



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**DESCRIPCION DE ESTADOS RELAJADOS EN
PLASMAS A TRAVES DE PRINCIPIOS
VARIACIONALES**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

F I S I C O

Presenta:

Ismael Molina Romero

Director de tesis: Dr. Julio Javier Martinell Benito



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

2001

292453



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

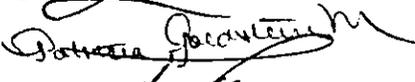
Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
 "Descripción de estados relajados en un plasma a través de principios variacionales"

realizado por MOLINA ROMERO ISMAEL
 con número de cuenta 89170111 , pasante de la carrera de Física.

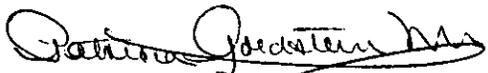
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
 Propietario

- Propietario DR. JULIO JAVIER MARTINELL BENITO 
- Propietario DR. ROLANDO CRISOSTOMO CASTILLO CABALLERO 
- Suplente DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN 
- Suplente DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE 
- Suplente DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ 

Consejo Departamental de Física.


 DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
 Coordinadora de Licenciatura



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCRIPCION DE ESTADOS RELAJADOS EN PLASMAS A
TRAVES DE PRINCIPIOS VARIACIONALES

TESIS

Que para obtener el grado de:

FISICO

Presenta:

Ismael Molina Romero

Dr. Julio Javier Martinell Benito

2001

A los dos únicos seres humanos que amo,
a mi madre Socorro Carmen R. G. y
a mi querida, amada, más aún, adorada, Norma J. B.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer:

Al Dr. Julio J. Martinell B. por su paciente, generosa y educativa guía en la realización de este trabajo.

Al Dr. Rolando C. Castillo C. por su orientaciones clave en mecánica estadística y teoría de la información.

Al Dr. Virgilio Beltrán L. está dedicado el capítulo VI, por haber sido mi maestro durante la carrera. y por ser uno de los pocos investigadores que se opuso al aumento de las cuotas desde que les fuera propuesto por el entonces rector y por ser, otra vez, de los pocos que realmente llevaron adelante la idea de la universidad como ente separado de la política (en parte, tal vez, por su lamentable enfermedad, asumió un papel neutral en el conflicto, que correspondía necesariamente a esta "cosa"; aunque también, como me entere recientemente por convicción propia), es decir, la mentada "teoría" academicista; por haber sido en este punto consecuente, socialmente progresista y honesto, en oposición a todos los demás que se decían ser epígonos de aquella, pero que al final se mostraron como realmente son. A todos los demás académicos que asumieron las posturas del Dr. Virgilio, pero que no conozco, gracias también.

Por demás esta decir que el que escribe no comparte las ideología de los academicistas, pero en un sentido diferente a la lección que dieron aquellos a la comunidad universitaria acerca de la aplicación de aquella "cosa", que no me interesa exponer aquí y, tal vez, muy extremadamente probable, en ninguna parte.

Agradezco a la DGAPA-UNAM por el apoyo recibido para realizar el servicio social y parte de la presente tesis en su proyecto No. IN117498 . Y al CONACYT por su apoyo para realizar estudios de doctorado, aunque vía beca de proyecto No. 27974-E.

INDICE

DESCRIPCION DE ESTADOS RELAJADOS EN UN PLASMA A TRAVES DE PRINCIPIOS VARIACIONALES.

	Pagina
DEDICATORIA	II
AGRADECIMIENTOS	III
INDICE	IV
RESUMEN	V
INTRODUCCION	VI
Capítulo I. El principio variacional: una introducción histórica.	1
1.1. Primeras especulaciones acerca del principio.	2
1.2. El desarrollo de Euler del principio.	4
1.3. La descripción de Lagrange.	8
1.4. Aplicación del principio en termodinámica: los estados de equilibrio termodinámicos.	10
1.4.1. Generalidades	10
1.4.2. La formulación variacional de la segunda ley de la termodinámica.	11
Capítulo II. Caracterización de los estados de equilibrio del plasma a través de un principio variacional sobre la entropía.	14
2.0. Preliminar acerca del plasma.	14
2.1.1. Antecedentes.	16
§El teorema H.	16
2.1.2. Teoría de la información	23
2.2. Termodinámica del equilibrio para plasmas magnetizados.	26
§El límite termodinámico	28
Capítulo III. Aplicaciones de los principios variacionales para la entropía y la producción de entropía, en plasmas.	31
3.1. La interacción entre el sistema colectivo y el medio circundante para un sistema "cerrado": el pich de campo invertido.	31
3.2. El sistema "abierto": el tokamak	34
§Leyes de escalamiento.	38
Capítulo IV. El estado relajado del plasma segun el principio variacional sobre la energía magnética.	39
Apéndice al capítulo IV.	46
Capítulo V. Minimización de la producción de entropía para caracterizar estados relajados del plasma.	47
Capítulo VI. El principio variacional sobre la producción de entropía para la obtención de perfiles de densidad y temperatura.	54
Conclusión.	57
Bibliografía.	59
Artículos.	60

RESUMEN

En lo fundamental la tesis está centrada en describir los estados relajados en un plasma en configuraciones toroidales. Para describir estos estados de equilibrio se hará uso de principios variacionales asociados a la minimización de la energía del plasma bajo ciertas constricciones, es decir la parte mecánica del modelo. Por el lado termodinámico se describirá al plasma a través de la minimización de la producción de entropía; y por otro lado, la parte "termoestática", con base a la maximización de una funcional de entropía bajo ciertas constricciones. La forma de las funcionales de entropía en su dependencia de las "variables relevantes de información" del sistema, se deducirá metódicamente a través de la teoría de la información (capítulos II y III).

La parte más relevante es hallar, a partir de estos principios, la consistencia de perfiles para plasmas confinados magnéticamente. En particular se contribuye al hallar una forma del perfil de densidad además del de temperatura con el principio variacional sobre la producción de entropía en el capítulo VI. Para esto, se hace uso de la teoría lineal de la termodinámica de procesos irreversibles de Prigogine (capítulo V).

INTRODUCCION

La presente tesis está orientada a describir los estados de equilibrio relajados en un plasma que está confinado magnéticamente. En ésta, el lector interesado hallará, además, en el capítulo I, una pequeña introducción histórica al principio variacional para la mecánica clásica. Como se puede apreciar, tales principios sirven para dar una interpretación filosófica natural de las leyes de la mecánica newtoniana. En este mismo sentido es que están orientados los principios variacionales para describir al plasma.

No se pretende hacer una revisión exhaustiva de todos los trabajos basados en principios variacionales que han sido publicados, sino de describir algunos de los resultados que se consideran de interés.

En el capítulo II se presenta una colección de resultados acerca de mecánica estadística, teoría cinética y teoría de la información, haciendo énfasis un poco más en éstas dos últimas, pues la teoría cinética permite, en principio, caracterizar estados fuera del equilibrio termodinámico global. En efecto, es necesario considerar esta teoría o la teoría de la termodinámica de procesos irreversibles (de la cual uno de sus principales resultados viene a la mente: el principio de minimización de la producción de entropía), dado que el plasma tiende a alcanzar estados estacionarios, en los cuales el sistema no está aislado del exterior. Se presenta también un principio variacional sobre la entropía, definida con la teoría de la información, que describe los efectos asociados con los campos magnéticos interactuando con el plasma.

Este principio variacional se aplica en el capítulo III a dos problemas particulares, de interés en la investigación de fusión nuclear: el "pinch" de campo invertido y el tokamak. Estos son dos aparatos de confinamiento magnético del plasma que tienen cierta similitud: están formados por una cámara de vacío en forma de toro, con un campo magnético toroidal generado por bobinas externas. En lo que difieren es en el estado del plasma que se encuentra dentro de la cámara. En el tokamak se induce una corriente toroidal de intensidad moderada en el plasma (que actúa como el secundario de un transformador) que da lugar a un campo magnético poloidal de menor magnitud que el campo toroidal. En el pinch de campo invertido se genera un sistema de corrientes más complejo y tal que el campo magnético poloidal producido por la componente toroidal de la corriente del plasma es comparable en magnitud al campo toroidal. Esto hace posible que, en el estado relajado del plasma, el campo toroidal invierta su dirección en la región del borde, hecho por el cual recibe su nombre este aparato. El "pinch" es la palabra inglesa que se refiere al efecto de autoconfinamiento que produce una corriente axial en un plasma, y es el que opera tanto en el tokamak como en el pinch de campo invertido. La necesidad de tales configuraciones es impedir que el plasma, que está a altas temperaturas, (del orden de 100-150 eV para el pinch de campo invertido y de $> 1\text{keV}$ para el tokamak¹) choque con las paredes de la cámara de vacío del aparato. Como se verá en el capítulo IV, el estado del plasma del pinch de campo invertido corresponde a una configuración de mínima energía sujeta a ciertas constricciones, como fue propuesto por J.B. Taylor en 1974. Además, con la expresión de entropía obtenida en el capítulo II se mostrará que el mismo estado relajado puede obtenerse de un principio de máxima entropía, acorde con la teoría de la información.

En el tokamak, el campo poloidal confina al plasma mientras que el toroidal B_z lo mantiene estable en un estado de equilibrio prácticamente "estático", en el que tiene un balance de la presión del plasma (p) con el campo magnético. La corriente toroidal, que inicialmente se induce en la superficie del plasma, debido a la resistividad de éste, se va difundiendo hacia el interior, en un intervalo de tiempo $\tau \sim \frac{4\pi L^2}{c\eta} \sim 200$ seg., donde L es una escala del tamaño del plasma y η su resistividad, haciendo que se alcance un estado casi estacionario, o relajado, para la corriente². Este estado autoconsistente, es el que se trata de explicar con un principio variacional sobre la producción de entropía (ver los capítulos V y VI). Es necesario recurrir a éste principio variacional para el tokamak por ser un sistema disipativo de energía. Además, por ser mayor el campo toroidal que el poloidal se producen otros efectos³ que si bien permiten también procesos de reconexión magnética (como en el pinch de campo invertido) en ciertas regiones del plasma (v. gr. oscilaciones de diente de sierra cerca del eje toroidal), produciendo estados relajados locales, sin embargo, no son relevantes para explicar el estado relajado global. Se mencionará también que algunos autores (Kadomtsev, al mismo tiempo

¹ $T = 1$ eV corresponde a $1.16 \times 10^4 K$.

² Ver las magníficas discusiones en los libros de Goldston R.J., Rutherford P.H. *Introduction To Plasma Physics*. Ed. Institute Of Physics Publishing. Inglaterra. 1995. y Kadomtsev B.B. *Tokamak Plasma: A Complex Physical System*. Ed. Institute Of Physics Publishing. Inglaterra. 1992.

³ Ver en las secciones 3.11, 7.1 a 7.3 y en el cap. 9, la discusión sobre estos puntos para el tokamak en op. cit. de Kadomtsev, o en el cap. IV de la presente tesis.

que Hsu J.Y. y Chu M.S., y Biskamp D.⁴) han propuesto una manera alternativa para hallar la consistencia de perfiles basados en un principio variacional sobre la energía "potencial".

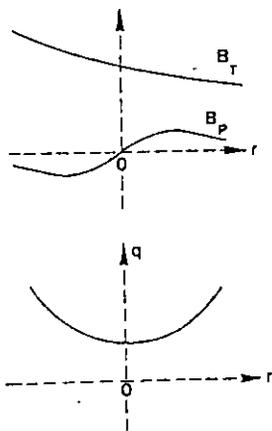
Para entender las diferencias entre el tokamak y el pinch de campo invertido, se puede recurrir a su caracterización via el concepto del factor de seguridad q , que se define como

$$q(r) = \frac{rB_t}{RB_p}, \quad (1)$$

donde B_t es el campo magnético toroidal, B_p es el campo magnético poloidal, R es el radio mayor del toro y r el radio menor. Esta cantidad, indica por tanto, cual es la magnitud de la torsión de la línea helicoidal del campo en r normalizada a la circunferencia del toro. Ahora bien, se ha mostrado⁵ que se puede establecer una condición de estabilidad del plasma en términos de q , descrita por la siguiente desigualdad

$$\frac{r}{4} \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{dr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_t^2} \frac{dp}{dr} (1 - q^2) > 0, \quad (2)$$

con μ_0 igual a la permeabilidad magnética. De esta ecuación se observa que la estabilidad puede ser obtenida en dos límites opuestos. En primer lugar, si la torsión varía poco en función del radio, el primer término es despreciable. En este caso, observamos que en la práctica el gradiente de presión es negativo y desestabilizante. La ec.(2) indica que la condición para que exista estabilidad es que, $q(r) > 1$. Este es el límite que se emplea en el caso del tokamak, para el cual el campo magnético toroidal es mayor que el poloidal, excepto en una pequeña región cercana al eje magnético. Bajo estas condiciones la forma de los perfiles de las componentes del campo magnético y del factor de seguridad para el tokamak, se observan como se ilustra en la siguiente figura.

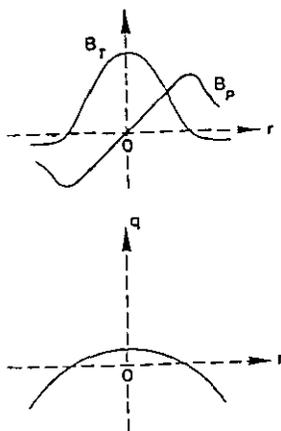


Typical magnetic field and safety factor profiles for the Tokamak configuration. $q(0) > 1$ is required for stability.

⁴ Hsu J.Y., Chu M.S., On the tokamak equilibrium profile, Reporte GAA18275, GA Technologies (1986), Biskamp D., Preprint IPP 6/258, Max Plank Institute für Plasma Physik (1986).

⁵ Ver, por ejemplo, Miyamoto K. Plasma Physics For Nuclear Fusion, Ed. MIT, 1989. Capítulo IX.

En el caso del pinch de campo invertido se emplea el límite opuesto. El campo poloidal es comparable al toroidal, por lo que $q < 1$, y para que (2) se cumpla, es necesario que exista el suficientemente cizallamiento de las líneas de campo ($\frac{dq}{dr}$) de una superficie magnética a otra. Entonces la forma de los perfiles del campo magnético y de q se verán como se muestra en la figura siguiente.



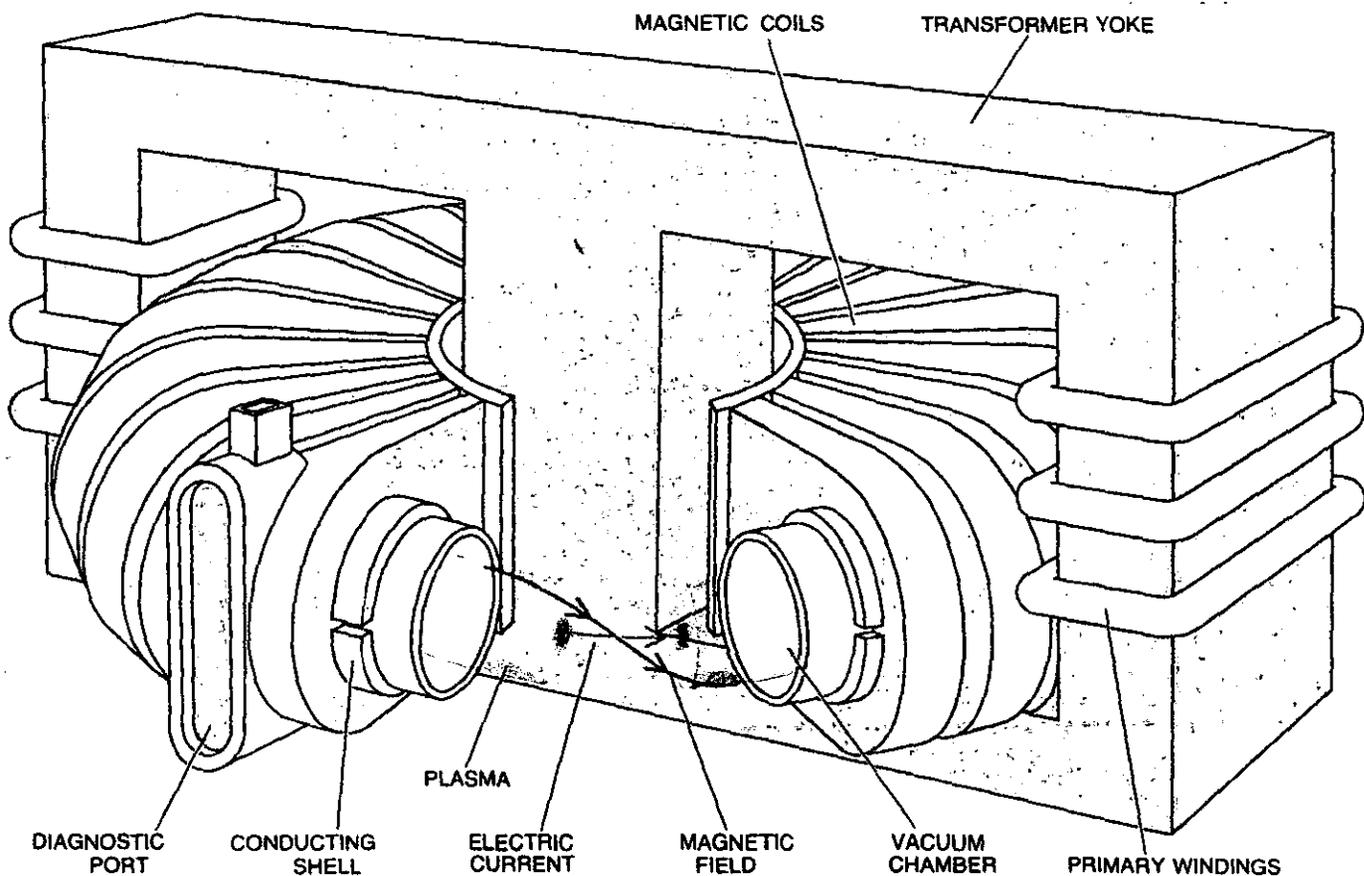
Typical magnetic field and safety factor profiles for the RFP configuration.

Las superficies racionales, para las cuales es más probable que ocurran efectos de reconexión, son más abundantes en la región en la que $q(r) < 1$. Por ello, este tipo de fenómenos se presentan cerca del eje magnético en el tokamak, y masivamente en el pinch de campo invertido. En este último originan una transformación del campo magnético poloidal en campo toroidal, mediante un complicado mecanismo⁶. Esto es lo que subyace en el proceso de relajación, en el cual se tiende a minimizar la energía de campo magnético. En el caso del tokamak, en contraste, la relajación tiene un carácter diferente. La minimización cruda de energía de campo magnético correspondería a una disrupción del plasma, que es indeseable. Por lo tanto, en su caso deben explorarse otro tipo de principio variacional.

Se debe de señalar que hasta donde se sabe, no ha sido posible dar preferencia a un principio variacional sobre otro. Además de que es necesario distinguir a los estados de equilibrio "estático" de los estados "relajados" que se proponen, ya que los primeros ocurren en un intervalo de tiempo menor que los segundos, de manera que el plasma se supone que ésta en un estado de equilibrio "estático" fundamentado en un principio variacional sobre la minimización de la energía (ver el capítulo IV), mientras que el plasma continua evolucionando a un estado relajado descrito por un principio variacional sobre la producción de entropía. Con la presente exposición se trata de dar una imagen de conjunto de las distintas teorías propuestas para estudiar los plasmas confinados magnéticamente.

Para finalizar, se desea resaltar que en el capítulo VI se propone un cálculo que podría justificar, a partir del principio variacional sobre la producción de entropía, la forma de los perfiles de densidad y de temperatura en un tokamak. Se muestra un dibujo esquemático de un tokamak para ilustración del lector poco enterado acerca de éstos.

⁶ Dreicer H. Topics in Reversed Pinch Physics. Physica Scripta. Vol. T2 /2. pp. 435-442. 1982.



TYPICAL TOKAMAK is depicted in this schematic diagram. The hot plasma, or gas of charged particles (*color*), is confined on a nested complex of magnetic surfaces composed of helical magnetic-field lines, only one of which is indicated (*black arrows*). The helical magnetic field is the resultant of two component fields (*not shown here*), which are oriented at right angles to each other. The toroidal component is set up by the circular array of wedge-shaped coils distributed around the toroidal plasma chamber. The poloidal component is set up by a toroidal current (*colored arrow*) that flows inside the plasma; this toroidal current is in turn cre-

ated by a toroidal electric field produced by a transformer consisting of a set of primary windings around an iron yoke. (The plasma itself constitutes the secondary winding.) A plasma configuration of this type, in which a doughnut-shaped plasma is subject to a constricting force generated by the current flowing in it, is called a toroidal pinch; a toroidal diffuse pinch is one in which the current is distributed over the cross section of the plasma. The conducting shell keeps the plasma column from expanding in the direction of the major radius. The diagnostic port (*lower left*) provides access for measuring various characteristics of the plasma column.

DESCRIPCION DE ESTADOS RELAJADOS EN PLASMAS A TRAVES DE PRINCIPIOS VARIACIONALES

CAPITULO I. EL PRINCIPIO VARIACIONAL: UNA INTRODUCCION HISTORICA

La física es la ciencia natural que se ocupa de la materia y la energía-toda la materia, toda la energía y sus posibles interacciones-.....

El oponente más influyente del atomismo no fue otro que Aristóteles, cuya propia teoría del movimiento no podía aceptar el vacío, y por ello rechazó al átomo. Epicuro (341-270 a. n. e.), el bondadoso moderado, el moralista, fue el último gran exponente griego del atomismo. Sus enseñanzas fueron muy populares, aún hasta la era romana; Ciceron y Lucrecio fueron ardientes epicúreos.

Irónicamente, los epicúreos romanos de la última época fueron libertinos, sensuales en exceso - los clásicos tipos de película erótica con orgías y borracheras-. Cuando el cristianismo dominó en Roma, el libertinaje, la lujuria, el ateísmo y el atomismo fueron sinónimo de paganismo. Cuando la virtuosa plebe quemó la gran biblioteca de Alejandria (aproximadamente 390 d.n.e.), la voluntad de la nueva devoción quedó clara y el atomismo se escondió en la sombra, para no reaparecer hasta más de mil años más tarde....

Mientras no se acepte la vulnerabilidad a la refutación, es fácil construir una teoría física de algún fenómeno a la que todas las observaciones deben ajustarse, una teoría tan maravillosamente amplia que acepte cualquier posibilidad. Tal formulación no sólo será irrefutable, sino que ni siquiera podrá considerarse científica. Si yo mantengo, como hizo Santo Tomás de Aquino, que ángeles invisibles mueven los planetas en sus órbitas, podría explicar todo el movimiento planetario y sin correr el riesgo de ser refutado. Eso no es ciencia. Una teoría en que todo sea inteligible y no corra el riesgo de ser refutada no proporcionará ninguna comparación.

Hecht E. Física en perspectiva.

Como no es común en los estudios sobre los principios de la mecánica y la termodinámica hacer mención a las primeras especulaciones realizadas acerca de éstos, el presente capítulo está dedicado a tratar de dar una pequeña introducción a este tema. Además se espera que la exposición sirva también para aclarar la metodología de la aplicación de los principios variacionales, ya que estos se utilizarán en los próximos capítulos. El autor de la presente tesis espera también que se aprecie, como parte relevante de la exposición, lo que se entiende por una investigación científica moderna a la luz de los trabajos de algunos de los grandes científicos del siglo XVIII. ¿Qué es lo que se entiende por tal investigación? Como se verá más adelante, Lagrange (1736-1813) en su *Mécanique Analytique*; mostraría que el principio de mínima acción, junto con la ley de conservación de la energía, es equivalente a las leyes de movimiento de Newton, dejando de lado las especulaciones metafísicas de las que se sirvieron Maupertius (1698-1759) y Euler (1707-1793) para formular el principio. Puesto en las propias palabras de Laplace (1749-1827): "Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothese". Esta fue la respuesta de Laplace, cuando Napoleón Bonaparte le preguntaba por qué no mencionaba a ningún creador en su monumental *Mécanique Celeste*.

El que escribe consideró apropiado añadir al inicio de cada capítulo ya sea una cita de algún libro en conmemoración de un científico, en donde se evidencia alguna admiración por este (ver el capítulo II, acerca de Boltzmann, v. gr.), o donde se da una primera referencia a una teoría (ver el capítulo V, v.gr.) , o donde se citan pensamientos que considero correctos acerca de lo que debería de ser la actitud de alguien que se considere científico. Sobre estas últimas, se desea aclarar que complementan la exposición que sigue, con la salvedad de que se deja al lector (que desee) coordinar las ideas que puede generar hacia un pensamiento materialista de ver las cosas, se hace en un lenguaje esópico y cortado, pero se hizo así para ahorrar espacio y tiempo de exposición de un tema que queda apartado de la exposición principal.

1.1. Primeras especulaciones acerca del principio

El marco general bajo el cual tuvo desarrollo la ciencia, en su tradición europea "occidental" (la única que al parecer ha tenido un desarrollo y "comprobación" real -experimental- que aseguran su validez), fue suponer que toda la variedad de fenómenos naturales tenían una explicación en términos del menor número posible de leyes y principios. En efecto, los primeros pensadores griegos pretendieron explicar al mundo en los términos más simples; por ejemplo, la escuela pitagórica en base de una formulación numérica (aunque sin muchos frutos); hasta este momento y durante mucho tiempo después (¡alrededor de 2000 años!), la base de estos "principios" era la especulación (aún la religiosa, sin fundamento fenomenológico, que en este caso particular, es también completamente irracional) acerca de que el mundo podía y debía ser explicado de la manera más simple: "Todos los movimientos son rectilíneos, circulares o una combinación de los dos, porque estos son los 'movimientos más simples' ", decía Aristóteles.

La ciencia tal y como la conocemos, no podía desarrollarse sin la herramienta matemática que se formaría más tarde; y la confrontación, entre aquellos modelos "simples" hechos con el nuevo lenguaje matemático y la realidad entendida a través de la experimentación (la parte más relevante por la cual las "nuevas abstracciones especulativas" sobre el comportamiento de la materia son válidas): un logro que sería de Galileo. Aristóteles mencionaba que la naturaleza poseía una tendencia inmanente a la simplicidad; Ockham (1300-1347) demandaría que para describir a la naturaleza se deben evitar las complicaciones innecesarias. Bajo esta óptica los grandes investigadores de la materia como Copérnico (1473-1543) (recuérdese la "simplicidad" del modelo heliocéntrico comparado al modelo geocéntrico de Ptolomeo respecto al movimiento de los planetas), Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) ("no admitiremos más causas de las cosas naturales que aquellas que son verdaderas y suficientes para explicar sus apariencias") y Leibnitz (1646-1716); por ejemplo, harían sus principales contribuciones.

La primera vez que se formuló un principio de minimización, fue debida al matemático francés Fermat (1601-1665) en óptica. Según este principio: "en ninguna materia, para cualquier tipo de reflexión o refracción de un rayo a la que esté sujeta, éste viaja de un punto a otro de tal manera que el tiempo en que lo hace tome un mínimo" (Hero de Alejandría había descubierto una ley similar para el caso particular en que el rayo de luz es reflejado por un espejo).

En términos modernos, el principio de Fermat matemáticamente se establece como:

$$\delta \int_P^Q \frac{1}{v} ds = 0; \quad (1.1. - 1)$$

donde P y Q son los puntos inicial y final de la trayectoria del rayo de luz, v es la velocidad en cualquier punto y ds es un elemento de trayectoria. La ecuación indica que la variación de la integral es cero, es decir, que la diferencia entre esta integral tomada a lo largo de la trayectoria real que describe el rayo, y aquella tomada a lo largo de una trayectoria vecina es una cantidad infinitesimal de segundo orden entre la distancia de las trayectorias. Antes de seguir, aclaremos la notación con un ejemplo, y formalicemos el significado de sacar una variacional a una **funcional**.

Una **funcional** es una función de funciones; es decir que cuando se saca la variacional a una funcional se pretende encontrar una función tal que aquella sea un extremal (máximo o mínimo) al sustituir esta función en la funcional. Consideremos el problema de deducir la ecuación de Euler-Lagrange (en la próxima sección se dará una pequeña introducción histórica acerca de cómo es que se llegó a este principio en mecánica); en términos analíticos consideremos una función dos veces diferenciable $y = y(x)$ que satisface la condición $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$, condicionada a que la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \frac{dy}{dx}) dx; \quad (1.1. - 2)$$

sea un mínimo (aquí la funcional I, es una función que depende de otra función $y = y(x)$, para ser encontrado su extremal). Equivalentemente lo que se desea saber es qué ecuación diferencial cumple y ; además supondremos que x_1, y_1, x_2, y_2 son dadas y que f es una función de los argumentos $x, y, \frac{dy}{dx}$, y que es doblemente diferenciable con respecto a ellos, en cualquier combinación. En adelante denotaremos por $y(x)$ a la función que minimiza a (1.1.-2) y formaremos a una familia de funciones paramétricas de comparación $Y(x)$, definida por

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x); \quad (1.1. - 3)$$

donde $\eta(x)$ es una función diferenciable arbitraria para la cual $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ y ϵ es el parámetro de la familia. Las condiciones anteriores aseguran que $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$ y $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$; esto es que todas las funciones de comparación poseen los valores finales requeridos de la función con respecto a la cual se hace la minimización. Geométricamente, lo anterior implica que la desviación de cualquier curva $y = Y(x)$ de la curva que realmente extremiza a I está dada por $\epsilon\eta(x)$. Si se reemplazan y y $\frac{dy}{dx}$ en (1.1.-2) respectivamente por $Y(x)$ y $\frac{dY}{dx}$, se llega a la forma integral

$$I = I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, \frac{dY}{dx}) dx; \quad (1.1. - 4)$$

de donde se deduce que para $\eta(x)$ dada, I es función del parámetro ϵ . Así que la integral (1.1.-4) es extremal con respecto a ϵ , para el valor $\epsilon = 0$. Entonces, se ha reducido el problema de encontrar el extremal de la funcional al problema de hallar el extremal ordinario del cálculo diferencial con respecto a una sola variable ϵ ; y además sabemos en qué valor de la variable ocurre el extremal, $\epsilon = 0$ Esto es:

$$\frac{dI(0)}{d\epsilon} = I'(0) = 0. \quad (1.1. - 5)$$

Derivando (1.1.-4) obtenemos:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx. \quad (1.1. - 6)$$

Puesto que el hacer $\epsilon = 0$ equivale a reemplazar (Y, Y') por (y, y') , entonces (1.1.-6) se transforma en:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (1.1. - 7)$$

Integrando por partes el segundo término de (1.1.-7), se obtiene

$$I'(0) = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (1.1. - 8)$$

Ya que esta última ecuación debe cumplirse para toda η , se concluye que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.1. - 9)$$

Esta es la llamada ecuación de Euler-Lagrange.

Después de Fermat, Maupertius (1689-1759) en 1744, formularía su principio de mínima acción. A la luz del trabajo de Hero y Fermat, él aseguraría que las causas naturales simples, para actuar lo hacen de tal manera que cierta cantidad, que él llamó "acción" es un mínimo. En un principio, Maupertuis no sabía cuál era la expresión para la acción; sólo postuló que ella dependía de la masa, la velocidad y la distancia; definiéndola como el producto de estos tres factores; y haciendo que la forma de la acción se ajustara al resultado esperado. Considerando por ejemplo, el choque de dos cuerpos perfectamente inelásticos, de masas m_1 y m_2 que tenían respectivamente velocidades u_1 y u_2 y una velocidad final común (medidas además en la misma dirección y que la distancia es descrita por unidad de tiempo, es decir, como la velocidad), entonces la acción se define como el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad. Aseguró también que a fin de calcular el cambio de acción, debían ser usadas las velocidades relativas y los productos para los dos cuerpos debían ser sumados. Entonces:

$$\text{el cambio de acción} = m_1(u_1 - v)^2 + m_2(u_2 - v)^2.$$

Por tanto:

$$m_1(u_1 - v)^2 + m_2(u_2 - v)^2 = \text{mínimo},$$

y entonces diferenciando,

$$m_1(u_1 - v)dv + m_2(u_2 - v)dv = 0.$$

Después de cancelar dv , esta última ecuación conduce a la ley de conservación de momento, que da v de manera correcta.

1.2. El desarrollo de Euler del principio.

Hagamos un nuevo paréntesis, y repasemos unas ideas. Una curva en el plano \mathfrak{R}^2 se puede representar por el conjunto $C = \{(x, y) \mid x = x(t) \text{ y } y = y(t)\}$, con t un parámetro. También sabemos que la longitud de una curva está dada por

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (1.2. - 1)$$

Ahora bien, si se utiliza a la longitud de una curva como parámetro, suponiendo que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$; entonces

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx dt}{dt ds} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (1.2. - 2)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy dt}{dt ds} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (1.2. - 3)$$

Y de aquí claramente:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1; \quad (1.2. - 4)$$

es la característica del parámetro s como la longitud de arco. Además, la ecuación de la tangente a la curva en el punto (x, y) es:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad (1.2. - 5)$$

donde η y ξ son las coordenadas "variables" correspondientes a un punto arbitrario sobre la tangente, en tanto que x, y y $\frac{dy}{dx}$ tienen los valores fijos que corresponden al punto de contacto en la curva. Si se sustituye $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, entonces esta ecuación es idéntica a:

$$(\xi - x)\dot{y} - (\eta - y)\dot{x} = 0. \quad (1.2. - 6)$$

La ecuación normal a la curva tiene entonces la forma

$$(\xi - x)\dot{x} + (\eta - y)\dot{y} = 0. \quad (1.2. - 7)$$

Ahora bien, de la definición de la derivada se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1.2. - 8)$$

donde α es el ángulo que la tangente forma con el eje x positivo. Suponiendo que la dirección de la curva es la asociada a las t crecientes; entonces por definición,

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (1.2. - 9)$$

Y las correspondientes ecuaciones para la dirección normal, haciendo rotar en $\frac{\pi}{2}$ contra las manecillas del reloj, a la dirección de la tangente positiva, son:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (1.2. - 10)$$

Imaginemos ahora que se desea aproximar a un elemento ds de la curva descrita por C por una circunferencia; para ello es necesario definir un *radio de curvatura* o un *radio* para esta circunferencia, y de la relación que existe entre el elemento ds de la circunferencia, el radio de curvatura (ρ) y el elemento de ángulo que hay entre los radios que delimitan al elemento de curva, respecto al centro de aquella ($d\alpha$), es claro que:

$$ds = \rho d\alpha. \quad (1.2. - 11)$$

Definimos la curvatura de la curva (κ) como el inverso de ρ

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}. \quad (1.2. - 12)$$

Pero $\alpha = \alpha(t) = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + n\pi$, con n un entero. Entonces

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (1.2. - 13)$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (1.2. - 14)$$

y de (1.2.-13) y (1.2.-14) se sigue que¹:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.2. - 15)$$

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y}}. \quad (1.2. - 16)$$

De manera directa se puede mostrar que la ecuación anterior para ρ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.2. - 17)$$

A diferencia de Maupertius, Euler (1707-1793) formalizaría un poco más las bases de la forma en que actualmente conocemos el principio variacional acerca de la minimización de la acción. En 1744, Euler da una demostración rigurosa para una partícula constreñida a moverse por sí misma a lo largo de un plano curvo; él propuso que cuando una partícula viaja entre dos puntos fijos, toma la trayectoria para la cual $\int v ds$ es un mínimo, con v la velocidad de la partícula y ds el elemento correspondiente de la curva. El también menciona que el principio es sólo aplicable en el caso en que la velocidad de la partícula es dependiente únicamente de la posición; o como se diría actualmente, en los casos en que las fuerzas son derivadas de un potencial y donde el principio de conservación de la energía se mantiene. La formulación "moderna" del principio de Euler es: "Una partícula puede viajar entre dos puntos fijos con cualquier energía dada, y entonces moverse de tal manera que la diferencia entre la integral $\int v ds$ tomada a lo largo de la trayectoria real y aquella que pasa sobre una trayectoria vecina virtual entre los dos puntos es una cantidad infinitesimal de segundo orden; la partícula se supone que viaja a lo largo de la trayectoria virtual con velocidad tal que la energía es igual a la energía dada". Esto se expresa matemáticamente por:

$$\delta \int_P^Q v ds = 0, \quad (1.2. - 18)$$

donde P y Q son los puntos final e inicial, respectivamente, de la trayectoria. En la prueba que da Euler, calcula el radio de curvatura de la trayectoria directamente y también por medio del principio de minimización, observando que conducen al mismo resultado. Considérese una fuerza por unidad de masa dada por:

$$\vec{F} = X\hat{i} + Y\hat{j} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}; \quad (1.2. - 19)$$

con \hat{i} y \hat{j} los vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y respectivamente. De la ecuación (1.2.-10), el vector normal a la curva, \hat{n} , tiene por dirección :

$$\hat{n} = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\hat{i} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\hat{j}. \quad (1.2. - 20)$$

¹ Ver, por ejemplo, Courant R., John F., Introducción al cálculo y al análisis matemático, Ed. Limusa, México, Secc. 4.1., pag. 372-373 (1991).

Entonces la aceleración normal de la partícula es:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{Y - X \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}; \quad (1.2. - 21)$$

y de la expresión para la fuerza centrífuga en términos del radio de curvatura se tiene, a partir de la segunda ley de Newton, que:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{Y - X \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \quad (1.2. - 22)$$

Ahora bien, desde el punto vista variacional, se requiere minimizar a la integral:

$$\int v ds = \int v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (1.2. - 23)$$

de la que se sigue, para que la integral sea "estacionaria", que:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)} \left(v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right) = 0. \quad (1.2. - 24)$$

Antes de mostrar que la expresión anterior es igual a la ec.(1.2.-22), obsérvese que debido a que el movimiento de la partícula se realiza por la acción de una fuerza ficticia dada por la curvatura de la curva a lo largo de la que se mueve ésta, es posible suponer que la relación entre las variables x y y permanece fija, de manera que es posible obtener:

$$\frac{\partial v^2}{\partial x} = 2\dot{x} \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \dot{x} = 2 \frac{\dot{x}}{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = 2\ddot{x} = 2X \quad (1.2. - 25)$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial y} = 2\dot{y} \frac{dt}{dy} \frac{d}{dt} \dot{y} = 2 \frac{\dot{y}}{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} = 2\ddot{y} = 2Y \quad (1.2. - 26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2v} \frac{\partial v^2}{\partial x} = \frac{X}{v} \quad (1.2. - 27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2v} \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{Y}{v} \quad (1.2. - 28)$$

Derivando la primera parte del lado izquierdo de la ecuación (1.2.-24) se encuentra la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{v \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right] &= \frac{\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{dy}{dx} + v \frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^2} - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 v \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^2} + \frac{v \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (1.2. - 29)$$

Pero utilizando (1.2.-27) y (1.2.-28), la expresión (1.2.-29) se puede llevar a la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{v \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right] = \frac{\left[X + \frac{dy}{dx} Y \right] \frac{dy}{dx}}{v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^2} + \frac{v \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.2. - 30)$$

Entonces (1.2.-24) se transforma en:

$$\frac{\left[X + \frac{dy}{dx} Y \right] \frac{dy}{dx}}{v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} + \frac{v \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial y} \left[v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] = 0. \quad (1.2. - 31)$$

O bien ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[v \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] = \frac{Y}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2};$$

después de simplificar con ésta última expresión a (1.2.-31) se llega finalmente a:

$$\frac{Y - \frac{dy}{dx} X}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \frac{v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.2. - 32)$$

Pero si se recuerda la expresión para el radio de curvatura, la ecuación (1.2.-17a), entonces (1.2.-32) se transforma en la ecuación (1.2.-22) que es la que queríamos hallar.

Sustituyendo entonces (1.3.-4) en (1.3.-3) y utilizando la identidad $dx_{j,n} = \dot{x}_{j,n}dt$ en (1.3.-2): se llega directamente a:

$$\begin{aligned}
 \delta \sum_{n=1}^r m_n \int_A^B v_n ds_n &= \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^3 \int_A^B \left[m_n d(\dot{x}_{j,n} \delta x_{j,n}) - m_n \delta x_{j,n} d\dot{x}_{j,n} - \frac{\partial V}{\partial x_{j,n}} \delta x_{j,n} dt \right] \\
 &= \left[\sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^3 m_n \dot{x}_{j,n} \delta x_{j,n} \right]_A^B - \int_A^B \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^3 \left(m_n d\dot{x}_{j,n} + \frac{\partial V}{\partial x_{j,n}} dt \right) \delta x_{j,n} \\
 &= \int_A^B \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^3 \left(m_n d\dot{x}_{j,n} + \frac{\partial V}{\partial x_{j,n}} dt \right) \delta x_{j,n} = 0; \tag{1.3. - 5}
 \end{aligned}$$

suponiendo las condiciones adecuadas en los puntos de integración, tales que $\delta x_{j,n} = 0$ en éstos. Entonces de (1.3.-5) se deduce que la ecuación de movimiento que cumplen las partículas es:

$$m_n \ddot{x}_{j,n} = - \frac{\partial V}{\partial x_{j,n}} \tag{1.3. - 6}$$

Entonces, la expresión de Lagrange para la acción junto con el principio de conservación de la energía es equivalente a las leyes de Newton, se trata de una nueva formulación de las leyes de la dinámica; sin embargo a diferencia de Maupertius, Lagrange consideraría que el principio de mínima acción está fundamentado, no sobre la base de especulaciones metafísicas sino en las leyes de la mecánica. El logró entonces, acercarse al punto de vista de la ciencia moderna.

1.4. Aplicación del principio en termodinámica: los estados de equilibrio termodinámicos.

1.4.1. Generalidades

En las secciones anteriores se ha visto una ligera introducción acerca de cómo se llegaron a establecer los principios variacionales para la descripción mecánica de los sistemas. En esta sección se verá cómo se puede formular matemáticamente un principio variacional para la segunda ley de la termodinámica. La idea es que estos conceptos básicos puedan aclarar la exposición que vendrá después acerca de las aplicaciones que se harán de estas leyes en los próximos capítulos.

La mecánica estadística es fundamentalmente una teoría que describe el comportamiento de las fluctuaciones de sistemas macroscópicos con un número extraordinariamente grande de partículas. Debido a esto, la descripción determinista sobre la evolución del sistema considerando a todas las partículas resulta ser imposible de realizar; por eso, en lugar de orientar en este sentido el análisis, se consideró resolver el problema estadísticamente. Aunque por supuesto, esta forma de solución parte de consideraciones microscópicas.

Por otro lado, existe otra manera de considerar la descripción del sistema, la llamada macroscópica o termodinámica; obviamente ambas están interrelacionadas y se puede decir que la validez de una se basa en los resultados de la otra y viceversa. Fundamentalmente cuando se desea caracterizar a los sistemas termodinámicamente, se puede hacer a través de unas cuantas variables extensivas o intensivas. ¿Qué es lo que se entiende por tal caracterización? Para explicarlo consideremos un ejemplo. Imaginemos un sistema en el estado I, que está en un estado de equilibrio al estar sujeto a ciertas constricciones bien delimitadas. Por estados de equilibrio, se entenderá aquellos que macroscópicamente no evolucionan con el tiempo, es decir, no hay flujos de energía o materia hacia ellos. Después, eliminando una o más constricciones del sistema en el estado I, se le deja evolucionar hacia otro estado II hasta que llega a un nuevo equilibrio; ¿cómo se describe este nuevo estado? Para dar respuesta a esta pregunta, el problema principal de la termodinámica, se "postularon" tres leyes básicas:

La ley cero de la termodinámica asegura que si un cuerpo A y otro B están en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

La primera ley de la termodinámica establece que la energía se conserva, o sea que la energía interna U sólo puede variar debido a un flujo de energía hacia adentro o hacia afuera de aquel, y por la ejecución de un trabajo mecánico que realiza el sistema o es realizado sobre él. Entonces se puede escribir, como definición de calor a la siguiente ecuación.

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W, \quad (1.4.1. - 1)$$

donde $\bar{d}Q$ representa al flujo de energía o calor que entra o sale de aquel, y $\bar{d}W$ representa a un trabajo mecánico.

La segunda ley se formula en términos de una cantidad S , llamada entropía, definida para un estado de equilibrio macroscópico de un sistema por: $dS = \frac{\bar{d}Q}{T}$, donde $\bar{d}Q$ es el calor que absorbe el sistema en un proceso infinitesimal cuasiestático. Lo que la segunda ley postula es que en cualquier proceso de un sistema térmicamente aislado, el sistema evoluciona de un macroestado a otro de tal manera que la entropía (S) se incrementa, es decir, $\Delta S \geq 0$.

En términos de S , otra manera de escribir la ec. (1.4.1.-1) es la siguiente, cuando el sistema evoluciona cuasiestáticamente

$$dU = TdS + \vec{f} \cdot d\vec{X}. \quad (1.4.1. - 2)$$

Siendo \vec{f} una "fuerza" aplicada y \vec{X} una variable extensiva, tal que $\bar{d}W = \vec{f} \cdot d\vec{X}$.

Ya que la entropía es una función de estado se ve de la ecuación anterior que éstos estados se caracterizan por los valores de U y \vec{X} . Como se mencionó antes, esto equivale a decir que describe los estados de equilibrio termodinámicos.

1.4.2. La Formulación Variacional de la Segunda Ley de la Termodinámica

Ya que la mayoría de las veces, las explicaciones teóricas son más claras al resolver un ejemplo concreto, consideremos un sistema con dos tipos de constricciones posibles sobre él. En primer lugar se le constreñirá a que U y \bar{X} sean constantes, y también que tenga algún tipo de restricción interna. Si inicialmente el sistema estaba en equilibrio con una entropía $S = S(U, \bar{X})$, se le aplica entonces la restricción interna hasta llevarlo cuasiestáticamente hasta otro estado de equilibrio, constreñido a tener la misma U y \bar{X} pero con entropía $S' = S(U, \bar{X}; \text{restricción interna})$. Obviamente, debido a que durante el cambio de entropía no hubo cambio en la energía, fue necesario realizar un trabajo, pero éste se llevó a cabo a través de un flujo de calor. Más tarde, aislando térmicamente al sistema, se le deja evolucionar liberándolo de la restricción interna. Se observa, entonces, que el sistema se relaja naturalmente regresando al estado inicial con entropía S , mientras U y \bar{X} se mantienen constantes. Ahora bien, si sólo se considera este último proceso, la segunda ley de la termodinámica discutida anteriormente establece que:

$$S - S' = S(U, \bar{X}) - S(U, \bar{X}; \text{restricción interna}) \geq 0. \quad (1.4.2. - 1)$$

Es decir, el estado de equilibrio es el estado para el cual $S(U, \bar{X}; \text{restricción interna})$ es un máximo global.

El principio de máxima entropía tiene un corolario, el principio de mínima energía. Para derivar este principio, considérese un sistema compuesto por dos subsistemas con energías de equilibrio $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ respectivamente, y que interactúan entre sí a través de una pared diatérmica, de tal manera que el sistema está aislado de los alrededores, por paredes adiabáticas. Entonces, el principio de entropía máxima implica que:

$$S(U^{(1)} - \Delta U, \bar{X}^{(1)}) + S(U^{(2)} + \Delta U, \bar{X}^{(2)}) \leq S(U^{(1)} + U^{(2)}, \bar{X}^{(1)} + \bar{X}^{(2)}) \quad (1.4.2. - 2)$$

donde ΔU es la cantidad de energía sacada del subsistema 1 y que se sitúa en el subsistema 2.

Pero recordemos que la entropía es una función monótonamente creciente de U (es decir, que la temperatura es positiva); luego existe una energía $U \leq U^{(1)} + U^{(2)}$ con $\Delta U \neq 0$ tal que:

$$S(U^{(1)} - \Delta U, \bar{X}^{(1)}) + S(U^{(2)} + \Delta U, \bar{X}^{(2)}) = S(U, \bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}),$$

En otras palabras, se pueden imaginar las constricciones aplicadas internamente con S y \bar{X} constantes, de modo que lo que varía es la energía. Así se deduce que $U(S, \bar{X})$ es un mínimo global de $U(S, \bar{X}; \text{restricción interna})$. Este argumento establece, por tanto, el principio de minimización de la energía. Nótese que $\Delta U = U(S, \bar{X}) - U(S, \bar{X}, \text{restricción interna}) \leq 0$.

Resumiendo, se sigue de lo expuesto hasta ahora, que los dos principios son equivalentes, a saber:

El valor de equilibrio de cualquier parámetro interno sin restricción (obsérvese que se procedió a ejemplificar fijando esta restricción para después liberarla) es tal que maximiza la entropía para un valor dado de la energía interna total, principio que recibe el nombre de principio de maximización de la entropía. O bien, el valor de equilibrio de cualquier parámetro interno sin restricción es tal que minimiza la energía para un valor dado de la entropía total, el llamado principio de minimización de la energía².

A menudo, los principios extremales se establecen en términos de variacionales cerca del estado de equilibrio. Así, utilizando tales variaciones para una expansión en series de Taylor:

$$\Delta U = U(S, \bar{X}; \delta Y) - U(S, \bar{X}; 0) = (\delta U)_{S, \bar{X}} + (\delta^2 U)_{S, \bar{X}} + \dots;$$

donde δY denota una variación o partición de las variables extensivas internas causadas por la aplicación de una restricción interna, y

$$(\delta U)_{S, \bar{X}} = \text{desplazamiento variacional de primer orden} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{S, \bar{X}} \right]_{Y=0} \delta Y$$

² Ver, Chandler D., *Introduction to modern statistical mechanics*, Ed. Oxford University Press, E.U.N.A. (1986) o Callen H. B., *Thermodynamics*, Ed. John Wiley & Sons, E.U.N.A. Cap. V (1960)

$$(\delta^2 U)_{S, \bar{x}} = \text{desplazamiento variacional de segundo orden} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)_{S, \bar{x}} \right]_{Y=0} (\delta Y)^2,$$

etc. Por tanto, los principios enunciados anteriormente se expresan variacionalmente de la siguiente manera.

$$(\delta U)_{S, \bar{x}} \geq 0; \quad (1.4.2. - 3)$$

para cualquier variación lejos de la variedad de estados de equilibrio con $\delta Y = 0$, y $\Delta U_{S, \bar{x}} \geq 0$ lejos de estados de equilibrio estable. Similarmente

$$(\delta S)_{U, \bar{x}} \leq 0 \quad (1.4.2. - 4)$$

Al iniciar este capítulo se comentaba que es posible hacer la descripción de estados de equilibrio de sistemas, en base a dos modelos relacionados entre sí: el microscópico y el macroscópico, o el estadístico y el termodinámico. Para continuar, recalquemos que los estados de equilibrio "termodinámico" y "estadístico" se diferencian por las variables que se utilizan para describirlos; en el primer caso es la energía total del sistema y en el segundo, la temperatura³. Obsérvese también que los parámetros macroscópicos interiores que describen los estados de equilibrio termodinámico y estadístico dependen también de diferentes variables, pero que no son funciones del tiempo. Así, partiendo de la independencia de los parámetros macroscópicos interiores con respecto al tiempo, puede mostrarse la independencia de las correspondientes funciones de distribución con respecto al tiempo; lo que implica que los conceptos de equilibrio termodinámico y estadístico son equivalentes. Al hacer mención anteriormente de funciones de distribución, se hace referencia a la manera en que se distribuyen los valores de las variables extensivas del sistema en el caso macroscópico; y, por otro lado, a la forma de la distribución de posiciones y momento en el caso microscópico, para describir los estados de equilibrio.

Con estas aclaraciones por delante, el lector no se sorprenderá de que en la descripción posterior de estados relajados del plasma que se dará en los próximos capítulos, se recurra a una expresión adecuada de una funcional de entropía, que depende de variables microscópicas; así que todo lo visto anteriormente tenía por objetivo el introducir conceptos elementales para hacer más clara la exposición que sigue. Para hacer evidente la forma de la funcional se dará una introducción a la teoría de la información y a la demostración del teorema H de Boltzmann (1844-1906) en el próximo capítulo. Se mostrará entonces que los estados relajados del plasma son descritos maximizando esta funcional de entropía constreñida a ciertas condiciones bien delimitadas.

Una última aclaración para concluir esta sección, y con ésta el presente capítulo. El lector debe observar que en esta exposición se han expresado **matemáticamente** las leyes de la termodinámica en una forma variacional. Sin embargo, no se pretendió, como Helmholtz (1821-1874), intentar dar una versión de la termodinámica en términos de un principio variacional.

El intento de Helmholtz se desarrolló aproximadamente en las siguientes líneas:

Si una de las coordenadas generalizadas q_r de un sistema está desplazada por una distancia dq_r , entonces de la ecuación (1.4.1.-2)

$$TdS = -Q_r dq_r + dU; \quad (1.4.2. - 5)$$

donde S es la entropía, Q_r la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada q_r , y U la energía interna. Definiendo a s como una función cualquiera de S e introduciendo una nueva función

$$\eta \equiv T \frac{dS}{ds} \quad (1.4.2. - 6)$$

la ecuación (1.4.2-5) se transforma en;

³ Aquí por estados de equilibrio "termodinámico" se refiere uno a estados descritos por la función de distribución del espacio fase, F , que se define en relación al teorema de Liouville en el siguiente capítulo II, con la particularidad de que esta función depende de las variables (q, p) del espacio fase, de los parámetros macroscópicos externos al sistema y la temperatura de los cuerpos que rodean a éste, es decir, que corresponde a la descripción en base al ensamble canónico. En el otro caso, los estados de equilibrio "estadísticos", se describen con una F dependiente de (q, p) ; de los parámetros exteriores y la energía total del sistema, es decir, es lo que se identifica con el ensamble microcanónico. Ya que se describen estados de equilibrio, en ningún caso F depende del tiempo. Ver, Matvéev A. N. Física Molecular. Ed. Mir. U.R.S.S. 1987.

$$\eta ds = -Q_r dq_r + dU \quad (1.4.2. - 7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} - \eta \frac{\partial s}{\partial q_r} = Q_r \quad (1.4.2. - 8)$$

Pero definiendo una nueva función $F' = U - \eta s$, entonces (1.4.2.-7) equivale a

$$\frac{\partial F'}{\partial q_r} = Q_r \quad (1.4.2. - 9)$$

Aquí es conveniente notar que F' es la expresión para la energía libre de Helmholtz si $s=S$. Considerando ahora la ecuación (1.1.-9) con $f = L = E_k - V$, $y = q_r$, $Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}$, $y' = \dot{q}_r$ y $x = t$; y tomando en cuenta la inercia del sistema, la ecuación (1.1.-9) se transforma utilizando (1.4.2.-9) y el hecho de que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas en:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial}{\partial q_r} (E_k + F') = 0 \quad (1.4.2. - 10)$$

Y ya que $\frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_r} = 0$ y definiendo $L' \equiv E_k + F'$ (con E_k igual a la energía cinética del sistema y F' la energía libre de Helmholtz cuando $s = S$) como una nueva expresión de la función "Lagrangiana" que incorpora efectos termodinámicos, entonces de (1.4.2.-10) se llega a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0; \quad (1.4.2. - 11)$$

como nueva expresión para representar directamente al sistema.

Sin embargo debe observarse que esta expresión, sin duda, no es suficiente para una descripción completa de un cambio termodinámico; ya que la naturaleza de las descripciones dinámica y termodinámica de los sistemas son diferentes. En este sentido basta observar que la primera ley de la termodinámica no es suficiente para hacer la caracterización termodinámica de los sistemas, y como se vió anteriormente, es necesario tomar en cuenta a la segunda ley.

CAPITULO II. CARACTERIZACION DE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO DE UN PLASMA A TRAVES DE PRINCIPIO VARIACIONAL SOBRE LA ENTROPIA

We thus bring to an end our long discussion of this famous H-theorem, which has outlived so many attacks and misunderstandings. We can only conclude with words of admiration for the genius of Boltzmann. His fruitful discovery of a suitable function for measuring the displacement of a whole system of molecules from equilibrium, and his elegant mastery of the complicated effect of collisions in making such displacements decrease with time, alike compel attention. His reconciliation of phenomenological irreversibility with the reversible character of the laws of exact mechanics, and his understanding of the compatibility of continued fluctuations with a tendency towards equilibrium, are among the great achievements of theoretical physics. And his penetrating remarks on the great role that fluctuations might play in the long time behaviour of the universe as a whole, show Boltzmann's preoccupation with the deepest problems of physics.

R.C. Tolman The principles of statistical mechanics.

2.0. Preliminar acerca del plasma

Un plasma es un gas de partículas cargadas eléctricamente, pero que en conjunto es neutro, y en el que la energía potencial electrostática de una partícula debida a sus vecinos más cercanos es mucho menor que su energía cinética. Una de las propiedades características del plasma es que, si una carga de prueba (qr) se coloca dentro de éste, una nube de partículas de carga opuesta a aquella, tiende a cancelar esta carga, mientras que a las cargas del mismo signo las repele. Este apantallamiento de Debye de la carga¹ permite definir una longitud de Debye (λ_D), como la longitud característica a la cual el potencial electrostático ($\phi = \frac{qr}{r} \exp\left(\frac{-r}{\lambda_D}\right)$) de la nube de apantallamiento de carga decae a un valor de e^{-1} ,

$$\lambda_D^{-2} = \lambda_e^{-2} + \lambda_i^{-2}, \quad (2.0. - 1)$$

con

$$\lambda_{e,i} \equiv \left(\frac{T_{e,i}}{4\pi n_0 e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.0. - 2)$$

para la cual, a distancias $r \approx \lambda_D$ la nube de apantallamiento cancela la carga de prueba. Además, si n_0 es la densidad para cada especie en el plasma (iones o electrones, que se indican con los subíndices i y e respectivamente, así como con T a su temperatura), entonces la energía potencial ϕ de una partícula debida a sus más cercanos vecinos, es en valor absoluto igual a

$$|\phi| \approx \frac{e^2}{r} \sim n_0^{\frac{1}{3}} e^2. \quad (2.0. - 3)$$

Mientras que la energía cinética es

$$\frac{1}{2} m_s \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} T_s = \frac{3}{2} m_s v_s^2, \quad (2.0. - 4)$$

donde $s = e$ ó i .

De aquí que para que se cumpla la definición para un plasma

$$n_0^{\frac{1}{3}} e^2 \ll T_s. \quad (2.0. - 5)$$

O recordando la definición de la longitud de Debye anterior

$$\Lambda_s = n_0 \lambda_s^3 \gg 1, \quad (2.0. - 6)$$

es la condición que debe cumplirse para que se considere que un medio es un plasma, donde se ha definido Λ_s , conocida como parámetro del plasma. Esto indica que el número de partículas dentro de un volumen del tamaño de la longitud de Debye es muy grande. Con esta condición se garantiza que el plasma exhiba

¹ Ver, por ejemplo, Nicholson D.R., Introduction to plasma theory, Ed. John Wiley & Sons, E.U.N.A., Cap. I (1963), o Goldston R.J., op. cit., Cap. I.

un comportamiento colectivo en lugar del de sólo una colección de partículas individuales. En el caso de los plasmas para fusión (como el tokamak) se tiene que $n_0 \approx 10^{14} \text{cm}^{-3}$ y $T \approx 1 \text{keV}$, que fácilmente cumple con la condición de que la energía cinética (o térmica) sea mayor que la energía potencial, pues $\Lambda_p \approx 10^6$.

Además de la longitud característica de Debye, se puede definir un tiempo característico en términos de la frecuencia de oscilación del plasma*, cuando éste es perturbado eléctricamente, definida por,

$$\omega_p \equiv \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right)^{1/2} \quad (2.0. - 7)$$

Los fenómenos que ocurran en tiempos menores que éste no serán afectados por el comportamiento colectivo del plasma, pero para tiempos mayores este efecto será importante. En efecto si se considera la definición de la frecuencia de colisiones de la siguiente ec.(2.0.-9) y se compara con la ω_p anterior, se tiene que $\frac{\nu_e}{\omega_p} \sim \frac{1}{\Lambda}$, con $\Lambda \approx 10^6$ para el tokamak, es decir que $\nu_e \ll \omega_p$, así que una onda con frecuencia cercana a ω_p oscilará muchas veces antes de ser amortiguada debido a las colisiones.

Los plasmas son fuertemente afectados por campos magnéticos, por lo que es muy común utilizarlos para su confinamiento. La interacción plasma-campo es de gran importancia en los plasmas magnetizados empleados para fusión, por lo que es de gran interés estudiar el papel que juega el campo magnético en la descripción termodinámica de un plasma. Este será el tema que se abordará en este capítulo. En el plasma magnetizado hay otra escala de tiempo relevante dada por la frecuencia de giro de una partícula en el campo magnético, o frecuencia de ciclotrón,

$$\omega_{c(e,i)} \equiv \frac{q_{e,i} B}{m_{e,i} c} \quad (2.0. - 8)$$

Respecto al cálculo de cantidades de transporte se puede mostrar que la frecuencia de colisiones para fuerzas coulombianas, que son de largo alcance, está dada por²

$$\nu_e = \frac{8\pi n_0 e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_i^3} \quad (2.0. - 9)$$

Que es bien sabido que representa el inverso del tiempo que toma que una partícula tenga una colisión, así que se mide al considerar el tiempo en que un flujo de partículas que fluyen a lo largo de un tubo que tiene una sección eficaz igual a πp_0^2 , con $p_0 \equiv \frac{2e^2}{m v_i^2}$, el parámetro de impacto. Entonces tal cantidad de partículas debe de cumplir con, $(\text{tiempo}) \times (\text{velocidad}) \times (\text{sección} - \text{eficaz}) \times (\text{número} - \text{de} - \text{partículas} - \text{por} - \text{unidad} - \text{de} - \text{volumen}) = 1$. Entonces el factor $\ln \Lambda$ en (2.0.-2), viene como un término correctivo al suponer colisiones de tipo columbiano.

De aquí que para los valores de la densidad y la temperatura de un plasma de fusión magnética, $\nu_e \sim 5 \times 10^4 \text{s}^{-1}$. Esta frecuencia debe de compararse con la frecuencia de ciclotrón para determinar si es necesario considerar el término de colisiones en la ecuación cinética, que para el plasma corresponde al término de colisiones de Landau². Este se obtiene de interacciones de tipo coulombiano de largo alcance. Por lo regular las colisiones son importantes en la región central del plasma.

* La oscilación que está descrita por esta frecuencia se genera al separar una porción de iones de otra de electrones, debido al campo eléctrico que atrae a cargas opuestas, estos bloques comienzan a oscilar como un oscilador armónico, con frecuencia ω_p

² Ver, Nicholson D.R. op. cit. Cap. I.

2.1.1. Antecedentes

§. El teorema H

Como se comentó en el anterior capítulo una de las bases de la descripción macroscópica de la materia se fundamenta en las propiedades microscópicas de ésta (es decir, en la descripción mecánica clásica o cuántica de las partes constituyentes del sistema), a través de consideraciones estadísticas. La descripción mecánica clásica de las partículas del sistema, en la que se basará todo lo que se haga en esta tesis, por razones que se darán más adelante al final de ésta subsección, parte de una variante de la formulación Lagrangiana que se mostró anteriormente con la ecuación de Euler-Lagrange, (1.1.-9)¹; esta ecuación describe el movimiento en términos de las posiciones y velocidades generalizadas de las partículas. Así para un sistema de N elementos ($N \approx 10^{23}$) es necesario resolver $3N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden (existen tres coordenadas generalizadas de cada partícula). Para hacer más conveniente la descripción, el sistema de ecuaciones de segundo grado de Lagrange se divide en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo una transformada de Legendre dada por una nueva función H que depende de las coordenadas generalizadas (q_i) y los momentos generalizados (p_i), definida por

$$H = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N}) \quad (2.1.1. - 1)$$

Como se sabe, esta nueva función H conduce a las ecuaciones de Hamilton de movimiento buscadas.

Es tiempo de entrar más específicamente al tema de esta sección y de toda la tesis. Como un plasma es básicamente un gas ionizado, para caracterizarlo es necesario considerar las interacciones electromagnéticas de las partículas cargadas (electrones e iones) que lo forman, entre sí y con los campos externos. Sin embargo en la presente tesis se considerarán únicamente plasmas que estén completamente ionizados; es decir, que se dejarán de lado procesos que ocurren en gases que son parcialmente ionizados: las moléculas y átomos del plasma pueden sufrir un cierto número de transformaciones por las colisiones entre las partículas o debidas a un campo externo. O puesto en otros términos, el análisis de procesos de excitación y desexcitación, ionización o recombinación de los átomos e iones se dejará de lado. Tampoco se considerarán las contribuciones debidas a las impurezas iónicas pesadas de los elementos que se desprenden del contenedor del plasma en los aparatos de fusión termonuclear, por ejemplo.

Es sabido que para caracterizar el comportamiento macroscópico de un número grande de partículas se utiliza una función de distribución $F = F(q, p; t)$ de todas las partículas en el espacio fase del sistema. La evolución de la función de distribución está dada por el conocido teorema de Liouville.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (2.1.1. - 2)$$

Esta última expresión indica la forma de la evolución dinámica de F , así que si F es normalizada a uno, esta ecuación indica que el volumen de cualquier región en el espacio fase es invariante cuando sus partes constituyentes se mueven de acuerdo a las ecuaciones de Hamilton. También muestra que F se puede interpretar como la densidad de probabilidad de encontrar al sistema en el tiempo t en el punto (q, p) del espacio fase. Otra forma de escribir (2.1.1-2) utilizando los paréntesis de Poisson y las ecuaciones de movimiento de Hamilton son:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (2.1.1 - 3)$$

se puede definir el segundo término de la ecuación anterior como el paréntesis de Poisson,

$$[F, H] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (2.1.1 - 4)$$

¹ La función Lagrangiana L se "define" como se indica después de la ecuación (1.4.2.-9)

Son todas estas expresiones, formas diferentes de escribir el teorema de Liouville que también puede ser escrito de la siguiente manera:²

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{L}F. \quad (2.1.1. - 5)$$

Siendo

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^N \left([\vec{q}_i, H] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} + [\vec{p}_i, H] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \right), \quad (2.1.1. - 6)$$

o bien

$$\mathcal{L} = [H, \dots] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \right); \quad (2.1.1. - 7)$$

donde \mathcal{L} es definido como el operador Liouvilliano.

Hasta aquí se ha trabajado con la función de distribución $F = F(q, p; t)$, que contiene la máxima cantidad de información acerca del sistema según la mecánica estadística; sin embargo, resulta prácticamente más conveniente trabajar con funciones de distribución llamadas reducidas, que contienen un número menor de información. Las funciones de distribución reducidas $f_s^{\alpha_1, \dots, \alpha_s}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_s, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s; t)$ ³ se obtienen por integraciones de F sobre $N - s$ coordenadas de fase "irrelevantes". Las funciones de distribución para una y dos partículas son respectivamente

$$f_1^{\alpha}(\vec{q}_1, \vec{p}_1; t) = N_{\alpha} \int F(q, p; t) d\vec{q}_2, \dots, d\vec{q}_N, d\vec{p}_2, \dots, d\vec{p}_N, \quad (2.1.1. - 8)$$

$$f_2^{\alpha\alpha}(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_2; t) = N_{\alpha}(N_{\alpha} - 1) \int F(q, p; t) d\vec{q}_3, \dots, d\vec{q}_N, d\vec{p}_3, \dots, d\vec{p}_N, \quad (2.1.1. - 9)$$

$$f_2^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_2; t) = N_{\alpha}N_{\beta} \int F(q, p; t) d\vec{q}_3, \dots, d\vec{q}_N, d\vec{p}_3, \dots, d\vec{p}_N. \quad (2.1.1. - 10)$$

La importancia de la función de distribución reducida es que es posible calcular todas las cantidades de la teoría de transporte, definidas como promedios de una cantidad dinámica $b^{\alpha}(q, p)$ pesada con f_1^{α} , es decir:

$$\langle b \rangle = \sum_{\alpha} \int b^{\alpha}(\vec{q}, \vec{p}) f_1^{\alpha}(\vec{q}, \vec{p}; t) d\vec{q}d\vec{p} \quad (2.1.1. - 11)$$

Es obvio que a partir de la ecuación de Liouville (2.1.1.-5) y las definiciones acabadas de dar para las funciones de distribución reducidas, es posible deducir las correspondientes ecuaciones de evolución para éstas; haciendo factible la descripción de sistemas de partículas en base a la dependencia de las interacciones que tienen éstas entre sí y con los campos externos considerados, en función de la forma del Hamiltoniano. Así por ejemplo, para la ecuación de evolución de la función de distribución reducida de una partícula $f_1^{\alpha}(\vec{q}_1, \vec{p}_1; t)$ ($= f^{\alpha}(\vec{q}, \vec{p}; t)$, para simplificar) para un sistema tal como un plasma confinado, en el que existen interacciones coulombianas entre sus partículas cargadas y las debidas a un campo electrostático $\vec{E}_0 = -\nabla\phi_0$ y uno magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ externos, se encuentra que la expresión más simple del Hamiltoniano, definiendo $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) = (q, v)$, está dada por,

$$H(q, v) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} m_{\alpha_j} v_j^2 + e_{\alpha_j} \phi_0(\vec{q}_j) \right] + \sum_{j < n=1}^N V_{jn}^{\alpha_j \alpha_n}(\vec{q}_j, \vec{q}_n), \quad (2.1.1. - 12)$$

² Para simplificar la notación se utilizarán las siguientes idéntidades $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla_j \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j}$, $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j}$, $\partial_{jn} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n}$; con expresiones análogas cuando la función de distribución depende de las velocidades generalizadas \vec{v}_j en lugar de los momentos \vec{p}_j .

³ Las cantidades relevantes para las partículas de una especie dada se etiquetarán por un índice en letras griegas. Estos índices pueden tomar dos valores, en el caso del plasma, $\alpha = e$ para los electrones, y $\alpha = i$ para los iones. Así m_{α} es la masa de la especie α , etc.

donde $V_{jn}^{\alpha_j \alpha_n}(\vec{q}_j, \vec{q}_n)$ es el potencial de interacción coulombiana entre entre las partículas.⁴

$$V_{jn}^{\alpha_j \alpha_n}(\vec{q}_j, \vec{q}_n) = e_{\alpha_j} e_{\alpha_n} \frac{1}{|\vec{q}_j - \vec{q}_n|} \quad (2.1.1. - 13).$$

Con esta expresión, y las respectivas integraciones sobre la ecuación (2.1.1.-5), se encuentra la ecuación de evolución correspondiente para la función de distribución reducida de una partícula. El término dependiente de las funciones de correlación⁵ se identifica con las colisiones. Cuando puede omitirse este término la ecuación cinética resultante es,

$$\partial_t f^\alpha(1; t) = -\vec{v}_1 \cdot \nabla_1 f^\alpha(1; t) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\frac{1}{c} (\vec{v}_1 \times \vec{B}) + \vec{E} \right) \partial_1 \cdot f^\alpha(1; t). \quad (2.1.1. - 14)$$

Aquí, \vec{E} es igual al campo eléctrico total, es decir a la suma de un campo externo $\vec{E}_0 = -\nabla \phi_0$ como se definió antes y un campo eléctrico promedio \vec{E} que se calcula a partir del potencial eléctrico promedio de las partículas del plasma. La ecuación (2.1.1.-14) es conocida como la **ecuación de Vlasov** o la **ecuación de Boltzmann sin colisiones**. Más aún, es necesario considerar que la ecuación de Vlasov está acoplada a las ecuaciones de Maxwell completas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{q}; t) &= 4\pi \sum_{\beta} e_{\beta} \int f^{\alpha}(\vec{q}, \vec{v}) d\vec{v} \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{q}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{q}; t) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{q}; t) &= 0 \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{q}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{q}; t) + \frac{4\pi}{c} \sum_{\beta} e_{\beta} \int f^{\alpha}(\vec{q}, \vec{v}) d\vec{v} \end{aligned} \quad (2.1.1. - 15)$$

Una descripción completa del plasma se logra a través de las ecuaciones (2.1.1.-14) y (2.1.1.-15) siempre que se desprecien las colisiones. Esto corresponde a fenómenos con frecuencias mucho mayores que la frecuencia de colisión, tales como ondas electrostáticas, o el bien conocido efecto del amortiguamiento de Landau, donde una onda electrostática cede, o viceversa, energía al plasma. Estos fenómenos son ciertamente efectos individuales, en lo que sigue se estará más interesado por los efectos colectivos del plasma, por eso, es necesario considerar el término de colisiones de Landau.

Para analizar el término de colisiones sea (como se concluye de la interpretación física de la función de distribución reducida para una partícula, $f(\vec{q}, \vec{v}; t)$) $f(\vec{q}, \vec{v}; t) d\vec{q} d\vec{v}$ el número de partículas localizadas en el tiempo t en el elemento de volumen $d\vec{q} d\vec{v}$ con velocidades de las partículas en el intervalo $(\vec{v} - \frac{1}{2} d\vec{v}, \vec{v} + \frac{1}{2} d\vec{v})$. Además supondremos, sólo para no cargar con muchos términos de la ecuación cinética, que no hay campos externos y que las interacciones entre las partículas del plasma se representan por un potencial $V(r)$

⁴ El lector debe observar que con esta expresión para el Hamiltoniano se está suponiendo que el plasma está totalmente ionizado, es decir, que no se consideran procesos tales como ionización, recombinación o intercambio de carga. Para considerarlos sería necesario un término de interacción no-coulombiano. También se excluyen procesos de interacción relativistas. Además se considera una transformación pseudo-canónica para pasar de una función de distribución que depende del momento generalizado, a las variables más "naturales" en caso de interacciones electromagnéticas, es decir, las velocidades \vec{v} , por lo que no aparece \vec{A} explícitamente. Ver la discusión de los capítulos I y II del libro de Balescu R. Transport processes in plasmas, Ed. Elsevier Science Publishing Co., Holanda, Vol. I (1988).

⁵ La función de correlación binaria $g^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{v}_1, \vec{q}_2, \vec{v}_2; t)$ se define como:
 $g^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{v}_1, \vec{q}_2, \vec{v}_2; t) = f^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{v}_1, \vec{q}_2, \vec{v}_2; t) - f^{\alpha}(\vec{q}_1, \vec{v}_1; t) f^{\beta}(\vec{q}_2, \vec{v}_2; t)$
 Esta lleva, para un régimen estadístico particular (cuando el gas es más diluido) a definir un término de colisiones para la ecuación cinética ($\mathcal{K}^{\alpha} = \mathcal{K}^{\alpha}[f^{\alpha}(1; t)]$) de una partícula, tal que se puede hallar la solución de ésta. Más explícitamente después de hacer los cálculos correspondientes se halla que:

$$\mathcal{K}^{\alpha} = \sum_{\beta} \int L'_{12}{}^{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{v}_1, \vec{q}_2, \vec{v}_2; t) d2, \text{ siendo } L'_{12}{}^{\alpha\beta} \equiv (\nabla_j V_{jn}) \cdot \partial_{jn}$$

únicamente; así que el sistema evoluciona de acuerdo a la ecuación cinética a partir de estos términos. Con estas suposiciones la ecuación cinética sin colisiones (2.1.1.-14) se reduciría a la forma:

$$\partial_t f(\vec{q}, \vec{v}; t) + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{q}, \vec{v}; t) = 0 \quad (2.1.1. - 16)$$

Las colisiones se incluyen de la siguiente manera: Si el alcance de las interacciones entre las partículas del gas diluido es de radio r_c , es posible imaginar que cuando aquellas interactúan entre sí, lo hacen de tal manera que cuando se aproximan lo suficiente entrando en una esfera de radio menor que r_c ⁶; entonces estas partículas se desvían lo suficiente, llegando a tener nuevas trayectorias y velocidades. Esto implica que el par de partículas que participan de esta colisión ha hecho cambiar la función de distribución en la ecuación cinética que describe la evolución de ésta. Es necesario agregar, por tanto, dos términos a la ecuación cinética: uno debido a la ganancia de partículas con velocidades que van a tomar un valor igual a \vec{v} en el tiempo t , denotadas por el término G ; y otro debido a la pérdida de partículas que dejan de tener esta velocidad en este tiempo, que se denota por P . Entonces la ecuación (2.1.1.-16) se ve modificada llevándola a la siguiente expresión:

$$\partial_t f(\vec{q}, \vec{v}; t) + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{q}, \vec{v}; t) = G - P \quad (2.1.1. - 17)$$

A partir de aquí, utilizando las leyes de conservación de momento lineal y energía para colisiones binarias entre dos partículas, representadas por las velocidades y posiciones \vec{v}, \vec{v}_1 y \vec{q}, \vec{q}_1 , respectivamente, aunque no queda excluido considerar otro tipo de colisiones⁷, se puede proponer razonablemente que el término de colisiones está dado por:

$$\partial_t f(\vec{q}, \vec{v}; t) + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{q}, \vec{v}; t) = \int 2\pi b |\vec{V}| \left[f(\vec{q}, \vec{v}'; t) f(\vec{q}, \vec{v}_1'; t) - f(\vec{q}, \vec{v}; t) f(\vec{q}, \vec{v}_1; t) \right] db d\vec{v}_1 \quad (2.1.1. - 18)$$

Donde b es el parametro de impacto de la colisión binaria y $\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_1$. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación cinética de Boltzmann**, o la ecuación cinética de gases diluidos. Si en el caso que se está considerando, se supone que el sistema es homogéneo, sin pérdida de generalidad la función de distribución reducida $f(\vec{q}, \vec{v}; t)$ sólo dependería de la velocidad. Se puede hacer entonces, $f(\vec{q}, \vec{v}; t) = n\phi(\vec{v})$ con $n = \frac{N}{V}$, donde V es el volumen total del sistema. Por tanto (2.1.1.-18) se transforma en:

$$\partial_t \phi(\vec{v}; t) = n \int 2\pi b |\vec{V}| \left[\phi(\vec{v}'; t) \phi(\vec{v}_1'; t) - \phi(\vec{v}; t) \phi(\vec{v}_1; t) \right] db d\vec{v}_1 \quad (2.1.1. - 19)$$

Ahora ya se puede presentar la versión del teorema H de Boltzmann (1844-1906) para el caso de colisiones entre partículas de un gas diluido, es decir, supuestas como colisiones elásticas. Este teorema es uno de los que ha hecho época en la historia de la física, en particular es uno de los más relevantes para toda la teoría de la mecánica estadística. Originalmente, Boltzmann planteo su ecuación cinética (2.1.1.-19) en 1872, para dar una "casi" teoría mecánica de la irreversibilidad observada para los procesos macroscópicos, que gira alrededor de la segunda ley de la termodinámica. Para esto definió una cantidad H que se puede identificar con el negativo de la densidad de entropía $[-s(\vec{q}; t)]$, en un estado de equilibrio*. La definición de Boltzmann para la cantidad H (para sistemas homogéneos) es:

$$H(t) = n \int \phi(\vec{v}_1; t) \ln[n\phi(\vec{v}_1; t)] d\vec{v}_1, \quad (2.1.1. - 20)$$

Tomando la derivada parcial temporal de (2.1.1.-20) es fácil darse cuenta de que debido a que (2.1.1.-20) está acotada, y utilizando (2.1.1.-18)), $H(t)$ nunca crece, sino que disminuye monótonamente o se mantiene constante.⁸ Esto constituye al teorema H de Boltzmann. Se observa que estas propiedades del negativo de

⁶ A r_c se le conoce como el rango de las correlaciones, y es tal que la función de correlación $g^{\alpha\beta}(\vec{q}_1, \vec{v}_1, \vec{q}_2, \vec{v}_2; t) \approx 0$, cuando $|\vec{q}_1 - \vec{q}_2| > r_c$.

⁷ Ver por ejemplo: Tolman R.C., The principles of statistical mechanics, Dover, E.U.N.A. (1979) y Reif F., Fundamentals of statistical and thermal physics, Ed. McGraw-Hill E.U.N.A. (1968)

* Ver, las ecuaciones (2.1.1.-25) y (2.1.1.-26) y su discusión complementaria.

⁸ Ver, por ejemplo, los libros de la nota anterior.

$H(t)$ coinciden precisamente con las características "postuladas" para la entropía en el caso de equilibrio, según la segunda ley de la termodinámica de la sección 1.4.1 del capítulo I. Sin embargo, las colisiones en el plasma no ocurren en forma binaria, como se supuso para llegar al término de colisiones de la ecuación cinética (2.1.1.-18). Es necesario por tanto, que se modifique esta ecuación para tomar en cuenta el tipo de interacciones que hay en un plasma totalmente ionizado. La modificación del término de colisiones fue hecha por Landau, considerando que las interacciones son de largo alcance. Al ser todavía colisiones coulombianas, la sección eficaz diferencial de dispersión ($d\sigma$) está dada, al igual que para el término de colisiones de Boltzmann, por

$$d\sigma = \sigma_d d\Omega = 2\pi b db \varphi$$

Aquí $d\Omega$ es igual al ángulo sólido y φ es el flujo de partículas que colisionan sobre una partícula situada en \vec{q} y que son dispersadas. Así, alterando la expresión del término de colisiones de la ecuación (2.1.1.-19) se llega a la siguiente expresión para esta ecuación: ⁹

$$\partial_t \phi(\vec{v}_1; t) = An \int d\vec{v}_2 \int \tilde{V}_k^2 (\vec{k} \cdot \partial_{12}) \delta(\vec{k} \cdot \vec{V}) (\vec{k} \cdot \partial_{12}) \phi(\vec{v}_1; t) \phi(\vec{v}_2; t) d\vec{k} \quad (2.1.1. - 21)$$

Donde $A = 8 \frac{\pi^4}{m^2}$ y \tilde{V}_k es la función transformada de Fourier para el potencial de interacción $V = V(r)$ que se supone que existe entre las partículas del plasma.

$$V(r) = \int \tilde{V}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}$$

Tomando la derivada parcial temporal de (2.1.1.-20) y sustituyendo aquí (2.1.1.-21) se halla:

$$\begin{aligned} \partial_t H(t) &= n \int [\ln n \phi(1; t) + 1] \partial_t \phi(1; t) d\vec{v}_1 = \\ &= An^2 \int [\ln n \phi(1; t) + 1] \tilde{V}_k^2 (\vec{k} \cdot \partial_{12}) \delta(\vec{k} \cdot \vec{V}) (\vec{k} \cdot \partial_{12}) \phi(\vec{v}_1; t) \phi(\vec{v}_2; t) d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 d\vec{k} = \\ &= -\frac{1}{2} An^2 \int [\phi(\vec{v}_1; t) \phi(\vec{v}_2; t)]^{-1} \tilde{V}_k^2 \delta(\vec{k} \cdot \vec{V}) \left[(\vec{k} \cdot \partial_{12}) \phi(\vec{v}_1; t) \phi(\vec{v}_2; t) \right]^2 d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 d\vec{k}. \end{aligned} \quad (2.1.1. - 22)$$

Es claro que para llegar a (2.1.1.-22) se hizo uso de argumentos de simetría, y el último paso resultó de una integración por partes. Como las funciones de distribución, la delta de Dirac y el resto de las expresiones en (2.1.1.-22) son cuadráticas, se concluye que:

$$\partial_t H(t) \leq 0 \quad (2.1.1. - 23)$$

Esta última expresión constituye la versión del teorema H para un término de colisiones como el dado por (2.1.1.-21). De esta manera, en rasgos generales, es plausible que para plasmas, descritos por interacciones de deflexiones pequeñas entre sus partículas, se pueda utilizar la expresión (2.1.1.-20) para describir la evolución de la densidad de entropía, identificándola con $-H$. El plasma tenderá entonces a un estado de máxima entropía, y se puede hacer una descripción de estado relajado del plasma.

Para un sistema inhógeno se podría tomar la definición dada por (2.1.1.-20) para la entropía modificada para considerar una dependencia espacial. Haciéndolo y tomando el término de colisiones de Boltzmann (a partir del cual se dedujo el de Landau, y por tanto los comentarios que siguen no dejan de ser válidos si se considera este término colisional), se puede demostrar que el estado de equilibrio del sistema se alcanza según dos escalas de tiempo diferentes:

a) Para tiempos $t \gg \left(\frac{r_0}{v}\right)$, con r_0 midiendo el alcance del potencial de interacción entre partículas, $f(\vec{q}, \vec{v}, t)$ está dada por

⁹ Haciendo antes la abreviación $\vec{v}_1 \rightarrow 1$, y después transformando en la ecuación (2.1.1.-19) a: $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}' \rightarrow \vec{v}_1', \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2, \vec{v}_1' \rightarrow \vec{v}_2'$. Ver, Balescu R., Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics, Ed. Krieger Publishing Co., E.U.N.A. (1991)

$$f^{(0)}(\vec{q}, \vec{v}, t) = n(\vec{q}, t) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\vec{q}, t)} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m}{k_B T} (\vec{v} - \vec{u})^2}, \quad (2.1.1. - 24)$$

donde

$$\vec{u}(\vec{q}, \vec{v}, t) \equiv \frac{1}{n(\vec{q}, t)} \int \vec{v} f(\vec{q}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

es la velocidad promedio local del gas o hidrodinámica, siendo

$$n(\vec{q}, t) \equiv \int f(\vec{q}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

la densidad de partículas.

Esta solución corresponde a la que hace a H un mínimo, e indica que el sistema está en un equilibrio local en el espacio de velocidades descrito por una función de distribución de velocidades que es una Maxwelliana local. Aquí debe notarse que el equilibrio local nunca se alcanza y que sólo es una aproximación a la solución de toda la ecuación cinética de Boltzmann. En efecto $f^{(0)}$ es sólo solución cuando el término de colisiones se anula.

b) Para tiempos mayores se encuentra una solución de la ecuación cinética de Boltzmann total. Esta es una función de distribución de equilibrio total $f^{(eq)}$, la cual ya no tiene una dependencia en \vec{q} y t para T y n , expresada por

$$f^{(eq)} = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{k_B T} (\vec{v}^2 + V(q))} \quad (2.1.1. - 25)$$

Donde $V(q)$ es el potencial del cual se deriva la fuerza que aparece en la ecuación (2.1.1.-14), cuando esto es posible (V.gr. para el campo electrostático).

En ausencia de un potencial externo, i.e., $V(q) = 0$, se tiene que al considerar la expresión para $s = -H$ de la ecuación (2.1.1.-20) y sustituir en ésta la expresión para $f^{(eq)}$, se encuentra que coincide con el valor de la entropía para un gas ideal, conocida de la teoría termodinámica (excepto una constante que ahora se puede identificar), a saber la ecuación de Sackur-Tetrode¹⁰

$$s = \left(\ln p - \frac{5}{2} \ln T - \ln \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{k_B^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \right). \quad (2.1.1. - 26)$$

Al considerar el caso de equilibrio local, se encuentra que la entropía se conserva a lo largo de las líneas de flujo del sistema.¹¹

Vale la pena señalar que si bien este último resultado coincide con la entropía para el gas ideal, que viene de la teoría termodinámica para un estado de equilibrio macroscópico, la definición para la entropía dada por la ecuación (2.1.1.-20) puede tener discrepancias con la definición fenomenológica. Como Jaynes¹² demostró, la definición de entropía dada por Gibbs es la expresión correcta. La entropía de Gibbs está dada por

$$S = \frac{-k_B}{h^{3N}} \int F_* \ln F_* d^{3N} q d^{3N} p. \quad (2.1.1. - 27)$$

En donde F_* es la densidad de espacio fase, o función de distribución definida en (2.1.1.-2) en relación al teorema de Liouville. El subíndice indicado por un asterisco está representando tres posibilidades, que indican la descripción sobre un ensamble canónico, microcanónico o gran canónico del sistema¹³. Es digno

¹⁰ Ver, por ejemplo, L. García-Colín, Teoría cinética de los gases, Ed. U.A.M.I., México, pags. 38-40 (1990).

¹¹ Para más detalles ver, por ejemplo, García-Colín L. op. cit.

¹² E.T. Jaynes. Am.J.Phys. **33**, pp.391-398 (1965).

¹³ Para mayores detalles ver el magnífico libro: Greiner W. et. al., Thermodynamica and statistical mechanics, Ed. Springer-Verlag, New York (1995).

de notar que Boltzmann no sólo sugirió una expresión para la entropía tal como la expresada por (2.1.1.-20), sino que también propuso una que está relacionada con el número de microestados posibles del sistema, denotado por $\Omega(E, V, N)$, que corresponde a la descripción en base al ensamble microcanónico de Gibbs y que está dada por la expresión

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N) \quad (2.1.1. - 28)$$

Como puede demostrarse, es igual a la entropía definida por (2.1.1.-27)¹⁴. Aquí es necesario resaltar una vez más, que el teorema H de Boltzmann **no constituye**¹⁵ una demostración de la segunda ley de la termodinámica para gases diluidos. Sin embargo, dada la aproximación que se hizo, al suponer que los plasmas de fusión son bajamente densos, se puede en principio utilizar la ecuación (2.1.1.-26) para este sistema, y considerar la formulación de la teoría de transporte en base a la ecuación cinética de Boltzmann, como la relevante para describir procesos de transporte en plasmas. De otra manera sería necesario considerar el término de interacción entre las partículas, que hacen no despreciables las diferencias entre las definiciones de entropía de Gibbs y Boltzmann (ec. 2.1.1.-20).¹⁶

¹⁴ Ver referencia anterior de la nota 14

¹⁵ En efecto, esto se puede ver de lo anteriormente expuesto, pues la mecánica estadística está basada en hallar soluciones de equilibrio estacionarias de la ecuación de Liouville, (2.1.1.-2), que describen, por tanto, sólo estados de equilibrio termodinámico. En cambio el teorema H es un intento para fundamentar la posibilidad del comportamiento irreversible de sistemas macroscópicos, en base a la mecánica clásica; se necesita, entonces, considerar la evolución temporal del sistema. Ver, por ejemplo, Tolman R.C., *The Principles Of Statistical Mechanics*, Ed. Dover, Canadá, §21, §22 y cap. V, (1979). Otra demostración sobre este punto se puede hallar en, Jaynes E.T., *op. cit.* Además recuérdese la discusión anterior a la ec.(2.1.1.-20), donde se menciona que la cantidad H definida por Boltzmann, es proporcional a la entropía del gas ideal, sólo cuando se tiene el equilibrio establecido; antes, no se puede afirmar que sea esta cantidad.

¹⁶ Ver, Balescu R., *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*, Ed. Krieger Publishing Co., E.U.A, Capítulo 7 (1991).

2.1.2. Teoría de la información

Hasta ahora se ha hablado del concepto fundamental de entropía. Como se vio, la expresión para esta cantidad se basa en principios físicos más fundamentales, ya sea en su versión termodinámica (la más fundamental, por ser inferida de hechos fenomenológicos) del capítulo I o en su versión de la teoría de la mecánica estadística de equilibrio, mencionada al final de la sección anterior. Sin embargo a partir del trabajo clásico de Shannon¹, acerca de lo que se dio por llamar teoría de la información, fue posible mostrar que el concepto es útil para caracterizar el grado de certidumbre sobre una información parcial accesible en un esquema finito. Este esquema se define por una regla de asociación, o función, entre los eventos (x_i) posibles de un sistema y sus probabilidades (p_i). Así dado un conjunto de $\{x_i\}_{i \in 1, 2, \dots, n}$ y sus respectivas probabilidades $\{p_i\}_{i \in 1, 2, \dots, n}$ ($p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$), el esquema se representa por la matriz²

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

con la entropía definida por la siguiente expresión

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.1.2. - 1)$$

El que S realmente caracterice el grado de incertidumbre para los esquemas finitos, parte de las siguientes propiedades de S.

1. $S(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ si y sólo si uno de los números p_1, p_2, \dots, p_n es igual a uno y todos los otros iguales a cero. Es decir, que no hay incertidumbre respecto a uno de los eventos, el que tiene precisamente una probabilidad igual a uno, es el único posible.

2. Para un valor fijo de n, el esquema con más incertidumbre es aquel con eventos igualmente probables, es decir, $p_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), y esto implica que la entropía asume su más grande valor sólo para estos valores de las posibles p_k .³

3. Para dos esquemas finitos A y B, que son mutuamente independientes (es decir, que la probabilidad de que ocurran los eventos A_k y B_l es $p_k p_l$) implica que el conjunto de eventos $A_k B_l$ ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$), con probabilidades $p_k p_l$ representa otro esquema finito que se puede llamar el producto de los esquemas A y B y designarlo por AB. De tal manera que si $S(A), S(B)$ y $S(AB)$ representan las correspondientes entropías de los esquemas A, B y AB, entonces se tiene

$$S(AB) = S(A) + S(B)$$

Sobre estas bases se puede considerar a la mecánica estadística como un tipo de inferencia estadística, siendo la idea básica el establecer la distribución de probabilidad más probable, cuando sólo se tiene una información parcial. Siguiendo esta línea de pensamiento, las reglas usuales de cálculo de la mecánica estadística, que parten de la determinación de la función de partición, son consecuencia inmediata del principio de entropía máxima. Así, independientemente de cualquier argumento físico⁴, y también de una verificación experimental, la teoría de la información proporciona la mejor estimación acerca del posible

¹ Shannon C.E., Bell System Tech. J. **27**, 379, 623 (1948).

² v. gr., para un dado $\{A_i\}_{i \in 1, 2, \dots, 6}$, $p_i = \frac{1}{6}$, $\forall i$, siendo A_i el evento de que el dado tenga la cara hacia arriba con un valor igual a i.

³ Para una demostración detallada de estas propiedades, que tienen clara analogía con las propiedades asignadas a la entropía termodinámica clásica, ver, v.gr., Khinchin A.I., Mathematical foundations of informational theory, Ed. Dover, E.U.A.

⁴ Previamente era necesario considerar, además de las ecuaciones de movimiento, otras hipótesis adicionales tales como ergodicidad, transitividad métrica, o iguales probabilidades a priori, y la identificación de la entropía se hacía sólo hasta el final, por comparación de las ecuaciones macroscópicas resultantes con las leyes de la termodinámica fenomenológica. Ver, v.gr., Hill T.L., Introduction to statistical thermodynamics, Dover, E.U.A. (1986) Cap. 1.

estado del sistema que se puede encontrar en base a la información disponible. Jaynes⁵, sugirió que la teoría de la información puede ser aplicada al problema de la justificación de la mecánica estadística, siguiendo las siguientes líneas. Se toma, como anteriormente se especificó, que x es capaz de asumir los valores discretos $\{x_i\}$; sin embargo, no se saben los valores de las correspondientes probabilidades p_i y lo único que se conoce es el valor esperado de la función $f(x)$:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad (2.1.2. - 2)$$

Sobre la base de esta información, sabiendo además que

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.1.2. - 3)$$

¿cuál es el valor esperado de una función $g(x)$, cualquiera? Las condiciones (2.1.2.-2) y (2.1.2.-3) han de ser complementadas por $(n - 2)$ condiciones más antes de poder encontrar a $\langle g(x) \rangle$. En lo que sigue se usarán las herramientas de la teoría de probabilidades llamada subjetiva, en lugar de la objetiva⁶. Para fines prácticos, ambas teorías son matemáticamente idénticas, aunque hasta el momento al parecer no han logrado ser unidas, y son utilizadas en física a discreción del problema a resolver. Jaynes muestra que el problema de hallar a p_i de acuerdo a (2.1.2.-2) y (2.1.2.-3) es soluble a partir del concepto de entropía, definido por (2.1.2.-1), maximizando esta expresión sujeta a las constricciones (2.1.2.-2) y (2.1.2.-3). Por la técnica de los multiplicadores de Lagrange se halla que:

$$p_i = e^{-\lambda - \mu f(x_i)}, \quad (2.1.2. - 4)$$

con lo que podría ya obtenerse $\langle g(x) \rangle$. Las constantes λ y μ se determinan sustituyendo (2.1.2.-4) en (2.1.2.-2) y (2.1.2.-3). Este resultado se puede escribir en la forma

$$\langle f(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z(\mu), \quad (2.1.2. - 5)$$

donde

$$\lambda = \ln Z(\mu), \quad (2.1.2. - 6)$$

$$Z(\mu) = \sum_i e^{-\mu f(x_i)}. \quad (2.1.2. - 7)$$

A Z se le llamará la función de partición.

Este procedimiento se puede generalizar a cualquier número de funciones $f_r(x_i)$

$$\langle f_r(x) \rangle = \sum_i p_i f_r(x_i), \quad (2.1.2. - 8)$$

lo cual implica que:

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_i e^{-\{\lambda_1 f_1(x_i) + \lambda_2 f_2(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)\}} \quad (2.1.2. - 9)$$

⁵ Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics. Phys. Rev. 106, 620-630 (1957).

⁶ La teoría de probabilidades se ha desarrollado a través de dos líneas de pensamiento: 1. La llamada escuela objetiva, que considera que las probabilidades de un evento son una propiedad objetiva de éste, siempre capaz de una medición empírica por la observación de las razones de frecuencia de un experimento de azar. Sobre la medición de una distribución de probabilidad, esta teoría considera que se están haciendo predicciones que son en principio verificables con todo detalle, como las que se obtienen según la mecánica clásica. 2. La escuela subjetiva considera a las probabilidades como una expresión de la ignorancia humana, la probabilidad de un evento es meramente una expresión formal de la expectativa de que éste deba o no de ocurrir, basado en alguna información disponible. Esta teoría permite sacar conclusiones plausibles en casos en donde no hay suficiente información para llegar a ciertas conclusiones, así que una verificación detallada no se puede esperar.

$$p_i = e^{-[\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x_i) + \lambda_2 f_2(x_i) + \dots + \lambda_m f_m(x_i)]}, \quad (2.1.2. - 10)$$

donde las constantes λ_m se determinan por

$$\langle f_r(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_r} \ln \mathcal{Z}(\mu), \quad (2.1.2. - 11)$$

$$\lambda_0 = \ln \mathcal{Z}. \quad (2.1.2. - 12)$$

La varianza de la distribución $f_r(x)$ se encuentra que es

$$\Delta^2 f_r \equiv \langle f_r^2 \rangle - \langle f_r \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_r^2} \ln \mathcal{Z}(\mu). \quad (2.1.2. - 13)$$

Para ver cómo se aplica este formalismo en mecánica estadística, sean $E_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ los niveles de energía posibles de un sistema, donde los parametros α s pueden ser el volumen, el tensor de esfuerzos aplicado a campos eléctricos o magnéticos, potenciales gravitacionales, etc. Entonces, si en un principio se sabe sólo el valor medio de la energía $\langle E \rangle$, las probabilidades de entropía máxima de los niveles E_i están dadas, para un caso especial, por una expresión análoga a (2.1.2.-4), que se reconoce como la distribución de Boltzmann. Sin embargo, debe observarse, que aunque el formalismo aquí aplicado es semejante a aquél de la mecánica estadística, los argumentos son diferentes, como ya se hizo notar antes. Hechas las identificaciones correspondientes entre ambas teorías es claro que

$$\lambda_1 = \frac{1}{kT}$$

$$U - TS = F(T, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = -kT \ln \mathcal{Z}(T, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad (2.1.2. - 14)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.1.2. - 15)$$

$$\beta_r = kT \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \ln \mathcal{Z} \quad (2.1.2. - 16)$$

Así, la entropía termodinámica es idéntica a la entropía de la teoría de la información excepto por la presencia de la constante de Boltzmann. Para terminar, es notable que a partir de la manera de hacer inferencia estadística subjetiva, ya que ésta no depende de ninguna propiedad física, se puede concluir entonces que toda cantidad medible puede ser utilizada para caracterizar las probabilidades de entropía máxima. En mecánica estadística convencional la energía juega el papel preferido debido a que es una cantidad que se conserva, sin embargo para las aplicaciones de este formalismo en la descripción de un plasma, se hará uso de otras variables, como se verá a continuación.

2.2. Termodinámica del equilibrio para plasmas magnetizados.

Esta sección está basada en los trabajos de Minardi¹, que analizan cómo hallar el estado de equilibrio del plasma, vía un formalismo termodinámico, centrado en el concepto de entropía detallado en la sección anterior. Para esto se considera que una funcional de entropía está dada por la siguiente expresión

$$S = - \int P \ln P d\Gamma, \quad (2.2. - 1)$$

que es idéntica a la ecuación (2.1.2.-1) en el caso de un espacio Γ continuo, o que se puede identificar con (2.1.1.-27).² Se quiere caracterizar el sistema en términos de variables electromagnéticas. Para ello se hace una partición del espacio ocupado por el plasma de volumen V en pequeñas celdas de volumen $\Delta V_j = \frac{V}{N}$ que no se traslapan. Cada celda tiene una densidad de corriente \vec{j}_i . La probabilidad P es función de \vec{j}_i y de la posición \vec{x}_i de cada celda. La forma de $d\Gamma$ se puede saber, del hecho de que el volumen accesible al elemento de volumen $i = 1$ es $V = N\Delta V$, y al $i = 2$ es $V - \Delta V = (N - 1)\Delta V$ y así sucesivamente, entonces el volumen accesible de N elementos de volumen es igual a $N!\Delta V^N$, que debe de ser dividido por $N!$, porque una permutación entre los N elementos de volumen no tiene significado físico. Por lo tanto $d\Gamma$ es igual a³

$$d\Gamma = \Delta V^N d\vec{j}_1 \dots d\vec{j}_N \quad (2.2. - 2)$$

El punto central es hallar una expresión para la probabilidad P de (2.2.-1), sujeta a ciertas constricciones, tal como se desprende de la discusión del final de la sección 2.1. Para hacer esto se supondrá que el equilibrio del sistema está relacionado al comportamiento colectivo del plasma respecto a la densidad de corriente, mientras que la energía colectiva no está correlacionada con las fluctuaciones que vienen de la estructura de las partículas individuales. Para tomar estas dos constricciones en cuenta, se considera que la densidad de corriente \vec{j}_i tiene una componente azarosa

$$\vec{j}_i = \vec{j}(\vec{x}_i) + \vec{\tilde{j}}_i, \quad (2.2. - 3)$$

donde $\vec{j}(\vec{x}_i)$ es una densidad de corriente colectiva, y $\vec{\tilde{j}}_i$ es la parte fluctuante, que se asocia a un fondo de partículas individuales. Se verá próximamente que este fondo de partículas desempeña el papel de un "baño térmico" tal como ocurre en la estadística de Gibbs, en el ensamble canónico. En segundo lugar, la energía de interacción promedio Φ_{int} entre $\vec{\tilde{j}}_i$ fluctuante y el potencial vectorial creado por la corriente colectiva $\vec{j}(\vec{x}_i)$ ⁴, al estar suponiendo que no están correlacionados, debe de ser igual a

$$\Phi_{int} = \frac{1}{2c} \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) \sum_{i=1}^N \vec{\tilde{j}}_i \cdot \vec{A}(\vec{x}_i) d\Gamma \Delta V_i = 0. \quad (2.2. - 4)$$

El hecho de que se anule esta expresión (aunque $\delta\Phi_{int} \neq 0$) indica que no existen intercambios de energía, es decir, que el equilibrio es puramente colectivo. Sin embargo, en los cálculos que siguen se mantendrá a

¹ Ver las referencias a artículos, al final de la tesis.

² N.B. En un principio se considerará una partición del volumen total del plasma, tal que si se sigue a Minardi al pie de la letra, no es posible identificar a la ec.(2.2.-1) con (2.1.1.-27), excepto por una constante. Pero siguiendo la partición propuesta por Liboff R.L. (Journal of Statistical Phys. **11**, pp.343-357 (1974)), en el caso límite de un refinamiento de ésta, como se hará al tomar el "límite termodinámico" en el esquema de Minardi, se muestra que ambas son iguales.

³ Nótese que si ΔV^N se hace igual a $\frac{V^N}{N!}$, la partición del sistema corresponde a la de granulado del artículo de Liboff, de la subnota 2 anterior y en este caso se cumple lo que se comentó en el texto principal anterior a esta subnota, sin afectar de manera fundamental los cálculos anteriores, excepto por una constante, al sacar el límite en el refinamiento. Por demás está decir que la partición de Liboff es la más natural y no la de Minardi, pero como se mencionó, se sigue la discusión de sus artículos.

⁴ Se puede expresar Φ_{int} en la forma $\vec{j}(\vec{x}_i) \cdot \vec{A}$ en lugar de $\vec{A}(\vec{x}_i) \cdot \vec{\tilde{j}}$ bajo ciertas condiciones de frontera, pues a pesar de todo proporcionan el mismo resultado final

Φ_{int} , pues resulta importante tomar en cuenta las variaciones de esta cantidad. Por otro lado, la energía magnética colectiva (Φ), suponiendo que $\vec{j}(\vec{x}_i)$ y $\vec{A}(\vec{x}_i)$ son cantidades conocidas y promediadas, está dada por

$$\Phi = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \vec{j}(\vec{x}_i) \cdot \vec{A}(\vec{x}_i) \Delta V_i = \frac{1}{2c} \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) \sum_{i=1}^N \vec{j}(\vec{x}_i) \cdot \vec{A}(\vec{x}_i) \Delta V_i d\Gamma, \quad (2.2. - 5)$$

o en el límite continuo, con $\Delta V_i \rightarrow 0$ es igual a la forma bien conocida para la energía magnética, con condiciones de frontera adecuadas, a saber

$$\Phi = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (2.2. - 6)$$

Además, del hecho de que se procede por inferencia estadística, es conveniente fijar el valor de la dispersión de la densidad de corriente que fluctua azarosamente ($\overline{\Delta j^2}$)⁵:

$$\overline{\Delta j^2} = \frac{1}{N} \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) \sum_i j_i^2 d\Gamma \quad (2.2. - 7).$$

Añadiendo ahora la restricción,

$$\int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) d\Gamma = 1, \quad (2.2. - 8)$$

lleva a que para saber la forma de P es necesario sacar la extremal de la siguiente funcional \hat{S} , con respecto a variaciones de P ,

$$\begin{aligned} \hat{S} = & - \int P \ln P d\Gamma - \frac{\alpha}{N} \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) \sum_i j_i^2 d\Gamma + \frac{1}{c\tau} \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) \sum_{i=1}^N \vec{j}_i \cdot \vec{A}(\vec{x}_i) d\Gamma \Delta V_i \\ & - \gamma \int P(\vec{j}_i, \vec{x}_i) d\Gamma, \end{aligned}$$

donde α , τ y γ son multiplicadores de Lagrange. Al hacer el cálculo se encuentra que

$$P = P_0 \exp \left[- \left(\alpha \sum_i j_i^2 + \frac{1}{c\tau} \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{A}_i \Delta V_i \right) \right], \quad (2.2. - 9)$$

$$P_0 = \exp [- (\gamma + 1)], \quad (2.2. - 10)$$

$$\alpha = \frac{3}{2\overline{\Delta j^2}} \left[1 - \frac{2(\Phi + \Phi_{int})}{3N\tau} \right], \quad (2.2. - 11)$$

$$\tau = - \frac{\overline{\Delta V \Delta j^2} \sum_i \Delta V_i A^2(\vec{x}_i)}{6c^2(\Phi + \Phi_{int}) \left(1 - \frac{2}{3N\tau}(\Phi + \Phi_{int}) \right)}. \quad (2.2. - 12)$$

Completando el binomio cuadrado del exponente en (2.2.-9) con las siguientes definiciones,

$$\alpha j_i^2 + \frac{1}{c\tau} \vec{j}_i \cdot \vec{A}_i = \alpha (\vec{j}_i - \vec{\bar{j}}_i)^2 + C_i, \quad (2.2. - 13)$$

⁵ La fijación del valor, viene condicionada por la relación del fondo homogéneo y la parte fluctuante, correlación que se considera pequeña, dependiendo de la condición que se imponga a una longitud característica. Una discusión más amplia del significado físico de esta suposición, que aquí sólo distraería más la atención del lector, se encuentra en, Minardi E., Phys. of Fluids **16**, No. 1, pp. 122-129 (1973). Aquí, sólo se señala que esta condición indica que la densidad de corriente promedio del fondo es igual al negativo de la densidad de corriente efectiva de la parte de equilibrio colectivo. Es decir, que en equilibrio termodinámico el fondo reacciona a la parte colectiva de tal manera que la densidad de carga total efectiva del fondo y la superpuesta del equilibrio colectivo, se anula.

$$\bar{j}_i \equiv -\frac{1}{2\alpha\tau c} j(\vec{x}_i) \Delta V_i, \quad (2.2. - 14)$$

$$C_i \equiv -\frac{1}{4\alpha\tau^2 c^2} A^2(\vec{x}_i) \Delta V_i^2, \quad (2.2. - 15)$$

se obtiene que P queda expresada por la siguiente ecuación,

$$P = \frac{\exp\left[-\alpha \sum_i (\vec{j}_i - \bar{j}_i)^2\right]}{\Delta V^N \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3N}{2}}} \quad (2.2. - 16)$$

$$\bar{j}_i = \vec{j}_i + \bar{\bar{j}}_i = \int P \vec{j}_i d\Gamma = -\frac{1}{2\alpha\tau c} \bar{A}(\vec{x}_i) \Delta V_i \quad (2.2. - 17)$$

$$\Phi_{int} = \frac{1}{2c} \sum_i \bar{j}_i \cdot \bar{A}(\vec{x}_i) \Delta V_i = -\Phi - \frac{1}{4\alpha\tau^2 c^2} \sum_i A^2(\vec{x}_i) \Delta V_i^2 \quad (2.2. - 18)$$

$$\bar{j}_i^2 = \int P j_i^2 d\Gamma = \frac{3}{2\alpha} + \frac{A^2(\vec{x}_i) \Delta V_i^2}{4\alpha^2 \tau^2 c^2} \quad (2.2. - 19)$$

$$\overline{\Delta j^2} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{A^2(\vec{x}_i) \Delta V_i^2}{4\alpha^2 \tau^2 c^2} + \frac{3}{2\alpha} \quad (2.2. - 20)$$

$$P_0 = \frac{\exp(\sum_i C_i)}{\Delta V^N \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3N}{2}}} \quad (2.2. - 21)$$

Este conjunto de ecuaciones implica que:

$$S = N \ln \left[\Delta V \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta j^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{3N}{2} - \frac{3N}{2} \ln \left[1 - \frac{2}{3N\tau} (\Phi + \Phi_{int}) \right]. \quad (2.2. - 22)$$

Recordando las ecuaciones (2.1.2.-12) y (2.1.2.-14), y usando (2.2.-21) o (2.2.-10) se sabe que:

$$F = \tau \ln P_0 = \tau \sum_i C_i - N\tau \ln[\Delta V \pi^{\frac{3}{2}}] + \frac{3}{2} N\tau \ln \alpha,$$

y sustituyendo (2.2.-11), (2.2.-15) y (2.2.-18),

$$F = \Phi + \Phi_{int} - N\tau \ln \left[\Delta V \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta j^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{3N\tau}{2} \ln \left[1 - \frac{2}{3N\tau} (\Phi + \Phi_{int}) \right], \quad (2.2. - 23)$$

que al comparar con S de la ec.(2.2.-22) da

$$F = -\tau S + \Phi + \Phi_{int} + \frac{3N\tau}{2}, \quad (2.2. - 24)$$

lo que hace posible identificar a los tres últimos términos con la energía interna del sistema (la magnética, por ahora) como se mencionó antes.

§. El límite "termodinámico".

Si se toma ahora el límite en que $N \rightarrow \infty$ y que implica necesariamente que también $V \rightarrow \infty$, para mantener ΔV fijo, se puede aproximar la expresión de S por otra, haciendo de paso la separación de la

entropía entre cantidades que dependen de $\vec{j}(\vec{x}_i)$ y \bar{j} , y llamándolas entropía colectiva S_c y entropía de fondo S_f , respectivamente. Para esto, se definen las siguientes cantidades

$$\overline{\Delta j^2} = \frac{1}{N} \sum_i j^2(\vec{x}_i) + \frac{2}{N} \sum_i \bar{j} \cdot \vec{j}(\vec{x}_i) + \frac{1}{N} \sum_i \bar{j}_i^2, \quad (2.2. - 25)$$

$$\overline{\Delta \bar{j}^2} \equiv \frac{1}{N} \sum_i \bar{j}_i^2, \quad (2.2. - 26)$$

$$\Delta j_c \equiv \frac{2}{N} \sum_i \bar{j} \cdot \vec{j}(\vec{x}_i) = -\frac{2}{V} \sum_i \left[j^2(\vec{x}_i) + \frac{\Delta V}{2\alpha\tau c} \vec{A}(\vec{x}_i) \cdot \vec{j}(\vec{x}_i) \right], \quad (2.2. - 27)$$

o bien, tomando el límite continuo,

$$\Delta j_c = -\frac{2}{V} \left[\int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\Delta V}{2\alpha\tau c} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right]. \quad (2.2. - 28)$$

Entonces (2.2.-25) se puede expresar, como también S , por:

$$\overline{\Delta j^2} = \overline{\Delta \bar{j}^2} \left[1 - \frac{1}{V \overline{\Delta \bar{j}^2}} \left[\int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\Delta V}{\alpha\tau c} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right] \right], \quad (2.2. - 29)$$

$$S = S_c + S_f, \quad (2.2. - 30)$$

$$S_f = N \ln \left[\Delta V \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta \bar{j}^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{\Phi_{int}}{\tau} + \frac{3N}{2}, \quad (2.2. - 31)$$

y S_c , después de tomar el límite $V \rightarrow \infty$,

$$S_c = -\frac{3}{2\Delta V \overline{\Delta \bar{j}^2}} \left[\int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\overline{\Delta \bar{j}^2} \Delta V}{3\alpha\tau c} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right]. \quad (2.2. - 32)$$

Además, tomando estos límites de $N \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$ en (2.2.-11),(2.2.-12),(2.2.-23),(2.2.-28) y (2.2.-29), y definiendo una cantidad llamada μ , considerando que $\Phi_{int} = 0$ y la "definición" de Φ , se halla:

$$\bar{j}_i^2 - \bar{j}_i^2 = \frac{3}{2\alpha} = \overline{\Delta j^2} = \overline{\Delta \bar{j}^2} \quad (2.2. - 33)$$

$$\tau = -\frac{1}{6c^2} \frac{\overline{\Delta \bar{j}^2} \Delta V \int A^2(\vec{x}) dV}{\Phi + \Phi_{int}} \quad (2.2. - 34)$$

$$\Delta j_c = \frac{2}{c} \left[-\int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\mu^2 c}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right] \quad (2.2. - 35)$$

$$F = -N\tau \ln \left[\Delta V \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta \bar{j}^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (2.2. - 36)$$

$$S_c = \frac{3N}{2V \overline{\Delta \bar{j}^2}} \left[-\int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\mu^2 c}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right] \quad (2.2. - 37)$$

$$\tau = -\frac{4\pi}{3} \frac{\Delta V \overline{\Delta \bar{j}^2}}{\mu^2 c^2} \quad (2.2. - 38)$$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{c}{4\pi} \frac{\int A^2(\vec{x}) dV}{\int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV}. \quad (2.2. - 39)$$

Las ecuaciones (2.2.-35) y (2.2.-37) implican que

$$S_c = \frac{3N}{4\Delta\bar{j}^2} \Delta j_c. \quad (2.2. - 40)$$

Reescribiendo a (2.2.-37) con (2.2.-39) se tiene, tomando en consideración la desigualdad de Schwartz,

$$S_c = -\frac{3N}{2V\Delta\bar{j}^2 \int A^2(\vec{x}) dV} \left[\int j^2(\vec{x}) dV \int A^2(\vec{x}) dV - \left(\int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right)^2 \right] \leq 0. \quad (2.2. - 41)$$

De (2.2.-40) y(2.2.-41), se sigue que dentro de la clase de configuraciones estacionarias con $\Phi_{int} = 0$, la entropía es máxima cuando la correlación, ec.(2.2.-40), entre las partes colectivas y azarosas de la densidad de corriente se anula. Esto ocurre si y sólo si,

$$\vec{A}_m = \frac{4\pi}{\mu^2 c} \vec{j}_m = \frac{1}{\mu} \vec{B}_m = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_m. \quad (2.2. - 42)$$

Aquí se ha agregado el subíndice m para indicar que se trata de cantidades relacionadas al equilibrio del plasma. Además se aclara que la segunda igualdad en (2.2.-42) viene de considerar el rotacional de la primera igualdad, hecho esto, y considerando la ley de Ampere, se llega a una ecuación de Helmholtz ($\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B} = 0$) para \vec{B} , que se cumple en caso de que \vec{B} sea a su vez un campo libre de fuerzas ($\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{B}$).

CAPITULO III. APLICACION DE LOS PRINCIPIOS VARIACIONALES SOBRE LA ENTROPIA Y LA PRODUCCION DE ENTROPIA, EN PLASMAS.

Estoy muy ocupado con la investigación de las causas físicas. Mi objetivo es demostrar que la máquina celeste ha de ser comparada no con un organismo divino, sino más bien con una maquinaria de reloj.

Johann Kepler

En este capítulo se aplicarán las expresiones de la entropía del capítulo anterior, a dos casos de interés en plasmas de fusión, que ya fueron descritos en la Introducción: el pinch de campo invertido y el tokamak. Para este último se utilizará una variante del principio variacional que se relaciona con la producción de entropía, entendida ésta como la derivada temporal de la entropía. Sin embargo, los estudios basados en el principio de minimización de la producción de entropía estándar (no la entropía magnética) serán descritos en los capítulos V y VI.

3.1. La interacción entre el sistema colectivo y el medio circundante para un sistema "cerrado": el pinch de campo invertido.

Antes de considerar el ejemplo del pinch de campo invertido, se mostrará aquí que el fondo fluctuante de partículas individuales intercambia energía con el subsistema colectivo (el equivalente al "baño térmico" de Gibbs). Para esto, considérense variaciones isotérmicas alrededor de un equilibrio cuasihomogéneo de Vlasov, (que se identifica con el subíndice m) descrito según la ecuación (2.2.-42) por $\vec{A}_m = \frac{4\pi}{\mu_m^2 c} \vec{j}_m$. Además, nótese que la reacción del fondo de partículas individuales a la presencia de la densidad de corriente \vec{j}_m colectiva está descrita por $\vec{j}_m^{\bar{}}$, dada por (2.2.-17), y que esta cantidad se anula en el equilibrio de Vlasov,

$$\vec{j}_m^{\bar{}} = -\vec{j}_m - \frac{1}{2\alpha\tau c} \vec{A}_m \Delta V = 0, \quad (3.1. - 1)$$

ya que $\frac{1}{2\alpha\tau c} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_m^2 c}{\Delta V}$ en el límite termodinámico, tomando en cuenta (2.2.-33) y (2.2.-38).

En contraste, al considerar variaciones de $\delta\Phi_{int} \neq 0$ ($\Phi_{int} = 0$), se toma fija a τ y se introducen variaciones de \vec{j} y \vec{A} de acuerdo a:

$$\vec{j} = \vec{j}_m + \delta\vec{j}, \quad (3.1. - 2a)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_m + \delta\vec{A}, \quad (3.1. - 2b)$$

donde $\delta\vec{j}$ y $\delta\vec{A}$ se relacionan de acuerdo a la ecuación de D'Alembert

$$\delta\vec{j} = \frac{c\mu^2}{4\pi} \delta\vec{A}. \quad (3.1. - 3)$$

Entonces, de (2.2.-17),

$$\vec{j}_m^{\bar{}} = -\vec{j}_m - \delta\vec{j} + \frac{\mu_m^2 c}{4\pi} (\vec{A}_m + \delta\vec{A}) = -\delta\vec{j} \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2}\right). \quad (3.1. - 4)$$

Notando ahora de la ec.(2.2.-4) que en el límite continuo,

$$\Phi_{int} = \frac{1}{2c} \int \vec{j}^{\bar{}} \cdot \vec{A} dV, \quad (3.1. - 5)$$

y sustituyendo (3.1.-4) en (3.1.-5), se encuentra, junto con la variación de (2.2.-31), que la variación de S_f es:

$$\delta S_f = \frac{\delta\Phi_{int}}{\tau} = \frac{1}{2c\tau} \int \delta\vec{j}_m^{\bar{}} \cdot \vec{A}_m dV = -\frac{1}{2c\tau} \int \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2}\right) \delta\vec{j} \cdot \vec{A}_m dV. \quad (3.1. - 6)$$

* Por cerrado se entenderá que no se le está suministrando potencia desde el exterior; en realidad tanto el pinch de campo invertido como el tokamak son sistemas abiertos, pero el primero puede ser aproximado por un sistema aislado. Para el tokamak ver la discusión al inicio de la secc. 3.2. siguiente, y recuérdese la descripción de ambos sistemas en la introducción de la tesis.

Ahora, tomando μ_m por μ en equilibrio para (2.2.-42), y las ecs. (2.2.-37) y (3.1.-3), se encuentra:

$$\begin{aligned}\delta S_c &= \frac{3}{2\Delta V \Delta \bar{j}^2} \left(-2 \int \vec{j}_m \cdot \delta \vec{j} dV + \frac{\mu_m^2 c}{4\pi} \int \vec{j}_m \cdot \delta \vec{A} dV + \frac{\mu_m^2 c}{4\pi} \int \vec{A}_m \cdot \delta \vec{j} dV \right), \\ &= \frac{1}{2c\tau} \int \left(1 - \frac{\mu_m^2}{\mu^2} \right) \delta \vec{j} \cdot \vec{A}_m dV.\end{aligned}\quad (3.1.-7)$$

De (3.1.-6) y (3.1.-7) se concluye que

$$\delta S = \delta S_c + \delta S_f = 0. \quad (3.1.-8)$$

Es decir que la entropía total del sistema es conservada, y dado que el sistema está aislado, entonces el proceso de interacción, entre el subsistema colectivo y el fondo es reversible. Esto permite definir, una transferencia de calor, δQ entre los subsistemas, tal que,

$$\delta S_c = \frac{\delta Q}{\tau}; \quad \delta S_f = -\frac{\delta Q}{\tau}, \quad (3.1.-9)$$

que al comparar con (3.1.-6) se tiene

$$\delta Q = -\delta \Phi_{int}. \quad (3.1.-10)$$

Si se considera a (2.2.-24),

$$\delta F = \delta \Phi + \delta \Phi_{int} = \delta \Phi - \delta Q. \quad (3.1.-11)$$

Recordando a la primera ley de la termodinámica, con δL igual al trabajo ejecutado en el proceso de interacción, entonces $\delta Q = \delta \Phi + \delta L$; y de aquí se recupera el significado usual de la energía libre en un proceso isotérmico reversible (nótese que τ , ya se identificó con la temperatura), a saber $\delta F = -\delta L$.

Ahora ya se aplicará el principio variacional al caso de un sistema cerrado, con condiciones de frontera específicas. Considérese la expresión para S_c colectiva de la ec.(2.2.-37), y supóngase que el plasma está encerrado por una coraza perfectamente conductora, que éste transporta una densidad de corriente \vec{j}_p y la coraza una corriente \vec{j}_s que apantalla al campo magnético \vec{B} creado por \vec{j}_p , así que el campo magnético total se anula afuera de la coraza, y se debe cumplir entonces,

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_p = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A}_p; \quad \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s = -\delta(\rho - \rho_s) \hat{e}_n \times \vec{B}, \quad (3.1.-12)$$

donde \hat{e}_n es un vector unitario normal a la coraza y dirigido hacia afuera, ρ_s es el radio menor de ésta, y se tiene que $\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_p$. Bajo estas condiciones y definiendo una nueva S a partir de (2.2.-37)

$$S \equiv \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \frac{2\Delta V \Delta \bar{j}^2}{3} S_c = \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \left[- \int j^2(\vec{x}) dV + \frac{\mu^2 c}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \right], \quad (3.1.-13)$$

se separan las contribuciones de S que vienen de la parte del plasma (subíndice p) y las que vienen de la coraza (subíndice s):

$$S_p \equiv - \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \int (j_p^2 + 2\vec{j}_p \cdot \vec{j}_s) dV + \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \mu^2 \int (\vec{j}_p + \vec{j}_s) \cdot \vec{A} dV, \quad (3.1.-14a)$$

$$S_s \equiv - \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \int j_s^2 dV. \quad (3.1.-14b)$$

Considerando a las ecuaciones (3.1.-12), llevan a que la primera variación de S_p es igual a

$$\delta S_p = 2 \int \delta \vec{B} \cdot (\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B}) dV + \frac{8\pi}{c} \int d\vec{S} \times \delta \vec{j} \cdot \vec{B}. \quad (3.1.-15)$$

Si se impone $\delta\vec{j} = 0$ sobre la coraza, entonces S_p es estacionaria si la configuración magnética satisface la ecuación,

$$\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B} = \nabla \phi. \quad (3.1. - 16)$$

Tomando la condición $\nabla \phi \cdot \delta \vec{B} = 0$ y como $\mu^2 > 0$, la ecuación (3.1.-16), se satisface cuando la configuración de campo es libre de fuerzas ($\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{B}$), que coincide con el resultado previo (2.2.-42). Considerando la segunda variación,

$$\delta^2 S_p = 2 \int \delta \vec{B} \cdot (\nabla^2 \delta \vec{B} + \mu^2 \delta \vec{B}) dV, \quad (3.1. - 17)$$

se puede mostrar⁵, que S_p es máximo en el volumen del plasma Ω , que incluye la coraza, dependiendo de que μ^{-3} sea lo suficientemente pequeño en comparación con Ω , para que la solución de $\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B} = 0$, no se anule en Ω . Así se concluye que el estado relajado del pinch de campo invertido es un campo libre de fuerzas.

Retomando el cálculo de la transferencia de energía $\delta Q = -\delta \Phi_{int}$ entre el sistema colectivo y el fondo, la variación de Φ_{int} viene de la ecuación (2.2.-18) en el límite continuo.

$$\delta \Phi_{int} = -\delta \left[\Phi + \frac{\Delta \overline{\Delta j^2}}{6\pi c^2} \int_{\Omega} A^2 d\Omega \right] = -\delta \left[\frac{1}{2c} \int_{\Omega} (\vec{j}_p + \vec{j}_s) \cdot \vec{A}_p dV - \frac{\mu^2}{8\pi} \int_{\Omega} A_p^2 dV \right], \quad (3.1. - 18)$$

donde debe de notarse que el campo apantallado creado por \vec{j}_s existe sólo fuera de Ω , y lo mismo ocurre para \vec{A}_s . También se modificó de acuerdo a (3.1.-16) la notación de (2.2.-42), según

$$\vec{A}_{pm} = \frac{4\pi}{\mu^2 c} \vec{j}_{pm} = \frac{1}{\mu} \vec{B}_{pm} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_{pm} = \frac{1}{\mu^2} \nabla \times \vec{B}_{pm}. \quad (3.1. - 19)$$

De este conjunto de ecuaciones se concluye, por tanto, que

$$\delta Q = -\delta \Phi_{int} = \frac{1}{4\pi} \int \delta \vec{A} \times \vec{B}_m \cdot d\vec{S}. \quad (3.1. - 20)$$

Como $\delta \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \delta t = -c \vec{E} \delta t$, entonces (3.1.-20) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -\frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \times \vec{B}_m \cdot d\vec{S} = -\frac{\delta \Phi_{int}}{\delta t}, \quad (3.1. - 21)$$

y de esto se puede ver que $\delta \Phi_{int} = -\delta Q$ simula una energía de radiación emitida por el sistema colectivo. En un sistema cerrado las variaciones $\delta \vec{A} = -c \vec{E} \delta t$ deben ser elegidas de tal manera que $\delta Q = 0$.

Por último, de las ecs.(2.2.-6) y (3.1.-18),

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi}{\delta t} &= \frac{1}{2c} \frac{\delta}{\delta t} \int_{\Omega} (\vec{j}_p + \vec{j}_s) \cdot \vec{A}_p dV = -\frac{\delta \Phi_{int}}{\delta t} + \frac{\mu^2}{4\pi} \int \vec{A}_{pm} \cdot \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} dV, \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \times \vec{B}_m \cdot d\vec{S} - \int \vec{j}_{pm} \cdot \vec{E} dV = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{B}_m \cdot \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} dV. \end{aligned} \quad (3.1. - 22)$$

y recordando a (3.1.-11) y (3.1.-22),

$$\frac{\delta F}{\delta t} = -\frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\delta(\Phi + \Phi_{int})}{\delta t} = -\int \vec{E} \cdot \vec{j}_{pm} dV, \quad (3.1. - 23)$$

por lo que se ve que la energía libre resulta ser igual al trabajo por unidad de tiempo.

⁵ Ver, Minardi E. Plasma Phys. and Controlled Fusion **29**, pp.945-948 (1987).

3.2. El sistema abierto: el tokamak

Tal como se expuso en la subsección anterior, el método seguido en base a la "definición" de una funcional de entropía, resulta ser un concepto útil sólo para sistemas cerrados; sin embargo, si se desea considerar la termodinámica de un tokamak, que es un sistema abierto, que está acoplado al primario de un transformador óhmico y también a la inyección de una potencia auxiliar, es necesario considerar el estado estacionario para la producción de entropía (un estado que resulta ser también isentrópico, como se verá adelante y en comparación con los resultados previos), que contrasta con el estado extremal de la entropía para los sistemas aislados, donde es válido este formalismo. Para considerar el estado estacionario, se toma la derivada temporal de la entropía S_p ⁶, ec.(3.1.-14a); y considerando las condiciones a la frontera y la ley de Ampere de las ecs.(3.1.-12), para la coraza perfectamente conductora ($\vec{A}_p \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{j}_p \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{S}_p &= 8\pi \int \nabla \times \vec{j}_p \cdot \nabla \times \vec{E} dV - 2ck \int \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{E} dV + 2 \int d\vec{S} \times \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + ck\vec{E} \right), \\ &= -2c \int [\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B}] \cdot \nabla \times \vec{E} dV = 8\pi \int [\nabla^2 \vec{j}_p + \mu^2 \vec{j}_p] \cdot \vec{E} dV. \end{aligned} \quad (3.2. - 1)$$

Con $k = \mu^2$. Ahora bien, si se considera que se tiene un plasma resistivo que cumple con las leyes de Ohm y de Faraday:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} &= \eta \vec{j}_p; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}, \end{aligned} \quad (3.2. - 2)$$

entonces (3.2.-1) se reescribe como,

$$\begin{aligned} \dot{S}_p &= 8\pi \left[-\int \vec{v} \cdot (\vec{j}_p \times \vec{B}) dV + \frac{c}{4\pi} \int d\vec{S} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right] \\ &\quad - 8\pi \int \vec{v} \cdot \vec{B} \times \nabla \times \nabla \times \vec{j}_p dV + 8\pi\eta \int [(\nabla \times \vec{j}_p)^2 - k j_p^2] dV \end{aligned} \quad (3.2. - 3)$$

También (3.2.-1) se puede escribir utilizando la última ecuación de (3.2.-2) como

$$\dot{S}_p = 2 \int (\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B}) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV. \quad (3.2. - 4)$$

Tomando la primera variación de \dot{S}_p en (3.2.-4), lleva a,

$$\delta \dot{S}_p = 2 \int (\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B}) \cdot \frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} dV - 2c \int (\nabla^2 \delta \vec{B} + \mu^2 \delta \vec{B}) \cdot \nabla \times \vec{E} dV = 0. \quad (3.2. - 5)$$

De esta última ecuación se ve que si $\nabla \times \vec{E} = 0$ y $\nabla^2 \vec{B} + \mu^2 \vec{B} = 0$, que se cumplen en particular para campos libres de fuerzas, se tiene un mínimo de \dot{S}_p . El hecho de que sea mínimo se obtiene, al considerar la segunda variación, y utilizando (3.2.-2), definiendo $\vec{Q} \equiv \vec{v} \times \vec{B}$,

$$\begin{aligned} \delta^2 \dot{S}_p &= 4 \int (\nabla^2 \delta \vec{B} + \mu^2 \delta \vec{B}) \cdot \frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} dV = \\ &= 16\pi \int [(\eta \nabla \times \delta \vec{j} - \nabla \times \delta \vec{Q}) \cdot \nabla \times \delta \vec{j} - \eta k \delta j^2 + k \delta \vec{Q} \cdot \delta \vec{j}] dV. \end{aligned} \quad (3.2. - 6)$$

⁶ Siguiendo las ideas de la termodinámica de procesos irreversibles, es posible relacionar a esta derivada temporal con la producción de entropía, aunque no son exactamente lo mismo. Ver, por ejemplo, Prigogine I., *Thermodynamic theory of structure stability on fluctuations*, Cap. I. Ed. John Wiley & Sons, E.U.A. (1971).

Para un extremo de \dot{S}_p , es necesario un signo definido de la forma cuadrática en las variables de $\delta\vec{j}$ y $\delta\vec{Q}$ de (3.2.-6). Como $\nabla \times \delta\vec{Q}$, es mucho más pequeña que las cantidades con $\eta \nabla \times \delta\vec{j}$ para procesos disipativos, entonces el signo de $\delta^2 \dot{S}_p$ depende sólo de:

$$\text{sgn} \delta^2 \dot{S}_p = \text{sgn} \sum_i \int \left[\sum_j \left(\frac{\partial \delta j_j^2}{\partial x_j} \right) - k \delta j_j^2 \right] dV. \quad (3.2. - 7)$$

La ecuación (3.2.-7) expone el mismo tipo de problema que aquel que era necesario para hallar el extremo de S_p , y que sólo se comentó antes, así que \dot{S}_p es mínimo cuando la variacional (o ecuación de Jacobi) $\nabla^2 \vec{u} + k\vec{u} = 0$ (con \vec{u} un vector cualquiera) admite una solución que no posee un cero en Ω . La misma condición se aplica, por tanto, para el mínimo de \dot{S}_p y para el máximo de S_p ; ésto es que k sea lo suficientemente pequeña. Nótese además, que al sustituir $\nabla^2 \vec{B} + k\vec{B} = 0$, en (3.2.-1), se halla también un estado isentrópico, como aquel en el que se tiene un estado relajado del plasma, en ausencia de calentamiento externo.

Retomando, por otro lado, la expresión (3.1.-13) para la entropía colectiva y olvidándose de los subíndices, se tiene (c.f. (3.2.-1)),

$$\dot{S} = \frac{1}{\mu^2 \tau} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot (\nabla^2 \vec{j} + k\vec{j}) dV. \quad (3.2. - 8)$$

Como se comentó antes, la familia de estados isentrópicos, etiquetados por μ^2 , que se obtienen para la zona de confinamiento* ($s\lambda \leq r \leq s$; $\lambda \in (0, 1)$) tienen una distribución de densidad de corriente que cumple con

$$\nabla^2 \vec{j} + k\vec{j} = 0, \quad (3.2. - 9)$$

que si se compara con la ecuación de d'Alambert $-\nabla^2 \vec{A}_p = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_p$, se encuentra que (c.f. (2.2.-42)),

$$\vec{j}_p = \frac{c\mu^2}{4\pi} \vec{A}_p. \quad (3.2. - 10)$$

Se puede proceder a calcular explícitamente la derivada temporal de Φ_{int} , bajo las mismas condiciones de frontera dadas anteriormente, pero evaluando a $\nabla \times \vec{E}$ y $\nabla \times \vec{A}$ en la superficie, considerando un elemento de volumen infinitesimal $\Delta\tau$, con anchura nula y superficies base situadas en lados opuestos de la superficie de discontinuidad y paralelas a ellas; y también suponiendo que el plasma está rodeado por una coraza conductora con cortes estrechos a través de los cuales un campo eléctrico axial \vec{E} con $\nabla \times \vec{E} = 0$ es creado en el plasma por un campo magnético \vec{B}_z que varía en el tiempo afuera de la coraza, pero que se anula en el interior. Se encuentra entonces,

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\Delta\tau} \oint d\vec{S} \times \vec{E} = \frac{1}{\Delta\tau} d\vec{S}_{in} \times \vec{E} \quad (3.2. - 11)$$

$$\nabla \times \vec{A}_p = \frac{1}{\Delta\tau} \oint d\vec{S} \times \vec{A}_p = \frac{1}{\Delta\tau} d\vec{S}_{in} \times \vec{A}_p \quad (3.2. - 12)$$

con $d\vec{S}_{in} = -d\vec{S}$.

Para calcular $\frac{d\Phi_{int}}{dt}$ se consideran a las cantidades dependientes del tiempo (con subíndice s , que son cantidades de superficie) como pequeñas perturbaciones, y tomando sólo cantidades de primer orden, obtiéndose de (3.1.-18),

$$\frac{d\Phi_{int}}{dt} = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \cdot \vec{A}_p + \frac{\partial \vec{A}_s}{\partial t} \cdot \vec{j}_p \right) dV + \frac{\mu^2}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{A}_s}{\partial t} \cdot \vec{A}_p \right) dV. \quad (3.2. - 13)$$

* La llamada región de confinamiento es la región donde no ocurren oscilaciones de diente de sierra — una inestabilidad MHD debida a procesos de reconexión magnética que se da en el centro del tokamak —, pues en esa zona el plasma no está estacionario, así que S y λ delimitan esta región

Retomando (3.1.-12) y de $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_p}{\partial t} = -\vec{E}$,

$$\frac{d\Phi_{int}}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d\vec{S} \times \frac{\vec{B}_e}{\partial t} \cdot \vec{A}_p + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{j}_p dV - \frac{c\mu^2}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{A}_p dV. \quad (3.2. - 14)$$

Considerando (3.2.-11) y (3.2.-12), el primer término de (3.2.-14) se reescribe como (al considerar $\vec{A}_p \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$),

$$-\int_{\Sigma} d\vec{S} \times \frac{\vec{B}_e}{\partial t} \cdot \vec{A}_p = c \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}_p) \times \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{j}_p dV \quad (3.2. - 15)$$

De aquí, y al considerar (3.2.-10) y (3.1.-10)

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{j}_p dV, \quad (3.2. - 16)$$

$$-\frac{d\Phi_{int}}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\int_{\Omega} \vec{E} \cdot \left(\vec{j}_p - \frac{c\mu^2}{4\pi} \vec{A}_p \right) dV = 0. \quad (3.2. - 17)$$

Recordando (3.1.-11), la ecuación de balance de energía es

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{j}_p dV, \quad (3.2. - 18)$$

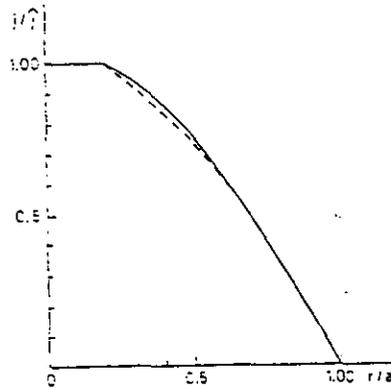
donde, $\frac{dL}{dt}$ es la tasa de trabajo ejecutado por el generador de corriente del plasma. De (3.2.-16) se concluye que para estados con producción de entropía nula se permanece en equilibrio durante el calentamiento Ohmico. Si p_A es la densidad de potencia auxiliar, y si se modifica la expresión de la densidad de corriente por $j = j_p - \frac{p_A}{E}$, la derivada de la entropía (3.2.-8) se puede generalizar, para incorporar este factor externo, llevando a la expresión

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\tau\mu^2} \int_{\Omega} E(\nabla^2 j + \mu^2 j) dV + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} p_A dV. \quad (3.2. - 19)$$

Con E , el campo eléctrico axial y p_A supuesta uniforme. Entonces, la familia de estados isentrópicos satisface

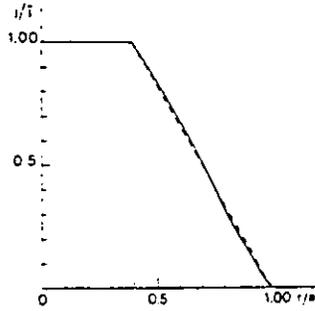
$$\nabla^2 j + \mu^2 j = -\frac{\mu^2 p_A}{E}. \quad (3.2. - 20)$$

Cuyas soluciones en términos de funciones de Bessel de orden cero, suponiendo coordenadas cilíndricas, se muestran en las siguientes figuras, después de considerar las condiciones de frontera apropiadas, para excluir la zona de diente de sierra en el del toroide*.

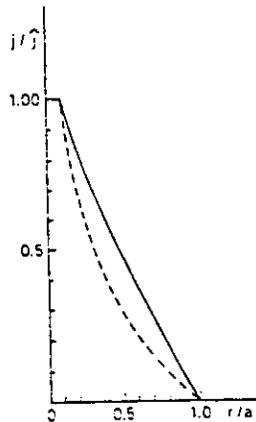


Variation of the current profile with auxiliary power in the case $\lambda = 0.20$, $j_s = 0$, $\dot{q}_e = 0.50$; Solid line: $P_A/P_0 = 0.38$; dashed line: $P_A/P_0 = 6.44$.

* Ver la siguiente referencia, de la subnota 7



Variation of the current profile with auxiliary power in the case $\lambda = 0.40$, $j_a = 0$, $\hat{q}, q_a = 0.56$. Solid line: $P_A/P_0 = 0.19$; dashed line: $P_A/P_0 = 12.56$.



Variation of the current profile with \hat{q}, q_a for $\lambda = 0.10$. Solid line: $\hat{q}, q_a = 0.33$; dashed line: $\hat{q}, q_a = 0.21$. The form of the profiles agrees with the observations in TFTR.

Donde $P_A = 2\pi^2 a^2 R p_A$ es la potencia auxiliar total, $P_\Omega = 2\pi R E I$ es la potencia ohmica (con I la corriente total), $j(a) = j_a$ y $\hat{j} = j(\lambda a)$, con a igual al radio menor del tokamak. Siendo tambien $\hat{q} = \frac{cB}{2\pi R \hat{j}}$ el factor de seguridad en el eje y $q(a) = q_a$.

El trabajo por unidad de tiempo, que se transforma en calor interior del plasma, ejecutado por el sistema externo es ahora

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\Omega} p_A dV + \int_{\Omega} E j dV \quad (3.2. - 21)$$

§. Leyes de escalamiento.⁷

La ec.(3.2.-19) , permite definir un estado relajado óhmicamente, definido por $j = \sigma E \sim T^{\frac{3}{2}}, Z_{eff}$ uniforme, el número atómico efectivo, y $E = const.$. Para ello es necesario hacer compatible, la ec.(3.2.-20) con la siguiente ecuación para la energía, en el caso de un modelo de un solo fluido en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r n \chi \frac{dT}{dr} \right) + E j + p_A = 0, \quad (3.2. - 22)$$

con χ igual al coeficiente de difusividad térmica. Además si se considera que el plasma es calentado sólo por el efecto óhmico (o Joule), entonces $p_A = 0$; y dado que la resistividad depende inversamente de la temperatura del plasma a la potencia 3/2, $j = T^{\frac{3}{2}} \left(\frac{E}{A} \right)$, donde el campo eléctrico E y A son constantes. Ello implica que (3.2.-20) se convierte en

$$\nabla^2 T^{\frac{3}{2}} + \mu^2 T^{\frac{3}{2}} = 0; (\lambda s \leq r \leq s). \quad (3.2. - 23)$$

Al comparar (3.2.-21) y (3.2.-22), se encuentra que las dos son compatibles si se mantiene que

$$n(r)\chi(r) = \hat{n}\hat{\chi} \left(\frac{T(r)}{\hat{T}} \right)^{\frac{1}{2}}; \mu^2 = \frac{3}{2} \frac{E^2 \hat{T}^{\frac{1}{2}}}{A \hat{n} \hat{\chi}}, \quad (3.2. - 24)$$

con $\hat{n}\hat{\chi} = F\hat{T}^m$, para m arbitraria; y $\hat{n}, \hat{\chi}$ y \hat{T} denotando los respectivos valores de las variables en $r = \lambda s$, y siendo F una constante que puede sólo depender de parametros externos del plasma, pero que se toma independiente de p_A y j .

Es interesante hacer notar que el escalamiento de χ con T a la potencia $\frac{1}{2}$ que se obtiene, es característico de las teorías de transporte turbulento con fluctuaciones magnéticas, en contraposición a las electrostáticas,. Por lo tanto, este análisis apoyaría el origen magnético de la turbulencia en los tokamaks.

⁷ Minardi E., Plasma Phys. and Controlled Fusion **30**, pp.1701-1721 (1988).

CAPITULO IV. EL ESTADO RELAJADO DEL PLASMA SEGUN EL PRINCIPIO VARIACIONAL SOBRE LA ENERGIA MAGNETICA.

Los antiguos obtenían sus principios partiendo de premisas básicas puras. Mis teorías encuentran confirmación sólo por sus resultados. Pero de esta forma, es posible llegar a conseguir un grado de probabilidad tan válido como una prueba estrictamente lógica. Esto se produce cuando los resultados están en armonía con la realidad, y especialmente cuando numerosos fenómenos pueden explicarse mediante una sola teoría, y cuando se pueden predecir y corroborar después fenómenos antes desconocidos.
Christian Huygens

En este capítulo se presenta un principio variacional de mínima energía que se basa en el principio de que cualquier sistema físico tiende a adoptar el estado de equilibrio con la menor energía potencial permitida. Para describir los estados de equilibrio se utilizarán las ecuaciones de fluidos. Es bien sabido, que a partir de las ecuaciones cinéticas de la sección 2.1.1, tomando los momentos con respecto a las velocidades, es posible deducir las ecuaciones de fluidos de las dos especies que componen al plasma, iones y electrones. A partir de ellas es posible obtener ecuaciones para un solo fluido, conocidas como ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD), que son válidas en un régimen especial de escalas de tiempo lentas y baja disipación¹. Las ecuaciones MHD, que son adecuadas para describir equilibrios macroscópicos, son,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p, \quad (4-1)$$

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (4-3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (4-4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (4-5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4-6)$$

Se verá primero un caso particular, relacionado con los resultados del capítulo anterior, aplicables al pinch de campo invertido. De la ec.(4-1) anterior, y poniendo la condición de que no exista un gradiente de presión, se concluye que la ecuación de equilibrio mecánico es:

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0, \quad (4-7)$$

que es la ecuación del campo libre de fuerzas (fuerza magnética nula) que, como ya se ha mencionado, describe bien al pinch de campo invertido. Al combinarla con la ec.(4-5) se obtiene la bien conocida ecuación (3.1.-19), es decir, $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{B}$ que se dedujo antes vía un principio variacional sobre la entropía (ver ecs. (3.1.-16) y (2.2.-42), donde se argumenta que debe de ser un extremal).

Como fue expuesto originalmente por Woltjer², este mismo resultado es posible hallarlo de un principio variacional pero como el extremal de la energía magnética,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV, \quad (4-8)$$

constreñida a la invariancia de la helicidad magnética \mathcal{K} , * definida como

$$\mathcal{K} = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV, \quad (4-9)$$

¹ Ver, por ejemplo, Schmidt G., *Physics of high temperature plasmas*, Ed. Academic Press, E.U.A. (1979).

² Woltjer L., *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **44**, 489 (1958).

* Ver el apéndice, al final del capítulo.

bajo condiciones de frontera apropiadas. El principio variacional es entonces,

$$\delta[W - \frac{\mu}{8\pi}\mathcal{K}] = \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot \delta\vec{B} dV - \frac{\mu}{8\pi} \int [\vec{A} \cdot \delta\vec{B} + \vec{B} \cdot \delta\vec{A}] dV \quad (4-10)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int [\nabla \times \vec{B} - \mu\vec{B}] \cdot \delta\vec{A} dV = 0, \quad (4-11)$$

La ec.(4-11) se obtiene la ec.(4-10) después de integrar por partes los términos con $\delta\vec{B} = \delta\nabla \times \vec{A}$ de la primera igualdad y considerando las condiciones de frontera adecuadas a una frontera conductora.

De la ecuación (4-11) se obtiene un campo libre de fuerzas ($\nabla \times \vec{B} = \mu\vec{B}$), que como ya se había comentado antes, describe al pinch de campo invertido. Para ver esto, se puede hacer una representación simplificada del sistema físico, aproximando el toro por un cilindro y usando coordenadas cilíndricas con simetrías angular y axial ($\frac{\partial}{\partial\phi} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$); entonces se encuentra que la solución a la ecuación libre de fuerzas da $B_r = 0$, y las componentes poloidal $B_\phi = B_\phi(r)$ y toroidal $B_z = B_z(r)$ del campo magnético se pueden expresar en términos de funciones de Bessel,

$$B_z = B_0 J_0(\mu r), \quad (4-12)$$

$$B_\phi = B_0 J_1(\mu r). \quad (4-13)$$

que describen razonablemente bien los campos del pinch de campo invertido, en particular la inversión del campo toroidal cerca de la orilla, que le da su nombre. En la siguiente figura se muestran estos campos

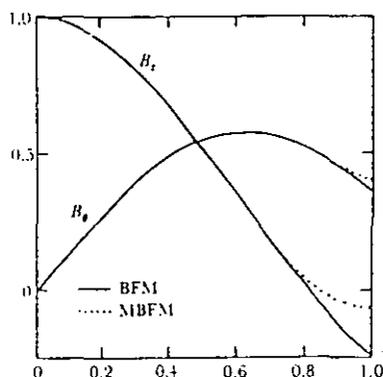


Fig. 16.11
Toroidal field $B_z(r)$ and poloidal field $B_\phi(r)$ of a reversed field pinch (RFP). The radial profiles of the Bessel function model (BFM) and the modified Bessel function model (MBFM) are shown.

Es posible demostrar también la condición de necesidad de la invariancia de la helicidad magnética, es decir, que si un equilibrio libre de fuerzas es un mínimo de la energía magnética, entonces, \mathcal{K} es invariante (a primer orden). Para ver esto, se escribe (4-8) en la forma

$$W = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV + \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4-14)$$

Se separa ahora a (4-14) y a las variables involucradas, en una parte de orden cero relacionada al equilibrio libre de fuerzas (indicado con el índice 0) con $\vec{j}_0 = \mu\vec{B}_0$, y una parte de primer orden, que está fija en la frontera, y que debe cumplir con,

$$\begin{aligned} 2cW_1 &= 2c\delta W = \int (\vec{j}_0 \cdot \vec{A}_1 + \vec{j}_1 \cdot \vec{A}_0) dV + \frac{c}{4\pi} \int \vec{A}_0 \times \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \\ &= \int \vec{j}_0 \cdot \vec{A}_1 dV + \frac{c}{4\pi} \int \nabla \times \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_0 dV = 2 \int \vec{j}_0 \cdot \vec{A}_1 dV \\ &= 2\mu \int \vec{B}_0 \cdot \vec{A}_1 dV = \mu \int (\vec{B}_0 \cdot \vec{A}_1 + \vec{B}_1 \cdot \vec{A}_0) dV = 0, \end{aligned} \quad (4-15)$$

ya que $\int \vec{B}_0 \cdot \vec{A}_1 dV = \int \vec{A}_0 \cdot \vec{B}_1 dV$, pues $\vec{A}_1 = 0$ sobre S . Así que de (4-15), se deduce que

$$W_1 = \frac{\mu}{2c} \delta \int \vec{B} \cdot \vec{A} dV = 0, \quad (4-16)$$

lo cual concluye la demostración, al considerar la \mathcal{K} a primer orden. De la expresión para W_2 , con cantidades a primer orden únicamente, se tiene que,

$$4cW_2 = \int B_1^2 dV > 0, \quad (4-17)$$

indicando que W_0 es un mínimo. Se pueden ver estos resultados a la luz de las ideas termodinámicas desarrolladas en la sección anterior, si uno restringe las variaciones a aquellas en las que el término de superficie de la ec. (4-14) permanece sin cambio (tomando la restricción de que $\vec{B} = \vec{A} = 0$ en S para una coraza conductora perfecta) y recordando la expresión para la energía colectiva Φ , ec.(2.2.-6). Se observa que si W es mínimo con respecto a la clase anterior de variaciones, entonces Φ también es mínimo. Esto quiere decir, de acuerdo a las secciones 1.4.2 y 2.2 anterior, que la entropía tiene un máximo.

En resumen: 1. Un equilibrio libre de fuerzas es asociado con un máximo de la entropía con respecto a cambios "disipativos isotérmicos", y 2. Un equilibrio libre de fuerzas es asociado, también, con un mínimo de la energía magnética interior al plasma si y sólo si \mathcal{K} es invariante, a primer orden. Para terminar, se aclara que por cambios disipativos isotérmicos, se entiende aquellos en que τ es constante, tal como se supuso al sacar la primera variación de S para su extremal, y dado que $\delta L = 0$, de la ec.(3.1.-11), se implica que $\delta Q = \delta\Phi = -\delta\Phi_{int}$, lo que indica que hay un proceso de intercambio de energía entre el fondo fluctuante y la parte colectiva del plasma, como se vio antes. Es digno de notar que la restricción de que $\overline{\Delta j^2}$ sea constante o que $\overline{\Delta j^2}$ lo sea en el límite $N \rightarrow \infty$, implica que la presión y la densidad sean también constantes³.

Para evitar confusiones, cabe aclarar que la deducción de la ecuación (3.2.-19) o sus equivalentes, están relacionadas sólo a la densidad de corriente toroidal; así que la configuración de campo libre de fuerzas, que se obtuvo en esta sección y la precedente, corresponde en el caso del tokamak, a la descripción de sólo una parte del sistema, que deja de lado, la presencia de un gradiente de presión en el plasma. Es en este sentido que el pinch de campo invertido, se observa más de acuerdo a la teoría de Taylor⁴ expuesta antes.

Ahora se considerará el caso del tokamak, en el que hay que tomar en cuenta la fuerza de presión del plasma. El más simple y más importante equilibrio toroidal, está caracterizado por un balance entre el gradiente de presión del plasma y la fuerza electromagnética $\vec{j} \times \vec{B}$, de acuerdo a la ec.(4-1), es decir,

$$\vec{j} \times \vec{B} = c\nabla p \quad (4-18)$$

Para describir al tokamak, que es un sistema simétrico con respecto al eje central del toro (axisimetría), se pueden escoger coordenadas cilíndricas simétricas (R, φ, z) , donde R parte de un punto fijo del eje z , y φ es

³ Ver, Minardi E., J. Plasma Phys. **25**, 413 secc.3.2 (1981).

⁴ Taylor J.B., Phys. Review Letters **33**, 1139 (1974).

la coordenada toroidal alrededor de este eje. Si las superficies magnéticas, que son superficies toroidales que contienen a las líneas de campo, se representan por una función Ψ , entonces, dada la suposición axisimétrica ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, para cualquier función), se puede demostrar⁵ que en general el campo magnético, que tiene sólo componentes toroidal y poloidal, se puede escribir como,

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \varphi + b \nabla \varphi \quad (4-19)$$

donde $\Psi = \Psi(R, z)$ y $b = b(R, z) = b(\Psi)$. Con este sistema de coordenadas, la ec.(4-18) se puede escribir como,

$$\Delta^* \Psi + b(\Psi)b'(\Psi) = -4\pi R^2 p'(\Psi) \quad (4-20)$$

Esta se conoce como la ecuación de Grad-Shafranov.⁵ Aquí, la prima indica una derivada respecto a Ψ , y

$$\Delta^* \equiv R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla \right) = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4-21)$$

El vector potencial magnético, se puede escribir como

$$\vec{A} = \Psi \nabla \varphi + \nabla \varphi \times \vec{c} \quad (4-22)$$

de donde, $b = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \vec{c} \right)$.

A continuación se mostrará que la ec.(4-20) puede obtenerse a partir de la minimización de la energía. Para un plasma descrito por la magnetohidrodinámica ideal, es decir, con resistividad nula (como $\eta \propto T^{-\frac{3}{2}}$, esto implica temperaturas altas), y además no viscoso ($\vec{\Pi}_i = \vec{\Pi}_e = 0$), y sin conducción térmica ($\vec{q} = 0$). El tercer momento de la ecuación cinética, la ecuación de densidad de energía, en la aproximación MHD⁶,

$$\frac{N}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = -p \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \vec{u} + \vec{q} \right) + \eta j^2 - \vec{\Pi} : \nabla \vec{u} \quad (4-23)$$

se simplifica a:

$$\frac{N}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = -p \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \vec{u} \right), \quad (4-24)$$

donde N es el número de grados de libertad, que para un gas ideal monoatómico, está relacionado a γ (la razón de capacidades caloríficas) en un proceso adiabático por $\frac{N}{2} = \frac{1}{\gamma-1}$. En términos de γ la ec.(4-24) lleva a

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \nabla \cdot \vec{u} \quad (4-25)$$

Comparando a (4-25) y la ecuación de continuidad (4-3) con $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$, se llega a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \equiv \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla s = 0 \quad (4-26)$$

Nótese que se definió una función $s = \frac{p}{\rho^\gamma}$, que si se recuerda la expresión para la entropía de un gas ideal (2.1.1.-26), y se supone un sistema adiabático (recuerdese la discusión que llevo a (3.1.-9)), excepto por la función logarítmica, coinciden. A esta nueva s , se le da el nombre de "entropía específica". Se define, una "energía específica", $e = e(\rho, s)$ por

$$e \equiv \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{s \rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \quad (4-27)$$

⁵ Para más detalles ver, Haseltine L. y Meiss J.D., Plasma confinement, Ed. Addison-Wesley, E.U.N.A. (1992).

⁶ Ver, Balescu R., Transport processes in plasmas, Vol. 1, Ed. North-Holland, Holanda (1988)

De la primera ley de la termodinámica

$$de = \frac{\partial e}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial e}{\partial s} ds, \quad (4-28)$$

lo cual implica,

$$\frac{\partial e}{\partial s} = T = \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \rho} = s\rho^{\gamma-2} = p\rho^{-2} \quad (4-30)$$

$$de = \rho^{-2} p d\rho + T ds \quad (4-31)$$

De aquí, la "entalpía específica" es

$$h = e + \frac{p}{\rho} = \left(\frac{p}{\gamma-1} + p \right) \rho^{-1} = Ts + p\rho^{-1} \quad (4-32)$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial p} dp + \frac{\partial h}{\partial s} ds = \rho^{-1} dp + T ds \quad (4-33)$$

Tomando la ley de Ohm generalizada (4-2), la ley de Faraday se puede escribir en términos de la función de flujo Ψ como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (4-34).$$

Además,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{b\Psi}{R^2} - \frac{1}{R^2} \nabla \Psi \cdot \vec{c} \quad (4-35).$$

Se tomarán las siguientes condiciones en la frontera, con \hat{n} el vector unitario normal a ésta y hacia afuera,

$$\vec{c} \cdot \hat{n} = \vec{u} \cdot \hat{n}|_{\partial D} = \vec{B} \cdot \hat{n}|_{\partial D} = 0. \quad (4-36)$$

Entonces, considerando a las ecuaciones (4-1), (4-2), (4-3), (4-31), la ley de Faraday-Ohm (4-34), (4-35) y (4-36), se puede demostrar que las derivadas parciales temporales de las siguientes cantidades, H , la energía sin considerar el flujo, $\vec{u} = 0$, C y E son nulas.

$$H_t = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} B^2 + \rho e(\rho, s) \right) dV = 0 \quad (4-37),$$

$$C_t = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int L'(\Psi) \vec{A} \cdot \vec{B} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int [\Psi L'(\Psi) + L(\Psi)] b R^{-2} dV = 0, \quad (4-38)$$

$$E_t = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho G(\Psi, s) dV = 0, \quad (4-39)$$

donde $L(\Psi)$ es una función arbitraria de Ψ y $G = G(\Psi, s)$ una función arbitraria de Ψ y s , que se identificará más adelante con la "entalpía específica". Extremizando

$$\delta(H + C + E) = 0, \quad (4-40)$$

sujeta a las variaciones independientes de $\delta\Psi$, δb , $\delta\rho$ y δs , se concluye para cada variación que:

$$\delta\Psi : -R^{-2} \Delta^* \Psi + F'(\Psi) R^{-2} b + \rho G_\Psi(\Psi, s) = 0 \quad (4-41)$$

$$\delta b : b R^{-2} + F(\Psi) R^{-2} = 0 \quad (4-42)$$

$$\delta\rho : e + \rho e_\rho + G(\Psi, s) = 0 \quad (4-43)$$

$$\delta s : \rho e_s + \rho G_s(\Psi, s) = 0 \quad (4-44)$$

En donde se definió $F(\Psi) \equiv \Psi L'(\Psi) + L(\Psi)$. De (4-33), se ve que (4-43) y (4-44) son equivalentes; y de (4-32), $G(\Psi, s) = -h(p, s)$. De (4-41) y (4-42), se concluye que se debe cumplir, precisamente la ec.(4-20), de Grad-Shafranov⁷.

Al considerar la ecuación de Grad-Shafranov se observa que contiene dos funciones libres p y b . Con la finalidad de obtener condiciones que determinen de alguna manera estas funciones se pueden buscar otros principios variacionales. Siguiendo a Kadomtsev⁸, es posible mostrar, un principio variacional sobre la energía "potencial"⁹, que proporciona la consistencia de los perfiles para la corriente y la presión¹⁰. Aquí r se referirá al radio menor del tokamak, mientras que R es el radio mayor. Como la componente del campo magnético toroidal (B_T) se puede considerar prácticamente constante¹¹, respecto a r , se puede tomar que la energía sólo depende de la componente poloidal del campo (B_θ), y que es igual a

$$B_\theta = \frac{d\Psi}{dr} = \frac{r B_T \mu}{R}, \quad (4-45)$$

con $\mu = \frac{1}{q}$, y q igual al factor de seguridad. definido por la ec.(4-45), así que la energía es igual a

$$W = 2\pi \left[\int \frac{B_\theta^2}{8\pi} r dr + \frac{1}{\gamma-1} \int pr dr \right]. \quad (4-46)$$

Ahora bien, se puede considerar que $\mu = \mu(r)$, $p = p(r)$ y $j = j(r)$, dentro de la región de confinamiento mencionada en el capítulo III (o sea, donde no hay procesos de reconexión magnética), lo que implica que $p = p(\mu)$ y $j = j(\mu)$. Si se construye además a (4-46), bajo el supuesto de que la corriente total se conserva, entonces, se propone un principio variacional sobre una nueva cantidad F a extremizar, para hallar estados estacionarios, definida por

$$F = 2\pi \left[\int \frac{B_\theta^2}{2\pi} r dr + \frac{1}{\gamma-1} \int pr dr + \lambda \int jr dr \right]. \quad (4-47)$$

Con λ un multiplicador Lagrangiano. Tomando el extremal respecto a Ψ , haciendo una integración por partes sobre $\frac{d\Psi}{dr}$, y sabiendo de (4-45) que

$$\delta\mu = \frac{R}{r B_T} \delta \frac{d\Psi}{dr}, \quad (4-48)$$

se obtiene

$$\delta F = -\frac{1}{2} \int \frac{R}{B_T} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 B_T^2 \mu}{R^2} + \frac{4\pi}{\gamma-1} \frac{dp}{d\mu} + 4\pi\lambda \frac{dj}{d\mu} \right] \delta\Psi dr = 0. \quad (4-49)$$

Al considerar la siguiente dependencia de p y j con μ : $p = p_0 \mu^2$ y $j = j_0 \mu^2$, por ser la más simple y sustituirla en el integrando de (4-49), que debe de ser nulo para el extremal, se encuentra que $\mu(r^2 + a_*^2) = const$, donde a_*^2 es una constante dada por:

$$a_*^2 = 8\pi \frac{R^2}{B_T^2} \left[\frac{p_0}{\gamma-1} + \lambda j_0 \right]. \quad (4-50)$$

⁷ Herrera J.J.E. y Almaguer J.A., III Taller latinoamericano de física de plasmas, Santiago, Chile (1988). Una versión más general de este principio variacional que incluye el término relacionado a la existencia de flujo, en la ec. (4-37) -la energía cinética- se puede encontrar en, Almaguer J.A., Hameiri E., Herrera J., Holm D.D., Phys. Fluids **31**, 1930 (1988).

⁸ Kadomtsev B.B., Sov. J. Plasma Phys. **13**, 443 (1987).

⁹ Ver la discusión de la ec.(4-31), del libro de Schmidt, Op. cit.

¹⁰ Como fue notado por Coppi B., Comm. Plasma Phys. Controlled Fusion, **5**, 261 (1980), es sabido que la densidad, la densidad de corriente y la temperatura en un tokamak, son funciones monótonamente decrecientes de r en el estado estacionario. A esto se refiere uno al hablar de consistencia de los perfiles de la función correspondiente.

¹¹ Ver la discusión que lleva a la ec.(117) del capítulo III del libro de Haseltine, Op. cit.

Imponiendo que $\mu(r = 0) = 1$, que es la condición impuesta por los procesos de reconexión magnética presentes en el centro (manifestada por oscilaciones de diente de sierra en la emisión de rayos X), se concluye que

$$\mu = (1 + \rho^2)^{-1}, j = (1 + \rho^2)^{-2}, p = (1 + \rho^2)^{-2}, \quad (4 - 51)$$

donde $\rho \equiv \frac{r}{a_*}$. De (4-51), se encuentra que bajo este principio variacional la forma de los perfiles para j y p concuerdan cualitativamente con los resultados experimentales. Además resulta que en el estado relajado, la energía mínima no depende de la presión del plasma; en efecto, tomando $\lambda = 0$ y sustituyendo (4-51) y (4-50) en (4-46), se concluye que

$$W_{min} = \frac{1}{4} \frac{B_T^2}{R^2} \int \left[r^2 + \frac{a_*^2}{8\pi} \right] \mu^2 r \, dr. \quad (4 - 52)$$

Para finalizar esta sección, nótese que lo relevante aquí, es que también fue posible hallar una expresión para la forma del perfil de la presión.

APENDICE AL CAPITULO IV. En este apéndice se dará una demostración de la constancia de la helicidad magnética en un plasma ideal, con conductividad infinita. Sacando al derivada temporal de (4-9), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} d^3x = \int \left[\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \nabla \chi) \right] d^3x, \quad (1)$$

ya que de la ley de Faraday y de Ohm generalizada, ec. (4-2), para un plasma con conductividad infinita se tiene:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \equiv \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (2)$$

y de aquí

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{v} \times \vec{B} + \nabla \chi, \quad (3)$$

para una función χ . Integrando por partes a la ec.(1) y usando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \int d\vec{S} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} + \int \vec{B} \cdot \nabla \chi d^3x \quad (4)$$

Considerando las condiciones de frontera $d\vec{S} \cdot \vec{v} = d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0$, la integral de superficie se anula, entonces, utilizando el teorema de la divergencia, que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y la condición de frontera para \vec{B} se llega a

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \int \vec{B} \cdot \nabla \chi d^3x = \int \nabla \cdot \vec{B} \chi d^3x = \int \chi \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5)$$

CAPITULO V. MINIMIZACION DE LA PRODUCCION DE ENTROPIA PARA CARACTERIZAR ESTADOS RELAJADOS DEL PLASMA.

It is easy to show that if the steady states occur sufficiently close to equilibrium states they may be characterized by an extremum principle according to which the entropy production has its minimum value at the steady state compatible with the prescribed conditions (constraints), to be specified in each case....

...The theorem of minimum entropy production (I. Prigogine, 1945) is very general as it applies to all non-equilibrium steady states whatever the nature of the constraints. On the other hand this theorem is also subject to severe restrictions as it is only valid in the range of linear thermodynamics of irreversible processes and when in addition the phenomenological coefficients may be considered as constants satisfying the Onsager relations ...

I. Prigogine y P. Glansdorff. Thermodynamics theory of structure, stability and fluctuations.

En la subsección 3.2 se hizo notar que, para sistemas abiertos, para saber cuáles estados relajados (o estacionarios) eran posibles, era necesario que se cumpliera un principio extremal sobre la derivada temporal de la entropía, y se mencionó que está relacionada con la producción de entropía¹. Sin embargo, con la teoría de Minardi ahí expuesta, no se incorporó una dependencia sobre variables de estado termodinámicas como la presión, sino que sólo se trabajó con cantidades magnéticas, habiendo obtenido esto de la teoría de la información. En el capítulo IV, por otro lado, se incorporó esta dependencia pero en la energía, sugiriendo que el estado estacionario se caracteriza por la extremización de la energía, no sólo magnética. En esta sección, haciendo uso de la ec.(2.1.1-26) y la aproximación de que es posible considerar al plasma como un gas ideal², se propone³ que la entropía del plasma está dada, para cada especie, por:

$$S_{e,i} = n_{e,i} \ln \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_{e,i}} = n_{e,i} \ln \frac{p_{e,i}^{\frac{3}{2}}}{n_{e,i}}. \quad (5-1)$$

Tomando en cuenta el siguiente conjunto de ecuaciones MHD⁴ y las ecuaciones de Maxwell,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0, \quad (5-2)$$

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\Pi} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (5-3)$$

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \vec{F} + (\nabla p_e + \nabla \cdot \vec{\Pi}_e - \vec{J} \times \vec{B}) \frac{1}{en} \approx 0, \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} p = -\nabla \cdot \left(\vec{q} + \frac{5}{2} p \vec{u} + \vec{\Pi} \cdot \vec{u} - \vec{\Pi}_e \cdot \frac{\vec{J}}{en} \right) + \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{u} \cdot (\nabla p + \nabla \cdot \vec{\Pi} - \vec{J} \times \vec{B}), \quad (5-5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5-6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J}, \quad (5-7)$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{e} \vec{\beta} \cdot \nabla T + \vec{\eta} \cdot \vec{J}, \quad (5-8)$$

$$\vec{q} = -\vec{\kappa} \cdot \nabla T - \beta \cdot \vec{J} \frac{T}{e}, \quad (5-9)$$

$$\vec{J} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e); \quad (5-10)$$

¹ Ver, por ejemplo, García-Colín L., Termodinámica de procesos irreversibles, cap. IV, Ed. U.A.M.I., México (1990). No son la misma cosa porque la producción de entropía Σ se define por $\frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_s + \Sigma$, donde \vec{F}_s es un flujo de entropía.

² Para más detalles, ver, Balescu R. Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics, Ed. Krieger Publishing Co., E.U.A. (1991).

³ Ver, Kucinsky M. Y., Plasma Phys. Controlled Fusion 40, 111-125 (1998).

⁴ Ver, Balescu R. Transport Processes in plasmas, Vol. 1, Ed. NHPC, Holanda (1988)

se puede demostrar que la producción de entropía total (Σ), que es la suma de las producciones de entropía de cada especie es⁵:

$$\Sigma = \frac{1}{T}(\eta_{\parallel} J_{\parallel}^2 + \eta_{\perp} J_{\perp}^2) + \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 - (\tilde{\Pi} \cdot \vec{v}_i - \tilde{\Pi}_e \cdot \frac{\vec{J}}{en}) \cdot \frac{\nabla T}{T^2} + \frac{(\nabla \cdot \tilde{\Pi}) \cdot \vec{v}_i - (\nabla \cdot \tilde{\Pi}_e) \cdot \left(\frac{\vec{J}}{en} \right)}{T}. \quad (5-11)$$

En estas ecuaciones, \vec{F} es la fuerza anisotrópica sobre los electrones debida a colisiones con iones y \vec{q} es el flujo de calor; $\tilde{\Pi}$ y $\tilde{\Pi}_e$ son los tensores de viscosidad del fluido y los electrones respectivamente; $\tilde{\eta}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\kappa}$ son respectivamente los tensores de resistividad eléctrica, y de las conductividades termoeléctrica y térmica.

Antes de continuar, es digno de notar que la ecuación para la producción de entropía de una especie, a partir de la cual se dedujo (5-11), puede ser derivada de las respectivas ecuaciones cinéticas, más precisamente, de la expresión para la entropía que se vio en la sección 2.1.; ya sea, que se considere el término de colisiones de Boltzmann⁶, o el término de colisiones de Landau ($\mathcal{K}^{e,i\beta}$)⁷. En este caso, la producción de entropía es

$$\Sigma_{e,i} = -n_{e,i} \int \ln f_{e,i}(\vec{v}, \vec{x}, t) \mathcal{K}^{e,i\beta} d\vec{v} \quad (5-12)$$

Para aplicar el principio variacional, se supondrá además, que se tiene un equilibrio de presión cercanamente establecido, siendo que el plasma continua evolucionando hacia una configuración óptima, lo suficientemente lento como para que el equilibrio MHD se mantenga, es decir, que de (5-3), se debe de cumplir para el estado estático

$$0 \approx -\nabla p_0 + \vec{J}_0 \times \vec{B}_0. \quad (5-13)$$

Esto quiere decir, que se tiene una configuración del plasma, tal que se puede hablar de superficies magnéticas; y recordando lo expuesto en el capítulo IV, corresponde también a un estado de equilibrio obtenido por la minimización de la energía del plasma. Si se supone además, que se tiene una razón de aspecto grande ($\frac{r}{R} \rightarrow 0$), con un tokamak de sección circular, se pueden escoger como coordenadas, las "cilíndricas" (r, θ, φ), en donde φ , la coordenada angular toroidal se hace corresponder con la coordenada z ; entonces debido a las suposiciones anteriores, toda derivada en θ y φ se cancela. Además, por otro lado, $B_r = 0$, dado que se esta suponiendo la formación de superficies magnéticas axisimétricas.

La ec.(5-13) se debe de añadir como restricción. Para hacerlo, es más apropiado expresarlo en términos de la β_p poloidal del plasma, que cumple con⁸

$$\beta_p = 1 + \frac{\langle R^2 B_{0\varphi}^2 \rangle_{\sigma} - \langle R^2 B_{0\varphi}^2 \rangle_{\tau}}{\langle R^2 B_{0\theta}^2 \rangle_{\sigma}}, \quad (5-14)$$

$$\beta_p + \frac{l_i}{2} - 1 = \Lambda, \quad (5-15)$$

donde,

$$\beta_p = \frac{2 \langle p \rangle_{\tau}}{\langle B_{0\theta}^2 \rangle_{\sigma}},$$

$$R \equiv R_0(1 - \epsilon r \cos \theta),$$

⁵ Ver, Kucisky op. cit. En realidad se puede considerar para una deducción más directa de la ec.(2.4.-11), las ecuaciones de continuidad y energía para cada especie. Si se desea puede verse la derivación completa en Balescu op. cit. Transport. . . cap. III.

⁶ Ver, García-Collín L., Teoría cinética de los gases, Ed. U.A.M.I. México (1990).

⁷ Ver, Balescu op. cit., cap. 8. Otra demostración más directa se puede hallar en el libro de Masur P. y de Groot S.R., Non-equilibrium thermodynamics, Ed. NHPC, cap. IX, §4, Holanda (1982). El por qué la producción de entropía es mínima para estados estacionarios, cuando se considera una termodinámica irreversible lineal [es decir, que los coeficientes de Onsager cumplen con ser: a) simétricos (ver la demostración dada por Lewis R.M., Journal Math. Phys. 8, 1448 (1967)) y b) independientes del tiempo; lo que relaciona linealmente a los flujos con las fuerzas termodinámicas] se puede ver en el capítulo V de éste libro, o si se desea ver preferentemente la demostración original en el libro de I. Prigogine op. cit. cap. IX.

⁸ Ver, Haseltine Op. cit.

$$\epsilon \equiv \frac{1}{R_0},$$

$$l_i \equiv \frac{\langle B_{0\theta}^2 \rangle_\tau}{\langle B_{0\theta}^2 \rangle_\sigma},$$

$$\int f d\tau \equiv 2\pi^2 R_0 \langle f \rangle_\tau,$$

$$\int f d\sigma \equiv 4\pi^2 R_0 \langle f \rangle_\sigma,$$

entonces, la constricción que implica la ec.(5-13), para razones de aspecto grandes, se escribe como

$$\int \frac{R^2}{R_0^2} (B_{0\varphi}^2 - \frac{B_{0\theta}^2}{2}) d\tau - \frac{1}{2} \int \frac{R^2}{R_0^2} (B_{0\varphi}^2 - \Lambda B_{0\theta}^2) d\sigma = 0, \quad (5-16)$$

con $d\tau$ indicando una integración sobre el volumen y $d\sigma$ sobre la superficie del plasma, Λ el parámetro de Shafranov, que mide el desplazamiento de los centros de las superficies magnéticas y R siendo el radio mayor del tokamak.

Otras dos constricciones adicionales a considerar son que al sistema se le inyecta helicidad de manera que quede constante esta cantidad y que el flujo toroidal de campo magnético es constante. Tomando las partes paralela y perpendicular al campo magnético de \vec{F} como $\vec{F} = \tilde{\eta} \cdot \vec{J} = \eta_{\parallel} \vec{J}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{J}_{\perp}$ y que las contribuciones debidas a la viscosidad y a la fuerza termoeléctrica son despreciables de la ec.(5-4), se concluye la siguiente constricción de helicidad constante

$$\int \vec{F}_0 \cdot \vec{B}_0 d\tau = \int \eta_{\parallel} \vec{J}_{\parallel} \cdot \vec{B}_0 d\tau = 0. \quad (5-17)$$

De la constancia del flujo toroidal,

$$\int \vec{B}_0 \cdot \hat{e}_{\varphi} d\tau = \int B_{0\varphi} d\tau = \text{constante}. \quad (5-18)$$

A fin de aplicar el principio variacional, se tomarán en cuenta variaciones sólo en \vec{B}_0 manteniendo como fijo el perfil de la temperatura T_0 , así que, a fin de resolver la ecuación de "Euler" que resulte, se supondrá conocida una forma bien definida del perfil para T_0 , dada por $T_0(r) = 1 - 0.9r^4$ (recuérdese la forma de las soluciones para la presión propuestas por Kadomtsev, ec.(4-46); se mostrará más adelante una manera de obtener la forma de los perfiles de temperatura y densidad), con $\frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} = \text{constante}$, $\eta_{\parallel} \propto T_0^{-\frac{3}{2}}$. La cantidad a variar es,

$$\mathcal{F} = \int \left[\frac{1}{2} \Sigma + \lambda_1 B_{0\varphi} + \lambda_2 \eta_{\parallel} \vec{J} \cdot \vec{B} + \lambda_3 \frac{R^2}{R_0^2} (B_{0\varphi}^2 - \frac{B_{0\theta}^2}{2}) \right] d\tau - \frac{\lambda_3}{2} \int \frac{R^2}{R_0^2} (B_{0\varphi}^2 - \Lambda B_{0\theta}^2) d\sigma. \quad (5-19)$$

Aquí λ_1, λ_2 y λ_3 son multiplicadores de Lagrange.

Eliminando el subíndice 0 en B y tomando el extremal de \mathcal{F} anterior, queda

$$\int \delta \vec{B} \cdot \vec{G} d\tau + \int d\sigma \cdot \delta \vec{B} \times \left(\frac{\vec{F}}{T} + \frac{\lambda_2}{2} \eta_{\parallel} \vec{B} \right) - \lambda_3 \int \frac{R^2}{R_0^2} (B_{\varphi} \delta B_{\varphi} - \Lambda B_{\theta} \delta B_{\theta}) d\sigma = 0, \quad (5-20)$$

con

$$\vec{G} \equiv \nabla \times \frac{\vec{F}}{T} - \left(1 - \frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} \right) \frac{\vec{J} \cdot \vec{B}}{B^2} \frac{\vec{F}_{\perp}}{T} + \lambda_1 \hat{e}_{\varphi} + 2\lambda_2 (\eta_{\parallel} \vec{J} + \frac{1}{2} \nabla \eta_{\parallel} \times \vec{B}) + \lambda_3 (2B_{\varphi} \hat{e}_{\varphi} - B_{\theta} \hat{e}_{\theta}). \quad (5-21)$$

Se puede concluir que $G = 0$, y de las condiciones de frontera que vienen de las integrales de superficie, se obtiene

$$\delta B_{\varphi} \left(\frac{F_{\theta}}{T} + \frac{\lambda_2}{2} \eta_{\parallel} B_{\theta} + \lambda_3 B_{\varphi} \right) = 0, \quad (5-22)$$

$$\delta B_\theta \left(\frac{F_\varphi}{T} + \frac{\lambda_2}{2} \eta_{\parallel} B_\varphi + \lambda_3 \Lambda B_\theta \right) = 0. \quad (5-23)$$

Cabe aclarar que se ha tomado $R^2 \approx R_0^2$, en estas tres últimas ecuaciones. Definiendo $\vec{Y} \equiv \frac{\vec{F}}{T}$, las componentes de (5-21) igualadas a cero conducen a las siguientes ecuaciones de Euler,

$$\frac{dY_\varphi}{dr} + \left(1 - \frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} \right) \mu Y_{\perp\theta} - 2\lambda_2 (\eta_{\parallel} J_\theta - \frac{1}{2} \frac{d\eta_{\parallel}}{dr} B_\varphi) + \lambda_3 B_\theta = 0, \quad (5-24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r Y_\theta) - \left(1 - \frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} \right) \mu Y_{\perp\varphi} + \lambda_1 + \lambda_2 (\eta_{\parallel} J_\varphi - \frac{1}{2} \frac{d\eta_{\parallel}}{dr} B_\theta) + 2\lambda_3 B_\varphi = 0, \quad (5-25)$$

que se resuelven junto con la ecuación de Ampere, (5-7), obteniendo

$$\frac{dB_\varphi}{dr} + J_\theta = 0, \quad (5-26)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} - J_\varphi = 0, \quad (5-27)$$

$$\mu \equiv \frac{\vec{J} \cdot \vec{B}}{B^2},$$

$$Y_{\perp\theta} = -\frac{Y_\varphi B_\theta - Y_\theta B_\varphi}{B^2} B_\varphi,$$

$$Y_{\perp\varphi} = \frac{Y_\varphi B_\theta - Y_\theta B_\varphi}{B^2} B_\theta,$$

$$J_\varphi = \frac{T}{\eta_{\parallel}} \left(Y_\varphi - \left(1 - \frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} \right) Y_{\perp\varphi} \right),$$

$$J_\theta = \frac{T}{\eta_{\parallel}} \left(Y_\theta - \left(1 - \frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}} \right) Y_{\perp\theta} \right).$$

Finalmente de las ecuaciones (5-22) y (5-23), se tienen las condiciones de frontera

$$Y_\theta + \frac{\lambda_2}{2} \eta_{\parallel} B_\theta + \lambda_3 B_\varphi = 0, \quad (5-28)$$

$$Y_\varphi + \frac{\lambda_2}{2} \eta_{\parallel} B_\varphi + \lambda_3 \Lambda B_\theta = 0; \quad (5-29)$$

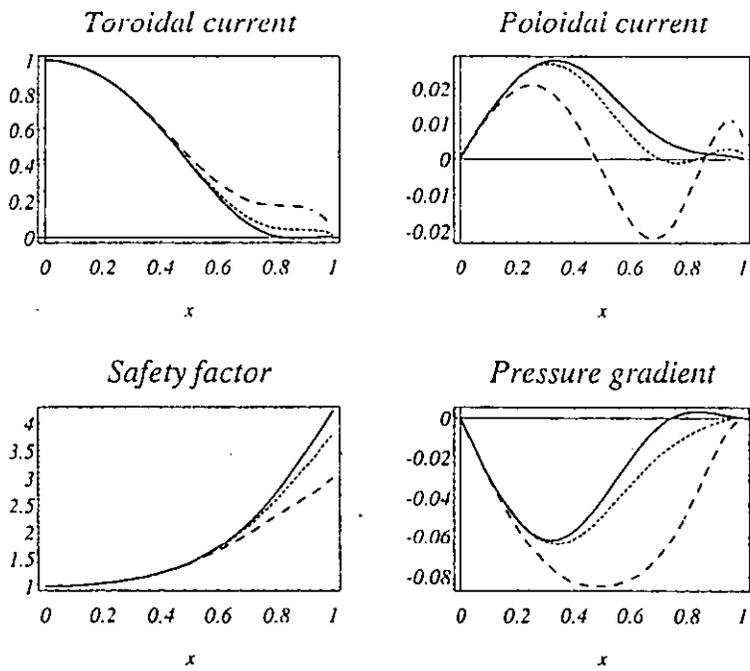
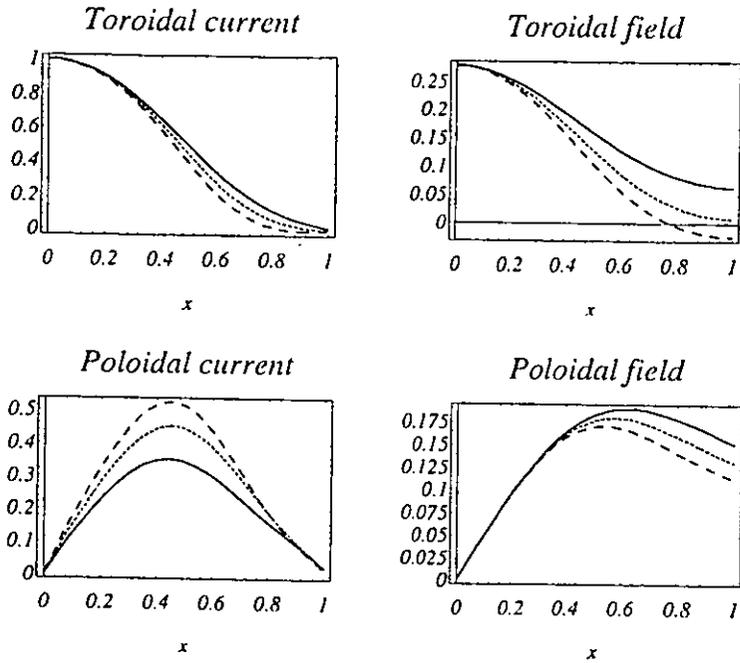
Junto con:

$$Y_\varphi(0) = 1,$$

$$Y_\theta(0) = 1,$$

$$B_\theta(0) = 0.$$

Al resolver numéricamente, proporcionan perfiles para la corriente toroidal y el gradiente de presión que concuerdan, de acuerdo a Kucinsky, con los resultados mencionados anteriormente, acerca de la consistencia de perfiles para la corriente y la presión (ver las siguientes gráficas). Aquí cabe señalar que el perfil para la derivada radial de la presión se obtiene después de hallar las soluciones numéricas para \vec{B} y \vec{J} , y sustituirlas en la ec.(5-13).



Tokamaks. $\eta_{\parallel}/\eta_{\perp} = 0.5$; $B_{\varphi}(0) = 1.5$; — corresponds to $(\beta_p, l_i) = (0.488, 1.58)$,
 to $(\beta_p, l_i) = (0.713, 1.37)$ and - - - to $(\beta_p, l_i) = (1.11, 1.01)$. p' becomes positive in the
 edge for $(\beta_p, l_i) = (0.488, 1.58)$.

Para hallar éstas fue necesario proponer una solución conocida para el perfil de la temperatura; sin embargo, es posible obtener información sobre el perfil radial utilizando⁹ la ec.(5-11), considerando los términos en los que aparece la temperatura y haciendo la suposición de que no hay flujo $\vec{v} = 0$ (los términos que tienen que ver con la viscosidad, por tanto, tampoco contribuyen), entonces la producción de entropía global a extremizar es,

$$\sigma = \int \left[\eta J^2 + \kappa \frac{(\nabla T)^2}{T^2} \right] d\tau \quad (5-30)$$

Se debe notar que se obtienen con este procedimiento leyes de escalamiento para κ . Es posible ahora considerar dos alternativas:

(a). Si el plasma es calentado ohmicamente, $J(r)$ puede ser también función de la temperatura a través de la ley de Ohm ($J \sim \eta^{-1}$)

$$\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\parallel}}{\eta_{\parallel}(T)} + \frac{\vec{E}_{\perp}}{\eta_{\perp}(T)}.$$

Suponiendo a su vez que $E(r) = \text{constante}$, como se observa experimentalmente, entonces

$$J_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}}{\eta_{\parallel}}.$$

Se considera que $J_{\parallel} \gg J_{\perp}$ y que,

$$\int \frac{\kappa_{\parallel} (\nabla_{\parallel} T)^2}{T^2} d\tau = \text{constante},$$

ya que sólo se está interesado en los gradientes perpendiculares de temperatura que son más grandes que los paralelos, pues el transporte térmico paralelo es mucho más efectivo. Más aún, los perfiles radiales no son influenciados por los gradientes paralelos, y por eso, la integral se puede considerar constante. Se toma

$$\eta = \eta_{\parallel} = \eta_{\parallel 0} \hat{n}^{\nu} \hat{T}^{\gamma},$$

$$\hat{n} \equiv \frac{n}{n_0},$$

$$\hat{T} \equiv \frac{T}{T_0},$$

$$\kappa \equiv \kappa_{\perp} = \kappa_{\perp 0} \hat{n}^{\mu} \hat{T}^{\alpha},$$

con ν, γ, μ y α arbitrarios. Se esperaría tener que $\nu = 0$ y $\gamma = -\frac{3}{2}$, ya que la resistividad paralela es usualmente clásica (o neoclásica, refiriéndose por este nombre a la dependencia de los coeficientes de transporte que tiene que ver con la geometría toroidal del tokamak). Entonces, extremizando (5-30), en sus términos que más contribuyen, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \delta \int \kappa_{\perp 0} [A \hat{n}^{-\nu} \hat{T}^{\gamma-1} + \hat{n}^{\mu} \hat{T}^{\alpha-2} (\nabla_{\perp} T)^2] d\tau \\ &= - \int \kappa_{\perp 0} [A(1+\gamma) \hat{n}^{-\mu-\nu} \hat{T}^{-\gamma-\alpha} + (\alpha-2) \hat{T}^{-1} (\nabla \hat{T})^2 + 2\nabla^2 \hat{T} \\ &\quad + 2\mu \nabla(\ln \hat{n}) \cdot \nabla \hat{T}] \hat{T}^{\alpha-2} \delta \hat{T} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (5-31)$$

con $A \equiv \frac{a^2 E_{\parallel 0}^2}{\eta_{\parallel 0} \kappa_{\perp 0} T_0}$.

De (5-31) se concluye que

$$A(1+\gamma) \hat{n}^{-\mu-\nu} \hat{T}^{-\gamma-\alpha} + (\alpha-2) \hat{T}^{-1} (\nabla \hat{T})^2 + 2\nabla^2 \hat{T} + 2\mu \nabla(\ln \hat{n}) \cdot \nabla \hat{T} = 0 \quad (5-32)$$

⁹ Ver, Martinelli J.J. et. al., Plasma Phys. Controlled Fusion **34**, 977 (1992).

Dado que $T(r)$ tiene experimentalmente forma de tipo gaussiana, la ec.(5-32) se puede comparar con la ecuación diferencial para una función gaussiana $F(r) = F_0 \exp(-p(\frac{r}{a})^2)$, $\hat{r} \equiv \frac{r}{a}$; que se expresa por

$$pF^2 - (\nabla F)^2 + F\nabla^2 F = 0. \quad (5-33)$$

Al comparar (5-32) y (5-33) se consideran dos casos particulares: (i) $n(r)$ constante, entonces, $\alpha = -(\gamma + 1)$, que implica que $\alpha < 0$, condiciona la solución gaussiana. Para obtener un pico centrado de $T(r)$ es necesario que $\alpha < 2$. (ii). En el caso particular en que $n(r) = T(r)$, la ec.(5-32) es una solución gaussiana siempre que $\alpha + 2\mu = 0$ y $\mu - \nu = \gamma + 1$, y para que $T(r)$ esté centrada se necesita que $\alpha < 2(1 - \mu)$, así que α depende del escalamiento en la densidad.

(b). En caso de que $J_{\parallel}(r)$ sea tomada como una función independiente de la temperatura a determinar, entonces al sacar la variación de σ se tiene

$$\sigma = \int \kappa_{\perp 0} [A\hat{n}^{\nu}\hat{T}^{\gamma-1} \hat{J}_{\parallel}^2(r) + \hat{n}^{\mu}\hat{T}^{\alpha-2}(\nabla_{\perp})^2] d\tau \quad (5-34)$$

$$\begin{aligned} \delta\sigma = - \int \kappa_{\perp 0} \hat{T}^{\alpha-2} [A(1-\gamma)\hat{J}_{\parallel}^2(\hat{r})\hat{n}^{\nu-\mu}\hat{T}^{\gamma-\alpha} + (\alpha-2)\hat{T}^{-1}(\nabla\hat{T})^2 + 2\nabla^2\hat{T} \\ + 2\mu\nabla(\ln\hat{n}) \cdot \nabla\hat{T}] d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5-35)$$

Lo que implica

$$A(1-\gamma)\hat{J}_{\parallel}^2(\hat{r})\hat{n}^{\nu-\mu}\hat{T}^{\gamma-\alpha} + (\alpha-2)\hat{T}^{-1}(\nabla\hat{T})^2 + 2\nabla^2\hat{T} + 2\mu\nabla(\ln\hat{n}) \cdot \nabla\hat{T} = 0. \quad (5-36)$$

(i). Para $J(r)$ y $n(r)$ constantes, se encuentra que $T(r)$ es gaussiana si $\gamma - \alpha \geq 1$, que descarta todos los modelos conocidos de κ_{\perp} cuando η_{\parallel} tiene un escalamiento clásico, posible de la condición $\gamma < 1$ que también se deduce de (5-36). (ii). En el caso de que $J(r)$ y $n(r)$ sean funciones decrecientes, que es una situación real, el exponente de $T(r)$ en el primer término puede ser más pequeño, y se pueden tener valores más grandes de α .

CAPITULO VI. EL PRINCIPIO VARIACIONAL SOBRE LA PRODUCCION DE ENTROPIA PARA LA OBTENCION DE PERFILES DE DENSIDAD Y TEMPERATURA.

Toda la gracia de la física está en saber hacer aproximaciones adecuadas.

Mutatis mutandis: Dr. Virgilio Beltrán López. In memoriam.

Hasta ahora se ha visto que es posible caracterizar estados relajados de plasmas confinados magnéticamente vía procedimientos variacionales sobre la energía, la entropía y la producción de entropía; y en el caso correspondiente hallar la forma de los perfiles de corriente, presión y/o temperatura. Esto es claro de la lectura de los dos últimos capítulos. En esta última parte de la tesis, el que escribe propone una manera de hallar la forma del perfil de densidad, junto con el de temperatura, a partir de un principio variacional sobre la producción de entropía. En oposición al final de la sección precedente, se verá que es posible hallar perfiles de temperatura gaussianos, sin hacer suposiciones adicionales sobre la dependencia en r de la densidad $n(r)$. Para esto considérese la expresión de la producción de entropía, ec.(5-30), pero añadiendo el término $\frac{\kappa_{\parallel}(\nabla_{\parallel}T)^2}{T^2}$. Cabe hacer notorio que la razón de conductividades térmicas clásicas está dada por $\frac{\kappa_{\parallel e}}{\kappa_{\perp e}} \approx 4.35 \times 10^{21} \frac{T(eV)^3 B(G)^2}{n(cm^{-3})^2}$, que para valores típicos del tokamak de $T = 2keV$, $B = 25kG$ y $n = 3 \times 10^{13} cm^{-3}$, implica que $\frac{\kappa_{\parallel e}}{\kappa_{\perp e}} \approx 2.4 \times 10^{13}$, que es un valor grande; ahora bien, es sabido experimentalmente que $\kappa_{\parallel e}$ tiene los valores predichos por la teoría colisional clásica, mientras que $\kappa_{\perp e}$ puede aumentar su valor por dos efectos: a) Por las órbitas de las partículas no colisionales que giran en la geometría curva del tokamak, efecto de transporte, llamado neoclásico, y b) Por efectos debidos a microinestabilidades que incrementan el valor de la frecuencia de colisión efectiva. Así que en lo siguiente se supondrá que $\kappa_{\perp e}$ se comporta de manera anómala, al tomar en cuenta su contribución en la siguiente integral¹. Otra vez, se supone que $J_{\parallel} \gg J_{\perp}$, así que el término con J_{\perp} de σ se toma como despreciable. Como se sabe, también se cumple con la condición $\nabla_{\parallel}T \ll \nabla_{\perp}T$. Entonces,

$$\sigma = \int \left(\frac{\eta \nabla_{\parallel} J_{\parallel}^2}{T} + \frac{\kappa_{\parallel} (\nabla_{\parallel} T)^2}{T^2} + \frac{\kappa_{\perp} (\nabla_{\perp} T)^2}{T^2} \right) d\tau. \quad (6-1)$$

Se tiene en cuenta nuevamente que

$$J_{\parallel} = \frac{E_{\parallel 0}}{\eta_{\parallel}},$$

con η_{\parallel} la resistividad eléctrica paralela al campo magnético.

$$\eta_{\parallel} = \eta_{\parallel 0} \hat{n}^{\nu} \hat{T}^{\gamma},$$

$$\hat{n} \equiv \frac{n}{n_0},$$

$$\hat{T} \equiv \frac{T}{T_0},$$

$$\kappa_{\perp} = \kappa_{\perp 0} \hat{n}^{\mu} \hat{T}^{\alpha}.$$

A posteriori se verá que debido a la forma experimental del perfil de \hat{n} , que debe de tener una dependencia en forma de parábola en \hat{r} , desplazada a lo largo del eje \hat{n} , es necesario considerar el transporte paralelo, y suponer que éste varía de acuerdo a

$$\kappa_{\parallel} = \kappa_{\parallel 0} \hat{n}^{\mu} \hat{T}^{\alpha}$$

Esto con el fin de poder, también, hallar soluciones analíticas.

Sustituyendo estas últimas igualdades en (6-1) y tomando la variación con respecto a \hat{T} se obtiene

$$A(1 + \gamma) \hat{n}^{-\mu - \nu} \hat{T}^{-\gamma - \alpha} + \kappa_{\parallel 0} (\alpha - 2) \hat{T}^{-1} (\nabla_{\parallel} \hat{T})^2 + 2\kappa_{\parallel 0} \nabla_{\parallel}^2 \hat{T} + 2\kappa_{\parallel 0} \mu \nabla_{\parallel} (\ln \hat{n}) \cdot \nabla_{\parallel} \hat{T} +$$

¹ Ver la discusión en Freidberg J.P., Rev. Mod. Phys. 51, 801 (1979).

$$\begin{aligned}
& +\kappa_{\perp 0}(\alpha-2)\hat{T}^{-1}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2+2\kappa_{\perp 0}\nabla_{\perp}^2\hat{T}+ \\
& +2\kappa_{\perp 0}\mu\nabla_{\perp}(\ln\hat{n})\cdot\nabla_{\perp}\hat{T}=0,
\end{aligned} \tag{6-2}$$

con $A \equiv \frac{a^2 E_{\parallel 0}}{\eta_{\parallel 0} T_0}$.

Tomando la variación con respecto a \hat{n} , se tendrá

$$-A\nu\hat{n}^{-\nu-1}\hat{T}^{-\gamma-1}+\kappa_{\parallel 0}\mu\hat{n}^{\mu-1}\hat{T}^{\alpha-2}(\nabla_{\parallel}\hat{T})^2+\kappa_{\perp 0}\mu\hat{n}^{\mu-1}\hat{T}^{\alpha-2}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2=0. \tag{6-3}$$

Despejando \hat{n} de la ec.(6-3) y sustituyendo en (6-2), y tomando como que $\nabla_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$ y $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r}$ (sólo se hace un cambio de coordenadas), entonces,

$$\begin{aligned}
& -\frac{B}{\hat{T}}[\kappa_{\parallel 0}(\nabla_{\parallel}\hat{T})^2+\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2]+2[\kappa_{\parallel 0}\nabla_{\parallel}^2\hat{T}+\kappa_{\perp 0}\nabla_{\perp}^2\hat{T}]- \\
& \frac{4C[\kappa_{\perp 0}^2\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot(\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\hat{T}+\kappa_{\parallel 0}^2\nabla_{\parallel}\hat{T}\cdot(\nabla_{\parallel}\hat{T}\cdot\nabla_{\parallel})\nabla_{\parallel}\hat{T}]}{\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2\left[1+\frac{\kappa_{\parallel 0}(\nabla_{\parallel}\hat{T})^2}{\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2}\right]}- \\
& \frac{4C\kappa_{\parallel 0}\kappa_{\perp 0}[\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot(\nabla_{\parallel}\hat{T}\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\parallel}\hat{T}+\nabla_{\parallel}\hat{T}\cdot(\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot\nabla_{\parallel})\nabla_{\perp}\hat{T}]}{\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2\left[1+\frac{\kappa_{\parallel 0}(\nabla_{\parallel}\hat{T})^2}{\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2}\right]}=0
\end{aligned} \tag{6-4},$$

donde

$$B \equiv \left(\frac{1+\gamma}{\nu}\right)\mu+(\alpha-2)-2C(\alpha+\gamma+1),$$

$$C \equiv \frac{\mu}{\mu+\nu}.$$

Ahora bien, ya que $|\nabla_{\perp}\hat{T}| \gg |\nabla_{\parallel}\hat{T}|$, entonces a orden uno en $\left(\frac{\nabla_{\parallel}\hat{T}}{\nabla_{\perp}\hat{T}}\right)^2$ se puede aproximar (6-4) por

$$\begin{aligned}
& -\frac{B}{2}[\kappa_{\parallel 0}(\nabla_{\parallel}\hat{T})^2+\kappa_{\perp 0}(\nabla_{\perp}\hat{T})^2]+\hat{T}[\kappa_{\parallel 0}\nabla_{\parallel}^2\hat{T}+\kappa_{\perp 0}\nabla_{\perp}^2\hat{T}] \\
& -\frac{2C\kappa_{\perp 0}\hat{T}\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot(\nabla_{\perp}\hat{T}\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\hat{T}}{(\nabla_{\perp}\hat{T})^2}\approx 0
\end{aligned} \tag{6-5}$$

Proponiendo ahora una solución para \hat{T} con la técnica de separación de variables, tal que $\hat{T} = T_0(r)f_0(z)$, con $f_0(z)$ una función periódica en la variable z , se llega finalmente a una ecuación diferencial para T_0 dada por

$$\left[f_0\frac{d^2f_0}{dz^2}-\frac{B}{2}\left(\frac{df_0}{dz}\right)^2\right]T_0^2-\frac{B}{2}\xi f_0^2\left(\frac{dT_0}{dr}\right)^2+\xi f_0^2[1-2C]T_0\frac{d^2T_0}{dr^2}\approx 0, \tag{6-6}$$

siendo $\xi \equiv \frac{\kappa_{\perp 0}}{\kappa_{\parallel 0}}$. La ec.(6-6) es una ecuación del tipo de una gaussiana para T_0 , ec.(5-33). De la ec.(6-10), a posteriori, se puede sugerir que $f_0 = e^{iz}$, para hallar soluciones acordes al resultado fenomenológico, obviamente tomando \hat{T} y \hat{n} iguales a las partes reales y la ec.(6-6), queda entonces como.

$$\frac{\left[\frac{B}{2}-1\right]T_0^2}{\xi[1-2C]}-\frac{B}{2[1-2C]}\left(\frac{dT_0}{dr}\right)^2+T_0\frac{d^2T_0}{dr^2}\approx 0 \tag{6-7}$$

Para que la ec.(6-7) sea igual a la ec.(5-33), se debe tener $\frac{B}{2} = 1 - 2C$, y de aquí la ec.(6-7) se transforma en

$$\frac{2CT_0^2}{\xi}-\left(\frac{dT_0}{dr}\right)^2+T_0\frac{d^2T_0}{dr^2}\approx 0, \tag{6-8}$$

con solución dada por

$$T_0(\hat{r}) = T_0^* \exp\left[-\frac{2C}{\xi} \left(\frac{\hat{r}}{2}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{C\kappa_{\parallel 0}}{2\pi\kappa_{\perp 0}}} \exp\left[-\frac{C\kappa_{\parallel 0}}{2\kappa_{\perp 0}} \hat{r}^2\right], \quad (6-9)$$

con T_0^* una constante de normalización. De la ec.(6-3),

$$\hat{n}(\hat{r}) = \frac{T_0^{-\frac{\alpha+\gamma+1}{\mu+\nu}}(\hat{r}) f_0^{-\frac{\alpha+\gamma+1}{\mu+\nu}}}{\left\{ \mu \left[\kappa_{\parallel 0} \left(\frac{1}{f_0} \frac{df_0}{dz} \right)^2 + 4\kappa_{\perp 0} p^2 r^2 \right] \right\}^{\frac{1}{\mu+\nu}}}. \quad (6-10)$$

Para que la ec.(6-9) pueda dar un perfil parabólico se requiere que $\mu + \nu < 0$, lo que implica que $\mu < 0$ y $\alpha + \gamma + 1 \geq 0$, y $p \equiv \frac{2C}{\xi} > 0$, son las condiciones necesarias para los parámetros. Además es necesario, para que la ec.(6-10) represente soluciones fenomenológicas, que exista en $\hat{r} = 0$ para \hat{n} , lo cual se cumple cuando $-\frac{C}{\mu}$ es igual a un número fraccional positivo, no entero.

Experimentalmente se ha confirmado el valor clásico de $\gamma = -\frac{3}{2}$ y, por ejemplo, Tang² propone que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$. Si se toma el valor $\alpha = \frac{1}{2}$, se tiene un caso particular interesante en el que la dependencia exponencial en (6-10) se cancela, igualándose a la unidad, y entonces, la dependencia de \hat{n} con \hat{r} corresponde más adecuadamente a los resultados experimentales. Además debe observarse que se supuso una dependencia anómala en las componentes de transporte, tal que μ y ν no estén cercanos de ser nulos, puesto que para las expresiones clásicas $\nu = \mu = 0$, y que $\kappa_{\parallel 0}$ y $\kappa_{\perp 0}$ no difieran mucho entre sí, es decir, que $\kappa_{\parallel 0}$ no sea desproporcionadamente grande, como ocurre en el caso clásico, para evitar que para otros valores de α , la exponencial en (6-9) dé la dependencia más importante de \hat{n} respecto a \hat{r} , que domine al denominador.

Como se ve de lo desarrollado anteriormente, es posible obtener, entonces, la forma de los perfiles de temperatura y densidad del mismo principio variacional sobre la producción de entropía, sin necesidad de hacer suposiciones adicionales acerca de la relación entre la densidad y temperatura, como se hizo al final del capítulo anterior.

² Tang W.M., Nucl. Fusion, **26**, 1605 (1986).

CONCLUSION.

En realidad nadie puede despreciar impunemente a la dialéctica. Por mucho desdén que se sienta por todo lo que sea pensamiento teórico, no es posible, sin recurrir a él, relacionar entre sí dos hechos naturales o penetrar en la relación que entre ellos existe. Lo único que cabe preguntarse es si se piensa acertadamente o no, y no cabe duda de que el desdén de la teoría constituye el camino más seguro para pensar de un modo naturalista, y por tanto, falso. Y el pensamiento falso, cuando se le lleva a sus últimas consecuencias, conduce generalmente, según una ley dialéctica de ya de antiguo conocida, a lo contrario de su punto de partida. Por donde el desprecio empírico por la dialéctica acarrea el castigo a arrastrar a algunos de los más fríos empíricos a la más necia de todas las supersticiones, al moderno espiritismo.... En realidad, el simple empirismo es incapaz de hacer frente a los espiritistas y refutarlos. En primer lugar, porque los fenómenos "superiores" no aparecen sino cuando el "investigador" en cuestión se halla tan obnubilado, que **sólo quiere ver lo que quiere ver**, como el propio Crookes lo describe, con un candor tan inimitable. Y, en segundo lugar, porque a los espiritistas les tiene sin cuidado el que cientos de supuestos hechos resulten ser un fraude y decenas de supuestos mediums sean desenmascarados como vulgares estafadores. Mientras no se hayan descartado, uno por uno, **todos** los supuestos portentos siempre les quedará terreno bastante donde pisar, como claramente nos lo dice Wallace, con motivo de las fotografías falsificadas. La existencia de falsificaciones no hace más que probar la autenticidad de las verdaderas.

De este modo, el empirismo se ve obligado a rechazar con reflexiones teóricas la pegajosa insistencia de los visionarios, ya que los experimentos empíricos no bastan, y a decir, con Huxley:

"Lo único bueno que, a mi juicio, podría ponerse de manifiesto, al demostrar la verdad del espiritismo, sería suministrar un nuevo argumento en contra del suicidio. ¡Antes vivir como un barrendero que decir necedades desde el reino de los muertos por boca de un medium que se alquila a razón de veinte chelines por sesión!"

F. Engels. Dialéctica de la naturaleza.

Con la presente tesis, se muestra que es posible hallar los perfiles de corriente, temperatura, presión y densidad de un plasma magnetizado, haciendo uso de principios variacionales sobre la energía, la entropía y la producción de entropía, principios que son útiles para dar una interpretación más sencilla de la existencia de estos perfiles, que la que vendría de analizar las microinestabilidades, con una teoría no lineal, del plasma¹. Se ha mostrado que para caracterizar estados de equilibrio en el caso del pinch de campo invertido sólo es necesario recurrir a, ya sea el principio de minimización de la energía magnética o al principio de maximización de entropía, que están relacionados. En el caso del tokamak, es necesario recurrir a un principio variacional sobre la energía total del plasma para hallar un estado de equilibrio mecánico "estático", que se supone que se sostiene, mientras el plasma se relaja a un estado que minimiza la producción de entropía; así, con este último principio variacional ha sido posible hallar la consistencia de los perfiles comentados anteriormente. Se puede ver, en particular, que en el último capítulo se contribuyó a hallar la forma del perfil de densidad y temperatura utilizando este principio.

Además de estos principios, existe otra línea que no se ha mencionado en el presente trabajo pero que vale la pena comentar brevemente. Esta se refiere a un principio variacional de minimización de la disipación de energía. De acuerdo a Montgomery y Phillips³, se puede identificar el principio extremal de mínima tasa de disipación de energía (vía calentamiento Joule), con el principio de minimización de la producción de entropía, siendo éste último mucho más general, haciéndolos equivalentes en el caso en que se consideren sólo contribuciones en la energía interna, excluyendo un trabajo hecho sobre el sistema (ver el primer término a la derecha de la ec.(5-11)) y tomando a la temperatura como constante y uniforme. Esta propuesta de Montgomery es también una generalización de un principio enunciado por Helmholtz, Korteweg y Rayleigh⁴ para fluidos, unido a un principio enunciado inicialmente por Chandrasekhar y Woltjer⁵ para la determinación de campos libres de fuerzas, que propone minimizar el calentamiento Joule con cierto valor constante de la resistencia óhmica (se supone un plasma resistivo), sujeto a la constancia de la energía magnética. Así, Montgomery y Phillips, en el apéndice B de op. cit., muestran su extensión al formalismo MHD, de este principio de mínima tasa de disipación. En este artículo se muestra que al constreñir el calentamiento Joule a que $\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle$ sea constante (los corchetes indican un promedio espacial) y que el flujo toroidal magnético

¹ Ver, por ejemplo, la discusión en el capítulo 9 de Kadomtsev B.D., Tokamak Plasma: A Complex Physical System, op. cit.

³ Montgomery D. y Phillips L., Phys. Rev. A, **38**, 2953-2964 (1988).

⁴ Ver, Lamb H., Hydrodinamica, 6^a edición, Ed. Dover, New York, pag. 817-819 (1945).

⁵ Chandrasekhar S., Woltjer L. Proc. N. A. S., vol. 44, No. 4.1958.

sea una constante cinemática, entonces debe cumplirse la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\nabla \times \vec{j} + \alpha \vec{j} + \nabla s = 0.$$

Con α un multiplicador de Lagrange y s una función general que no depende del tiempo, pero sí de la posición. A partir de la ecuación anterior, es posible hallar la forma de los perfiles de corriente para el pinch de campo invertido, consistentes con los resultados experimentales⁶, y que se puede comparar con los resultados obtenidos antes en el capítulo III acerca de la maximización de la entropía, que se "define" con la teoría de la información y con aquel del capítulo IV, acerca de extremizar la energía magnética constreñida a la conservación de la helicidad magnética. Con esto dicho, se espera que el lector note la imagen de conjunto de estas conclusiones.

Después del trabajo de Montgomery, han sido publicados otros artículos relacionados a la minimización de la disipación ohmica con distintas constricciones, v. gr., que $\int \eta \vec{j} \cdot \vec{B} d\tau$ sea fija y $\int \nabla \cdot \vec{B} d\tau = 0$ ⁷; y otra propuesta⁸, constreñida a la constancia de la helicidad magnética, que también permiten hallar los perfiles de corriente experimentales.

⁶ Se sugiere al lector, leer el artículo original de Montgomery, para ver la técnica de solución de esta ecuación, junto con el artículo de Chandrasekhar S. y Kendall P.C., *Astrophys. J.* **126**, 457-460 (1957), y el libro de Moras P.M. y Feibach H., *Methods of theoretical physics*, Ed. MacGraw-Hill, E.U.N.A. pp.1762-1767 (1963).

⁷ Bevir M.R. et. al., *Plasma Phys. Controlled Fusion*, **34**, 133-149 (1993).

⁸ Dasgupta B. et. al., *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, No. 15, pag. 3144-3147, 1998.

BIBLIOGRAFIA

1. Balescu R. Equilibrium And Nonequilibrium Statistical Mechanics. Ed. Krieger Publishing Co. 1991. E.U.N.A.
2. Balescu R. Transport Processes In Plasmas. Ed. Elsevier Science Publishing Co. Holanda. 1988.
3. Callen H.B. Thermodynamics. Ed. John Wiley & Sons. E.U.N.A. 1960.
4. Chandler D. Introduction To Modern Statistical Mechanics. Ed. Oxford University Press. 1986. E.U.N.A.
5. Elsgoltz M. Ecuaciones Diferenciales Y Cálculo Variacional. Ed. MIR. 1969. U.R.S.S.
6. García-Colín L. Teoría Cinética De Los Gases. Ed. U.A.M.I. 1990. México.
7. García-Colín L. Termodinámica De Procesos Irreversibles. Ed. U.A.M.I. 1990. México.
8. Goldston R.J., Rutherford P.H. Introduction To Plasma Physics. Ed. Institute Of Physics Publishing. 1995.
9. Greiner W., et. al. Thermodynamics And Statistical Mechanics. Ed. Springer-Verlag. 1995. E.U.N.A.
10. Hazeltine L. Plasma Confinement. Ed. Addison-Wesley. 1992. E.U.N.A.
11. Hill T. L. An Introduction To Statistical Thermodynamics. Ed. Dover. 1986. E.U.N.A.
12. Kadomtsev B.B. Tokamak Plasma: A Complex Physical System. Ed. Institute Of Physics Publishing. Inglaterra. 1992.
13. Khinchin A. I. Mathematical Foundations Of Informational Theory. Ed. Dover. E.U.N.A.
14. Krasnov M.L., et. al. Cálculo Variacional. Ed. MIR. 1969. U.R.S.S.
15. Lamb H. Hydrodinamics. Sexta edición. Ed. Dover. 1945. E.U.N.A.
16. Mazur P., de Groot S.R. Non-equilibrium Thermodynamics. Ed. N.H.P.C. 1962. Holanda.
17. Matveév A.N. Física Molecular. Ed. Mir. U.R.S.S. 1987.
18. Miyamoto K. Plasma Physics For Nuclear Fusion. Ed. MIT Press. E.U.N.A. 1989.
19. Morse P.M., Feshbach H. Methods Of Theoretical Physics. Ed. McGraw-Hill. 1953. E.U.N.A.
20. Nicholson D.K. Introduction To Plasma Theory. Ed. John Wiley & Sons. E.U.N.A. 1983.
21. Prigogine I., et. al. Thermodynamic Theory of Structure Stability On Fluctuations. Ed. John Wiley & Sons. 1971. E.U.N.A.
22. Reif F. Fundamentals Of Statistical and Thermal Physics. Ed. McGraw-Hill. 1965. E.U.N.A.
23. Reitz J. R., et. al. Fundamentos De La Teoría Electromagnética. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. 1986. E.U.N.A.
24. Schmidt G. Physics of High Temperature Plasmas. Ed. Academic Press. 1979. E.U.N.A.
25. Tolman R.C. The Principles Statistical Mechanics. Ed. Dover. 1979. E.U.N.A.
26. Weinstock R. Calculus Of Variations With Applications To Physics And Engineering. Ed. Dover. 1974. E.U.N.A.
27. Yourgrau W., Mandelstam S. Variational Principles In Dynamics And Quantum Theory. Ed. Dover. 1968. E.U.N.A.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

ARTICULOS

1. Almaguer J. A. et. al. III Taller Latinoamericano De Física De Plasmas. Santiago de Chile. 1988.
2. Almaguer J.A., Hameiri E., Herrera J., et. al. Phys. Fluids. Vol. 31. No. 7. 1988.
3. Bevir M. R. et. al. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 34. pp. 133-149. 1993.
4. Chandrasekhar S., Kendall P.C. Astrophys. J. Vol. 126. pp. 457-460. 1957.
5. Chandrasekhar S., Woltjer L. Proc. N. A. S. Vol. 44. No. 4. 1958.
6. Coppi B. Comm. Phys. Controll. Fusion. Vol. 5. pp.261. 1980.
7. Dasgupta B.,et. al. Phys. Rev. Lett. Vol. 81. No. 15. pp. 3144-3147. 1998.
8. Freidberg J.P. Rev. Mod. Phys. Vol. 54. No. 3. 1982.
9. Hameiri E., Bhattacharjee A. Physical Rev. A. Vol. 35. No. 2. pp. 768-777. 1987.
10. Jaynes E. T. Am. J. Phys. 1965. pp. 391-398.
11. Jaynes E. T. Phys. Rev. Vol. 106. No. 4. 1957.
12. Kadomtsev B.B. Comments Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 11. No. 3. pp. 153-163. 1987.
13. Kadomtsev B.B. Sov. J. Plasma Phys. Vol. 13. No. 7. 1987.
14. Kucinsky M.Y. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 40. pp. 111-125. 1998.
15. Lewis R.M. Journal Math. Phys. Vol. 8. No. 7. pp. 1448. 1967.
16. Liboff R.L. Journal of Statistical Phys. Vol. 11. No. 4. pp. 343-357. 1974.
17. Martinell J. J., et. al. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 34. No. 6. 1992.
18. Minardi E. Phys. Fluids. Vol. 16. No. 1. 1973.
19. Minardi E. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 29. No. 7. pp. 945-948. 1987.
20. Minardi E. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 30. No. 12. pp. 1701-1721. 1988.
21. Minardi E. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 31. No. 2. pp. 229-240. 1989.
22. Minardi E. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 32. No. 10. pp. 819-831. 1990.
23. Minardi E. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 34. No. 6. pp. 989-1009. 1992.
24. Minardi E. J. Plasma Phys. Vol. 25. parte 3. secc. 3.2. 1981.
25. Minardi E. J. Plasma Phys. Vol. 33. parte 3. pp. 359-367. 1985.
26. Minardi E. J. Plasma Phys. Vol. 48. parte 2. pp. 309-323. 1992.
27. Minardi E. Plasma Phys. Vol. 14. pp. 427-441. 1972.
28. Minardi E., Lampis G. Plasma Phys. Controll. Fusion. Vol. 32. No. 10. pp. 819-831. 1990.
29. Minardi E., Santini F. Physica. Vol. 32. pp. 497-512. 1966.
30. Montgomery D., Phillips L. Phys. Rev. A. Vol. 38. pp. 2953-2964. 1988.
31. Tang W.M. Nucl. Fusion. Vol. 26. pp. 1605. 1986.
32. Taylor J.B. Phys. Rev. Letters. Vol. 33. No. 19. pp. 1139- 1141. 1974.
33. Woltjer L. Proc. Natn. Acad. Sci. Vol. 44. 1958.