum_{i=1}^d w_i \quad k = 1, \dots, d \quad \text{y} \quad s_k = s_{k-d}, \quad k > d$$

Los datos desestacionalizados se definen entonces como

$$d_t = x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n$$

Finalmente se reestima la tendencia de  $\{d_t\}$  ya sea aplicando un filtro de promedios móviles como ya se ha descrito o ajustando un polinomio a la serie  $\{d_t\}$ .

La serie de términos de ruido quedan entonces definidos por:

$$Y_t = x_t - m_t - s_t, \quad t = 1, \dots, n$$

### Diferenciación

Una aproximación alternativa desarrollada extensivamente por Box y Jenkins (1970), consiste en aplicar operadores diferencia repetidamente a los datos  $\{x_t\}$  hasta que las observaciones diferenciadas se asemejen a una realización de un proceso estacionario  $\{W_t\}$ <sup>19</sup>. Entonces se puede utilizar la teoría de los procesos estacionarios para la modelación, el análisis y la predicción de  $\{W_t\}$ , y por tanto del proceso original. El proceso de diferenciación es una herramienta alternativa que permite remover tanto la estacionalidad como cualquier tendencia polinomial de cualquier grado a través de un solo método. Definamos al operador rezago B por

$$BX_t = X_{t-1}$$

y las potencias de B como

$$B^j = B(B^{j-1}X_t) = \dots = X_{t-j}.$$

Se define el operador diferencia como

$$\nabla = 1 - B.$$

Entonces

<sup>19</sup> Brockwell y Davis (1994), p.15.

$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ . Las potencias se definen como  $\nabla^j = (1 - B)^j$ .

donde  $B$  es el operador de rezago. Con este operador diferencia es posible remover estacionalidad y tendencias polinómicas. Considérese el modelo general

$$X_t = Y_t + m_t + s_t$$

Suponiendo que no hay estacionalidad, se procura eliminar la tendencia por diferenciación. Si el operador  $\nabla$  se aplica a una función de tendencia lineal  $m_t = at + b$ , se obtiene la función constante  $\nabla m_t = a$ . De la misma forma, para una función de tendencia polinomial

$$m_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k$$

aplicándole  $\nabla^k$  se obtiene

$$\nabla^k m_t = k!a_k$$

de esta manera  $\nabla^k$  remueve totalmente la tendencia polinomial de orden  $k$ , y resulta en un termino constante para ser agregado a la media. Entonces se tiene

$$\nabla^k X_t = k!a_k + \nabla^k Y_t,$$

donde  $\nabla^k Y_t$  es estacionario. Entonces  $X_t$  es estacionario. Estas consideraciones sugieren la posibilidad, dada una secuencia  $\{x_t\}$  de la aplicación del operador  $\nabla$  repetidamente hasta encontrar una secuencia  $\{\nabla^k x_t\}$  que plausiblemente pueda ser modelada como una realización de un proceso estacionario.

Esta técnica de diferenciación puede ser adaptada para eliminar estacionalidad de periodo  $d$ , introduciendo el operador diferencia con rezago  $d$   $\nabla_d$ , definido por

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t$$

Aplicando el operador  $\nabla_d$  al modelo

$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

donde  $\{s_t\}$  tiene periodo  $d$ , obtenemos

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}$$

lo cual da una descomposición de la diferencia  $\nabla_d X_t$  en un componente de tendencia  $(m_t - m_{t-d})$  y un termino de ruido  $(Y_t - Y_{t-d})$ . La tendencia  $m_t - m_{t-d}$ , puede ser eliminada utilizando los métodos ya descritos.

#### 4.4 Procesos Estacionarios ARMA

##### Ruido Blanco

En muchos aspectos la clase más simple de series de tiempo  $\{X_t\}$  es una en la cual las variables aleatorias  $X_t$ ,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , son independientes e idénticamente distribuidos con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Tales procesos se identifican con la clase de procesos estacionarios con media 0 y función de autocovarianza

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Entonces se dice que el proceso  $\{Z_t\}$  es de ruido blanco (*White Noise*) con media 0 y varianza  $\sigma^2$ ,

$$\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

si y sólo si  $\{Z_t\}$  tiene media 0 y covarianza como en (1).

##### ARMA(p, q)

El proceso  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , se dice que es un proceso ARMA(p, q) si  $\{X_t\}$  es estacionaria y si para cada t

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad (2)$$

donde  $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Se dice que  $\{X_t\}$  es un proceso ARMA(p,q) con media  $\mu$  si  $\{X_t - \mu\}$  es un proceso ARMA(p,q).

La ecuación 2 puede escribirse en forma más compacta como

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

donde  $\phi$  y  $\theta$  son polinomios de orden p y q respectivamente

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

y

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$$

donde

$\phi_1, \dots, \phi_p$  son constantes, y

$\theta_1, \dots, \theta_q$  son constantes

y,  $B$  es el operador rezago ya definido anteriormente.

Los polinomios  $\phi$  y  $\theta$  serán referidos como *autoregresivo* y de *promedios móviles* respectivamente.

### Autoregresivo (AR(p))

Si  $\theta(z) = 1$

$$\text{entonces } \phi(B)X_t = Z_t \quad (5)$$

donde

- $\{X_t\}$  es estacionario
- $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$
- $\phi = \phi_1, \dots, \phi_p$  son constantes

Se dice que este proceso es autoregresivo de orden  $p$  (o AR(p)).

El requerimiento de que  $\{X_t\}$  sea estacionario restringe los valores de  $\phi_1, \dots, \phi_p$ . Por ejemplo, en el caso de un proceso AR(1) usualmente se requiere que

$$|\phi_1| < 1$$

El supuesto de estacionariedad garantiza la existencia y unicidad de un proceso AR(1)<sup>20</sup>.

### Promedios Móviles (MA(q))

Si  $\phi(z) \equiv 1$ , entonces

$$X_t = \theta(B)Z_t \quad (3)$$

Donde

- $\theta = \theta_1, \dots, \theta_q$  son constantes
- $\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

Se dice que el proceso es de promedios móviles de orden  $q$  (o MA(q)).

La estacionariedad de  $\{X_t\}$  se sigue del hecho de que  $X_t$  es una combinación lineal finita de variables estacionarias<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> Véase Brockwell y Davis (1996), secciones 2.3-2.5, 3.1

<sup>21</sup> Ibid. Secc. 2.3-2.5

### Causalidad e Invertibilidad en Procesos ARMA

**Causalidad.** Se dice que un proceso ARMA(p,q), definido por la ecuación  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  es causal (o más específicamente es una función causal de  $\{Z_t\}$ ) si puede ser expresado como un modelo lineal generalizado, si existe una secuencia de constantes  $\{\psi_j\}$  tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

y

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

donde  $Z_t$  es un proceso de ruido blanco y

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z), \quad |z| \leq 1 \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esto es,  $X_t$  puede representarse en términos de valores del pasado y presente de  $Z_t$ . Por ello se dice que una  $\{X_t\}$  causal es una función *futuro-independiente* de  $Z_t$ .  $\{X_t\}$  es causal (dado  $\{Z_t\}$ ) si y solo si todas las raíces de  $\phi$  se encuentran fuera del círculo unitario. Esencialmente, todo proceso estacionario puede ser representado por un proceso lineal. El supuesto de causalidad es muy importante pues el cumplimiento del mismo asegura que la existencia de una solución estacionaria sea única<sup>22</sup>.

**Invertibilidad.** El concepto dual de la causalidad lo es el de la invertibilidad. La invertibilidad, la cual permite expresar  $Z_t$  en términos de  $X_t$  tiene una caracterización similar al de la causalidad, pero en términos de un polinomio de promedio móviles<sup>23</sup>. Se dice que un proceso ARMA(p,q), definido por la ecuación  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  es invertible si existe una secuencia de constantes  $\{\pi_j\}$  tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  y

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

Esto es,  $Z_t$  puede representarse en términos de valores del *pasado y presente* de  $X_t$ .

Al igual que la causalidad la propiedad de invertibilidad no es una propiedad sólo del proceso  $\{X_t\}$ , sino más bien de la relación entre los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$  que aparece en las ecuaciones ARMA. Los coeficientes  $\{\pi_j\}$  están determinados por la relación

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \phi(z)/\theta(z), \quad |z| \leq 1 \quad z \in \mathbb{C}$$

De ello se desprende que  $\{X_t\}$  es invertible (dado  $\{Z_t\}$ ) si y solo si todas las raíces de  $\theta$  se encuentran fuera del círculo unitario.

<sup>22</sup> Véase Brockwell y Davis (1996), Secc. 3.1.

<sup>23</sup> Ibid. Secc. 3.1.

Entonces de lo anterior diremos que si un proceso ARMA(p,q) puede ser expresado como un modelo lineal generalizado MA( $\infty$ ) se le llama *causal*, y si puede ser expresado como un AR( $\infty$ ) se le llama *invertible*.

#### 4.5 Función de Autocorrelación (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF)

Después de las transformaciones que sean necesarias, el siguiente paso consiste en ajustar un modelo en series de tiempo. A través de una elección apropiada de los parámetros de un proceso ARMA  $\{X_t\}$  se puede hacer que la covarianza  $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$  se acerque lo más posible, para todo h, a las covarianzas correspondientes  $\gamma(h)$  de una serie estacionaria con  $\gamma(0) > 0$  y  $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ .

Entre las herramientas que nos permiten sugerir un modelo adecuado se encuentran la *función de autocorrelación* (ACF) y la *función de autocorrelación parcial* (PACF).

La función de autocorrelación (ACF) de una serie de tiempo estacionaria  $\{X_t\}$  se define como

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t) \quad \text{para } h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La función de autocorrelación es una medida de dependencia entre observaciones como función de su separación (h) a través del tiempo.

Si los valores de la ACF decaen rápidamente conforme h se incrementa, ello indica una dependencia de corto plazo en la serie de tiempo, mientras que un lento decaimiento de los valores indica una dependencia de largo plazo.

Para ajustar un ARMA es deseable tener una ACF que presente un rápido decaimiento. Una ACF positiva y de lento decaimiento sugiere que los datos pueden tener una tendencia. Por su parte una ACF con un lento y periódico decaimiento sugiere la presencia de un componente estacional periódico. En cualquiera de los dos casos es necesario transformar los datos -como ya se vio- antes de continuar.

Otra herramienta de diagnostico muy útil es la *función de autocorrelación parcial* PACF. Para una serie de tiempo  $X_1, X_2, \dots, X_t$  considérese para un k dado la regresión de  $X_{k+1}$  y  $X_1$  sobre sus valores intermedios  $X_2, \dots, X_k$ , es decir el modelo<sup>24</sup>

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \dots + \alpha_k X_k \\ X_{k+1} &= \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_k X_k. \end{aligned}$$

Se estiman entonces los parámetros por mínimos cuadrados, obteniendo los estimadores correspondientes  $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ . Obteniendo los residuos:

<sup>24</sup> Bladt (1995), p.25-6

$$R_1 = X_1 - (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_2 + \dots + \hat{\alpha}_k X_k)$$

$$R_{k+1} = X_{k+1} - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \dots + \hat{\beta}_k X_k)$$

Entonces, la función de autocorrelación parcial se define como sigue:

$$\alpha(1) = \text{corr}(X_2, X_1)$$

$$\alpha(k) = \text{corr}(R_{k+1}, R_1)$$

La PACF de una serie de tiempo estacionaria  $\{X_t\}$  se define (a un rezago  $h > 0$ ) como la correlación entre los residuos de  $X_{t+h}$  y  $X_t$  después de la regresión lineal sobre  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ . Esta es una medida de dependencia entre  $X_{t+h}$  y  $X_t$  después de remover el efecto de las variables intermedias  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ .

La ACF y la PACF nos pueden sugerir en algunas ocasiones algún modelo ARMA para los datos bajo estudio:

- Supóngase que los datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son de hecho observaciones de un proceso MA(q),

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

donde  $\{Z_t\}$  es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . En este caso tendremos que la ACF de  $\{X_t\}$  se desvanece para rezagos mayores que  $q$ . Entonces, a un nivel de significancia del 5% si la ACF cae dentro de los márgenes  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  para rezagos  $h > q$  se está sugiriendo un modelo MA(q).

- Análogamente, supóngase que los datos son observaciones de un proceso AR(p) definido por

$$X_t = Z_t + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p}$$

En este caso tendremos que la PACF de  $\{X_t\}$  se desvanece para rezagos mayores que  $p$ . Entonces, a un nivel de significancia del 5% si la ACF cae dentro de los márgenes  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  para rezagos  $h > p$  se está sugiriendo un modelo AR(p)<sup>25</sup>.

#### 4.6 El Estadístico AICC

Otra herramienta que también sirve como elemento importante para decidir entre modelos alternativos es el AICC, o criterio de Akaike corregido (*Akaike Information Corrected Criterion*). Con este criterio se procura prevenir el sobreajuste del modelo asignándole un costo a la introducción de cada parámetro adicional. Formalmente se define al AICC para un

<sup>25</sup> Brokwell y Davis (1996), Secc. 1.4.

modelo ARMA(p,q) con parametros  $p$ ,  $q$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , y  $\sigma^2$  como

$$\text{AICC}(\phi, \theta, \sigma^2) = -2\ln L(\phi, \theta, \sigma^2) + 2(p + q + 1)n/(n - p - q - 2)$$

donde  $L(\phi, \theta, \sigma^2)$  es la verosimilitud de los datos bajo el modelo Gaussiano o normal ARMA con parámetros  $(\phi, \theta, \sigma^2)$ . El modelo que se selecciona bajo este criterio es aquel que minimiza el valor del AICC. Una vez que se ha encontrado tal modelo, se debe analizar la bondad de ajuste del mismo, esencialmente verificando que sus residuos se comporten como ruido blanco<sup>26</sup>.

#### 4.7 Estimación de Modelos ARMA

Para la estimación de modelos ARMA un primer paso lo puede constituir la estimación preliminar de los parámetros, mismos que pueden servir como valores iniciales para posteriores procedimientos de optimización tal como máxima verosimilitud.

Si el modelo ajustado a los datos (posiblemente) transformados es

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

En el caso  $q = 0$  un buen estimador de  $\phi$  se puede obtener igualando la autocovarianza muestral y la autocovarianza teórica a rezagos  $0, 1, \dots, p$ . Este es el estimador de Yule-Walker. Cuando se tiene  $q > 0$ , este procedimiento no es eficiente, en vez de ello se utiliza el algoritmo de innovación para obtener estimadores preliminares más eficientes.

#### Las Ecuaciones de Yule-Walker

Sea  $\{X_t\}$  el proceso autoregresivo causal de media cero

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2) \quad (6)$$

El supuesto de causalidad permite escribir  $X_t$  de la forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad (7)$$

donde  $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = 1/\phi(z)$ ,  $|z| \leq 1$ . Multiplicando cada lado de la ecuación (6) por  $X_{t-j}$ ,  $j = 0, \dots, p$ , tomando la esperanza y utilizando (7) obtenemos las ecuaciones de

<sup>26</sup> Brockwell y Davis (1994), p.287.

Yule-Walker

$$\Gamma_p \phi = \gamma_p \quad (8)$$

y

$$\sigma^2 = \gamma(0) - \phi' \gamma_p \quad (9)$$

donde  $\Gamma_p$  es la matriz de covarianza:

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(p-1) & \gamma(p-2) & \gamma(p-3) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si se reemplazan las covarianzas  $\gamma(j)$ ,  $j = 0, \dots, p$  que aparecen en (8) y (9) por las covarianzas muestrales, se obtiene un conjunto de ecuaciones para los estimadores Yule-Walker,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\sigma}^2$  de  $\phi$  y  $\sigma^2$ , a saber

$$\hat{\Gamma}_p \hat{\phi} = \hat{\gamma}_p \quad (10)$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}' \hat{\gamma}_p \quad (11)$$

donde  $\hat{\Gamma}_p = [\hat{\gamma}(y-j)]_{i,j=1}^p$  y  $\hat{\gamma}_p = (\hat{\gamma}(1), \hat{\gamma}(2), \dots, \hat{\gamma}(p))'$ .

Dividiendo cada lado de (10) obtenemos

$$\hat{\phi} = \hat{R}_p^{-1} \hat{\rho}_p \quad (12)$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) [1 - \hat{\rho}'_p \hat{R}_p^{-1} \hat{\rho}_p], \quad (13)$$

donde  $\hat{\rho}_p = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(p))' = \hat{\gamma}_p / \hat{\gamma}(0)$

### Algoritmo de Innovación

Se pueden ajustar modelos de promedios móviles

$$X_t = Z_t + \hat{\theta}_{m1} Z_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_{mm} Z_{t-m}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, v_m)$$

de orden  $m = 1, 2, \dots$ , por medio del algoritmo de innovación. Si  $\hat{\gamma}(0) > 0$ , se define a los estimadores de innovación  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{v}$  para  $m = 1, 2, \dots, n-1$  por medio de las relaciones recursivas  $v = \gamma(0)$ ,

$$\theta_{m,m-k} = v^{-1} [\gamma(m-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{m,m-j} \theta_{k,k-j} v_j], \quad k = 0, \dots, m-1$$

y

$$v_m = \gamma(0) - \sum_{j=0}^{m-1} \theta_{m,m-j}^2 v_j$$

Además se tiene que

$$v_m \rightarrow \sigma^2$$

### Estimación por Máxima Verosimilitud del Proceso ARMA(p,q)

Supongase que  $\{X_t\}$  es un proceso causal ARMA(p,q),

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_0 Z_t + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Entonces, para el vector de observaciones  $X_n = (X_1, \dots, X_n)$  la verosimilitud se expresa<sup>27</sup>

$$L(\phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} (r_0 \dots r_{n-1})^{-1/2} \exp[-(1/2)\sigma^{-2} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{X}_j)^2 / r_{j-1}]$$

del cual se obtienen los estimadores para  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\sigma^2$ . Evidentemente, tales estimadores son aquellos que maximizan la función de verosimilitud. Las  $\{r_j\}$  que aparecen en la fórmula se obtienen aplicando el algoritmo de innovación a la función de covarianza y son independientes de  $\sigma^2$ . Es importante señalar que los vectores de parámetros en un proceso ARMA están asintóticamente distribuidos como una normal. Ello significa en particular que los parámetros están normalmente distribuidos<sup>28</sup>.

### Procesos ARIMA

Un proceso ARIMA es únicamente una forma de formular modelos ARMA previamente considerados. Una serie de tiempo  $\{X_t\}$  se denomina un ARIMA(p,d,q) si  $(1-B)^d X_t$  es un proceso causal ARMA. Se supone que  $d$  es un entero no negativo.

Lo anterior significa que  $\{X_t\}$  satisface la ecuación en diferencias

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)Z_t$$

Los modelos ARIMA incluyen series de tiempo que pueden describirse como modelos ARMA después de que la tendencia polinomial de orden  $d$  ha sido removida.

### 4.8 Análisis en el Dominio de las Frecuencias

Así como se pueden comparar la ACF y la PACF de los datos con las respectivas ACF y PACF del modelo ajustado a los mismos, se puede también comparar la densidad espectral estimada basada en los datos con la densidad espectral del modelo. El análisis espectral se relaciona típicamente con dos problemas, la detección de un comportamiento cíclico en los

<sup>27</sup> Brockwell y Davis (1991), p.256

<sup>28</sup> Bladt (1995), p.43.

datos, y la estimación de la densidad espectral<sup>29</sup>.

El periodograma es una estadística que captura las características de la densidad espectral, es pues una estimación de la densidad espectral. Puede ser calculado a partir de la transformada de Fourier rápida (*fast Fourier transform*). La transformada de Fourier está definida por

$$a_j = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t e^{-it\omega_j}, \quad -[(n-1)/2] \leq j \leq [n/2]$$

El periodograma está definido por

$$I(\omega_j) = n^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-it\omega_j} \right|^2$$

donde  $\omega_j = 2\pi j/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, [n/2]$  son las frecuencias de Fourier en  $[0, \pi]$  y  $[n/2]$  es la parte entera de  $n/2$ .

Un valor grande de  $I(\omega_j)$  sugiere la presencia de un componente sinusoidal<sup>30</sup> en los datos a la frecuencia  $\omega_j$ .

La densidad espectral de una serie estacionaria  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$  con autocovarianza absolutamente sumable<sup>31</sup> (en particular de un proceso ARMA) puede escribirse como

$$f(\omega) = 1/2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\omega k}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

donde

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega k} d\omega$$

$\gamma(k)$  es la autocovarianza a rezagos  $k$  y,  $i = \sqrt{-1}$ .

$f(\omega)$  mide la contribución relativa de la varianza de  $X_t$  de los componentes de diferentes frecuencias (medidos en radianes por unidad de tiempo). Para las series de valores reales  $f(\omega) = f(-\omega)$ , tal que es únicamente necesario desplegar  $f(\omega)$ ,  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Un pico en la función de densidad espectral a la frecuencia  $\lambda$  indica una fuerte contribución relativa a la varianza de frecuencias cercanas a  $\lambda$ .

<sup>29</sup> Véase Brockwell y Davis (1996), secciones 4.1 y 4.2.

<sup>30</sup> Este término es referente a las funciones trigonométricas de seno y coseno. Seno y coseno tienen un periodo de  $2\pi$ . Si  $f(t) = \rho \cos(\lambda t)$ , entonces  $f$  tiene una amplitud  $\rho$ , frecuencia  $\lambda$  y periodo  $2\pi/\lambda$ . Por ejemplo, si  $\lambda = 2$  entonces  $f$  se repite cada  $4\pi$  periodos.

<sup>31</sup> La sumabilidad de  $|\gamma(\cdot)|$  implica que  $f(\omega)$  converge. Véase Brockwell y Davis (1996), p. 110.

## 5. APLICACION DE MODELOS ARIMA A LAS LINEAS TELEFONICAS DE LA REPUBLICA MEXICANA 1941-1988.

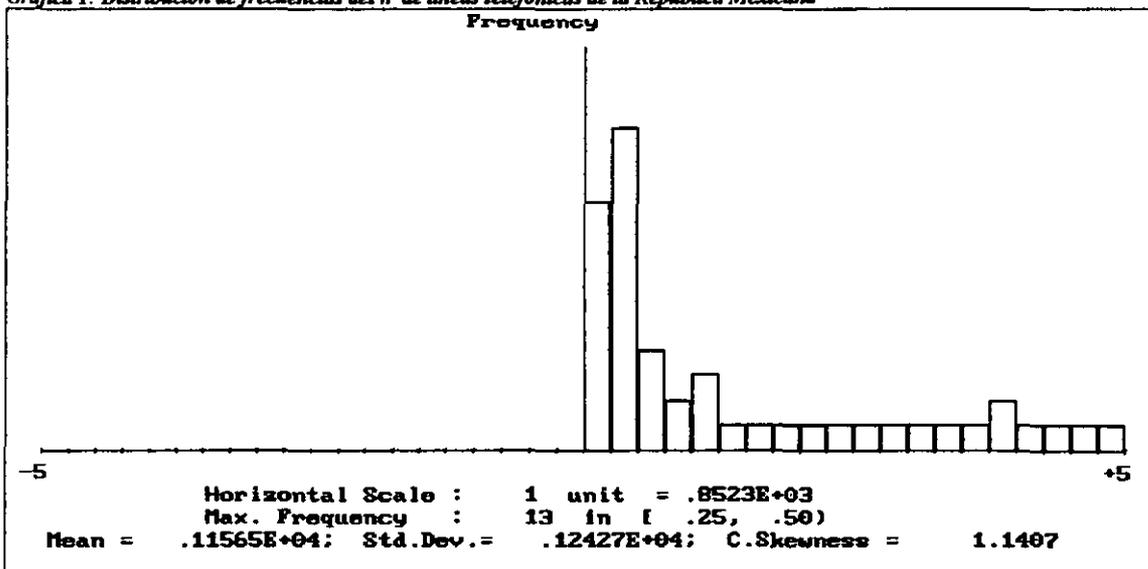
En el siguiente ejercicio se elige un modelo (de 2 posibles) de series de tiempo para el número de líneas telefónicas instaladas en la República Mexicana en el periodo de 1941-1988, con el objeto de hacer un pronóstico para el periodo 1989-1990 lo más confiable posible y comparar sus resultados en relación con los datos reales. En otras palabras, queremos comparar los resultados pronosticados si no se hubiese dado reforma alguna con los datos que han resultado de la *Reforma*, para el periodo 1989-1990. El análisis estadístico se realiza tanto en el *dominio del tiempo* como en el *dominio de las frecuencias*.

### 5.1 Análisis Estadístico

#### Datos Originales

A partir de los datos de la serie temporal se procede a un análisis exploratorio preliminar. Del histograma se observa claramente que los datos presentan una distribución asimétrica, con media de 1156.5 y desviación estándar de 1255.88.

Gráfica 1: Distribución de frecuencias del n° de líneas telefónicas de la República Mexicana

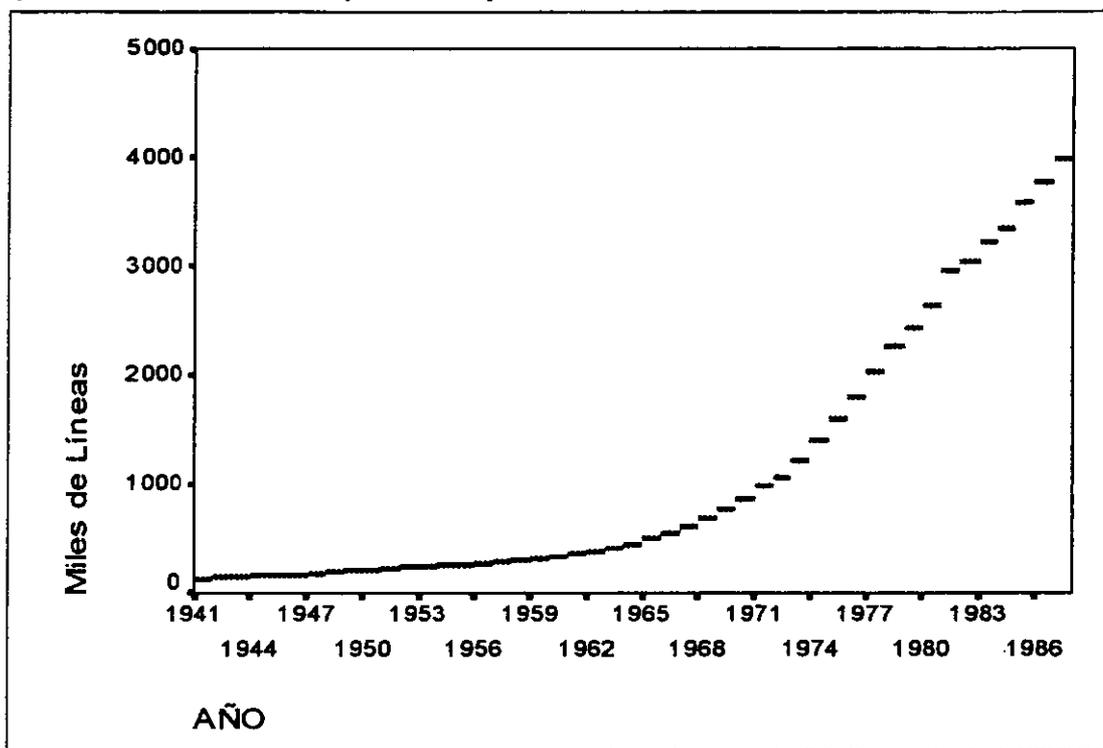


Para poder modelar una serie de tiempo, es necesario que ésta sea estacionaria de 2° orden, es decir, que la serie presente una media estable e independiente del tiempo, y que la varianza de dicha serie sea constante y por tanto independiente del tiempo. Al respecto, de la gráfica 2 se puede apreciar que existe tendencia en la serie. Por otra parte, si bien no se aprecia claramente una dependencia de la varianza de la serie con relación al tiempo, ello no

<sup>31</sup> La sumabilidad de  $|\gamma(\cdot)|$  implica que  $f(\omega)$  converge. Véase Brockwell y Davis (1996), p. 110.

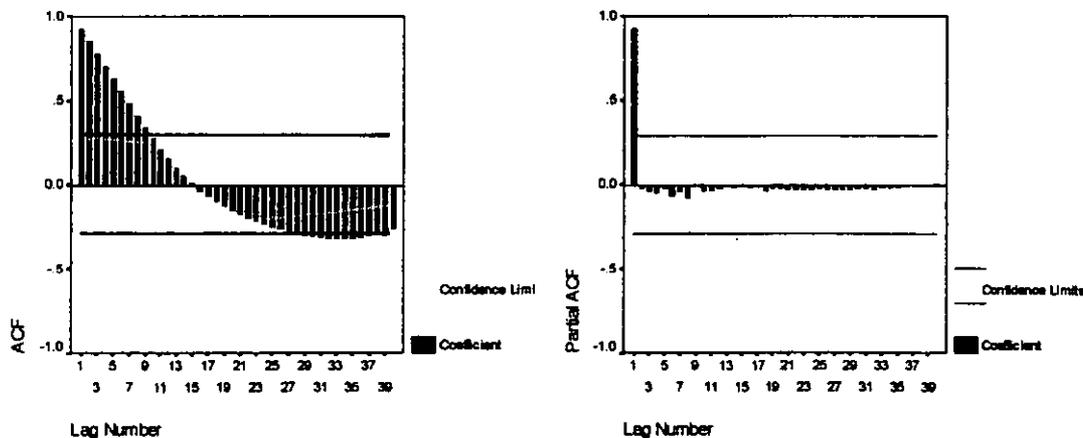
quiere decir que no exista<sup>32</sup>. Para fines del orden de la exposición adelantamos que existe una dependencia positiva.

Gráfica 2: Serie del número de líneas telefónicas de la República Mexicana 1941-1988



En presencia de desviaciones de la estacionariedad, como indican en el caso presente la presencia de tendencia (característica visible de la serie) y la dependencia de la varianza de la serie con relación al tiempo, tendremos que hacer transformaciones en la serie para transformarla en una serie estacionaria.

Gráfica 3: Función de Autocorrelación Simple (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF)



Un instrumento formal para identificar la no estacionariedad lo es la función de

<sup>32</sup> Esto puede apreciarse mejor si se realiza una doble diferenciación simple sin previamente haber realizado la transformación de Box-Cox, como se observa de la gráfica 6, pag. 25, las razones de porque una doble diferenciación también se dan en el siguiente subpartado.

autocorrelación simple (ACF por sus siglas en inglés). Se dice que si tal función no se amortigua para retardos altos, tenemos una serie no estacionaria. Bajo el criterio anterior, en este caso evidentemente se trata de una serie no estacionaria.

## 5.2 Transformación de la Serie a una Serie Estacionaria

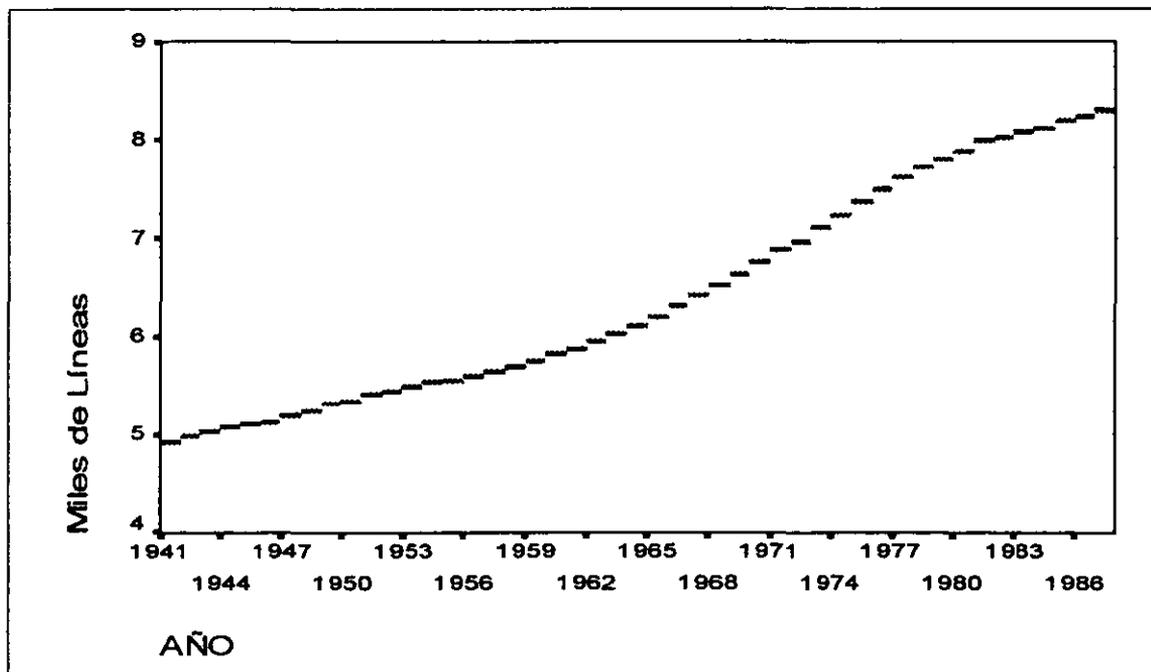
### Transformación de Box-Cox

De la gráfica 3, como ya se puntualizó, observamos que la serie no es estacionaria de 2° orden, por lo que como primer paso es necesario llevar a cabo una transformación estabilizadora de la varianza. En este caso utilizamos por su sencillez, la más socorrida en la literatura de series temporales: Box-Cox. La transformación de Box-Cox, como ya lo vimos es como sigue. Si  $x_1, \dots, x_N$  es una serie de tiempo, entonces los datos transformados por Box-Cox están dados por

$$y_i = f_\lambda(x_i) = \begin{cases} (x_i^\lambda - 1) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \lambda & \\ \log(x_i) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Como ya se apuntó cuando se introdujo la transformación de Box-Cox, el encontrar la transformación adecuada es cuestión de prueba y error. Probemos con la más sencilla, la transformación logarítmica. Esta transformación estabiliza en forma adecuada la varianza de la serie como lo podemos observar de la gráfica 4. El análisis siguiente deja este último punto más claro.

Gráfica 4: Serie del número de líneas telefónicas 1941-1988 con transformación logarítmica de Box-Cox



## Diferenciación de los Datos

El 2º paso consiste en estabilizar la media de la serie, ello lo podemos conseguir con diferenciaciones simples. En general, la forma de la serie nos puede indicar qué diferenciación necesitamos para remover la tendencia. La serie temporal del nº de líneas representada en la gráfica 2 se puede aproximar con una función cuadrática, por lo que una doble diferenciación *simple* parece apropiada. Para decidir si ésta es la diferenciación adecuada tomamos en cuenta la desviación estándar de las series de sucesivas diferenciaciones de la original, de ser así su desviación estándar será mínima.

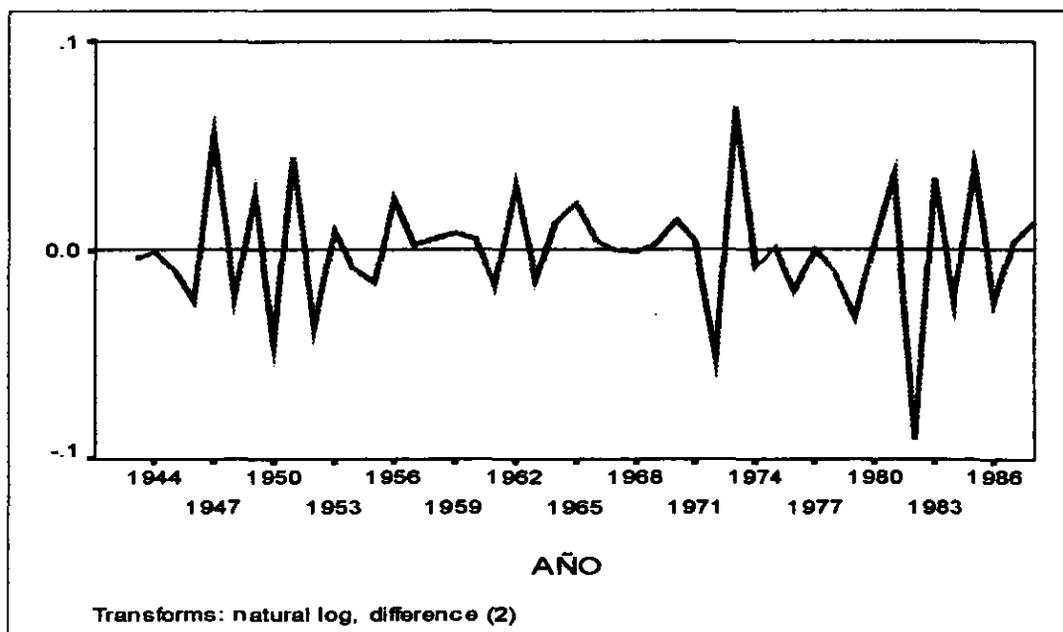
Cuadro 1

Diferenciación Simple N°	Desviación Estándar
1	0.0339
<b>1,1</b>	<b>0.0282</b>
1,1,1	0.0511
1,1,1,1	0.0975

Como se sospechaba, la doble diferenciación es la apropiada, pues resulta en una serie con menor desviación estándar, como se puede apreciar del cuadro 1.

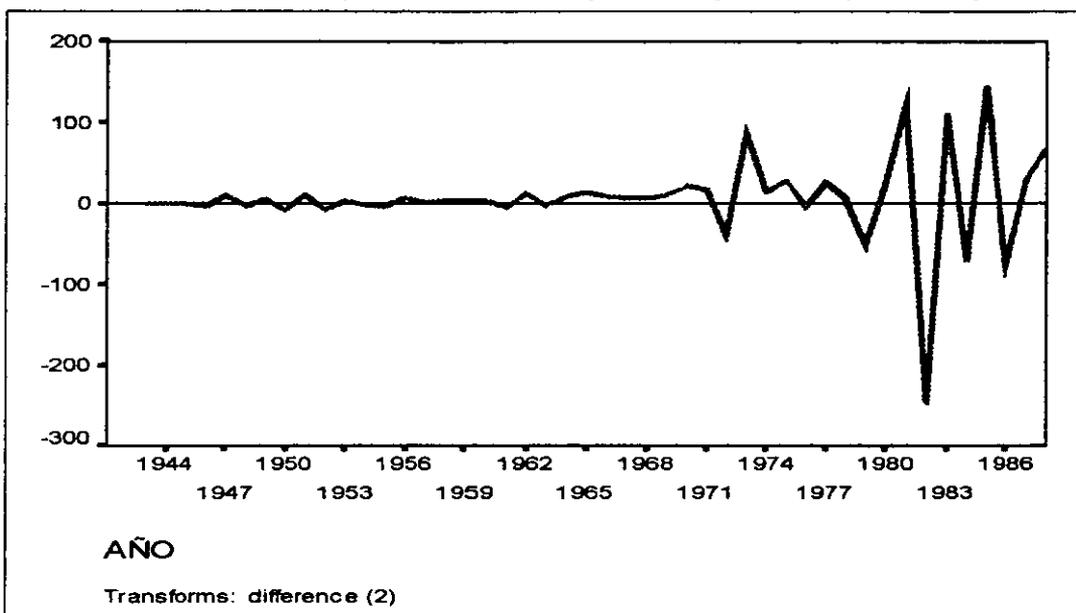
Entonces, con transformación logarítmica de Box-Cox ( $\lambda=0$ ) y con doble diferenciación obtenemos una serie estacionaria. Es decir, una serie sin tendencia y sin varianza heterogénea, como lo podemos apreciar en la gráfica siguiente.

Gráfica 5: Serie del número de líneas telefónicas 1941-1988 con transformación logarítmica de Box-Cox y doble diferenciación



Si no se hubiese realizado la transformación de Box-Cox antes de la doble diferenciación tendríamos:

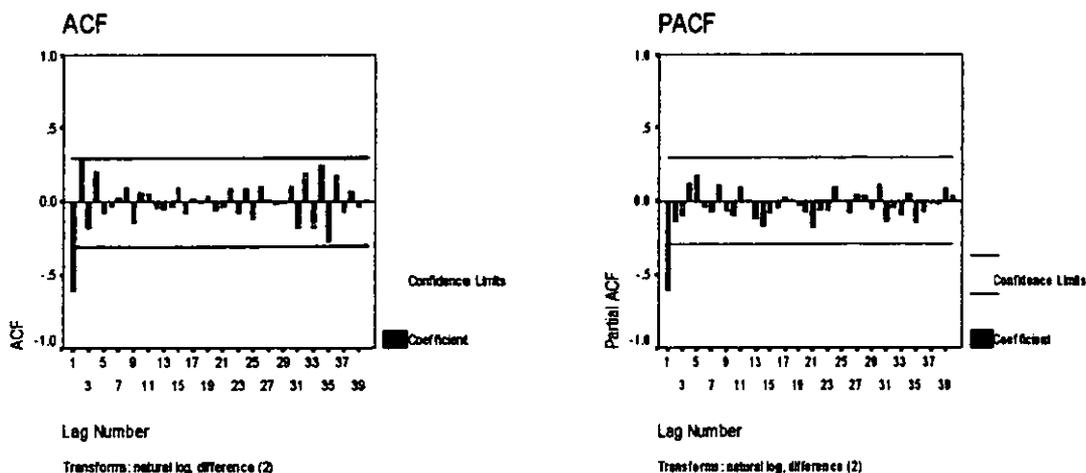
Gráfica 6: Serie del número de líneas telefónicas 1941-1988 sin transformación Log. de Box-Cox, y con doble diferenciación



Nótese que la magnitud de las fluctuaciones con la doble diferenciación se incrementan con el tiempo ( $x_t$ ). Por ello, como podemos apreciar de la gráfica 5, el tomar como primer paso el logaritmo natural,  $y_t = \ln x_t$ , y después aplicar el operador  $\nabla^2$  a la serie  $\{y_t\}$  suprime este efecto.

La ACF de la serie con transformación logarítmica de Box-Cox y doblemente diferenciada presentada en la gráfica 7 muestra una clara corrección de la no estacionariedad de la serie. Esta serie nos sugiere algunos modelos, de los cuales elegiremos el que mejor ajuste de acuerdo a un criterio de bondad de ajuste conocido como AICC.

Gráfica 7: Función de Autocorrelación Simple (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF) de la serie transformada



### 5.3 Ajustando un Modelo ARIMA

Los modelos sugeridos por la ACF son MA(1), ó MA(2). Por la PACF únicamente el AR(1). Alternativamente se tendrían que probar modelos ARMA de bajo orden. El criterio que se toma en este trabajo para elegir el mejor modelo, es el convencional, el de *Akaike*, corregido o AICC. Como ya lo vimos este criterio procura prevenir el sobreajuste del modelo asignándole un costo a la introducción de cada parámetro adicional.

Otro criterio similar es el bayesiano o BIC (*Bayesian Information Criteria*). AICC y BIC son ambos índices basados en la misma idea: prevenir el sobreajuste del modelo al asignar un costo a la introducción de cada parámetro adicional<sup>33</sup>. Entonces elegiremos aquel modelo que minimice el índice AICC (o el BIC) y que cumpla con los supuestos sobre los residuos que más adelante describimos.

Cuadro 2

MODELO	AICC	BIC
ARMA(1,0)	-214,8	-215,2
ARMA(0,1)	-211,6	-212
ARMA(0,2)	-214	-214
ARMA(1,1)	-213	-213,4
ARMA(1,2)	-211,2	-211
ARMA(2,1)	-211	-211,2
ARMA(2,2)	Modelo no Causal	

El siguiente cuadro muestra los parámetros estimados de los modelos factibles, así como los parámetros significativos a un nivel de significancia del 5%, mismos que se indican con (\*).

Cuadro 3

Modelo	Phi	Error Standard	Theta	Error Standard	AICC
ARMA(1,0)	-.603 (*)	0.114			-215
ARMA(0,1)			-.542 (*)	0.099	-212
ARMA(0,2)			-.728 (*) -.317 (*)	0.145 0.144	-214
ARMA(1,1)	-.460 (*)	0.201	-.237	0.214	-213
ARMA(2,1)	-.500 -.027	0.531 0.342	-.198	0.526	-211

Tomando en cuenta la significancia de los parámetros y el índice AICC, el *mejor* candidato a priori para ser nuestro modelo parece ser el AR(1) como se puede apreciar del cuadro 3. Otro modelo candidato lo es el MA(2). Analizaremos ambos modelos y elegiremos el que mejor se ajuste a los datos de acuerdo al diagnóstico de la bondad de los modelos (sobre sus residuos) y al análisis espectral<sup>34</sup>. También tomaremos en cuenta la naturaleza del fenómeno bajo estudio como un factor clave.

<sup>33</sup> Un modelo sobreajustado modela muy bien la serie ajustada, pero no sirve para pronosticar pues se está ajustando incluso la aleatoriedad.

<sup>34</sup> Obsérvese que el índice AICC para el modelo ARMA(1,1) tiene un valor bastante cercano al de los modelos mencionados, sin embargo el coeficiente theta es no significativo.

### 5.3.1 Modelo 1: ARIMA(1,2,0)

Comencemos con el AR(1). Tomando en cuenta que se trata de una serie doblemente diferenciada tenemos un modelo ARIMA(1,2,0). Utilizando máxima verosimilitud obtenemos:

*Cuadro 4: Estimación de los parámetros del modelo ajustado AR(1)*

$$X_t + 0.603X_{t-1} = Z_t \quad \{Z_t\} \sim \text{WN}(0,0.0005)$$

El error estándar del único coeficiente de nuestro modelo es de 0.114059, por lo que a un nivel de significancia del 5%, este es significativo, pues  $0.603 > 1.96*(0.114059)$ . Interpretando el modelo diremos que el número de líneas en el año  $t$  depende del número de líneas del año  $t-1$ . El siguiente paso, corresponde a la validación del modelo propuesto.

#### 5.3.1.1 Diagnóstico Del Modelo 1

Una vez que se ha estimado el modelo es deseable evaluar su bondad de ajuste mediante un análisis de los residuos. Si suponemos que nuestro modelo ajustado es el que genera los datos observados, entonces los residuos observados serán valores *semejantes* a los de una secuencia de *ruido blanco*, es decir valores independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.)<sup>35</sup>. Para decidir si una serie se asemeja a ruido blanco, existen varias herramientas disponibles, algunas de las más socorridas son<sup>36</sup>:

- *Graficar la serie contra el tiempo.* Usualmente esta es la primera “prueba”, aunque algunas veces es difícil decidir si la serie es ruido blanco o no a partir solo de la gráfica.
- *Graficar la ACF y la PACF de la serie.* La ACF y la PACF son estimadas con cierta incertidumbre asociada, por lo que se esperan algunas desviaciones de cero. En general, si  $\{Y_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ , entonces

$$\rho_Y(h) \sim \text{IIDN}(0, 1/n).$$

Esto significa que alrededor del 95% de la ACF deberá estar dentro de

$$0 \pm 1.96/\sqrt{n}$$

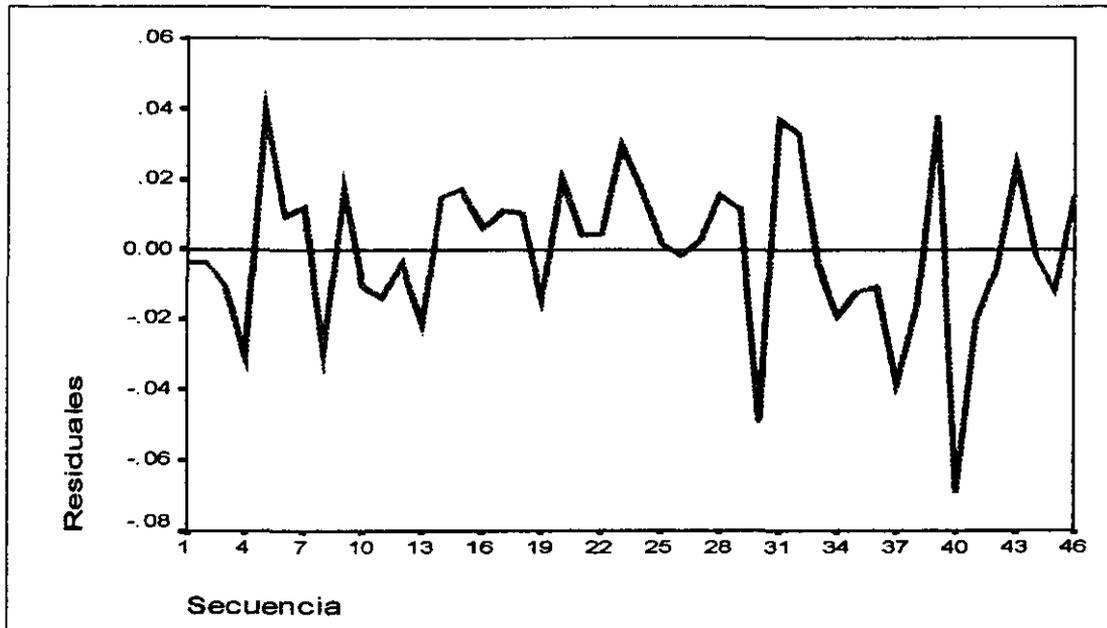
- *Verificar si la serie esta correlacionada.* Existen varias pruebas al respecto, entre ellas la de Portmanteau, la de Ljung y Box, y la de McLeod y Li (la cual se describe líneas abajo).

Entonces, para verificar lo apropiado de nuestro modelo debemos examinar la serie de residuos, y verificar que esta se *asemeje* a una secuencia de ruido blanco.

<sup>35</sup> Brockwell y Davis (1996), Secc. 5.3.

<sup>36</sup> Ibid. Secc. 1.6.

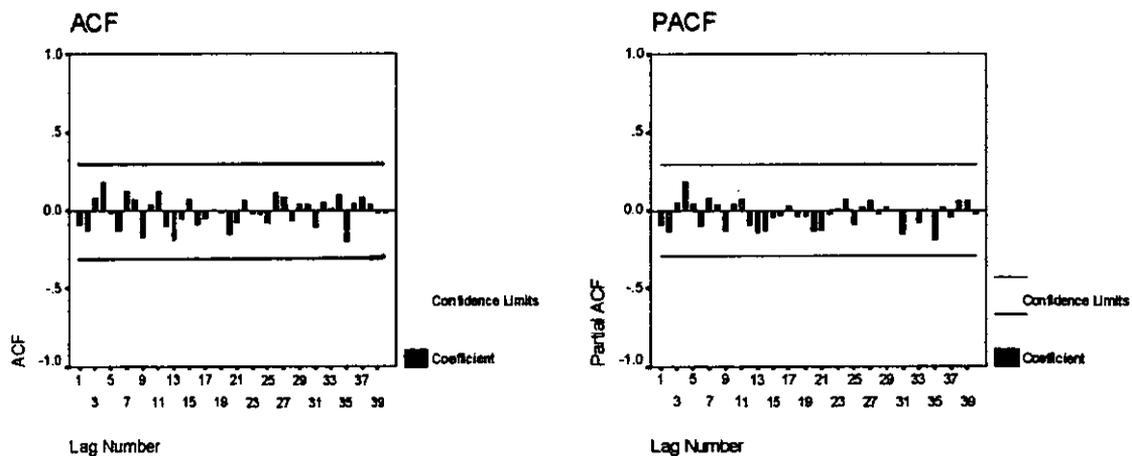
Gráfica 8: Serie temporal de los residuos del modelo ajustado



En la gráfica 8, correspondiente a los residuos (estandarizados) con relación al tiempo podemos observar que dicha secuencia se asemeja a una de ruido blanco, pues carece de tendencia y su varianza es constante.

Con la ACF y la PACF de los residuos podemos evaluar la hipótesis de que la secuencia de los mismos se comporte como ruido blanco, observando las autocorrelaciones muestrales de los residuos observados, los cuales debieran bajo esta hipótesis asemejarse a observaciones de variables aleatorias independientes con media 0 y varianza  $1/n$ . Para nuestro modelo ajustado tenemos que la ACF de los residuos observados caen dentro del intervalo  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  el 100% de las veces:

Gráfica 9: Función de Autocorrelación Simple (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF) de los residuos



El siguiente paso en la verificación de la bondad de ajuste consiste en realizar una prueba formal sobre la aleatoriedad de los residuos. De las siguientes pruebas que despliega el

programa ITSM96 para el análisis en el *dominio del tiempo* se utiliza la más confiable.

#### *La prueba de MCLEOD-LI PORTEMANTEAU*

Esta prueba toma a las autocorrelaciones muestrales de los residuos al cuadrado en conjunto en vez de verificarlos individualmente. El estadístico utilizado es:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \rho_{ww}^2(k)/(n-k)$$

donde  $\rho_{ww}(k)$  es la autocorrelación muestral de los residuos a un rezago  $k$ , y  $h = \sqrt{n}$ , donde  $n$  es el tamaño de la muestra. Si los datos fueron generados efectivamente por un modelo ARMA(p,q), entonces para un valor grande de  $n$ ,  $Q$  tendría una distribución aproximada  $\chi^2$  con  $h-p-q$  grados de libertad. La prueba rechaza el modelo propuesto a un nivel  $\alpha$  si el valor observado de  $Q$  es mayor que el cuantil  $(1-\alpha)$  de la distribución  $\chi^2_{h-p-q}$ .<sup>37</sup> Aquí tendríamos un valor de tablas  $\chi^2_{20,95} = 31.41 > Q = 17.77$ , por lo que para  $Q=20$ , **no se rechaza el modelo propuesto**, como puede ser apreciado del cuadro 5. Elegimos esta prueba por ser más potente que la de Ljung-Box, la cual es débil para rechazar modelos pobremente ajustados (la cual desde luego, tampoco rechaza el modelo ajustado, pues  $15.53 < 31.41$ ).

*Cuadro 5: Pruebas sobre aleatoriedad de los residuos del Modelo Ajustado (ITSM96)*

LJUNG-BOX PORTMANTEAU TEST:	Q = 15.53
MCLEOD-LI PORTMANTEAU TEST:	Q = 17.77

Hasta aquí el análisis en el dominio del tiempo, ahora abordemos el análisis en el dominio de las frecuencias con el objeto de ganar la mayor confiabilidad posible para el modelo ajustado a los datos del caso que nos ocupa.

#### **5.3.1.2 Análisis en el Dominio de las Frecuencias del Modelo 1**

El análisis espectral de una serie estacionaria tiene como principal objetivo detectar comportamientos cíclicos en los datos y la estimación de su respectiva función de densidad espectral<sup>38</sup>. El periodograma de la serie  $\{X_1, \dots, X_n\}$  esta definido por

$$I_n(\omega_j) = n^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-it\omega} \right|^2$$

donde  $\omega_j = 2\pi j/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, [n/2]$  son frecuencias en  $[0, \pi]$ , y  $[n/2]$  es la parte entera de  $n/2$ . Un valor grande de  $I(\omega_j)$  sugiere la presencia de un componente *simusoidal* en los datos en la frecuencia  $\omega_j$ .

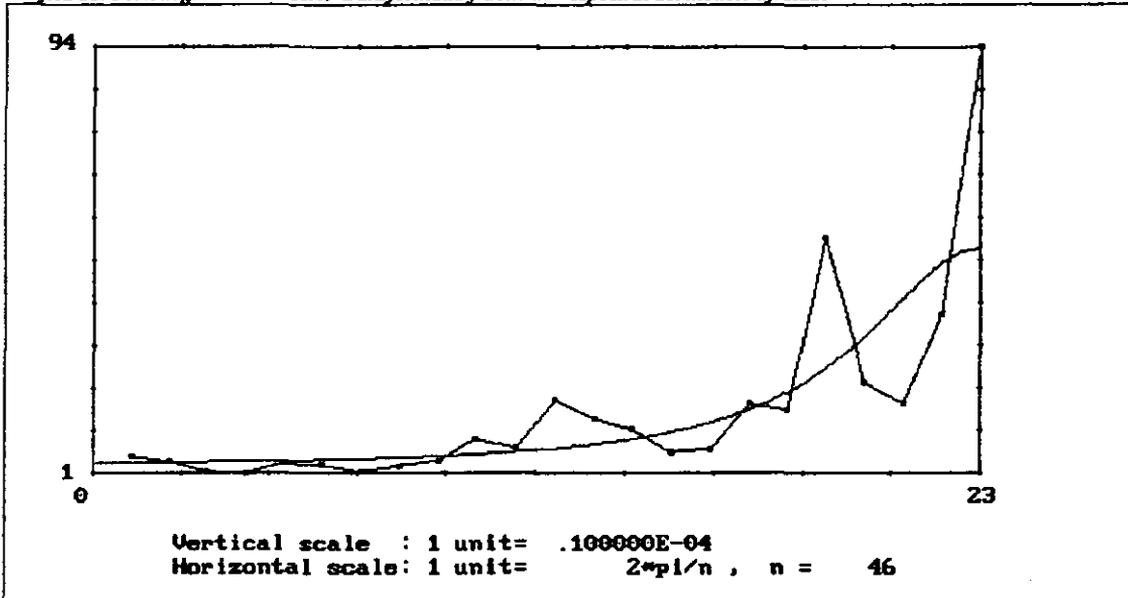
En relación con los datos originales, no es relevante hacer un análisis espectral, pues de entrada observamos que no hay periodicidad alguna (véase gráfica 2). Lo que sí es relevante

<sup>37</sup> ITSM for Windows, p.38.

<sup>38</sup> Véase Brockwell y Davis (1996), Secc. 4.1.

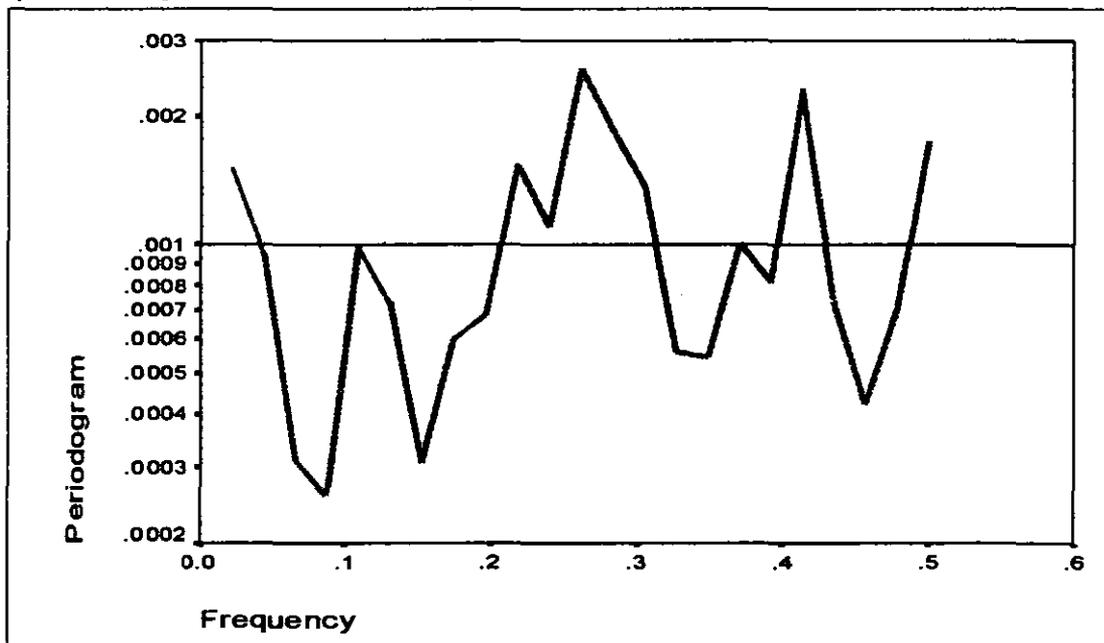
en este caso es comparar el periodograma basado en los datos transformados, con la densidad espectral del modelo, y observar la similitud entre tales constructos, mientras más similares sean, mejor estará captando el modelo ajustado la naturaleza de los datos. A continuación presentamos tal gráfica:

Gráfica 11: Periodograma de la serie transformada y densidad espectral del modelo ajustado



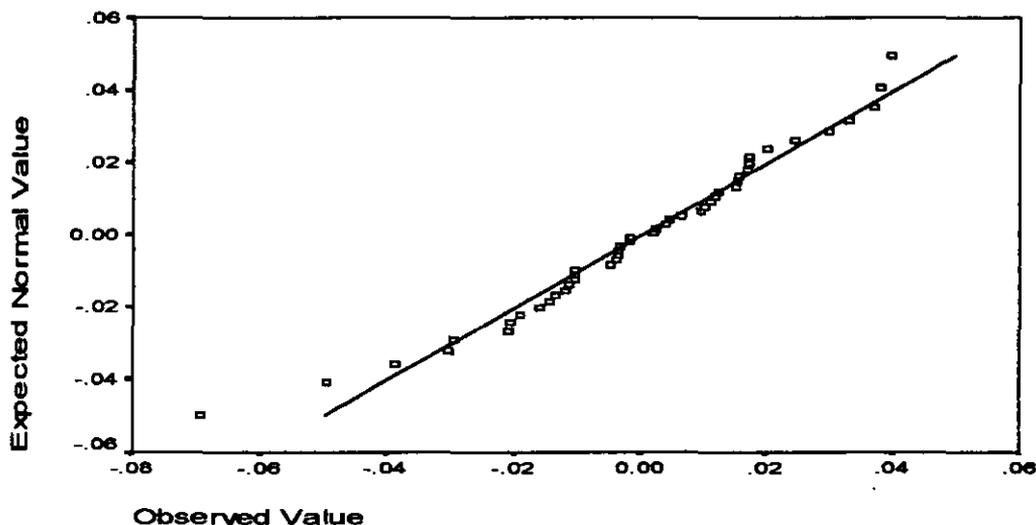
Podemos apreciar de la gráfica 11 que la densidad espectral del modelo ajustado captura bien las características del periodograma de la serie transformada, por lo cual podemos asumir que tenemos un modelo adecuado. Para corroborar lo anterior verificamos gráficamente los residuos desde la perspectiva de las frecuencias.

Gráfica 12: Periodograma de los residuos del modelo ajustado



El periodograma de los residuos presentado en la gráfica 12 sirve para verificar la compatibilidad de los residuos con el ruido blanco, en la misma podemos apreciar que no existe una frecuencia netamente dominante, por lo que en este caso la serie de residuos se *asemeja* a una realización de ruido blanco.

Gráfica 13: Periodograma acumulado de los residuos del modelo ajustado



Por su parte, la gráfica 13, del periodograma acumulado de los residuos (gráfica cuantil-cuantil), sustenta la hipótesis de que los residuos son independientes e idénticamente distribuidos, ya que, como se puede apreciar, los puntos no se encuentran muy separados de la diagonal.

### 5.3.2 Modelo 2: ARIMA(0,2,2)

El otro modelo candidato es el MA(2). Tomando en cuenta que se trata de una serie doblemente diferenciada tenemos un modelo ARIMA(0,2,2). Utilizando máxima verosimilitud obtenemos:

Cuadro 6: Estimación de los parámetros del modelo ajustado MA(2)

$$X_t = Z_t - 0.728Z_{t-1} + 0.316Z_{t-2} \quad \{Z_t\} \sim WN(0.0003, 0.0005)$$

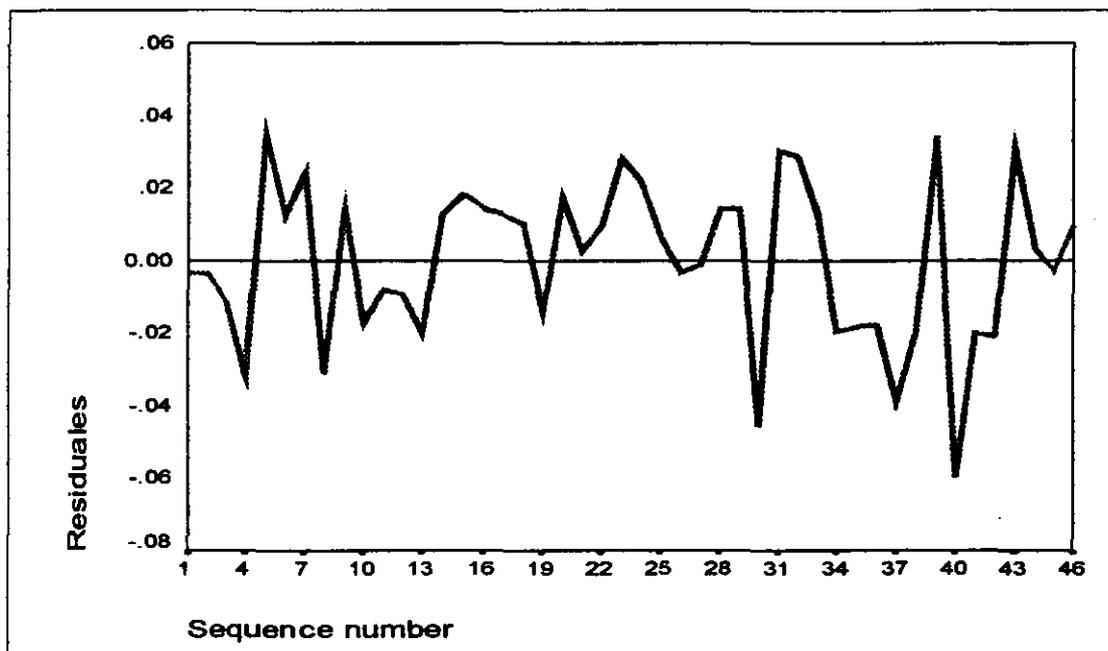
Como sabemos del cuadro 3 ambos coeficientes son significativos a un nivel de significancia del 5%. Este modelo tiene poca interpretabilidad de acuerdo al fenómeno de interés. El siguiente paso, corresponde a la validación del modelo propuesto.

#### 5.3.2.1 Diagnóstico Del Modelo 2

Si suponemos que nuestro modelo ajustado es el que genera los datos observados, entonces los residuos observados serán valores semejantes a los de una secuencia de *ruido blanco*, es

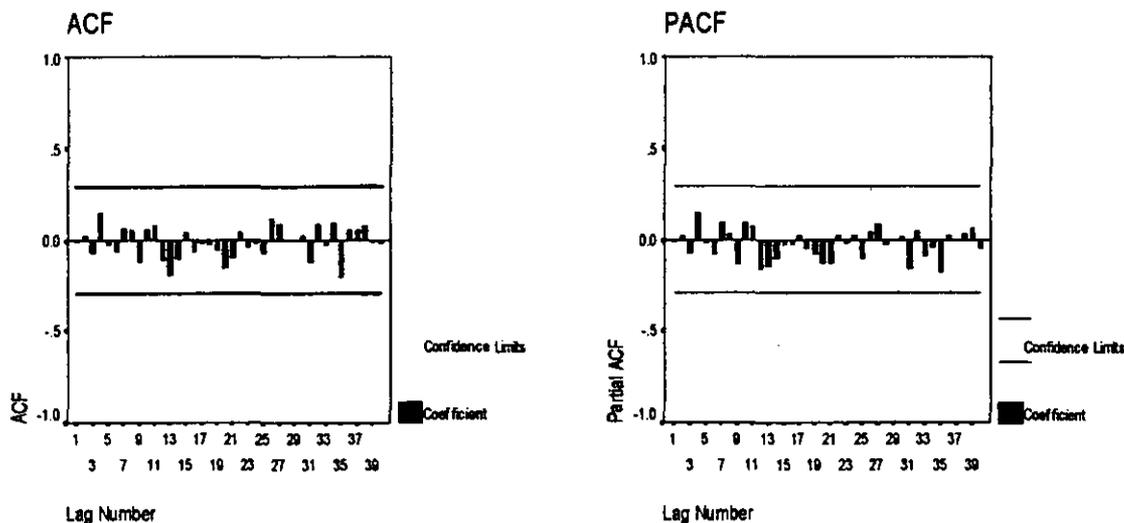
decir valores independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.). Entonces, para verificar lo apropiado de nuestro modelo debemos examinar la serie de residuos, y verificar que esta se *asemeje* a una secuencia de ruido blanco. En la gráfica 14, correspondiente a los residuos (estandarizados) con relación al tiempo podemos observar que dicha secuencia se asemeja a una de ruido blanco, pues carece de tendencia y su varianza es constante.

Gráfica 14: Serie temporal de los residuos del modelo ajustado



Con la ACF y la PACF de los residuos podemos evaluar la hipótesis de que la secuencia de tales residuos se comporte como ruido blanco.

Gráfica 15: Función de Autocorrelación Simple (ACF) y Función de Autocorrelación Parcial (PACF) de los residuos



Observando las autocorrelaciones muestrales de los residuos, los cuales debieran bajo esta hipótesis asemejarse a observaciones de variables aleatorias independientes con media 0 y

varianza  $1/n$ . Para nuestro modelo ajustado tenemos que la ACF de los residuos observados caen dentro del intervalo  $\pm 1.96/\sqrt{n}$  el 100% de las veces.

El siguiente paso en el chequeo de la bondad de ajuste consiste en realizar una prueba formal sobre la aleatoriedad de los residuos. De las siguientes pruebas que despliega el programa ITSMW para el análisis en el *dominio del tiempo*, se utiliza la más confiable.

#### *La prueba de MCLEOD-LI PORTEMANTEAU*

Aquí tendríamos un valor de tablas  $\chi^2_{20, 95} = 31.41 > 17.53$ , por lo que para  $Q=20$ , **no se rechaza el modelo propuesto**, como puede apreciarse del cuadro 7. Por supuesto, la prueba de Ljung-Box Portmanteau, una prueba menos poderosa tampoco rechaza el modelo ajustado.

*Cuadro 7: Pruebas sobre aleatoriedad de los residuos del Modelo Ajustado (ITSM96)*

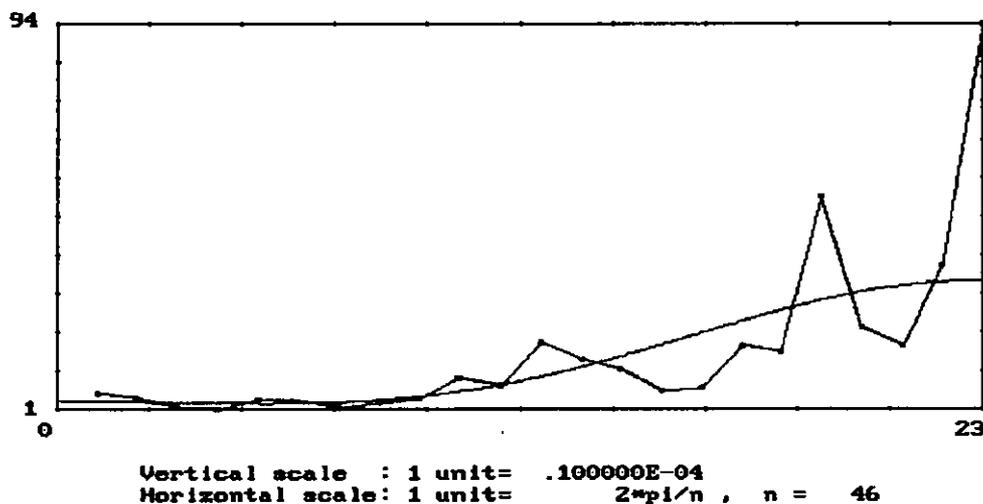
LJUNG-BOX PORTMANTEAU TEST:	Q = 11.30
MCLEOD-LI PORTMANTEAU TEST:	Q = 17.53

Hasta aquí el análisis en el dominio del tiempo, ahora se aborda el análisis en el dominio de las frecuencias.

#### **5.3.2.2 Análisis en el Dominio de las Frecuencias del Modelo 2**

Comencemos este análisis con el periodograma de la serie transformada y la densidad espectral del modelo propuesto:

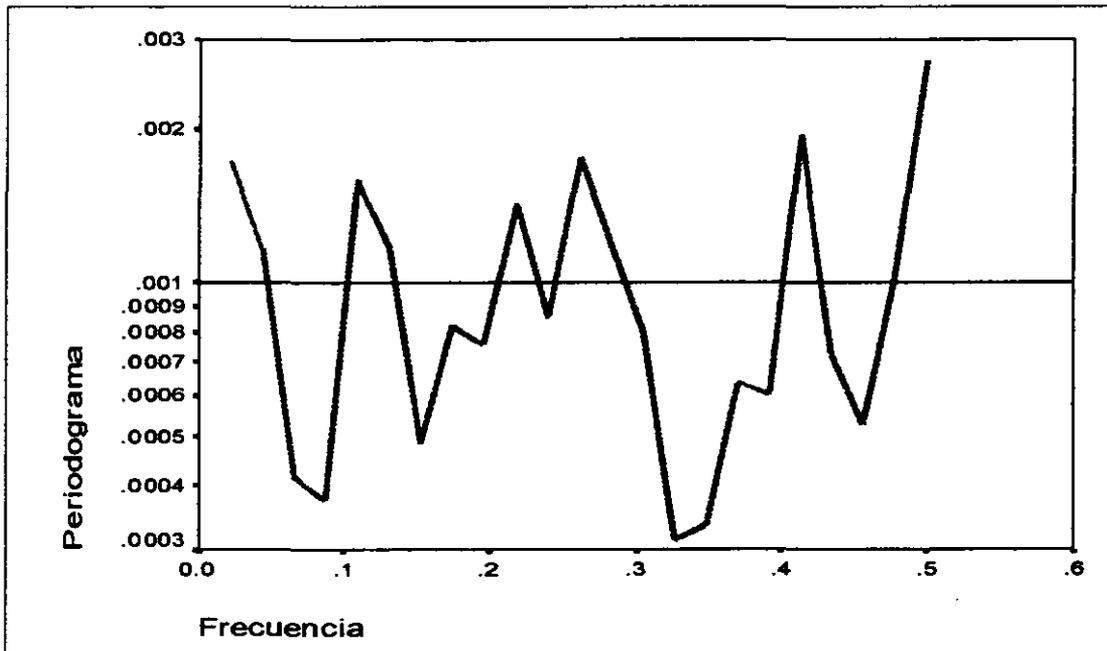
*Gráfica 17: Periodograma de la serie transformada y densidad espectral del modelo ajustado*



Podemos apreciar de la gráfica 17 que la densidad espectral del modelo ajustado captura razonablemente las características del periodograma de la serie transformada, por lo cual podemos asumir que tenemos un modelo adecuado. Para corroborar lo anterior examinamos

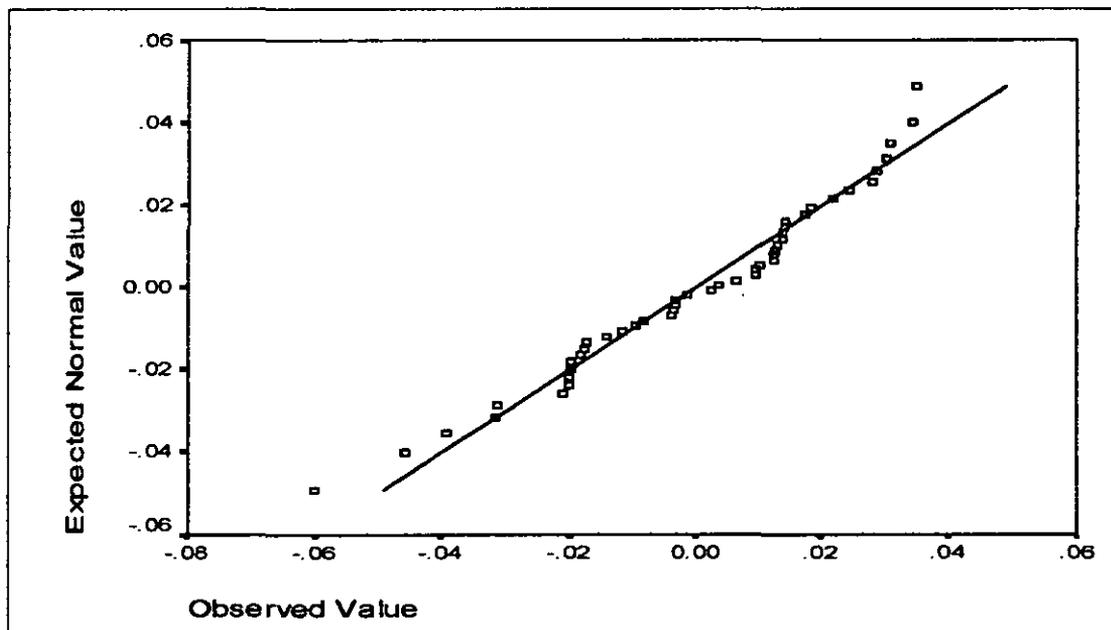
gráficamente los residuos desde la perspectiva de las frecuencias.

Gráfica 18: Periodograma de los residuos del modelo ajustado



El periodograma de los residuos presentado en la gráfica 18 sirve para verificar la compatibilidad de los mismos con el ruido blanco, en la misma podemos apreciar que no existe una frecuencia dominante, por lo que en este caso la serie de residuos se *asemeja* a una realización de ruido blanco.

Gráfica 19: Periodograma acumulado de los residuos



Por su parte, la gráfica 19, del periodograma acumulado de los residuos (gráfica cuantil-cuantil), sustenta la hipótesis de que los residuos son independientes e idénticamente distribuidos, ya que, como se puede apreciar, los puntos se encuentran muy próximos a la diagonal.

Tomando en cuenta el análisis espectral, y el estadístico AICC, se puede decir que ambos modelos, el ARIMA(1,2,0) y el ARIMA(0,2,2), se ajustan razonablemente bien a los datos, presentando muy poca diferencia entre ambos. Sin embargo, tomando en cuenta la naturaleza del fenómeno es plausible pensar que el nº de líneas telefónicas del año  $t$  depende del nº de líneas del año  $t-1$  razones por las cuales se concluye que el modelo más apropiado es el ARIMA(1,2,0). Utilizamos este modelo para los fines de proyección planteados en este trabajo<sup>39</sup>.

#### 5.4 Predicción de Valores 1989-1990.

Una vez que hemos probado formalmente la bondad de los modelos ajustados a la serie temporal de nº de líneas para el periodo 1941-1988, y elegido uno de ellos, el siguiente paso consiste en el pronóstico de valores para el periodo 1989-1990, con la finalidad de comparar los posibles resultados en la expansión del servicio telefónico en México si no se hubiese dado la *Reforma* de las telecomunicaciones, en relación con los resultados reales dado que efectivamente hubo tal *Reforma* del sector. En resumen, queremos ver si hubo un cambio de tendencia en la expansión de la industria telefónica en nuestro país, y si tal cambio es estadísticamente significativo.

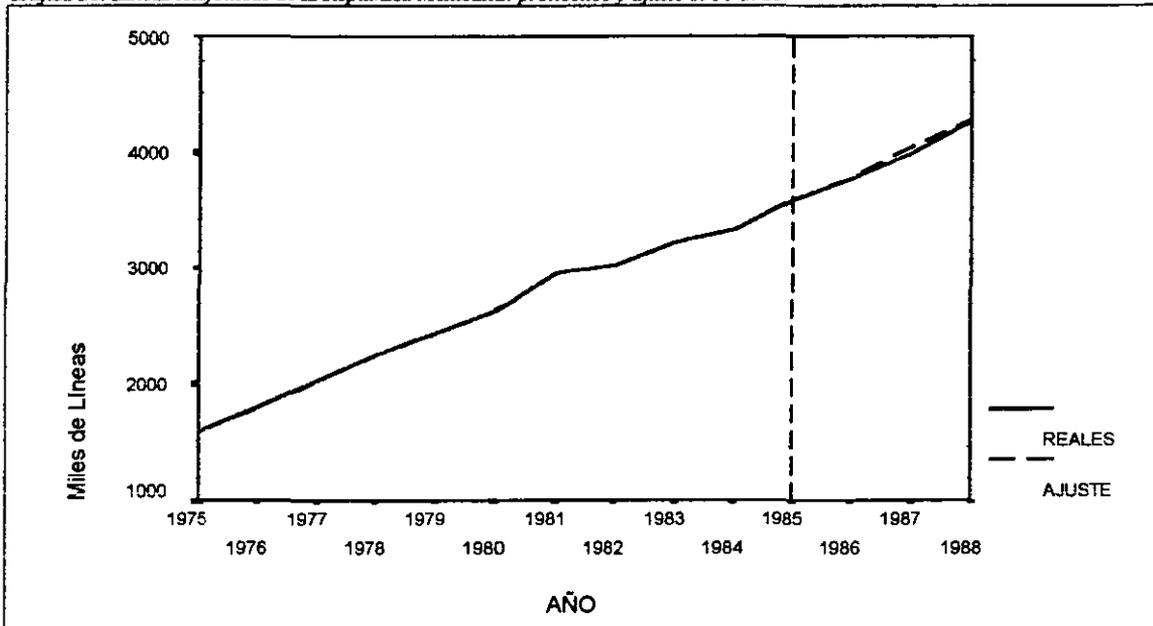
Dadas las observaciones  $X_1, \dots, X_n$  de una serie que se asume apropiadamente modelada como un proceso ARMA(p,q), es posible predecir valores futuros de la serie  $X_{n+h}$  de los datos y el modelo, calculando la combinación lineal  $P_n(X_{n+h})$  de  $X_1, \dots, X_n$  que minimice el error cuadrático medio  $E(X_{n+h} - P_n(X_{n+h}))^2$ . Donde  $P_n$  es el operador proyección<sup>40</sup>.

Como un primer paso y como manera de verificar que tan bueno es el modelo elegido para pronosticar valores futuros de la serie, realizamos un pronóstico para los años 1986-1988. Enseguida se prueba que tan bien ajusta tal predicción con los datos reales de esos años.

<sup>39</sup> Realmente los valores proyectados para cada uno de los modelos son bastante similares como se verá más adelante (Cuadro 8).

<sup>40</sup> Véase Brockwell y Davis (1991) p. 174.

Gráfica 20: Líneas telefónicas de la República Mexicana: pronóstico y ajuste 1986-1988



Obsérvese que los datos del pronóstico 1986-1988 se ajustan bien a los datos reales para el mismo periodo. Basándose en ello podemos argumentar que el modelo ajustado  $ARIMA(1,2,0)$  cumple razonablemente con los criterios de bondad de ajuste para ser utilizado en el pronóstico de futuros valores.

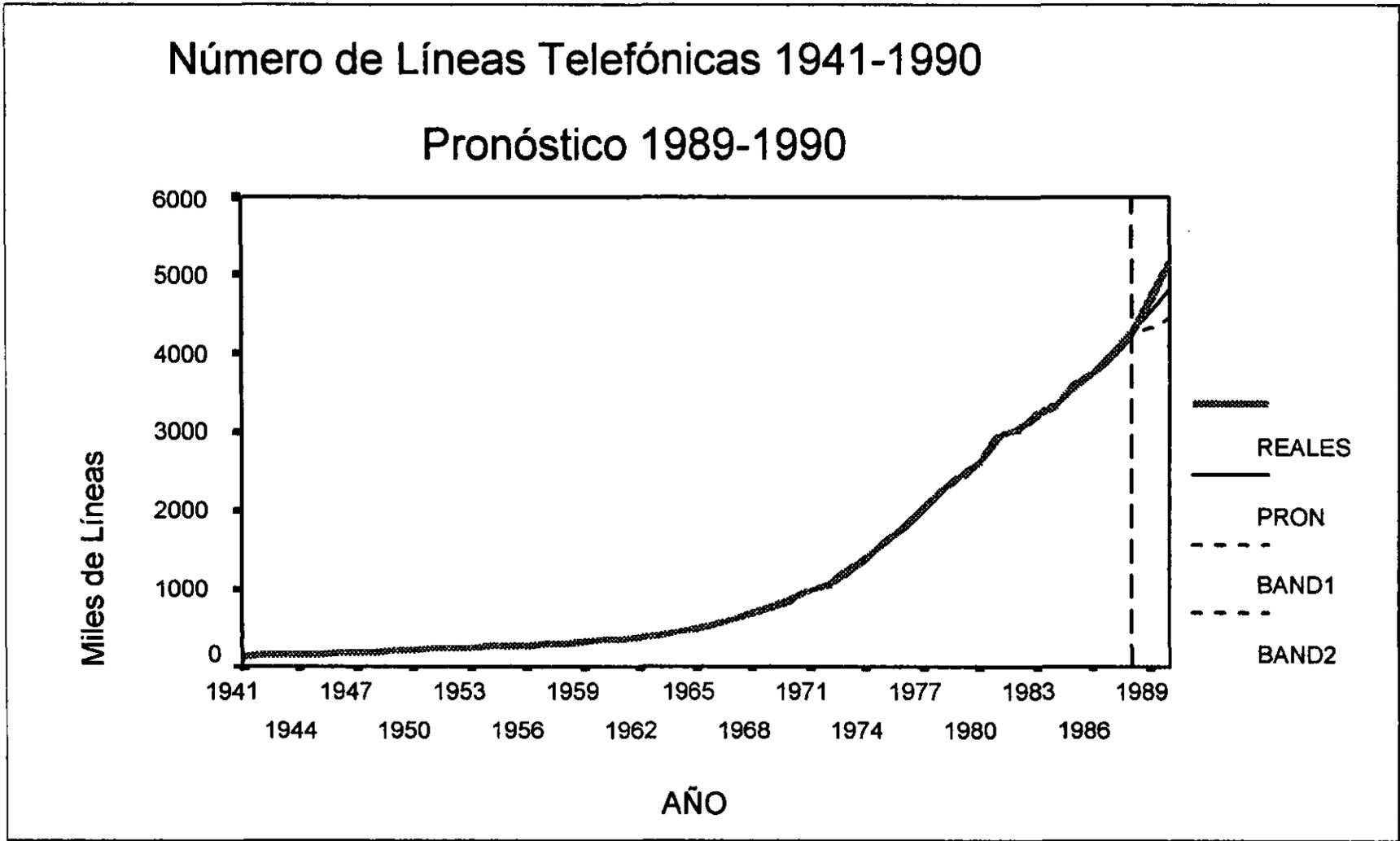
Bajo el criterio anterior, se pronostican los valores para el periodo 1989-1990 a partir del modelo  $ARIMA(1,2,0)$  ajustado a los datos de n° de líneas telefónicas 1941-1988. Tales valores pronosticados se presentan en el cuadro 8, en negritas, y en la gráfica 21.

Cuadro 8: N° de Líneas Telefónicas: 1941 - 1990

Año	Datos reales 1941-90	Tasa Crec. Anual	ARIMA(0,2,2) Con pronóst. 1989-1990	ARIMA(1,2,0) Con pronóst. 1986-1988	ARIMA(1,2,0) Con pronóst. 1989-1990
1941	137,2	-	137,2	137,2	137,2
1942	144,7	5.5	144,7	144,7	144,7
1943	152	5.0	152	152	152
1944	159,5	4.9	159,5	159,5	159,5
1945	165,8	3.9	165,8	165,8	165,8
1946	168,2	1.4	168,2	168,2	168,2
1947	180,2	7.1	180,2	180,2	180,2
1948	188,7	4.7	188,7	188,7	188,7
1949	202,9	7.5	202,9	202,9	202,9
1950	208,6	2.8	208,6	208,6	208,6
1951	224,3	7.5	224,3	224,3	224,3
1952	232,4	3.6	232,4	232,4	232,4
1953	243	4.6	243	243	243
1954	251,9	3.7	251,9	251,9	251,9
1955	257,1	2.1	257,1	257,1	257,1
1956	269	4.6	269	269	269
1957	282,2	4.9	282,2	282,2	282,2
1958	297,6	5.5	297,6	297,6	297,6
1959	316,5	6.4	316,5	316,5	316,5
1960	338,5	7.0	338,5	338,5	338,5
1961	355,8	5.1	355,8	355,8	355,8
1962	385,8	8.4	385,8	385,8	385,8
1963	412,4	6.9	412,4	412,4	412,4
1964	446,8	8.3	446,8	446,8	446,8
1965	494,9	10.8	494,9	494,9	494,9
1966	550,7	11.3	550,7	550,7	550,7
1967	612,6	11.2	612,6	612,6	612,6
1968	680,8	11.1	680,8	680,8	680,8
1969	759,2	11.5	759,2	759,2	759,2
1970	858,8	13.1	858,8	858,8	858,8
1971	975	13.5	975	975	975
1972	1051,6	7.9	1051,6	1051,6	1051,6
1973	1214,3	15.5	1214,3	1214,3	1214,3
1974	1391,5	14.6	1391,5	1391,5	1391,5
1975	1596,7	14.7	1596,7	1596,7	1596,7
1976	1796,8	12.5	1796,8	1796,8	1796,8
1977	2022,5	12.6	2022,5	2022,5	2022,5
1978	2253,3	11.4	2253,3	2253,3	2253,3
1979	2431,9	7.9	2431,9	2431,9	2431,9
1980	2633,8	8.3	2633,8	2633,8	2633,8
1981	2958,2	12.3	2958,2	2958,2	2958,2
1982	3034	2.6	3034	3034	3034
1983	3221,3	6.2	3221,3	3221,3	3221,3
1984	3335	3.5	3335	3335	3335
1985	3593,8	7.8	3593,8	3593,8	3593,8
1986	3776,2	5.1	3776,2	3782.3	3776,2
1987	3984,9	5.5	3984,9	4041.7	3984,9
1988	4261,7	6.9	4261,7	4282.4	4261,7
1989	4702,5	10.3	4521.80	-	4523,4
1990	5189,8	10.4	4813.62	-	4825,4

Fuente: Informes Anuales de TELMEX, The World's Telephones. Negritas: Pronóstico propio

Gráfica 21



En la gráfica 21 se puede comparar la serie real del n° de líneas telefónicas, con relación al pronóstico para el periodo 1989-1990, mismo que no toma en cuenta la *Reforma* telefónica en México. Al respecto, tomando en cuenta las bandas de confianza (a un nivel del 95%) de los datos predichos, no se puede concluir que la Reforma a sido benéfica para la expansión del servicio telefónico pues la banda de confianza superior se empalma con la serie real de los datos (véase cuadro 9 abajo), tampoco se puede concluir lo contrario. Si bien desde un punto de vista estrictamente estadístico no se puede concluir sobre la hipótesis planteada al principio de la investigación, existen algunos elementos correspondientes a la esfera económica que apuntan hacia una mejora del sector a partir de 1989.

Cuadro 9

### Líneas Telefónicas Miles

AÑO	Reales	Pronóstico	Lim. Inferior 95%	Lim. Super. 95%
1989	4702.5	4523.4	4320.9	4730.7
1990	5189.8	4825.4	4458.7	5210.0

Para comenzar nótese del cuadro 8 (columna tercera) que la tasa de crecimiento de la expansión de la red telefónica se redujo notablemente a partir de la crisis económica de 1982 (a 5.4% anual promedio aproximadamente de 1982 a 1988). Siendo Telmex una compañía de propiedad mayoritariamente pública, esta vio restringida su capacidad financiera para mantener sus tasas de crecimiento de la década anterior (1970's) de alrededor de un 12% anual.

Por otra parte, es notoria la poca prioridad que la telefonía tenía para el gobierno, prueba de ello lo es el caso del impuesto telefónico. Dicho impuesto originalmente creado en la década de los 60's pretendió ser utilizado en su totalidad en inversión en el sector telefónico, sin embargo para 1989 más de la mitad de tal impuesto se utilizaba en gastos distintos del sector público, por lo que los usuarios telefónicos estaban financiando programas gubernamentales en otros sectores<sup>41</sup>. Estos son sólo algunos de los elementos que reflejan la desatención del gobierno hacia el sector telecomunicaciones en general y telefónico en particular.

Desde una perspectiva económica, financiera y administrativa no hay nada que induzca a suponer que la pujante expansión de la red telefónica de los años 1989-1990 así como la introducción y expansión de servicios de valor agregado gracias a la modernización de la misma respondan a las condiciones del mercado y de la empresa imperantes hasta antes de la Reforma del sector<sup>42</sup>.

<sup>41</sup> Ramamurti (1994), p. 75-6

<sup>42</sup> Véase Galal et.al. (1994), p. 421-5

Cuadro 10

### N° de Líneas Telefónicas Tasas de Crecimiento (%)

Anual		
AÑO	Pronóstico	Reales
1989	6.1	10.3
1990	6.7	10.4
Promedio Anual		
1989-1990	6.4	10.3
Del Periodo		
1989-1990	13.2	22

Ahora, suponiendo que la expansión de la red telefónica se hubiese sostenido para los años 1989-1990 a una tasa de crecimiento anual de entre 5% y 6% como indica la tendencia de la década de los años 1980's y como lo ratifica el pronóstico efectuado, y realizando un análisis comparativo de tal pronóstico con relación a los datos reales tenemos:

- La tasa de crecimiento promedio anual del pronóstico sin *Reforma* se mantendría alrededor del 6.4%, en tanto que la misma con relación a los datos reales presenta un promedio del 10.3%<sup>43</sup>.
- La tasa de crecimiento del periodo correspondiente al pronóstico arroja una tasa del 13% contra un 22% del que efectivamente se observo, se trata de una diferencia de casi el doble en términos de crecimiento.

Lo anterior habla de un cambio positivo importante en términos de la tendencia de la expansión de la telefonía en México y por tanto un mayor bienestar social dadas las externalidades de este sector al resto de la economía, en términos de la introducción y expansión de servicios de valor agregado tales como la transmisión de información, transacciones electrónicas, mensajería electrónica, reuniones electrónicas, servicios de telefonía virtual, educación a distancia, el acceso a bases de datos y la diseminación de información. Estas externalidades positivas de la expansión de la red digital de telefonía plantean mejores condiciones para hacer negocios y para cumplir por parte del gobierno a una escala mayor y un menor costo con objetivos sociales tales como el de la educación y la comunicación con áreas rurales de difícil acceso.

<sup>43</sup> Es importante destacar que uno de los principales compromisos de Telmex, especificado en la *Modificación al Título de Concesión* de 1990 lo constituye la meta de crecer al 12% mínimo anual. Entre los años 1990 y 1994 la tasa de crecimiento anual promedio fue de un 12.6%.

## 6. CONCLUSIONES

La evaluación de la expansión del servicio telefónico en México (sin hacer distinción entre líneas comerciales y residenciales) que se hace en este trabajo corresponde a la primera fase del proceso de Reforma de la telefonía en particular y de las telecomunicaciones en general, es decir, aquella etapa correspondiente a la preparación de tal sector para la privatización de *Teléfonos de México*, así como del primer año de esta firma como compañía privada, años importantes en la preparación del sector para la introducción de competencia en todos los mercados que lo constituyen. Esta etapa corresponde a los años 1989-1990.

La expansión del servicio telefónico correspondiente al periodo 1941-1988 fue ajustada con 2 modelos, un ARIMA(1,2,0) y un ARIMA(0,2,2). Se eligió el primer modelo basándose en el estadístico AICC y a la lógica propia del fenómeno "el n° de líneas del año  $t$  depende del número de líneas del año  $t-1$ ". Aún cuando se eligió este modelo hay que señalar que las proyecciones de los modelos referidos son bastante similares. El modelo elegido (en realidad ambos) cumple cabalmente con todos y cada uno de los supuestos requeridos, en resumen que sus residuales se distribuyan independientes e idénticamente distribuidos, es decir, que se *asemejen* al ruido blanco.

La contrastación entre la proyección para el periodo 1989-1990 y los datos reales correspondientes a dicho periodo sugieren que el proceso de Reforma de la telefonía en México, al menos en su primera etapa, ha sido benéfica en cuanto a la expansión del servicio telefónico nacional:

- a) La tasa de crecimiento promedio anual del pronóstico sin *Reforma* se mantendría alrededor del 6.4%, en tanto que la misma con relación a los datos reales presenta un promedio del 10.3%.
- b) La tasa de crecimiento del periodo correspondiente al pronóstico arroja una tasa del 13% contra un 22% del que efectivamente se observó, se trata de una diferencia de casi el doble en términos de crecimiento.

Sin embargo, tomando en cuenta los intervalos (a un nivel de confianza del 95%) de los datos predichos por el modelo elegido, el ARIMA(1,2,0), no se puede concluir que la Reforma a sido benéfica para la expansión del servicio telefónico pues la banda de confianza superior se empalma con la serie real de los datos, tampoco se puede concluir lo contrario. Si bien desde un punto de vista estrictamente estadístico no se puede concluir sobre la hipótesis planteada al principio de la investigación, existen algunos elementos correspondientes a la esfera económica que apuntan hacia una mejora del sector a partir de 1989, entre ellos:

- a) La tasa de crecimiento de la expansión de la red telefónica se redujo notablemente a partir de la crisis económica de 1982 (a 5.4% anual promedio aproximadamente de 1982 a 1988).

- b) Siendo Telmex una compañía de propiedad mayoritariamente pública, ésta vio restringida su capacidad financiera para mantener sus tasas de crecimiento de la década anterior (1970's) de alrededor de un 12% anual.
- c) La desatención del gobierno hacia el sector telecomunicaciones en general y telefónico en particular. Prueba de ello lo es el caso del impuesto telefónico. Dicho impuesto originalmente creado en la década de los 60's pretendió ser utilizado en su totalidad en inversión en el sector telefónico, sin embargo para 1989 más de la mitad de tal impuesto se utilizaba en gastos distintos del sector público.
- d) A raíz de la privatización Telmex se comprometió entre otras cosas a mantener una expansión de la red a una tasa mínima del 12% anual, el doble del promedio de la década anterior (1980's).

**BIBLIOGRAFIA**

Bladt, Mogens. *Applied Time Series Analysis*. Documentos de trabajo, CEE de El Colegio de México, 1995.

Brockwell, P y Davis, R. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag, Second edition, 1996.

Brockwell, P y Davis, R. *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, Second edition, 1991.

Brockwell, P y Davis, R. *ITSM for Windows: A User's Guide to Time Series Modelling and Forecasting*, Springer-Verlag, 1994.

Cowhey Peter. *Changing Networks: Mexico's Telecommunications Options*, University of California, 1989.

Galal et. al. *Welfare Consequences of Selling Public Enterprises: An Empirical Analysis*, The World Bank, 1994.

Hudson H. *Global Connections*, Van Nostrand Reinhold, New York 1997.

Kathleen Griffith, "Telecommunications in Mexico" en Center for Telecommunications Research, Columbia University. Página de internet: [www.columbia.edu](http://www.columbia.edu)

Kendall, Maurice G. "Time Series" London, Griffin, 1976.

OECD, *Communications Outlook 1997*.

Ramamurti, R. *Privatizing Monopolies*, The Johns Hopkins University Press, Maryland 1996.

Ruelas A. *La Revolución de las Telecomunicaciones en México y los Estados Unidos*, III, UNAM, 1995.

**UNSW, *Stochastic Models For Actuarial Applications*, Sidney, Australia, 2001.**

**Schmalensee & Willing. *Handbook of Industrial Organization*, vol. I, Amsterdam, North Holland, 1989.**

**Teléfonos de México, Reportes Anuales, años 1989-1998.**

**Tirole, J. *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press, Massachusetts 1992.**

**Wei, W. W. S. *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley Publishing Co. 1990.**