UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RELACIONES ENTRE MAGNITUDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

CLAUDIA HERNANDEZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: CARLOS ALVAREZ JIMENEZ

2001

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Relaciones entre Magnitudes

realizado por Claudia Hernández García

con número de cuenta 9653497-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dr. Carlos Álvarez Jiménez

Propietario Dr. Oscar Falcón Vega Jaime Oscar Falcón Vega

Propietario Mat. Guillermo Zambrana Castañeda

Suplente Mat. César Guevara Bravo

Suplente Mat. Concepción Ruíz Ruíz-Funes Concepción Ruiz

Consejo Departamental de Matemáticas

Hector Méndez C.

Dr. Héctor Méndez Lango

Para mi familia,
mis amigos
y maestros.

Para Daniel.

"Pareciera que es más fácil cuadrar el círculo que darle la vuelta a un matemático."

Augustus de Morgan

A Budget of Paradoxes

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El problema de la cuadratura del círculo es uno de los más antiguos en la historia de las matemáticas y su literatura una de las más extensas. Fueron muchos los matemáticos que intentaron resolverlo, muchos los métodos que crearon y muchas las soluciones rechazadas.

Euclides no intenta cuadrar el círculo de la manera en que lo hicieron los demás. Su intención no fue encontrar la relación que existe entre el diámetro de un círculo y su circunferencia (el valor de π), él busca otro tipo de relación, la determinación de manera única. Demuestra en el tercer libro de *Los Elementos* que puede remitir el estudio de un segmento circular al estudio de un ángulo y una cuerda. Él no sólo relaciona dos magnitudes lineales como hacen los demás, sino que relaciona una magnitud lineal (curva) con otra magnitud lineal y con una magnitud angular, estas dos últimas siendo magnitudes rectilíneas.

Muchos intuían que la cuadratura del círculo usando sólo regla y compás no tiene solución. Al no poder encontrar una conexión entre las figuras limitadas por líneas curvas y las figuras limitadas por líneas rectas se podría pensar que las figuras son completamente ajenas. O que el estudio de magnitudes curvilíneas y el estudio de magnitudes rectilíneas deben llevarse a cabo de manera independiente pues no tienen nada que ver.

Euclides sabe que esto no es cierto y por esta razón es que él dedica todo el tercer libro al estudio del círculo y la circunferencia remitiéndose únicamente al estudio de magnitudes rectilíneas. Nos muestra que aunque las magnitudes rectilíneas y las magnitudes curvilíneas son de distinto tipo se pueden relacionar entre sí.

Mi tesis consta de 5 secciones en las que discutiré la manera en la que se ha trabajado con el círculo para tratarlo de remitir a magnitudes rectilíneas.

En la sección 2 presentaré un panorama general sobre el problema de la cuadratura del círculo que maravilló a los matemáticos por miles de años.

Antes de comenzar a discutir el trabajo de Euclides referente al círculo me pareció conveniente hacer un breve análisis de la estructura de *Los Elementos*, cosa que hago en la sección 3.

Una vez terminado el análisis preliminar comenzaré por estudiar de una manera exhaustiva el tercer libro de *Los Elementos* en donde Euclides lleva a cabo el estudio del círculo. En esta 4° sección mostraré cómo es que Euclides remite el estudio de un segmento circular al estudio de dos magnitudes rectilíneas y con esta exposición surgirá el problema que implica sobreponer un segmento circular a otro.

Este problema de la superposición me pareció tan interesante que dedico toda la 5° sección a demostrar de manera alternativa la proposición más esencial, desde mi punto de vista, del tercer libro. Para ello introduciré a Hilbert quien hizo un trabajo similar al que yo propondré en su libro *Fundamentos de la Geometría*.

La última sección consiste en mostrar que aunque la existencia del círculo no depende del 5° postulado, ambos están muy relacionados.

Claudia Hernández García

2. UNA BREVE HISTORIA SOBRE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

Antes de comenzar con el análisis del trabajo de Euclides vale la pena hacer un breve recuento del papel que ha jugado el problema de la cuadratura del círculo a lo largo de la historia. Sólo para darnos cuenta de la importancia que ha tenido este problema dentro de las matemáticas y tratar de comprender por qué tantos hombres le dedicaron tanto tiempo.

Ya que se puede construir un cuadrado igual en área a una figura rectilínea, es muy natural tratar de extender esta construcción a la curva más simple, el círculo. En la actualidad decimos que las áreas del círculo de radio unitario y la del cuadrado cuyo lado es igual a $\sqrt{\pi}$ son la misma, esto es, π.

Con el método de Descartes, encontrar un segmento cuya longitud fuera igual a $\sqrt{\pi}$ resultaría muy sencillo una vez conocido el segmento cuya longitud es π. La construcción sería la siguiente:

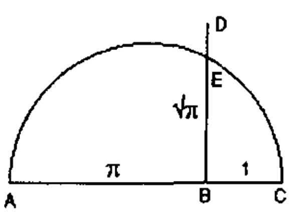


Fig. 2.1

Debe trazarse el círculo cuyo diámetro AC cumple AB = π y BC = 1. En el punto B se traza la recta BD perpendicular a AC. Esta perpendicular corta al círculo en el punto E. El segmento BE es de longitud $\sqrt{\pi}$. Con este procedimiento se resuelve el problema, el cuadrado construido sobre la recta BE tiene un área igual a π.

No sería necesario esperar hasta el tiempo de Descartes para construir este segmento igual a $\sqrt{\pi}$ con este método pues el mismo Euclides lo propone en el problema **E.VI.13** en donde se requiere encontrar la media proporcional entre dos segmentos.

El problema no sería pues encontrar un segmento cuya longitud es igual a $\sqrt{\pi}$, sino la construcción de un segmento cuya longitud es igual al valor de π.

Tratar de construir geométricamente a π o encontrar una recta cuya longitud sea igual a la longitud de la circunferencia de diámetro unitario, es un problema que ocupó el pensamiento matemático por más de 1000 años. Una forma de resolver el problema sería establecer la relación que guardan la circunferencia de un círculo y su diámetro. Esta relación se convirtió en uno de los problemas más estudiados de todos los tiempos, fue tan popular que incluso el compendio de más tradición en la historia de Occidente, la Biblia, le hace referencia.

En el palacio de Salomón ..."hizo el mar de metal fundido que tenía diez codos de borde a borde; era enteramente redondo, y de cinco codos de altura; un cordón de treinta codos medía su contorno". Reyes 1, 7:23

Es difícil saber cuando comenzó la tradición de este singular problema. Los registros más antiguos corresponden al papiro Rhind (1650 a.C.). Ahí se sugiere construir un cuadrado cuyo lado fuese igual a 8/9 del diámetro de un círculo de diámetro unitario.

Si el diámetro es igual a 1, el radio es igual a $1/2$, en la actualidad decimos que el área de un círculo es a πr^2, por lo tanto, el área de este círculo es $\pi/4$. El área de un cuadrado es L^2, si el lado del cuadrado es 8/9, por lo tanto su área es 64/81.

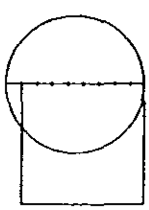


Fig.2.2

$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

En el papiro se afirma que el área del círculo y el área del cuadrado son iguales. Si despejamos a π de la ecuación de primer grado de la página anterior podemos deducir que π, la relación entre la circunferencia y el diámetro, es 256/81 o 3.16049382...

Muchos siglos fueron testigos del misterio alrededor de esta razón. Todo este tiempo se puede reducir a tres periodos, el primero que comienza con los griegos y termina a mediados del siglo XVII, el segundo que comienza inmediatamente después y el tercero comenzando a finales del siglo XIX.

Este primer periodo se caracteriza por el intento de encontrar la razón entre el diámetro y la circunferencia mediante métodos puramente geométricos. Los problemas que trabajaban los griegos eran de tres tipos, *planos*, *sólidos* y *lineales*. Los primeros son aquellos que se pueden resolver utilizando solamente líneas rectas y círculos. Los problemas *sólidos* son aquellos que requieren del uso de una o varias secciones cónicas para su solución. Los *lineales* son aquellos que necesitan de curvas más complejas y difíciles de construir para resolverse. Los griegos consideraron a la cuadratura del círculo como un problema plano.

El siguiente intento de construcción propuesto por Antiphon de Atenas (430 a.C.) no es del todo correcto pero introduce un novedoso procedimiento por exhausión. Él proponía inscribir en un círculo polígonos de un mayor número de lados cada vez. Comenzaba con un cuadrado, luego un octágono, después un polígono de 16 lados y así sucesivamente, duplicando el número de lados del polígono anterior. Él aseguraba que cuando el número de lados fuera suficientemente grande, el tamaño de cada lado sería tan pequeño que el perímetro del polígono coincidiría con la circunferencia.[1]

La construcción fue refutada pues además de que sólo se permite el uso de una regla y un compás para su solución, se requería que ésta concluyera en un número finito de pasos. Si alguna de las restricciones pudieran eliminarse, la solución del problema ya se habría encontrado.

Una de las soluciones sería la de Hipias quien construyó una curva para resolver otro problema igualmente popular, la trisección del ángulo. Este problema consistía en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Se piensa que es muy probable que Hipias se diera cuenta de que esta curva también sirve para rectificar la circunferencia y por lo tanto para cuadrar el círculo, pero no está dado por hecho. Quien la utilizó por primera vez para este propósito fue Dinostrato en el siglo IV a.C.[2]

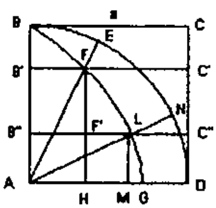


Fig. 2.3

De acuerdo con la descripción de Pappus, la construcción de esta curva es la siguiente. Sea ABCD un cuadrado y BED un cuadrante de un círculo con centro en A. Supóngase que mientras el radio AB se mueve uniformemente alrededor de A, de la posición AB a la posición AD, la línea BC se mueve uniformemente siempre paralela a ella misma y con B moviéndose a lo largo de BA, de la posición BC a la posición AD. Ambas líneas coincidirán en puntos como F o L. El lugar geométrico de estos puntos se llama cuadratriz.

Si suponemos que la cuadratriz intersecta a la recta AD en un punto G y aceptamos la legitimidad de la siguiente relación, entonces habremos encontrado la longitud del arco de circunferencia BED.

$$\frac{arcoBED}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

Esta relación se demuestra por reducción al absurdo utilizando la hipótesis de la existencia de la cuarta proporcional.

Si la razón (arco BED):AB no es igual a la razón AB:AG, entonces será igual a la razón AB:AK en donde AK puede ser mayor o menor que AG.

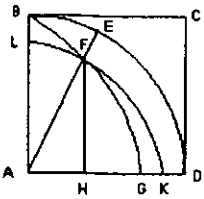


Fig. 2.4

Supongamos que AG es mayor que AK. Con centro en A y radio AK trácese el arco de circunferencia LFK. Este arco corta a la cuadratriz en el punto F y a la recta AB en el punto L. Trácese la recta que pasa por los puntos A y F y prolónguese hasta que corte al arco BED en el punto E. Trácese FH perpendicular a AD.

Por hipótesis, $\dfrac{arcoBED}{AB} = \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{arcoBED}{arcoLFK}$; luego, AB = arco LFK.

Por la propiedad de la cuadratriz tenemos que,

$$\frac{AB}{FH} = \frac{arcoBED}{arcoED} = \frac{arcoLFK}{arcoFK}$$

Como ya se demostró que AB = arco LFK, entonces FH = arco FK. Lo cual es absurdo, por lo tanto AK no puede ser mayor que AG.

La demostración de que AK tampoco puede ser menor que AG es muy similar. Como AK no puede ser ni mayor ni menor que AG entonces tiene que ser igual.

Con esto se rectifica un cuadrante de la circunferencia y, por lo tanto, la circunferencia completa. Una vez rectificada la circunferencia es posible cuadrar el círculo. El problema principal con esta propuesta es que la cuadratiz misma no puede construirse con regla y compás.

Durante el tercer siglo antes de Cristo, Arquímedes inscribió y circunscribió en un círculo polígonos de 96 lados, calculando sus perímetros para establecer tanto una cota inferior como una superior del valor de π. Las cotas que el consiguió obtener fueron las siguientes:[3]

$$3\,\frac{211875}{67444} < \pi < 3\,\frac{195888}{62351} \qquad \text{o bien,} \qquad 3.141495\ldots < \pi < 3.141697\ldots$$

Arquímedes también construyó una curva, llamada *espiral de Arquímedes* y mostró como se podía rectificar la circunferencia por medio de la subtangente polar a la espiral.

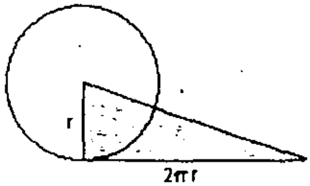


Fig. 2.5

Una vez rectificada la circunferencia, ya sea con la cuadratriz o con la espiral de Arquímedes se necesita la primera proposición del libro *Medida del Círculo* de éste último para cuadrar el círculo. El área del círculo es igual al área de un triángulo rectángulo que tiene como catetos el radio del círculo y la longitud de la circunferencia.

Se podía cuadrar el círculo pero una vez más, el método no es válido pues la espiral tampoco se puede construir con regla y compás.

Hipócrates de Quíos (s.V a.C.) intuía que los métodos planos no resolverían el problema, pero quería mostrar que otras figuras hechas con base en arcos de circunferencia sí podían cuadrarse.[4]

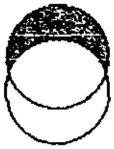


Fig. 2.6

Estas figuras son las lúnulas, llamadas así pues su forma se asemeja a la forma de la luna. Las lúnulas están circundadas por dos arcos de circunferencia de tal manera que la concavidad de ambas esté hacia el mismo lado.

Hay dos clases de lúnulas que Hipócrates logra cuadrar. Una de ellas es la que se muestra en la figura 2.7. El triángulo ABC es rectángulo e isósceles. Se construyen las semicircunferencias BCE, ACD y ABC cuyos diámetros son los lados a, b, y c del triángulo, respectivamente.

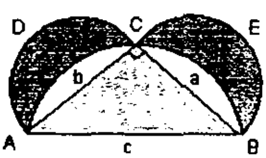


Fig. 2.7

Como ABC es un triángulo rectángulo, se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$ y, tomando como base la propiedad de que los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros[5], se demuestra que el semicírculo puesto sobre la hipotenusa es igual a los dos semicírculos puestos sobre los catetos. Si ahora quitamos el área común al semicírculo mayor y a los dos más pequeños, tenemos que el rectángulo restante es igual a las lúnulas sobre sus catetos. Para el triángulo se puede construir un cuadrado igual a él en área. Entonces, también se puede construir un cuadrado que tenga la misma área que las lúnulas, por lo tanto éstas dos lúnulas se han cuadrado.

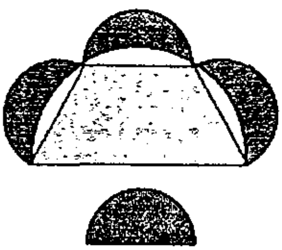


Fig. 2.8

En el segundo caso de Hipócrates se construye el trapecio que es la mitad de un hexágono regular. Se trazan los semicírculos en cada uno de los lados. Con un argumento muy similar al anterior se demuestra que la "suma" de las áreas de las lúnulas y la del semicírculo es igual al área del trapecio.

En efecto, Hipócrates ha cuadrado las lúnulas pero sólo son de dos tipos. Sería un error, suponer que todos los casos están resueltos después de resolver solamente un par de casos particulares. Pero aún así, Hipócrates creía que las lúnulas se podían cuadrar y ya que éstas figuras hechas con base en arcos de circunferencia podían cuadrarse, también se podría cuadrar el círculo.

Llegó el nuevo milenio y con él nuevos intentos para resolver el problema de la cuadratura del círculo, pero todos ellos estaban destinados al fracaso. Pasaron los siglos y el problema seguía sin solución, no podía encontrarse un valor geométrico o algebraico de π. Lo mejor que pudieron hacer los matemáticos de aquellos días fue encontrar más cifras decimales del número π. En 1596

Ludolph van Ceulen logra calcular 32 cifras de π y tuvieron que pasar 25 años antes de que en 1621 Willebrod Snell, con el mismo método que usó Arquímedes pero con un polígono de 2^{30} lados, lograra encontrar tres cifras decimales más.

No sólo no se podía encontrar el valor de π, sino que ni siquiera se sabía si era o no un número racional; y mucho menos se sabía si el problema de la cuadratura del círculo tenía solución o no; con las restricciones de usar sólo regla y compás y en un número finito de pasos.

El segundo periodo que caracteriza a la historia de la cuadratura del círculo comienza a la mitad del siglo XVII.

En 1671 James Gregory descubre la serie arcotangente, misma que utiliza Leibniz en 1674 para describir la serie arcotangente de π.[6]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots$$

Se descubrieron distintas expresiones para π, tanto series como productos infinitos y fracciones continuas. Todos estos intentos incrementaban la exactitud con que podía expresarse π pero no revelaba nada sobre su naturaleza. Fue hasta 1761 que Johann Lambert prueba que π es un número irracional.

Aunque esta demostración puso fin a los intentos de encontrar un valor racional de π, el problema de la cuadratura del círculo, que consiste en construir con regla y compás un segmento cuya longitud sea igual a π, seguía sin solución pues la irracionalidad de π no garantiza que un segmento de esta longitud pueda construirse o no con regla y compás debido a que hay existe una infinidad de números irracionales que sí pueden construirse con estas restricciones, un ejemplo es $\sqrt{2}$.

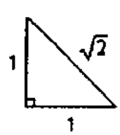


Fig. 2.9

El periodo que puso fin a este problema de más de 1000 años en la historia de la cuadratura del círculo comienza a finales del siglo XVIII. Leonard Euler descubrió durante este periodo una de las más bellas formulas matemáticas que involucra tres de los números más sobresalientes de toda la matemática: $e^{\pi i} + 1 = 0$.

En el año 1840 Joseph Louville demuestra la existencia de números trascendentes, estos son aquellos números que no son raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. En 1873 Charles Hermite demuestra que **e** sería el primer número trascendente conocido. Pero **e** es sólo uno de tantos porque en 1872 Georg Cantor demuestra la numerabilidad de los números algebraicos.[6]

Una vez demostrada la trascendencia de **e** y con la ayuda de la ecuación de Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$, en 1882 Ferdinand von Lindemann demuestra la trascendencia de π. Por lo tanto π no puede ser raíz de ningún polinomio ni expresarse en términos de operaciones racionales o extracción de raíces de enteros.

Para ese entonces ya se había demostrado que solamente se podían construir geométricamente, con regla y compás, las fórmulas algebraicas que se pudieran reducir a una de segundo orden. Al demostrarse la trascendencia de π, se demostró que no hay ninguna ecuación algebraica finita que pueda representarlo, por lo tanto su construcción geométrica con regla y compás resulta imposible.

El problema está resuelto. Ahora sabemos que la cuadratura del círculo como un problema plano no tiene solución. Existe el cuadrado que tiene la misma área que el círculo pero no puede construirse con regla y compás, de acuerdo a las restricciones señaladas.

A todos aquellos amantes de π sólo les queda tratar de encontrar el mayor número de cifras posible.

3. EL PRIMER LIBRO DE *LOS ELEMENTOS*

Antes de mostrar el trabajo que, a mi parecer, Euclides propuso como alternativa a la cuadratura del círculo considero que es necesario hacer un breve análisis sobre la estructura general de *Los Elementos* y sobre el uso del círculo en el primer libro, donde solamente juega el papel de un elemento de construcción.

La estructura de los trece libros que componen la obra euclidiana de *Los Elementos* es similar en la mayoría de ellos, constan de una serie de proposiciones que son precedidas por las definiciones. Las excepciones son los libros octavo y noveno que no cuentan con definiciones y el décimo donde se enuncian tres grupos de definiciones y tres grupos de proposiciones presentadas en el siguiente orden: cuatro definiciones, cuarenta y siete proposiciones, seis definiciones, treinta y siete proposiciones, seis definiciones y treinta y una proposiciones.

La estructura del primer libro también es diferente porque además encontramos los cinco postulados, que describen la posibilidad de construir las figuras geométricas propuestas en la geometría plana, y las nueve nociones comunes[8] que, salvo por las últimas tres, **N.C.7**, **N.C.8** y **N.C.9**[9], establecen las reglas de la igualdad, la adición y la sustracción de magnitudes.

De acuerdo con Proclo, cada una de las proposiciones de *Los Elementos* consta de las siguientes partes:

- Enunciado formal de la proposición (πρότασις)
- Exposición de las hipótesis (ἔκθεσις)

  Cuáles son los elementos con los que se cuenta a priori

- Determinación de la tesis (διορισμός)

  Qué es lo que se tiene que hacer con los elementos dados

- Construcción (κατασκευή)

  En el caso de los problemas ésta es la construcción que se pide hacer, cuando se trata de un teorema sirve sólo como construcción auxiliar

- Demostración (ἀπόδειξις)

  Explica por qué lo que se hizo está bien hecho

- Conclusión (συμπέρασμα)

  En el caso de los teoremas termina con la frase "qué es lo que se debía demostrar (Q.E.D.)". En los problemas el último enunciado es "qué es lo que se debía hacer (Q.E.F.)".

Una forma tradicional de caracterizar a las proposiciones de *Los Elementos* es la de considerar por un lado a los problemas, donde se pide hacer una construcción, y por otro a los teoremas, en los que se debe demostrar alguna afirmación. Los libros que componen la obra de *Los Elementos* generalmente constan de teoremas y problemas con excepción del quinto libro, cuyas 25 proposiciones son teoremas, y el cuarto que consta de sólo 16 problemas.

Yo propongo una caracterización alternativa para las proposiciones: las proposiciones de preparación y las proposiciones fuertes. Al comparar ambas caracterizaciones se podría pensar que los problemas son proposiciones de preparación y los teoremas son las proposiciones fuertes, pero no es así. Las proposiciones de preparación son aquellas que preceden y se necesitan para demostrar una proposición fuerte. En el lenguaje de hoy en día las proposiciones de preparación pertenecen a la categoría de *lemas* y las proposiciones fuertes a la categoría de *teoremas*.

A aquellos problemas que considero son proposiciones fuertes los llamo problemas fuertes. De modo similar, a los teoremas que considero son proposiciones de preparación los llamo teoremas de preparación. En *Los Elementos* hay tanto problemas fuertes como teoremas de preparación.

Un ejemplo de un problema fuerte es **E.I.44**: *en una recta dada aplicar a un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado*. El problema es muy importante porque enseña a trazar figuras rectilíneas de igual área. Tomando el caso particular en que el ángulo rectilíneo dado fuese recto, se estaría hablando de "cuadrar" cualquier figura rectilínea.

Un ejemplo de un teorema de preparación sería **E.I.7**: *dos rectas respectivamente iguales a otras dos con los mismos extremos en el mismo lado de una misma recta no se juntan en dos puntos distintos*. Esta proposición es de preparación pues sirve de herramienta directa para demostrar **E.I.8**, *si dos triángulos tienen los lados de uno respectivamente iguales a dos lados del otro e iguales las bases tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales*. Considero que este es un teorema muy importante de la geometría pues con la ayuda de **E.I.4**, infiere un criterio de congruencia para triángulos, el que hoy en día conocemos como lado-lado-lado (LLL).

Tengo que admitir que esta última caracterización es un tanto subjetiva. A cada proposición se le asigna el término fuerte o de preparación de acuerdo al lugar en el que se encuentre dentro de *Los Elementos*. Una proposición que en algún momento se consideró fuerte pasará en otro momento a ser proposición de preparación puesto que se necesitará para demostrar alguna otra. Con esto no quiero decir que las proposiciones pasan de ser fuertes a ser de preparación y que aquella que no se vuelva a utilizar en otra demostración indiscutiblemente será una proposición fuerte.

Habrá proposiciones fuertes que servirán para demostrar otras proposiciones, pero que expresan una verdad tan trascendental que su carácter de "fuertes" no se anula.

También hay proposiciones que ya no servirán para demostrar ninguna otra pero que no incluiría en la categoría de fuertes debido a la debilidad de la afirmación que expresan.

Como dije anteriormente, la caracterización es un tanto subjetiva que depende del contexto dentro del que se esté estudiando, pero que no deja de ser una caracterización alternativa.

Las proposiciones de preparación, las proposiciones "fuertes" y los corolarios, que son la consecuencia directa de alguna proposición, así como las definiciones, las nociones comunes y los postulados conforman las estructura lógica con que cuentan las afirmaciones dentro del trabajo de Euclides.

El círculo aparece por primera vez en *Los Elementos* como parte del conjunto de definiciones del primer libro. La definición del círculo describe al círculo explicando la propiedad que guarda el centro con los puntos de la circunferencia, pero es el tercer postulado (**P.3**) que garantiza la existencia de la figura que cumple esta propiedad, una vez determinado el punto llamado centro, alrededor del cual gira la recta cuya longitud determinará la magnitud de su radio.

Dentro de las definiciones referentes al círculo que se encuentran en el primer libro, Euclides enuncia las definiciones **D.I.15** y **D.I.16** que se refieren al centro del círculo. Estas dos definiciones dicen lo siguiente:

D.I.15 *Círculo es la figura plana circundada por una sola línea [que se llama circunferencia] respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocados en el interior de la figura son iguales entre sí.*[10]

D.I.16 *Tal punto se llama centro del círculo.*

Una de las cosas que Euclides deja un poco en el aire es la unicidad de ese punto que llama centro, y si acaso no es único, no menciona cuántos puntos cumplen dicha propiedad. En el libro tercero enuncia las proposiciones **E.III.1** y **E.III.9** que aclaran este cuestionamiento, éstas son:

E.III.1 *Dado un círculo encontrar su centro.*

E.III.9 *Si se toma un punto en el interior del círculo y desde ese punto se conducen al círculo más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.*

Estos cuatro enunciados son necesarios para comprender mejor la naturaleza del centro de un círculo. Por un lado, por **D.I.15** se sabe que el círculo se construye a partir de un punto llamado centro en **D.I.16**, con estas dos definiciones Euclides asegura la existencia de un centro en el círculo pero no dice nada acerca de la unicidad. En **E.III.1** Euclides muestra un procedimiento para encontrar este punto y demuestra que ningún otro punto puede ser centro de acuerdo al proceso que propone. Finalmente, en **E.III.9** Euclides demuestra que la propiedad de equidistar de la periferia del círculo sólo la cumple un punto y este es el centro del círculo.

Este es un ejemplo de cómo las proposiciones pueden corregir algunas insuficiencias lógicas (en este caso la unicidad del centro del círculo) y refuerzan las definiciones. En muchas proposiciones también se materializan objetos definidos proponiendo un método para su construcción, por ejemplo, en **D.I.15** se caracteriza al centro del círculo conceptualmente y en **E.III.1** se sugiere un procedimiento para encontrarlo físicamente.

Desde el primer libro el círculo aparece en algunas proposiciones, siempre en la κατασκευή como un elemento de la construcción auxiliar en el estudio de figuras rectilíneas. El círculo es la única figura plana no rectilínea que estudia y es hasta el tercer libro donde se lleva a cabo un análisis más profundo sobre sus propiedades geométricas.

En el primer libro Euclides sólo se apoya en la parte de la definición que se refiere a la igualdad de sus radios para demostrar las proposiciones en las que aparece como un elemento de la construcción auxiliar. Estas proposiciones son **E.I.1**, **E.I.2**, **E.I.3**, **E.I.12**, y **E.I.22**, todas ellas son problemas.

E.I.1 es el primero de los problemas que presentan al círculo como construcción auxiliar y es también la primera proposición de *Los Elementos*. Euclides lo demuestra de la siguiente manera.

E.I.1 *Dada una recta delimitada construir sobre ella un triángulo equilátero.*

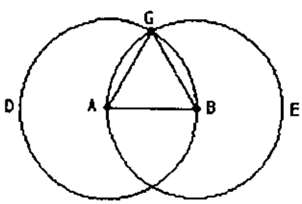


Fig. 3.1

Lo que Euclides hace es trazar con centro en A y en B dos círculos, BGD y AGE, ambos de radio AB. Luego se trazan las rectas desde A y B al punto G, que es la intersección de los círculos, y se obtiene un triángulo ABG. Sólo falta ver que el triángulo es efectivamente equilátero. Se tiene que,

AB = AG porque ambas son radios del círculo BGD (**D.I.15**)

AB = BG porque ambas son radios del círculo AGE (**D.I.15**)

Las cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí (**N.C.1**) luego,

AB = AG = BG

Los tres lados del triángulo son iguales, por lo tanto es equilátero.

En este momento quisiera abrir un breve paréntesis dejando de lado el papel del círculo como elemento de la construcción auxiliar para hacer un comentario sobre el uso de la definición del círculo en *Los Elementos*.

Euclides utiliza en muchas ocasiones la parte de la definición del círculo que se refiere a la igualdad de los radios, algo que no pasa con otras definiciones. En muchas proposiciones concluye que dos rectas son iguales por ser radios del mismo círculo pero, por ejemplo, nunca infiere que la intersección de dos líneas no tiene partes y por lo tanto es un punto, o que un objeto es una línea recta debido a que *descansa según igualdad sobre sus puntos.* Pero esto no pasa sólo con definiciones de objetos rectilíneos. Por ejemplo, en el tercer libro define lo que es un sector de círculo pero no vuelve a hacer mención de este objeto en el resto de *Los Elementos.*

Regresando al análisis de las proposiciones que utilizan al círculo como un elemento de la construcción auxiliar, la segunda proposición de esta lista coincide en ser también la segunda proposición de *Los Elementos.*

E.I.2 *En un punto dado construir una recta igual a una recta dada.*

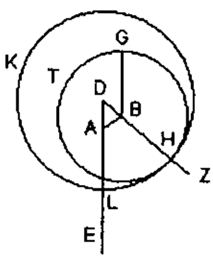


Fig. 3.2

Sean A y BG el punto y la recta dados, respectivamente. Se traza la recta AB y sobre esta se construye el triángulo equilátero DAB. Se prolongan las rectas AE y BZ sobre las DA y DB, respectivamente. Con centro en B y radio BG se traza el círculo GHT. Otra vez, con centro en D y radio DH se describe el círculo HKL.

Las rectas BG y BH son iguales pues son radios del círculo GTH (**D.I.15**). De igual manera, DL y DH son iguales por ser radios del círculo HKL (**D.I.15**). También DA y DB son iguales por ser lados de un triángulo equilátero.

Lo que queda de DL al quitarle DA es igual a lo que queda de DH al quitarle DB, esto es, AL es igual a BH. Pero BH es igual a BG luego, AL es igual a BG. Entonces se ha construido por el punto A dado una recta AL que es igual a la recta BG dada.

Considero que esta proposición es muy importante porque a partir de ella se tiene que para la construcción de segmentos de recta congruentes se necesita del trazo de un círculo.

En el segundo postulado de *Los Elementos* Euclides afirma que *se puede prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada*. Una interpretación actual sería que Euclides afirma que a una línea recta se le puede "agregar" cualquier otra línea recta y obtener una línea que sigue siendo recta. La siguiente proposición **E.I.3** sugiere que también se le puede quitar a una recta de mayor longitud una recta de menor longitud y el resto sigue siendo una línea recta.

E.I.3 *Dadas dos rectas desiguales quitar de la mayor una recta igual a la menor.*

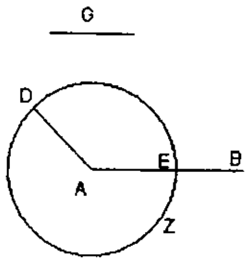


Fig. 3.3

Hay que quitar de la recta AB una recta igual a la recta G dada. En el punto A se construye una recta AD igual a la recta G. Con centro en AD se describe el círculo DEZ. AD y AE son iguales por ser radios del círculo DEZ (**D.I.15**) y como AD es igual a G, AE también es igual a G. Se restó de la recta AB una recta AE igual a la recta G dada.

Euclides no concluye la demostración diciendo que al quitarle a la recta AB la recta AE, igual a la recta G dada, lo que queda es la recta EB. Al parecer, lo que más le interesa en esta proposición es enseñar como se sobrepone una recta sobre otra recta, construcción que necesitará en la proposición **E.I.4** de *Los Elementos* donde la prueba se basa en la superposición de figuras.

En los problemas **E.I.11** y **E.I.12** de *Los Elementos* Euclides construye la línea recta perpendicular a otra línea recta. En el primer problema se "sube" a partir de un punto sobre la línea recta original una línea perpendicular, mientras que en el segundo la perpendicular se "baja" desde algún punto que no está en la línea original. Lo que Euclides hace en ambos problemas es lo siguiente:

E.I.11 *Dada una recta trazar desde un punto en ella una línea recta que forme ángulos rectos.*

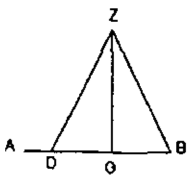


Fig. 3.4

Dada la línea AB se encuentra sobre ella el punto D tal que DG es igual a GB y se construye sobre la recta DB un triángulo isósceles cuyos lados iguales son DZ y ZB. Por los puntos Z y G se traza la recta ZG que será perpendicular a la recta AB.

Las rectas DZ, DG son iguales por construcción a las BZ y BG, respectivamente. Los triángulos DGZ y BGZ son iguales por tener tres lados iguales. Entonces los ángulos $\angle ZGD$ y $\angle ZGB$ son iguales y por lo tanto son rectos.

E.I.12 *Dada una línea indefinida trazarle desde un punto dado que no se halle en la misma, una línea recta perpendicular.*

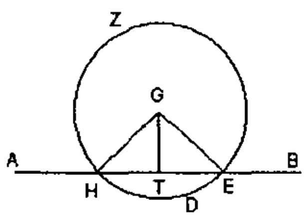


Fig. 3.5

Sean AB y G la recta y el punto dados. El punto G se encuentra de un lado de la recta AB, del otro lado se escoge un punto cualquiera D. Con centro en G y radio GD se traza el circulo EZH. Se divide la recta HE en dos por el punto T. La recta que pasa por los puntos G y T es la recta perpendicular a la recta AB dada.

GE y GH son iguales por ser radios del círculo EZH (**D.I.15**), HT y TE son iguales porque T divide al segmento en dos iguales. Los triángulos GTE y GTH son iguales por tener dos lados de uno iguales a dos lados del otro, GE y GH, HT y TE y compartir un lado GT. Por lo tanto los ángulos GTH y GTD son iguales. Una recta que al levantarse sobre otra forma ángulos iguales, estos ángulos son rectos y las rectas perpendiculares (**D.I.10**).

Quiero señalar que en ambos casos se necesita al círculo para la construcción de una línea perpendicular. Aunque en **E.I.11** el círculo no aparece de manera explícita, recordemos que para la construcción de dos segmentos congruentes es necesario el trazo de un círculo.

De esto puedo concluir que Euclides no sólo utiliza al círculo para garantizar la igualdad de dos rectas sino que también es necesario en la construcción de una línea que es perpendicular a otra, o bien, en la construcción de ángulos rectos.

La última proposición del primer libro donde se encuentre el círculo de manera explícita como elemento de la construcción auxiliar es **E.I.22**. Este problema es el caso general de **E.I.1**. En ésta última se construye un triángulo equilátero mientras que en **E.I.22** se construye uno cualquiera a partir de tres segmentos dados.

E.I.22 *De tres rectas iguales a otras tres rectas, construir un triángulo.*[11]

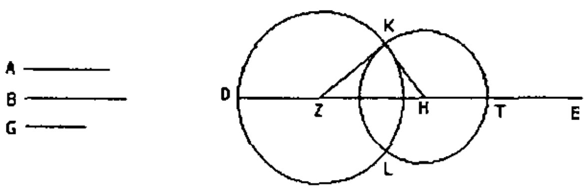


Fig. 3.6

A, B y G son las rectas dadas. Sobre la recta DE se trazan los puntos Z, H y T de la siguiente manera:

A = DZ, B = ZH y G = HT

Con centro en Z y radio DZ se traza el círculo DKL, con centro en H y radio HK se traza el círculo LKT. A partir de los puntos Z y H se trazan las rectas ZK y HK.

Por ser radios del círculo DKL (**D.I.15**), A = DZ = ZK

Por ser radios del círculo LKT (**D.I.15**), G = HT = HK

Entonces, el triángulo ZHK tiene lados iguales a las rectas A, B, G, dadas.

Como dije al principio, en todos los casos se puede ver que la única característica propia del círculo que utiliza es la definición **D.I.15**, como todos los radios de un círculo son iguales, se garantiza que las líneas que se construyen como radios de círculos son iguales.

Esta es la última vez que vemos al círculo en el primer libro de *Los Elementos*. En el segundo libro no se recurre a él y ni siquiera se menciona pero Euclides dedica todo su tercer libro al estudio de esta figura.

4. LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO EN EL TERCER LIBRO

En este capítulo quiero mostrar el trabajo Euclidiano que yo considero como una alternativa a la cuadratura del círculo. Creo que la primera parte del tercer libro es un conjunto de proposiciones de preparación, así es que comenzaré el análisis a partir de la proposición 16.

El problema principal de este libro consiste en construir un segmento circular a partir de una recta y un ángulo. Para poder exponer la construcción de Euclides es necesario examinar primero la relación entre el diámetro y la recta tangente, la dependencia entre los posibles ángulos en un círculo y la naturaleza de los segmentos circulares.

Antes de todo esto me gustaría comenzar con un hecho que ha sido tema de controvertida discusión a lo largo de la historia de las matemáticas, la definición que determina la igualdad de círculos.

Hacia el final del primer libro Euclides habla sobre la igualdad de las figuras rectilíneas. En *Los Elementos* hay dos criterios de igualdad para figuras, éstos son la igualdad cuantitativa y la igualdad cualitativa.

Antes de comenzar a discutir los dos tipos de igualdad quiero señalar que Euclides no establece esta diferencia de manera explícita y ésta es sólo mi interpretación.

Euclides nunca deja de sugerir que el área de una figura depende de su forma por lo que pueden establecerse dos casos. Cuando las figuras son iguales es inmediato que las áreas deban ser iguales; pero existe la posibilidad de encontrar dos figuras que aunque no coinciden en forma, coinciden en área.

Al hablar de igualdad cualitativa me refiero a aquella igualdad donde la congruencia de formas determina la igualdad entre las áreas y la igualdad cuantitativa es el otro caso en el que las magnitudes de las áreas coinciden pero la forma de las figuras que limitan dichas áreas no lo hacen. En el primer caso las figuras ocupan un espacio físico igual y por lo tanto la misma área, mientras que en el segundo las figuras ocupan la misma cantidad de área en espacios físicos diferentes.

De esto se puede concluir que dos figuras que son congruentes tienen la misma área, pero dos figuras que tiene la misma área no son necesariamente congruentes.

Figuras de misma área y congruentes

Figuras de misma área no congruentes

Fig. 4.1

Entonces las figuras rectilíneas pueden ser iguales según estos dos criterios. Dos figuras rectilíneas pueden ser iguales en área aunque no sean congruentes o pueden ser congruentes y de acuerdo a **N.C.7** tener la misma área. Figuras congruentes significa en el lenguaje de Euclides que al poner una figura sobre la otra todos sus vértices, lados y ángulos coinciden. En esta noción común es donde Euclides hace la distinción entre las igualdades. A las figuras que son cualitativamente iguales las llamará figuras congruentes y las figuras que tienen la misma área serán sólo figuras iguales.

Con relación a los dos criterios se puede ver **E.I.4** donde Euclides demuestra que dos triángulos son iguales porque todas sus partes coinciden y **E.I.38** donde demuestra que dos triángulos son iguales pues tienen bases iguales y están sobre las mismas paralelas. Mientras que en **E.I.4** Euclides demuestra una igualdad que es cualitativa, en **E.I.38** demuestra una igualdad cuantitativa.

Euclides demuestra en **E.I.45** que para toda figura rectilínea se puede encontrar un paralelogramo que sea igual a ella en área, así que al referirme al área de figuras rectilíneas consideraré solamente el área de paralelogramos.

Como decimos hoy en día, el área de los paralelogramos depende de dos magnitudes que son la longitud de la base y la longitud de la altura. Mientras dos paralelogramos tengan bases del mismo tamaño y sus alturas coincidan tendrán la misma área sin importar si son congruentes o no. Cuando se trata de figuras rectilíneas **N.C.7** no tiene un recíproco, si dos figuras son congruentes son iguales pero si son iguales no tienen que ser congruentes.

Cuando se trata de igualdad de círculos esos dos criterios se reducen a uno solo. La primera definición del tercer libro dice: *dos círculos son iguales si sus radios son iguales*. Entonces la igualdad de círculos depende de una sola magnitud, la longitud del radio. En el caso de los círculos **N.C.7** sí tiene un recíproco pues los círculos no sólo serán iguales cuando sean congruentes sino que también cuando sean iguales serán congruentes.

Algo que me llama la atención sobre la igualdad de círculos, a diferencia de lo que hizo en los dos primeros libros al mostrar y demostrar cuándo dos triángulos y/o paralelogramos son iguales, es que Euclides no demuestra cuándo dos círculos son iguales, sino que define la condición que garantiza esta igualdad.

Esta definición ha sido la causa de muchas discusiones. A lo largo de los años se le ha dado el carácter tanto de definición como de postulado o axioma y teorema. Tal vez lo que nos conduce a pensar que esta definición debería ser más bien un teorema es la forma de su enunciado: *dos círculos son iguales si sus radios son iguales*.

El siguiente podría ser un intento de demostración en el contexto euclidiano, pero que finalmente se desecha.

Proposición 1: Dos círculos son iguales si sus radios son iguales.

Sean los círculos ABG y A'B'G' iguales y supongamos que los radios AZ y A'Z' no son iguales.

Al no ser iguales uno es mayor que el otro, sea ZA > Z'A'.

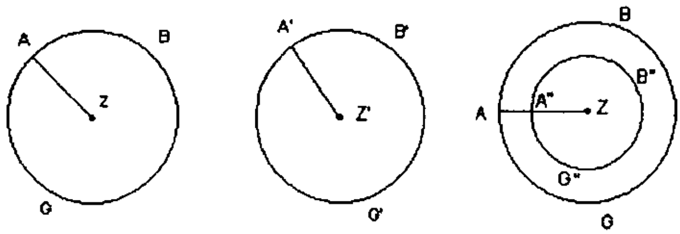


Fig. 4.2

Como Z'A' es menor que ZA, se puede echar la primera recta sobre la segunda. Con centro en Z y radio ZA", que es igual a Z'A', se traza el círculo A"B"G". Por **N.C.8** se tiene que el círculo ABG es mayor que el A"B"G", pero no sabemos cómo se relaciona A"B"G" con A'B'G'. No hay forma de garantizar que estos dos círculos son iguales porque si supusiéramos que lo son debido a la igualdad de sus radios, estaríamos usando la propiedad que queremos demostrar. Por eso es que de esta manera no se puede demostrar la primera definición.

Algunos de los que consideran esta definición como un teorema son Pfleiderer y Simson. Ellos proponen la demostración de **D.III.1** recurriendo al método de la superposición. Yo creo que a Euclides no le gusta apoyarse en este elemento de construcción cuando tiene que demostrar alguna afirmación puesto que lo usa solamente cuando no tiene otra alternativa. Yo creo que es por eso que Euclides establece la igualdad de círculos como una definición y no mediante un teorema.

Tartaglia, por ejemplo, era de los que consideran esta definición como un postulado por ser una proposición no demostrada sobre la que se apoya el estudio del círculo en Euclides. Otros como Borelli y Playfair, lo consideraron un axioma al considerar la afirmación como evidente y reconocer que no necesita demostración.

Claro que también existen los que la defienden como una definición, como Billingsley, Clavius y Heath, pues satisface la condición aristotélica de no sólo afirmar un hecho sino también expresar la causa. Lo que se está tratando de establecer es que al decir círculos iguales, se está hablando de círculos con radios iguales.[12]

Yo estoy de acuerdo con Euclides cuando define la igualdad de círculos. Creo que él establece la igualdad de círculos mediante una definición pues establece que ambos tipos de igualdad, cualitativa y cuantitativa, se reducen a uno sólo, a la existencia de líneas rectas iguales y **P.3**. Dos líneas pueden ser iguales cuando tienen la misma longitud o ser desiguales, no existe otra posibilidad. Al remitir la igualdad de círculos a la igualdad de sus radios, pretende excluir también para los círculos la posibilidad que asegurar la igualdad en área pero no la congruencia.

Mi lectura de Euclides consiste en comprender lo que él hace en el tercer libro de *Los Elementos*. Yo creo que lo que a Euclides más le interesa hacer en este libro es trabajar con segmentos circulares, particularmente le interesa el estudio de segmentos circulares remitiéndose al estudio de objetos rectilíneos.

Antes de poder hacer esto Euclides necesita conocer la naturaleza de los segmentos circulares, por eso yo digo que el tercer libro no comienza sino hasta la proposición **E.III.16**. En la primera parte de este libro Euclides comienza por formalizar afirmaciones que a simple vista parecen verdaderas. Las proposiciones **E.III.1** a **E.III.15** son proposiciones de preparación aunque también quieren decir algo importante.

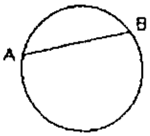


Fig. 4.3

Un claro ejemplo es **E.III.2:** *la línea trazada entre dos puntos, tomados al acaso sobre la periferia del círculo, caerá dentro del círculo.* Lo que la proposición trata de establecer podría parecer una trivialidad, pero una forma de interpretación es que Euclides está demostrando que el círculo es una figura convexa.[13]

Un *segmento del círculo es la figura limitada por una recta y por la periferia del círculo* (**D.III.6**). La proposición anterior es necesaria para que, de acuerdo con la definición de un segmento circular, éste se deba considerar como parte del círculo. Si el círculo no fuera convexo podríamos tener un segmento de círculo como el siguiente.

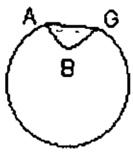


Fig. 4.4

Sean pues el círculo ABGD y AG la recta que pasa por dos puntos del círculo. El segmento de círculo está limitado por la periferia ABG del círculo y una recta AG, entonces es un segmento del círculo. Cuando la recta que une dos puntos del círculo cae fuera, tendríamos entonces un segmento de círculo que no forma parte del círculo.

En los primeros teoremas del tercer libro Euclides se dedica esencialmente a estudiar y comparar las distintas cuerdas que pueden trazarse en un círculo, especialmente sus longitudes. Afirma, por ejemplo, que la cuerda de mayor longitud en un círculo es su diámetro (**E.III.7**).

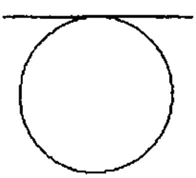


Fig. 4.5

Entre las tantas rectas que Euclides estudia hay una especialmente importante, la tangente.[14] Esta es la recta que comparte con el círculo sólo un punto. Necesita establecer una relación entre la tangente y el diámetro de un círculo para poder trazar un segmento circular hacia el final de este libro, dados un ángulo, que será un ángulo en el segmento y una cuerda que será la base del segmento. Esto no lo hará en este momento pues necesita conocer mejor la naturaleza de los segmentos circulares.

En las proposiciones **E.III.16**, **E.III.17**, **E.III.18** y **E.III.19** Euclides establecerá la relación entre algún diámetro del círculo y la tangente al círculo que pasa por un extremo de ese diámetro. Para futuras referencias enuncio las cuatro proposiciones a continuación.

E.III.16 *La recta perpendicular al diámetro del círculo trazada en su extremo caerá fuera del círculo, y entre la recta y la periferia ninguna otra se interpondrá, y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo agudo rectilíneo dado.*
E.III.17 *Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo dado.*
E.III.18 *Si una recta es tangente al círculo, y desde el centro al punto de contacto se traza una recta, la recta trazada es perpendicular a la tangente.*
E.III.19 *Si una recta es tangente al círculo y desde el punto de contacto se traza una perpendicular a la tangente, el centro del círculo está en la recta trazada.*

Como Euclides trabajará por el momento con un diámetro y una recta tangente, denotaremos con δ_{AB} al diámetro que tiene como extremos a los puntos A y B de un círculo y con $\tau_A(\mathscr{C}_{ABG})$ a la tangente al círculo ABG en el punto A.

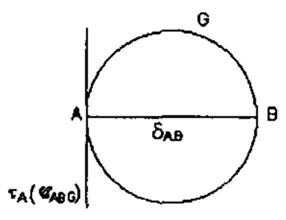


Fig. 4.6

Para relacionar a estos dos objetos utilizaremos una transformación geométrica ρ_A, que denotará el trazo de la perpendicular a una recta por un punto A en ella. Este operador ρ está bien definido desde la proposición **T.I.11**: *dada una recta trazar desde un punto en ella una línea recta que forme ángulos rectos.*

Comencemos nuestro análisis con **E.III.16** que consta de dos partes, la que en este momento quiero retomar es aquella que se refiere a la recta perpendicular al diámetro. Los objetos de la ἔκθεσις en esta proposición son el diámetro de un círculo y la recta perpendicular a un diámetro del círculo en uno de sus extremos. Esta recta perpendicular es la recta tangente al círculo en este punto.

Entonces se tiene que la recta tangente al círculo ABG en el punto A es la perpendicular al diámetro trazada en uno de sus extremos, en el punto A. En notación esto sería:

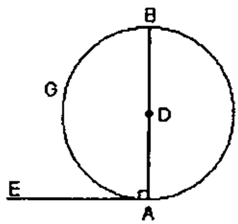


Fig. 4.7

$$\tau_A(\mathscr{C}_{ABG}) = \rho_A(\delta_{AB})$$

En **E.III.16** Euclides no dice que la recta perpendicular al diámetro es la tangente, lo que hace es demostrar que esta recta AE cae fuera del círculo. Es hasta el corolario de **E.III.16** cuando afirma que, AE es tangente al círculo pues cae fuera del círculo y comparte con él el punto A. Concluye que AE toca al círculo pero no lo corta, por lo tanto es tangente al círculo.

La ἔκθεσις de **E.III.17** está conformada por un círculo y un punto y el διορισμός cosiste en trazar la tangente al círculo que pase por ese punto dado. Para hacer esa construcción existen tres posibilidades: que el punto esté dentro del círculo, fuera del círculo o sobre la periferia.

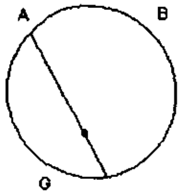


Fig. 4.8

Si el punto dado está en el interior del círculo, no hay solución pues cualquier línea que se trace por ese punto caerá también dentro del círculo y lo cortará, por lo tanto no podrá ser tangente a él.

El caso en el que el punto A se encuentra sobre la periferia ya está resuelto en el teorema anterior, la tangente al círculo por el punto A es la perpendicular al diámetro que tiene al punto A como extremo; perpendicular trazada a partir del punto A. La tercera posibilidad es la que trata este teorema.

Para trazar la tangente a un círculo que pase por un punto fuera de él Euclides supone como dados el círculo BDG y un punto A fuera de éste. Euclides propone la siguiente construcción.

Con centro en E y radio AE se traza el círculo AZH. Desde el punto D se traza DZ de tal manera que sea perpendicular a AE. La recta ZE intersecta al círculo BDG en el punto B. Euclides demuestra que la recta AB y el radio BE (o diámetro BF) son perpendiculares y se remite al teorema anterior para afirmar que esa recta AB es la recta tangente que se deseaba construir.

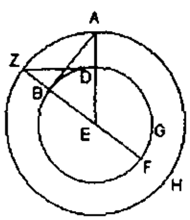


Fig. 4.9

$$\tau_B\,(\mathscr{C}_{BGD}) = \rho_B\,(\delta_{BF})$$

La recta tangente al círculo BGD por el punto A fuera de él es la recta tangente al círculo por el punto B que está sobre la periferia. Ésta última es la perpendicular al diámetro BF trazada a partir del punto B.

En este caso, para encontrar la tangente Euclides no traza directamente una perpendicular al diámetro, lo que hace es demostrar que la recta BA que traza es perpendicular al diámetro BF y se remite a **E.III.16** para concluir que la recta BA es la recta tangente al círculo.

Esta pareja de proposiciones es importante porque Euclides caracteriza a la recta tangente como una perpendicular. Muestra en **E.III.16** que la perpendicular al diámetro, trazada a partir de alguno de sus extremos, es tangente al círculo en ese punto. **E.III.17** enseña cómo trazar la recta que pasa por un punto dado fuera del círculo y que sea tangente al círculo. Con estas dos proposiciones, siendo **E.III.16** un teorema y **E.III.17** un problema, se tiene que el trazo de la recta tangente se remite al trazo de la recta perpendicular al diámetro en uno de sus extremos.

E.III.18 también relaciona a la tangente y al diámetro como rectas perpendiculares. La recta DE es tangente al círculo ABG en el punto G. Si se traza la recta que pasa por los puntos Z y G, esta recta trazada AG, diámetro del círculo, es perpendicular a la tangente DE.

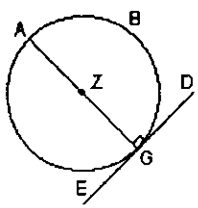


Fig. 4.10

$$\tau_G(\mathscr{C}_{ABG}) \perp \delta_{AG}$$

La tangente al círculo en el punto G y el diámetro AG son perpendiculares.

Mientras que en **E.III.16** se está levantando la perpendicular a una recta (un diámetro), como se hizo en **E.I.11**, en **E.III.18** se está bajando la perpendicular desde un punto hacia una recta (la tangente), como se hizo en **E.III.12**.[15]

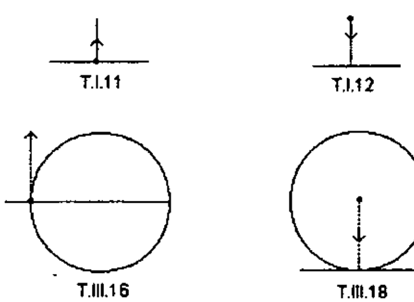


Fig. 4.11

Esta proposición **E.III.18** presenta un método alternativo a **E.I.12**, que busca trazar a partir de un punto dado una recta tal que sea perpendicular a una recta dada. Ya que se conoce la recta tangente a un círculo se traza la recta que pasa por el centro del círculo y el punto de contacto, **E.III.18** garantiza que esta recta es perpendicular a la tangente. El método puede no ser mejor pero sí diferente.

La relación entre el diámetro y la tangente no se completa sino hasta **E.III.19**. En ésta se afirma que si a partir del punto de contacto G se traza una perpendicular a la tangente DE, esta recta AG es diámetro del círculo ABG, en otras palabras, que la perpendicular a la tangente, levantada por el punto de contacto, pasa por el centro del círculo.

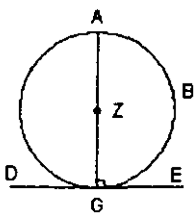


Fig. 4.12

$$\delta_{AG} = \rho_G (\tau_G (\mathscr{C}_{ABG}))$$

El diámetro AG es la perpendicular a la recta tangente al círculo ABG trazada a partir del punto de contacto G.

Con **E.III.16** se sabe que la recta tangente es perpendicular al diámetro en uno de sus extremos mientras que **E.III.18** afirma que el diámetro trazado por el punto de contacto es perpendicular a la tangente, y **E.III.19** dice que la perpendicular a la tangente por el punto de contacto es un diámetro.

Con estas cuatro proposiciones el diámetro y la tangente se relacionan como rectas perpendiculares. Este análisis se puede resumir en tres puntos:

1. La perpendicular al diámetro es tangente.
2. La perpendicular a la tangente es diámetro.
3. El diámetro y la tangente son perpendiculares.

Lo que hizo Euclides fue remitirse al trazo de una recta perpendicular al diámetro cuando lo que quiere trazar es una tangente. Todo esto lo hace pues necesita de esta relación de perpendicularidad cuando proponga la construcción de un segmento circular a partir de un ángulo y una recta dados; construcción que veremos más adelante en la proposición **E.III.33**.

Quisiera dejar por un momento a la recta tangente para estudiar un poco más a fondo la naturaleza de los segmentos circulares.

Una parte de la lectura que hago de la obra de Euclides consiste en analizar el trabajo que lleva a cabo con el segmento circular. La parte del tercer libro que tiene más peso en mi análisis es la que Euclides utiliza para establecer las condiciones que determinan la unicidad de la construcción de un segmento circular. Yo quiero retomar esas condiciones y exponerlas de acuerdo a mi enfoque personal.

Los ángulos rectilíneos y las líneas rectas son objetos que Euclides conoce muy bien. En *Los Elementos* no hay axiomas que expliquen cómo se deben estudiar aquellos objetos cuya naturaleza es no rectilínea. Por eso es que en su lugar Euclides remite el estudio del segmento circular al estudio de los objetos rectilíneos que forman parte del segmento, éstos son el ángulo en el segmento y la cuerda base del segmento.

Como Euclides se remite al estudio de estos objetos rectilíneos para el estudio de segmentos circulares necesita establecer la correspondencia que permite y avala esta sustitución: a un segmento circular le corresponde un único ángulo y una única cuerda; y que un ángulo y una cuerda determinan conjuntamente y de manera única un segmento circular. El trato que Euclides da a esta relación de correspondencia es la parte del tercer libro que más me interesa.

Para lograr establecer esta relación Euclides tratará de encontrar las relaciones que existen entre los elementos que componen a un segmento circular, éstos son el arco, la cuerda y el ángulo en el segmento. Me interesa de manera particular destacar las condiciones que garantizan la unicidad de la construcción un segmento circular que propone Euclides. Son los siguientes teoremas que se ocupan de ver lo que necesita cada uno de estos objetos para determinar a los otros.

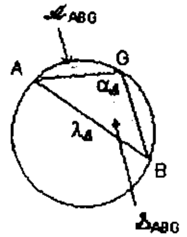


Fig. 4.13

Denotaré con $\mathscr{S}_{ABG}$ al segmento circular ABG, con $\alpha_{\mathscr{S}}$ a un ángulo en el segmento $\mathscr{S}$, $\lambda_{\mathscr{S}}$ y $\mathscr{A}_{\mathscr{S}}$ son la cuerda y el arco de circunferencia que forman el segmento circular $\mathscr{S}$ y $\mathscr{A}_{ABG}$ será el arco que pasa por los puntos A, B y G. La línea $\mathscr{L}_{AB}$ es la recta que pasa por los puntos A y B.

Un arco determina de manera única una cuerda, cosa que puede probarse fácilmente sólo con elementos del primer libro. Un arco es una línea, **D.I.3** dice que *extremos de línea son puntos*; ese arco tiene como extremos dos puntos, por **P.1** puede trazarse la recta que pasa por esos dos puntos y **N.C.9** garantiza que esa recta, cuerda del segmento circular, es única.

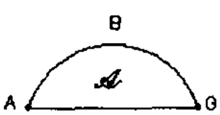


Fig. 4.14

$$\lambda_{\mathscr{S}} = \mathscr{L}\ (A_{\mathscr{A}}\ G_{\mathscr{A}})$$

Como la cuerda base del segmento $\mathscr{S}$ es la línea que tiene por extremos a los puntos A y G del arco $\mathscr{A}$, entonces podemos asegurar que en un segmento circular $\mathscr{S}$ la cuerda se determina de manera única.

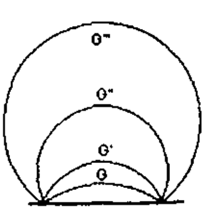


Fig. 4.15

Cuando se tiene un arco de circunferencia, el segmento circular que se genera es único, este es, el formado por el arco dado y la recta que pasa por sus extremos. Si un segmento de línea fuera base de un único segmento circular el problema que busco resolver (establecer qué objetos determinan la unicidad de la construcción de un segmento circular) ya estaría resuelto pero no es así. Por los puntos extremos de una línea se pueden trazar una infinidad de arcos de circunferencia distintos. Esos arcos, junto con la única línea, generan una infinidad de segmentos circulares distintos.

Como la cuerda por sí sola no determina un único segmento circular, habrá que ver lo que pasa con otra de las partes del segmento, el ángulo, si determina o no un único segmento circular. Antes de hacer esto Euclides tratará de establecer en los siguientes tres teoremas las relaciones entre los distintos ángulos que se pueden asignar a una cuerda en un círculo.

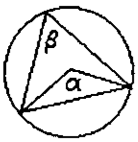


Fig. 4.16

E.III.20 demuestra que *el ángulo puesto en el centro es el doble del puesto sobre la periferia*, cuando los ángulos comprenden como base al mismo arco, esto es $\alpha = 2\beta$.

Este es el hecho en que se basa para demostrar **E.III.21**, *los ángulos puestos en el mismo segmento son iguales entre sí*. Este último es interesante porque aclara la definición **D.III.8**, *ángulo en el segmento es el limitado por las rectas trazadas desde un punto de la periferia del segmento a los extremos de la recta que es base del segmento*.

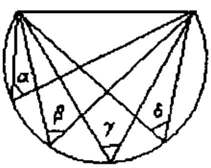
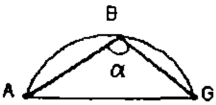


Fig. 4.17

Siguiendo al pie de la letra la definición, en un segmento circular se pueden trazar una infinidad de ángulos: α, β, γ, δ, etc. Este teorema prueba que todos ellos son iguales y al ser todos iguales tenemos que el ángulo en el segmento es único.

Ya que se sabe que el ángulo en el segmento es único, entonces se puede afirmar que el segmento circular determina de manera única al ángulo.



$$\alpha_{\mathcal{S}} = \alpha\,(\mathscr{L}_{AB},\ \mathscr{L}_{BG})$$

Fig. 4.18

El ángulo en el segmento será el ángulo que forman las líneas $\mathscr{L}_{AB}$ y $\mathscr{L}_{BG}$, donde B puede ser cualquier punto que está en al arco de circunferencia distinto de los extremos A y G.

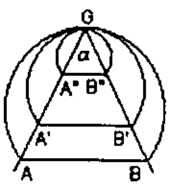
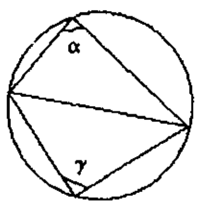


Fig. 4.19

Pero al igual que en el caso de la cuerda, el ángulo por sí solo no determina un único segmento circular. El ángulo α es tanto el ángulo del $\mathcal{S}_{AGB}$, como del segmento $\mathcal{S}_{A'GB'}$. El segmento $\mathcal{S}_{A'GB'}$ está completamente contenido dentro del $\mathcal{S}_{AGB}$ y *como el todo es mayor que la parte* **(N.C.8)**, es claro que los segmentos no son iguales. Lo mismo pasaría con cualquier segmento formado por un arco que pase por el punto G y tenga como base la recta que pase por cualesquiera dos puntos que pertenezcan uno a la recta AG y otro a la recta BG.

En **E.III.22** se demuestra que *en los cuadriláteros puestos en los círculos los ángulos opuestos son iguales a dos rectos*. Esto es,



$$\alpha + \gamma = 2R$$

Fig. 4.20

De estos tres teoremas se tiene que al cortar una cuerda a un círculo quedan determinados tres ángulos que no son iguales pero si dependientes y que obedecen a la siguiente relación:

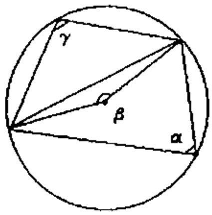


Fig. 4.21

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\beta = 2R - \gamma$$

Hasta este momento Euclides ya sabe que un segmento el ángulo en el segmento y la cuerda base del segmento se determinan de manera única, pero falta mostrar el inverso, esto es, lo que determina un único segmento circular. Hasta ahora lo único que sabemos es que ni la cuerda ni el ángulo determinan un único segmento circular por sí solos.

Euclides trató de establecer la unicidad con cada uno de los componentes del segmento circular por separado y no tuvo éxito, ahora trabaja conjuntamente con la cuerda y el ángulo para enunciar los dos siguientes teoremas que se refieren a la igualdad de segmentos circulares. **E.III.23** es un teorema de preparación que dice: *sobre una misma recta no se pueden construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en la misma parte*; y que sirve para demostrar el teorema fuerte **E.III.24**: *los segmentos circulares semejantes puestos sobre rectas iguales son iguales entre sí.*[16] Si el ángulo en el segmento $\mathcal{S}$ es igual al ángulo en el segmento $\mathcal{S}'$ se dice que los segmentos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son semejantes.

E.III.24 es el teorema sobre el que recae la garantía de la unicidad de la construcción del segmento pero me parece que la legitimidad de su demostración es un tanto incierta pues no creo que una demostración válida deba apoyarse en los resultados visuales de la figura para justificar el συμπέρασμα. Euclides demuestra este teorema por el método de superposición[17] de la siguiente manera.

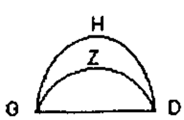


Fig. 4.23

Se aplica el segmento $\mathcal{S}_{AEB}$ al $\mathcal{S}_{GZD}$, el punto A con el G, el B con el D y, por ser iguales, la recta AB con la GD.

Hay tres posibilidades, que uno de los segmentos quede dentro del otro,

que se intersecten de esta manera,

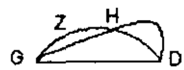


Fig. 4.24

o que coincidan,

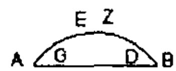


Fig. 4.25

Después de haber expuesto los tres casos Euclides comienza a descartar posibilidades. Él afirma que un arco no puede estar dentro del otro porque se tendrían dos segmentos circulares semejantes y desiguales sobre la misma recta, lo que contradiría **E.III.23** pues *sobre una misma recta no pueden construirse dos segmentos circulares semejantes y desiguales*. De esta manera las tres posibilidades se reducen a dos.

Si los segmentos circulares se cortaran de esa manera entonces se tendrían dos segmentos que pertenecen dos circunferencias que se estarían intersectando en tres puntos distintos: G, H y D. Lo que contradice **E.III.10**: *un círculo no corta a otro en más de dos puntos*. Se descarta entonces el segundo caso.

La única posibilidad es que los segmentos deben coincidir y, por lo tanto, ser iguales. Se puede ver que la estrategia de Euclides no consiste en demostrar que los segmentos coinciden, sino en demostrar que no pueden no coincidir.

La lógica de la demostración parece correcta salvo por un detalle: no expone de manera explícita lo que significa poner un segmento circular encima de otro. Una interpretación que se le puede dar a este proceso de sobreponer un segmento a otro consiste en desplazar uno de los segmentos hasta que coincida con el otro como lo hizo Euclides con la recta y el ángulo en el primer libro.

Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son los segmentos circulares que queremos comparar, otra forma de interpretar la superposición consistiría en construir encima del segmento $\mathcal{S}$

dado un segmento circular $\mathcal{S}''$ que sea igual al segmento circular $\mathcal{S}'$ y tratar de ver cómo se relacionan el segmento $\mathcal{S}$ y el segmento $\mathcal{S}''$. Ya que el segmento $\mathcal{S}''$ se construyó igual al $\mathcal{S}'$, la misma relación que guardan $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}''$ sería la relación que guardan $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. Cuando se trata de proponer algún procedimiento de construcción de segmentos circulares con métodos euclidianos siempre se cae en un círculo vicioso.

Una forma en que se podría plantear el trazo de un segmento circular igual a otro dado sería por medio de la magnitud del ángulo cuyo vértice es el centro del círculo al que el segmento circular pertenece.

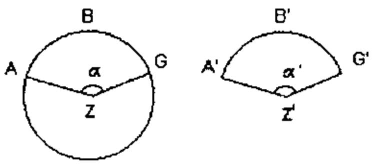


Fig. 4.28

El segmento $\mathcal{S}_{A'B'G'}$ debe ser igual al segmento $\mathcal{S}_{ABG}$. Lo que habría que hacer es comenzar a trazar el arco $\mathcal{A}_{A'B'G'}$ desde un punto cualquiera Z' y con radio igual al radio del círculo del que $\mathcal{S}_{ABG}$ es parte, es decir, ZA=Z'A'. Lo que garantizaría que los arcos son iguales es el tamaño del ángulo en Z', si este ángulo α' es igual al α, los arcos serían iguales. Porque este ángulo especifica qué tanto del círculo debe trazarse para que los segmentos sean iguales.

No puede usarse este hecho como justificación pues la proposición que garantiza esta igualdad es el teorema **E.III.26**, que requiere de **E.III.24** para demostrarse y es en éste último en donde estoy proponiendo la igualdad de dos segmentos circulares a partir de la igualdad de sus ángulos.

También se puede especificar en que lugar hay que detener el compás para que el arco trazado sea igual al otro mediante una cuerda.

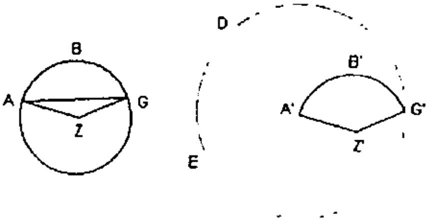


Fig. 4.27

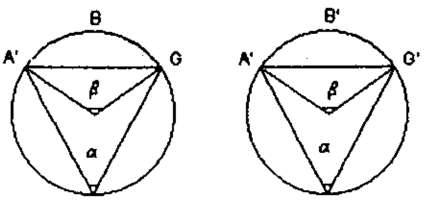
Con centro en A' se traza un círculo cuyo radio es igual a la longitud de la cuerda AG del segmento circular $\mathcal{S}_{ABG}$. Con centro en un punto Z' y con Z'A'=ZA, se traza el círculo A'B'G'. En el momento en este círculo intersecte al círculo DEG' se suspende el trazo de la circunferencia. El arco de circunferencia $\mathcal{A}_{A'B'G'}$ es igual al arco $\mathcal{A}_{ABG}$, pero nuevamente, el teorema que garantiza esta igualdad es **E.III.24** que es la proposición que trato de demostrar.

Por eso es que tratar de proponer un método de construcción para poner un segmento circular encima de otro con los mismos elementos que sugiere Euclides y tratando de evadir el método de superposición genera un círculo vicioso.

Yo sugiero que por el momento aceptemos que **E.III.24** está bien demostrado y que dados un ángulo y un segmento rectilíneo existe un único segmento circular cuyo ángulo sea igual al ángulo dado y cuya base sea igual a un segmento rectilíneo dado. En este momento estoy analizando el trabajo que hizo Euclides y quiero seguir adelante para llegar al procedimiento que él sugiere para la construcción de un segmento circular con estas características. En el siguiente apartado propondré un estudio alternativo acerca de esta parte del tercer libro, también hablaré con más detalle del problema de la superposición como parte de la κατασκευή.

Antes de que Euclides proponga la construcción de un segmento circular, dados un ángulo y una cuerda, necesita exponer otras condiciones que garantizan la igualdad de los ángulos y las cuerdas en los segmentos circulares.[18] El primer teorema que se encarga de esto es **E.III.26** que remite la igualdad de segmentos circulares en círculos iguales a la igualdad de los ángulos en cada segmento.

La proposición **E.III.26** afirma que *en los círculos iguales los ángulos iguales comprenden arcos iguales sea que estén construidos en los centros o en las periferias*. Los ángulos iguales garantizan la igualdad de las cuerdas λ_{AG} y $\lambda_{A'G'}$ y por **E.III.24** los arcos son iguales.



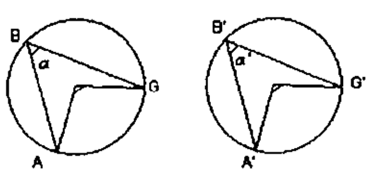
$$\alpha = \alpha' \Rightarrow \mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'}$$

Fig. 4.28

Si los ángulos α y α' son iguales, entonces los arcos de circunferencia $\mathscr{A}_{ABG}$ y $\mathscr{A}_{A'B'G'}$ son iguales.

La proposición **E.III.26** es la inversa de **E.III.27**. Mientras que en **E.III.26** se demuestra que los arcos son iguales si los ángulos son iguales, en **E.III.27** se demuestra que si los arcos son iguales los ángulos son iguales; siempre teniendo como condición que se este trabajando en círculos iguales.

E.III.27 dice: *en los círculos iguales los ángulos que abarcan arcos iguales son iguales mutuamente, sea que salgan de los centros, sea que estén construidos en la periferia*. Los ángulos son iguales si los arcos son iguales.



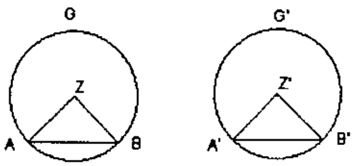
$$\mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Fig. 4.28

De estas últimas dos proposiciones se tiene que $\mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'} \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$.

En las siguientes dos proposiciones Euclides remite la igualdad de arcos a la igualdad de las líneas que los generan al momento de cortar a círculos iguales.

E.III.28 *En los círculos iguales, rectas iguales cortan arcos iguales, el mayor con el mayor y el menor con el menor.* Euclides demuestra que los ángulos que tienen a las cuerdas como base son iguales y por **E.III.26**, los segmentos también son iguales.

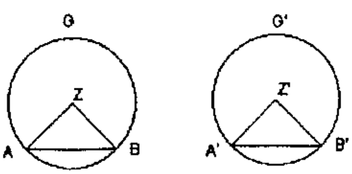


$$\lambda_{AB} = \lambda_{A'B'} \Rightarrow \mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'}$$

Fig. 4.30

Al igual que en el caso del ángulo, en el caso de la cuerda el **E.III28** afirma que si las cuerdas son iguales los arcos son iguales, mientras que **E.III.29** afirma el inverso, que las cuerdas son iguales si los arcos son iguales.

E.III.29 *En los círculos iguales, arcos iguales están subtendidos por rectas iguales.* Euclides supone que los arcos son iguales y por **E.III.27** concluye que los ángulos $\angle AZB$ y $\angle A'Z'B'$ también lo son. Como los círculos ABG y A'B'G' son iguales las rectas ZA, ZB, Z'A' y Z'B' son iguales; y como los ángulos $\angle AZB$ y $\angle A'Z'B'$ son también iguales, entonces los triángulos ZAB y Z'A'B' son iguales (**E.I.4**) y por lo tanto sus bases (las cuerdas) AB y A'B' son iguales.



$$\mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'} \Rightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{A'B'}$$

Fig. 4.31

Al igual que con **E.III.26** y **E.III.27**, de la pareja **E.III.28** y **E.III.29** se tiene que $\mathscr{A}_{ABG} = \mathscr{A}_{A'B'G'} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{A'B'}$, es decir, que en círculos iguales los arcos son iguales cuando las cuerdas son iguales y si los arcos son iguales, también las cuerdas lo serán.

Con estas cuatro proposiciones Euclides establece que en círculos iguales ángulos y cuerdas iguales determinan arcos iguales y viceversa. A partir de **E.III.26** y hasta **E.III.29** Euclides deja de hablar de segmentos circulares y comienza a hablar de arcos de circunferencia.

Euclides define lo que son segmentos circulares semejantes pero no define cuándo los segmentos semejantes son iguales. Un segmento del círculo es la *figura limitada por una recta y la periferia del círculo*. Yo creo que al hablar de segmentos iguales Euclides se refiere a segmentos que tienen partes iguales, es decir, que están limitados por cuerdas y arcos iguales.

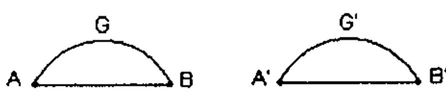


Fig. 4.32

Los segmentos circulares son iguales si el arco $\mathscr{A}_{ABG}$ es igual al arco $\mathscr{A}_{A'B'G'}$ y si la base λ_{AB} es igual a la base $\lambda_{A'B'}$.

No hay ningún axioma en Euclides que exprese las condiciones que deben cumplir dos arcos de circunferencia para ser iguales y por eso es que Euclides compensa esta carencia en los teoremas **E.III.26** a **E.III.29** remitiendo la igualdad de arcos de circunferencia a la igualdad de objetos rectilíneos, estos son la cuerda y el ángulo en el segmento.

En **E.III.24** Euclides afirma que la igualdad de segmentos circulares depende de la igualdad de los ángulos en los segmentos y de las cuerdas que son base de los segmentos. Mi afirmación acerca de los segmentos circulares que son iguales si tienen arcos y bases iguales, en el trabajo de Euclides se transforma en que "dos segmentos circulares son iguales si las bases y los ángulos en los segmentos son iguales". Euclides está remitiendo la igualdad de los arcos que forman los segmentos circulares a la igualdad de los ángulos en los segmentos.

La clave para la validez de la sustitución que de remite al ángulo en lugar del arco está en **E.III.26** y **E.III.27**. En estos dos teoremas Euclides demuestra que los arcos son iguales cuando los ángulos son iguales y si los arcos son iguales los ángulos también lo serán. Con esta pareja de teoremas está mostrando que su proceder es correcto, es válido remitirse al ángulo en el segmento en lugar del arco circular que limita al segmento.

En estas dos proposiciones Euclides no está hablando del ángulo en el segmento que está estudiando sino del ángulo en el segmento complementario. En **E.III.22** ya demostró que los ángulos de ambos segmentos suman dos rectos, entonces el ángulo que va a sustituir al arco del segmento no es el ángulo α del que está hablando en **E.III.26** y **E.III.27** sino que es un ángulo β igual a $2R - \alpha$.

Una vez que ha justificado la legitimidad de esta sustitución sólo necesita un teorema más antes de proponer la construcción de un segmento circular.

E.III.32 *Si una recta es tangente al círculo y desde el punto de contacto se traza una recta que corte al círculo, los ángulos que ésta haga con la tangente serán iguales a los ángulos que se forman en los segmentos alternos.*

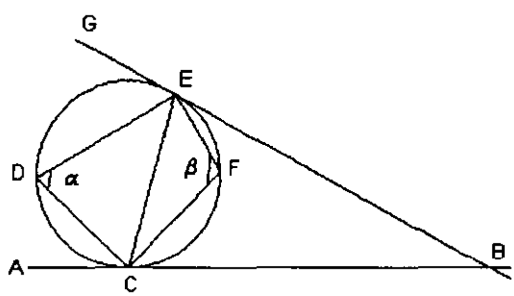


Fig. 4.33

Al trazar la tangente por el punto C, $\angle BCE = \angle CDE$ y $\angle ACE = \angle EFC$.

Y al trazar la tangente por el punto E, $\angle GEC = \angle EFC$ y $\angle BEC = \angle EDC$.

Luego, se tiene que $\angle BEC = \angle BCE = \alpha$ y $\angle GEC = \angle ACE = \beta$

Una vez demostrado este teorema Euclides ha terminado de exponer todas las proposiciones de preparación que le servirán para justificar el problema fuerte **E.III.33** donde propone la construcción de un segmento circular a partir de un ángulo y una cuerda dados. Con estas últimas proposiciones queda establecido que la base y el ángulo en el segmento son las magnitudes que determinan un único segmento circular; y que este segmento circular es una función de ambas magnitudes.

El problema fuerte **E.III.33** requiere lo siguiente: *sobre una recta dada construir un segmento de círculo que comprenda un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.*

Lo primero que hace Euclides es dividir la demostración en tres casos según si el ángulo dado es agudo, recto u obtuso, aunque la construcción que propone es esencialmente la misma.

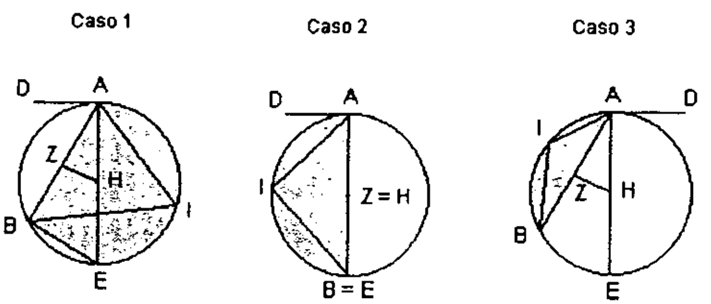


Fig. 4.34

Sobre la recta dada AB se traza la recta AD que forme con ella el ángulo $\angle G$ dado. Se traza la recta AE perpendicular a la AD en el punto A. Luego se divide el segmento de recta AB en dos partes iguales por el punto Z. Se traza por ese punto Z una perpendicular a AB. Esa perpendicular ZH intersecta a AE en el punto H. H es el centro del círculo que tiene a AB como una de sus cuerdas. Entonces se ha construido un segmento $\mathcal{S}_{AIB}$, dados una recta y un ángulo.

En este momento me parece conveniente señalar que la construcción del segmento circular depende del quinto postulado. El punto H es centro del círculo al que pertenece el segmento que se construye. Si las rectas AE y ZH no se intersectaran, la construcción propuesta no tendría sentido. Por ahora quiero dejar este detalle en el aire, en el sexto apartado lo retomaré con más detalle.

Los segmentos circulares que Euclides traza tienen las características que él mostró con anterioridad. El segmento se construye sobre una recta igual a la recta AB dada y el ángulo en el segmento es igual al ángulo dado. El teorema **E.III.32** garantiza que el ángulo $\angle AIB$ es igual al ángulo $\angle G$ dado.

El segmento circular que obtiene tiene la caracterización que demostró en la proposición **E.III.30**, *el ángulo puesto en el semicírculo es recto* (caso 2), *el que está en el segmento mayor es menor que un recto* (caso 1), *el que está en el segmento menor es mayor que un recto...* (caso 3).

Finalmente, presentó la forma de construir un segmento circular dados un ángulo y un segmento de recta. De esta manera se puede afirmar que la relación de unicidad entre un segmento, su cuerda y su ángulo es en ambos sentidos y se demuestran los siguientes puntos:

1. Si los segmentos $\mathcal{S}(\lambda, \alpha)$ y $\mathcal{S}(\lambda', \alpha')$ son iguales,
    a. Los ángulos α y α' en estos segmentos son iguales, propiedad demostrada en **E.III.27**.
    b. Las cuerdas base de los segmentos λ y λ' también son iguales, demostrado en el teorema **E.III.29**.
2. Que dados una cuerda λ y un ángulo α, se determina un único segmento circular $\mathcal{S}(\lambda, \alpha)$ construido a través de **E.III.33**.

Yo propongo escribir estas dos propiedades de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}(\lambda\ ,\ \alpha) = \mathcal{S}(\lambda'\ ,\ \alpha') \Leftrightarrow \lambda = \lambda' \text{ y } \alpha = \alpha'$$

El segmento cuya base es la cuerda λ y que contiene al ángulo α es igual al segmento cuya base es la cuerda λ' y que contiene al ángulo α' si tanto las cuerdas como los ángulos son iguales; y si los ángulos y las cuerdas son iguales entre sí, los segmentos también serán iguales.

5. EL PROBLEMA DE LA SUPERPOSICIÓN

En la sección anterior hice un análisis del trabajo de Euclides en el tercer libro. Mostré cómo es que Euclides remite el estudio de un segmento circular a dos magnitudes rectilíneas que son una cuerda base del segmento y un ángulo en el segmento. La proposición que justifica esta sustitución es **E.III.24** para cuya demostración la κατασκευή consiste en sobreponer una figura a otra. Como señalé en su momento, este tipo de construcción no es para mí del todo convincente por eso es que en esta sección trataré de proponer un estudio alternativo del tercer libro de *Los Elementos* del mismo modo que David Hilbert hizo con el primer libro.

Euclides utiliza la superposición para demostrar la proposición **E.III.24** y propone el siguiente procedimiento.

Se aplica el segmento AEB sobre el GZD, el punto A con el G, el B con el D y, por ser iguales, la recta AB con la GD.

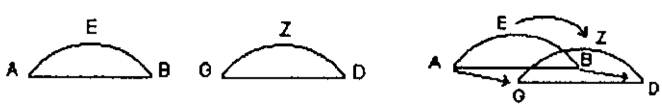


Fig. 5.1

Lo que Euclides hace es mostrar que los segmentos circulares no pueden no coincidir y concluye por lo tanto que son iguales.

La superposición es una construcción parte de la κατασκευή a la que Euclides recurre sólo tres veces en *Los Elementos* y al parecer lo hace cuando no tiene otra alternativa. Esto se debe, tal vez, a que él mismo se da cuenta de que el método es un tanto ambiguo. No explica de manera clara lo que significa "aplicar" una figura sobre otra.

Antes de comenzar con mi trabajo alternativo referente al círculo y en especial a **E.III.24**, me parece conveniente analizar brevemente el proceder de Hilbert. Comenzaré por discutir la manera en la que Hilbert demostró las proposiciones **E.I.4** y **E.I.8** de *Los Elementos*.

El problema que genera el método de superposición no puede simplemente dejarse de lado. La primera vez que Euclides lo usa es en la proposición **E.I.4**, un teorema que establece un criterio para la igualdad de triángulos.

E.I.4 *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales uno a uno, e iguales los ángulos correspondientes comprendidos por tales rectas iguales, tendrán bases iguales entre sí y será un triángulo igual al otro...*

Este es una de las proposiciones más importantes dentro de la geometría de Euclides porque gran cantidad de las proposiciones de libros posteriores se apoyan en esta demostrada con el método de superposición. Si no fuese válido recurrir a la superposición cuando se quiere demostrar alguna afirmación, la estructura lógica de *Los Elementos* presentaría inconsistencias desde el principio.

Para demostrar **E.I.4** Euclides supone que los lados AB y DE, AG y DZ y los ángulos $\angle BAG$ y $\angle EDZ$ son iguales respectivamente. Luego aplica el triángulo ABG sobre el triángulo EDZ.

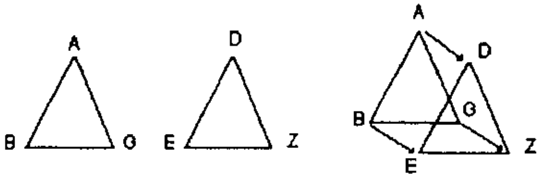


Fig. 5.2

Euclides afirma que el punto A cae sobre el D y la recta AB sobre la DE. Como AB es igual a DE entonces los puntos B y E coinciden. Los ángulos $\angle BAG$ y $\angle EDZ$ son iguales, luego la recta AG se aplica sobre la DZ y como éstas dos también son iguales, el punto G coincide con el punto Z. Debido a que el punto B coincide con el punto E y el punto G con el punto Z, las rectas BG y EZ deben coincidir.

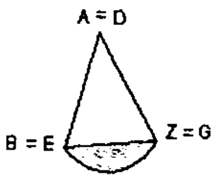


Fig. 5.3

Si no fuera así entonces habría dos rectas distintas que pasan por los puntos E y Z. Este argumento asegura la coincidencia de las rectas BG y EZ pero también es un argumento interpolado a partir del cual se origina presumiblemente **N.C.9** que concluye que dos rectas no circundan una región.

Hay dos problemas clave con este método de construcción que se presentan no sólo en esta proposición sino en las tres proposiciones en las que Euclides lo utiliza. El primero es una pregunta muy válida: ¿cómo se mueve una figura para aplicarse sobre otra? El segundo es que Euclides jamás habla sobre la unicidad de construcción de un segmento ó de un ángulo. No hay forma de suponer que las nociones comunes impliquen un postulado que garantice la unicidad de la construcción. Más aún, si el superponer un objeto significara moverlo hasta ponerlo encima de otro, ¿cómo saber que el primer objeto es invariante bajo ese movimiento?

En *Los Elementos* la unicidad de la construcción de rectas y ángulos se podría establecer con **N.C.7**, *las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí* y **N.C.8**, *el todo es mayor que las partes*. La superposición consiste en aplicar una figura sobre otra y observar si las partes coinciden o no. Si coinciden, son iguales de acuerdo con **N.C.7**; si no coinciden una es mayor que la otra como se afirma en **N.C.8**.[19]

Mi parecer sobre estas nociones comunes, y que considero es el mismo parecer de Hilbert, es que éstas no son realmente suficientes para garantizar la unicidad de la construcción, porque sugieren un método de demostración que es práctico y no teórico pues el argumento concluyente se basa en una percepción sensorial percepción sensorial y no en una percepción axiomática. Esto se debe a que el resultado se concluye a partir de lo que se observa en la figura trazada y no en axiomas previamente expresados. No basta observar si las figuras coinciden o no, se necesitan axiomas que garanticen la igualdad de manera explícita. En su libro *Fundamentos de la Geometría* Hilbert trata este problema a su modo.

Reestructura la exposición de la geometría con base en estos 5 grupos de axiomas que son:

I. Axiomas de incidencia, que establecen una relación de *incidencia* entre puntos, líneas y planos

II. Axiomas de orden, que definen el concepto "estar entre" para así ordenar los puntos de una línea, un plano o el espacio.

III. Axiomas de congruencia, que definen los conceptos de congruencia y desplazamiento.

IV. Axioma de las paralelas, que establece que dados una recta y un punto fuera de ella, existe a lo más una línea paralela a ella que pasa por ese punto.

V. Axiomas de continuidad, que hace posible la introducción de continuidad en la geometría.

En el trabajo de Hilbert se encuentra el *primer teorema de congruencia* en el que se demuestra de manea alternativa la proposición **E.I.4** de Euclides. El teorema dice lo siguiente:

H.12 *El triángulo ABC es igual al triángulo A'B'C' si AB≡A'B', AC≡A'C' y ∠A≡∠A'.*

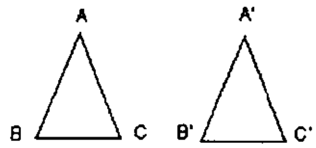


Fig. 5.4

Hilbert. utiliza dos axiomas de congruencia para demostrar su primer teorema de congruencia. Estos dos axiomas son:

H.AC.4 *Si dan un ángulo ∠(h,k) en un plano α, la recta a' en un plano α', se fija un lado de a' sobre el α', y si a la vez h' designa un semirrayo de la recta a' que parte del punto o', se dará en este caso en el plano α' un semirrayo y uno sólo k' tal que el ángulo ∠(h,k) sea congruente con el ángulo ∠(h',k') y a la vez que todos los puntos interiores del ángulo ∠(h',k') se encontrarán en el lado dado de a', simbólicamente,*

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

H.AC.5 *Si para dos triángulos ABG y A'B'G' valen las congruencias AB ≡ A'B', AG≡A'G' y ∠BAG ≡ ∠B'A'G', entonces también se cumplirán las congruencias ∠ABG ≡ ∠A'B'G' y ∠AGB ≡ ∠A'G'B'.*

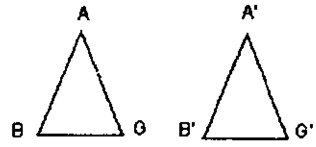


Fig. 5.5

Con estos dos axiomas la prueba de **H.12** procede como sigue. Si se tienen dos triángulos de tal manera que AB ≡ A'B', AC ≡ A'C' y ∠CAB ≡ ∠ C'A'B'.

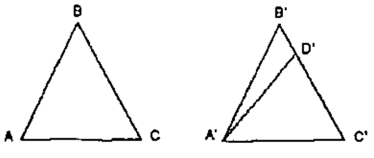


Fig. 5.8

De acuerdo con **H.AC.5** se tiene también que ∠ABC≡∠A'B'C' y ∠ACB≡∠A'C'B'. Si CB no es igual a C'B', entonces existe un punto D' sobre C'B' de tal manera que CB≡C'D'.

AC ≡ A'C', CB ≡ C'D' y ∠BCA ≡ ∠D'C'A'. Aplicando **H.AC.5** a los triángulos ACB y A'C'D' se tiene que ∠CAB ≡ ∠C'A'D'. Pero se sabía que ∠CAB≡∠C'A'B', luego ∠C'A'B' ≡ ∠C'A'D'; lo que contradice al axioma **H.AC.4**.

Por lo tanto, CB ≡ C'B' y los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes.[20]

Hilbert retoma la proposición **E.I.4** de Euclides y lo demuestra de manera alternativa. A mí me parece que lo que Hilbert objeta es que tratar de demostrar que dos líneas son iguales es un problema de congruencia y no un problema de incidencia. Creo que es por eso Hilbert utiliza sólo axiomas de congruencia para demostrar tanto **H.12** como **H.18**. Para Hilbert demostrar que dos objetos tienen que coincidir no demuestra que los objetos son iguales.

Otra proposición en donde Euclides usa el método de superposición es **E.I.8**, que en *Los Elementos* también se refiere a las condiciones que garantizan la igualdad de dos triángulos.

E.I.8: *Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a los del otro e iguales las bases tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.*

Euclides aplica el triángulo ABG sobre el triángulo EDZ, el punto B sobre el E, el G sobre el Z y por ser iguales, la recta BG sobre la EZ.

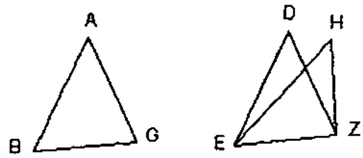


Fig. 5.7

No puede pasar que AB sea igual a DE al mismo tiempo que es igual a EH, de igual manera, tampoco puede pasar AG=DZ=HZ, pues la imposibilidad de que esto suceda ya fue demostrada el teorema anterior, **E.I.7**: *dos rectas respectivamente iguales a otras dos con los mismos extremos en el mismo lado de una misma recta no se juntan en dos puntos distintos*. Luego, los triángulos se adaptarán congruentemente y también lo harán sus ángulos.

Del mismo modo que Euclides utiliza una proposición previa para demostrar **E.I.8**, Hilbert prueba su análogo **H.18** que corresponde al *tercer teorema de congruencia*, con la ayuda de un teorema previo que dice:

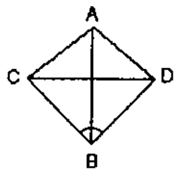


Fig. 5.8

H. 17 *Si dos puntos C y D se colocan de lados diferentes de la recta AB y de tal manera que AC ≡ AD y BC ≡ BD, entonces los ángulos ∠ABC y ∠ABD son congruentes.*

La hipótesis de Hilbert para demostrar **H.18** es que en los triángulos ABC y A'B'C' los lados AB, BC, CA y A'B', B'C' C'A' son congruentes, respectivamente.

Hilbert construye a partir del lado A'C' y hacia ambos lados, el ángulo ∠CAB. De tal manera que las líneas A'B" y A'B'" sean congruentes a la línea AB.

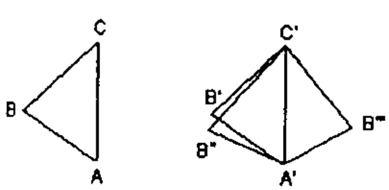


Fig. 5.9

Por construcción e hipótesis se tienen las siguientes igualdades:

AB ≡ A'B' ≡ A'B'' ≡ A'B'''   y   ∠CAB ≡ ∠C'A'B'' ≡ ∠C'A'B'''

También A'C' es congruente a sí misma y por **H.12**, los triángulos ABC, A'B''C' y A'B'''C' son congruentes. Por lo tanto, los lados BC, B''C' y B'''C' también lo son. Por hipótesis BC y B'C' son congruentes, luego B'C' y B'''C' también lo son.

Los triángulos A'B'C' y A'B'''C' cumplen las condiciones de **H.17**, luego ∠C'A'B' y ∠C'A'B''' son congruentes. Ya se tenía que ∠C'A'B'' ≡ ∠C'A'B''', luego ∠C'A'B' ≡ ∠C'A'B''. Lo que contradice la unicidad de la construcción del ángulo. Por lo tanto los puntos B' y B'' son el mismo.

En los triángulos ABC y A'B'C' se tiene que AB≡A'B', AC≡A'C' y ∠CAB≡∠C'A'B', de acuerdo con **H.12**, los triángulos son congruentes.

Ahora que he mostrado el proceder de Hilbert para demostrar de manera alternativa y sin recurrir al método de superposición las primeras dos proposiciones en las que Euclides lo utiliza, continuaré mi trabajo para hacer lo mismo con **E.III.24**.

Para comenzar quisiera proponer tres definiciones que más adelante utilizaré para estudiar más a fondo la naturaleza de algunas figuras no rectilíneas.

D.I Dos círculos son iguales si sus radios son iguales.

D.II Dos arcos de circunferencia son iguales si pertenecen a círculos iguales.[21]

D.III Dos segmentos circulares son iguales si sus ángulos en el segmento son iguales. Esto es, $\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{A'B'C'}$ si ∠ABC = ∠ A'B'C'.

Fig. 5.10

En el apartado anterior yo afirmaba que dos segmentos tendrían que ser iguales si estaban limitados por arcos y cuerdas iguales. Antes de demostrar **E.III.24** de manera alternativa quiero proponer axiomas de congruencia para arcos de circunferencia de la misma manera que Hilbert lo hizo para líneas rectas.

A.I Si A y B son dos puntos de una circunferencia $\mathcal{C}$ y A' es un punto en la misma o en otra circunferencia $\mathcal{C}'$, entonces siempre se puede encontrar de un lado de la circunferencia $\mathcal{C}'$ respecto del punto A' un punto B' de tal manera que el arco $\mathscr{A}_{AB}$ es igual al arco $\mathscr{A}_{A'B'}$. En símbolos, $\mathscr{A}_{AB} = \mathscr{A}_{A'B'}$. También se tiene que cada arco es igual a sí mismo, $\mathscr{A}_{AB} = \mathscr{A}_{AB}$.

A.II Si un arco $\mathscr{A}_{ABC}$ es igual al arco $\mathscr{A}_{A'B'C'}$ y al arco $\mathscr{A}_{A''B''C''}$, serán iguales también los arcos $\mathscr{A}_{A'B'C'}$ y $\mathscr{A}_{A''B''C''}$. Esto es, si $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{A'B'C'}$ y $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{A''B''C''}$, vale también $\mathscr{A}_{A'B'C'} = \mathscr{A}_{A''B''C''}$.

A.III Sean $\mathscr{A}_{ABC}$ y $\mathscr{A}_{CDE}$ dos arcos sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ que sólo comparten el punto C y $\mathscr{A}_{A'B'C'}$ y $\mathscr{A}_{C'D'E'}$ dos arcos sobre la misma circunferencia o sobre otra distinta $\mathcal{C}'$; si se tiene que $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{A'B'C'}$ y $\mathscr{A}_{CDE} = \mathscr{A}_{C'D'E'}$ también se tiene siempre que $\mathscr{A}_{ACE} = \mathscr{A}_{A'C'E'}$.

A.IV Segmentos circulares semejantes son iguales si pertenecen a círculos iguales.

Este último axioma me sirve para demostrar **E.III.24** de manera alternativa, pero antes quiero hacer un pequeño ajuste en el orden de los teoremas del tercer libro. La proposición **E.III.25**, *dado el segmento de un círculo, suplir el círculo de que es segmento*, es independiente de **E.III.24**, por lo que puede antecederlo. Necesito que **E.III.25** se demuestre antes pues en la κατασκευή de la demostración que propongo de **E.III.24** se requiere encontrar los centros de los círculos a los que los segmentos circulares pertenecen.

La prueba de **E.III.24** con base en **A.IV** puede proceder de la siguiente manera:

Sean pues $\mathcal{S}_{ABC}$ y $\mathcal{S}_{A'B'C'}$ los segmentos circulares semejantes y λ_{AC} y $\lambda_{A'C'}$ las bases iguales. Divídase la recta λ_{AC} en dos partes iguales por el punto D. Por tal punto trácese la recta BZ perpendicular a λ_{AC}. Trácese la línea BC. Cópiese el ángulo $\angle$DBC sobre la recta BC (**E.I.23**), para tener el ángulo $\angle$BCZ. Por **E.III.25**, el punto Z, intersección de BD y CZ, es el centro del círculo al que el segmento circular $\mathcal{S}_{ABC}$ pertenece. Con el mismo procedimiento se obtiene que Z' es el centro del círculo al que el segmento circular $\mathcal{S}_{A'B'C'}$ pertenece.

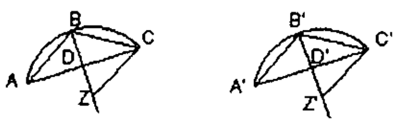


Fig. 5.11

Los triángulos BDA y BDC son iguales de acuerdo con **E.I.4** debido a que AD = DC, $\angle$BDA=$\angle$BDC=R y DB = DB. De la misma manera se tiene la igualdad de los triángulos B'D'A' y B'D'C'. Por lo tanto, $\angle$ABD = $\angle$CBD y $\angle$A'B'D' = $\angle$C'B'D'.

Los segmentos circulares $\mathcal{S}_{ABC}$ y $\mathcal{S}_{A'B'C'}$ son semejantes, luego,

$\angle$ABC = $\angle$A'B'C' pero también, $\angle$CBD = ½ $\angle$ABC = ½ $\angle$A'B'C' = $\angle$C'B'D'.

Por **E.I.32**, en los triángulos BZC y B'Z'C' se tienen las siguientes igualdades,

$$\angle BZC = 2R - (\angle ZBC + \angle ZCB) = 2R - (\angle Z'B'C' + \angle Z'C'B') = \angle B'Z'C'$$

De igual manera, en los triángulos ZDC y Z'D'C' se tiene

$$\angle DCZ = 2R - (\angle CZD + \angle ZDC) = 2R - (\angle C'Z'D' + \angle Z'D'C') = \angle D'C'Z'$$

Los triángulos DCZ y D'C'Z' son iguales pues $\angle ZDC = \angle Z'D'C'$, DC=D'C' y $\angle DCZ = \angle D'C'Z'$, en otras palabras, tienen dos ángulos y el segmento entre ellos iguales (**E.I.26**). Por lo tanto ZC = Z'C'.

Los círculos a los que los segmentos circulares ABG y A'B'G' pertenecen son iguales pues tienen radios iguales, por lo tanto los segmentos circulares semejantes son iguales.

Una vez demostrada esta proposición se puede concluir que dos ángulos en el segmento y dos cuerdas bases del segmento respectivamente, determinan segmentos circulares iguales. Esto es,

$$\lambda = \lambda' \text{ y } \alpha = \alpha' \Rightarrow \mathcal{S}(\lambda\ ,\ \alpha) = \mathcal{S}(\lambda'\ ,\ \alpha')$$

Se tiene entonces que con **A.IV** también se demuestra que los segmentos circulares son iguales cuando los ángulos y las cuerdas son iguales y eludiendo el método de superposición. Lo que esta prueba muestra es que los círculos construidos a partir de segmentos semejantes con bases iguales y de acuerdo con **E.III.25**, son iguales; el último axioma que propongo permite entonces concluir la igualdad de los segmentos circulares.

Ya está demostrado **E.III.24** en la forma en que me propuse sin recurrir al método de superposición. Aunque ya no es necesario mover un segmento circular para ponerlo sobre otro quiero proponer un método para construir un segmento circular que sea igual a otro segmento circular y que pase por un punto dado.

Proposición 2: *Por un punto dado construir un segmento circular igual a otro segmento circular dado.*

Sean pues ABG el arco de circunferencia y A' el punto dados.

Encuéntrese Z el centro de la circunferencia a la que ABG pertenece (**E.III.25**). Trácese por A' una recta A'Z' igual a AZ (**E.I.2**). En el punto Z' y sobre la recta A'Z' constrúyase $\angle$A'Z'G' igual a $\angle$AZG (**E.I.23**). Con centro en Z' y radio A'Z' constrúyase el arco A'B'G' desde el punto A' hasta que corte con la recta Z'D'.

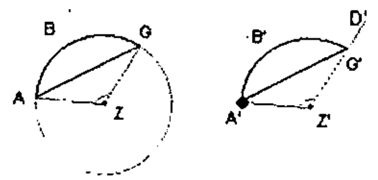


Fig. 5.12

El arco A'B'G' será igual al arco ABG dado debido a **A.IV** y de acuerdo con lo siguiente.

Fig. 5.13

Una vez trazados los dos segmentos circulares divídanse los ángulos $\angle$AZG y $\angle$A'Z'G' en dos partes iguales por las rectas ZB y Z'B'.

Por construcción $\angle$AZG = $\angle$A'Z'G' luego, $\angle$AZB=$\angle$BZG=$\angle$A'Z'B'=$\angle$B'Z'G'.

Por ser radios de círculos iguales, ZA = ZB = ZG = Z'A' = Z'B' = Z'G'.

Por **E.I.4** los triángulos AZB, BZG, A'Z'B' y B'Z'G' son todos iguales.

Además se trata de triángulos isósceles luego,

$$\angle ZAB = \angle ZBA = \angle ZBG = \angle ZGB = \angle Z'A'B' = \angle Z'B'A' = \angle Z'B'G' = \angle Z'G'B'$$

$$\angle ABG = \angle ZBA + \angle ZBG = \angle Z'B'A' + \angle Z'B'G' = \angle A'B'G'$$

Como los ángulos $\angle$ABG y $\angle$A'B'G' son iguales, se tiene que los segmentos circulares trazados son semejantes y por pertenecer a círculos iguales, son también iguales. Así se ha trazado un segmento circular $\delta_{A'B'G'}$ igual al segmento circular δ_{ABG} dado de tal manera que pasa por un punto A' dado.

Si se quisiera reestructurar el tercer libro de Euclides para incluir esta demostración de **E.III.24**, **Proposición 2** y los axiomas yo propongo el siguiente orden:

D.I, D.II, D.III.2,..., D.III.10, D.III

A.I, A.II, A.III, A.IV

...**E. III.21, E.III.22, E.III.25, Proposición 2, E.III.23, E.III.24, E.III.26**...

Recordemos que las definiciones **D.I** y **D.III** corresponden a las definiciones **D.III.1** y **D.III.11**, respectivamente. Este orden de las proposiciones no genera ningún caos lógico pues **E.III.25** y **Proposición 2** se demuestran independientemente de **E.III.23** y **E.III.24**.

Finalmente logré responder de cierta manera las preguntas que surgen cuando se trabaja con el método de superposición. Propuse una manera de trasladar un segmento circular y demostré **E.III.24** sin recurrir a la superposición. Es cierto que utilicé un axioma que no se encuentra de manera explícita en Euclides pero que yo creo supone verdadero de manera implícita en varias proposiciones, éstas son, **E.III.26** a **E.III.29**.

Yo digo que en estas cuatro proposiciones Euclides sugiere que los segmentos iguales pertenecen a círculos iguales por la siguiente razón. Estoy convencida de que cuando Euclides habla de segmentos iguales está hablando de segmentos limitados por arcos y bases iguales. En estos cuatro teoremas propone que los arcos iguales sólo están en círculos iguales, luego, podemos decir que las periferias de círculo que limitan a los segmentos iguales sólo pueden pertenecer a círculos iguales y por lo tanto los segmentos también pertenecerán únicamente a círculos iguales. Además, no hay ninguna proposición en el tercer libro que insinúe que puedan existir arcos iguales en círculos desiguales.

6. EL QUINTO POSTULADO

La construcción de un segmento circular que propone Euclides en **E.III.33** depende, como lo señalé en su momento, de la validez de **P.5**.

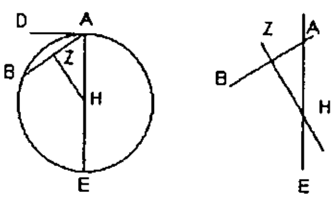


Fig. 6.1

La construcción que Euclides propone es la siguiente. La recta AB cae sobre las rectas AE y ZH. Por construcción, el ángulo $\angle$BAE es menor que un recto. El ángulo $\angle$AZH es igual a un recto pues la recta ZH es perpendicular a AB. La suma de un ángulo menor que un recto y uno igual a un recto es menor a dos rectos, entonces la recta AB, que cae sobre AE y ZH forma ángulos menores a dos rectos por lo tanto las rectas AE y ZH se intersectan.

A partir del punto H y con algún radio Euclides traza el círculo del que el segmento que desea trazar forma parte. Es **P.5** lo que garantiza que este punto está bien definido.

El quinto postulado juega un papel fundamental en el desarrollo del tercer libro. La versión que más usa de **P.5** a lo largo de este libro es la que se deriva de **E.I.32**. De las 15 proposiciones que recurren a **P.5** 10 son de esta forma.

La razón principal por la que Euclides utiliza esta versión más que cualquier otra es la constante que establece. El triángulo es la figura que más utiliza Euclides, cualquier figura rectilínea puede dividirse en triángulos para una infinidad de propósitos. Es la única figura que es equiángula si y sólo si es equilátera.

E.I.32 establece una función entre los ángulos internos de un triángulo, como la suma de sus ángulos es constante, sólo se necesita saber el valor de dos de ellos para determinar el tercero.

Un ejemplo que tal vez aclare un poco más lo que trato de decir es **E.III.21** que dice: *En los cuadriláteros puestos en los círculos los ángulos opuestos son iguales a dos rectos.* La demostración de este teorema procede de la siguiente manera.

En la demostración de esta proposición Euclides recurre un teorema anterior **E.III.20**: *en un círculo los ángulos puestos en el mismo segmento son iguales entre sí.*

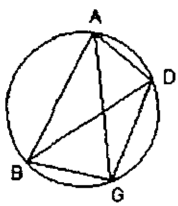


Fig. 6.2

Porque son ángulos puestos en los mismos segmentos, se tienen las siguientes igualdades:

$\angle BAG=\angle BDG$; $\angle BGA=\angle BDA$; $\angle ABD=AGD$; $\angle DAG=\angle DBG$

Por ser los ángulos internos de triángulos también se tiene,

$\angle ABG + \angle BGA + \angle GAB = 2R$; $\angle AGD + \angle GDA + \angle DAG = 2R$;

$\angle BAD + \angle BDA + \angle ABD = 2R$; $\angle BGD + \angle GDB + \angle DBG = 2R$.

Para los ángulos opuestos $\angle BAD$ y $\angle BGD$ se tiene lo siguiente,

$$\angle BAD + \angle BGD = \angle BAD + (\angle BGA + \angle AGD) = \angle BAD + \angle BDA + \angle ABD = 2R$$

De igual manera, los ángulos opuestos $\angle ABG$ y $\angle ADG$ son iguales,

$$\angle ABG + \angle ADG = \angle ABG + (\angle BDA + \angle BDG) = \angle ABG + \angle BGA + \angle BAG = 2R$$

Esto, por ser la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Debido a las herramientas matemáticas con las que contamos en la actualidad es fácil demostrar que un círculo queda determinado de manera única por tres puntos ya que su ecuación es de segundo grado. Euclides mismo sugiere que el círculo trazado a partir de tres puntos es único y requiere de **P.5** para su demostración. Los siguientes problemas son un recuento de aquellos en donde se traza un círculo a partir de tres puntos no colineales.

El primero que voy a retomar es **E.III.25** en donde se completa un círculo a partir de un segmento circular.

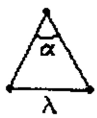


Fig. 6.3

Euclides demostró que un ángulo y una cuerda determinan de manera única un segmento circular. Con esta misma propiedad podemos deducir que tres puntos no colineales determinan de manera única un segmento circular. Uno de los puntos es el vértice del ángulo y los otros dos son los extremos de la cuerda.

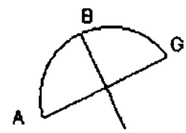


Fig. 6.4

En este caso, los tres puntos por los que pasará el círculo son A y G extremos de la cuerda que limita al segmento dado y B que es la intersección del arco con una perpendicular trazada a partir de la base del mismo segmento.

E.III.25 *Dado el segmento de un círculo, suplir el círculo de que es segmento.*

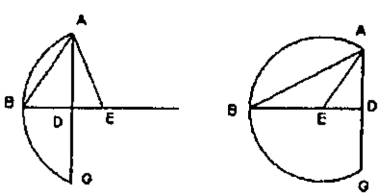


Fig. 6.5

Pongo dos ilustraciones pues hay dos casos que pueden ocurrir durante la construcción. Lo primero que Euclides hace es dividir la base AG del segmento en dos partes iguales por el punto D, luego traza DB que es perpendicular a AG y también traza la recta AB. Se forma el ángulo $\angle ABD$, que puede ser mayor, igual o menor que $\angle BAD$. Los casos en que los ángulos son desiguales ($\angle ABD < \angle BAD$ y $\angle ABD > \angle BAD$) se tratan de manera idéntica.

<u>**Caso 1**</u> Sea $\angle ABD > \angle BAD$

Construir $\angle BAE = \angle ABD$, <u>**prolongar BD hasta E**</u> y trazar la EG...(la demostración continúa)

Resulta que E es el centro del círculo buscado y la longitud AE su radio, lo que garantiza que este punto realmente existe es **P.5**.

Por construcción $\angle ABD = \angle ABE = \angle BAE = \angle BAD$

En el triángulo ABD, $\angle ADB = R$ pero como *en todo triángulo, dos ángulos tomados de vez son menores que dos rectos* (**E.I.17**), pasa que

$$\angle ADB + \angle ABD < 2R \quad \Rightarrow \quad R + \angle ABD < 2R$$

$$\Rightarrow \quad \angle ABD < R \quad \Rightarrow \quad \angle ABE + \angle BAE < 2R$$

Entonces, se tienen las rectas AE y BD y una transversal AB, que al cortarlas forma ángulos internos menores que dos rectos, luego las rectas coincidirán (en el punto E).

<u>**Caso 2**</u> $\angle ABD = \angle BAD$

Este caso no necesita de **P.5** pero coincide con el caso en que el segmento del con que se trabaja es un semicírculo.

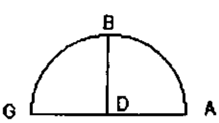


Fig. 6.6

Se divide el segmento AG en dos partes iguales en D. Como $\angle ABD = \angle BAD$, el triángulo ADB es isósceles, entonces

$$DA = DG = DB$$

Y la demostración finaliza pues *al tomar un punto en el interior del círculo tal que desde este punto se conducen al círculo más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo* (**E.III.9**), se tiene que D es el centro del círculo y DA su radio.

En el cuarto libro de *Los Elementos* Euclides también traza círculos que pasan por tres puntos. El primer problema que trata de esto es **E.IV.4** en el que hay que inscribir un círculo en un triángulo.

E.IV.4 *Inscribir un círculo en un triángulo dado.*

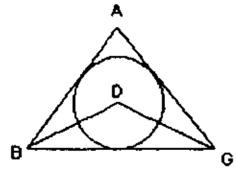


Fig. 6.7

La construcción se lleva a cabo de la siguiente manera. Se cortan los ángulos ∠ABG y ∠AGB en dos partes iguales. Las bisectrices de estos ángulos concurren en el punto D.

La demostración continúa y muestra que el centro de círculo que se pretende inscribir es el punto D y, otra vez, es **P.5** lo que garantiza su existencia.

Porque ABG es un triángulo, ∠ABG + ∠AGB < 2R

Por construcción, ∠DBG + ∠DGB = ½ (∠ABG + ∠AGB) < ½ (2R) = R

Luego, ∠DBG + ∠DGB < 2R

El siguiente problema es la construcción de un círculo que pasa por tres puntos que son los vértices de un triángulo ABG dado.

E.IV.5 Circunscribir un círculo a un triángulo dado.

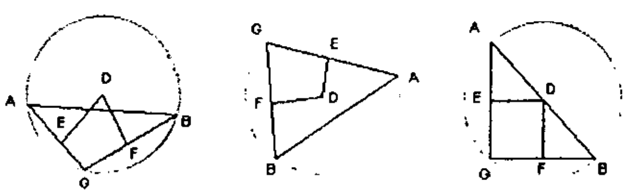


Fig. 6.8

La demostración consiste en cortar las rectas AG y BG en dos partes iguales. A partir de esos puntos medios se trazan las perpendiculares, éstas se **intersectan** en el punto D que es el centro del círculo que se desea trazar.

El segmento EF forma ángulos ∠DEF < ∠DEG y ∠DFE < ∠DFG

Por construcción $\angle DFG = \angle DEG = R$, luego

$$\angle DEF < R, \quad \angle DFE < R \quad \Rightarrow \quad \angle DEF + \angle DFE = 2R$$

Al incidir EF sobre las rectas FD y ED forman ángulos menores a dos rectos, por lo tanto se intersectan (en el punto D).

En el trabajo de Euclides la existencia misma de un círculo no depende de **P.5**, pero al intentar trazarlo de tal manera que pase por tres puntos no colineales dados resulta ser indispensable.

7. CONCLUSIONES

La geometría es una ciencia de formas y cantidades. El problema de la cuadratura del círculo tiene como objetivo medir el círculo. Es un problema de cantidad aunque está limitado por la forma pues trata de relacionar dos figuras de naturaleza distinta, siendo una de ellas una figura rectilínea y la otra una figura no rectilínea.

Euclides no resuelve el problema de la cuadratura del círculo, ni siquiera trabaja el problema pues esa no era su intención. Lo que él hizo en el tercer libro de *Los Elementos* fue establecer una función de determinación no de medida. El no muestra que la medida del ángulo y la medida de la cuerda puedan dar la medida del segmento circular sino que demuestra que este segmento que ellos forman queda determinado de manera única, cosa que Euclides hace en el teorema **E.III.24**.

Al estudiar este teorema me pareció reconocer que tenía algunas deficiencias por eso es que traté de darle al tercer libro una solución alternativa de la misma manera que hizo Hilbert con el primero. El trabajo que hice fue extenso aunque me faltaron muchas cosas por comprender. No obstante estoy satisfecha y maravillada con el trabajo de Euclides.

8. NOTAS

(1) Ver Heath (1), página 221 y Knorr, página 27.

(2) Ver Heath (1), páginas 226-230 y Knorr, página 80.

(3) Ver Heath (1), página 232.

(4) Ver Knorr, página 30.

(5) Esta propiedad la demuestra Euclides en **E.XII.2**.

(6) Ver Knorr, página 41.

(7) El conjunto de los números reales es no-numerable. Éste a su vez se divide en dos conjuntos, el de los números algebraicos y el de los trascendentes. El conjunto de los algebraicos es numerable y como el total es numerable entonces el conjunto de los números trascendentes no puede ser numerable. Por lo tanto casi todos los números reales son trascendentes.

(8) Las *Nociones Comunes* han sido tema de muchas discusiones, desde su denominación hasta la cantidad. Proclo, por ejemplo, habla de axiomas y justifica el término pues a pesar de que los geómetras se referían a ellas como *Nociones Comunes*, Aristóteles también las llamaba axiomas. Las llamaban de distinta manera pero el significado era el mismo.

La cantidad de *Nociones Comunes* que se encontraban en el texto de Euclides es un misterio. Herón, s. I d.C., sólo ponía las primeras tres aunque usaba las dos siguientes en diversas ocasiones en sus demostraciones. Simplicio, s. VI a.C., expresaba que en los "textos antiguos" sólo se encontraban las tres primeras. Adelardo de Bath sólo tiene ocho pues la novena "*dos rectas no circundan una región*" es el sexto postulado. Heiberg, al igual que Proclo sólo aceptaban cinco de ellas 1-3, 8 y 9. Proclo mismo admite la existencia de manuscritos que varían en su lista de axiomas.

Paul Tannery sostenía que no había ninguna *Nociones Comunes* en el trabajo original, que son una interpolación muy posiblemente del tiempo de Apolonio quien, según Proclo, intentó demostrarlas. Uno de los argumentos de Tannery es el orden en que se encuentran en el primer libro. Los postulados son puramente geométricos y preceden a las *Nociones Comunes* que son propias, salvo **N.C.9**, de cualquier ciencia. Heath responde a esta observación diciendo que sería menos natural presentar primero las definiciones (que son geométricas) y separarlas de sus postulados (también geométricos) por las nueve *Nociones Comunes* de carácter más general.

(9) El origen de **N.C.9** no está en Euclides, sino que se trata de una interpolación que se debe muy probablemente a Proclo. La incertidumbre del origen radica en la manera en que Proclo escribía sus comentarios, pues por lo general se expresaba en primera persona, "yo digo...", "yo demostraré...". Citó a muchos por nombre, pero una cita anónima no garantizaba una contribución propia. Para poder determinar de quién es la cita en cuestión es necesario analizar el estilo. Hay muchas contribuciones explícitamente atribuidas a Proclo, al comparar el estilo de éstas con el de **N.C.9**, según muchos autores, se incrementa la sospecha de que se deba a él.

Esta interpolación se encuentra en algunas versiones de los Elementos entre los postulados, tal es el caso de la primera traducción al latín de Adelardo de Bath en donde es el quinto postulado, y en otras como la noción común nueve, la edición de Heiberg.

De donde seguramente surgió fue de **E.I.4**, dice "porque aplicado el punto B sobre el E y el G sobre el Z, si la base BG no se aplicara sobre la base EZ, dos rectas circundarían una región lo cual es imposible".

Hay quienes opinan que esta noción común es innecesaria pues lo que establece se encuentra de manera implícita en **P.1**. Proclo pensaba que eso es algo que Euclides sabía pues al escribir **P.1** "*se puede trazar una recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera*" implica que se trata de una línea pero no de dos.

(10) Los griegos no tienen una palabra específica para el radio de un círculo, simplemente lo llaman "la línea recta trazada desde el centro"[CHG1] (η εκ τον κέντρον (ενθεια)).

(11) Analizando estas dos proposiciones con un poco más de detalle se puede ver que **E.I.1** es una caso particular de **E.I.22**. En ambas proposiciones se trata de construir un triángulo dados sus tres lados; en el caso de **E.I.22** los tres lados son distintos y en el caso de **E.I.1** los tres lados dados son iguales.

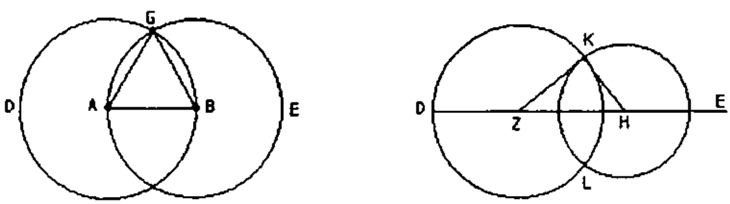


Fig. 8.1

En **E.I.1**, el primer lado del triángulo es AB, y en sus extremos se trazan dos círculos que tienen radios iguales a los otros dos lados, ambos AB. En **E.I.22**, la longitud de uno de los lados es ZH y en los extremos se trazan dos círculos, pero esta vez, uno con radio igual a la segunda recta dada y el otro igual a la restante.

Dado que el procedimiento de construcción es el mismo, un cuestionamiento muy razonable es ¿por qué hay 20 proposiciones de separación?

No podría ser **E.I.2** pues ésta enseña a construir una recta igual a otra recta dada, que es lo primero que hace en **E.I.22**, traza el punto Z sobre la recta DE de tal manera que DZ sea igual a A, el primer lado.

Antes está también **E.I.8** *si dos triángulos tienen los lados de uno respectivamente iguales a dos lados del otro e iguales las bases tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales* y **E.I.4**: *si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales uno a uno, e iguales los ángulos correspondientes comprendidos por tales rectas iguales, tendrán bases iguales entre sí y será un triángulo igual al otro y serán iguales los ángulos restantes, cada uno con su correspondiente: con aquel que subtienda lados iguales*, los cuales garantizan que el triángulo que se traza es único.

Además, no puede estar más cerca de **E.I.1** porque es hasta **E.I.20** que enuncia la condición necesaria para que el triángulo trazado sea realmente un triángulo, que la suma de dos de sus lados sea mayor que el tercero.

(12) Ver Heath (2) páginas 221-232.

(13) Recordemos el método de Antiphon para cuadrar el círculo. Él proponía inscribir polígonos en un círculo, cada vez de un mayor número de lados. Suponía que en algún momento los lados serían tan pequeños que coincidirían con la circunferencia del círculo. En esta proposición Euclides demuestra que *la recta que pasa por dos puntos cualesquiera de la circunferencia está dentro del círculo*, independientemente de la cercanía de dichos puntos.

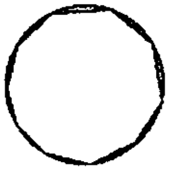


Fig. 8.2

Sin importar la cantidad de lados que tenga el polígono que queramos inscribir en un círculo, cada uno de los lados de ese polígono cae dentro del círculo. Hay una porción de área entre el polígono y el círculo que se está dejando fuera. La suma de estas porciones de área es la diferencia entre el área de la figura rectilínea y el área del círculo. Claro que entre mayor sea el número de lados que tenga el polígono más se va a acercar el lado al círculo y menor será la diferencia entre las áreas.

(14) La introducción de esta recta es muy importante pues habla de un tipo de ángulos que no había mencionado antes, aquellos formados por dos tipos distintos de líneas; una recta y una curva. Intuitivamente se supone que este ángulo tiene un valor mayor a cero.

Demuestra, en **E.III.16** que *entre esta línea* (la tangente) *y el círculo ninguna otra se interpondrá*. Trazando una línea que pase por el punto de contacto y que corte al círculo se forma un ángulo rectilíneo que es mayor al formado por el círculo y la secante, luego, mayor a cero. Es mayor pues el ángulo formado por el círculo y la tangente está dentro del formado por la tangente y la secante y por **N.C.8** se sabe que *el todo es mayor que las partes*. Además el ángulo formado por la tangente y la secante es, por construcción, mayor a cero.

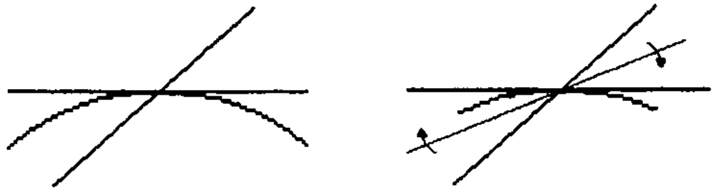


Fig. 8.3

Al rotar la línea secante, con centro en el punto de contacto, llegará un momento en que coincida con la tangente, en este momento el ángulo rectilíneo que forman la tangente y la secante tendrá un valor igual a cero.

Los ángulos formados entre la secante y la tangente son valores reales. Por continuidad de los reales, en algún momento el ángulo formado por ambas rectas debería ser igual al ángulo formado por la tangente y el círculo; pero entre el círculo y la tangente no cabe ninguna recta, incluyendo esta secante. Es decir, el ángulo que forma el círculo con la tangente es mayor a cero, pero no es igual a ninguno rectilíneo, luego es menor a cualquier rectilíneo dado.

(15) Ian Mueller dice que **E.III.1**, *encontrar el centro de un círculo dado*, es una proposición que construye un objeto definido y no una proposición que establece la existencia de un objeto por medio de su generación. Puesto que la existencia y unicidad del centro de un círculo están dadas en **D.I.15**, Euclides podría omitir esta proposición y en vez de decir "encuéntrese el centro del círculo", podría decir "sea Z el centro del círculo..." o "tómese el centro del círculo...".

Dado que **E.III.18** propone un método alternativo para trazar una perpendicular, saber encontrar el centro de un círculo es necesario y no superfluo como Mueller piensa.

(16) Esta pareja de proposiciones, **E.III.23** y **E.III.24**, se parece mucho a las parejas **E.III.7** - **E.III.8**, **E.I.35** - **E.I.36** y **E.I.37** - **E.I.38**. En uno de los teoremas de cada pareja demuestra la igualdad de las figuras sobre la misma base y el otro demuestra la igualdad sobre bases iguales.

E.III.23 *Sobre una misma recta no se pueden construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en la misma parte.*
E.I.7 *Dos rectas respectivamente iguales a otras dos con los extremos en el mismo lado de una misma recta no se juntan en dos puntos distintos.*

E.I.35 *Paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.*
E.I.37 *Los triángulos colocados sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.*

E.III.24 *Los segmentos circulares semejantes puestos sobre rectas iguales son iguales entre sí.*
E.I.8 *Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos del otro e iguales las bases tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.*

E.I.36 *Paralelogramos colocados sobre rectas iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.*

E.I.38 *Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.*

Se está hablando de dos tipos de igualdad, **E.III.23** - **E.III.24** y **E.I.7** - **E.I.8** hablan de figuras que son tanto iguales como semejantes, mientras que **E.I.35-E.I.36** y **E.I.37** - **E.I.38** solo se refieren a la igualdad en área.

Sólo dos de ellas se demuestran por el método de superposición, **E.I.8** y **E.III.24**. La demostración de ambas es muy similar. En ambos casos al sobreponer una sobre otra demuestra que no pueden no coincidir y que, por lo tanto, deben ser iguales. Lo que garantiza que ambas figuras no pueden no coincidir es el teorema inmediatamente anterior, **E.I.7** y **E.III.23**, respectivamente.

(17) El método de superposición es un método utilizado para demostrar la igualdad geométrica de dos figuras. Heath lo defiende diciendo que es un método legítimo de demostración pues prueba que dos figuras son iguales si sus partes coinciden.

Este es un método de demostración que se usaba desde los antiguos geómetras y ellos no dudaban de su autenticidad. Ya que Euclides prefiere no utilizar este método de demostración, hay quienes afirman, uno de ellos Heath, que este método lo utiliza más bien por tradición.

Este método propone una abstracción muy compleja pues acepta que las figuras puedan moverse y no deformarse. La geometría es una rama de las matemáticas que podría considerarse como aquella en la cual sus figuras son rígidas y aceptar que las figuras se puede tener movimiento sin deformación es muy poco natural.

El método propone que la igualdad de figuras se realice estableciendo una correspondencia biunívoca entres sus puntos, **N.C.VII**, *las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí.*

(18) En estos teoremas, **E.III.26** a **E.III.29**, Euclides propone de manera implícita que los segmentos circulares iguales deben formar parte de círculos iguales. Todas las igualdades de segmentos circulares que plantea se presentan con segmentos circulares que pertenecen a círculos que son iguales.

(19) **N.C.7** es la noción común sobre la cual se apoya el método de superposición. Tannery, por ejemplo, sugiere que debería ser excluida de las nociones comunes puesto que su naturaleza es puramente geométrica. La considera una definición de igualdad geométrica que es más o menos suficiente pero no un axioma. Heath, por su parte, sí lo considera un axioma de congruencia.

N.C.8, *el todo es mayor que la parte*, y **N.C.7** se complementan entre sí. Mientras que **N.C.7** garantiza la igualdad de dos figuras según la igualdad de sus partes, **N.C.8** propone que si las partes no coinciden, una de ellas es mayor que la otra y por lo tanto no son iguales. Lo que sugieren ambas nociones comunes es que si las partes de las figuras son iguales, las figuras también son iguales y si las partes son desiguales también lo son las figuras.

N.C.8 es un axioma derivado directamente de la observación de una figura geométrica. Éste propone una tricotomía en las partes de figuras geométricas. Por ejemplo, un segmento rectilíneo a puede ser parte de un segmento rectilíneo b, es decir $a < b$, o puede ser el todo de ese segmento rectilíneo, $a > b$, o bien pueden coincidir, $a = b$. Para los ángulos el razonamiento es idéntico.

(20) Según Hilbert, la unicidad de la construcción del segmento se sigue de la unicidad de la construcción del ángulo y con la ayuda del axioma **H.AC.5**.

(21) Necesito que los arcos de circunferencia pertenezcan a círculos iguales para que no sólo sean iguales en cuanto a longitud sino también iguales en cuanto a área.

9. BIBLIOGRAFÍA

- Blatner, David

  The joy of π

  Edit. Penguin Books, New York, 1997

- Bold Benjamin

  Famous problems of geometry and how to solve them

  Edit. Dover Publications Inc., New York, 1982

- Boyer, Carl y Merzbach, Uta

  A history of mathematics

  Edit. John Wiley & Sons, Inc., E.E.U.U., 1991

- Busard, H.L.L.

  The first latin translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath

  Pontificial Institute of Medieval Studies, Canadá, 1983

- Descartes, René

  The geometry

  Edit. Dover Publications Inc., New York, 1954

- García Bacca, Juan David y Álvarez Laso, José

  Euclides: Elementos de geometría, vols. I y II

  Edit. UNAM, México, 1992

- Heath, Thomas L. (1)

  A history of greek mathematics, vol. I

  Edit. Dover Publications Inc., New York, 1981

- Heath, Thomas L. (2)

  The thirteen books of Euclid's Elements, vols. I y II

  Edit. Dover Publications Inc., New York, 1956

- Hilbert, David

  Foundations of geometry

  Edit. The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971

- Knorr Wilbur

  The ancient tradition of geometric problems

  Edit. Dover Publications Inc., New York, 1993

- Mueller, Ian

  Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements

  Edit. The Massachusetts Institute of Technology, E.E.U.U., 1981

- Roberval, G. P.

  Elements de geometrie

  Edit. Librairie Philosophique J. VRIN, Francia, 1996