



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFERENCIA RADIATIVA EN LA ATMOSFERA

289736
27/1/82

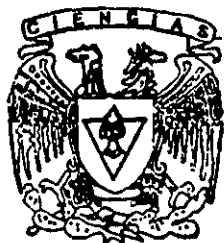
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C A

P R E S E N T A:

ENA ERANDY RAMIREZ PEREZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JUAN RUBEN DIAZ VARELA HAM

DR. DARIO NUÑEZ ZUNIGA



26/01/82

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"TRANSFERENCIA RADIATIVA EN LA ATMOSFERA"

realizado por RAMIREZ PEREZ ENA ERANDY

con número de cuenta 8816329-5 pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. JUAN RUBEN VARELA HAM
Propietario

DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA

Propietario

DR. CARLOS GAY GARCIA

Suplente

DR. GRACIELA LUCIA BINIMELIS DE RAGA

Suplente

DR. AGUSTIN MUHLIA VELAZQUEZ

Consejo Departamental de Física

DR. PATRICIA GOLDSTEIN FENSCHÉ
Coordinadora de Licenciatura

AGRADECIMIENTOS

ME ES GRATO MANIFESTAR MI AGRADECIMIENTO A LAS SIGUIENTES PERSONAS:

- DR. JUAN RUBÉN VARELA HAM
POR SU INVALUABLE GUIA EN LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO
- DR. JOSÉ INÉS JIMÉNEZ AQUINO
POR SUS CONSEJOS Y DETERMINANTE COLABORACION
- DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
POR SU INESTIMABLE APOYO
- DRA. ROSA MARIA VELASCO BELMONT
POR SU AYUDA Y APOYO PROFESIONAL
- A MI MADRE, SIN ELLA NO HABRIA SIDO POSIBLE ESTE TRABAJO
- A SHIRAZ, GRACIAS POR EL SENTIDO Y LA FUERZA
PARA PODER TERMINAR ESTA ETAPA.

AL HONORALE JURADO

INDICE

Pag.

Introducción.....	1
Capítulo 1: Teoría General.....	3
Capítulo 2: Dispersión de Rayleigh	20
Capítulo 3: Dispersión de Mie	26
Capítulo 4 : Modelos de dos Flujos	41
Capítulo 5 : Algoritmos	55
Capítulo 6 : Resultados y Conclusiones	66
APÉNDICES	
A.- Estimación de espesores ópticos	78
B.- Modelación de Funciones Fase	83
C.- Equivalencia entre las Ecuaciones de Transferencia propuestas por Braslau y Meador	89
D.- Caso Límite: Función de Rayleigh	97
E.- Desarrollos de los Capítulos 4 y 5.....	100
REFERENCIAS	116

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de los modelos matemáticos y físicos necesarios para resolver el problema de la transferencia de radiación en la atmósfera utilizando el modelo de dos flujos para dar solución analíticamente a la ecuación integrodiferencial que constituye la base de la teoría de la dispersión de la radiación, además de esto, se utiliza otro modelo para estratificar a la atmósfera en 160 capas plano paralelas, lo cual constituye una simplificación al problema. Esto ya se ha hecho en el pasado, por lo que se especifica la intención al hacer esto es contar con una idea clara de los elementos que conforman la teoría de la dispersión de radiación en la atmósfera y de uno de los métodos que se siguen para resolver la ecuación que resulta al hacer la aproximación de atmósfera plano paralela y homogénea, así como de la teoría básica que es necesario comprender.

Los datos experimentales involucrados en la solución del problema, como el albedo y los espesores ópticos, son cantidades que adquieren significado dentro de la forma empírica en que se basó el desarrollo primario de ésta área, y que conforme avanzó el campo dentro de las justificaciones formales del análisis matemático, pasaron a formar parte de los términos abstractos del mismo. A pesar de esto, la forma en que se les adjudica un valor a estas cantidades se basa enteramente en técnicas experimentales, por lo que dentro del desarrollo de las ecuaciones y de la aplicación de algoritmos matemáticos para encontrar su solución, es necesario tomar en cuenta una parte de trabajo en investigación de datos experimentales confiables que proporcionen los valores buscados. Aquí es necesario subrayar que éstos datos son generalmente obtenidos para condiciones geográficas que no son compatibles con las que se quieren analizar, por lo que el paso siguiente, es obtenerlos para condiciones locales que permitan dar resultados de interés en nuestro problema, en éste punto, es necesario seguir un camino análogo al del desarrollo teórico en cuanto a que habrá que reproducir en primera instancia los datos con los que ya se cuenta para luego aplicar las mismas técnicas al caso de la Ciudad de México o cualquier otro lugar.

Cabe destacar que para poder aplicar la solución de las ecuaciones es necesario contar previamente, con un modelo de caracterización de la atmósfera y obtención de la radiación directa en el que se encuentran involucradas a su vez otra serie de consideraciones que no serán analizadas en detalle aquí, sin embargo, éste aspecto del trabajo será incluido en la sección pertinente a su utilización.

Como ya se dijo, en este trabajo se aborda el método de dos flujos para resolver las ecuaciones de transferencia radiativa en una atmósfera inhomogénea, dividida en N capas homogéneas plano paralelas en presencia de moléculas y aerosoles, siguiendo los métodos propuestos por Meador y Weaver (1980), Toon et al. (1989). La diferencia con estos trabajos consiste en hacer todo el desarrollo para la dependencia explícita de la función fase con el espesor óptico y que puede expresarse como una combinación lineal de las funciones fase de Rayleigh y Mie. La presencia de partículas absorbentes lleva a un escalamiento de la función fase que debe satisfacer la condición de normalización requerida, es decir, que el albedo de dispersión simple sea menor o igual a 1.

Una teoría que tome en cuenta estos factores de manera integral está lejos de ser formulada, una aproximación al problema real es hacer balances radiativos monocromáticos

en una atmósfera libre de nubes y proponer modelos empíricos para la cantidad de ozono estratosférico, la humedad y las partículas.

Las ecuaciones que dan cuenta de estos balances radiativos se conocen en la literatura como ecuaciones de transferencia radiativa (ETRA's), y fueron propuestas por Chandrasekhar en 1960. Estas ecuaciones son integrodiferenciales y sus soluciones analíticas exactas no han sido obtenidas hasta el momento. Sin embargo, desde el punto de vista analítico, las soluciones de ETRA's han tenido algunos avances importantes que ya han sido reportados en la literatura.

En particular, Meador y Weaver (1980), usan el método de dos flujos que constituye la aproximación de Eddington, para calcular la transmitancia y la reflectancia de una atmósfera homogénea con partículas dispersoras en ella. Por otra parte, Toon (1989) utiliza la solución de Meador y Weaver, para resolver el problema de dispersión múltiple en una atmósfera inhomogénea suponiendo que se encuentra dividida en N capas inhomogéneas plano paralelas estratificadas en forma vertical, en las cuales la concentración de partículas se supone constante en cada capa, para resolver el problema analíticamente. Se establece un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas con coeficientes constantes para los flujos ascendente y descendente, aplicando las condiciones para lograr reducir el problema a una matriz tridiagonal y calcular estos flujos a través de las N capas. El objetivo de este trabajo consiste en resolver ETRA's para la dispersión múltiple en una atmósfera inhomogénea tomando en cuenta la presencia de aerosoles. Usando los métodos de Meador y Toon, y tomando a la función fase con su dependencia explícita del espesor óptico, los desarrollos presentados aquí detallan el procedimiento necesario para resolver el problema. Siguiendo los pasos del método, se obtienen un sistema de ecuaciones acopladas para los flujos ascendente y descendente, pero con coeficientes dependientes del espesor óptico. El sistema se resuelve suponiendo que dichos coeficientes son constantes del espesor óptico en cada capa atmosférica, obteniéndose así soluciones similares a las de Toon. Para calcular los flujos en cada capa, se usan las condiciones a la frontera requeridas, reduciendo también el problema a una matriz tridiagonal. Los coeficientes que aparecen en las soluciones para los flujos se calculan a través de la función fase que se expresa como una combinación lineal de la funciones fase de Rayleigh y Mie de acuerdo con Braslau y Dave (1973), Dave (1970) y Kattawar (1967).

Lo dicho anteriormente constituye la esencia del presente trabajo, los capítulos 4, 5 y 6 están dedicados a desarrollar todas las justificantes matemáticas que avalan lo antes mencionado, de igual forma, los apéndices que se encuentran al final son desarrollos que completan los conceptos de espesor óptico, características de la función fase y la equivalencia entre el planteamiento de ETRA's de Meador y Weaver, y el hecho por Toon et al. El capítulo 6 es dedicado también a los resultados y conclusiones.

Los primeros tres capítulos se dedican enteramente a plantear los conceptos básicos con los que se trabajará más adelante: teoría general, dispersión de Rayleigh y dispersión de Mie y se pegan estrictamente a la literatura que desarrolla estos aspectos con gran detalle.

Capítulo 1

Teoría General

En éste apartado se definirán las cantidades fundamentales con las cuales se trabaja en el campo de la transferencia radiativa, como la derivación de la ecuación básica -- la ecuación de transferencia -- que gobierna el campo de radiación en un medio que absorbe, emite y dispersa radiación. En la formulación de los diversos conceptos y ecuaciones no se llegará a la máxima generalización posible sino que, nos limitaremos a los problemas que se desean considerar.

Teoría General de la luz Dispersada

Pocas veces es observada la luz directamente de la fuente que la produce, en gran cantidad la luz que se ve llega a nuestros ojos de una forma indirecta. Viendo a un árbol, o a una casa, vemos luz de sol reflejada difusamente. Viendo a una nube, o al cielo, vemos luz dispersada. Aún una lámpara eléctrica no nos manda su luz directamente del filamento luminoso porque usualmente muestra solo la luz que ha sido dispersada por el bulbo de vidrio. Todos los que están involucrados en el estudio de la luz o en sus aplicaciones industriales conocen el problema de la dispersión.

La dispersión se encuentra comúnmente acompañada de la absorción. Una hoja de árbol luce verde porque dispersa la luz verde de manera más efectiva que la luz roja. La luz roja incidente en la hoja es absorbida; esto significa que su energía es convertida en alguna otra forma y ya no está presente como luz roja. La absorción es preponderante en materiales como el humo negro; está casi ausente a longitudes de onda visibles, en las nubes, o en el aire.

Ambos, la dispersión y la absorción remueven energía de un haz de luz que atraviesa un medio: el haz es atenuado. Esta atenuación, llamada extinción, es observada cuando se mira directamente a la fuente de luz. El Sol por ejemplo, es más rojo en el ocaso que en el amanecer: esto indica extinción en la trayectoria más larga de la luz en el aire, lo cual es fuerte en todos los colores, pero más fuerte aún en la luz azul que en la roja. Se entenderá que el fenómeno de la extinción es debido a la suma de la absorción más la dispersión. Una primera restricción que se tomará en cuenta es que la luz dispersada tendrá la misma longitud de onda que la luz incidente. Efectos tales como el efecto Raman, o generalmente cualquier transición cuántica serán excluidos.

Una segunda limitación más importante es que las partículas son consideradas independientes, esto es, las partículas se encuentran tan separadas que la dispersión que causan cada una de ellas no afecta a las demás. También se hará una distinción más precisa. Si la luz atraviesa un medio perfectamente homogéneo, no será dispersada. Sólo los medios inhomogéneos causan dispersión. Ahora, de hecho, cualquier medio material tiene inhomogeneidades que consisten en moléculas, cada una de las cuales actúan como un centro dispersor, pero depende del arreglo de las moléculas el que la dispersión sea efectiva.

En un cristal perfecto en el cero absoluto de temperatura las moléculas están arregladas de una manera muy regular, y las ondas dispersadas por cada molécula interfieren de tal forma que sólo causan un cambio general en la velocidad de propagación. Por otro lado, en un gas o un fluido, las fluctuaciones estadísticas en los arreglos de las moléculas causan una dispersión real, que muchas veces puede ser apreciable. En éstos ejemplos, aunque las moléculas estén o no arregladas de cierta manera, el resultado final es un efecto cooperativo de todas las moléculas. Por consiguiente, la teoría de la dispersión tiene que estudiar en detalle las relaciones de fase entre las ondas dispersadas por moléculas vecinas. Cualquier problema en el que la prioridad sea dar una descripción detallada de la cooperación entre partículas, es llamado de dispersión dependiente y no será tratado aquí.

Frecuentemente, sin embargo, las inhomogeneidades son cuerpos extraños inmersos en el medio. Ejemplos obvios son las gotas de agua y granos de polvo en el aire atmosférico y burbujas en el agua o en vidrio. Si tales partículas están lo suficientemente alejadas unas de otras, es posible estudiar la dispersión por una partícula sin referencia a las demás. Esto será llamado dispersión independiente; éste es el objeto de estudio a tratar.

Puede ser notado que las ondas dispersadas por diferentes partículas de un mismo haz incidente en la misma dirección aún tienen una cierta relación de fase, y por consiguiente aún pueden interferir. El hecho de que la longitud de onda permanezca igual implica que las ondas dispersadas están en fase y se suman, o fuera de fase y se destruyen, o cualquier otra posibilidad de interferencia. El asumir dispersión independiente implica que no hay una relación sistemática entre éstas fases. Un pequeño desplazamiento de una partícula o un cambio pequeño en el ángulo de dispersión pueden cambiar las diferencias de fase completamente. El efecto neto es aquél para el que todos los propósitos prácticos las intensidades dispersadas por varias partículas son sumadas sin cambios de fase. Por lo anterior parece que la dispersión por partículas diferentes es incoherente, pero de hecho en un sentido estricto esto no es cierto. Una excepción puede ser hecha para ángulos de dispersión que son virtualmente cero. En éstas direcciones no hay dispersión observada en el sentido estricto.

Una tercera limitación es que los efectos de la dispersión múltiple serán despreciados.

De acuerdo con lo expuesto arriba, consideraremos una sola partícula de tamaño y forma arbitrarios iluminada por una fuente muy distante. Las propiedades de la luz dispersada a una distancia muy grande de la partícula implican la suposición de que las otras partículas han dejado suficiente espacio alrededor de ésta como para que pueda establecerse un campo de radiación dispersa.

La propiedad más importante de la onda dispersada es su intensidad. Por intensidad I entenderemos el flujo de energía por unidad de área. En óptica esto es llamado la irradiancia. La onda incidente y la onda dispersada en cualquier punto dentro del campo son unidireccionales, esto es, cada una está confinada a una dirección o a un ángulo sólido muy pequeño alrededor de ésta dirección. El término intensidad como aquí será usado se refiere al flujo total de energía en éste ángulo sólido. Las ondas también se asumirán como monocromáticas, esto es, confinadas a una frecuencia o a un intervalo pequeño de frecuencias. La intensidad también se referirá al flujo total de energía en éste intervalo.

Las propiedades adicionales que deben tomarse en cuenta para la luz incidente son su polarización y su fase. Las fases no pueden ser medidas directamente, pero son de importancia en la formulación correcta de la dispersión de la luz polarizada. Así que en

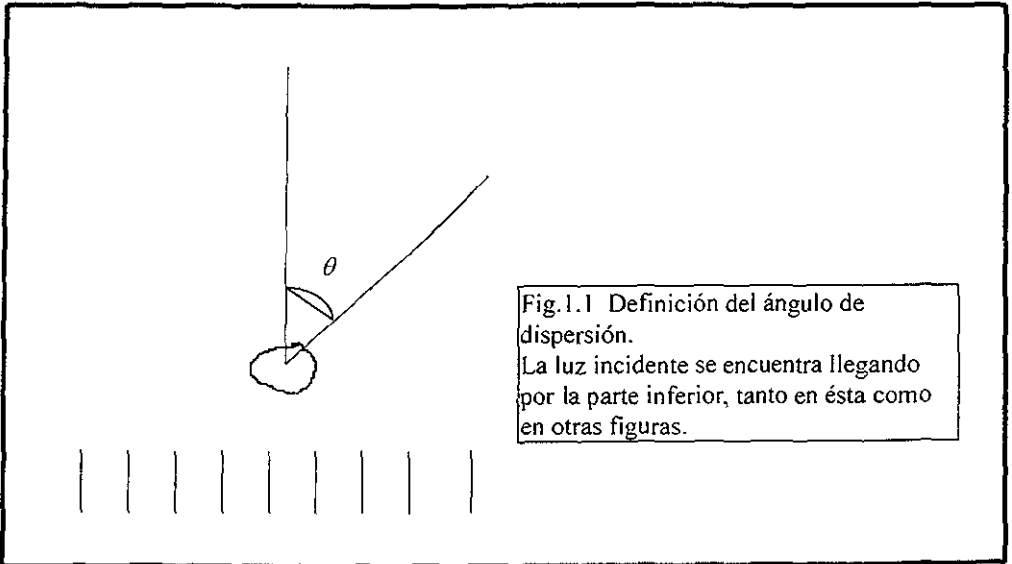
gran parte de éste y los dos capítulos siguientes, se trabajará con funciones de dispersión que son números complejos y describen la amplitud y fase de las ondas dispersadas.

La onda dispersada en cualquier punto en un campo distante tiene las características de una onda esférica, en la cual, la energía fluye hacia afuera de la partícula. La dirección de la dispersión, i.e., la dirección desde la partícula hasta éste punto, es caracterizada por el ángulo θ que esta hace con la dirección de propagación de la luz incidente y un ángulo azimutal φ (Fig. 1.3).

Sea I_0 la intensidad de la luz incidente, I la intensidad de la luz dispersada en un punto a una distancia grande r de la partícula, y k el número de onda definido por $k = 2\pi / \lambda$, donde λ es la longitud de onda en el medio adyacente. Como I tiene que ser proporcional a I_0 y a r^{-2} podemos escribir, (ref.1.2):

$$I = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2 r^2} \quad (1.1)$$

Aquí $F(\theta, \varphi)$ es una función adimensional (F/k^2 es un área) de la dirección pero no de r . También depende de la orientación de la partícula con respecto a la onda incidente y del estado de polarización de la onda incidente.



Los valores relativos de I , o de F , pueden ser graficados en un diagrama polar, como una función de θ en un plano fijo que coincida con la dirección de incidencia. Este diagrama es llamado el *diagrama de dispersión* de la partícula

1. La Intensidad específica.

El análisis de un campo de radiación frecuentemente requiere que se considere la cantidad de energía radiante, dE_ν , en un intervalo específico de frecuencia ($\nu, \nu+d\nu$) que es transportado a través de un elemento de área $d\sigma$ y en la direcciones confinadas a un elemento de ángulo sólido $d\omega$ durante un tiempo dt (ver la figura 1.2). Esta energía, dE_ν , es expresada en términos de la *intensidad específica* (o simplemente la *intensidad*), I_ν , por

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta d\nu d\sigma d\omega dt \quad (1.2)$$

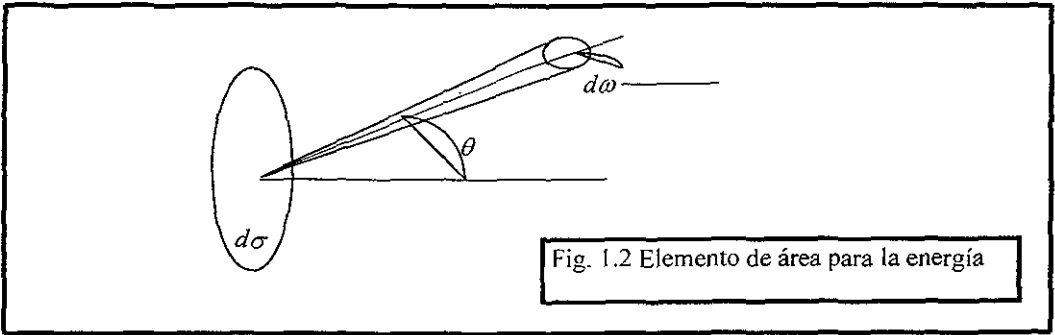


Fig. 1.2 Elemento de área para la energía

donde θ es el ángulo que la dirección considerada hace con la normal exterior a $d\sigma$. La construcción hecha aquí también define a un *haz de radiación*.

Se sigue de la definición de intensidad que en un medio que absorbe, emite, y dispersa radiación, I_ν puede esperarse que varíe de punto a punto y también con la dirección de cada punto. Por esto, para dar una definición general del campo de radiación, podemos escribir

$$I_\nu \equiv I_\nu(x, y, z; l, m, n; t), \quad (1.3)$$

donde (x, y, z) y los cosenos directores (l, m, n) definen el punto y la dirección a la que I_ν se refiere. Se dice que un campo de radiación es isotrópico en un punto, si la intensidad es independiente de la dirección en ese punto. Y si la intensidad es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, se dice que el campo de radiación es homogéneo e isotrópico.

Un caso de gran interés en contextos astrofísicos y terrestres es aquél de una atmósfera estratificada en planos paralelos en los cuales todas las propiedades físicas son invariantes en el plano. En éste caso se puede escribir

$$I_{\nu} \equiv I_{\nu}(z, \vartheta, \varphi; t), \quad (1.4)$$

donde z denota a la altura medida en el plano de estratificación, normal al mismo y (θ, φ) son los ángulos polar y azimutal respectivamente. Si I_{ν} puede ser independiente de φ se tiene un campo con *simetría axial* alrededor del eje z .

Otro caso de interés que también surge en la práctica es aquél con *simetría esférica* cuando

$$I_{\nu} \equiv I_{\nu}(r, \vartheta; t), \quad (1.5)$$

donde r es la distancia del centro de simetría y ϑ es la inclinación de la dirección considerada a el radio vector.

La intensidad I_{ν} integrada sobre todas las frecuencias es denotada por I y se le llama intensidad integrada; entonces

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu. \quad (1.6)$$

Mientras que para muchos propósitos la intensidad $I_{\nu}(x, y, z; l, m, n)$ caracteriza suficientemente al campo de radiación, es importante notar que muchos parámetros que describen el estado de polarización del campo de radiación deben ser especificados antes de llevar a cabo la descripción del campo completamente.

1. El Flujo Neto

La Ecuación (1.1) da la energía en el intervalo de frecuencia $(\nu, \nu+d\nu)$ que fluye a través del elemento de área de $d\sigma$ en una dirección que está inclinada un ángulo θ con su normal exterior y confinada a un elemento de ángulo sólido $d\omega$. El flujo neto en la dirección de la normal es dado por

$$d\nu d\sigma dt \int I_{\nu} \cos \vartheta d\omega, \quad (1.7)$$

donde la integración se lleva a cabo sobre todos los ángulos sólidos.

La cantidad

$$\pi F_{\nu} = \int I_{\nu} \cos \vartheta d\omega \quad (1.8)$$

que se encuentra en la expresión (1.7) es llamada el flujo neto y la energía radiante por unidad de área y por unidad de intervalo de frecuencia.

Para un sistema en coordenadas polares con el eje z en la dirección que atraviesa a $d\sigma$

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (1.9)$$

y la expresión para el flujo neto puede ser escrita en la forma

$$\pi F = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.10)$$

2. La Densidad de Radiación

La densidad de energía $u_\nu d\nu$ en el intervalo de frecuencia $(\nu, \nu+d\nu)$ en cualquier punto dado es la cantidad de energía radiante por unidad de volumen, en el intervalo de frecuencia establecido, que se encuentra en tránsito en la vecindad del punto considerado.

Para encontrar la expresión para la densidad de energía en el punto P construimos alrededor de P un volumen infinitesimal v con una superficie convexa σ . A continuación se rodea a v con otra superficie convexa Σ tal que las dimensiones lineales de Σ son grandes comparadas con las de σ ; nunca menores, se conviene que el elemento de volumen encerrado por Σ es aún tan pequeño que se puede considerar la intensidad dada en cualquier dirección adentro de Σ como la misma.

Ahora, toda la radiación que atraviesa el volumen v tiene que cruzar algún elemento de la superficie de Σ .

Sea $d\Sigma$ tal elemento; también serán Θ y θ quienes denotarán los ángulos con las normales de $d\Sigma$ y un elemento $d\sigma$ de σ hace con la línea que une a los dos elementos. La energía que fluye a través de $d\Sigma$ que también fluye a través de $d\sigma$ es

$$I_\nu \cos \Theta d\Sigma d\omega' d\nu = I_\nu d\nu \frac{\cos \vartheta \cos \Theta d\sigma d\Sigma}{r^2} \quad (1.11)$$

ya que el ángulo sólido $d\omega'$ subtendido por $d\sigma$ en $d\Sigma$ es: $\frac{d\sigma \cos \theta}{r^2}$

donde r es la distancia entre $d\sigma$ y $d\Sigma$. Si l es la longitud atravesada por el lápiz de radiación considerado a través del elemento de volumen v , la radiación (1.11) incidente en $d\sigma$ por unidad de tiempo tendrá que atravesar el elemento en un tiempo l/c , donde c denota la velocidad de la luz. La contribución a la cantidad total de energía radiante en tránsito a través de v por el lápiz de radiación considerado es

$$I_\nu d\nu \frac{\cos \vartheta \cos \Theta d\sigma d\Sigma}{r^2} \frac{1}{c} = \frac{1}{c} I_\nu d\nu dv d\omega \quad (1.12)$$

donde $d\omega = d\Sigma \frac{\cos \Theta}{r^2}$ es el ángulo sólido subtendido por $d\Sigma$ en P y $dv = l d\sigma \cos \vartheta$ es el volumen interceptado en v por un lápiz de radiación. Por lo tanto la energía total en el intervalo de frecuencia $(\nu, \nu+d\nu)$ en tránsito a través de v , debido a la radiación que viene de todas direcciones, es obtenida al integrar (1.12) sobre todo v y ω

$$\frac{d\nu}{c} \int d\nu \int d\omega I_\nu = \frac{\nu}{c} d\nu \int I_\nu d\omega \quad (1.13)$$

Por lo tanto

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega \quad (1.14)$$

La *densidad de energía integrada*, u_ν , es dada similarmente en términos de la intensidad integrada I ; por esto

$$(1.15)$$

A veces es conveniente introducir la intensidad promedio

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega, \quad (1.16)$$

que puede ser relacionada con la densidad de energía a través de :

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (1.17)$$

Para un campo de radiación con simetría axial:

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta. \quad (1.18)$$

3. Coefficiente de Absorción. Absorción real y Dispersión Función Fase

Un lápiz de radiación atravesando un medio puede ser debilitado por su interacción con la materia. Entonces la intensidad específica I_ν se convierte en $I_\nu + dI_\nu$ después de atravesar un elemento delgado ds en la dirección de propagación, podemos escribir

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds, \quad (1.19)$$

donde ρ es la densidad del material. La cantidad κ_ν introducida de esta manera define al *coeficiente de absorción de masa* para la radiación de frecuencia ν . Pero no se puede concluir necesariamente que todo lápiz de radiación que atraviesa la materia está perdido para el campo total de radiación. Puede ser que la radiación que atraviesa el medio aparezca después en todas direcciones como radiación dispersada. En general se puede esperar que sólo una parte de la energía perdida en un haz incidente aparecerá como radiación

dispersada en otras direcciones y que la parte restante habrá sido 'realmente' absorbida en el sentido de que representa la transformación de la radiación en otras formas de energía (o aún de radiación a otras frecuencias). Por esto tendremos que distinguir entre absorción 'real' y dispersión.

Considerando primero el caso de dispersión, se dice que un material es caracterizado por un *coeficiente de dispersión de masa* κ_v , si de un haz incidente de radiación en un elemento de masa de sección transversal $d\sigma$ y grosor ds la energía dispersada es:

$$\kappa_v \rho ds \times I_v \cos \vartheta d\vartheta d\omega \quad (1.20)$$

en todas direcciones. Como la masa del elemento es

$$dm = \rho \cos \vartheta d\sigma ds, \quad (1.21)$$

se puede escribir

$$\kappa_v I_v dm d\vartheta d\omega \quad (1.22)$$

Para formular cuantitativamente el concepto de dispersión se debe especificar además la distribución angular de la radiación dispersada (1.22). Por lo tanto, se introducirá una *función fase* $p(\cos \Theta)$ tal que

$$\kappa_v I_v p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} dm d\vartheta d\omega \quad (1.23)$$

es la fracción de energía dispersada en un elemento de ángulo sólido $d\omega'$ y en una dirección inclinada a un ángulo Θ con respecto a la dirección de incidencia del haz de radiación en un elemento de masa dm . De acuerdo a (1.23) la fracción de energía perdida por el haz incidente debido a la dispersión en todas direcciones es

$$\kappa_v I_v dm d\vartheta d\omega \int p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi}; \quad (1.24)$$

esto coincide con (1.22) si

$$\int p(\cos \Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = 1, \quad (1.25)$$

esto es, si la función fase es normalizada a la unidad.

Regresando al caso general cuando ambas, la dispersión y la absorción real están presentes, aún se utilizará la expresión (1.23) para la energía dispersada. Pero en éste caso (en contraste con el caso de dispersión únicamente) la pérdida total de energía del lápiz incidente tendrá que ser menor a (1.22) de acuerdo con

$$\int p(\cos\Theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = \omega_0 \leq 1. \quad (1.26)$$

Entonces, el caso general y en el que solo ocurre dispersión, difieren únicamente por el hecho de que la función fase no está normalizada a la unidad.

De la definiciones hechas, resulta que ω_0 representa la fracción de la luz perdida del lápiz incidente debido a la dispersión, mientras que $(1-\omega_0)$ representa la fracción restante que ha sido transformada en otras formas de energía (o de radiación transformada a otras longitudes de onda).

De ahora en adelante, se entenderá que ω_0 es al *albedo debido a dispersión simple*. Más aún, cuando $\omega_0 = 1$ se dirá que se tiene el *caso conservativo o dispersión perfecta*: dispersión perfecta es, en el contexto presente, el análogo del caso conservativo en dinámica.

El ejemplo más simple de una función fase es

$$p(\cos\Theta) = \text{cte.} = \omega_0 \quad (1.27)$$

En éste caso la radiación dispersada por cada elemento de masa es *isotrópico*. Cercano al caso isotrópico se encuentra la *función fase de Rayleigh* la cual resulta de gran interés.

$$P(\cos\Theta) = 3/4 (1 + \cos^2\Theta) \quad (1.28)$$

Esta función fase es normalizada a la unidad, así que este es un ejemplo de un caso conservativo de dispersión perfecta. Otra función fase que es de particular interés en problemas relacionados a iluminación planetaria es

$$p(\cos\Theta) = \omega_0(1 + x \cos\Theta) \quad (-1 \leq x \leq +1). \quad (1.29)$$

En general se supondrá que la función fase puede ser expandida como una serie de polinomios de Legendre de la forma:

$$p(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l P_l(\cos\Theta), \quad (1.30)$$

donde las w_l son constantes. En la práctica las series en el lado derecho de la ecuación se manejan sólo con un número finito de términos.

El coeficiente de emisión.

El *coeficiente de emisión* j_ν , es definido de una manera tal que un elemento de masa dm emite en direcciones confinadas a un elemento de ángulo sólido $d\omega$, en el intervalo de frecuencia $(\nu, \nu+d\nu)$ y en un tiempo dt , una cantidad de energía radiante dada por

$$j_\nu dm d\omega dt d\nu \quad (1.31)$$

en el caso de un medio que dispersa radiación (no necesariamente no necesariamente con albedo igual a 1) habrá una contribución al coeficiente de emisión de la dispersión de radiación de todas las demás direcciones en el lápiz de radiación considerado. Por esto, se sigue de (1.26) que la dispersión de un lápiz de radiación de la dirección (θ', φ') contribuye a un lápiz de radiación en la dirección (θ, φ) una cantidad

$$\kappa_\nu d\Omega d\Omega' p(\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') I_\nu(\vartheta', \varphi') \frac{\text{sen } \vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{4\pi}, \quad (1.32)$$

donde hemos escrito $p(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ para denotar a la función fase para el ángulo entre las direcciones especificadas por (θ', φ') y (θ, φ) . Entonces, la contribución, $j_\nu^{(s)}$, al coeficiente de emisión debido únicamente al fenómeno de dispersión es

$$j_\nu^{(s)}(\vartheta, \varphi) = \kappa_\nu \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') I_\nu(\vartheta', \varphi') \text{sen } \vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \quad (1.33)$$

podemos esperar que en general habrá contribuciones al coeficiente de emisión por causas distintas a la dispersión. Cuando este no es el caso, se dice que tenemos una atmósfera dispersora.

En otras palabras, para una atmósfera dispersiva

$$j_\nu \equiv j_\nu^{(s)}. \quad (1.34)$$

Es necesario notar que el caso de una atmósfera dispersiva no necesariamente implica tener dispersión perfecta.

El caso que en cierto sentido es el opuesto a una atmósfera dispersiva es el de una atmósfera en equilibrio termodinámico. En éste último caso se asume que las circunstancias son tales que podemos definir en cada punto en la atmósfera una temperatura local T tal que el coeficiente de emisión en ése punto es dado en términos del coeficiente de absorción por medio de la ley de Kirchhoff: esto es, en cada punto tenemos la relación

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T), \quad (1.35)$$

donde

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1.36)$$

es la función de Planck (k y h son las constantes de Boltzmann y Planck respectivamente).

La Función Fuente

La razón del coeficiente de emisión al coeficiente de absorción juega un papel importante en los desarrollos subsecuentes de la teoría. Y se le conoce como *función fuente*. Se denotará por J_ν . Entonces

$$J_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (1.37)$$

De acuerdo con las ecuaciones (1.33) y (1.34), para una atmósfera dispersora

$$J_\nu(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi') I_\nu(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi', \quad (1.38)$$

mientras que para una atmósfera en equilibrio termodinámico local

$$J_\nu = B_\nu(T) \quad (1.39)$$

La Ecuación de Transferencia

Ahora derivaremos la ecuación fundamental que gobierna la variación de la intensidad en un medio caracterizado por un coeficiente de absorción y un coeficiente de emisión. (debe notarse que el coeficiente de emisión puede depender del campo de radiación como será el caso, por ejemplo, en una atmósfera dispersora.) Para éste propósito consideremos un elemento cilíndrico pequeño de sección transversal $d\sigma$ y altura ds en el medio. De la definición de intensidad, se sigue que la diferencia en la energía radiante en el intervalo de frecuencia $(\nu, \nu+d\nu)$ que atraviesa las dos caras perpendicularmente, en el tiempo dt y confinado a un elemento de ángulo sólido, es dado por

$$\frac{dI_\nu}{ds} ds d\nu d\sigma d\omega dt. \quad (1.40)$$

Esta diferencia en la energía debe surgir del exceso de emisión sobre la absorción en el intervalo de frecuencia y en el elemento de ángulo sólido considerado. Ahora la cantidad de energía absorbida es

$$\kappa_\nu \rho ds \times I_\nu d\nu d\sigma d\omega dt, \quad (1.41)$$

mientras que la cantidad emitida es

$$j_\nu \rho ds d\nu d\sigma d\omega dt. \quad (1.42)$$

Contando las ganancias y pérdidas del haz de radiación durante su camino por el cilindro, tenemos

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho. \quad (1.43)$$

En términos de la función fuente J_ν (ec. 1.37) podemos reescribir esta ecuación en la forma

$$-\frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho ds} = I_\nu - J_\nu. \quad (1.44)$$

Esta es la *ecuación de transferencia*.

Para una atmósfera dispersiva y una atmósfera en equilibrio termodinámico local las funciones fuente están dadas por las ecuaciones (1.38) y (1.39).

En un sistema cartesiano de coordenadas la ecuación de transferencia puede ser escrita en la forma

$$-\frac{1}{\kappa_\nu \rho} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) I_\nu(x, y, z, l, m, n) = I_\nu(x, y, z, l, m, n) - J_\nu(x, y, z, l, m, n). \quad (1.45)$$

como la función fuente es funcionalmente dependiente de la intensidad en cada punto, la ecuación de transferencia es generalmente una ecuación *integro-diferencial*.

La solución formal de la ecuación de transferencia.

En la discusión formal de éste y los capítulos subsecuentes es conveniente suprimir los subíndices ν a las diversas cantidades que se estén manejando sin que esto implique algún tipo de ambigüedad, por lo tanto, se escribirá la ecuación (1.47) en la forma:

$$-\frac{dI}{\kappa \rho ds} = I - J \quad (1.46)$$

La solución formal de la ecuación (1.49) es la siguiente:

$$I(s) = I(0) \exp[-\tau(s, 0)] + \int_0^s J(s') \exp[-\tau(s, s')] \kappa \rho ds', \quad (1.47)$$

donde $\tau(s, s')$ es la *profundidad óptica* del material entre el punto s y s' ; entonces

$$\tau(s, s') = \int_s^{s'} \kappa \rho ds. \quad (1.48)$$

El significado físico de la solución (1.47) es claro: expresa el hecho de que la intensidad en cualquier punto y en una dirección dada resulta de la emisión en todos los puntos anteriores, s' , reducida por el factor $\exp\{-\tau(s, s')\}$ consecuencia de la absorción por la materia en el medio.

La Ecuación de Transferencia en el caso plano paralelo

En problemas de transferencia radiativa para atmósferas plano paralelas es conveniente medir distancias lineales normales al plano de estratificación. Si z es esta distancia, la ecuación de transferencia se transforma en

$$-\cos \vartheta \frac{dI(z, \vartheta, \varphi)}{\kappa \rho dz} = I(z, \vartheta, \varphi) - J(z, \vartheta, \varphi). \quad (1.49)$$

donde θ denota la inclinación con la normal exterior y φ el ángulo azimutal referido a un eje elegido.

Se introducirá la *profundidad óptica normal*

$$\tau = \int_z^{\infty} \kappa \rho dz \quad (1.50)$$

medido desde la frontera interior tenemos, ref(1):

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \varphi) - J(\tau, \mu, \varphi). \quad (1.51)$$

En la ecuación (1.51) se introdujo la cantidad $\mu = \cos \theta$.

La ecuación (1.51) es la forma estándar de la ecuación de transferencia para atmósferas plano paralelas.

Considerando problemas de transferencia radiativa en atmósferas plano paralelas se podrán distinguir dos casos: (i) la atmósfera semi infinita que se encuentra delimitada por una frontera en $\tau \rightarrow 0$ y se extiende al infinito en la dirección $\tau \rightarrow \infty$, y (ii) la atmósfera finita que se encuentra limitada por dos fronteras en $\tau = 0$ y en $\tau = \tau_1$.

En el caso de una atmósfera con profundidad óptica finita la solución formal, (1.47) se reduce a

$$I(\tau, +\mu, \varphi) = I(\tau_1, \mu, \varphi) \exp[-(\tau - \tau_1)/\mu] + \int_{\tau_1}^{\tau} J(t, \mu, \varphi) \exp[-(t - \tau)/\mu] \frac{dt}{\mu} \quad (1 \geq \mu > 0), \quad (1.52)$$

y

$$I(\tau, -\mu, \varphi) = I(0, -\mu, \varphi) \exp(-\tau/\mu) + \int_0^{\tau} J(t, -\mu, \varphi) \exp[-(\tau - t)/\mu] \frac{dt}{\mu} \quad (1 \geq \mu > 0). \quad (1.53)$$

que dan respectivamente la intensidad ascendente y descendente en cada nivel. En particular para las intensidades ascendentes tenemos:

$$I(0, +\mu, \varphi) = I(\tau_1, \mu, \varphi) \exp(-\tau_1/\mu) + \int_0^{\tau_1} \exp(-t/\mu) J(t, +\mu, \varphi) \frac{dt}{\mu} \quad (1.54)$$

$$y \quad I(\tau_1, -\mu, \varphi) = I(0, -\mu, \varphi) \exp(-\tau_1/\mu) + \int_0^{\tau_1} \exp(-(\tau_1 - t)/\mu) J(t, -\mu, \varphi) \frac{dt}{\mu}. \quad (1.55)$$

En el caso de una atmósfera semi infinita las ecuaciones resultantes se reducen a

$$I(\tau, +\mu, \varphi) = \int_{\tau}^{\infty} J(t, +\mu, \varphi) \exp[-(t - \tau)/\mu] \frac{dt}{\mu}, \quad (1.56)$$

$$I(\tau, -\mu, \varphi) = I(0, -\mu, \varphi) \exp(-\tau/\mu) + \int_0^{\tau} J(t, -\mu, \varphi) \exp[-(\tau - t)/\mu] \frac{dt}{\mu}, \quad (1.57)$$

$$y \quad I(0, +\mu, \varphi) = \int_0^{\infty} J(t, +\mu, \varphi) \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu}. \quad (1.58)$$

Entonces para una atmósfera plano paralela la ecuación de transferencia puede ser escrita en la forma, ref.(1) :

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau; \mu, \varphi) - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'. \quad (1.59)$$

en casos conservativos ($\omega_0=1$) la ecuación (1.71) admite la integral de flujo

$$F = \text{constante.} \quad (1.60)$$

donde πF representa el flujo de radiación normal al plano de estratificación.

Conservación de la Energía

Sea el total de la energía dispersada en todas las direcciones igual a la energía de la onda incidente que llega al área C_{sca} . Por ésta definición y por la ecuación anterior tenemos:

$$C_{sca} = \frac{1}{k^2} \int F(\theta, \varphi) d\omega \quad (1.61)$$

donde $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ es el elemento del ángulo sólido y la integral se toma sobre todas las direcciones. Así mismo, la energía absorbida adentro de la partícula puede ser, por definición, ser puesta como igual a la energía incidente en el área C_{abs} , y la energía removida del haz original puede por definición ser igual a la energía incidente en el área C_{ext} . La ley de la conservación de la energía requiere que

$$C_{ext} = C_{sca} + C_{abs} \quad (1.62)$$

Las cantidades C_{ext} , C_{sca} , C_{abs} , son llamadas las secciones transversales de la partícula por extinción, dispersión, y absorción, respectivamente. Tienen dimensiones de área. Generalmente, son funciones de la orientación de la partícula y del estado de polarización de la luz incidente.

Las partículas no absorbentes tienen los factores $C_{ext} = C_{sca}$. Esta última a veces será denotada como C sin el sufijo.

Factores de Eficiencia

Muchas partículas tienen una sección geométrica transversal G . Una esfera de radio a tiene, por ejemplo, $G = \pi a^2$. Las constantes adimensionales

$$\begin{aligned} Q_{ext} &= C_{ext}/G \\ Q_{sca} &= C_{sca}/G \\ Q_{abs} &= C_{abs}/G \\ Q_{pr} &= C_{pr}/G \end{aligned} \quad (1.63)$$

serán llamados los factores de eficiencia por extinción, dispersión, absorción y presión de radiación, respectivamente. Para la gran mayoría de las partículas estos factores dependen de la orientación de la partícula y del estado de polarización de la luz incidente. Para las esferas son independientes de ambos.

En todos los casos se tiene

$$Q_{ext} = Q_{sca} + Q_{abs} \quad (1.64)$$

Dispersión de la Radiación Solar Directa.

Cuando una onda electromagnética incide a una partícula, una parte de la energía incidente es dispersada en todas direcciones. Esta energía dispersada es llamada radiación difusa. La energía dispersada por partículas esféricas puede ser obtenida teóricamente a partir de la ecuación de onda de Maxwell en coordenadas esféricas. Todas las partículas en la naturaleza dispersan radiación, desde un electrón hasta un planeta. Una solución particularmente simple se obtiene cuando la partícula es esférica y mucho más pequeña que la longitud de onda de la radiación incidente. Esta solución fue derivada en el siglo XIX por Lord Rayleigh . La teoría que desarrolla para llegar a la solución es particularmente útil en el estudio de la dispersión de la radiación solar por moléculas de aire. Rayleigh explicó, el porqué del color azul del cielo bajo condiciones de cielo extremadamente despejado.

Cuando los tamaños de las partículas son del orden de la longitud de onda de la radiación incidente, la solución de la ecuación de onda se vuelve muy compleja. Esta solución fue encontrada primero a principios de siglo por Gustav Mie y en su honor es llamada teoría de Mie. La solución de Rayleigh es un caso particular de la teoría de Mie.

Para el tratamiento matemático, es conveniente expresar el tamaño de la partícula dispersora como $x = 2\pi r / \lambda$, donde r es el radio de la partícula. Sea m el índice de refracción y λ la longitud de onda en micrómetros. Se considerará que:

- (1) cuando $2\pi r / \lambda < 0.6 / m$, la dispersión es regida por la teoría de Rayleigh , en una atmósfera sin nubes y una moléculas de aire, muchas de las cuales tendrán un tamaño ≈ 1 Angströms ;
- (2) cuando $2\pi r / \lambda > 5$, la dispersión es principalmente un proceso de reflexión difusa que pocas veces ocurre en la atmósfera; y se aplica a la dispersión por partículas cuyo tamaño es mayor que los 10 Angströms, como los aerosoles.

La figura 1.4 muestra la diferencia entre los dos modos de dispersión, de Mie y de Rayleigh. En el caso de Rayleigh, el proceso de dispersión es idéntico tanto hacia delante como hacia atrás de la partícula dispersora. Y está mínimo a 90° de la línea de incidencia. Las dispersiones muy grandes ocurren cuando la radiación incidente es de muy pequeña longitud de onda. En la dispersión de Mie, hay una mayor cantidad de energía dispersada hacia atrás de la partícula. Si el tamaño de la partícula se incrementa, también la dispersión en ésta dirección, y la sombra de la esfera es alterada. La radiación dispersada por una

partícula choca con otra en el medio, y éste proceso, llamado dispersión múltiple, continúa en la atmósfera .

Aerosoles

Un aerosol es una partícula líquida o sólida que permanece suspendida en el aire y sigue el movimiento del aire hasta ciertos límites. La lluvia, nieve y el granizo no son aerosoles. Sin embargo, las moléculas coaguladas de vapor de agua que siguen el movimiento del aire son consideradas aerosoles. En contraste con las moléculas de los gases permanentes de la atmósfera, las partículas suspendidas en ella observan una gran diversidad en su volumen, tamaño, distribución, forma, y material que las componen. Estas partículas también de origen terrestre; derivadas por ejemplo, de humo industrial, polen, erupciones volcánicas, polvo meteórico, tormentas de arena, incendios forestales, y quemas de la agricultura o de origen marino: cristales de sal, rocío oceánico. El agua y las partículas de hielo suspendidas en la niebla y en las nubes caen en la línea de definición de los aerosoles.

El rango natural de las partículas de aerosol para su radio es de 10^{-3} a 10^2 μm , las partículas muy pequeñas son llamadas partículas de Aitken y van de 10^{-3} a 10^{-1} μm ; y las partículas grandes de 0.1 a 1 μm . Las partículas en el rango de los 1 - 100 μm son llamadas partículas gigantes. La cantidad de aerosoles en la atmósfera es especificada algunas veces en términos del número de partículas por centímetro cúbico. El número de partículas de polvo es usualmente mayor sobre la tierra que sobre el agua y mayor en las estaciones secas. También el número de partículas de polvo es menor en *los polos y el aire ártico y mayor en el aire tropical*.

Una atmósfera que contiene aerosoles también es llamada turbia o brumosa . Una propiedad de una atmósfera cargada de aerosoles que merma la radiación solar directa es llamada atmósfera turbia. La turbidez es un parámetro óptico y puede ser estrechamente relacionado con la visibilidad horizontal, que en sí mismo, es un parámetro subjetivo. En una atmósfera limpia y seca, aproximadamente la mitad de la energía dispersada regresa al espacio y la otra mitad llega al suelo como radiación difusa. En una atmósfera que contiene partículas de polvo, es mayor la cantidad de energía dispersada que llega al suelo porque es mayor la dispersión en la dirección delantera o posterior de la partícula . Las formulaciones matemáticas ligadas con la dispersión por una sola partícula y dispersión por varias inmersas en cierto medio han sido bien desarrolladas en la literatura . A lo largo de los siguientes capítulos se profundizará en el análisis y estudio de las propiedades de las funciones fase de Mie y Rayleigh, así como en el modelo atmosférico que ocupa el presenta trabajo.

Capítulo 2

Dispersión de Rayleigh

Las partículas a tratar en éste capítulo pueden tener formas arbitrarias y serán pequeñas comparadas con la longitud de onda dentro y fuera de la partícula, como será especificado.

Polarización y Dispersión de Rayleigh

Si la Polarización es un Tensor

La simplificación introducida por el tamaño pequeño es que la partícula puede ser considerada como colocada en un campo eléctrico externo homogéneo \mathbf{E}_0 , que será llamado el campo aplicado. El campo propio de la partícula causado por la polarización eléctrica de la misma, modifica a éste campo dentro y en las cercanías de la partícula. El campo combinado será denotado por \mathbf{E} . Sea \mathbf{p} el momento dipolar inducido; entonces se tiene la fórmula electrostática,

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0, \quad (2.1)$$

que es aplicable: esta relación define a α la polarización de la partícula. Como las dimensiones de \mathbf{E} son carga por unidad de área y las dimensiones de \mathbf{p} son carga por longitud, α tiene las dimensiones del volumen. En el caso de cuerpos homogéneos con volumen V , también se introducirá a α' , el promedio de la polarización volumétrica, por $\alpha = \alpha' V$. La cantidad α' es adimensional.

En general, α es un tensor. Esto significa que las direcciones de \mathbf{p} y \mathbf{E}_0 coinciden sólo si el campo es aplicado en una de las tres direcciones mutuamente perpendiculares. Sean éstas direcciones denotadas por los vectores unitarios \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , y \mathbf{n}_3 . La partícula estará entonces caracterizada por las tres componentes del tensor α_1, α_2 , y α_3 de tal modo que cualquier campo externo

$$\mathbf{E}_0 = E_1 \mathbf{n}_1 + E_2 \mathbf{n}_2 + E_3 \mathbf{n}_3 \quad (2.2)$$

dará un momento dipolar

$$\mathbf{p} = \alpha_1 E_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 E_2 \mathbf{n}_2 + \alpha_3 E_3 \mathbf{n}_3. \quad (2.3)$$

Estas fórmulas conocidas de la teoría electrostática, continúan sin cambio si el campo aplicado es periódico y correspondiente a una onda plana polarizada:

$$\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t); \quad (2.4)$$

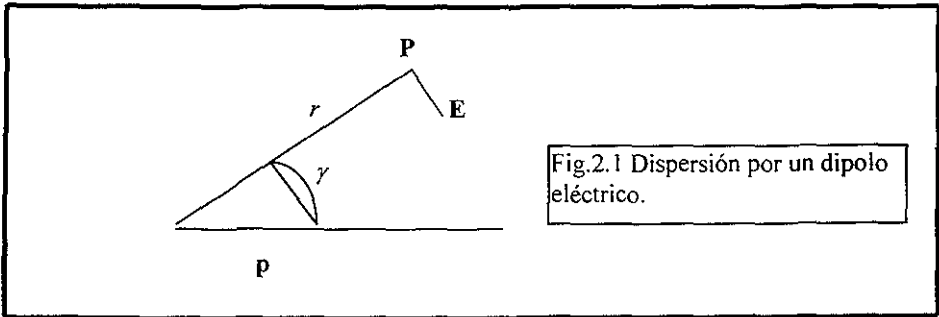
El momento dipolar inducido es entonces

$$\mathbf{p} \exp(i\omega t). \quad (2.5)$$

La componente del tensor de polarización puede ser compleja y puede depender de ω . El dipolo oscilante radia en todas las direcciones. Este es el tipo de dispersión llamada *dispersión de Rayleigh*. Sea un punto P a una distancia $r \gg \lambda$ de la partícula y en una dirección que hace un ángulo γ con \mathbf{p} . El campo eléctrico de la onda dispersada

$$E = \frac{k^2 p \sin \gamma}{r} \exp(-ikr) \quad (2.6)$$

veces el vector unitario dirigido como la componente de \mathbf{p} perpendicular al radio vector.



Las intensidades correspondientes de las radiaciones incidente y dispersada son (para unidades gaussianas, y tiempo promedio del vector de Poynting):

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2, \quad I = \frac{c}{8\pi} |E|^2. \quad (2.7)$$

Integrando a I sobre una esfera grande se encuentra que la energía total dispersada en todas las direcciones por unidad de tiempo es

$$W = \frac{1}{3} k^4 c |p|^2, \quad (2.8)$$

y dividiendo esto por I_0 se obtiene la sección transversal de dispersión

$$C_{sca} = \frac{8}{3} \pi k^4 |\alpha|^2 \quad (2.9)$$

donde $|\alpha|^2$ está definida por

$$|\alpha|^2 = l^2 |\alpha_1|^2 + m^2 |\alpha_2|^2 + n^2 |\alpha_3|^2 \quad (2.10)$$

y l, m, n son los cosenos directores de \mathbf{E}_0 con respecto a los tres ejes principales del tensor de polarización.

El valor de $|\alpha|$ es determinado por la orientación de \mathbf{E}_0 con respecto a la partícula; la dirección de propagación de la luz incidente es irrelevante. Por otro lado, la distribución angular de la luz dispersada es determinada por el ángulo con \mathbf{p} . La intensidad dispersada es 0 en la dirección de \mathbf{p} pero puede tener un valor distinto de 0 en la dirección de \mathbf{E}_0 . La fórmula para la intensidad en el caso más general, en el que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ no son iguales y en el que la luz incidente está elípticamente polarizada o es luz natural, está implícita en la derivación para partículas orientadas al azar.

Antes de continuar con esta sección, se introducirá la definición de la función de amplitud compleja para una onda dispersada.

Función de amplitud para una sola partícula

Sea una partícula de forma y composición arbitraria iluminada por una onda plana escalar de extensión infinita que llega de la dirección z negativa. El origen de coordenadas se elige fijo en la partícula. La perturbación en la onda incidente puede ser escrita como, ver ref. (17):

$$u_0 = e^{-ikz + i\omega t} \quad (2.11)$$

donde u representa cualquier componente del campo eléctrico o magnético. La onda dispersada en I región lejana es esférica, la onda exterior tiene amplitud inversamente proporcional a la distancia r . Se puede escribir en la forma, ver ref. (17) :

$$u = S(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr + i\omega t}}{ikr} \quad (2.12)$$

definiendo lo que es la *función de amplitud* $S(\theta, \varphi)$ de la partícula dispersora. El factor ik en el denominador es añadido para hacer esta función adimensional. Combinando las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$u = S(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr + ikz}}{ikr} u_0 \quad (2.13)$$

La función de amplitud es en general compleja, y puede ser escrita como ver ref. (17):

$$S(\theta, \varphi) = s \cdot e^{i\sigma} \quad (2.14)$$

donde s es positiva y σ real, y ambas son funciones de los ángulos.

Si la Polarización es Isotrópica

La situación se vuelve más simple en el caso común de que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \equiv \alpha$. En éstas circunstancias, las direcciones de \mathbf{p} y \mathbf{E}_0 siempre coinciden, y en la fórmula precedente α puede ser considerado un escalar. El ángulo γ es entonces el ángulo de una dirección de dispersión con \mathbf{E}_0 . Si θ es el ángulo de dispersión como antes, la componente perpendicular (componente r) tiene $\gamma = 90^\circ$, la componente paralela (componente l) tiene $\gamma = 90^\circ - \theta$. Así que el campo dispersado será obtenido por el tensor de dispersión:

$$\begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} = ik^3 \alpha \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Se puede ir directamente a las intensidades y encontrar, por ejemplo, para la luz natural incidente con intensidad I_0 la intensidad dispersada

$$I = \frac{(1 + \cos^2 \theta) k^4 |\alpha|^2}{2r^3} I_0 \quad (2.12)$$

El término 1 viene de $S_1(\theta)$ y corresponde a la componente r (vector eléctrico perpendicular al plano de dispersión), y el término $\cos^2\theta$ viene de $S_2(\theta)$ y corresponde a la componente l de la luz dispersada (vector eléctrico paralelo).

La figura 2 ilustra ésta fórmula por medio de un diagrama de dispersión conocido. La línea sólida denota la intensidad total, las líneas punteadas las intensidades de las componentes polarizadas; la luz dispersada a 90° es completamente polarizada en la dirección r . Este diagrama es comúnmente conocido como diagrama de dispersión de Rayleigh, debe notarse que sólo es válido si la luz incidente es natural y la partícula isotrópica (α escalar). Para partículas anisotrópicas la dispersión a 90° no se encuentra completamente polarizada.

Determinación del Tamaño y el Número

Si se considera un medio consistente de pequeños dispersores y absorbedores, y si se escribe el índice complejo de refracción del medio como, ver ref. (17):

$$\tilde{m} = \tilde{n} - i\tilde{n}', \quad (2.15)$$

el efecto de extinción está expresado por \tilde{n}' . La parte real del índice de refracción \tilde{n} (que es lo mismo que \tilde{m} para partículas no absorbedoras) es igual de importante. Si se hace la suposición de que α sea real se tiene que

$$\tilde{n} = 1 + 2\pi\alpha N. \quad (2.16)$$

En éste punto es necesario hacer un comentario. El diagrama de dispersión es similar para todas las partículas con tamaños $\ll \lambda$. Así que no es posible inferir el tamaño exacto de las partículas a partir del diagrama de dispersión. La intensidad de la luz dispersada es proporcional al número (desconocido) de partículas por cm^3 , N , por esto es insuficiente en sí mismo para determinar el tamaño de las partículas.

Pero es posible combinar dos efectos. Las medidas de la dispersión (de 0 a 90° o integrado para todos los ángulos) dan la cantidad $N\alpha^2$. Las medidas del índice de refracción del medio dan la cantidad $N\alpha$. Entonces es posible encontrar N y α por separado. El problema puede ser resuelto, para una N conocida y para la densidad del medio se puede encontrar la masa de una partícula. O si está dada α y la composición de cada partícula, se puede encontrar el volumen, al cual α , es en general proporcional.

El principio establecido arriba es la base de un buen número de aplicaciones prácticas. Ha sido aplicado durante mucho tiempo para determinar el número de Avogadro a partir de la luz dispersada por un gas ideal de índice de refracción conocido. También ha sido utilizado para encontrar el peso molecular de polímeros grandes y moléculas simples.

Es necesario notar en el presente contexto, que es posible aplicar métodos similares con la misma exactitud en cualquier medio compuesto por partículas sólidas pequeñas, si la longitud de onda es suficientemente pequeña con su tamaño. Como α es proporcional al volumen V de cada partícula, el índice de refracción n depende (en ésta aproximación) sólo de la concentración volumétrica NV , independientemente del tamaño de las partículas.

Condiciones para la dispersión de Rayleigh; Partículas pequeñas

con $m \rightarrow \infty$

Muchas veces se ha introducido la condición de que el campo externo sea considerado homogéneo:

$$(a) \text{ tamaño } \ll \lambda / 2\pi \quad [\text{esfera } x \ll 1].$$

Sin embargo, es necesario introducir una segunda condición para la dispersión de Rayleigh. El campo externo debe penetrar muy rápido en el interior de la partícula para que la polarización estática sea establecida en un tiempo corto comparado con el período del campo. La velocidad adentro de la partícula es c/m . Así que la siguiente condición es:

$$(b) |m| \cdot \text{tamaño} \ll \lambda / 2\pi \quad [\text{esfera } |mx| \ll 1].$$

Como la longitud de onda adentro de la partícula es λ/m , es posible expresar la condición anterior de la siguiente forma: El tamaño debe ser pequeño comparado con la longitud de onda adentro de la partícula. Si (a) se cumple y (b) no, se tratará de la región de "resonancia". Aquí el campo interior no está en fase con el campo externo. Las ondas penetrarán despacio en la partícula y pueden dar lugar a varios sistemas de ondas estacionarias. Además de la radiación del dipolo eléctrico también se tiene radiación magnética por dipolo, cuadrupolo, etc.; cada uno de ellos entrará en resonancia para valores bien definidos de la razón del tamaño a la longitud de onda. Esta resonancia está conectada con los modos propios de vibración de la partícula.

Si $|m|$ es muy grande, el opuesto a (b) puede ser cierto con la condición de que (a) siga cumpliéndose. Esto significa que el campo difícilmente penetrará del todo en la partícula. La razón se debe más comúnmente a una conductividad grande comparada con la profundidad de la "piel" en relación al radio.

En el límite de $m = \infty$ el cuerpo es un conductor perfecto y el campo interno es 0. Esta condición es elegida como ejemplo práctico por su simplicidad. Pero las partículas perfectamente conductoras y pequeñas no son representativas de las partículas pequeñas que forman parte de éste estudio.

Capítulo 3

Dispersión de Mie

Las partículas más grandes que la longitud de onda de la radiación incidente requieren de un tratamiento muy distinto de aquél para partículas pequeñas. El hecho fundamental es que el haz incidente de luz, el cual forma un frente de onda plano de extensión infinita, puede ser visto de tal manera que consiste de haces separados de luz que siguen su propia trayectoria. Se puede pensar que una pequeña parte del frente puede ser visto como un haz definido de cierta longitud independiente de todo el frente de onda. Una longitud l requiere un ancho del orden de $\sqrt{\lambda l}$, y el requerimiento para considerar una existencia separada de las partículas es un ancho $\gg \lambda$. Para una partícula de tamaño 20 o más veces la longitud de onda es posible distinguir claramente entre los haces incidentes en la partícula y los que pasan a través de ella. Además es posible distinguir entre varios haces que inciden en diferentes partes de la superficie de la partícula. Tales haces se dicen ser localizados.

La contraparte experimental de la noción de localización es que es posible colocar una pantalla en el haz incidente de luz con un agujero en una posición tal que una parte específica de la partícula es expuesta a ésta luz. La confirmación formal del principio de localización es la solución exacta del problema de la dispersión para una esfera o cilindro encontrada en sus formas asintóticas.

Los haces que inciden en la partícula y que pasan a través de ella dan lugar a dos fenómenos distintos, ambos se manejarán dentro del término dispersión.

I. Reflexión y refracción. Los haces que inciden en la superficie de la partícula son parcialmente reflejados y parcialmente refractados. La luz refractada puede emerger después de otra refracción, posiblemente después de varias reflexiones internas. Así que la luz emerge, y la luz directamente reflejada de la superficie exterior contribuyen a la dispersión total causada por la partícula. La energía que no emerge es perdida en absorción dentro de la partícula. Las cantidades de energía absorbida y dispersada y la distribución angular junto con la polarización de la luz dispersada dependen directamente de la forma y composición de la partícula y de la condición de su superficie.

La reflexión puede ser especular o difusa. La teoría de la reflexión difusa no será discutida aquí. Es suficiente recordar que cada porción de una superficie reflectora y difusora tiene que consistir de un sistema que sigue las leyes de la óptica ondulatoria. El efecto estadístico de la reflexión angular contra las caras da lugar al efecto observado como reflexión difusa. Sólo un área superficial que excede con mucho a la longitud de onda puede exhibir reflexión difusa. Por esa razón ese concepto sólo aparece en este capítulo.

II. Difracción. Los haces que pasan a través de la partícula forman un frente de onda plano del cual una parte, en la forma y tamaño de la sombra geométrica de la partícula, es perdido. Este frente de onda incompleto da lugar, por el principio de Huygens a una cierta distribución angular de la intensidad (a distancias muy grandes), al patrón de difracción de Fraunhofer. Además, el término difracción es usado en toda la gama de procesos de dispersión. La distribución en este patrón de difracción depende de la forma y tamaño de la partícula pero es independiente de su composición o de la naturaleza de su superficie. La

luz difractada tiene el mismo estado de polarización que la luz incidente, y el patrón de difracción generado es independiente de ésta polarización.

Las dos partes antes descritas son distintas no sólo en su dependencia de la naturaleza de la partícula sino también en la distribución angular de la luz dispersada. Sea el tamaño de la partícula fijo y la longitud de onda de la luz decreciente gradualmente. El patrón de dispersión debido a la reflexión y refracción de haces que pueden ser más agudamente localizados hasta que eventualmente aproximan el patrón al que surge de la óptica geométrica. Al mismo tiempo, el patrón de difracción será más y más comprimido en un lóbulo angosto e intenso alrededor de la dirección frontal, $\theta = 0$. De hecho, la separación descrita en ésta sección es estrictamente posible sólo si la partícula es muy grande, i.e., si su lóbulo es muy estrecho. El patrón entero en éste límite consiste de dos partes: un lóbulo central muy intenso y estrecho debido a la difracción y una radiación menos intensa en todas las direcciones que dependerá de la propiedades ópticas de la partícula.

Si inversamente, hacemos que la longitud de onda se incremente, finalmente llegaremos a un estado donde los dos patrones son comparables en extensión angular. Esto significa generalmente que la teoría para partículas grandes necesita de métodos más rigurosos para resolver el problema. Una excepción la forman las partículas con índice de refracción cercano a 1. Tienen un rango de tamaños donde los dos patrones existen lado a lado con intensidad comparable y combinada por interferencia óptica (= adición de amplitudes).

Todos los problemas de la óptica teórica son problemas de la teoría de Maxwell y tienen que ser tratados como una solución formal del mismo. La dispersión de la luz por una esfera homogénea no puede ser tratada en forma general, sino como una solución formal con las condiciones de frontera apropiadas.

Las ecuaciones de Maxwell a tratar son

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{I}}{c} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$

$$\text{y} \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (3.2)$$

El significado de estos símbolos es : t = tiempo, c = velocidad de la luz, \mathbf{H} = magnitud de la fuerza magnética, \mathbf{E} = magnitud de la fuerza eléctrica, \mathbf{D} = desplazamiento dieléctrico, \mathbf{I} = densidad de corriente, ϵ = constante dieléctrica, σ = conductividad. La permeabilidad magnética (μ) ha sido puesta como 1, porque resulta conveniente para las aplicaciones que van a considerar. Si μ no es 1 aparecerá en todas las fórmulas como un segundo parámetro además del índice de refracción m , definido abajo.

La tercer ecuación independiente expresa la conservación de la carga:

$$\operatorname{div}\mathbf{I} + \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (3.3)$$

donde ρ es la densidad de carga.

Tomando la divergencia en ambos lados de la ecuación (3.1) se obtiene:

$$4\pi\operatorname{div}\mathbf{I} + \frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \quad (3.4)$$

y cuando se combina con la ecuación (3.3):

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3.5)$$

lo cual se supone correcto en un tiempo particular. De la misma manera, la divergencia de la ecuación (3.2) da:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (3.6)$$

En las siguientes secciones se encontrarán las formas de estas ecuaciones para las condiciones particulares que son de interés.

Campos Periódicos

Ahora se considerará un fenómeno periódico con una frecuencia circular ω . Resulta ventajoso escribir todas las cantidades como funciones complejas del tiempo en la forma:

$$A = (\alpha + i\beta)\exp(i\omega t), \quad (3.7)$$

donde se sobreentiende que la cantidad física representada por A es el valor real $\operatorname{Re}(A)$. Con esta periodicidad, las ecuaciones de Maxwell asumen formas más simples

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = ikm^2\mathbf{E} \quad (3.8)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik\mathbf{H} \quad (3.9)$$

$$\text{donde } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad m^2 = \epsilon - \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$$

Ambos k y m son parámetros extremadamente importantes: k es la constante de propagación (= al número de onda) en el vacío. La longitud de onda en el vacío, λ , es

igual a $\lambda=2\pi/k$; . El parámetro m es el índice de refracción complejo del medio en la frecuencia ω .

La divergencia de la ecuación (3.8) , en correspondencia con la ecuación (3.4),

$$\operatorname{div}(m^2 \mathbf{E}) = 0 \quad (3.10)$$

En un medio homogéneo, donde $m = \text{constante}$, la divergencia de \mathbf{E} desaparece, así que, por la ecuación (3.5) la densidad de carga ρ es cero. Otro resultado que es consecuencia de las condiciones de los medios homogéneos en las ecuaciones (3.8) y (3.9) , es que cualquier componente perpendicular de \mathbf{E} y \mathbf{H} satisface la ecuación de onda escalar

$$\Delta\varphi = -k^2 m^2 \varphi . \quad (3.11)$$

El tipo de solución más simple correspondiente a una onda plana. Una onda plana viajando en la dirección positiva del eje z tiene la forma

$$\varphi = \exp(ikmz + i\omega t) \quad (3.12)$$

Esto muestra que km es la constante de propagación en el medio con índice de refracción m . Esta onda se encuentra amortiguada si el índice de refracción tiene una parte imaginaria distinta de cero, y es no amortiguada si el índice de refracción es real en su totalidad. En el caso anterior λ/m es la longitud de onda dentro del medio.

Condiciones de Frontera

Se considerará una frontera definida entre dos medios homogéneos. Sea el medio 1 con los valores $\epsilon_1, \sigma_1, m_1$, y el medio 2 con los valores $\epsilon_2, \sigma_2, m_2$. Ambos índices de refracción se asumen finitos. Sea \mathbf{n} normal a la superficie de la frontera en el medio 2 . Las ecuaciones (3.8) y (3.14) cambian por el proceso de límite en las condiciones de las superficies de frontera para las componentes tangenciales:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3.14)$$

Correspondiendo a las ecuaciones (3.4) y (3.6) se tienen las condiciones de frontera para las componentes normales a la superficie:

$$\mathbf{n} \cdot (m_2^2 \mathbf{E}_2 - m_1^2 \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (3.16)$$

Así como las ecuaciones (3.4) y (3.6), estas dos últimas tampoco son independientes. Pueden ser derivadas de las ecuaciones (3.8) y (3.9) válidas en el medio en todos los casos combinadas con las ecuaciones (3.13) y (3.14) válidas en la frontera.

El conjunto de ecuaciones puede ser completado introduciendo la densidad de carga superficial δ . Las cargas de la superficie serán suministradas y llevadas por la componentes normales de las densidades de corriente en el medio.

Como la forma de la frontera de la ecuación (3.3) expresa la conservación de la carga en el medio, encontramos:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + \frac{d\delta}{dt} = 0. \quad (3.17)$$

Combinada con la ecuación (3.15), esta ecuación da, en correspondencia con la ecuación (3.5),

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = 4\pi\delta \quad (3.18)$$

Aquí no hay corrientes superficiales; solo si m_1 o m_2 son infinitos podrían existir. Las cargas superficiales serán cero si m_1 y m_2 son reales, i.e., en las condiciones entre dos dieléctricos. Como solo se están considerando fenómenos periódicos, este hecho se refiere a que periódicamente la carga esta cambiando.

Solución Formal de Mie

Solución de la ecuación de Onda vectorial

Las coordenadas esféricas del punto P se denotarán por (r, θ, φ) sobreentendiendo el significado usual de estos símbolos. El vector OP, tiene coordenadas rectangulares (x, y, z) , o

$$r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta, \quad (3.19)$$

y será denotado por \mathbf{r} .

La ecuación escalar de onda

$$\Delta\varphi + k^2 m^2 \varphi = 0 \quad (3.20)$$

es separable en éstas coordenadas y tiene soluciones elementales del siguiente tipo:

$$\varphi_n = \left. \begin{matrix} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{matrix} \right\} P_n^l(\cos\theta) z_n(mkr). \quad (3.21)$$

Aquí n y l son enteros:

$$n \geq l \geq 0;$$

el primer factor puede ser un seno o un coseno; el segundo factor es un polinomio asociado de Legendre; el tercer factor puede ser cualquier función esférica de Bessel, definida por

$$z_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (3.22)$$

en términos de las funciones ordinarias de Bessel. La solución general de la ecuación de onda escalar es una combinación lineal de tales soluciones elementales.

los vectores del campo \mathbf{E} y \mathbf{H} en un medio homogéneo satisfacen la ecuación vectorial de onda

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 m^2 \mathbf{A} = 0. \quad (3.23)$$

Las soluciones elementales de esta ecuación pueden ser encontradas del siguiente teorema, que se establecerá sin demostrarlo. Si φ satisface la ecuación de onda escalar, los vectores \mathbf{M}_φ y \mathbf{N}_φ definidos por

$$\mathbf{M}_\varphi = \text{rot}(r\varphi), \quad (3.24)$$

$$mk \mathbf{N}_\varphi = \text{rot} \mathbf{M}_\varphi, \quad (3.25)$$

satisfacen la ecuación de onda vectorial y además pueden ser relacionados por medio de

$$mk \mathbf{M}_\varphi = \text{rot} \mathbf{N}_\varphi, \quad (3.26)$$

Una sustitución simple muestra que, si u y v son dos soluciones de la ecuación de onda escalar y

$\mathbf{M}_u, \mathbf{N}_u, \mathbf{M}_v, \mathbf{N}_v$ son las derivadas de los vectores del campo, las ecuaciones de Maxwell (3.8) y (3.9) serán satisfechas por

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{M}_v + i\mathbf{N}_u \\ \mathbf{H} &= m(-\mathbf{M}_u + i\mathbf{N}_v) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Las componentes completas de \mathbf{M}_φ y \mathbf{N}_φ son

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r &= 0, & mk\mathbf{N}_r &= \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} + m^2 k^2 r\varphi, \\ \mathbf{M}_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial \theta}, & mk\mathbf{N}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r \partial \theta}, \\ \mathbf{M}_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial \varphi}, & mk\mathbf{N}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H} pueden, por lo tanto, ser escritas en términos de las soluciones escalares u y v y sus primeras y segundas derivadas, aunque esto no es necesario para este trabajo

Solución de los coeficientes a partir de las condiciones a la frontera

Ahora se regresará al problema de Mie: la dispersión de una onda plana por una esfera homogénea. Para simplificar la notación se asumirá que el medio externo es el vacío ($m_2 = 1$), y el material de la esfera tendrá un índice de refracción arbitrario m . Se asumirá que la radiación incidente está linealmente polarizada. El origen será tomado en el centro de la esfera, el eje z positivo a lo largo de la dirección de propagación de la onda incidente, y el eje x en el plano de las vibraciones eléctricas de la onda incidente. La onda incidente (de amplitud 1) puede ser descrita entonces por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}_x \exp(-ikz + i\omega t), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{a}_y \exp(-ikz + i\omega t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde \mathbf{a}_x y \mathbf{a}_y son vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y .

Puede probarse (pero se omitirá la derivación) que los mismos campos son escritos en la forma postulada en la sección anterior eligiendo para u y v las siguientes funciones.

Onda incidente exterior:

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega t} \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) j_n(kr), \\ v &= e^{i\omega t} \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) j_n(kr), \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde j_n es la función de Bessel esférica derivada de la función de Bessel del primer tipo, $J_{n+1/2}$.

Esta forma de la onda incidente establece también la forma para la solución completa. El campo exterior consiste de la onda incidente más de la onda dispersada. De considerar las condiciones de frontera y las condiciones que deben satisfacerse en infinito se encuentra que la siguiente consideración es lo suficientemente general.

Onda exterior dispersada :

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega t} \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} -a_n (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) h_n^{(2)}(kr), \\ v &= e^{i\omega t} \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} -b_n (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^1(\cos\theta) h_n^{(2)}(kr). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Estas series contienen soluciones elementales con $l=1$ únicamente, al igual que las series para la onda incidente; a_n y b_n son coeficientes que tendrán que ser determinados. La función esférica de Bessel $h_n^{(2)}(kr)$ se deriva de la función de Bessel del segundo tipo $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$ y ha sido elegida por su comportamiento asintótico,

$$h_n^{(2)}(kr) \approx \frac{i^{n+1}}{kr} \exp(-ikr), \quad (3.32)$$

donde al combinarse con el factor $\exp(i\omega t)$, representa a una onda esférica externa, como se requiere para la onda dispersada.

Del mismo modo, el campo adentro de la esfera puede ser representado por *Onda interior:*

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega t} \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} m c_n (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P'_n(\cos\theta) j_n(mkr), \\ v &= e^{i\omega t} \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} m d_n (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} P'_n(\cos\theta) j_n(mkr). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aquí c_n y d_n son otro par de coeficientes indeterminados, y la elección de $j_n(mkr)$ está basada en los hechos de que el índice de refracción es m y los campos son finitos en el origen.

Se usarán las condiciones de frontera ya especificadas en la sección anterior en orden para encontrar los coeficientes indeterminados. Por otro lado, de los factores $\cos\varphi$ y $\sin\varphi$ que son los mismos para las ondas interior y exterior a la esfera, las componentes del campo \mathbf{E}_θ y \mathbf{E}_φ contienen a las expresiones

$$v \quad \text{y} \quad \frac{1}{m} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \quad (3.34)$$

Las componentes \mathbf{H}_θ y \mathbf{H}_φ contienen a

$$mu \quad \text{y} \quad \frac{\partial(rv)}{\partial r}. \quad (3.35)$$

Estas cuatro expresiones tienen que tener valores iguales en una u otro lado de la superficie de frontera, $r=a$ donde a es el radio de la esfera.

Las notaciones son simplificadas al introducir un nuevo conjunto de funciones que difieren de las funciones esféricas de Bessel por un factor adicional z :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(z) &= z j_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = S_n(z). \\
\chi_n(z) &= -z n_n(z) = -\left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} N_{n+\frac{1}{2}}(z) = C_n(z), \\
\zeta_n(z) &= z h_n^{(2)}(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Estas son las funciones de Ricatti-Bessel. La notación , se usará la notación φ_n , χ_n , y ζ_n , introducida en 1909 por Debye. En virtud de que

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z) \tag{3.37}$$

se tiene que

$$x = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad y = mka$$

El parámetro x , el cual es igual a la razón de la circunferencia de la esfera a la longitud de onda, es el parámetro más importante aquí y en los siguientes capítulos.

Con estas notaciones las condiciones de frontera, expresadas por la continuidad de las cuatro funciones en los paréntesis, asumen las formas:

$$\begin{aligned}
[mu]: \quad & \varphi_n(x) - a_n \zeta_n(x) = m c_n \varphi_n(y), \\
\left[\frac{1}{m} \frac{\partial(ru)}{\partial r}\right]: \quad & \varphi_n'(x) - a_n \zeta_n'(x) = c_n \varphi_n'(y), \\
[v]: \quad & \varphi_n(x) - b_n \zeta_n(x) = d_n \varphi_n(y), \\
\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right]: \quad & \varphi_n'(x) - b_n \zeta_n'(x) = m d_n \varphi_n'(y).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Eliminando c_n del primer par y a d_n del segundo par de ecuaciones se obtienen las soluciones:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\varphi_n^l(y)\varphi_n(x) - m\varphi_n(y)\varphi_n(x)}{\varphi_n^l(y)\zeta_n(x) - m\varphi_n(y)\zeta_n(x)}, \\
 b_n &= \frac{m\varphi_n^l(y)\varphi_n(x) - \varphi_n(y)\varphi_n^l(x)}{m\varphi_n^l(y)\zeta_n(x) - \varphi_n(y)\zeta_n(x)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Para c_n y d_n se encuentran fracciones con los mismos denominadores respectivos y

$$\varphi_n^l(x)\zeta_n(x) - \varphi_n(x)\zeta_n(x) = i
 \tag{3.40}$$

como denominador común. Esto completa la solución del problema. El campo en cualquier punto adentro o afuera de la esfera esta expresado ahora en términos de funciones conocidas.

Funciones de Amplitud resultantes y Factores de Eficiencia

Funciones de Amplitud

La solución de Mie bosquejada en la sección anterior da la expresiones para los campos en cualquier punto adentro y afuera de la partícula . El problema ha sido restringido al de un campo dispersante a distancias muy grandes de la esfera. Sustituyendo por la expresión asintótica ya dada $h_n^{(2)}(kr)$, se encuentra la onda dispersora:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\alpha t} \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^l(\cos\theta), \\
 v &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\alpha t} \operatorname{sen}\varphi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n^l(\cos\theta).
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

Derivando las componentes tangenciales del campo en las ecuaciones (3.7) a (3.27) en la sección anterior, las siguientes funciones del ángulo de dispersión aparecen:

$$\begin{aligned}
 \pi_n(\cos\theta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} P_n^l(\cos\theta), \\
 \tau_n(\cos\theta) &= \frac{d}{d\theta} P_n^l(\cos\theta).
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

Las expresiones alternativas son:

$$\begin{aligned}\pi_n(\cos\theta) &= \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}, \\ \tau_n(\cos\theta) &= \cos\theta \cdot \pi_n(\cos\theta) - \sin^2\theta \frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Las componentes resultantes del campo pueden ser escritas en la forma:

$$\begin{aligned}E_\theta = H_\varphi &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\omega t} \cos\varphi S_2(\theta), \\ -E_\varphi = H_\theta &= -\frac{i}{kr} e^{-ikr+i\omega t} \sin\varphi S_1(\theta),\end{aligned}\tag{3.44}$$

donde

$$\begin{aligned}S_1(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta)\}, \\ S_2(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{b_n \pi_n(\cos\theta) + a_n \tau_n(\cos\theta)\}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Estos campos representan a una onda exterior esférica con amplitud y estado de polarización dependiente de la dirección. Las componentes radiales E_r y H_r también pueden ser derivadas de la solución de Mie pero tienden a cero con una potencia grande $1/r$. Queda por probar que las funciones $S_1(\theta)$ y $S_2(\theta)$ son las funciones de amplitud en el sentido en que ya se ha hablado. Observando las convenciones previas para el signo, se obtiene una situación como la ilustrada en la siguiente figura. El plano de referencia es tomado a través de las direcciones de propagación de las ondas incidente y dispersada. Las componentes perpendicular y paralela del campo eléctrico de la onda incidente son

$$E_{\theta_i} = \sin\varphi, \quad E_{\varphi_i} = \cos\varphi.\tag{3.46}$$

Las de la onda dispersada son

$$E_r = -E_\varphi, \quad E_t = E_\theta\tag{3.47}$$

Puede verse entonces que las funciones $S_1(\theta)$ y $S_2(\theta)$ concuerdan con las definidas anteriormente. Las componentes matriciales $S_3(\theta)$ y $S_4(\theta)$ son cero.

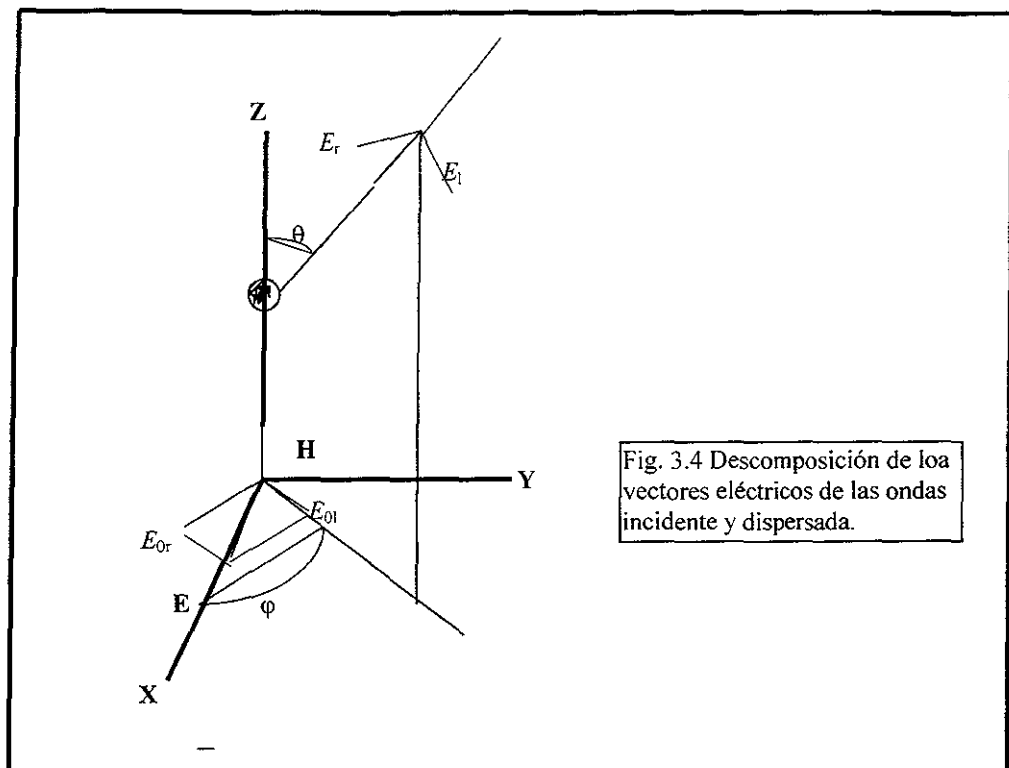


Fig. 3.4 Descomposición de los vectores eléctricos de las ondas incidente y dispersada.

Factores de Eficiencia Resultantes

Estos factores pueden ser calculados a partir de las funciones de amplitud. El factor de eficiencia para la extinción puede ser determinado de la función de amplitud para $\theta = 0$. Ambos $S_1(\theta)$ y $S_2(\theta)$ tiene el valor

$$S(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \quad (3.48)$$

para $\theta = 0$; también se hace uso de las relaciones

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{1}{2} n(n+1). \quad (3.49)$$

El hecho de que solo haya un $S(0)$ implica que la extinción es independiente del estado de polarización de la luz incidente. El valor para Q_{ext} es

$$C_{ext} = \pi a^2 Q_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}\{S(0)\}, \quad (3.50)$$

así que

$$Q_{ext} = \frac{4}{x^2} \text{Re}\{S(0)\}, \quad (3.51)$$

Que expresado en términos de los coeficientes de Mie da:

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n). \quad (3.52)$$

Las secciones transversales adicionales se obtienen por integración sobre todo el patrón de dispersión de acuerdo con las fórmulas expresadas en el capítulo de dispersión de Rayleigh para C_{sca} y los factores de eficiencia. La forma de la función $F(\theta, \varphi)$ define la intensidad de la luz dispersada en una dirección arbitraria, de acuerdo a lo dicho en ése capítulo, puede ser escrita para el caso especial de luz incidente linealmente polarizada.

$$F(\theta, \varphi) = i_2(\theta) \cos^2 \varphi + i_1(\theta) \sin^2 \varphi \quad (3.53)$$

$$\text{con} \quad i_1 = |S_1(\theta)|^2 \quad i_2 = |S_2(\theta)|^2 \quad (3.54)$$

Integrando sobre todas las direcciones, con

$$d\omega = \text{sen } \theta d\theta d\varphi, \quad (3.55)$$

ahora da, por las ecuaciones del capítulo 2

$$Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{\pi a^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^{\pi} \{i_1(\theta) + i_2(\theta)\} \text{sen } \theta d\theta \quad (3.56)$$

y, del mismo modo

$$\overline{\cos \theta} \cdot Q_{sca} = \frac{1}{x^2} \int_0^{\pi} \{i_1(\theta) + i_2(\theta)\} \cos \theta \text{sen } \theta d\theta. \quad (3.57)$$

Las mismas secciones transversales totales son obtenidas de la luz incidente y tienen un estado de polarización arbitrario (parcialmente elíptico); se omitirá la prueba de éste hecho. Una vez que estos valores han sido encontrados, las secciones transversales para la absorción y la presión de radiación se obtienen por sustracción:

$$\begin{aligned} Q_{abs} &= Q_{ext} - Q_{sca}, \\ Q_p &= Q_{ext} - \overline{\cos \theta} \cdot Q_{sca} \end{aligned} \quad (3.58)$$

La conversión de los resultados expresados arriba a fórmulas que contengan a los coeficientes de Mie no es simple. Como S_1 y S_2 están en la forma de series infinitas, sus cuadrados i_1 e i_2 estarán como series infinitas dobles. Sin embargo, en la integración sobre θ muchos términos de las series dobles darán cero por las relaciones de ortogonalidad de π_n y τ_n . Estas han sido investigadas por Debye.

Los resultados son

$$\begin{aligned}
 Q_{sca} &= \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}, \\
 \cos\theta \cdot Q_{sca} &= \frac{4}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n+1} \operatorname{Re}(a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*) \\
 &+ \frac{4}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \operatorname{Re}(a_n b_n^*).
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Fórmulas para usos Prácticos

Puesto que las fórmulas precedentes son estrictamente generales, es conveniente tener ecuaciones para su uso práctico en algunas condiciones simples. Se encuentran contenidas en las formulaciones dadas arriba, y no se harán consideraciones extras para justificarlas.

Extinción por una partícula. De radio a y para una longitud de onda λ , se encontrará $x = 2\pi a / \lambda$. Si la esfera no se encuentra en el vacío pero está sumergida en un medio homogéneo, la longitud de onda en el medio externo, que será $\lambda_{vac} / m_{medio}$, será usada en esta fórmula. Las tablas de las funciones de Mie dan usualmente el valor del factor de eficiencia $Q_{ext}(x, m)$. Si I_0 es la intensidad de la luz incidente (watts/m^2), la esfera interceptará una cantidad de $Q_{ext} \pi a^2 \cdot I_0$ watts del haz incidente, independientemente del estado de polarización de éste último. La parte absorbida y la parte dispersada en todas las direcciones serán encontradas reemplazando Q_{ext} por Q_{abs} y Q_{sca} , respectivamente.

Intensidad dispersada por una partícula. Las tablas dan generalmente los valores de i_1 e i_2 como funciones de x , m , y θ . Sea r la distancia del centro de la esfera y $k = 2\pi / \lambda$. Si la luz natural de intensidad I_0 (watts/m^2) incide sobre la esfera, la luz dispersada en cualquier dirección estará parcialmente polarizada en forma lineal. Su intensidad (watts/m^2) es

$$I = \frac{I_0(i_1 + i_2)}{2k^2 r^2}, \tag{3.60}$$

en donde los términos i_1 e i_2 se refieren, respectivamente, a la intensidad de la luz que vibra perpendicular y paralelamente al plano que pasa a través de las direcciones de propagación de los haces incidente y dispersado. Por vibración se entenderá la vibración del vector eléctrico. El grado de polarización es

$$(i_1 - i_2) / (i_1 + i_2). \tag{3.61}$$

Medio que contiene a N partículas por unidad de volumen. Primero se supondrá que todas las partículas son esferas perfectas en el vacío. La intensidad dispersada por unidad de volumen en una dirección dada es N veces las intensidades mencionadas arriba. Depende del estado de polarización de la luz incidente.

La intensidad del haz decrece en una distancia l en una fracción $e^{-\gamma l}$, donde el coeficiente de extinción γ se calcula a partir de

$$\gamma = N \pi a^2 Q_{\text{ext}} \quad (3.62)$$

independientemente del estado de polarización de la luz incidente. Al mismo tiempo esta onda es retardada. Los procesos de retardar y debilitar a la onda se describen juntos como una consecuencia del índice de refracción complejo del medio:

$$m = 1 - iS(0) \cdot 2\pi N k^{-3}. \quad (3.63)$$

Si las partículas tienen diferentes radios, con $N(a)$ da partículas con radios entre a y $a+da$ por unidad de volumen, entonces

$$\gamma = \int_0^{\infty} Q_{\text{ext}} N(a) \pi a^2 da, \quad (3.64)$$

donde Q_{ext} depende de a por el argumento $x = 2\pi a / \lambda$.

Partículas suspendidas en un medio con índice de refracción diferente de 1. Para mantener las notaciones se ha asumido que el medio de suspensión es el vacío, la generalización es la siguiente. Sea el medio exterior con un índice de refracción m_2 (real) y las esferas tienen índice de refracción m_1 (real o complejo).

El índice m utilizado hasta ahora está en términos de

$$m = m_1 / m_2; \quad (3.65)$$

la λ usada es

$$\lambda = \lambda_{\text{vac}} / m_2 \quad (3.66)$$

y, consecuentemente,

$$x = \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{2\pi a m_2}{\lambda_{\text{vac}}}. \quad (3.67)$$

Todas las funciones de γ y m permanecen iguales, excepto el índice de refracción complejo del medio de las partículas suspendidas, que ahora es $m \cdot m_2$.

Las pruebas de estas relaciones pueden darse manteniendo a m_2 como un parámetro separado en todas las fórmulas desde el principio.

Capítulo 4

Modelos de dos Flujos

Existen varias aproximaciones de dos flujos en la teoría de transferencia radiativa que llevan a dos ecuaciones diferenciales acopladas si la intensidad es reemplazada por integrales hemisféricas de la intensidad en la ecuación de transferencia. Aunque no es un objetivo principal de la presente sección el análisis particular de cada uno de los métodos de aproximación, es posible demostrar que cada uno de ellos lleva efectivamente al mismo par de ecuaciones acopladas que se resuelven aquí. La justificación de las condiciones que a continuación se darán, así como la deducción de las expresiones que se manejan y que son la base de la teoría de la transferencia radiativa, constituye el punto central de éste apartado. De éste modo se tendrá una completa comprensión de la herramienta matemática básica de la teoría a éste nivel, y de su uso de acuerdo a las condiciones físicas que se requiera manejar. Cabe señalar que este método ya ha sido superado como se reporta en la referencia (7), sin embargo, el trabajo que se desarrolla aquí tiene su base en el siguiente análisis.

Asumiendo independencia temporal, dispersión elástica (i.e. sin conversión de una frecuencia a otra en el rango de observación), inexistencia de fuentes internas (emisión térmica a longitudes de onda grandes) y un medio suficientemente enrarecido que asegura que cada partícula está en el campo lejano de la radiación dispersada por otra partícula, la ecuación de transferencia radiativa puede ser escrita para la intensidad difusa $I(\tau, \mu, \phi)$ como

$$2\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = 2I(\tau, \mu, \phi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu' - \frac{1}{2} F p(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \quad (4.1)$$

Las coordenadas esféricas $\theta = \arccos \mu$ y ϕ , con θ medido desde la superficie normal exterior, referida a la dirección de propagación de un haz de luz de intensidad I y profundidad óptica τ , πF es el flujo incidente colimado que atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación definida por $\theta_0 = \arccos(-\mu_0)$ y ϕ_0 , y $p(\mu, \phi; \mu', \phi')$ es la función fase o ley de dispersión de una partícula para la radiación dispersada de la dirección (μ', ϕ') en la dirección (μ, ϕ) . La función fase es normalizada de acuerdo a la expresión

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi' d\mu' = \omega_0 \quad (4.2)$$

donde ω_0 es el albedo de dispersión simple, i.e. la razón del coeficiente de dispersión a la suma de los coeficientes de dispersión y absorción.

Si $P(\mu, \phi; \mu', \phi')$ es una función sólo del coseno del ángulo de dispersión, Chandrasekhar ha demostrado que la integral azimutal satisface

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi = \omega_0 \sum_l (2l+1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (4.3)$$

donde $P_l(\mu)$ es el polinomio de Legendre de orden l -ésimo y los coeficientes g_l son definidos por

$$g_l \equiv \frac{1}{2\omega_0} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu \quad (4.4)$$

Esto se debe a que por el teorema de adición de los armónicos esféricos:

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_l \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi - \phi') \right] d\phi \quad (4.5)$$

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \sum_l \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu') (2\pi) \Rightarrow p(\mu, \mu') = \sum_l \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (4.6)$$

Por la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} \quad (4.7)$$

multiplicando ambos lados de (4.8) por $P_l(\mu)$ y evaluando $p(\mu, \mu')$ en $\mu'=1 \Rightarrow P_l(1)=1 \forall l$

$P_l(\mu) p(\mu, 1) = \sum_l \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu)$ e integrando de -1 a 1 con respecto a μ :

$\int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu = \sum_l \omega_l \int_{-1}^1 P_l(\mu) P_l(\mu) d\mu$ Aquí se aplica el teorema de ortogonalidad de los armónicos esféricos:

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu = \sum_l \omega_l \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} = \omega_l \frac{2}{2l+1} \quad y$$

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu = \omega_l \frac{2}{2l+1} \quad (4.8)$$

sustituyendo en (4.6) para ω_j :

$$\omega_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu \Rightarrow p(\mu, \mu') = \sum_l \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu P_l(\mu) P_l(\mu')$$

se multiplica y se divide por ω_0 :

$$p(\mu, \mu') = \omega_0 \sum_l \frac{2l+1}{2\omega_0} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) p(\mu, 1) P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (4.9)$$

se define a

$$g_l \equiv \frac{1}{2\omega_0} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu \quad (4.10)$$

con ésta definición se tiene que $g_l = g$ por eso se multiplica y se divide por ω_0 .

De éste modo se tiene que:

$$p(\mu, \mu') = \omega_0 \sum_l (2l+1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu'). \quad (4.11)$$

A partir de que $p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi$ se sustituye en (4.2):

$$\int_{-1}^1 p(\mu, \mu') d\mu = 2\omega_0 \quad (4.12)$$

Con la definición adicional:

$$I(\tau, \mu) = \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) d\phi \quad (4.13)$$

De lo cual se tiene que la integración azimutal de la ecuación (4.1) da

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\mu \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu) &= 2I(\tau, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' \\ &- \pi l p(\mu, -\mu_0) \exp(-\tau/\mu_0) \end{aligned} \quad (4.14)$$

De acuerdo a lo que se dijo anteriormente se definen las integrales hemisféricas:

$$I^{\pm}(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \pm\mu) d\mu \quad (4.15)$$

y la cantidad :

$$\beta = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, -\mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' \quad (4.16)$$

por (4.12):

$$\beta = \frac{1}{2\omega_0} (2\omega_0) - \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, \mu'') d\mu'' = 1 - \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' \quad (4.17)$$

si $\int_0^{-1} p(\mu', \mu') d\mu' = \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu'$ con $\mu' = \mu''$

Reemplazando las integrales (4.15) en (4.14):

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{0^{-1}}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu - \frac{1}{2} \pi F \exp(-\tau/\mu_0) \int_0^1 p(\mu, -\mu_0) d\mu$$

utilizando (4.10) y el hecho de que $p(\mu, \mu') = p(-\mu, -\mu')$ y $p(-\mu, \mu') = p(\mu, -\mu')$

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{0^{-1}}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \pi F \omega_0 \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.18)$$

Reemplazando μ por $-\mu$ en (4.14) e integrando posteriormente sobre μ :

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{0^{-1}}^1 p(\mu, -\mu') I(\tau, -\mu') d\mu' d\mu + \frac{\pi F}{2} \int_0^1 p(-\mu, -\mu_0) \exp(-\tau/\mu_0) d\mu$$

de la definición (4.17):

$$\int_0^1 p(-\mu, -\mu_0) d\mu = \int_0^1 p(\mu, \mu_0) d\mu = (\beta_0 - 1)(2\omega_0)(-1) = 2\omega_0(1 - \beta_0)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, -\mu') I(\tau, -\mu') d\mu' d\mu + \frac{\pi F^2 \omega_0}{2} (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, -\mu') I(\tau, -\mu') d\mu' d\mu + \pi F \omega_0 \exp(-\tau/\mu_0) (1 - \beta_0) \quad (4.19)$$

En éste momento se aplica la aproximación de Eddington a las ecuaciones (4.18) y (4.19):

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)$$

Utilizando la expresión (4.15):

$$I^+(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu [I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)] d\mu = \int_0^1 \mu I_0(\tau) d\mu + \int_0^1 \mu^2 I_1(\tau) d\mu$$

$$= \left[\frac{I_0(\tau) \mu^2}{2} + \frac{I_1(\tau) \mu^3}{3} \right] \text{ evaluado en } 1 \text{ y } 0: \frac{I_0(\tau)}{2} + \frac{I_1(\tau)}{3} \text{ y:}$$

$$I^-(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, -\mu) d\mu = \int_0^1 \mu [I_0(\tau) - \mu I_1(\tau)] d\mu = \int_0^1 \mu I_0(\tau) d\mu - \int_0^1 \mu^2 I_1(\tau) d\mu$$

$$= I_0(\tau) \frac{\mu^2}{2} \Big|_0^1 - I_1(\tau) \frac{\mu^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{I_0(\tau)}{2} - \frac{I_1(\tau)}{3}$$

Ahora:

$$\mu I^+(\tau) = \mu \frac{I_0(\tau)}{2} + \mu \frac{I_1(\tau)}{3}; \quad -\mu I^-(\tau) = -\mu \frac{I_0(\tau)}{2} + \mu \frac{I_1(\tau)}{3}$$

$\Rightarrow I^+(\tau) + I^-(\tau) = I_0(\tau)$ y que:

$$\frac{3}{2} \mu I^+(\tau) - \frac{3}{2} \mu I^-(\tau) = \frac{3\mu I_0(\tau)}{4} + \frac{\mu I_1(\tau)}{2} - \frac{3}{4} \mu I_0(\tau) + \frac{\mu I_1(\tau)}{2}$$

Como

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau) = I^+(\tau) + I^-(\tau) + \frac{3}{2} \mu I^+(\tau) - \frac{3}{2} \mu I^-(\tau)$$

$$= (1 + \frac{3}{2}\mu)I^+(\tau) + (1 - \frac{3}{2}\mu)I^-(\tau) = \frac{1}{2}(2 + 3\mu)I^+(\tau) + \frac{1}{2}(2 - 3\mu)I^-(\tau)$$

Sabemos que: $I^+(\tau) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1(\tau)}{3}; I^-(\tau) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_1(\tau)}{3} \Rightarrow I^+(\tau) + I^-(\tau) = I_0$

$$I(\tau, \pm\mu) = \frac{1}{2}(2 \pm 3\mu)I^+(\tau) + \frac{1}{2}(2 \mp 3\mu)I^-(\tau), \mu \geq 0$$

Ahora:

$$\int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 [(2 + 3\mu)I^+(\tau) + (2 - 3\mu)I^-(\tau)] d\mu$$

$$= \frac{1}{2} [(2 + \frac{3}{2})I^+(\tau) + (2 - \frac{3}{2})I^-(\tau)] = \frac{1}{4} [7I^+(\tau) + I^-(\tau)]$$

Para

$$\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 [(2 - 3\mu)I^+(\tau) + (2 + 3\mu)I^-(\tau)] d\mu$$

$$= \frac{1}{2} [(2 - \frac{3}{2})I^+(\tau) + (2 + \frac{3}{2})I^-(\tau)] = \frac{1}{4} [I^+(\tau) + 7I^-(\tau)]$$

Ahora:

$$p(\mu, \pm\mu') = \omega_0 \sum_l (2l+1) g_l P_l(\mu) P_l(\pm\mu') \approx \omega_0 [g_0 P_0(\mu) P_0(\mu') \pm 3g_1 P_1(\mu) P_1(\mu')]$$

$$= \omega_0 \pm 3\omega_0 g_1 \mu \mu' = \omega_0 (1 \pm 3g\mu\mu')$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 p(\mu, \pm\mu') d\mu' d\mu = \int_0^1 \int_0^1 \mu' (\omega_0 \pm 3\omega_0 g \mu \mu') d\mu' d\mu = \omega_0 \int_0^1 \int_0^1 \mu' d\mu' d\mu \pm 3\omega_0 g \int_0^1 \int_0^1 \mu \mu'^2 d\mu' d\mu$$

$$= \omega_0 \int_0^1 d\mu (\frac{\mu^2}{2} \Big|_0^1) \pm 3\omega_0 g \int_0^1 \mu d\mu \int_{-1}^1 \mu'^2 d\mu' = \frac{3g\omega_0}{2} [\frac{\mu'^3}{3} \Big|_{-1}^1] = \frac{3}{2} \omega_0 g (\frac{2}{3}) = \pm \frac{3}{2} \frac{2}{3} \omega_0 = \pm \omega_0 g$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 p(\mu, \pm\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{4}{4} I^+(\tau) \omega_0 \pm \frac{3}{4} I^+(\tau) \omega_0 g + \frac{4}{4} I^-(\tau) \omega_0 \mp \frac{3}{4} I^-(\tau) \omega_0 g$$

$$= \frac{\omega_0}{4}(4 \pm 3g)I^+(\tau) + \frac{\omega_0}{4}(4 \mp 3g)I^-(\tau)$$

Sustituyendo ahora en las ecuaciones (4.18) y (4.19) respectivamente:

$$\therefore \frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \gamma_1 I^+(\tau) - \gamma_2 I^-(\tau) - \pi F \omega_0 \gamma_3 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.20)$$

donde:

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}[7 - \omega_0(4 + 3g)] \quad (4.21)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}[1 - \omega_0(4 - 3g)] \quad (4.22)$$

$$\gamma_3 = \beta_0 \quad (4.23)$$

como

$$\gamma_3 = \beta_0 = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, -\mu_0) d\mu = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 [\omega_0 - 3g\omega_0\mu\mu_0] d\mu = \frac{\omega_0}{2\omega_0} \int_0^1 d\mu - \frac{3\omega_0 g \mu_0}{2\omega_0} \int_0^1 \mu d\mu$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}g\mu_0 = \frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0) \therefore \gamma_3 = \frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0) \quad (4.24)$$

Para

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = \gamma_2 I^-(\tau) - \gamma_1 I^+(\tau) + \pi F \omega_0 \gamma_4 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.25)$$

$$\gamma_4 = 1 - \beta_0 = 1 - \gamma_3 \therefore \gamma_4 + \gamma_3 = 1$$

Finalmente:

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \gamma_1 I^+(\tau) - \gamma_2 I^-(\tau) - \pi F \omega_0 \gamma_3 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.26)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = \gamma_2 I^-(\tau) - \gamma_1 I^+(\tau) + \pi F \omega_0 \gamma_4 \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.27)$$

Que constituyen el par de ecuaciones acopladas que hay que resolver y al cual se llega usando la aproximación de Eddington en las ecuaciones con integrales hemisféricas (4.18) y

(4.19). Posteriormente se comprobará que hay otras aproximaciones que, aplicadas a (4.18) y (4.19) que también llevan a las ecuaciones (4.20) y (4.25) involucrando un cambio en la forma de los coeficientes γ_i .

2 . Aproximaciones de dos flujos

Los coeficientes γ_i son determinados para cada aproximación de dos flujos de acuerdo a los siguientes pasos: 1) Asumir una forma determinada para $I(\tau, \mu)$ que defina un modelo particular, 2) el uso de ésta forma para evaluar las integrales en las ecuaciones (4.18) y (4.19), y 3) la comparación directa de los resultados con las ecuaciones (4.20) y (4.25) . Se entenderá siempre que γ_4 es $1 - \gamma_3$, a menos que se especifique lo contrario en el texto.

Ambas, la aproximación de Eddington y la modificada de Eddington se dan con la suposición de que

$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)$ lo cual se ha visto que da como resultado, al ser aplicado en (4.15) que:

$$I(\tau, \pm\mu) = \frac{1}{2}[(2 \pm 3\mu)I^+(\tau) + (2 \mp 3\mu)I^-(\tau)], \mu \geq 0 \quad (4.28)$$

La sustitución de ésta expresión en los integrandos de las ecuaciones (4.18) y (4.19) arrojan el resultado

$$\int_0^1 I(\tau, \pm\mu) d\mu = \frac{1}{4}[(4 \pm 3)I^+(\tau) + (4 \mp 3)I^-(\tau)] \quad (4.29)$$

$$y \quad \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, \pm\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{1}{4} \omega_0 [(4 \pm 3g)I^+(\tau) + (4 \mp 3g)I^-(\tau)] \quad (4.30)$$

Como ya se pudo observar anteriormente.

Para llevar a cabo la evaluación de la integral de la ecuación (4.30), se utilizó la condición (4.11), la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, la condición de normalización (4.12) con $g_0=1$, la definición del factor de asimetría $g=g_1$. Las anisotropías de orden más alto de β no aparecen en ésta aproximación de la integral de dispersión múltiple.

La expresión para γ_i en el caso de éstas dos aproximaciones corresponde a la sustitución de

$p(\mu_0, -\mu') = \omega_0(1 - 3g\mu_0\mu')$ en la ecuación (4.17). Esta forma de la función fase ya fue deducida anteriormente.

$$\beta_i = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, -\mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu'$$

$$y \quad p(\mu_0, -\mu') = \omega_0(1 - 3g\mu_0\mu')$$

$$\text{Por lo tanto: } \beta_0 = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^1 \omega_0(1 - 3g\mu_0\mu') d\mu' = \frac{1}{2} \left(\mu' - 3g \frac{\mu_0 \mu'^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} - \frac{3g\mu_0}{4} = \frac{1}{2} \left(1 - 3g \frac{\mu_0}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 - 3g\mu_0)$$

$$\text{Para el caso de la aproximación de Eddington } \beta_0 = \frac{1}{4} (2 - 3g\mu_0) \equiv \gamma_3$$

Una aparente ventaja del método de Eddington es la consistencia entre la forma de γ_3 y la ecuación (4.30). En el caso de la aproximación de Eddington modificada γ_3 es β_0 directamente. Para estas dos aproximaciones se ha comprobado que llevan al mismo par de ecuaciones acopladas cuya solución ya se ha mostrado. Otro de los métodos aproximativos que arrojan éste par de ecuaciones, es el método de cuadratura:

$$\int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' = p(\mu, \mu_1) I(\tau, \mu_1) + p(\mu, -\mu_1) I(\tau, -\mu_1) \quad (4.31)$$

así que:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, \pm\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu$$

$$= \frac{1}{2} I(\tau, \mu_1) \int_0^1 p(\mu, \mu_1) d\mu + \frac{1}{2} I(\tau, -\mu_1) \int_0^1 p(\mu, -\mu_1) d\mu$$

$$\text{Utilizando (4.17): } \int_0^1 p(\mu, -\mu') d\mu' = 2\omega_0\beta_i \text{ y } 2\omega_0(1 - \beta_i) = \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I(\tau, \mu_1) [2\omega_0(1 - \beta_i)] + \frac{1}{2} I(\tau, -\mu_1) (2\omega_0\beta_i) = \frac{\omega_0 I^*(\tau)}{\mu_1} (1 - \beta_i) + \frac{\omega_0 I(\tau)}{\mu_1} \beta_i$$

con la condición de que $I^*(\tau) = \mu_i [(\tau, \pm\mu_i)]$ los puntos de cuadratura son: $\pm \mu_i, \beta_i$.

Aplicando (4.31) al signo - de (4.32):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, -\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu &= \frac{1}{2} \int_0^1 [p(\mu, -\mu') I(\tau, \mu_1) + p(\mu, \mu_1) I(\tau, -\mu_1)] d\mu \\ &= \frac{1}{2} \frac{I^-(\tau)}{\mu_1} [2\omega_0 \beta_1] + \frac{1}{2} \frac{I^-(\tau)}{\mu_1} [2\omega_0 (1 - \beta_1)] = \frac{\omega_0 I^+(\tau) \beta_1}{\mu_1} + \frac{\omega_0 I^-(\tau) (1 - \beta_1)}{\mu_1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, \pm\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{\omega_0}{\mu_1} \left[\begin{pmatrix} 1 - \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} I^+(\tau) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 1 - \beta_1 \end{pmatrix} I^-(\tau) \right] \quad (4.32)$$

Dada la aproximación (4.31), y que $I^\pm(\tau) = \mu_1 I(\tau, \pm\mu_1)$. Las entradas altas y bajas en los paréntesis cuadrados corresponden al signo + y - en el integrando. Para comprobar que efectivamente se llega a las ecuaciones acopladas (4.20) y (4.25) se sustituye (4.32) en (4.18):

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \left[\frac{1 - \omega_0(1 - \beta_1)}{\mu_1} \right] I^+(\tau) + \left[\frac{\omega_0 \beta_1}{\mu_1} \right] I^-(\tau) - \pi F \omega_0 \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\gamma_1 = \frac{1 - \omega_0(1 - \beta_1)}{\mu_1} \quad (4.33)$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega_0 \beta_1}{\mu_1} \quad (4.34)$$

$$\gamma_3 = \beta_0 \quad (4.35)$$

$$\gamma_4 = 1 - \beta_0 \quad (4.36)$$

Sustituyendo (4.32) en (4.19):

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = \frac{-I^-(\tau)}{\mu_1} + \frac{\omega_0 \beta_0}{\mu_1} I^+(\tau) + \frac{\omega_0}{\mu_1} (1 - \beta_1) I^-(\tau) + \pi F \omega_0 (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = \left[\frac{\omega_0(1 - \beta_1)}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1} \right] I^-(\tau) + \frac{\omega_0 \beta_0}{\mu_1} I^+(\tau) + \pi F \omega_0 (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.20)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -\gamma_1 I^-(\tau) + \gamma_2(\tau) I^+(\tau) + \pi F \omega_0 (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0) \quad (4.25)$$

Con elecciones particulares de μ_1 se pueden representar las dos aproximaciones: cuadratura y cuadratura modificada. Utilizando la elección gaussiana

$$\mu_1 = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = 3^{\frac{1}{2}} [1 - \omega_0(1 - \beta_1)]; \quad \gamma_2 = 3^{\frac{1}{2}} [\omega_0 \beta_1]$$

$$p(\mu_1, \mu_0) = 1 + 3g\mu_0 3^{-2} = 1 + 3^{\frac{1}{2}} g\mu_0 \quad \text{y} \quad \gamma_3 = \frac{1}{2\omega_0} p(\mu_1, \mu_0) = \frac{1}{2} p(\mu_1, \mu_0) = \frac{1}{2} (1 + 3^{\frac{1}{2}} g\mu_0)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} (1 + 3^{\frac{1}{2}} g\mu_0) \quad (4.37)$$

sustituyendo la función fase $p(\mu_1, \mu_0) = 1 + 3^{\frac{1}{2}} g\mu_0$ en (4.11):

$$p(\mu, \mu) = \omega_0 \sum_l (2l + 1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu)$$

$$\therefore p(\mu_1, -\mu_0) = \omega_0 g_0 P_0(\mu_1) P_0(-\mu_0) + 3\omega_0 g_1 P_1(\mu_1) P_1(-\mu_0) = 1 - 3g\mu_1\mu_0$$

para $p(\mu_1, -\mu_0) = 1 - 3g3^{\frac{-1}{2}}\mu_0 = 1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0 \therefore p(\mu_1, \pm\mu_0) = 1 \pm 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0$ con $\mu_1 = 3^{\frac{1}{2}}$

$$\text{Si } \gamma_4 = \frac{1}{2\omega_0} p(\mu_1, \mu_0) = \frac{1}{2\omega_0} (1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0) \quad (4.38)$$

$$\text{y } \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{1}{2}(1 + 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0) + \frac{1}{2}(1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0) = \frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}g\mu_0 + \frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}g\mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 = 1$$

lo cual representa la conservación de la energía.

Por otro lado : $\gamma_1 = \gamma_2$ si $\omega_0 = 1$

$$p(\mu, -\mu') = \omega_0 g_0 P_0(\mu) P_0(-\mu') + 3\omega_0 g_1 P_1(\mu) P_1(-\mu') = 1 - 3g\mu\mu' \Rightarrow p(\mu, -\mu') = 1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu'$$

$$\text{y } \mu_1 = 3^{\frac{1}{2}} \therefore \beta_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu'] d\mu' = \frac{1}{2} \left[\mu' - 3^{\frac{1}{2}} \frac{g\mu'^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3^{\frac{1}{2}}g}{2} \right]$$

$$\text{y } 1 - \beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}g}{4} \therefore \gamma_1 = \frac{1}{\mu_1} [1 - \omega_0(1 - \beta_1)] = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}g}{4} \right] = 3^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}g}{4} \right] = 3^{\frac{1}{2}} \beta_1 = \gamma_2$$

que representa la aproximación de cuadratura modificada.

A continuación se presenta un cuadro comparativo de los coeficientes de los coeficientes de acuerdo al método aproximativo que se esté utilizando sobre las ecuaciones (4.18) y (4.21), para llegar a (4.22) y (4.25), en el entendido de que lo que cambia es la expresión de los coeficientes únicamente.

Método	γ_1	γ_2	γ_3
Eddington	$\frac{1}{4}[7 - \omega_0(4 + 3g)]$	$-\frac{1}{4}[1 - \omega_0(4 - 3g)]$	$\frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0)$
Eddington modificado	$\frac{1}{4}[7 - \omega_0(4 + 3g)]$	$-\frac{1}{4}[1 - \omega_0(4 - 3g)]$	β_0
Cuadratura	$\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\right)[2 - \omega_0(1 + g)]$	$\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}\omega_0}{2}\right)[1 - g]$	$\frac{1}{2}(1 - 3^{\frac{1}{2}}g\mu_0)$
Cuadratura modificado	$3^{\frac{1}{2}}[1 - \omega_0(1 - \beta_1)]$	$3^{\frac{1}{2}}\omega_0\beta_1$	β_0

En todos los casos se cumple la conservación de la energía, esto es, $\gamma_3 + \gamma_4 = 1$

La solución de la aproximación generalizada de dos flujos para transferencia de radiación en atmósferas con dispersión múltiple y homogénea es extendida a atmósferas verticalmente inhomogéneas de una manera que es numéricamente estable y eficiente. En éste trabajo se asumirá que el albedo es una cantidad constante en cada capa. Además se utilizarán condiciones de frontera para cada capa que aseguran la continuidad para los flujos superior e inferior en cada una.

Los esquemas de transferencia de radiación especifican que es posible calcular los campos de radiación en atmósferas que dispersan y son verticalmente inhomogéneas en planos paralelos con una exactitud mejor que el 1%.

Numerosas técnicas aproximativas han sido desarrolladas para calcular la transferencia de energía solar a través de una capa atmosférica homogénea. Muchas de ellas se pueden modificar dentro del marco de trabajo de las técnicas de dos flujos (Meador y Weaver, 1980). Comenzando a partir de la solución de la intensidad en las fronteras de una capa homogénea, Shettle y Weinman (1970), mostraron que una matriz de ecuaciones puede ser derivada para las intensidades en las fronteras de capas múltiples con propiedades diferentes usando las condiciones de frontera adecuadas. Wiscombe (1977) discutió procedimientos para invertir la matriz pentadiagonal resultante y propuso soluciones a varios problemas numéricos. Lacis y Hansen (1974) mostraron que cuando la intensidad de radiación solar es tratada como una condición de frontera, las soluciones de dos flujos para la reflectividad y transmitividad pueden transformarse en una forma doble para capas

múltiples, resultando en una matriz tridiagonal. Las ecuaciones de la matriz tridiagonal pueden ser resueltas sin el recurso de la inversión de una matriz compleja, y el tiempo computacional necesario para encontrar la solución es lineal en el número de capas verticales. En ésta sección se deriva la solución de una matriz tridiagonal para capas múltiples válida para toda la gama de ecuaciones de dos flujos (Meador y Weaver, 1980). Este esquema mantiene la simplicidad, estabilidad numérica y velocidad computacional de los trabajos arriba mencionados sin la restricción de un sólo tipo de aproximación de dos flujos, de una manera más directa, así que no se pierde tiempo en el cálculo de la transmitividad y la reflectividad. Primero se deriva una solución general para los flujos superior e inferior para una sola capa. Entonces se deriva una solución matricial para múltiples capas homogéneas que se aproximan a la situación de una atmósfera inhomogénea.

Capítulo 5

Algoritmos

Usamos una solución de dos flujos de la ecuación de transferencia radiativa para determinar los flujos superior e inferior en el tope y en el fondo de las capas atmosféricas. Las ecuaciones de dos flujos representan una clase de soluciones basadas en aproximaciones a la función fase y la integral angular del campo de intensidad. Meador y Weaver (1980) mostraron que todas éstas soluciones para la radiación solar incidente pueden ser expuestas en una forma general.

Las soluciones de dos flujos consisten en aproximar $I(\tau, \mu)$ en la ecuación

$$\frac{\mathcal{A}^\pm(\tau)}{d\tau} = \pm \int_0^1 I^\pm(\tau, \mu) d\mu \mp \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^1 P(\mu, \mu') I^\pm(\tau, \mu) d\mu d\mu' \mp \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\omega_0}{4} F_s p(\mu_1, \phi_1; -\mu_0, \phi_0) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) d\mu_1 d\phi_1 \quad (5.1)$$

donde $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\omega_0}{4} F_s p(\mu_1, \phi_1; -\mu_0, \phi_0) \exp(-\tau/\mu_0) = \pi F_0 \omega_0 \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0)$. Meador y Weaver han mostrado que todas las expresiones de dos flujos pueden ser escritas en la siguiente forma

$$\frac{\mathcal{A}_n^+}{\partial \tau_n} = \gamma_{1n} I_n^+ - \gamma_{2n} I_n^- - S_n^+ \quad (5.2)$$

$$\frac{\mathcal{A}_n^-}{\partial \tau} = \gamma_{2n} I_n^+ - \gamma_{1n} I_n^- + S_n^+ \quad (5.3)$$

Aquí γ_{1n} y γ_{2n} son coeficientes que dependen de las ecuaciones de dos flujos (Meador y Weaver, 1980). Para un haz solar

$$S^+ = \gamma_{1n} \pi F_0 \omega_0 \exp\left[\frac{-(\tau_s + \tau)}{\mu_0}\right] \quad (5.4)$$

$$S^- = \gamma_{2n} \pi F_0 \omega_0 \exp\left[\frac{-(\tau_s + \tau)}{\mu_0}\right] \quad (5.5)$$

Cuando se están usando capas múltiples, τ_c es la profundidad óptica acumulativa de las anteriores y por encima de la capa n , se asume que esta cantidad permanece constante en cada capa, variando su valor de una a otra.

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) admiten soluciones simples para cualquier función S que pueda ser escrita como una combinación lineal de τ , exponenciales, o series de senos y cosenos de τ .

La solución general de las ecuaciones de flujos (5.2) y (5.3) se puede escribir como

$$I_n^+(\tau) = k_{1n} \exp(\lambda_n \tau) + \Gamma_n k_{2n} \exp(-\lambda_n \tau) + H_n^+(\tau) \quad (5.6)$$

$$I_n^-(\tau) = \Gamma_n k_{1n} \exp(\lambda_n \tau) + k_{2n} \exp(-\lambda_n \tau) + H_n^-(\tau) \quad (5.7)$$

Esto se debe a que a partir de la solución general (4.26) y (4.29) :

$$I^+(\tau) = \frac{1}{2\kappa} [(\kappa + \gamma_1) \exp(\kappa\tau) + (\kappa - \gamma_1) \exp(-\kappa\tau)] I^+(0) + \pi F_0 \mu_0 \omega_0 \left[\frac{-(\alpha_2 + \kappa\gamma_3) [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)]}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3) [\exp(-\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)]}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \right]$$

$$I^-(\tau) = \frac{\gamma_2}{2\kappa} (\exp(\kappa\tau) - \exp(-\kappa\tau)) I^+(0) + \pi F_0 \mu_0 \omega_0 \left[\frac{-(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} (\exp(\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)) + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} (\exp(-\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)) \right]$$

Desarrollando y agrupando por el signo y la potencia de la exponencial :

$$I^+(\tau) = \left[\frac{(\kappa + \gamma_1) I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau) + \left[\frac{(\kappa - \gamma_1) I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(-\kappa\tau) + \left[\frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \right] \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\text{con } \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} = \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\gamma_1 - \alpha_2 \mu_0)}{(1 - \kappa^2 \mu_0^2)}$$

$$\begin{aligned}
I^+(\tau) &= \left[\frac{(\kappa + \gamma_1)I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau) \\
&+ \left[\frac{(\kappa - \gamma_1)I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(-\kappa\tau) \\
&+ \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\gamma_3 - \alpha_2 \mu_0)}{(1 - \kappa^2 \mu_0^2)} \exp(-\tau/\mu_0) \quad (a)
\end{aligned}$$

Para $I^-(\tau)$:

$$\begin{aligned}
I^-(\tau) &= \left[\frac{\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau) \\
&+ \left[\frac{-\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} \right] \exp(-\kappa\tau) \\
&+ \left[\frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 \exp(-\tau/\mu_0)}{\gamma_2(1 - \kappa^2 \mu_0^2)} \right] [\gamma_3 \gamma_1 + \kappa^2 \gamma_3 \mu_0 - \alpha_2 - \mu_0 \gamma_1 \alpha_2] \quad (b)
\end{aligned}$$

Ahora, se factoriza $\frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2}$ a el término $\left[\right] \exp(\kappa\tau)$ en (b) así como al término $\left[\right] \exp(-\kappa\tau)$ en (a).

Para (b) :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau) \\
&= \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \left[\frac{\gamma_2 \gamma_2 I^+(0)}{2\kappa(\gamma_1 - \kappa)} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau)
\end{aligned}$$

Sabemos que $\kappa^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \Rightarrow \gamma_{22}^2 = \gamma_1 - \kappa^2 = (\gamma_1 - \kappa)(\gamma_1 + \kappa)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \left[\frac{(\gamma_1 + \kappa)I^+(0)(\gamma_1 - \kappa)}{2\kappa(\gamma_1 - \kappa)} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau) \\
&= \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \left[\frac{(\gamma_1 + \kappa)I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \right] \exp(\kappa\tau)
\end{aligned}$$

Esta expresión es igual al término $\left[\right] \exp(\kappa\tau)$ en (a), para (a):

$$\left[\frac{(\kappa - \gamma_1)I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa \gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0)} \right] = \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \left[\frac{-\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa \gamma_3) \gamma_2}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0)(\gamma_1 - \kappa)} \right] \exp(-\kappa\tau)$$

$$\text{Como } \kappa^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \Rightarrow \gamma_2^2 = \gamma_1^2 - \kappa^2 = (\gamma_1 - \kappa)(\gamma_1 + \kappa); \quad (\gamma_1 - \kappa) = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 + \kappa)}$$

sustituyendo en el segundo sumando:

$$\Rightarrow \frac{(\gamma_1 - \kappa)}{\gamma_2} \left[\frac{-\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa \gamma_3)(\gamma_1 + \kappa) \gamma_2}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0) \gamma_2^2} \right] \exp(-\kappa\tau) =$$

$$\frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \left[\frac{-\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa \gamma_3)(\gamma_1 + \kappa)}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0) \gamma_2} \right] \exp(-\kappa\tau)$$

lo que es igual al término $\left[\right] \exp(-\kappa\tau)$ en (b), por lo tanto, renombrado $\kappa = \lambda = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{\frac{1}{2}}$

y $\Gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \lambda} = \frac{\gamma_1 - \lambda}{\gamma_2}$ se tienen las expresiones (5.6) y (5.7) con el índice de capa n, y que son aplicables a todos los casos excepto cuando ω_0 es exactamente la unidad. En éste caso, la parte homogénea de las soluciones se reduce a funciones lineales de τ . Los términos κ_1 y κ_2 en (5.6) y (5.7) son determinados por condiciones de frontera:

$$\kappa_1 = \left[\frac{(\gamma_1 + \kappa)I^+(0)}{2\kappa} - \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 + \kappa \gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0)} \right] \text{ y } \kappa_2 = \left[\frac{-\gamma_2 I^+(0)}{2\kappa} + \frac{\pi F_0 \mu_0 \omega_0 (\alpha_2 - \kappa \gamma_3)(\gamma_1 + \kappa)}{2\kappa(1 + \kappa \mu_0) \gamma_2} \right]$$

para radiación solar

$$H_n^+(\tau) = \frac{\pi \omega_0 F_0 \exp[-(\tau_c + \tau)/\mu_0] \left[(\gamma_1 - 1/\mu_0) \gamma_3 + \gamma_4 \gamma_2 \right]}{(\lambda^2 - 1/\mu_0^2)} \quad (5.8)$$

$$H_n^-(\tau) = \frac{\pi \omega_0 F_0 \exp[-(\tau_c + \tau)/\mu_0] \left[(\gamma_1 + 1/\mu_0) \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3 \right]}{(\lambda^2 - 1/\mu_0^2)} \quad (5.9)$$

los términos γ_3 y γ_4 dependen de la aproximación de dos flujos usada y están indicadas en la tabla anterior. La H_n^+ y H_n^- son funciones indeterminadas si λ es igual a $1/\mu_0$. En la práctica, si ocurre la igualdad, este problema puede ser eliminado eligiendo un valor ligeramente diferente de μ_0 .

Las ecuaciones (5.6) y (5.7) presentan otra dificultad al contener términos que crecen exponencialmente con z . Stamnes et. al. (1988) ha mostrado que las exponenciales positivas pueden ser eliminadas escalándolas de las ecuaciones. Por lo tanto definiremos los coeficientes

$$Y_{1n} = [k_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n) + k_{2n}] / 2 \quad (5.10)$$

$$Y_{2n} = [k_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n) - k_{2n}] / 2 \quad (5.11)$$

y las ecuaciones quedan:

$$I_n^+(\tau) = Y_{1n} \left\{ \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] + \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) \right\} + Y_{2n} \left\{ \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] - \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) \right\} + H_n^+(\tau) \quad (5.12)$$

$$I_n^-(\tau) = Y_{1n} \left\{ \Gamma_n \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] + \exp(-\lambda_n \tau) \right\} + Y_{2n} \left\{ \Gamma_n \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] - \exp(-\lambda_n \tau) \right\} + H_n^-(\tau) \quad (5.13)$$

se puede comprobar que las ecuaciones anteriores son equivalentes a las (5.6) y (5.7), sustituyendo directamente las expresiones (5.10) y (5.11):

$$\begin{aligned} I_n^+(\tau) &= \left[\frac{\kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n) + \kappa_{2n}}{2} \right] \left\{ \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] + \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) \right\} \\ &\quad + \left[\frac{\kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n) - \kappa_{2n}}{2} \right] \left\{ \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)] - \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) \right\} + H_n^+(\tau) \\ &= \frac{\kappa_{1n} \exp[\lambda_n \tau_n - \lambda_n \tau_n + \lambda_n \tau_n]}{2} + \frac{\kappa_{2n} \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)]}{2} + \frac{\Gamma_n \kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n - \lambda_n \tau)}{2} + \frac{\kappa_{2n} \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau)}{2} \\ &\quad + \frac{\kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau_n - \lambda_n \tau_n + \lambda_n \tau)}{2} - \frac{\kappa_{2n} \exp[-\lambda_n(\tau_n - \tau)]}{2} - \frac{\kappa_{1n} \Gamma_n \exp(\lambda_n \tau_n - \lambda_n \tau)}{2} \\ &\quad + \frac{\kappa_{2n} \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau)}{2} + H_n^+(\tau) = \frac{\kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau)}{2} + \kappa_{2n} \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) + \frac{\kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau)}{2} \\ &= \kappa_{1n} \exp(\lambda_n \tau) + \kappa_{2n} \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau) \end{aligned}$$

lo cual corresponde a la ecuación (5.6), el procedimiento es el mismo para la otra ecuación. Las expresiones (5.12) y (5.13) contienen únicamente argumentos exponenciales negativos, lo que ayuda a que en el momento de utilizar un método numérico para resolver las ecuaciones no haya términos que diverjan.

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned}
 I_1^- (0) &= I_0^- (0) \\
 I_n^+ (\tau_n) &= r_s I_n^- (\tau_n) \\
 I_n^+ (\tau = \tau_n) &= I_{n+1}^+ (\tau = 0) \\
 I_n^- (\tau = \tau_n) &= I_{n+1}^- (\tau = 0)
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

La primera condición de frontera dice que el flujo difuso descendente en el tope de la atmósfera es igual a cualquier flujo difuso que pueda estar incidiendo ahí. Usualmente no hay un flujo difuso en ése lugar. La segunda condición de frontera establece que el flujo ascendente en la superficie (capa n) es la suma de los flujos difusos descendentes reflejados, donde r_s es la reflectividad.

Aplicando las condiciones de frontera (5.14) a las ecuaciones (5.12) y (5.13), se encuentra que el desarrollo tiene la forma de una matriz tridiagonal . Las combinaciones lineales de las ecuaciones (5.14) producen un nuevo conjunto de $2n$ ecuaciones que componen una matriz tridiagonal de la forma

$$\begin{aligned}
 A_l Y_{l-1} + B_l Y_l + C_l Y_{l+1} &= D_l \\
 Y_l &= Y_{1n} \quad l = 2n - 1 \\
 Y_l &= Y_{2n} \quad l = 2n
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Los coeficientes impares de $l=1$ hasta $2n-1$ son

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0 \quad B_1 = e_{11} \quad C_1 = -e_{21} \quad D_1 = I_0'(0) - H_1^- (0) \\
 A_l &= e_{2n} e_{3n} - e_{4n} e_{1n} \\
 B_l &= e_{1n} e_{1n+1} - e_{3n} e_{3n+1} \\
 C_l &= e_{3n} e_{4n+1} - e_{1n} e_{2n+1} \\
 D_l &= e_{3n} [H_{n+1}^+ (0) - H_n^+ (\tau_n)] + e_{1n} [H_n^- (\tau_n) - H_{n+1}^- (0)]
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Los coeficientes pares desde $l=2$ hasta $2n-2$ son

$$\begin{aligned}
 A_l &= e_{2n+1} e_{1n} - e_{3n} e_{4n+1} \\
 B_l &= e_{2n} e_{2n+1} - e_{4n} e_{4n+1} \\
 C_l &= e_{1n+1} e_{4n+1} - e_{2n+1} e_{3n+1} \\
 D_l &= [H_{n+1}^+ (0) - H_n^+ (\tau_n)] e_{2n+1} + [H_{n+1}^- (0) - H_n^- (\tau_n)] e_{4n+1}
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

y para $l=2n$ los coeficientes son definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= e_{1n} - r_s e_{3n} \\
B_{2n} &= e_{2n} - r_s e_{4n} \\
C_{2n} &= 0 \\
D_{2n} &= r_s H_n^-(\tau_n) - H_n^+(\tau_n)
\end{aligned}
\tag{5.18}$$

En las expresiones anteriores se usó que :

$$\begin{aligned}
e_{1n} &= 1 + \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau_n) \\
e_{2n} &= 1 - \Gamma_n \exp(-\lambda_n \tau_n) \\
e_{3n} &= \Gamma_n + \exp(-\lambda_n \tau_n) \\
e_{4n} &= \Gamma_n - \exp(-\lambda_n \tau_n)
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

Para resolver estas ecuaciones, usamos el método estándar de solución tridiagonal

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= \frac{A_{2n}}{B_{2n}} \\
\beta_{2n} &= \frac{D_{2n}}{B_{2n}}
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

seguido de una secuencia desde $l=2n-1$ hasta $l=1$

$$\begin{aligned}
X_l &= (B_l - C_l \alpha_{l+1})^{-1} \\
\alpha_l &= A_l X_l \\
\beta_l &= (D_l - C_l \beta_{l+1}) X_l
\end{aligned}
\tag{5.21}$$

seguido por una secuencia de soluciones desde $l=1$ hasta $l=2n$

$$\begin{aligned}
Y_l &= \beta_l \\
Y_l &= \beta_l - \alpha_l Y_{l-1}
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

En uno de los apéndices se desarrollará completamente el proceso seguido para llegar a las expresiones (5.15) a (5.22).

Siguiendo el método de solución de dos flujos propuesto por Meador y Weaver (1980) y Toon et. al. (1989), se expondrá la solución para la ecuación de transferencia de radiación tomando en cuenta la dependencia explícita de la función fase y el albedo de dispersión simple de la profundidad óptica de cada capa atmosférica. En resumen, la solución es primeramente encontrada para las intensidades difusas ascendente y descendente en una capa atmosférica homogénea. Entonces, ésta solución es extendida al estudio de la

dispersión de la radiación solar en una atmósfera inhomogénea que está estratificada en múltiples capas verticales: existen en la literatura muchos métodos de soluciones de la ecuación de transferencia de radiación para describir la dispersión de la radiación solar en atmósferas verticalmente inhomogéneas. En particular se menciona el trabajo desarrollado por Meador y Weaver (1980), en el que se reporta la reflectancia y la transmitancia de la radiación solar en un modelo de atmósfera de una sola capa. Más tarde, Toon et. al. (1989), extendió la solución de Meador al estudio de la dispersión de la radiación solar en una atmósfera inhomogénea, asumiendo que la atmósfera está dividida en varias capas verticales. Ambos, Meador y Toon, trabajaron con una función fase que no dependía explícitamente de la profundidad óptica de la capa atmosférica y con un albedo que era una cantidad constante.

Por otro lado, las suposiciones sobre la función fase y el albedo, llevan a un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales acopladas para los flujos descendente y ascendente con coeficientes no constantes, cuya solución analítica en general no existe. La estrategia para resolver el problema, será asumir que la función fase y el albedo son considerados funciones constantes de la profundidad óptica y diferentes capa a capa. Los flujos a través de la atmósfera inhomogénea pueden ser encontrados aplicando condiciones de frontera similares pero no iguales a las usadas por Toon et. al. En particular, la condición de continuidad para los flujos descendente y ascendente en la frontera de cada capa es diferente a la utilizada por Toon et. al.

La ecuación de transferencia de radiación con la que se va a trabajar se puede escribir, para la intensidad difusa $I(\tau, \mu, \phi)$ en una atmósfera dispersiva plano paralela, como

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - J(\tau, \mu, \phi) \quad (5.23)$$

donde $J(\tau, \mu, \phi)$ es la función fuente dada por:

$$J(\tau, \mu, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\tau, \mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu' - \frac{1}{4} Fp(\tau, \mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \exp(-\tau/\mu_0) \quad (5.24)$$

Las coordenadas esféricas $\mu = \cos\theta$ y ϕ , con θ medido desde la normal exterior a la superficie, referida a la dirección de propagación de un haz de luz de intensidad I y profundidad óptica τ , πF es el flujo colimado incidente que atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación definida por (μ_0, ϕ_0) , siendo $\mu_0 = -\cos\theta_0$ y $p(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi')$ es la función fase o ley de dispersión simple de la partícula para la radiación dispersada de la dirección (μ', ϕ') en la dirección (μ, ϕ) . Ahora generalizaremos la condición de normalización propuesta por Meador asumiendo que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\tau, \mu, \phi; \mu', \phi') d\phi' d\mu = \omega(\tau) \quad (5.25)$$

donde $\omega(\tau)$ es el albedo de dispersión simple, esto es, la razón del coeficiente de dispersión a la suma de los coeficientes de dispersión y absorción.

Además extendemos la expansión de la función fase $p(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi')$ en términos de los polinomios de Legendre de la siguiente manera:

$$p(\tau, \mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau, \mu, \phi; \mu', \phi') d\phi = \sum_l R_l(\tau) P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (5.26)$$

donde $P_l(\mu)$ es el polinomio de Legendre de orden l -ésimo. Se puede mostrar (ver desarrollo de la sección anterior) que (5.26) se puede escribir como

$$p(\tau, \mu, \mu') = \omega(\tau) \sum_l (2l+1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (5.27)$$

y los coeficientes g_l son definidos como

$$g_l = \frac{1}{2\omega(\tau)} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\tau, \mu, 1) d\mu \quad (5.28)$$

con la definición adicional:

$$I(\tau, \mu) = \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) d\phi$$

la integración azimutal de (5.23) lleva a :

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{\pi F}{2} p(\tau, \mu, -\mu_0) \exp(-\tau/\mu_0) \quad (5.29)$$

definiendo las integrales hemisféricas

$$I^\pm(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu \quad (5.30)$$

sea la cantidad

$$\beta_0 = \frac{1}{2\omega(\tau)} \int_0^1 p(\tau, \mu_0, -\mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{\omega(\tau)} \int_0^1 p(\tau, \mu_0, \mu') d\mu' \quad (5.31)$$

Construimos el siguiente par de ecuaciones para I^+ e I^- de acuerdo a la definición dada en (5.30)

$$\begin{aligned}\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} &= \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu - \pi F \omega(\tau) \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0) \\ \frac{dI^-(\tau)}{d\tau} &= -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\tau, \mu, -\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \pi F \omega(\tau) (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)\end{aligned}\quad (5.32)$$

Al igual que Meador y Weaver, usamos la aproximación estándar de Eddington, esto es $I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)$, para construir el sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales acopladas para los flujos ascendente y descendente con coeficientes no constantes. En este caso, el sistema lineal da

$$\begin{aligned}\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} &= \gamma_1(\tau) I^+(\tau) - \gamma_2(\tau) I^-(\tau) - \pi F \omega(\tau) \gamma_3 \exp(-\tau/\mu_0) \\ \frac{dI^-(\tau)}{d\tau} &= \gamma_2(\tau) I^+(\tau) - \gamma_1(\tau) I^-(\tau) + \pi F \omega(\tau) \gamma_4 \exp(-\tau/\mu_0)\end{aligned}\quad (5.33)$$

donde $\gamma_1(\tau) = \frac{1}{4}[7 - \omega(\tau)(4 + 3g)]$, $\gamma_2(\tau) = -\frac{1}{4}[1 - \omega(\tau)(4 - 3g)]$ el coeficiente $\gamma_3 = \frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0)$, también satisface que $\gamma_3 + \gamma_4 = 1$. Estas ecuaciones tienen la misma estructura que las obtenidas por Meador y Weaver con las mismas expresiones analíticas para los coeficientes γ_i , excepto que ahora esos coeficientes son dependientes de τ .

Aquí es importante señalar lo que es el parámetro $\omega(\tau)$:

$$\omega g = \frac{f_s}{2} \int_{-1}^1 \mu p_s(\tau, \mu, 1) d\mu$$

donde g se conoce como factor asimétrico, ω es el albedo de dispersión simple, p_s es la función fase que da cuenta de la dispersión de partículas y f_s se define como el factor de dispersión dado por

$$f_s \equiv \frac{\beta_{scn}}{\beta_{scn} + \beta_{abs}}$$

donde β_{scn} y β_{abs} son los coeficientes de dispersión y absorción volumétrica respectivamente.

En los dos últimos capítulos se han reunido los elementos para resolver teórica y numéricamente el balance de radiación solar en una atmósfera inhomogénea. Primeramente, se tuvo que seleccionar el método de solución, entre las diversas aproximaciones de las ecuaciones de transferencia de radiación existentes en la literatura y después, fue necesario ocuparse en modelar la atmósfera en lo que respecta a las columnas de ozono y aerosoles, usando los conocimientos previos sobre dispersión de Rayleigh y la absorción de radiación por ozono.

La aproximación que se ha usado en este trabajo encaja en el conjunto de métodos conocidos en la literatura como métodos de dos flujos en los cuales se introduce la aproximación de Eddington.

La subdivisión de la atmósfera en N capas plano paralelas conduce a tratar con $2N$ ecuaciones algebraicas que se resuelven usando el método de Toon et. al. (1989), lo cual se muestra en este capítulo y en uno de los apéndices aplicando un método numérico apropiado para calcular los coeficientes de dichas ecuaciones, que son diferentes en cada capa.

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones

En principio se sabe como resolver la ecuación de transferencia de radiación en una atmósfera específica utilizando alguna de las numerosas técnicas numéricas. El problema surge para ahorrar tiempo en el trabajo de cómputo con el gran número de parámetros los cuales, al variar, dan lugar a una gran carga de cálculos. Con esto en mente, se ha seleccionado el proceso de dispersión iterativa de Dave y Gazdag (1970) en el cual la función fase para aerosoles es expresada en términos de su serie de Fourier (Dave, 1970).

Es el propósito del presente capítulo presentar las expresiones matemáticas que se requieren para poder analizar este problema en su forma final, así como justificar la equivalencia entre el formalismo de Meador et. al. (1980), resuelto con el algoritmo de Toon et. al. (1989), y el de Braslau (1973).

Cálculo del Flujo de Radiación

a. Consideraciones generales

Se asumirá una atmósfera sin nubes, plano paralela, semiinfinita con flujo solar incidente unidireccional en el tope. El flujo solar que penetra en la atmósfera se encontrará bajo la acción de la dispersión y la absorción, así que después de cada nivel habrá un flujo directo atenuado y dos flujos difusos más: uno superior y otro inferior. En el fondo de la atmósfera habrá una superficie idealizada de Lambert, la cual tiene la propiedad de que la radiación reflejada en ella no se encuentra polarizada y es isotrópica, independientemente del estado de polarización o de la distribución angular de la radiación incidente. La reflectividad del suelo, es un parámetro ajustable para estos cálculos, y está definido como la razón del flujo superior al inferior incidentes en la superficie. Se considerará una sola longitud de onda.

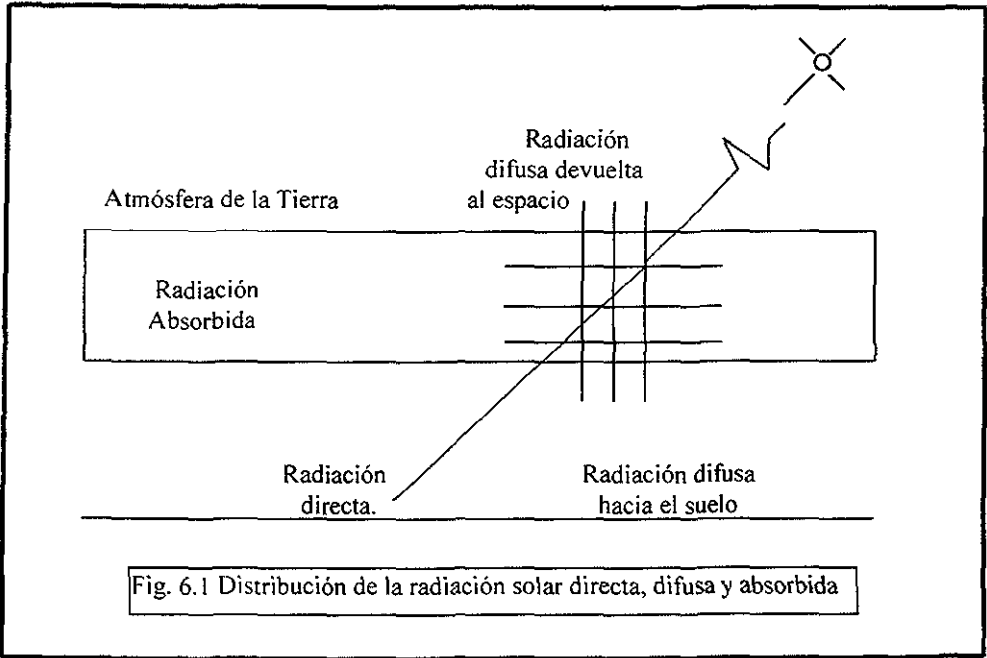
Para contar con el flujo en cada nivel (esto es, el flujo de energía radiante por unidad de longitud de onda, por unidad de tiempo a través de una unidad de área horizontal), se empleará una forma escalar de la ecuación de transferencia de radiación, es decir, la radiación dispersada será tomada como no polarizada. Se ha encontrado que preservar las características de polarización no produce ninguna diferencia esencial en los valores del flujo, además de que los valores de las intensidades dispersadas no son afectadas significativamente (Adams y Kattawar, 1970). Además, se despreciarán contribuciones debidas a emisiones termales de la superficie o de la atmósfera, ya que el promedio de temperaturas encontrado en esta es muy pequeño para contribuir significativamente en el rango espectral de interés. La forma de las partículas de aerosol se asumirá esférica.

b. Ecuación de Transferencia

La altura de un nivel en la atmósfera está dado por el espesor óptico de la atmósfera sobre éste, con su valor designado como 0 y τ_b para el tope y el fondo respectivamente (bottom = fondo). Este espesor es la suma de otros debidos a la absorción y dispersión por moléculas y aerosoles. En el apéndice A se profundizará es éste tópicó.

Atenuación de la Radiación Solar Directa: Formulación Básica

Cuando la radiación solar entra a la atmósfera de la Tierra, una parte de la energía incidente es removida por dispersión y otra por absorción. Ambas influencias cambian al espectro extraterrestre modificando la energía que atraviesa la atmósfera. La radiación dispersa es llamada radiación difusa. Una porción de ésta radiación difusa va de vuelta al espacio y una porción llega al suelo. La radiación que llega directamente en línea al suelo desde el disco solar es llamada *radiación directa o haz de radiación* (ver la figura).



La intensidad de la radiación emergente en el nivel τ en la dirección μ, φ es denotada por $I(\tau; \mu, \varphi)$. La ecuación básica a resolver para la transferencia de radiación monocromática a través de una atmósfera plano paralela, no homogénea tiene la siguiente forma:

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} = I(\tau; \mu, \varphi) - \omega(\tau)J(\tau; \mu, \varphi), \quad (6.1)$$

donde la función fuente $J(\tau; \mu, \varphi)$ está dada por

$$J(\tau; \mu, \varphi) = \frac{1}{4} \exp(-\tau/\mu_0) P(\tau; \mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) F + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (6.2)$$

Y se asume que πF es el flujo de radiación solar por unidad de área en $\tau=0$ para ángulos derechos a la dirección incidente representada por $-\mu_0, \varphi_0$. Las condiciones a la frontera son:

$$\left. \begin{aligned} I(0; -\mu, \varphi) &\equiv 0 \\ I(\tau_0; +\mu, \varphi) &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

es decir, no hay radiación iluminando a la atmósfera desde el suelo o abajo de él. La contribución debida a la reflexión del suelo de Lambert puede ser tratada por separado siguiendo un procedimiento introducido por Chandrasekhar (1950).

El albedo para dispersión simple $\omega(\tau)$ y la función fase de dispersión normalizada $P(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi')$ de un volumen unitario que contiene aire y aerosoles es definido como sigue:

$$\omega(\tau) = [\Delta\tau^{(s,m)} + \Delta\tau^{(s,r)}] / \Delta\tau, \quad (6.4)$$

$$P(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') = T(\tau)M(\mu, \varphi; \mu', \varphi') + [1 - T(\tau)]R(\mu, \varphi; \mu', \varphi'), \quad (6.5)$$

donde el factor de turbidez $T(\tau)$ es definido

$$T(\tau) = \Delta\tau^{(r,m)} / [\Delta\tau^{(s,m)} + \Delta\tau^{(s,r)}]. \quad (6.6)$$

Las cantidades $M(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ y $R(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ son las funciones fase de dispersión normalizadas de Mie y Rayleigh respectivamente. Los primeros dos parámetros, μ y φ , representan la dirección de la radiación dispersada mientras que los dos últimos representan la dirección de la radiación incidente.

c. Funciones Fase de Dispersión

Dave y Gazdag (1970) y Dave (1970b) han discutido las ventajas de calcular soluciones de la ecuación de transferencia expandiendo a la función fase en una serie de Fourier cuyo argumento es la diferencia entre los ángulos azimutales de las radiaciones incidente y dispersada. En éste caso, la intensidad de la función fuente también puede expresarse en una serie de Fourier. Mucho del tiempo que se lleva esto es consumido en evaluar la doble

integral en la ecuación (6.2) la cual, gracias al uso de ésta expansión se reduce a una sola integral (ver capítulo 4). Aún más, como los cálculos para el flujo incluyen sólo el primer término en la expansión en serie de Fourier para la intensidad, el trabajo de cómputo se reduce significativamente.

Si Θ es el ángulo de dispersión entre la dirección de incidencia y dispersión, las funciones de Mie y Rayleigh están dadas respectivamente por

$$R(\cos\Theta) = \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(r)} P_{k-1}(\cos\Theta),$$

$$M(\cos\Theta) = \sum_{k=1}^K \Lambda_k^{(m)} P_{k-1}(\cos\Theta),$$
(6.7)

donde $\Lambda_1^{(r)} = 1, \Lambda_2^{(2)} = 0$, y $\Lambda_3^{(r)} = \frac{1}{2}$. Las cantidades $P_{k-1}(\cos\Theta)$ son los polinomios ordinarios de Legendre. Los coeficientes de Legendre $\Lambda_k^{(m)}$ para las series representan a la función fase normalizada de Mie en la unidad de volumen que contiene una distribución de tamaños conocida para aerosoles esféricos que está dada por

$$\Lambda_k^{(m)} = \frac{\lambda^2}{\pi \beta^{(s,m)}} \int_{r_1}^{r_2} L_k(x, m) n(r) dr,$$
(6.8)

donde λ es la longitud de onda de la radiación incidente, y $n(r)$ es una función de distribución de tamaños (Deirmendjian, 1969) que da el número de partículas por unidad de volumen por unidad de intervalo para el radio r . Las cantidades $L_k(x, m)$ son los coeficientes no normalizados de Legendre (Dave, 1970b) de las series que representan a la función de dispersión de una sola partícula la cual tendrá un valor de $x = 2\pi r / \lambda$ para el parámetro de tamaño, y un valor de $m = n_1 - in_2$ para el índice de refracción del material. La cantidad $\beta^{(s,m)}$ es el coeficiente volumétrico de dispersión en la función de Mie.

Las funciones de dispersión $R(\cos\Theta)$ y $M(\cos\Theta)$ pueden ser expresadas en series de Fourier haciendo uso de el teorema de adición de los armónicos esféricos. El argumento de las series será el término $\varphi - \varphi'$ el cual representa la diferencia entre los ángulos azimutales de las direcciones de incidencia y dispersión. Las series de Fourier de las funciones de Mie y Rayleigh dan lugar a su vez a otra forma de la serie de la función fase $P(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi')$ dada por la ecuación (6.5).

Para dar solución a las ecuaciones de balance de radiación en la atmósfera, es necesario abordar el modelamiento de la función fase asociada a los dispersores contenidos en la misma. Para ello, necesitamos de su caracterización óptica en capas paralelas a densidad constante. En ésta tarea aparece la necesidad de determinar los coeficientes de Legendre que surgen del tratamiento en la dispersión de Mie, lo cual requiere de grandes tiempos de cálculo, sobre todo, para dispersores cuyo radio es mucho mayor que la longitud de onda en estudio.

El número de coeficientes de Legendre que se necesitan para evaluar la función fase crece proporcionalmente al parámetro de tamaño x , éste problema empieza a ser crítico si manejamos valores de $x > 100$, éste es el caso en el que la labor de cómputo se dispara y resulta impráctico éste procedimiento. Para evitar que esto suceda, implementamos una manera de correlacionar los diversos coeficientes de Legendre y obtener una función analítica que nos permita conocer su valor sin necesidad de hacer los cálculos.

El modelo atmosférico usado como base de los cálculos es uno que representa las condiciones de verano de una latitud promedio. Las variaciones de presión, temperatura, vapor de agua, y ozono con la altura están dadas en forma numérica para varias alturas por McClatchey *et. al.* (1970). Este modelo atmosférico está dividido en 160 capas de espesor variable con la presión p_i [mb] en el tope de éstas capas dada por

$$p_i = 1013 \exp\left\{-3.4219 \times 10^{-3}(161-i) \times [1 + 6.7056 \times 10^{-2}(161-i)]\right\}, \quad 1 \leq i \leq 161. \quad (6.9)$$

El espesor geométrico de estas capas se incrementa continuamente desde 0.031 km. en el fondo hasta 0.619 Km. en el tope. Por otro lado, la cantidad de presión de estas capas se incrementa desde 0.131 mb. para la capa superior hasta 1113.25 mb. para la capa localizada a una altura de 4 Km. sobre el suelo.

En éste modelo se considerará que la radiación solar será afectada a través de las diferentes capas por la absorción y dispersión causada por los gases de la atmósfera, principalmente ozono, y por aerosoles. Se asumirá que la concentración de vapor de agua es despreciable, y que no se presentan nubes, es decir, un modelo para días totalmente despejados y soleados. El flujo solar al ir atravesando las diferentes capas, es absorbido y dispersado al hacer contacto con las moléculas de los gases y partículas de los aerosoles, resultando ser sólo una pequeña parte del flujo solar que incide en la capa superior de la atmósfera, el que llega directamente a la superficie terrestre. En cada capa se va a encontrar radiación que entra y que sale en todas direcciones debido a la radiación difusa, mientras que la radiación directa ha de incidir con un ángulo θ . Los espesores ópticos para cada capa irán variando en función de las distribuciones verticales de gases y partículas, y por la longitud de onda que se esté estudiando.

El espesor óptico da cuenta de la radiación que se ha perdido en una capa determinada debido a la absorción y dispersión causada por los gases y partículas y como ya se mencionó estará conformado por cuatro componentes:

$$\tau = \tau_{ag} + \tau_{vg} + \tau_{ap} + \tau_{vp}$$

$\tau_{ag} \equiv$ Espesor óptico por absorción de gases.

$\tau_{vg} \equiv$ Espesor óptico por dispersión de gases.

$\tau_{ap} \equiv$ Espesor óptico por absorción de partículas.

$\tau_{vp} \equiv$ Espesor óptico por dispersión de partículas.

En éste modelo sólo se considerará la absorción por ozono.

La ecuación de transferencia de radiación se tendrá que aplicar en cada capa, ya que en ella está contenida la información que describe la forma en que la radiación solar es dispersada y absorbida al penetrar y chocar con los elementos que se encuentran suspendidos en la atmósfera.

El problema que se plantea para cada capa es el siguiente: dado un cuerpo de forma arbitraria compuesto por aerosoles y gases que recibe radiación directa y difusa proveniente de todas direcciones irradia también en todas direcciones como se muestra en la figura 6.2.

La solución de la ecuación de transferencia para este problema es bastante compleja e implica el manejo de procedimientos matemáticos no triviales como puede observarse en los capítulos 4 y 5, en los que se asumió el modelo propuesto por Eddington de dos flujos; es decir, se supone a la radiación saliendo y entrando de la capa en que se encuentra el cuerpo dispersor formando un ángulo de cero grados con la vertical. La solución de la ecuación de transferencia en ésta forma requiere de un tratamiento especial para la función de Mie. La función fase de Rayleigh puede expresarse en forma sencilla, y su deducción ha sido ampliamente estudiada en el pasado. En cambio, la función de Mie implica en su solución la utilización de los coeficientes de Legendre. Lo cual a su vez, requiere de cálculos muy tardados ya que han de ser dados en función del tamaño de la partícula dispersora y de su índice de refracción.

Un proceso que ya ha sido aplicado para agilizar y simplificar el manejo de los cálculos de los coeficientes de Legendre es el uso de una escala que normalice a 1, es decir, el número de coeficientes a calcular es $10 * k = 2x + 10$. Donde x es el tamaño de la partícula (esférica), y K diferirá de partícula a partícula. Sin embargo, si se extiende el número de términos hasta $(10 * k) / (2x + 10)$, cuando K sea igual a $2x + 10$, esto será igual a 1 sin importar el valor de x , de ésta manera es posible decir que conociendo el índice de refracción m , el rango y el valor que asumirán los coeficientes representarán un promedio evitando calcularlos en cada ocasión. La curva de ajuste es analítica, y en cada caso es posible dar una expresión de la misma. Cabe resaltar que el índice de refracción está expresado en dos partes una real y otra imaginaria, cuando no existe la parte imaginaria, físicamente no hay absorción. Pero si la parte imaginaria es mayor que cero y aumenta, esto significa que el proceso de absorción es más intenso.

Una vez conocidas las expresiones de las dos funciones fase (Rayleigh y Mie), se tiene la información central de los procesos de transferencia radiativa.

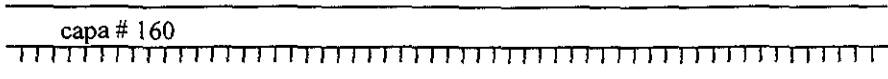
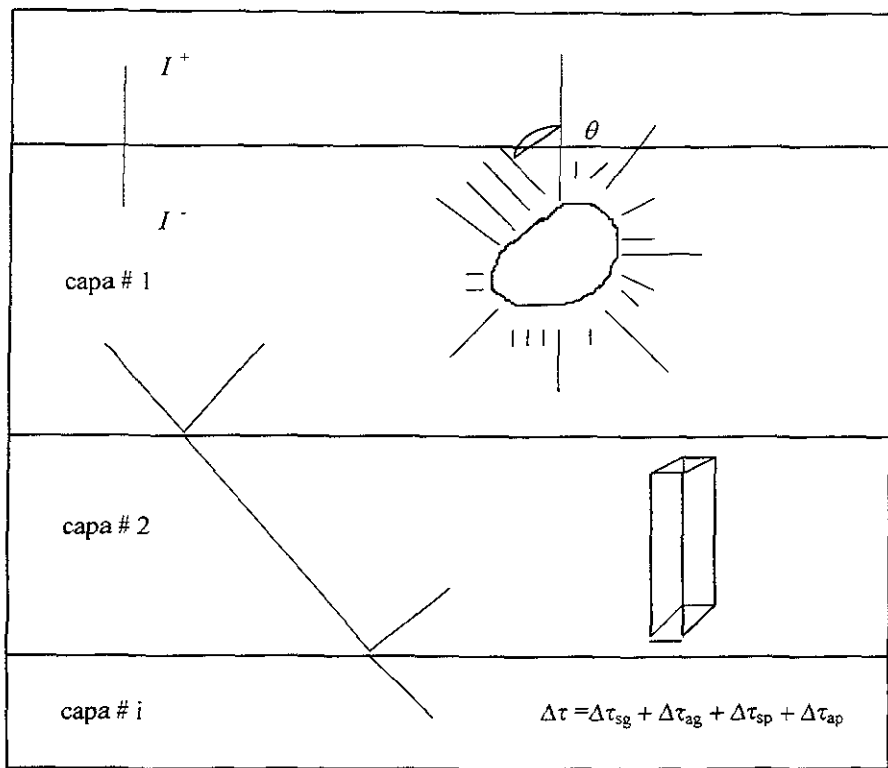


Fig. 6.2 Modelo Atmosférico de 160 capas

Equivalencia en los Análisis de Braslau y Meador

En este apartado se transformarán las ecuaciones mostradas en los párrafos anteriores correspondientes a la forma en que Braslau (1973) plantea la ecuación de transferencia de radiación, y en términos de la cual se obtendrán resultados para las intensidades difusas, a partir de la elaboración de un programa de cómputo que constituye el segundo paso después de este trabajo, dado que también se ha considerado el modelo atmosférico señalado por Braslau para resolver el problema que ocupa al presente trabajo. Por lo cual hay que modificar a estas ecuaciones de tal forma que se llegue a expresiones consistentes con el formalismo de Meador et al. (1980), ya que es en función del mismo que se han presentado todos los desarrollos matemáticos y algoritmos para resolver la ecuación de balance, así como el tratamiento hecho a la función fase. Es decir hay que demostrar que los procedimientos de los capítulos 4 y 5 para las ecuaciones presentadas y resueltas por medio del algoritmo de Toon et al. (1989) son completamente aplicables a las ecuaciones tal como se han mostrado en esta capítulo, y, que ambos caminos son completamente equivalentes tal como se mostrará en el apéndice C.

La función fase presentada por Braslau (1973) es :

$$p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') = T(\tau)M(\mu, \varphi; \mu', \varphi') + [1 - T(\tau)]R(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \quad (6.10)$$

con

$$\omega(\tau) = \frac{\Delta\tau^{(s,m)} + \Delta\tau^{(s,r)}}{\Delta\tau}; \quad T(\tau) = \frac{\Delta\tau^{(s,m)}}{\Delta\tau^{(s,m)} + \Delta\tau^{(s,r)}}$$

$$R(\cos\Theta) = \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^r P_{j-1}(\cos\Theta)$$

$$M(\cos\Theta) = \sum_{j=1}^k \Lambda_j^m P_{j-1}(\cos\Theta)$$

$$\cos\Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi')$$

De lo cual se ve que la función fase puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') &= T(\tau)M(\mu, \varphi; \mu', \varphi') + R(\mu, \varphi; \mu', \varphi') - T(\tau)R(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \\ &= T(\tau)[M(\mu, \varphi; \mu', \varphi') - R(\mu, \varphi; \mu', \varphi')] + R(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \\ &= T(\tau) \left[\sum_{j=1}^k \Lambda_j^m P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi') - \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^r P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi') \right] + \sum_{j=1}^3 \Lambda_j^r P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T(\tau) \left[\sum_{j=4}^k \Lambda_j^m P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi) \right] + \sum_{j=1}^3 \Lambda_j' P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi) \\
&= \left[T(\tau) \sum_{j=4}^k \Lambda_j^m + \sum_{j=1}^3 \Lambda_j' \right] P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi, \varphi)
\end{aligned}$$

Se define a

$$\sum_{j=1}^k \Lambda_j(\tau) \equiv T(\tau) \sum_{j=4}^k \Lambda_j^m + \sum_{j=1}^3 \Lambda_j' \quad (6.11)$$

$$\therefore p(\tau, \mu, \mu'; \varphi) = \sum_{j=1}^k \Lambda_j(\tau) P_{j-1}(\mu, \mu'; \varphi) \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
p(\tau, \mu, \mu') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) P_{j-1}[\mu\mu' + (1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi - \varphi')] d\varphi
\end{aligned}$$

Por el Teorema de adición de los armónicos esféricos:

$$\begin{aligned}
p(\tau, \mu, \mu') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) \int_0^{2\pi} \left[P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{j-1} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_{j-1}^m(\mu) P_{j-1}^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \right] d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) \left[\int_0^{2\pi} P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') d\varphi + 2 \sum_{m=1}^{j-1} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_{j-1}^m(\mu) P_{j-1}^m(\mu') \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi') d\varphi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') (2\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu')
\end{aligned}$$

$$\therefore p(\tau, \mu, \mu') = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') \quad (6.13)$$

evaluando en $\mu' = 1$ y tomando en cuenta el hecho de que $P_{j-1}(1) = 1 \quad \forall j$:

$$p(\tau; \mu, 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) P_{j-1}(\mu) \quad (6.14)$$

se multiplica por $P_{j-1}(\mu)$ y se integra de -1 a 1:

$$\int_{-1}^1 p(\tau; \mu, \mu') P_{j-1}(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) \int_{-1}^1 P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu) d\mu \quad (6.15)$$

y se aplica el teorema de ortogonalidad de los armónicos esféricos:

$$\int_{-1}^1 P_j(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} ; \quad \delta_{ll} = \begin{cases} 1 & l = l' \\ 0 & l \neq l' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, 1) P_{j-1}(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(\tau) \frac{2}{2(l-1)+1} \delta_{(j-1)(l-1)}$$

como solo queda el término para el cual $j = j$:

$$\int_{-1}^1 p(\tau; \mu, 1) P_{j-1}(\mu) d\mu = \Lambda_j(\tau) \frac{2}{2j-1}$$

cambiando $j' \rightarrow j$ y despejando $\Lambda_j(\tau)$:

$$\Lambda_j(\tau) = \frac{2j-1}{2} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, 1) P_{j-1}(\mu) d\mu \quad \text{y sustituyendo en (6.13):}$$

$$p(\tau; \mu, \mu') = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j-1}{2} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, 1) P_{j-1}(\mu) d\mu P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu')$$

Se cumple que:

$$p(\tau; \mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1) g_j(\tau) P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') \quad (6.16)$$

Esta expresión es equivalente a la condición de integración sobre la función fase descrita en el capítulo 4.

En forma similar, para la condición de normalización de la función fase:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi d\mu = \omega(\tau) \\ & = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1) \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, 1) P_{j-1}(\mu) d\mu \right] P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') d\mu = \omega(\tau) \\ \omega(\tau) & = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1) g_j(\tau) P_{j-1}(\mu) P_{j-1}(\mu') d\mu \\ \omega(\tau) & = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, \mu') d\mu \end{aligned}$$

La última ecuación para omega es equivalente a la presentada en el capítulo 4 , y de hecho es la misma expresión y representa la misma cantidad física.

Por otro lado, se satisface:

$$p(\tau; \mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi) d\varphi \quad (6.17)$$

De los desarrollos anteriores se puede comprobar que las formas en que se presentan las funciones fase de Braslau (1973), y Meador (1980), son equivalentes y las condiciones aplicadas en el capítulo 4 son válidas para la ecuación tal como se presentó a principios de este capítulo.

Aunque esto solo se ha demostrado para la función fase únicamente, en el apéndice C se desarrollan las expresiones restantes en forma equivalente a como se hizo en el capítulo 4 y se comprueba que se llega al mismo par de ecuaciones diferenciales acopladas para los flujos de radiación difusos ascendente y descendente respectivamente.

Conclusiones

De acuerdo a los desarrollos vistos en la sección anterior y en los capítulos 4 y 5 , el objetivo del presente trabajo puede considerarse alcanzado en el sentido de que constituye la cimentación del modelo que se seguirá para obtener valores para las intensidades de radiación difusa, y que expone los procedimientos matemáticos que lo justifican.

Como se mencionó en la Introducción, primero fue necesario el estudio de los artículos que planteaban modelar la ecuación de balance utilizando el método de dos flujos y su completo entendimiento, además de resolverla en base al algoritmo de Toon, para después generalizar a una forma explícita en la dependencia de la función fase del espesor óptico sabiendo cuales eran las condiciones fundamentales que tenían que preservarse.

En base a lo antes mencionado, este trabajo es un estudio de la teoría básica de dispersión con el objetivo de resolver un problema teórico: plantear una solución de la ecuación de transferencia que incluyera la mayor cantidad de parámetros de información posibles, para así, obtener resultados más realistas sobre los valores de la intensidades de radiación.

Sin embargo, el valor de lo que se desarrolla aquí se encuentra en el hecho de que se pudo comprender cada uno de los pasos involucrados en el análisis, así como el papel de las cantidades físicas incluidas en el mismo. Además de que se realizaron las modificaciones necesarias al método ya que aquí se toma en cuenta la dependencia explícita de la función fase en el espesor óptico y que se puede expresar como una combinación lineal de las funciones de Rayleigh y Mie. La presencia de partículas absorbentes induce un escalamiento de la función fase que satisface la condición de normalización para el albedo de dispersión simple.

El objetivo central de este trabajo es comprender como se puede resolver ETRA's para la dispersión múltiple en una atmósfera inhomogénea tomando en cuenta la presencia de moléculas y aerosoles. Por esto fue necesario desarrollar los métodos que no tomaban en cuenta estos parámetros extra y después generalizarlos pero cuidando de que se cumplieran las condiciones fundamentales que ya se habían estudiado para los casos más básicos. Se usaron y modificaron los métodos desarrollados por Meador et. al. (1980) y Toon et. al. (1989) puesto que se asumió que la función fase depende del espesor óptico, lo que dichos autores no toman en cuenta. Siguiendo los pasos del método, se obtuvo un sistema de ecuaciones acopladas para las intensidades difusas, pero con coeficientes dependientes del espesor óptico, como se muestra en el capítulo 5 . Se resolvió suponiendo que dichos coeficientes son constantes en cada capa de la atmósfera, obteniéndose así soluciones similares a las de Toon utilizando las condiciones de frontera requeridas reduciendo también el problema de resolver la matriz tridiagonal. Se toma en cuenta la presencia de partículas absorbentes haciendo un escalamiento de la función fase a través del factor de dispersión f_s . Esto garantiza que se cumple la condición general de normalización cuando la dispersión y la absorción están presentes. En este caso, el albedo de dispersión simple en función del espesor óptico, debe ser menor o igual a 1.

Apéndices

A.- Estimación de Espesores Ópticos

Considerar un haz de radiación paralelo monocromático I_0 entrando en un medio homogéneo, como en la figura A.1, I será el flujo emergente después de atravesar el medio a una distancia d de éste. La cantidad en la que fue atenuado el haz original al pasar el medio puede ser evaluada por la ley de Bouguer, también llamada ley de Lambert o ley de Beer. De acuerdo con la ley de Bouguer, la atenuación de la luz es proporcional a la distancia recorrida y al flujo local de radiación. Esta ley es aplicada en muchos otros ejemplos (con excepción de la absorción por gases), siempre y cuando la luz sea dispersada o absorbida. Esta ley se aplica a radiación monocromática únicamente y en términos de ella se puede escribir

$$I = I_0 \exp(-kd), \quad (\text{A.1})$$

k es el coeficiente de extinción o atenuación,

d es la longitud de la trayectoria óptica, y

kd es el espesor óptico de extinción monocromática adimensional (τ),

En ciertas aplicaciones, k es medida usualmente en relación a la dirección zenital y tiene que ser adimensional mientras que d (en éste caso relativo a la masa óptica) también lo será.

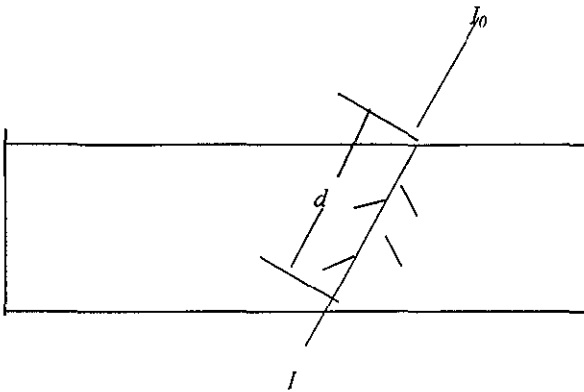


Fig. A.1
Atenuación de la radiación directa a través de una atmósfera homogénea.

Sea el medio en la figura A.1 la atmósfera de la Tierra. I_0 es la irradiancia extraterrestre monocromática a la distancia media entre el Sol y la Tierra. Como éste flujo entra en la atmósfera tendrán que ser llevados a cabo varios procesos que involucren distintos coeficientes de extinción k_i . Ya que todos los procesos de extinción ocurren independientemente unos de otros, el conjunto de todos los espesores ópticos de extinción debidos a éstos procesos puede ser escrito como la suma de todos los espesores individuales

$$kd = \sum_{i=1}^{i=j} k_i d_i \quad \text{o} \quad \tau = \sum_{i=1}^{i=j} \tau_i \quad (\text{A.2})$$

donde

k_i es el coeficiente de atenuación monocromática para un sólo proceso, como la absorción por ozono, i varía desde 1 hasta j , y j es el número total de procesos, y

d_i es la longitud de la trayectoria óptica para el proceso bajo consideración.

La ecuación (A.2) es válida mientras el proceso obedezca la ley de Bouguer.

La transmitancia o coeficiente de transmisión para la atmósfera también es útil. Es la razón de la radiación emergente de un medio a la radiación incidente. Es particularmente útil cuando uno o más procesos de atenuación no obedecen la ley de Bouguer.

La transmitancia debida a un sólo proceso está dada por la siguiente expresión:

$$T_i = \exp(-k_i d_i) \quad (\text{A.3})$$

La transmitancia monocromática debida a la radiación directa puede ser escrita como

$$T = \frac{I}{I_0} = \prod_{i=1}^{i=j} T_i \quad (\text{A.4})$$

donde T_i es la transmitancia debida a un sólo proceso i y T es debida a todos los procesos combinados.

La ley de Bouguer representa exactamente los procesos de dispersión por gases, absorción y dispersión por aerosoles. La absorción de la radiación por gases es un proceso altamente complejo. Por lo tanto, hablando estrictamente, ésta ley no es válida también para éste caso. Aún así la ley de Bouguer es usualmente aplicada a absorción por gases. De cualquier modo, una vez que se conoce la transmitancia, la irradiancia espectral directa puede ser encontrada a partir de la ecuación (A.4) por medio de la ley de Bouguer u otras.

Por lo visto anteriormente, es decir, que los procesos de extinción ocurren independientemente unos de otros, y que el conjunto de todos los espesores ópticos de extinción debidos a estos procesos pueden ser escritos como la suma de todos los espesores individuales, el espesor óptico puede ser escrito como:

$$\tau = \tau^{(s,r)} + \tau^{(s,m)} + \tau^{(a,m)} + \tau^{(a)} \quad (\text{A.5})$$

El espesor óptico correspondiente a la dispersión de Rayleigh $\tau^{(s,r)}$ en el nivel h [km] sobre el suelo puede ser tomado proporcional a la presión en ése nivel. Los valores de las

cantidades $\tau^{(s,m)}$ y $\tau^{(a,m)}$, los respectivos espesores ópticos por dispersión y absorción debido a aerosoles (dispersión de Mie), pueden ser calculados para una longitud de onda dada y una función de distribución de tamaños siguiendo uno de los procedimientos desarrollados por Deirmendjian, (1969).

El modelo para definir a los planos paralelos que limitan a cada capa es el mismo que ya se mencionó en el capítulo 6, sólo se resaltaré que en éste modelo se asume que la radiación solar al ir atravesando las diferentes capas, será modificada debido a la absorción y dispersión de gases (principalmente ozono) y aerosoles en la atmósfera. Se considerará que la concentración de vapor de agua es despreciable, es decir que no se presentan nubes, siendo el caso de un día totalmente despejado y soleado. Otra consideración importante, es la de usar un suelo idealizado de Lambert, esto es, que la radiación reflejada por la superficie es isotrópica y no polarizada, independientemente del estado de polarización o distribución angular de la radiación incidente.

La dispersión por gases (Rayleigh) τ_{sg} se estime a partir del coeficiente de dispersión de Rayleigh $\beta_m(\lambda)$ y de la profundidad óptica $H(z)$, donde z representa a la altura en kilómetros

$$\tau_{sg} = (\lambda, z) = \int_{\infty}^z \beta_m(\lambda) H(z) dz, \quad (A.6)$$

De esta ecuación puede observarse que el espesor óptico es una cantidad acumulativa, es decir, para calcular su valor a una altura dada z es necesario integrar desde el tope de la atmósfera (límite inferior ∞) o desde la altura en que se está considerando que termina la misma, hasta la altura z (límite superior).

La absorción por gases es calculada usando información sobre la sección eficaz de absorción de ozono, en éste caso será solo para el ozono, pero si se desea calcular éste valor debido a otros gases, se tendrán que añadir más integrales utilizando las secciones eficaces de absorción para cada uno de ellos en el integrando como se verá a continuación para el caso del ozono.

$$\tau_{ag}(\lambda, z) = \int_{\infty}^z \sigma(\lambda) N(z) dz, \quad (A.7)$$

donde $N(z)$ es la densidad numérica de ozono como una función de la altitud, integrando sobre la columna de ozono desde el tope de la atmósfera hasta la altura z . A continuación se muestran algunos valores de los espesores ópticos para tres longitudes de onda como se muestran en la siguiente tabla:

λ [nm]	σ [cm ² moléculas ⁻¹]	β_m [km. ⁻¹]
332.5	0.707×10^{-20}	94.032×10^{-3}
412.5	0.000	38.102×10^{-3}
575.0	0.501×10^{-20}	9.705×10^{-3}

Tabla A.1 Coeficientes de Dispersión de Rayleigh y secciones eficaces de colisión para tres longitudes de onda.

Los espesores ópticos asociados a las partículas de aerosol se calculan en base a los coeficientes de dispersión y absorción Q_{sca} y Q_{abs} . Para ello se emplean las ecuaciones debidas a la teoría de Mie (capítulo 3) como sigue:

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right), \quad (A.8)$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n), \quad (A.9)$$

tal que $Q_{abs} = Q_{ext} - Q_{sca}$, y los coeficientes

$$a_n = \frac{\psi_n(y)\psi_n(x) - m\psi_n(y)\psi_n'(x)}{\psi_n'(y)\zeta_n(x) - m\psi_n(y)\zeta_n'(x)}, \quad (A.10)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n'(y)\psi_n(x) - \psi_n(y)\psi_n'(x)}{m\psi_n'(y)\zeta_n(x) - \psi_n(y)\zeta_n'(x)}$$

donde x es el parámetro de tamaño de la partícula que se considera esférica y m es el índice de refracción complejo, n es un número entero positivo, $\psi(x)$ y $\zeta(x)$, son funciones de Ricatti-Bessel la prima denota la derivada con respecto al argumento de la función. El siguiente paso es calcular los coeficientes de dispersión y absorción volumétricos β_{sca} y β_{abs} introduciendo una distribución de tamaños de aerosol de la siguiente manera, ver ref. (2):

$$N(r) = a(h)r^2 \exp(-b\sqrt{r}), \quad (A.11)$$

donde $a(h)$ es un parámetro constante que depende de la altura, y b es sólo una constante

$$\beta_{sca} = \pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 Q_{sca} N(r) dr. \quad (A.12)$$

$$\beta_{abs} = \pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 Q_{abs} N(r) dr. \quad (A.13)$$

En algunos trabajos se han usado los valores $r_1 = 0.01 \mu\text{m}$ y $r_2 = 1 \mu\text{m}$. Finalmente los espesores ópticos se calculan usando las definiciones

$$\tau_{sp}(\lambda, z) = \int_{\infty}^z \beta_{sca} dz, \quad (\text{A.14})$$

El espesor óptico debido a la dispersión por partículas y

$$\tau_{op}(\lambda, z) = \int_{\infty}^z \beta_{abs} dz \quad (\text{A.15})$$

El espesor óptico por absorción de partículas.

B.- Modelación de Funciones Fase

Para dar solución a las ecuaciones de balance radiativo en la atmósfera es necesario abordar el modelamiento de la función fase asociada a los dispersores contenidos en ella. Para esto se necesita de la caracterización óptica en capa paralelas a densidad constante. En ésta tarea aparece la condición de determinar los coeficientes de Legendre que surgen del tratamiento de la función de Mie, lo cual requiere de grandes tiempos de cálculo, sobre todo para dispersores cuyo radio es mucho mayor que la longitud de onda en estudio.

En éste trabajo, al resolver la ecuación de transferencia radiativa se está asumiendo el modelo propuesto por Eddington de dos flujos; es decir, se supone a la radiación saliendo y entrando de la capa que la dispersa formando un ángulo de cero grados con la vertical. La solución de la ecuación de transferencia en ésta forma requiere un tratamiento particular para la función fase de Mie. La función fase de Rayleigh puede expresarse en forma exacta y su deducción ha sido ampliamente estudiada en el pasado.

Para el tratamiento de la función fase de Rayleigh:

$$R(\cos\Theta) = \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(r)} P_{k-1}(\cos\Theta) \quad (\text{B.1})$$

$$\Lambda_1^{(r)} = 1$$

con $\Lambda_2^{(r)} = 0$ los tres primeros coeficientes de Legendre.

$$\Lambda_3^{(r)} = 1/2$$

$$R(\cos\Theta) = \Lambda_1^{(r)} P_0(\cos\Theta) + \Lambda_2^{(r)} P_1(\cos\Theta) + \Lambda_3^{(r)} P_2(\cos\Theta)$$

$$= (1)(1) + (0)(\cos\Theta) + (1/2) \left[(1/2)(3\cos^2\Theta - 1) \right]$$

$$1 + \frac{3}{4}\cos^2\Theta - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\Theta = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta)$$

$$\therefore R(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta) \quad (\text{B.2})$$

que es la función de Rayleigh

$$\text{con } \cos\Theta = x = \left[\mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi - \phi') \right] \quad (\text{B.3})$$

Comúnmente, los valores de cuatro funciones de dispersión que describen a la radiación electromagnética dispersada por una esfera son usualmente calculadas de las expresiones derivadas por Mie (1904). Sin embargo, estas funciones de dispersión muestran grandes

variaciones en el ángulo de dispersión (Θ) cuando el radio (r) de la esfera es grande comparado con la longitud de onda (λ) que se está estudiando. De hecho para una esfera cuyo parámetro de tamaño $x (= 2\pi r/\lambda)$, una función de dispersión contra Θ muestra sobre x un número de máximos y mínimos conforme Θ varía de 0° a 180° . Para muchas aplicaciones, es deseable evaluar el campo de la radiación dispersada en aproximadamente un número $10x$ de posiciones en el ángulo de dispersión. Aún más, cuando se está interesado en características de dispersión de polidispersiones esféricas, es necesario calcular las funciones de dispersión para muchos cientos de valores de x .

Siguiendo a Mie (1904), primero se evalúan dos cantidades complejas [$S_1(x, m, \Theta)$ y

$S_2(x, m, \Theta)$], donde m es el índice de refracción del material de la esfera con respecto al medio circundante. Las expresiones para S_1 y S_2 contienen funciones $\pi_n(\cos \Theta)$ y $\pi_n(\cos \Theta)$, las cuales son expresables en términos de la primera y segunda derivadas de las funciones ordinarias de Legendre, y esto produce una fuerte dependencia en la dirección. Hartel (1940) propuso primero que las expresiones para estas funciones de dispersión podrían ser simplificadas por el uso repetido de relaciones de recurrencia entre las derivadas y los productos de las funciones de Legendre. Esto daría para cada una de estas funciones una serie cuyos términos son los polinomios ordinarios de Legendre pesados por coeficientes que dependieran de m y x únicamente. Chandrasekhar (1950) mostró que una solución de la ecuación de transferencia radiativa en la n -ésima aproximación para una función fase general podía ser obtenida expresando a la fase como una serie de Legendre. Las expresiones para estas series fueron obtenidas primero por Sekera (1952). Más tarde Chu y Churchill (1955) obtuvieron independientemente expresiones similares para la función fase escalar y publicaron los valores para los coeficientes de la series de Legendre para algunos valores seleccionados de x . Se observó que tal representación de las funciones de dispersión de Legendre para una esfera requiere de alrededor de $2x + 10$ número de términos, mientras que las cantidades S_1 y S_2 estarán completamente representadas por sólo $x + 10$ número de términos.

Como se mencionó anteriormente Sekera (1952) expresó las cuatro funciones de dispersión en la forma de series de Legendre. En lo que sigue, sus resultados finales serán reproducidos después de algunos cambios menores de conformidad con la notación usada. La primera función de dispersión aparece en la matriz de transformación de Van de Hulst (1957) es $M_2(x, m, \Theta)$, la cual está dada por

$$M_2(x, m, \Theta) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)}(x, m) P_{k-1}(\cos \Theta). \quad (\text{B.4})$$

Para los tres elementos restantes, las expresiones son similares, $M_1(x, m, \Theta)$, $S_{2j}(x, m, \Theta)$, y $D_{2j}(x, m, \Theta)$, pueden ser obtenidas sustituyendo $j = 2, 3$ y 4 , respectivamente, en $L_k^{(j)}(x, m)$.

Los coeficientes de Legendre están dados por

$$L_k^{(1)}(x, m) = (k - 0.5) \sum_{m=k^*}^{\infty} a_m^{(k-1)} \sum_{i=0}^k b_i^{(k-1)} \Delta_{i,k} \times \operatorname{Re} \left[D_p(x, m) D_q^*(x, m) \right] \quad (\text{B.5})$$

$$L_k^{(2)}(x, m) = (k - 0.5) \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{(k-1)} \sum_{i=0}^k b_i^{(k-1)} \Delta_{i,k} \times \operatorname{Re} \left[C_p(x, m) C_q^*(x, m) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$L_k^{(3)}(x, m) = (0.5k - 0.25) \sum_{m=k^*}^{\infty} a_m^{(k-1)} \sum_{i=0}^k b_i^{(k-1)} \Delta_{i,k} \times \operatorname{Re} \left[C_p(x, m) D_q^*(x, m) - C_p^*(x, m) D_q(x, m) \right] \quad (\text{B.7})$$

y

$$L_k^{(4)}(x, m) = (0.5k - 0.25) \sum_{m=k^*}^{\infty} a_m^{(k-1)} \sum_{i=0}^k b_i^{(k-1)} \Delta_{i,k} \times \operatorname{Im} \left[C_p(x, m) D_q^*(x, m) - C_p^*(x, m) D_q(x, m) \right] \quad (\text{B.8})$$

El superíndice (*) representa al complejo conjugado de la función correspondiente. Los símbolos $\operatorname{Re}[\]$ e $\operatorname{Im}[\]$ implican las partes real e imaginaria, respectivamente, de la cantidad compleja en los paréntesis.

$$k^* = \begin{cases} (k-1)/2 & k \text{ impar} \\ (k-2)/2 & k \text{ par} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta_{i,k} = \begin{cases} 1 \text{ para } i=0 & k \text{ impar,} \\ 2 \text{ para } i > 0 & k \text{ impar,} \\ 2 \text{ para } i \geq 0 & k \text{ par} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Los subíndices p y q están dados por $p = m - i + 1$ y $q = m + i + 1 + \delta$, con $\delta = 0$ para los valores impares de k , y $\delta = 1$ para los valores pares de k .

Para los valores impares de $k > 1$, las cantidades $a_m^{(k-1)}$ y $b_i^{(k-1)}$ son obtenidas después de usar las siguientes relaciones de recurrencia para un valor de $m = k'$, y de $i = 0$ respectivamente:

$$a_{(k-1)/2}^{(k-1)} = \frac{4(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-3)} a_{(k-3)/2}^{(k-3)} \quad (\text{B.11})$$

y

$$b_0^{(k-1)} = \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 b_0^{(k-3)} \quad (\text{B.12})$$

Para $k = 1$, $a_0^{(0)} = 2$ y $b_0^{(0)} = 1$. Entonces, para $m > k'$, $a_m^{(k-1)}$ es obtenida de la siguiente relación de recurrencia:

$$a_m^{(k-1)} = \frac{(2m-k)(2m+k-1)}{(2m+k)(2m-k+1)} a_{m-1}^{(k-1)}. \quad (\text{B.13})$$

y para $i > 0$, $b_i^{(k-1)}$ está dado por

$$b_i^{(k-1)} = \frac{(k-2i+1)(k+2i-2)}{(k-2i)(k+2i-1)} b_{i-1}^{(k-1)}. \quad (\text{B.14})$$

Para valores pares de $k > 2$, las cantidades $a_m^{(k-1)}$ y $b_i^{(k-1)}$ se calculan primero utilizando las siguientes relaciones de recurrencia para un valor de $m = k'$ e $i = 0$, respectivamente:

$$a_{(k-2)/2}^{(k-1)} = \frac{4(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-3)} a_{(k-4)/2}^{(k-3)} \quad (\text{B.15})$$

y

$$b_0^{(k-1)} = \frac{(k-1)(k-3)}{k(k-2)} b_0^{(k-3)} \quad (\text{B.16})$$

Para $k = 2$, $a_0^{(1)} = 4/3$ y $b_0^{(1)} = 1/2$. Entonces para $m > k'$, $a_m^{(k-1)}$ es obtenida después de hacer uso de la siguiente relación de recurrencia:

$$a_m^{(k-1)} = \frac{(2m-k+1)(2m+k)}{(2m+k+1)(2m-k+2)} a_{m-1}^{(k-1)} \quad (\text{B.17})$$

y para $i > 0$, $b_i^{(k-1)}$ es obtenido de

$$b_i^{(k-1)} = \frac{(2i+k-1)(2i-k)}{(2i-k+1)(2i+k)} b_{i-1}^{(k-1)} \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, las funciones complejas $C_k(x, m)$ y $D_k(x, m)$ son calculadas por las siguientes fórmulas:

$$C_k(x, m) = \left(\frac{1}{k}\right)(2k-1)(k-1)b_{k-1}(x, m) + (2k-1) \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [p^{-1} + (p+1)^{-1}] a_p(x, m) - [(p+1)^{-1} + (p+2)^{-1}] b_{p+1}(x, m) \right\} \quad (\text{B.19})$$

y

$$D_k(x, m) = \left(\frac{1}{k}\right)(2k-1)(k-1)b_{k-1}(x, m) + (2k-1) \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [(p+1)^{-1} + (p+2)^{-1}] b_p(x, m) - [p^{-1} + (p+1)^{-1}] a_{p+1}(x, m) \right\} \quad (\text{B.20})$$

donde por las ecuaciones (B.19) y (B.20), $p = k + 2i - 2$. Se tiene que $a_0(x, m) = b_0(x, m) = 0$.

Un proceso implementado aquí para agilizar y simplificar el manejo de los cálculos de los coeficientes de Legendre es el uso de una escala que normalice a los coeficientes a 1, es decir, el número de coeficientes a calcular es $10k = 2x + 10$. Donde x es el tamaño de la partícula esférica, y el número k diferirá de partícula a partícula. Sin embargo, si se extiende el número de términos hasta $(10k) / (2x + 10)$, cuando k sea igual a $2x + 10$, esto será igual a 1 sin importar el valor de x , de ésta manera es posible decir que conociendo el índice de refracción m , el rango y el valor que asumirán los coeficientes representarán un promedio evitando calcularlos en cada ocasión.

Al realizar esta normalización y el ajuste de los coeficientes se observa que la curva es analítica, y en cada caso es posible dar la expresión de la misma. Cabe resaltar que el índice de refracción está expresado en dos partes: una real y otra imaginaria, cuando no existe la parte imaginaria, físicamente se tiene un proceso de dispersión sin absorción, cuando la parte imaginaria es distinta de cero y aumentase incluye absorción e incremento de la misma.

En los resultados obtenidos se observa una dispersión en los máximos de los coeficientes de Legendre, lo cual corresponderá al comportamiento de los mismos en base al rango de tamaños de las partículas dispersoras. Debido a esto será necesario no perder de vista que se está trabajando con un margen de error que se puede calcular en base al ajuste de las curvas que representan a los coeficientes.

Así mismo se observa que esta dispersión avanza en el máximo conforme el índice de refracción crece en su parte imaginaria (lo cual como ya se mencionó corresponde a un proceso de absorción), esto puede ser corregido ajustando las curvas de los coeficientes de tal modo que se elimine el margen de error por medio de un proceso no lineal.

Una vez resueltas éstas dos funciones fase se tiene la información central en los procesos de transferencia radiativa.

C.- Equivalencia entre las Ecuaciones de Transferencia propuestas por Braslau y Meador.

El propósito de este apéndice es mostrar la equivalencia entre las ecuaciones de transferencia propuestas por Braslau (1973), y Meador (1980), las cuales consisten en plantear a la ecuación integrodiferencial en términos del albedo, (ver capítulo 6) o incluirlo implícitamente en la ecuación a través de la normalización de la función fase (capítulo 4).

Ambas definiciones son esencialmente iguales, y para mostrarlo, se desarrollarán los pasos seguidos en el capítulo 4 para analizar la ecuación tal como Meador (1980) la define, y se llegarán a las expresiones que obtiene este último pero partiendo de la ecuación en su forma propuesta por Braslau (1973), la cual consiste en incluir al albedo en la ecuación explícitamente.

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \omega J - \omega J_0 \quad (C.1)$$

Ecuación de transferencia Radiativa propuesta por Braslau (1973)

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' \quad (C.2)$$

$$J_0 = \frac{\pi F_0}{4\pi} P(\mu, \varphi; -\mu_0, \varphi_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

De acuerdo con Chandrasekhar (1960):

$$P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l(\tau) P_l \left[\mu\mu' + (1-\mu)^2(1-\mu')^2 \cos(\varphi' - \varphi) \right]$$

$$P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum_l \tilde{\omega}_l(\tau) \left[P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi) \right]$$

$$P(\tau, \mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi$$

$$\therefore P(\tau, \mu, \mu') = \sum_l \tilde{\omega}_l(\tau) P_l(\mu) P_l(\mu')$$

$$\cos\theta = \mu\mu' + (1-\mu)^2(1-\mu')^2 \cos(\varphi' - \varphi)$$

$$\therefore P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') = \sum \tilde{\omega}_l(\tau) P_l(\cos \theta)$$

$$I^+(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu = \int_0^1 \int_0^{2\pi/\theta} I(\tau, \theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$I^+(\tau) = \int_0^1 \int_0^{2\pi/\theta} \mu I(\tau, \theta, \varphi) d\Omega$$

$$I^-(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, -\mu) d\mu = \int_0^{-1} \mu I(\tau, \mu) d\mu = \int_0^{2\pi/\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \mu I(\tau, \mu, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$I^-(\tau) = \int_0^{2\pi/\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \mu I(\tau, \theta, \varphi) d\Omega$$

Para $I^+(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} \mu I(\tau, \mu) = I(\tau, \mu) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu) d\mu' - \frac{\pi F_0}{2} P(\tau, \mu, -\mu_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu &= \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \\ &- \frac{\pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0)}{2} \int_0^1 P(\tau, \mu, -\mu_0) d\mu \end{aligned}$$

Para $I^-(\tau)$ reemplazamos $\mu \rightarrow -\mu$ antes de integrar:

$$\frac{d}{d\tau} (-\mu) I(\tau, -\mu) = I(\tau, -\mu) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\tau, -\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{\pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0)}{2} P(\tau, -\mu, -\mu_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \mu I(\tau, -\mu) d\mu &= - \int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, -\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \\ &+ \frac{\pi F_0 \exp(-\tau/\mu_0)}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, -\mu_0) d\mu \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_l(\tau) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\tau, \cos\theta) P_l(\cos\theta) d(\cos\theta)$$

si $\mu' = 1 \Rightarrow \cos\theta = \mu \therefore$

$$\tilde{\omega}_l(\tau) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) P_l(\tau, \mu, 1) d\mu = 1 \quad \tilde{\omega}_0 = 1$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 P_1(\mu) P_1(\tau, \mu, 1) d\mu = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \mu P_1(\tau, \mu, 1) d\mu$$

se define al factor asimétrico como

$$g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu P_1(\tau, \mu, 1) d\mu \quad (C.3)$$

$$\therefore \tilde{\omega}_1 = 3g$$

La integración en el ángulo azimutal de (1) conduce a

$$\mu \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu) = I(\tau, \mu) - \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{\omega \pi F_0}{2} P(\tau, \mu, \mu_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

definimos

$$I^\pm(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \pm\mu) d\mu \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I^+(\tau) &= \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu \\ I^-(\tau) &= \int_0^1 \mu I(\tau, -\mu) d\mu \end{aligned} \quad (C.4)$$

De la condición de normalización:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi d\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') d\mu = 2 \quad (C.5)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu) d\mu + \int_0^1 P(\tau, \mu, \mu) d\mu = 2$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, \mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_{01}^1 P(\tau, \mu, \mu) d\mu = 1$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, \mu, \mu) d\mu = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, \mu) d\mu$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, \mu, -\mu_0) d\mu = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, -\mu_0) d\mu$$

Sea
$$\gamma_4 = \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, \mu_0) d\mu$$

$$\gamma_3 = \beta_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, -\mu, -\mu_0) d\mu \quad \therefore \begin{aligned} \gamma_3 &= 1 - \gamma_4 & \gamma_4 &= 1 - \beta_0 \\ \gamma_4 + \gamma_3 &= 1 \end{aligned}$$

Que son las expresiones encontradas en el capítulo 4 .

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{\omega}{2} \int_{0-1}^1 \int_0^1 P(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu) d\mu' d\mu - \pi F_0 \omega (\beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{\omega}{2} \int_{0-1}^1 \int_0^1 P(\tau, -\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \pi F_0 \omega (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$P(\tau, \mu, \mu) = \sum_i \tilde{\omega}_i P_i(\mu) P_i(\mu')$$

pero
$$P(\tau, -\mu, \mu) = \sum_i \tilde{\omega}_i P_i(-\mu) P_i(\mu') \quad \therefore P(\tau, -\mu, \mu) = P(\tau, \mu, -\mu')$$

$$P(\tau, \mu, -\mu') = \sum_i \tilde{\omega}_i P_i(\mu) P_i(-\mu)$$

Los sistemas de ecuaciones integrodiferenciales son ahora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I^+(\tau) &= \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{\omega}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu - \pi F_0 \omega \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0) \\ \frac{d}{d\tau} I^-(\tau) &= -\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{\omega}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, -\mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \pi F_0 \omega (1 - \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0)) \end{aligned} \quad (C.6)$$

La aproximación de Eddington:

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)$$

$$\Rightarrow I^+(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu [I_0(\tau) + \mu I_1(\tau)] d\mu$$

$$I^+(\tau) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{3}$$

$$I^-(\tau) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_1}{3} \quad \Rightarrow \quad I_0 = I^+(\tau) + I^-(\tau)$$

$$\mu I^+(\tau) = \frac{\mu I_0}{2} + \frac{\mu I_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mu I^+ - \mu I^- = \frac{2}{3} \mu I_1$$

$$-\mu I^-(\tau) = -\frac{\mu I_0}{2} + \frac{\mu I_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mu I_1 = \frac{3}{2} \mu I^+ - \frac{3}{2} \mu I^-$$

$$I(\tau, \mu) = I^+(\tau) + I^-(\tau) + \frac{3}{2} \mu I^+ - \frac{3}{2} \mu I^-$$

$$I(\tau, \mu) = \frac{1}{2} (2 + 3\mu) I^+ + \frac{1}{2} (2 - 3\mu) I^-$$

$$I(\tau, -\mu) = \frac{1}{2} (2 - 3\mu) I^+ + \frac{1}{2} (2 + 3\mu) I^-$$

$$\int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 [(2 + 3\mu) I^+ + (2 - 3\mu) I^-] d\mu = \frac{1}{2} \left[\left(2 + \frac{3}{2}\right) I^+ + \left(2 - \frac{3}{2}\right) I^- \right]$$

$$\int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{4} (2 + 3) I^+ + \frac{1}{4} (4 - 3) I^- = \frac{1}{4} [(4 + 3) I^+ + (4 - 3) I^-]$$

$$\int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{4} [(4 + 3) I^+ + (4 - 3) I^-] = \frac{1}{4} [7 I^+ + I^-]$$

$$\int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu = \frac{1}{4} [(4 - 3) I^+ + (4 + 3) I^-] = \frac{1}{4} [I^+ + 7 I^-]$$

Evaluando ahora las siguientes integraciones:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') I(\tau, \mu') d\mu d\mu' \equiv J \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') [(2 + 3\mu') I^+(\tau) + (2 - 3\mu') I^-(\tau)] d\mu d\mu' \\
 &= \frac{I^+(\tau)}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') (2 + 3\mu') d\mu d\mu' + \frac{I^-(\tau)}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') (2 - 3\mu') d\mu d\mu' \\
 &= \frac{2I^+(\tau)}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu' + \frac{2I^-(\tau)}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu' \\
 &+ \frac{3}{2} I^+(\tau) \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu' - \frac{3}{2} I^-(\tau) \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu'
 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') d\mu = 2$$

$$\mu = -z \quad d\mu = -dz$$

$$\int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') d\mu = - \int_{-1}^1 P(\tau, -z, \mu') dz = \int_{-1}^1 P(\tau, -\mu, \mu') d\mu = 2$$

$$\therefore J = \frac{4}{2} I^+(\tau) \int_0^1 d\mu + \frac{4}{2} I^-(\tau) \int_0^1 d\mu + \frac{3}{2} I^+(\tau) \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu'$$

$$- \frac{3}{2} I^-(\tau) \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu'$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P(\tau, \mu, \mu') = \sum_l \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(\mu') \approx \tilde{\omega}_0 P_0(\mu) P_0(\mu') + \tilde{\omega}_1 P_1(\mu) P_1(\mu')$$

$$P(\tau, \mu, -\mu) \approx \tilde{\omega}_0 P_0(\mu) P_0(-\mu) + \tilde{\omega}_1 P_1(\mu) P_1(-\mu)$$

$$P(\tau, \mu, \mu') \approx \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1(\mu)(\mu') = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 \mu \mu'$$

$$P(\tau, \mu, -\mu) \approx \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1(\mu)(-\mu) = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}_1 \mu \mu'$$

$$\therefore P(\tau, \mu, \pm \mu') \approx \tilde{\omega}_0 \pm \tilde{\omega}_1 \mu \mu' = 1 \pm 3g \mu \mu'$$

$$\therefore \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' P(\tau, \mu, \pm \mu') d\mu d\mu' \approx \int_0^1 \int_{-1}^1 \mu' (1 \pm 3g \mu \mu') d\mu d\mu'$$

$$\int_0^1 d\mu \int_{-1}^1 \mu d\mu \pm 3g \int_0^1 \mu d\mu \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \pm \frac{3g}{2} \left[\frac{\mu^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pm \frac{3}{2} g \left(\frac{2}{3} \right) = \pm g$$

$$J = 2I^+(\tau) + 2I^-(\tau) + \left(\frac{3}{2}\right) I^+(\tau) [\pm g] - \left(\frac{3}{2}\right) I^-(\tau) [\pm g]$$

$$J = \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu) I(\tau, \mu) d\mu d\mu \quad \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \mu') I(\tau, \mu) d\mu d\mu = I^+(\tau) + I^-(\tau) \pm \frac{3}{4} g I^+(\tau) \mp \frac{3}{4} g I^-(\tau)$$

$$= \frac{1}{4} (4 \pm 3g) I^+(\tau) + \frac{1}{4} (4 \mp 3g) I^-(\tau)$$

$$\frac{\omega}{2} J = \frac{\omega}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\tau, \mu, \pm \mu) I(\tau, \mu) d\mu d\mu = \frac{\omega}{4} [(4 \pm 3g) I^+(\tau) + (4 \mp 3g) I^-(\tau)]$$

Así:

$$\frac{d}{d\tau} I^+(\tau) = \frac{1}{4} [7I^+(\tau) + I^-(\tau)] - \left[\frac{\omega}{4} (4 + 3g) + \frac{\omega}{4} (4 - 3g) I^-(\tau) \right] - \pi F_0 \omega \beta_0 \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{d}{d\tau} I^-(\tau) = - \left[\frac{1}{4} I^+(\tau) + \frac{7}{4} I^-(\tau) \right] + \left[\frac{\omega}{4} (4 - 3g) I^+(\tau) + \frac{\omega}{4} (4 + 3g) I^-(\tau) \right] +$$

$$+ \pi F_0 \omega (1 - \beta_0) \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{dI^+}{d\tau} = \frac{1}{4} [7 - \omega(4 + 3g)] I^+ + \frac{1}{4} [1 - \omega(4 - 3g)] I^- - \pi F_0 \omega \gamma_3 \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\frac{dI^-}{d\tau} = -\frac{1}{4} [1 - \omega(4 - 3g)] I^+ - \frac{1}{4} [7 - \omega(4 + 3g)] I^- + \pi F_0 \omega \gamma_4 \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\text{Sea} \quad \gamma_1 = \frac{1}{4} [7 - \omega(4 + 3g)]; \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4} [1 - \omega(4 - 3g)] \quad (\text{C.7})$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} &= \gamma_1 I^+(\tau) - \gamma_2 I^-(\tau) - \pi F_0 \omega \gamma_3 \exp(-\tau/\mu_0) \\ \frac{dI^-(\tau)}{d\tau} &= \gamma_2 I^+(\tau) - \gamma_4 I^-(\tau) + \pi F_0 \omega \gamma_4 \exp(-\tau/\mu_0)\end{aligned}\tag{C.8}$$

Para calcular el valor explícito de los coeficientes:

$$\begin{aligned}\beta_0 = \gamma_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 P(\tau, \mu, -\mu_0) d\mu \approx \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{\omega}_0 P_0(\mu) P_0(-\mu_0) + \tilde{\omega}_1 P_1(\mu) P_1(-\mu_0)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + 3g(\mu)(-\mu_0)) d\mu = \left[1 + (-\mu_0) 3g \frac{\mu^2}{2} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3g}{2} \mu_0 \right]\end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{4} (1 - 3g\mu_0)$$

$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} g\mu_0 \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} g\mu_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} g\mu_0 = \frac{1}{4} (2 + 3g\mu_0)$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \gamma_3 &= \frac{1}{4} (2 + 3g\mu_0) \\ \gamma_4 &= \frac{1}{4} (2 + 3g\mu_0)\end{aligned}\tag{C.9}$$

Las ecuaciones (C.8) y (C.9) son exactamente iguales a las obtenidas en el capítulo 4 , los coeficientes tienen los mismos valores, pero se partió de la idea de que el albedo no es necesariamente 1, es decir no se está en el caso de dispersión perfecta , lo cual es la suposición de Meador (1980). Sin embargo el igualar la integración azimutal de la función fase al albedo o el introducirlo, como aquí, directamente en la ecuación de transferencia radiativa, no altera el método de solución en lo más mínimo, lo cual se ve del desarrollo anterior . Por lo tanto, al planteamiento que hace Braslau y con el cual se está trabajando en el capítulo 6 se le pueden aplicar los mismos métodos de solución discutidos en el capítulo 4 y 5 .

Apéndice D

Caso Límite: Función de Rayleigh

En éste apartado se encontrará el primer término de la serie de Fourier en el caso llamado aquí como límite; debido a que la función fase adquiere su forma más simple y a la vez mejor conocida: la de dispersión causada únicamente por gases, es decir, la función fase de Rayleigh. En éste caso los procedimientos mostrados en los capítulos 4 y 5 se desarrollarían, pero sin la necesidad de utilizar la expansión en polinomios de Legendre para la función fase dado que no se incluye el término asociado a Mie, lo cual simplificará considerablemente las expresiones tanto para la aproximación de Eddington y de dos flujos, como para encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales acopladas y el algoritmo que lleva a la matriz tridiagonal del capítulo 5. A continuación se muestra el proceso para encontrar el primer término del desarrollo de Fourier de la función fase lo que seguiría es en si lo que ya se mostró en los citados capítulos, pero utilizando explícitamente a la función de Rayleigh en el lugar de la función fase.

Como se vió en el apéndice anterior, la función fase de Rayleigh es la siguiente:

$$R(\cos \Theta) = 3/4(1 + \cos^2 \Theta) \tag{D.1}$$

$$\text{con } \cos \Theta = x = [\mu \mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi - \phi')] \tag{D.2}$$

la ecuación de transferencia radiativa es :

$$2\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = 2I(\tau, \mu, \phi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} R(\cos \Theta) I(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu' - \frac{1}{2} FR(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \exp(-\tau/\mu_0) \tag{D.3}$$

$$\mu = \cos \theta$$

$$\mu_0 = \cos \theta_0 \text{ (incidencia normal)}$$

$$\pi F = \text{flujo incidente colimado}$$

$$I = \text{Intensidad}$$

$$R(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) = [\mu \mu_0 + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu_0^2)^{1/2} \cos(\phi - \phi_0)]$$

Ahora hay que obtener el primer término de las series de Fourier de la función de Rayleigh, según Dave y Gazdag (1970) corresponde a la integración sobre el ángulo azimutal de la función fase descrita por

$$R(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi \quad (\text{D.4})$$

dada por Chandrasekhar (1960):

$$\begin{aligned} R(\cos\Theta) &= \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta) \\ \cos^2\Theta &= (\mu\mu')^2 + 2(\mu\mu')(1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}\cos(\phi-\phi') + (1-\mu^2)(1-\mu'^2)\cos^2(\phi-\phi') \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\cos\Theta) d\phi &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right) \left[\int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{2\pi} \cos^2\Theta d\phi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right) \left[2\pi + \int_0^{2\pi} (\mu\mu')^2 d\phi + \int_0^{2\pi} [2(\mu\mu')(1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}\cos(\phi-\phi')] d\phi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} [(1-\mu^2)(1-\mu'^2)\cos^2(\phi-\phi')] d\phi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right) \left[2\pi + (\mu\mu')^2 2\pi + 2(\mu\mu')(1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}(0) + (1-\mu^2)(1-\mu'^2) \left[\pi + \frac{1}{4}(0)\right] \right] \end{aligned}$$

Porque:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi') d\phi = \sin(\phi - \phi') \Big|_0^{2\pi} = \sin(2\pi - \phi') - \sin(-\phi') \\
& = \sin 2\pi \cos \phi' - \cos 2\pi \sin \phi' + \sin \phi' = -\sin \phi' + \sin \phi' = 0 \\
& \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi - \phi') d\phi = \frac{1}{2}(\phi - \phi') \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2(\phi - \phi') \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[2\pi - \phi' - 0 + \phi'] \\
& + \frac{1}{4}[\sin(4\pi - 2\phi') - \sin(-2\phi')] = \pi + \frac{1}{4}[\sin 4\pi \cos 2\phi' - \cos 4\pi \sin 2\phi' + \sin 2\phi'] \\
& = \pi + \frac{1}{4}(0) \\
& \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right) \left[1 + (\mu\mu')^2 + \frac{1}{2}(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)\right] = \left(\frac{3}{4}\right) \left[1 + \mu^2\mu'^2 + \frac{1}{2}(1 - \mu^2 - \mu'^2 + \mu^2\mu'^2)\right] \\
& = \frac{3}{8}[3 + 3\mu^2\mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2] \\
\therefore \int_0^{2\pi} R(\cos\Theta) d\phi &= \frac{3}{8}[3 + 3\mu^2\mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2] \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Lo que corresponde a la ecuación 2 de Dave y Gazdag (1970) identificada como el primer término de la serie de Fourier de la función fase de Rayleigh.

E. Desarrollos de los capítulos 4 y 5.

SOLUCION DE LAS ECUACIONES ACOPLADAS DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} I^+(\tau) \\ I^-(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^+(\tau) \\ I^-(\tau) \end{pmatrix} + \pi F \omega_0 \exp(-\tau/\mu_0) \begin{pmatrix} -\gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

también:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{I}(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{I}(\tau) + \mathbf{F}(\tau) \quad (\text{E.2})$$

donde:

$$\mathbf{I}(\tau) = \begin{pmatrix} I^+(\tau) \\ I^-(\tau) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \pi F \omega_0 \exp(-\tau/\mu_0) \begin{pmatrix} -\gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación (E.2) es:

$$\mathbf{I}(\tau) = \exp(\mathbf{A}\tau) \mathbf{I}(0) + \left(\exp(\mathbf{A}\tau) \right)' \int_0^\tau \left[\exp(-\mathbf{A}z) \right] \mathbf{F}(z) dz \quad (\text{E.3})$$

A ésta solución se aplica el método de eigenfunciones y eigenvalores, los eigenvalores de la matriz A se encuentran a través del polinomio característico:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \gamma_1 - \alpha & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 - \alpha \end{vmatrix} = -(\gamma_1 + \alpha)(\gamma_1 - \alpha) + \gamma_2^2 = 0 \\ &= -\gamma_1^2 + \alpha^2 + \gamma_2^2 = 0 \\ &= -\gamma_1^2 + \alpha^2 + \gamma_2^2 = 0 \\ \therefore \alpha^2 &= \gamma_1^2 - \gamma_2^2; \quad \alpha_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = -\sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}; \quad \alpha_1 = \kappa \quad \text{y} \quad \alpha_2 = -\kappa \end{aligned}$$

La matriz de eigenfunciones puede ser construida resolviendo:

$$(\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{I}) \mathbf{X} = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} - \alpha_2 \mathbf{I}) \mathbf{X} = 0$$

Para la primera eigenfunción: $(\mathbf{A} - \alpha_1 \mathbf{I})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \kappa & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -(\gamma_1 + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$$(\gamma_1 - \kappa)x_1 - \gamma_2 x_2 = 0, \quad \gamma_2 x_1 - (\gamma_1 + \kappa)x_2 = 0 \quad \text{si } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2}$$

La primera eigenfunción es: $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix}$

Para encontrar la segunda:

$$(\mathbf{A} - \alpha_2 \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 - \alpha_2 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -(\gamma_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 + \kappa & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -(\gamma_1 - \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow (\gamma_1 + \kappa)x_1 - \gamma_2 x_2 = 0 \quad \text{si } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2}$$

$$\gamma_2 x_1 - (\gamma_1 - \kappa)x_2 = 0$$

La segunda eigenfunción es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix}$

Por esto, la matriz de eigenfunciones queda como:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix} \quad \text{Por lo tanto: } \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{D} \quad \text{donde } \mathbf{D} \text{ es una matriz diagonal}$$

constituida por los eigenvalores α_1, α_2 o $\kappa, -\kappa$

$$\det \mathbf{T} = \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} - \frac{(\gamma_1 - \kappa)}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 + \kappa - \gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} = \frac{2\kappa}{\gamma_2}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} & -1 \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{\gamma_2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_2}{2\kappa} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} & -1 \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{\gamma_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} & \frac{-\gamma_2}{2\kappa} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} & \frac{\gamma_2}{2\kappa} \end{pmatrix}$$

se puede corroborar que $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{D}$

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 - \kappa & \gamma_1 + \kappa \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - (\gamma_1 - \kappa) & \gamma_1 - (\gamma_1 - \kappa) \\ \gamma_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\gamma_1 - \kappa) & \gamma_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\gamma_1 + \kappa) \end{pmatrix}$$

$$\text{pero: } \gamma_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\gamma_1 - \kappa) = \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 + \gamma_1 \kappa}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 \kappa - \kappa^2}{\gamma_2} = \frac{\kappa(\gamma_1 - \kappa)}{\gamma_2}$$

$$\gamma_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\gamma_1 + \kappa) = \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_1 \kappa}{\gamma_2} = -\frac{\kappa^2 - \gamma_1 \kappa}{\gamma_2} = \frac{-\kappa(\gamma_1 + \kappa)}{\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} & \frac{-\gamma_2}{2\kappa} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} & \frac{\gamma_2}{2\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ \frac{\kappa(\gamma_1 - \kappa)}{\gamma_2} & \frac{-\kappa(\gamma_1 + \kappa)}{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2} - \frac{(\gamma_1 - \kappa)}{2} & \frac{-(\gamma_1 + \kappa)}{2} + \frac{(\gamma_1 + \kappa)}{2} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2} + \frac{(\gamma_1 - \kappa)}{2} & \frac{-(\kappa - \gamma_1)}{2} - \frac{(\gamma_1 + \kappa)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} \therefore \mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\exp(+\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1})^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1} + \frac{1}{2} (\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}) (\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}) + \dots + \frac{1}{n!} (\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}) (\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}) \dots (\mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1})$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1} + \frac{1}{2!} \mathbf{T} \mathbf{D}^2 \mathbf{T}^{-1} + \dots + \frac{1}{n!} \mathbf{T} \mathbf{D}^n \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} (\mathbf{I} + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{D}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{D}^n}{n!}) \mathbf{T}^{-1}$$

$$= \mathbf{T} (\exp(\mathbf{D})) \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \exp(\mathbf{A}) = \mathbf{T} (\exp(\mathbf{D})) \mathbf{T}^{-1}; \quad \exp(-\mathbf{Az}) = \mathbf{T} (\exp(-\mathbf{Dz})) \mathbf{T}^{-1}$$

$$\exp(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa^2}{2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\kappa^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n \kappa^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\kappa) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa) \end{pmatrix}$$

$$\exp(-\mathbf{Az}) = \mathbf{T} [\exp(-\mathbf{Dz})] \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \exp(-\alpha_1 z) & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha_2 z) \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \exp(-\kappa z) & 0 \\ 0 & \exp(\kappa z) \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{T}(\exp(-\mathbf{D}\tau))\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \exp(\alpha_1\tau) & 0 \\ 0 & \exp(\alpha_2\tau) \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1};$$

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1}$$

Se define

$$\mathbf{B}(\tau) = \int_0^{\tau} (\exp(-\mathbf{A}z))\mathbf{F}(z)dz = \int_0^{\tau} \mathbf{T}\begin{pmatrix} \exp(-\kappa z) & 0 \\ 0 & \exp(\kappa z) \end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(z)dz \quad (\text{E.4})$$

$$= \pi F \omega_0 \int_0^{\tau} \left[\exp(-z/\mu_0) \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\kappa z) & 0 \\ 0 & \exp(\kappa z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} & \frac{-\gamma_2}{2\kappa} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} & \frac{\gamma_2}{2\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} dz$$

$$= \pi F \omega_0 \int_0^{\tau} \left[\exp(-z/\mu_0) \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\kappa z) & 0 \\ 0 & \exp(\kappa z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma_3}{2\kappa}(\gamma_1 + \kappa) & \frac{-\gamma_2\gamma_4}{2\kappa} \\ \frac{-\gamma_3}{2\kappa}(\kappa - \gamma_1) & \frac{\gamma_2\gamma_4}{2\kappa} \end{pmatrix} dz$$

sea $\alpha_2 = \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4$ (E.5)

$$\mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \int_0^{\tau} \left[\exp(-z/\mu_0) \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\kappa z) & 0 \\ 0 & \exp(\kappa z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\kappa}(\alpha_2 + \alpha\gamma_3) \\ \frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 - \kappa\gamma_3) \end{pmatrix} dz$$

$$\mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \int_0^{\tau} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1 - \kappa}{\gamma_2} & \frac{\gamma_1 + \kappa}{\gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 + \kappa\gamma_3) \exp(-\kappa z) \\ -\frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 - \kappa\gamma_3) \exp(\kappa z) \end{pmatrix} \left[\exp(-z/\mu_0) \right] dz$$

$$\mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \int_0^{\tau} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 + \kappa\gamma_3) \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)z\right] + \frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 - \kappa\gamma_3) \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)z\right] \\ -\frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2} \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)z\right] + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2} \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)z\right] \end{pmatrix} dz$$

$$\mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 + \kappa\gamma_3) \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)z\right] dz + \frac{1}{2\kappa}(\alpha_2 - \kappa\gamma_3) \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)z\right] dz \\ \frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2} \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)z\right] dz + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2} \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)z\right] dz \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$I_1(\tau) = \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)z\right] dz = \frac{\mu_0}{(1 + \mu_0\kappa)} \underbrace{\left[1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} + \kappa\right)\tau\right]\right]}_{I_1(\tau)} \quad (\text{E.7})$$

$$I_2(\tau) = \int_0^\tau \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)z\right] dz = \frac{\mu_0}{(1 - \kappa\mu_0)} \underbrace{\left[1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{\mu_0} - \kappa\right)\tau\right]\right]}_{I_2(\tau)} \quad (\text{E.8})$$

$$\therefore \mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{-(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} I_1(\tau) + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} I_2(\tau) \\ \frac{-(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} I_1(\tau) + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} I_2(\tau) \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Ahora: $[\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{T}[\exp(\mathbf{D})]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}(\tau) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 - \kappa} & \frac{1}{\gamma_1 + \kappa} \\ \gamma_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} & \frac{-\gamma_2}{2\kappa} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} & \frac{\gamma_2}{2\kappa} \end{bmatrix} \cdots \\ \cdots \begin{bmatrix} \frac{-(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \\ \frac{-(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} \end{bmatrix} \pi F \mu_0 \omega_0 \\ = \pi F \mu_0 \omega_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 - \kappa} & \frac{1}{\gamma_1 + \kappa} \\ \gamma_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix} \cdots$$

$$\dots \left[\begin{array}{l} -\frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{4\kappa^2(1 + \kappa\mu_0)} + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{4\kappa^2(1 - \kappa\mu_0)} + \frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{4\kappa^2(1 + \kappa\mu_0)} \\ -\frac{(\kappa - \gamma_1)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_3(\tau)}{4\kappa^2(1 + \kappa\mu_0)} + \frac{(\kappa - \gamma_1)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{4\kappa^2(1 - \kappa\mu_0)} - \frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{4\kappa^2(1 + \kappa\mu_0)} \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{(\gamma_2 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa)\gamma_3 I_2(\tau)}{4\kappa^2(1 - \kappa\mu_0)} \\ + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{4\kappa^2(1 - \kappa\mu_0)} \end{array} \right]$$

$$[\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{B}(\tau) = \pi F \omega_0 \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 - \kappa & \gamma_1 + \kappa \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)I_1(\tau)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \\ \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)I_2(\tau)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

$$= \pi F \omega_0 \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 - \kappa & \gamma_1 + \kappa \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] \\ \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} [\exp(-\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] \end{bmatrix}$$

$$= \pi F \mu_0 \omega_0 \left[\begin{array}{l} -\frac{(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \left[\exp(\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \left[\exp(-\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] \\ -\frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} \left[\exp(\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} \left[\exp(-\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] \end{array} \right]$$

Se necesita calcular ahora la condición inicial: $[\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{I}(0) = \mathbf{T}[\exp(\mathbf{D}\tau)]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}(0)$
pero $\Gamma(0) = 0$

$$[\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{I}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 - \kappa & \gamma_1 + \kappa \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} & -\frac{\gamma_2}{2\kappa} \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} & \frac{\gamma_2}{2\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma^*(0) \\ \Gamma(0) \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

$$[\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{I}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 - \kappa} & \frac{1}{\gamma_1 + \kappa} \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\kappa\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} I^+(0) \\ \frac{\kappa - \gamma_1}{2\kappa} I^+(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1 - \kappa} & \frac{1}{\gamma_1 + \kappa} \\ \gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\gamma_1 + \kappa) I^+(0)}{2\kappa} \exp(\kappa\tau) \\ \frac{(\kappa - \gamma_1) I^+(0)}{2\kappa} \exp(-\kappa\tau) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 + \kappa}{2\kappa} [\exp(\kappa\tau)] I^+(0) + \frac{(\kappa - \gamma_1)}{2\kappa} I^+(0) [\exp(-\kappa\tau)] \\ \frac{(\gamma_1 - \kappa)(\gamma_1 + \kappa)}{2\kappa\gamma_2} [\exp(\kappa\tau)] I^+(0) + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\kappa - \gamma_1)}{2\kappa\gamma_2} I^+(0) [\exp(-\kappa\tau)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\kappa} [(\gamma_1 + \kappa) [\exp(\kappa\tau)] + (\kappa - \gamma_1) [\exp(-\kappa\tau)]] I^+(0) \\ \left(\frac{\gamma_2^2}{2\kappa\gamma_2} [\exp(\kappa\tau)] - \frac{\gamma_2^2}{2\kappa\gamma_2} [\exp(-\kappa\tau)] \right) I^+(0) \end{bmatrix}$$

la solución da:

$$(\gamma_1 - \kappa)(\gamma_1 + \kappa) = \gamma_1^2 - \kappa^2 = \gamma_1^2 - \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$

$$(\gamma_1 + \kappa)(\kappa - \gamma_1) = \kappa^2 - \gamma_1^2 = \gamma_1^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = -\gamma_2^2$$

$$\mathbf{I}(\tau) = [\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{I}(0) + [\exp(\mathbf{A}\tau)]\mathbf{B}(\tau) \quad (\text{E.12})$$

donde $\mathbf{I}(\tau) = \begin{bmatrix} I^+(\tau) \\ I^-(\tau) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I^+(\tau) \\ I^-(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{(\gamma_1 + \kappa)}{2\kappa} [\exp(\kappa\tau)] + \frac{(\kappa - \gamma_1)}{2\kappa} [\exp(-\kappa\tau)] \right) I^+(0) \\ \frac{\gamma_2}{2\kappa} [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\kappa\tau)] I^+(0) \end{bmatrix}$$

$$+ \pi F \omega_0 \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{-(\alpha_2 + \kappa\gamma_2)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} \left[\exp(\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] \\ - \frac{(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_2)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} \left[\exp(\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} \left[\exp(-\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right] \\
& + \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} \left[\exp(-\kappa\tau) - \exp\left(\frac{-\tau}{\mu_0}\right) \right]
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
I^+(\tau) &= \frac{1}{2\kappa} \{(\kappa + \gamma_1)[\exp(\kappa\tau)] + (\kappa - \gamma_1)[\exp(-\kappa\tau)]\} I^+(0) \\
&+ \pi F \mu_0 \omega_0 \left[\frac{-(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 + \kappa\mu_0)} [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] + \frac{(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa(1 - \kappa\mu_0)} [\exp(-\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] \right]
\end{aligned} \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
I^-(\tau) &= \frac{\gamma_2}{2\kappa} [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\kappa\tau)] I^+(0) + \\
&+ \pi F \mu_0 \omega_0 \left\{ \frac{-(\gamma_1 - \kappa)(\alpha_2 + \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 + \kappa\mu_0)} [\exp(\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] + \right. \\
&\left. \frac{(\gamma_1 + \kappa)(\alpha_2 - \kappa\gamma_3)}{2\kappa\gamma_2(1 - \kappa\mu_0)} [\exp(-\kappa\tau) - \exp(-\tau/\mu_0)] \right\}
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Soluciones de las ecuaciones de dos flujos para capas múltiples

El propósito es introducir una solución de las ecuaciones (5.33) para una capa arbitraria, digamos n , tomada de un conjunto arbitrario de N capas múltiples. Tal como se escribe, la solución de éste sistema de ecuaciones en general no existe. Sin embargo si asumimos que la función fase y el albedo son funciones constantes de τ y que tienen valores diferentes en cada capa, entonces los coeficientes γ_i serán también funciones constantes de τ y tendrán valores distintos para cada capa i . Así que, las soluciones para los flujos ascendente y descendente en la capa n serán escritos en forma similar a aquella propuesta por Toon et. al. (1989), esto es

$$\begin{aligned} I^+(\tau) &= \kappa_{1n} e^{\lambda_n(\tau-\tau_{n-1})} + \Gamma_n \kappa_{2n} e^{-\lambda_n(\tau-\tau_{n-1})} + H_n^+(\tau) \\ I^-(\tau) &= \Gamma_n \kappa_{1n} e^{\lambda_n(\tau-\tau_{n-1})} + \kappa_{2n} e^{-\lambda_n(\tau-\tau_{n-1})} + H_n^-(\tau) \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde los coeficientes κ_{1n} y κ_{2n} son determinados por las condiciones de frontera, mientras que

$$\lambda_n = \sqrt{\gamma_{1n}^2 - \gamma_{2n}^2}; \quad \Gamma_n = \frac{\gamma_{2n}}{\lambda_n + \gamma_{1n}} = \frac{\gamma_{1n} - \lambda_n}{\gamma_{2n}}$$

y

$$\begin{aligned} H_n^+(\tau) &= \frac{\pi F \omega_n \left[(\gamma_{1n} - (1/\mu_0)) \gamma_{3n} + \gamma_{2n} \gamma_{4n} \right] \exp\left(\frac{-(\tau_c + \tau)}{\mu_0}\right)}{\left(\lambda_n^2 - (1/\mu_0)^2\right)} \\ H_n^-(\tau) &= \frac{\pi F \omega_n \left[(\gamma_{1n} + (1/\mu_0)) \gamma_{4n} + \gamma_{2n} \gamma_{3n} \right] \exp\left(\frac{-(\tau_c + \tau)}{\mu_0}\right)}{\left(\lambda_n^2 - (1/\mu_0)^2\right)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Hay que enfatizar que ω_n es una constante diferente para cada capa. Aquí τ es la profundidad óptica en cualquier punto dentro de la capa n ; τ_n y τ_{n-1} se encuentran en el tope y en el fondo de cada capa. Definimos $\Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ como la profundidad óptica total de la capa n , tal que $\tau_{n-1} < \tau < \tau_n$ y τ_c es la profundidad óptica acumulativa o acumulada de las capas anteriores a la capa n .

Ahora extenderemos las soluciones (5.34) para una sola capa homogénea a una atmósfera inhomogénea, al dividir la atmósfera en una serie de N capas múltiples verticales. Los

términos que crecen exponencialmente con $\lambda_n(\tau - \tau_{n-1})$ pueden ser eliminados como ya se hizo anteriormente, en nuestro caso los coeficientes se escribirán como :

$$\begin{aligned} Y_{1n} &= \frac{1}{2} \left[\kappa_{1n} e^{\lambda_n \Delta \tau_n} + \kappa_{2n} \right] \\ Y_{2n} &= \frac{1}{2} \left[\kappa_{1n} e^{\lambda_n \Delta \tau_n} - \kappa_{2n} \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Las soluciones para las ecuaciones de dos flujos para capas múltiples están dadas ahora por

$$\begin{aligned} I_n^+(\tau) &= Y_{1n} \left[e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau)} + \Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau - \tau_{n-1})} \right] + \\ &+ Y_{2n} \left[e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau)} - \Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau - \tau_{n-1})} \right] + H_n^+(\tau) \\ I_n^-(\tau) &= Y_{1n} \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau)} + e^{-\lambda_n(\tau - \tau_{n-1})} \right] + \\ &+ Y_{2n} \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau)} - e^{-\lambda_n(\tau - \tau_{n-1})} \right] + H_n^-(\tau) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Todos los argumentos de las exponenciales son ahora negativos, y de acuerdo a lo que se explicó anteriormente esto representa una ventaja en la forma de expresar las soluciones.

Los flujos a través de la atmósfera pueden ser encontrados aplicando las condiciones de frontera en cada capa. Estas condiciones de frontera son ahora.

$$\begin{aligned} I_1^-(\tau_0 = 0) &= I_0^-(\tau_0 = 0), \\ I_n^+(\tau = \tau_n) &= r_n I_n^-(\tau = \tau_n) \\ I_n^+(\tau = \tau_n) &= I_{n+1}^+(\tau = \tau_n) \\ I_n^-(\tau = \tau_n) &= I_{n+1}^-(\tau = \tau_n) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Como antes, la primera condición de frontera establece que el flujo difuso inferior en el tope de la atmósfera es igual a cualquier flujo difuso que pueda incidir en ése lugar. La segunda condición de frontera dice que el flujo difuso inferior en la superficie (capa N) es igual al flujo difuso inferior reflejado, donde r_n es la reflectividad de la superficie. Las dos últimas condiciones representan la continuidad en la frontera de cada capa.

Las combinaciones lineales de las condiciones (5.38) llevan a un sistema de $2N$ ecuaciones que componen una matriz tridiagonal, como se verá a continuación; para $I_n^+(\tau = \tau_n) = I_{n+1}^+(\tau = \tau_n)$ aplicando a las ecuaciones (5.37):

$$\begin{aligned}
Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_n^+(\tau_n) &= Y_{1n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right] + \\
&+ Y_{2n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right] + H_{n+1}^+(\tau_n)
\end{aligned} \tag{a}$$

para $I_n^-(\tau = \tau_n) = I_{n+1}^-(\tau = \tau_n)$

$$\begin{aligned}
Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_n^-(\tau_n) &= Y_{1n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + 1 \right] + \\
&+ Y_{2n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right] + H_{n+1}^-(\tau_n)
\end{aligned} \tag{b}$$

Para eliminar el término Y_{1n} multiplicamos la ecuación (a) por $\left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right]$ que está en (b) y esta a su vez la multiplicamos por $\left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right]$ y las restamos:

para (a):

$$\begin{aligned}
&Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] + H_n^+(\tau_n) \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] \\
&= Y_{1n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right] \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] + Y_{2n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right] \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] + \\
&H_{n+1}^+(\tau_n) \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right]
\end{aligned}$$

para (b):

$$\begin{aligned}
&Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] + H_n^-(\tau_n) \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] \\
&= Y_{1n+1} \left[\Gamma_{n+1} + e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] + Y_{2n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right] \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] + \\
&H_{n+1}^-(\tau_n) \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right]
\end{aligned}$$

retándolas:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow Y_{2n} \left\{ \underbrace{1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n}}_{e_{2n}} \left[\underbrace{e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n}_{e_{3n}} \right] - \underbrace{\left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{4n}} \left[\underbrace{\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1}_{e_{1n}} \right] \right\} + \\
 &Y_{1n+1} \left\{ \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right]}_{-e_{2n+1}} \left[\underbrace{\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1}_{e_{1n}} \right] - \underbrace{\left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right]}_{e_{3n+1}} \left[\underbrace{e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n}_{e_{3n}} \right] \right\} + \\
 &Y_{2n+1} \left\{ \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right]}_{-e_{2n+1}} \left[\underbrace{\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1}_{e_{1n}} \right] - \underbrace{\left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right]}_{-e_{4n+1}} \left[\underbrace{e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n}_{e_{3n}} \right] \right\} \\
 &= H_{n+1}^+(\tau_n) \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] - H_n^+(\tau_n) \left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right] + H_n^-(\tau_n) \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] - H_{n+1}^-(\tau_n) \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right] \\
 &= \left[H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n) \right] \underbrace{\left[e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + \Gamma_n \right]}_{e_{3n}} + \left[H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n) \right] \underbrace{\left[\Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} + 1 \right]}_{e_{1n}} \\
 &\Rightarrow \quad A_l = e_{2n} e_{3n} - e_{4n} e_{1n} \\
 &\quad B_l = e_{1n} e_{1n+1} - e_{3n} e_{3n+1} \\
 &\quad C_l = -e_{2n+1} e_{1n} - (-e_{4n+1} e_{3n}) = e_{4n+1} e_{3n} - e_{2n+1} e_{1n} \\
 &\quad D_l = \left[H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n) \right] e_{3n} + \left[H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n) \right] e_{1n}
 \end{aligned}$$

Ahora para eliminar Y_{2n+1} multiplicamos la ecuación (c) por $\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]$ y la ecuación (d) por $\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]$ y se restan :

$$\begin{aligned}
 &Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_n^+(\tau_n) = Y_{1n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right] \\
 &+ Y_{2n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right] + H_{n+1}^+(\tau_n)
 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned}
& Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_n^-(\tau_n) = Y_{1n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + 1 \right] + \\
& Y_{2n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right] + H_{n+1}^-(\tau_n)
\end{aligned} \tag{d}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \\
& + H_n^+(\tau_n) \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] = Y_{1n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + \\
& Y_{2n+1} \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + H_{n+1}^+(\tau_n) \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]
\end{aligned}$$

para la otra:

$$\begin{aligned}
& Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \\
& + H_n^-(\tau_n) \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] = Y_{1n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + 1 \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + \\
& Y_{2n+1} \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] + H_{n+1}^-(\tau_n) \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]
\end{aligned}$$

ahora se restan:

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \\
& \cdot \left\{ \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \right\} \\
& + H_n^+(\tau_n) \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - H_n^-(\tau_n) \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \\
& \cdot \left\{ \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \right\} + \\
& \cdot \left\{ \left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - \Gamma_{n+1} \right] \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - \left[\Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} - 1 \right] \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \right\} \\
& + H_{n+1}^+(\tau_n) \left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] - H_{n+1}^-(\tau_n) \left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right] \\
& Y_{1n} \left\{ \underbrace{\left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{1n}} \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{2n+1}} - \underbrace{\left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{3n}} \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{4n+1}} \right\} + \\
& Y_{2n} \left\{ \underbrace{\left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{2n}} \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{2n+1}} - \underbrace{\left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{4n}} \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{4n+1}} \right\} \\
& Y_{1n+1} \left\{ \underbrace{\left[\Gamma_{1n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + 1 \right]}_{e_{1n+1}} \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{4n+1}} - \underbrace{\left[e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} + \Gamma_{n+1} \right]}_{e_{3n+1}} \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{2n+1}} \right\} \\
& H_{n+1}^+(\tau_n) \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{2n+1}} - H_{n+1}^-(\tau_n) \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{2n+1}} \\
& - H_n^-(\tau_n) \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{4n+1}} - H_{n+1}^-(\tau_n) \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{e_{4n+1}} = \\
& H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n) \underbrace{\left[1 - \Gamma_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{A_1} + \left[H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n) \right] \underbrace{\left[\Gamma_{n+1} - e^{-\lambda_{n+1} \Delta \tau_{n+1}} \right]}_{B_1} \\
& \Rightarrow Y_{1-1} \underbrace{\left[e_{1n} e_{2n+1} - e_{3n} e_{4n+1} \right]}_{A_1} + Y_{1-1} \underbrace{\left[e_{2n} e_{2n+1} - e_{4n} e_{4n+1} \right]}_{B_1} + Y_{1-1} \underbrace{\left[e_{1n+1} e_{4n+1} - e_{3n+1} e_{2n+1} \right]}_{C_1} = \\
& \left[H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n) \right] e_{2n+1} + \left[H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n) \right] e_{4n+1}
\end{aligned}$$

Para la segunda condición de frontera: $I_N^+(\tau = \tau_n) = r_s I_N^-(\tau = \tau_n)$

$$I_N^+(\tau_n) = Y_{1n} \left[e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_n)} + \Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_{n-1})} \right] + Y_{2n} \left[e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_n)} - \Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_{n-1})} \right] + H_N^+(\tau_n)$$

$$\Rightarrow I_N^+(\tau_n) = Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_N^+(\tau_n)$$

$$I_N^-(\tau_n) = Y_{1n} \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_n)} + e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_{n-1})} \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_n)} - e^{-\lambda_n(\tau_n - \tau_{n-1})} \right] + H_N^-(\tau_n)$$

$$\Rightarrow I_N^-(\tau_n) = Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_N^-(\tau_n)$$

igualando las ecuaciones anteriores de acuerdo a la condición de frontera:

$$Y_{1n} \left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + Y_{2n} \left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + H_N^+(\tau_n) = r_s Y_{1n} \left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + r_s Y_{2n} \left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right] + r_s H_N^-(\tau_n)$$

$$\Rightarrow Y_{1n} \underbrace{\left[1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{1n}} - r_s Y_{1n} \underbrace{\left[\Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{3n}} + Y_{2n} \underbrace{\left[1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{2n}} - r_s Y_{2n} \underbrace{\left[\Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \right]}_{e_{4n}} =$$

$$= r_s H_N^-(\tau_n) - H_N^+(\tau_n)$$

$$\therefore Y_{1n} \left[e_{1n} - r_s e_{3n} \right] + Y_{2n} \left[e_{2n} - r_s e_{4n} \right] = r_s H_N^-(\tau_n) - H_N^+(\tau_n)$$

$$A_l = e_{1n} - r_s e_{3n}$$

$$B_l = e_{2n} - r_s e_{4n}$$

$$C_l = 0$$

$$D_l = r_s H_N^-(\tau_n) - H_N^+(\tau_n)$$

La matriz tridiagonal que se obtiene de las combinaciones lineales mostradas arriba es de la forma:

$$A_l Y_{l-1} + B_l Y_l + C_l Y_{l+1} = D_l$$

$$Y_l = Y_{1n} \quad \text{si} \quad l = 2n - 1$$

$$Y_l = Y_{2n} \quad \text{si} \quad l = 2n \quad (5.39)$$

Los coeficientes para l impar desde $l=1$ hasta $l=2n-1$ son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0, & B_1 &= e_{11}, & C_1 &= -e_{21}, & D_1 &= I_0^-(0) - H_1^-(0) \\
 A_l &= e_{2n}e_{3n} - e_{4n}e_{1n} \\
 B_l &= e_{1n}e_{1n+1} - e_{3n}e_{3n+1} \\
 C_l &= e_{3n}e_{4n+1} - e_{1n}e_{2n+1} \\
 D_l &= [H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n)]e_{3n} + [H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n)]e_{1n}
 \end{aligned}$$

Los coeficientes para l par desde $l=2$ hasta $l=2n-2$ son:

$$\begin{aligned}
 A_l &= e_{2n+1}e_{1n} - e_{3n}e_{2n+1} \\
 B_l &= e_{2n}e_{2n+1} - e_{4n}e_{4n+1} \\
 C_l &= e_{1n+1}e_{4n+1} - e_{2n+1}e_{3n+1} \\
 D_l &= [H_{n+1}^+(\tau_n) - H_n^+(\tau_n)]e_{2n+1} + [H_n^-(\tau_n) - H_{n+1}^-(\tau_n)]e_{4n+1}
 \end{aligned}$$

y para $l=2n$ los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 A_{2n} &= e_{1n} - r_s e_{3n} \\
 B_{2n} &= e_{2n} - r_s e_{4n} \\
 C_{2n} &= 0 \\
 D_{2n} &= r_s H_n^-(\tau_n) - H_n^+(\tau_n)
 \end{aligned}$$

donde se han definido las cantidades:

$$\begin{aligned}
 e_{1n} &= 1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \\
 e_{2n} &= 1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \\
 e_{3n} &= \Gamma_n + e^{-\lambda_n \Delta \tau_n} \\
 e_{4n} &= \Gamma_n - e^{-\lambda_n \Delta \tau_n}
 \end{aligned}$$

Como ya se indicó antes, la solución general de la ecuación (5.39) puede ser escrita de acuerdo a las definiciones (5.20), (5.21) y (5.22), pero tomando en cuenta que ahora se está trabajando con $\Delta \tau$ en lugar de τ .

Referencias

- [1] Chandrasekhar, S. , (1960) *Radiative Transfer* . Dover Publications, USA.
- [2] Braslau, N. and J. V. Dave, (1973) : *J. Appl. Met.*, **12**, 601-615.
- [3] Dave, J. V. , (1970) : *Appl. Opt.*, **9** , No 8 , 1888-1896.
- [4] Dave, J. V. and J. Gazdag, (1970) : *Appl. Opt.*, **9**, 1457-1466.
- [5] Demerjian et. al., (1980): *Theoretical Estimates of Actinic (Spherically Integrated) Flux Photolytic Rate Constants of Atmospheric Species in the Lower Troposphere*.
- [6] Harshvardhan, (1991) : *Atmospheric Radiation*, Rev. Geoph. Sup., pp. 56-68.
- [7] Iqbal, M. (1983) : *An Introduction to Solar Radiation*, Academic Press.
- [8] Jiménez-Aquino J. I. , Varela J. R. : *La Aproximación de Cuatro Flujos en la Transferencia Radiativa en la Atmósfera* .
- [9] Kattawar, G. W. And G. N. Plass, (1967) : *Appl. Opt.*, **6**, No. 8, 1377-1382,.
- [10] Kuo-Nan-Liou and Qian Fu, (1970) : *J. Atmos. Sci.*,**45**, 10940-19470,
- [11] Meador, W. E. and W. R. Weaver, (1980) : *J. Atmos. Sci.*, **37**, 630-643.
- [12] McClatchey, R. A., R.W. Fenn, J. E. A. Selby, J. S. Garing and F. E. Volz, (1970) : Optical properties of the atmosphere. AFCRL-70-0527, Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, Mass.
- [13] McCormick, R. A., and J. H. Ludwig, (1967) : Climate Modification by atmospheric aerosols. *Science*, **156** , 1358-1359.
- [14] Stamnes, K. Et al. (1988) : *Computation of eigenvalues and eigenvectors for discrete ordinate and matrix operator methods in radiative transfer*, J. Quant. Spectros. Transfer, **39** , No. 5, pp. 415-419, Pergamon Press.
- [15] Stern, A. C., (1968) : *Air Pollution*, Vol. 1. New York, Academic Press, 694 pp.
- [16] Toon, O. B., C. P. McKay and T. P. Ackerman, (1989) : *Am. Geoph. Union*, 16287-16301.
- [17] Van de Hulst H. C. (1957): *Light Scattering by Small Particles*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [18] Varela Ham J. R. Comunicación Privada.