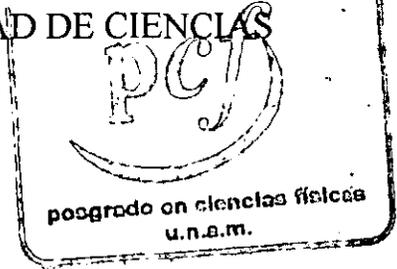


00382 (3)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO



FACULTAD DE CIENCIAS



TRANSPORTE ELECTRÓNICO A TRAVÉS DE
CAVIDADES CAÓTICAS BALÍSTICAS:
SIMETRÍA DE REFLEXIÓN Y SU RUPTURA.
ANALOGÍA CON UN ÁRBOL DE CAYLEY

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)
P R E S E N T A :
MOISÉS MARTÍNEZ MARES

287739

DIRECTOR DE TESIS: DR. PIER ACHILLE MELLO PICCO



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2001



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Transporte electrónico a través de cavidades caóticas balísticas: simetría de reflexión y su ruptura. Analogía con un árbol de Cayley

Moisés Martínez Mares

Resumen

El propósito central de esta Tesis es extender el estudio sobre el transporte a través de cavidades caóticas balísticas con simetría espacial de reflexión izquierda-derecha (ID) para incluir la presencia de procesos directos. Vamos a considerar sistemas bidimensionales con partículas sin espín. Primero analizamos sistemas completamente simétricos en la presencia de procesos directos y comparamos la distribución del coeficiente de transmisión con la que se obtiene para una cavidad asimétrica con la misma matriz de dispersión “óptica”, que representa los procesos directos. Después estudiamos el problema de la “mezcla externa” de la simetría causada por un acoplamiento asimétrico de la cavidad con el exterior. Primero consideramos el caso donde la ruptura de la simetría surge debido a que dos guías de onda colocadas simétricamente se acoplan a la cavidad por medio de barreras de tunelaje asimétricas. Segundo, rompemos la simetría de reflexión en la ausencia de procesos directos colocando asimétricamente las dos guías de onda y comparamos los resultados con los del caso completamente asimétrico. Otro propósito de la Tesis es analizar la analogía del problema de las cavidades con simetría de reflexión con un problema de dispersión en un sistema desordenado: un árbol de Cayley doble. Vemos que puede hacerse un mapeo de este problema al de las cavidades con simetría espacial de reflexión en un caso particular. Con esto queremos hacer notar la relevancia del problema de la dispersión en cavidades caóticas balísticas con simetría izquierda-derecha en la solución de este sistema desordenado.

Electronic transport through ballistic chaotic cavities: Reflection symmetry and its breaking. Analogy with a Cayley tree

Moisés Martínez Mares

Abstract

The central purpose of this Thesis is to extend the study on transport through ballistic chaotic cavities with spatial left-right (LR) reflection symmetry to include the presence of direct processes. We consider systems in two dimensions with spinless particles. We first analyze fully-symmetric systems in the presence of direct processes and compare the distribution of the transmission coefficient with that for an asymmetric cavity with the same “optical” scattering matrix, which represents the direct processes. We then study the problem of the “external mixing” of the symmetry caused by an asymmetric coupling of the cavity to the outside. We first consider the case where symmetry breaking arises because two symmetrically positioned waveguides are coupled to the cavity by means of asymmetric tunnel barriers. Secondly, we break reflection symmetry in the absence of direct processes by asymmetrically positioning the two waveguides and compare the results with those for the completely asymmetric case. Another purpose of the Thesis is to analyze the analogy of the cavity problem with reflection symmetry with a dispersion problem in a disordered system: a double Cayley tree. We see that this problem can be mapped to the problem of cavities with spatial reflection symmetry in a particular case. We note the relevance of the problem of dispersion in ballistic chaotic cavities with left-right symmetry in the solution of this disordered system.

*A María de los Angeles, mi esposa
por su apoyo y los bellos momentos que me ha brindado*

Agradecimientos

En estas líneas quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me ayudaron en mi formación académica, a aquellas personas de las que tuve que valerme para la realización de este trabajo y para aquellas personas que me ayudaron a mejorarlo.

A mi familia, mis padres, Consuelo y Jesús, y mis hermanos, Arturo, Clara, Consuelo, Fidel, *Ana Lidia*, Concepción, Jesús, Mario, Rosa, Laura, Luz y Sergio, quienes me dieron la fortaleza y el apoyo para culminar esta etapa de mi vida.

En deuda estoy con el Dr. Pier A. Mello a quien no sabría como pagar los ocho años en los que me transmitió su conocimiento, experiencia y entusiasmo. No existen palabras para expresar lo agradecido que le estoy.

También, agradezco al Dr. Alberto Robledo quien fungió como Cotutor durante el desarrollo de la Tesis; le agradezco sus valiosas contribuciones y las provechosas discusiones que tuvimos en gran parte de este trabajo.

Agradezco a los Dres. Christof F. Jung, Francois A. Leyvraz, Alejandro Morales, Pedro Pereyra, Gastón García y Arkady A. Krokhin, por revisar minuciosamente el manuscrito y que con sus valiosos comentarios me ayudaron a mejorar la Tesis. También, agradezco a los Dres. José L. Mateos, Felix Izrailev y Germán Luna quienes aceptaron amablemente formar parte del sínodo sin llegar a ser elegidos.

Sería inaceptable no incluir en estas líneas a mi amiga Lizette que, más que ayudarme con el trabajo secretarial, me ayudó con sus consejos y me permitió robarle parte de su tiempo en momentos difíciles por los que tuve que pasar haciendome la vida más agradable.

Finalmente, quiero agradecer al Instituto de Física de la UNAM por su hospitalidad y sobre todo por el excelente ambiente de trabajo, a la DGAPA y al CONACyT por el apoyo económico durante la realización de esta Tesis, a la UAM-Azcapotzalco por brindarme un espacio donde la parte final de este trabajo se realizó.

Índice General

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción al transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos | 11 |
| 2 | La matriz S y el transporte electrónico en cavidades balísticas mesoscópicas | 19 |
| 2.1 | La matriz de dispersión y sus propiedades de simetría | 19 |
| 2.1.1 | Conservación de flujo | 21 |
| 2.1.2 | Invariancia ante inversión en el tiempo | 23 |
| 2.1.3 | Simetría de reflexión | 24 |
| 2.2 | El transporte electrónico visto como un problema de dispersión | 26 |
| 2.2.1 | La fórmula de Landauer | 26 |
| 3 | La matriz S y su distribución estadística: el problema de dispersión en ausencia de simetría espacial | 29 |
| 3.1 | La medida invariante | 30 |
| 3.2 | La respuesta rápida del sistema | 31 |
| 3.3 | Dispersión caótica por cavidades asimétricas en ausencia de procesos directos | 32 |
| 3.3.1 | La distribución de T para el caso $N = 1, \beta = 1$ | 32 |
| 3.4 | Dispersión caótica por cavidades asimétricas en presencia de procesos directos | 33 |
| 3.4.1 | La distribución de T para el caso $N = 1, \beta = 1$ | 36 |
| 4 | El problema de dispersión para sistemas con simetría izquierda-derecha | 41 |
| 4.1 | La medida invariante | 42 |
| 4.2 | Dispersión caótica por sistemas con simetría ID completa en ausencia de procesos directos | 42 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.1 | La distribución de T para el caso $N = 1, \beta = 1$ | 43 |
| 4.3 | Sistemas con simetría ID completa en la presencia de procesos directos | 44 |
| 4.3.1 | La distribución de T para el caso $N = 1, \beta = 1$ | 46 |
| 5 | Ruptura de la simetría espacial de reflexión de cavidades caóticas balísticas | 49 |
| 5.1 | Ruptura de la simetría de reflexión por procesos directos | 49 |
| 5.2 | Ruptura de la simetría por medio de guías de onda colocadas asimétricamente | 57 |
| 6 | Analogía con un sistema desordenado: el árbol de Cayley doble | 63 |
| 6.1 | El problema de dispersión en un árbol de Cayley doble | 64 |
| 6.2 | El desorden en el árbol de Cayley doble | 67 |
| 6.3 | Árbol desordenado con acoplamiento máximo | 68 |
| 6.3.1 | El caso $S_I = S_D$ | 72 |
| | Matrices S con estructura ID . | |
| | La medida invariante como distribución de punto fijo. | |
| | ¿Cualquier distribución tiende a la de punto fijo? | |
| | La distribución límite de la conductancia. | |
| | Matrices S sin estructura ID . | |
| 6.3.2 | El caso $S_I \neq S_D$ | 77 |
| 6.4 | Árbol desordenado con acoplamiento intermedio | 80 |
| 7 | Conclusiones | 85 |
| A | Derivación de la Ec. (3.30) | 89 |
| B | Derivación de la Ec. (4.25) | 91 |
| C | Derivación de la Ec. (5.23) | 95 |
| D | Derivación de la Ec. (5.25) | 99 |
| E | Relación de recurrencia de matrices S para el árbol de Cayley doble | 101 |

| | | |
|----------|---|------------|
| F | El cristal del árbol de Cayley doble | 107 |
| F.1 | Estados ligados del árbol cristalino | 109 |
| F.1.1 | La primera generación | 110 |
| F.1.2 | Una generación menos obvia | 112 |
| F.1.3 | Conductancia en una generación arbitraria | 113 |
| F.2 | Las bandas de energía del cristal | 114 |

G Artículos publicados **119**

The invariant measure for scattering matrices with block symmetries

Victor A. Gopar, Moisés Martínez, Pier A. Mello y Harold U. Baranger

J. Phys A: Math. Gen. **29**, 881 (1996)

Electronic transport through ballistic chaotic cavities: Reflection symmetry, direct processes, and symmetry breaking

Moisés Martínez y Pier A. Mello

J. Phys. E **63**, 016205 (publicado el 18 de diciembre de 2000)

Capítulo 1

Introducción al transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos

La propagación de ondas en medios complejos ha atraído la atención de los físicos desde hace mucho tiempo. Esto se debe a la gran cantidad de fenómenos que se obtienen de la interferencia de las ondas.

El interés por los fenómenos ondulatorios resurgió debido a que en las últimas dos décadas se han encontrado resultados experimentales de origen cuántico muy interesantes. En el transporte electrónico en dispositivos muy pequeños ($\sim 1\mu m$) y a bajas temperaturas ($\sim 100mK$) se han encontrado resultados experimentales que sólo pueden explicarse cuánticamente. A estos dispositivos se les conoce como *sistemas mesoscópicos*. La pequeñez del tamaño y las bajas temperaturas hacen que la longitud de la muestra mesoscópica sea menor que el *camino libre medio inelástico* ℓ_ϕ , distancia en la cual la función de onda pierde memoria de la fase. En estas condiciones la función de onda del electrón mantiene la coherencia de fase mientras se propaga a través del sistema, dando lugar a fenómenos de *interferencia cuántica* que también se veían en el espacio libre. Un ejemplo es la manifestación del efecto Aharonov-Bohm en metales normales [1]. La Fig. 1.1 muestra las oscilaciones en la resistencia al variar el flujo magnético a través del área del anillo de oro. El período de las oscilaciones es h/e , el cuanto de flujo, y la amplitud de las oscilaciones, conocidas como *fluctuaciones universales de la conductancia*, es del orden de e^2/h [1].

Las fluctuaciones en la conductancia se deben al desorden presente en el

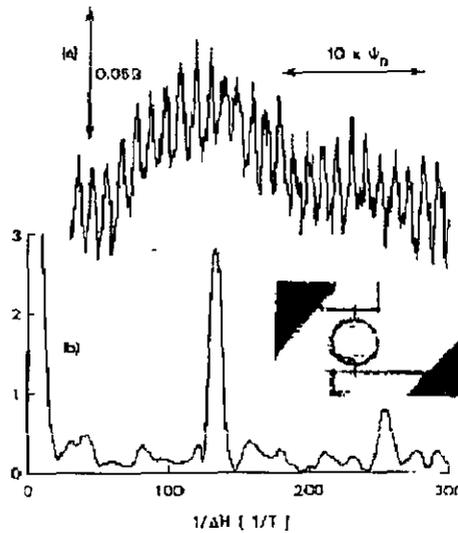


Figura 1.1: Oscilaciones en la resistencia de un anillo de oro, medida a una temperatura de 100 mK . El diámetro interior del anillo es 784 nm y el ancho de los alambres 41 nm . Figura tomada de la Ref. [1].

sistema. Diferentes muestras macroscópicamente iguales difieren en la configuración interna del desorden, de ahí el carácter estocástico de la conductancia y la necesidad de hacer un estudio estadístico mediante una colección de sistemas físicos, con propiedades macroscópicas idénticas pero con estructura interna diferente.

Desde el punto de vista teórico, una de las teorías que se han utilizado en el estudio de los sistemas desordenados es la *Teoría de Matrices Aleatorias* (*RMT, Random Matrix Theory*) [2]. Existen dos formalismos que han dado buenos resultados en el estudio del transporte electrónico (ver por ejemplo la Ref. [3]). En uno de ellos se hace un modelo estadístico a nivel del Hamiltoniano [4] para luego construir la *matriz de dispersión*, S , del sistema; en el otro las hipótesis se realizan directamente sobre la matriz S [5, 6]. Este último es el formalismo que vamos a utilizar a lo largo de la Tesis. De la matriz S se puede construir el coeficiente de transmisión que, por la fórmula de Landauer [7, 8] que relaciona el transporte electrónico con la dispersión en la muestra, es proporcional a la conductancia.

El estudio de los problemas de dispersión cuántica en sistemas cuya dinámica clásica es caótica se motivó por experimentos recientes sobre el

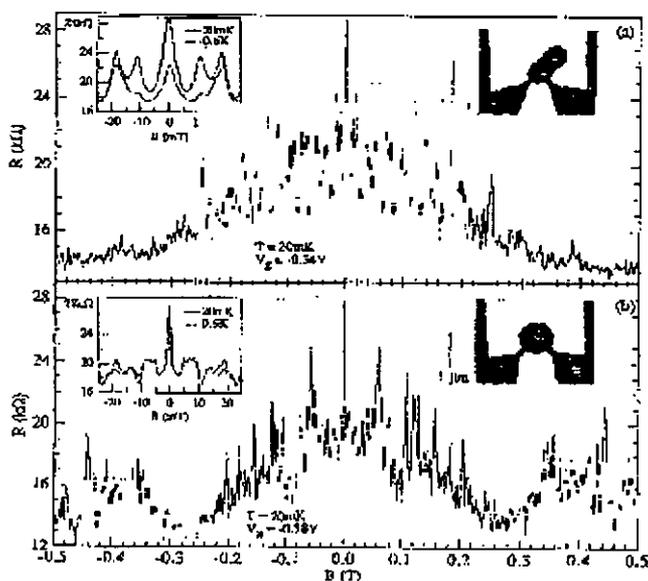


Figura 1.2: Oscilaciones en la resistencia para dos cavidades balísticas de geometría diferente, (a) un estadio y (b) un círculo, como función del campo magnético aplicado. Figura tomada de la Ref. [10].

transporte electrónico en microestructuras que consisten de una cavidad conectada a guías de onda [9]. La tecnología actual ha hecho posible la construcción de dispositivos electrónicos donde el tamaño del sistema sea no solamente menor que ℓ_ϕ , sino menor aún que el *camino libre medio elástico* ℓ . En estos sistemas llamados *balísticos* los electrones no se dispersan en el interior sino sólo en las paredes de confinamiento del sistema. Nuevamente, la función de onda del electrón mantiene la coherencia de fase mientras se dispersa elásticamente.

Similarmente a los sistemas desordenados, la interferencia cuántica en los sistemas balísticos da lugar a fluctuaciones en la conductancia bajo pequeñas perturbaciones en el campo magnético aplicado, o en la energía de los electrones incidentes [10, 11]. La Fig. 1.2, tomada de la Ref. [10], muestra las oscilaciones de la resistencia como función de un campo magnético aplicado, para dos cavidades balísticas mesoscópicas de geometría diferente. De la misma manera, un pequeño cambio en la forma de la cavidad da lugar, también, a fluctuaciones en la conductancia [12]. La Fig. 1.3 muestra los resultados experimentales obtenidos al construir una colección de sistemas

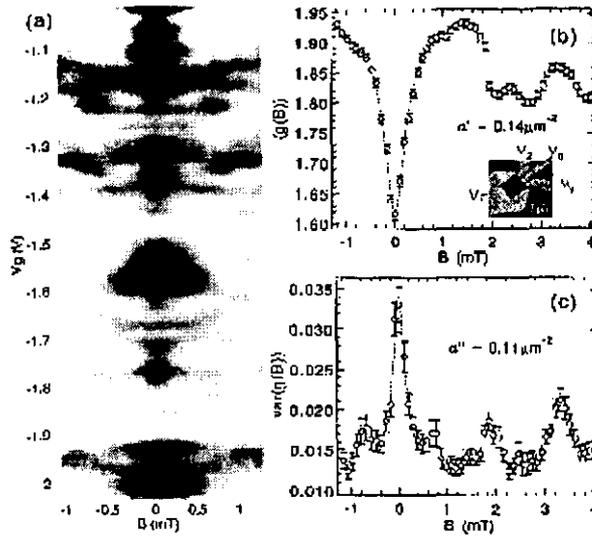


Figura 1.3: Comportamiento de la conductancia de una cavidad balística en el *ensemble*, (a) verticalmente, y como función del campo magnético aplicado, (a) horizontalmente. Se muestra también (b) el promedio y (c) la variancia de la conductancia con respecto al *ensemble*, como función del campo magnético. Figura tomada de la Ref. [12].

físicos (*ensemble*). En ella se observan las fluctuaciones de la conductancia en el *ensemble* y como función del campo magnético. También, en la misma figura se muestra el comportamiento del promedio y de la variancia de la conductancia como función del campo magnético. Nuevamente, es apropiado un estudio estadístico de las propiedades de transporte.

En los sistemas cerrados se ha encontrado que el comportamiento de los sistemas cuánticos depende de su dinámica clásica. Se ha visto que los sistemas caóticos se describen de acuerdo con *RMT* [13]. Aquí, por un sistema cuántico caótico vamos a entender un sistema cuántico cuya dinámica clásica es caótica.

Por otro lado, para los sistemas abiertos se ha visto que *RMT* no describe el comportamiento de las propiedades de transporte en los sistemas integrables. Por ejemplo, la Ref. [14] encuentra que los sistemas integrables muestran fluctuaciones en la conductancia que aumentan linealmente con el vector de onda de Fermi incidente. Además, la función de correlación de la conductancia muestra una singularidad en el origen, más pronunciada que en los sistemas caóticos.

Asimismo, se ha encontrado que, en forma similar a los sistemas cerrados, cuando la dinámica clásica del sistema abierto bajo estudio es caótica, las técnicas de *RMT* se aplican muy bien a la descripción del transporte electrónico [15]. De hecho en la Ref. [9] se construye un *ensemble* real de sistemas físicos y los resultados experimentales concuerdan muy bien con los obtenidos con *RMT*.

Es importante notar la importancia de las simetrías, pues sabemos que tienen efectos muy interesantes sobre las propiedades de la conductancia eléctrica en los sistemas mesoscópicos. Por ejemplo, en las Figs. 1.2 y 1.3, la conductancia muestra un comportamiento diferente cuando se tiene un campo magnético que cuando no lo hay. A campo magnético cero, es decir, cuando el sistema es invariante ante la inversión en el tiempo, la conductancia promedio muestra un mínimo, lo que significa un aumento en la dispersión hacia atrás, que en la literatura se conoce como *coherent backscattering enhancement*. A este fenómeno se le conoce como *localización débil* (*WL*, *Weak Localization*)[16, 3]. Han sido estudiadas en la literatura la *invariancia ante inversión en el tiempo* (*TRI*, *Time Reversal Invariance*) y la simetría de rotación en el espín [5, 6], así como también la simetría espacial de reflexión [17, 18]. Cada una de estas simetrías define una *clase de universalidad*.

El problema del transporte electrónico a través de cavidades caóticas se resume en detalle en la Ref. [19]. En esa referencia, la posibilidad de *procesos directos* debidos a la presencia de trayectorias cortas se tomó en cuenta al especificar la matriz S promedio, u *óptica*, $\langle S \rangle$, dentro del enfoque de la *Teoría de la Información*. La distribución estadística para la matriz S se conoce como *Kernel de Poisson*, en la cual $\langle S \rangle$ entra como un parámetro. Cuando $\langle S \rangle = 0$, es decir, en la ausencia de procesos directos, la distribución estadística se reduce a la medida invariante para la clase de universalidad apropiada.

Microestructuras clásicamente caóticas con simetría de reflexión se estudian en la Refs. [17] y [18]. El análisis se realizó en la ausencia de procesos directos, de manera que la distribución estadística de la matriz S es la medida invariante para la clase de universalidad en cuestión y la simetría espacial relevante: la última es una simetría del sistema completo en consideración, es decir, la cavidad más las dos guías que conectan la cavidad con el exterior.

El propósito central de esta Tesis es extender el estudio de las Refs. [17] y [18] para incluir la presencia de procesos directos. Vamos a considerar sistemas bidimensionales con partículas sin espín y nos vamos a concentrar en simetría espacial izquierda-derecha (*ID*) solamente, es decir, simetría bajo

reflexión a través de un eje perpendicular a la corriente. También, vamos a restringir el análisis a problemas con *TRI*. Una manera particular de inducir reflexiones directas es colocar barreras de potencial entre las *guías de onda colocadas simétricamente* y la cavidad. Si las dos barreras son iguales, el sistema es simétrico en su totalidad; si las barreras son diferentes, tenemos una cavidad con simetría *ID* acoplada *asimétricamente* al exterior: usando la nomenclatura de los físicos nucleares [20], nos vamos a referir a este tipo de ruptura de la simetría *ID* como *mezcla externa*, con un significado obvio. Una cuestión interesante, susceptible de observación experimental, es el efecto de la mezcla externa en la distribución estadística de la conductancia de tal estructura: ese es el segundo propósito de este trabajo.

Desde el punto de vista experimental, con la tecnología actual, es posible medir los efectos producidos por la mezcla externa en la distribución de la conductancia en los sistemas mesoscópicos. Sin embargo, existe una segunda posibilidad, que incluso es más económica, donde las condiciones del experimento son mucho más fáciles de controlar, a saber, los sistemas acústicos. Un ejemplo se muestra en la Ref. [21], donde se han estudiado las resonancias de una barra vibrante. Esta técnica puede utilizarse también para estudiar los efectos mencionados en las propiedades de transporte de las cavidades caóticas, como es el caso de la Ref. [22]. Por supuesto, las cavidades de microondas [23] pueden, también, representar buenos candidatos para estudiar estos efectos. La Ref. [24] muestra los resultados del experimento con microondas en una cavidad caótica con absorción.

El efecto de la mezcla externa también puede existir y tener efectos interesantes cuando $\langle S \rangle = 0$, como en el caso de una cavidad con simetría *ID* acoplada al exterior por dos guías de onda libres de barreras de potencial pero *colocadas asimétricamente*. Este problema puede enfocarse desde el punto de vista de la ruptura de la simetría descrito anteriormente en la siguiente forma. Se puede pensar en una cavidad con simetría *ID* acoplada al exterior por cuatro guías de onda, también colocadas simétricamente. Podemos romper la simetría colocando barreras no necesariamente idénticas a las dos guías que se encuentran de un sólo lado de la cavidad. El problema deseado se alcanza en el límite de barreras impenetrables.

Otro propósito de la Tesis es analizar la analogía del problema de las cavidades con simetría *ID* con un problema de dispersión en un sistema desordenado, a saber, un árbol de Cayley [25] (en realidad un sistema que consiste en la unión de dos árboles de Cayley). Aunque este sistema ya se ha estudiado en la Ref. [26] dentro del formalismo Hamiltoniano no se ha

realizado nada desde el punto de vista dispersivo. Veremos que puede hacerse un mapeo de este problema al de las cavidades con simetría espacial en un caso particular. Con esto queremos hacer notar la relevancia del problema de la dispersión en cavidades caóticas balísticas con simetría ID en la solución de este sistema desordenado.

La Tesis está organizada de la siguiente manera. En el siguiente capítulo vamos a dar una introducción al concepto de la matriz de dispersión y vamos a resumir la propiedades de ésta bajo algunas de las operaciones de simetría que usaremos a lo largo de la Tesis. Asimismo, veremos por qué la matriz S óptica, $\langle S \rangle$, representa la respuesta directa, un elemento de suma importancia en la parte principal de este trabajo. En la parte final del siguiente capítulo vamos a introducir la fórmula de Landauer, que nos da la conexión del problema del transporte electrónico con el de dispersión. Otros conceptos, de origen estadístico, a los que ya hemos hecho referencia antes, como la medida invariante y el kernel de Poisson, los resumiremos en el Capítulo 3. También, en ese capítulo aplicaremos los conceptos anteriores a la dispersión caótica en cavidades asimétricas (AS). La distribución de la conductancia se calcula para el caso particular de un modo de propagación (o un *canal abierto*) en cada guía y una matriz óptica dada (que implica procesos directos). El problema de dispersión en sistemas con simetría ID completa (cavidad más guías), tanto en ausencia como en presencia de procesos directos, que no rompen esa simetría, se tratará en el Capítulo 4. Nuevamente, se calcula la distribución de la conductancia para el caso de un canal abierto y se compara con el resultado obtenido para una cavidad caótica AS con la misma matriz óptica $\langle S \rangle$. El efecto de la ruptura de la simetría espacial ID se estudia en el Capítulo 5: se añaden barreras diferentes a las dos guías de onda del sistema con simetría ID completa sin procesos directos dando lugar a reflexiones directas y a la mezcla externa. Nuevamente, la distribución de la conductancia se calcula para el caso de un canal y se compara con la que se obtiene para una cavidad AS con la misma matriz S óptica. El problema de la mezcla externa en una cavidad con simetría ID con guías de onda colocadas asimétricamente y $\langle S \rangle = 0$ se estudia en ese mismo capítulo. Se calcula la distribución de la conductancia y se compara con la que surge de la medida invariante en el caso AS . En el último capítulo vemos la analogía con el problema del transporte electrónico en un sistema desordenado: un árbol de Cayley. Ahí hacemos notar la relevancia del problema de la dispersión en sistemas balísticos con simetría ID en la solución de otro tipo de problemas. De hecho, el estudio del árbol de Cayley en el formalismo de la

matriz de dispersión fué el que dió origen al estudio de las cavidades con simetría ID en presencia de procesos directos. Finalmente, para completar incluimos un cierto número de apéndices, donde se derivan algunos de los resultados mencionados en el texto. El Apéndice F lo dedicamos al estudio del caso cristalino del árbol de Cayley en todo su detalle, donde mostramos las bandas de energía de este sistema. Por último en el Apéndice G se adjuntan dos artículos publicados durante la realización de la Tesis. El segundo de ellos, aceptado en *Physical Review E*, extiende los resultados del primero, publicado en *Journal of Physics A*, obtenidos por nuestro grupo en el inicio de mi Tesis.

Capítulo 2

La matriz S y el transporte electrónico en cavidades balísticas mesoscópicas

En este capítulo damos una introducción al problema de dispersión de partícula individual por cavidades balísticas y al concepto de matriz de dispersión, elemento físicamente relevante en la descripción de estos fenómenos; hacemos un resumen de las propiedades generales de simetría de esta cantidad, que usaremos en los siguientes capítulos. También, introducimos el concepto de matriz S óptica, que representa los procesos directos en el sistema. Asimismo, dado que nos interesa estudiar las propiedades de transporte en sistemas balísticos, vemos la conexión del fenómeno de dispersión con el transporte electrónico.

2.1 La matriz de dispersión y sus propiedades de simetría

Consideremos un problema de dispersión independiente del tiempo: supongamos que tenemos una cavidad balística conectada a dos guías de onda, una a cada lado (ver Fig. 2.1); vamos a suponer también que el ancho de las guías es W y que por medio de ellas inciden partículas sin espín en la cavidad. Si despreciamos la interacción entre dichas partículas y la dispersión inelástica en las paredes de la cavidad el problema de dispersión se reduce al de una partícula en presencia de un potencial estático, que llamamos $V(x, y)$. La

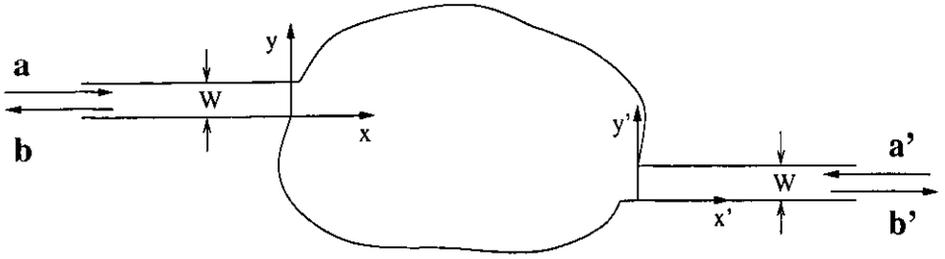


Figura 2.1: Una cavidad caótica conectada a dos guías de onda de ancho W . En la cavidad entran y salen ondas en los diferentes canales: las amplitudes de las ondas entrantes forman los vectores \mathbf{a} y \mathbf{a}' para cada lado de la cavidad, respectivamente, mientras las ondas salientes forman los vectores \mathbf{b} y \mathbf{b}' .

función de onda $\psi(x, y)$ de la partícula satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \right] \psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (2.1)$$

La solución a la ecuación anterior en las guías de onda, con la condición de que la función de onda se anule en las paredes, puede escribirse como

$$\psi_n(x, y) = \varphi_n(x) \chi_n(y), \quad (2.2)$$

donde $\varphi_n(x)$ y $\chi_n(y)$ tienen la forma

$$\varphi_n(x) = A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x} \quad (2.3)$$

$$\chi_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{W}y\right), \quad (2.4)$$

para $n = 1, \dots, N$, donde N es el número de modos de propagación, o *canales abiertos* como se les llama en física nuclear; para una energía dada E :

$$\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + k_n^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (2.5)$$

La solución general a la ecuación de Schrödinger en las guías consiste, pues, de ondas entrantes y salientes de la cavidad en los diferentes canales. Para

los lados izquierdo y derecho, respectivamente, podemos escribir la solución en cada modo de propagación como

$$\psi_n^I(x, y) = (a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}) \sin(K_n y) \quad (2.6)$$

$$\psi_n^D(x', y') = (b'_n e^{ik_n x'} + a'_n e^{-ik_n x'}) \sin(K_n y'), \quad (2.7)$$

donde k_n es el número de onda longitudinal y $K_n = n\pi/W$ el número de onda transversal.

El problema de dispersión de partícula individual por una cavidad puede describirse por la *matriz de dispersión* S , que en el caso estacionario relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes a la misma [27]. Es decir, si para la cavidad mostrada en la Fig. 2.1 construimos los vectores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^T$, $\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_N)^T$ con las amplitudes de las ondas entrantes en los diferentes canales en las guías izquierda y derecha, respectivamente, y los vectores $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$, $\mathbf{b}' = (b'_1, \dots, b'_N)^T$ con las correspondientes amplitudes de las ondas salientes, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

La matriz S es de dimensión $n = 2N$ y tiene la estructura

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde r, r' son las matrices de reflexión de $N \times N$ (para incidencia en cada guía) y t, t' las correspondientes matrices de transmisión.

2.1.1 Conservación de flujo

En ausencia de cualquier simetría la única restricción para la matriz S es que debe ser *unitaria*. Esta condición se obtiene de la conservación de la corriente de partículas en la dirección x , pues en y es cero. En dicha dirección la corriente $I(x)$ está dada por la integral de la densidad de corriente $J(x, y)$ sobre la sección transversal de las guías; es decir,

$$I(x) = \int_0^W J(x, y) dy, \quad (2.10)$$

donde

$$J(x, y) = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\psi^*(x, y) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) \right]. \quad (2.11)$$

Con

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^N \psi_n(x, y) \quad (2.12)$$

podemos escribir $J(x, y)$ como

$$J(x, y) = \sum_{n, n'=1}^N \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\psi_{n'}^*(x, y) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(x, y) \right]. \quad (2.13)$$

Utilizando la ecuación (2.2) el flujo total en las guías se escribe como

$$J(x, y) = \sum_{n, n'=1}^N \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\varphi_{n'}^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x) \right] \chi_{n'}(y) \chi_n(y), \quad (2.14)$$

de manera que la corriente queda como

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n, n'=1}^N \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\varphi_{n'}^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x) \right] \int_0^W \chi_{n'}(y) \chi_n(y) dy \\ &= C \sum_{n=1}^N \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[\varphi_n^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde hemos usado las relaciones de ortogonalidad de las funciones $\chi_n(y)$ y C es una constante de normalización.

Para los lados izquierdo y derecho de la cavidad tenemos, respectivamente, que

$$I_I(x) = C \frac{\hbar k}{m} \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 - |b_n|^2) \quad (2.16)$$

$$I_D(x) = C \frac{\hbar k}{m} \sum_{n=1}^N (|b'_n|^2 - |a'_n|^2). \quad (2.17)$$

Por conservación de la corriente $I_I(x)$ debe ser igual a $I_D(x)$, lo que nos conduce, después de arreglar los términos, a la siguiente relación entre las amplitudes:

$$\sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |a'_n|^2) = \sum_{n=1}^N (|b_n|^2 + |b'_n|^2), \quad (2.18)$$

que en forma matricial puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a}'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^\dagger & \mathbf{b}'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Usando la Ec. (2.8) podemos escribir la ecuación matricial anterior como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a}'^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a}'^\dagger \end{pmatrix} S^\dagger S \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

de la cual obtenemos

$$SS^\dagger = S^\dagger S = I_{2N}, \quad (2.21)$$

donde I_{2N} es la matriz unidad de $2N \times 2N$. Es decir, en ausencia de cualquier simetría la matriz S debe ser unitaria.

2.1.2 Invariancia ante inversión en el tiempo

En el caso de que exista *invariancia ante inversión en el tiempo (TRI)*, dado que $\psi(x, y)$ es solución a la ecuación de Schrödinger, $\psi^*(x, y)$ también lo es. Es decir, también tenemos como solución en cada lado

$$\psi_n^{I*}(x, y) = \left(b_n^* e^{ik_n x} + a_n^* e^{-ik_n x} \right) \sin(K_n y) \quad (2.22)$$

$$\psi_n^{D*}(x', y') = \left(a_n'^* e^{ik_n x'} + b_n'^* e^{-ik_n x'} \right) \sin(K_n y') \quad (2.23)$$

para cada canal. Esto nos conduce a la situación física que se muestra en la Fig. 2.2, donde ahora las amplitudes de las ondas entrantes forman los vectores \mathbf{b}^* , \mathbf{b}'^* , en cada lado; similarmente, las amplitudes de las ondas salientes forman los vectores \mathbf{a}^* , \mathbf{a}'^* .

Por definición la matriz S relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^* \\ \mathbf{a}'^* \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}'^* \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix} = S^* \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Luego, si usamos (2.8) en la ecuación anterior llegamos a que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix} = S^* S \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

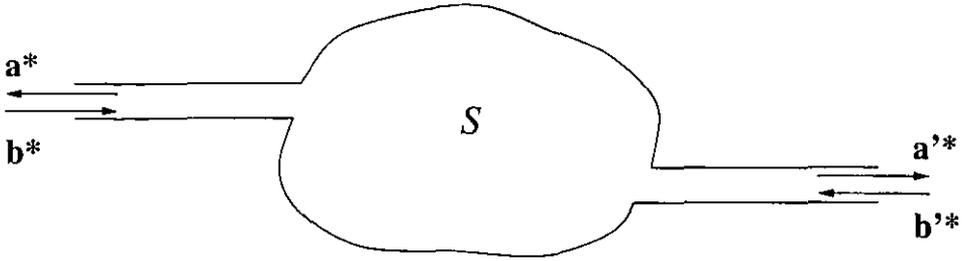


Figura 2.2: Una cavidad caótica conectada a dos guías de onda. En este caso las amplitudes de las ondas salientes forman los vectores \mathbf{a}^* y \mathbf{a}'^* para los lados izquierdo y derecho de la cavidad, respectivamente; las correspondientes amplitudes de las ondas salientes forman los vectores \mathbf{b}^* y \mathbf{b}'^* .

de donde $S^*S = I_{2N}$ o

$$S = (S^*)^{-1}. \quad (2.27)$$

Por ser S unitaria, $S^T = (S^*)^{-1}$ y entonces la ecuación anterior se escribe como

$$S = S^T, \quad (2.28)$$

lo cual nos dice que en presencia de TRI , la matriz S es *unitaria y simétrica*.

Finalmente, en este caso la matriz S tiene la estructura

$$S = \begin{pmatrix} r & t^T \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

con

$$r = r^T \quad (2.30)$$

$$r' = r'^T. \quad (2.31)$$

2.1.3 Simetría de reflexión

Vamos a suponer ahora que el sistema bajo estudio tiene simetría espacial: *simetría de reflexión*, y que no tenemos TRI en forma general. Esto quiere decir que los lados izquierdo y derecho de la cavidad son equivalentes, de manera que los podemos intercambiar (ver Fig. 2.3); al hacer esto podemos escribir la solución a la ecuación de Schrödinger de cada lado, para cada

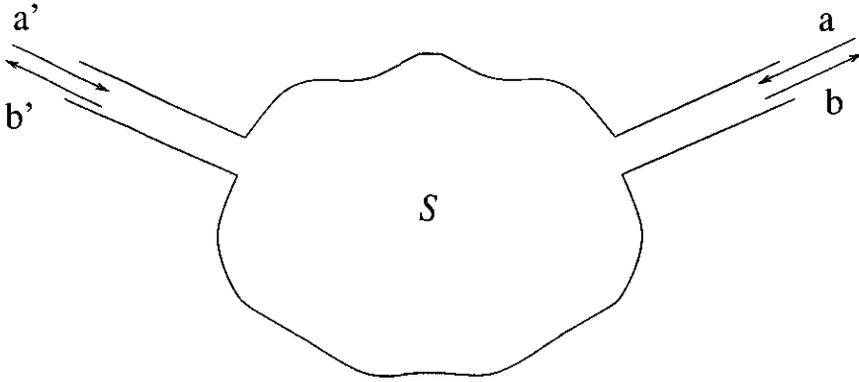


Figura 2.3: Una cavidad caótica con simetría de reflexión conectada a dos guías de onda. En este caso las amplitudes de las ondas entrantes de los lados izquierdo y derecho forman los vectores \mathbf{a}' y \mathbf{a} , respectivamente; las correspondientes amplitudes de las ondas salientes forman los vectores \mathbf{b}' y \mathbf{b} .

canal, como

$$\psi_n^I(x, y) = (a'_n e^{ik_n x} + b'_n e^{-ik_n x}) \sin(K_n y) \quad (2.32)$$

$$\psi_n^D(x', y') = (b_n e^{ik_n x'} + a_n e^{-ik_n x'}) \sin(K_n y'). \quad (2.33)$$

Nuevamente, por definición la matriz S relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes. En este caso tenemos que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

la cual podemos reescribir como

$$\Sigma_x \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = S \Sigma_x \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

donde

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ I_N & 0_N \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

y 0_N , I_N son las matrices cero y unidad de $N \times N$. En forma equivalente podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \Sigma_x S \Sigma_x \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

que con la ayuda de la ecuación (2.8) llegamos a que S debe satisfacer la condición

$$S = \Sigma_x S \Sigma_x \quad (2.38)$$

Explícitamente la condición anterior nos dice que

$$\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' & t \\ t' & r \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

y entonces la matriz S en presencia de simetría de reflexión tiene la estructura

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Si además le añadimos la invariancia ante inversión en el tiempo, la matriz S debe ser simétrica; es decir,

$$r = r^T \quad (2.41)$$

$$t = t^T. \quad (2.42)$$

Cuando la ruptura de TRI se debe a un campo magnético, la estructura de la matriz S está dada por [28]

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r^T \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

donde ahora

$$t = t^T \quad (2.44)$$

$$t' = t'^T. \quad (2.45)$$

2.2 El transporte electrónico visto como un problema de dispersión

2.2.1 La fórmula de Landauer

De la matriz S podemos construir el coeficiente de transmisión total, o la *conductancia adimensional para partículas sin espín*

$$T = \text{tr} \left(tt^\dagger \right), \quad (2.46)$$

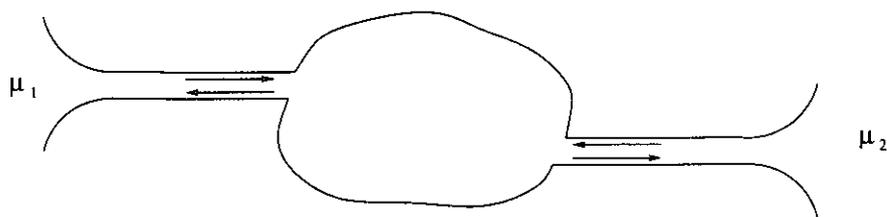


Figura 2.4: Una cavidad caótica conectada a dos *reservoirs*, a potenciales químicos μ_1 y μ_2 , por medio de dos guías de onda. La cavidad representa la región dispersiva en el modelo de Landauer.

que es proporcional a la conductancia de la cavidad [7, 8]

$$G = \frac{2e^2}{h} T, \quad (2.47)$$

donde el factor 2 se debe a las dos direcciones del espín. A la ecuación (2.47) se le conoce como la *fórmula de Landauer*.

Aunque la Ec. (2.47) no es la fórmula original de Landauer, fue él quien por primera vez propuso ver el transporte electrónico a través de una muestra, que inclusive podría ser desordenada, como un fenómeno de dispersión [29]. Su modelo consiste en conectar la muestra dispersiva (en este caso una cavidad caótica) a dos *reservoirs* a potenciales químicos μ_1 y μ_2 , de los cuales emanan electrones que inciden sobre la muestra, por medio de dos conductores perfectos (dos guías de onda en este caso) como se muestra en la Fig. 2.4. La conductancia se define como el cociente entre la corriente I y el voltaje $V = e(\mu_1 - \mu_2)$, dando como resultado la Ec. (2.47).

Por otro lado, hemos visto en el Capítulo 1 que la conductancia, o el coeficiente de transmisión, de una cavidad caótica balística depende de una manera muy complicada del campo magnético aplicado y por supuesto también de la energía de incidencia, así como también de la forma de la cavidad; por lo tanto, un estudio estadístico es apropiado si no nos interesan los detalles del problema.

De hecho se ha encontrado que las técnicas de la *teoría de matrices aleatorias (RMT)* describe muy bien el transporte electrónico en las cavidades balísticas caóticas, donde se ha encontrado que la distribución de la conductancia es *universal* y depende solamente de las propiedades de simetría presentes en el problema.

Lo anterior por supuesto no se aplica para sistemas integrables donde las fluctuaciones en la conductancia no son universales: la conductancia y sus fluctuaciones dependen de la energía [14].

Capítulo 3

La matriz S y su distribución estadística: el problema de dispersión en ausencia de simetría espacial

Dado que nos interesa estudiar las propiedades del transporte en cavidades caóticas balísticas mesoscópicas, en este capítulo hacemos un resumen de los conceptos y propiedades estadísticas relacionados con la matriz de dispersión en cavidades asimétricas.

Hemos visto en el capítulo anterior que el problema de dispersión de partícula individual por una cavidad puede describirse por la matriz de dispersión S , que en el caso estacionario relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes a la misma [27]. Vimos también que de la matriz S podemos construir el coeficiente de transmisión total, o la conductancia adimensional para partículas sin espín, que es proporcional a la conductancia.

En el esquema de Dyson [30] existen tres *clases de simetría* básicas. En la ausencia de cualquier simetría, vemos que la única restricción para la matriz S es que debe ser unitaria debido a la conservación de flujo. Este es el caso *unitario*, también designado como $\beta = 2$. Para simetría *ortogonal*, $\beta = 1$, S es simétrica por la invariancia ante inversión en el tiempo (*TRI*) y espín entero, o *TRI*, espín semientero y simetría rotacional. En el caso *simpléctico* $\beta = 4$, S es *self-dual* por *TRI* con espín semientero sin simetría de rotación. De aquí en adelante vamos a considerar el problema de dispersión de electrones sin espín, de manera que el caso $\beta = 4$ no se tratará.

Una parametrización conveniente de la matriz S es la *representación polar* [31, 32]

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde τ es la matriz diagonal, de dimensión N , de los *eigenvalores* τ_a ($a = 1, \dots, N$) de la matriz Hermiteana tt^\dagger ; v_i ($i = 1, \dots, 4$) son matrices unitarias arbitrarias de $N \times N$ para $\beta = 2$, con la restricción $v_3 = v_1^T$, $v_4 = v_2^T$ para $\beta = 1$.

3.1 La medida invariante

Cuando la dinámica clásica del sistema es caótica, es apropiado un análisis estadístico del problema cuántico. Dicho análisis se realiza en términos de un *ensemble* de sistemas físicos, descritos matemáticamente por un *ensemble* de matrices S , dotados con una medida de probabilidad. El punto de partida para tal análisis es el concepto de *medida invariante*, que es la formulación precisa de la noción intuitiva del concepto de *iguales probabilidades a priori* en el espacio de matrices de dispersión.

La medida invariante, que vamos a designar como $d\mu^{(\beta)}(S)$, es invariante bajo la operación de simetría que es relevante para la clase de universalidad en consideración [30, 33], es decir

$$d\mu^{(\beta)}(S) = d\mu^{(\beta)}(U_0 S V_0). \quad (3.2)$$

Aquí, U_0, V_0 son matrices arbitrarias pero fijas: unitarias en el caso unitario y con $V_0 = U_0^T$ en el caso ortogonal. La ecuación (3.2) define los *Ensembles Circulares Ortogonal (COE) y Unitario (CUE)*, para $\beta = 1, 2$, respectivamente.

En términos de la representación polar, la medida invariante se puede escribir como [15, 34]

$$d\mu^{(\beta)}(S) = p^{(\beta)}(\{\tau\}) \prod_a d\tau_a \prod_i d\mu(v_i). \quad (3.3)$$

Aquí, la densidad de probabilidad conjunta de $\{\tau\}$ es

$$p^{(\beta)}(\{\tau\}) = C_\beta \prod_{a < b} |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_c \tau_c^{(\beta-2)/2}, \quad (3.4)$$

C_β es una constante de normalización y $d\mu(v_i)$ denota la medida de Haar sobre el grupo unitario $U(N)$ para las matrices v_i .

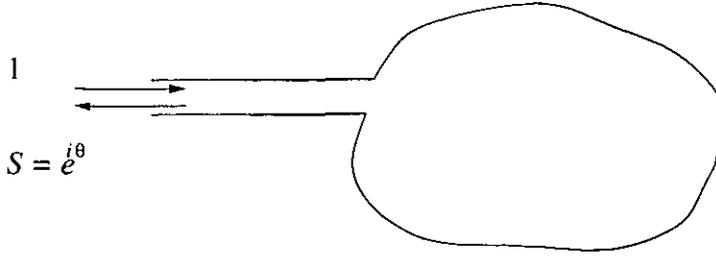


Figura 3.1: Una cavidad caótica conectada a una guía de onda con un canal abierto. La matriz S es un número complejo de módulo uno que se supone tiene promedio diferente de cero.

3.2 La respuesta rápida del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en un proceso de dispersión, imaginemos por un momento que hacemos incidir un paquete de ondas en el sistema que se muestra en la Fig. 3.1. Vamos a suponer, por simplicidad, que la guía de onda tiene un modo de propagación. Supongamos también que el promedio de la matriz S (en el *ensemble*) es diferente de cero. Dentro del *modelo óptico* [35] podemos escribir la matriz S como la suma de la matriz promedio $\langle S \rangle$, que no depende de la energía pues el sistema es ergódico, más otro término que describe la fluctuación y que varía mucho con la energía [35]:

$$S(E) = \langle S \rangle + S^{fl}(E). \quad (3.5)$$

La función de onda que describe el paquete de ondas está dada por

$$\psi(x) = \int A(E) e^{i(kx - Et/\hbar)} dE + \psi_d(x), \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_d(x) &= \int S(E) A(E) e^{i(-kx - Et/\hbar)} dE \\ &= \langle S \rangle \int A(E) e^{i(-kx - Et/\hbar)} dE + \int S^{fl}(E) A(E) e^{i(-kx - Et/\hbar)} dE \end{aligned} \quad (3.7)$$

representa la función de onda dispersada. Podemos ver que ésta consta de dos términos: uno que es equivalente al primero, el incidente, que aparece en

$\psi(x)$ [Ec. (3.6)] pero multiplicado por la cantidad $\langle S \rangle$ y dirigido en sentido opuesto, el cual nos da la parte de la función de onda dispersada en un tiempo corto [36]. El segundo término representa la parte dispersada de la función de onda que utiliza un tiempo mayor en el proceso [36].

Por lo anterior nos damos cuenta que, en general, $\langle S \rangle$, llamada S óptica en física nuclear, describe la primera respuesta del sistema que surge de los procesos directos.

3.3 Dispersión caótica por cavidades asimétricas en ausencia de procesos directos

Para matrices S , con la parametrización dada por la Ec. (3.1), distribuidas de acuerdo con la medida invariante $d\mu^{(\beta)}(S)$, dada por las Ecs. (3.3) y (3.4), es fácil ver que el promedio de S es cero. Es decir, en ausencia de procesos directos ($\langle S \rangle = 0$), la dispersión se describe por matrices S distribuidas con la medida invariante.

3.3.1 La distribución de T para el caso $N = 1$, $\beta = 1$

Ahora consideremos la distribución de la matriz S para el sistema mostrado en la Fig. 3.2 para el caso $N = 1$ y $\beta = 1$. La matriz S de la cavidad balística es de 2×2 y tiene la estructura (2.29). En la representación polar (3.1) tenemos tres parámetros independientes τ , ϕ , ψ , donde hemos escrito $v_1 = e^{i\phi}$, $v_2 = e^{i\psi}$. El intervalo de variación de esos parámetros es

$$\begin{aligned} \tau &\in [0, 1], \\ \phi, \psi &\in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En términos de ellos, S puede escribirse como

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\tau} e^{2i\phi} & \sqrt{\tau} e^{i(\phi+\psi)} \\ \sqrt{\tau} e^{i(\phi+\psi)} & \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y la medida invariante de las Ecs. (3.3) y (3.4) como

$$d\mu^{(1)}(S) = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (3.10)$$

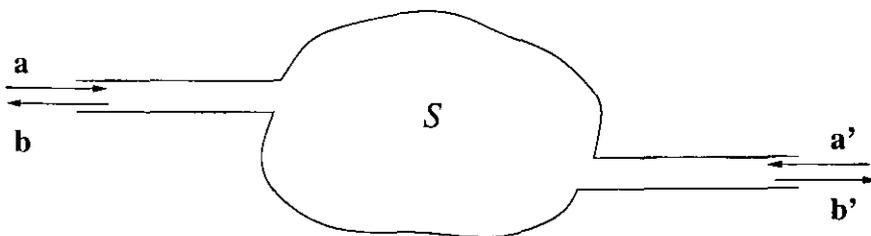


Figura 3.2: Una cavidad caótica conectada a dos guías de onda, cada una con un canal abierto. La matriz S es de dimensión dos. En ausencia de procesos directos, $\langle S \rangle = 0$.

Por definición, la distribución resultante del coeficiente de transmisión T puede expresarse como la integral

$$w(T) = \int \delta(T - \tau) dP(S). \quad (3.11)$$

En este caso $dP(S) = d\mu^{(1)}(S)$ y por lo tanto

$$w(T) = \int_0^1 \delta(T - \tau) \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}, \quad (3.12)$$

dando como resultado para la distribución del coeficiente de transmisión

$$w(T) = \frac{1}{2\sqrt{T}}. \quad (3.13)$$

La gráfica de esta distribución se muestra en la Fig. 3.4(a) que aparece más adelante. Podemos observar una tendencia del sistema a transmitir poco pues la distribución de T está más cargada hacia el cero. La razón física es que esto se debe a la interferencia constructiva de las trayectorias con sus inversas temporales, debido a la invariancia ante inversión en el tiempo. Es decir, tenemos un aumento en la dispersión hacia atrás (*coherent backscattering enhancement*). Es decir, se reproduce el fenómeno de localización débil (WL) que mencionamos en el Capítulo 1.

3.4 Dispersión caótica por cavidades asimétricas en presencia de procesos directos

En presencia de procesos directos, el formalismo de las referencias [37, 38] basado en la *Teoría de la Información* conduce a la distribución de probabi-

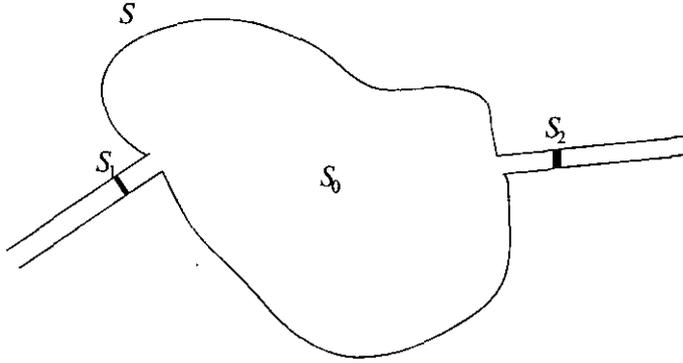


Figura 3.3: Una cavidad caótica balística con matriz de dispersión S_0 conectada a dos guías de onda por medio de dos barreras con matrices de dispersión S_1 y S_2 que representan los procesos directos. En ausencia de barreras suponemos ausencia de transmisión directa entre las guías.

lidad, para las matrices S , conocida como *Kernel de Poisson*

$$dP_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) = \frac{[\det(I_n - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger)]^{(\beta n + 2 - \beta)/2}}{|\det(I_n - S \langle S \rangle^\dagger)|^{\beta n + 2 - \beta}} d\mu^{(\beta)}(S), \quad (3.14)$$

donde la medida invariante se supone normalizada, es decir

$$\int d\mu^{(\beta)}(S) = 1. \quad (3.15)$$

Aquí, $n = 2N$ es la dimensionalidad de la matriz S y $\langle S \rangle$ es la matriz S promedio u *óptica*, que describe la respuesta rápida que surge de los *procesos directos*. En general $\langle S \rangle$ está dada por

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} \langle r \rangle & \langle t' \rangle \\ \langle t \rangle & \langle r' \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En la ausencia de procesos directos, $\langle S \rangle = 0$ y la medida de Poisson (3.14) se reduce a la medida invariante para la clase de universalidad en cuestión.

Para $\langle S \rangle \neq 0$, las referencias [39, 40] dan una construcción útil del *ensemble* de Poisson. Consideremos el sistema mostrado en la Fig. 3.3: ésta consiste de una cavidad descrita por la matriz de dispersión S_0 de dimensión n , conectada a dos guías por medio de las barreras descritas por las matrices de dispersión

de $n \times n$

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t'_1 \\ t_1 & r'_1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} r_2 & t'_2 \\ t_2 & r'_2 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

respectivamente. Juntemos las dos guías en una "superguía" y construyamos la matriz de dispersión S_b de $2n \times 2n$

$$S_b = \begin{pmatrix} r_b & t'_b \\ t_b & r'_b \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} r_1 & 0 & t'_1 & 0 \\ 0 & r'_2 & 0 & t_2 \\ \hline t_1 & 0 & r'_1 & 0 \\ 0 & t'_2 & 0 & r_2 \end{array} \right). \quad (3.19)$$

Aquí, los bloques (r_b , etc.) son de dimensión n . La matriz de dispersión S_0 para la cavidad se puede escribir en términos de la matriz S para el sistema completo {cavidad + barreras} como

$$S_0 = \frac{1}{t'_b} (S - r_b) \frac{1}{I - r'_b S} t_b^\dagger. \quad (3.20)$$

Se puede probar [33, 38, 39, 40] que entre las medidas invariantes para S_0 y para S tenemos el Jacobiano

$$d\mu^{(\beta)}(S_0) = \frac{[\det(I_n - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger)]^{(\beta n + 2 - \beta)/2}}{|\det(I_n - S \langle S \rangle^\dagger)|^{\beta n + 2 - \beta}} d\mu^{(\beta)}(S). \quad (3.21)$$

Ahora, si la matriz S_0 para la cavidad está distribuída de acuerdo con la medida invariante, es decir $d\mu^{(\beta)}(S_0)$, la distribución de la S transformada satisface

$$dP(S) = d\mu^{(\beta)}(S_0) \quad (3.22)$$

y obtenemos la Ec. (3.14), con la S óptica dada por la matriz de $n \times n$

$$\langle S \rangle = r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

donde vemos que

$$\langle t \rangle = \langle t' \rangle = 0; \quad (3.24)$$

es decir, no tenemos transmisión directa.

3.4.1 La distribución de T para el caso $N = 1$, $\beta = 1$

Ahora consideremos la distribución de la matriz S para el sistema mostrado en la Fig. 3.3 para el caso $N = 1$ y $\beta = 1$. Otra vez, las matrices S_0 de la cavidad balística, S_1 y S_2 de las dos barreras de tunelaje y S [relacionada a través de la Ec. (3.20)] son de 2×2 y tienen la estructura (2.29). Como en la Sección 3.3, en la representación polar S está dada por la Ec. (3.9) y la medida invariante por la Ec. (3.10).

La distribución de S está dada por el kernel de Poisson, con la matriz S óptica

$$\langle S \rangle = r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo $\langle S \rangle$ en la Ec. (3.14), la medida de Poisson puede escribirse como

$$dP_{r_1, r'_2}(S) = \frac{[(1 - |r_1|^2)(1 - |r'_2|^2)]^{3/2}}{|(1 - rr_1^*)(1 - r'r_2'^*) - t^2 r_1^* r_2'^*|^3} d\mu^{(1)}(S). \quad (3.26)$$

Utilizando la definición (3.11) la Ref. [19] da, para la distribución resultante del coeficiente de transmisión T , la expresión

$$w_{r_1, r'_2}(T) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \left[(1 - |r_1|^2) (1 - |r'_2|^2) \right]^{3/2} \times \left\langle \frac{1}{|(e^{-i\varphi} + |r_1|\sqrt{1-T})(e^{-i\vartheta} + |r'_2|\sqrt{1-T}) - |r_1||r'_2|T|^3} \right\rangle_{\varphi, \vartheta}, \quad (3.27)$$

donde $\langle \dots \rangle_{\varphi, \vartheta}$ denota un promedio sobre las variables φ y ϑ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Cuando $r_1 = r'_2 = 0$, la expresión anterior (3.27) se reduce a la Ec. (3.13) como debe ser. La Fig. 3.4 muestra la evolución de $w_{r_1, r'_2}(T)$ para $r_1 = r'_2 = \langle r \rangle$ con el parámetro $\langle r \rangle$ real, obtenido de la Ec. (3.27) por integración numérica. La figura 3.4(a) muestra la gráfica de la Ec. (3.13) que ya hemos comentado; observamos que T 's pequeñas son más probables debido a la invariancia ante inversión en el tiempo. Las demás gráficas muestran que la distribución de T tiende a $\delta(T)$ conforme $\langle r \rangle \rightarrow -1$.

Para ilustrar más la física resultante de la distribución de la matriz S (3.26) analizamos el caso especial $r_1 = 0$, tal que la barrera del lado derecho es la única presente (ver Fig. 3.5). Para este caso las Ecs. (3.26) y (3.10) dan, para la distribución de probabilidad conjunta de los parámetros τ , ϕ ,

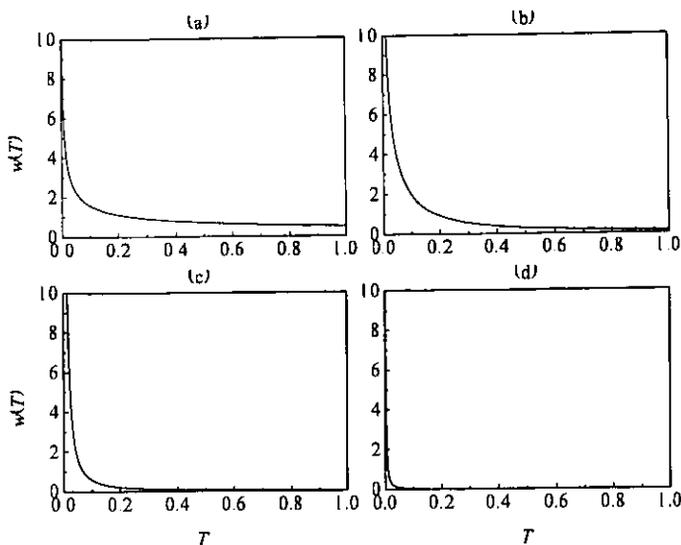


Figura 3.4: Evolución de la distribución $w(T)$ de la Ec. (3.27) con el parámetro $r_1 = r'_2 = \langle r \rangle = -\cos \epsilon$ para una cavidad asimétrica. Los casos $\epsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{32}$ se muestran en (a), (b), (c) y (d), respectivamente.

ψ , la expresión

$$dP_{0,r'_2}(\tau, \phi, \psi) = \frac{(1 - |r'_2|^2)^{3/2}}{|1 - \sqrt{1 - \tau} e^{2i\psi} r'_2|^3} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (3.28)$$

Primero notamos que la variable angular ϕ está *uniformemente distribuida* para toda r'_2 . En este caso particular la densidad de probabilidad de T de la Ec. (3.27) puede integrarse analíticamente para obtener [19]

$$w_{0,r'_2}(T) = \frac{(1 - |r'_2|^2)^{3/2}}{2\sqrt{T}} {}_2F_1\left(3/2; 3/2; 1; |r'_2|^2(1 - T)\right), \quad (3.29)$$

siendo ${}_2F_1$ una función hipergeométrica [41].

Como un chequeo, consideramos dos situaciones límite. Primeramente, para $r'_2 = 0$ tenemos una cavidad balística sin respuesta directa (ver la Fig. 3.2). La distribución de probabilidad para S , $dP_{0,0}(S)$ [ver Ec. (3.28)], vuelve a ser la medida invariante (3.10), como debe ser. Segundo, obstruimos la guía

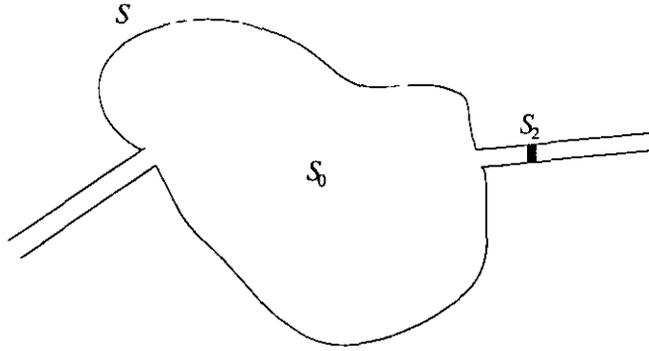


Figura 3.5: Una cavidad caótica conectada a dos guías de onda, una de las cuales (ia del lado derecho de la cavidad) tiene una barrera de tunelaje descrita por la matriz S_2 .

del lado derecho haciendo la barrera un reflector perfecto. Como resultado, $r'_2 = -1$ y puede mostrarse (ver Apéndice A) que $dP_{0,r'_2}(\tau, \phi, \psi)$ se reduce a

$$dP_{0,-1}(\tau, \phi, \psi) = \delta(\tau) d\tau \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi, \quad (3.30)$$

donde los ángulos en el argumento de la función delta están definidos módulo 2π . De la expresión anterior vemos que la distribución de τ es una función delta (de un solo lado) en cero, es decir

$$w(T) = \delta(T), \quad (3.31)$$

tal que la transmisión tiende a cero, como se esperaba. También, la distribución de ψ consiste de funciones delta centradas en $\pi/2$ y $3\pi/2$, para asegurar que la función de onda se anule en la barrera impenetrable. En contraste, como se hizo notar, la variable ϕ está uniformemente distribuida entre 0 y 2π . En este caso límite terminamos con una cavidad balística conectada a una sola guía (ver la Fig. 3.6): esto es, la matriz S de 1×1 resultante $r = -e^{2i\phi}$ está distribuida de acuerdo con la medida invariante.

Ahora regresemos al caso intermedio en el cual r'_2 en la Ec. (3.29) es real y $-1 < r'_2 < 0$. En la Fig. 3.7 mostramos la evolución de la distribución de T para varios valores de r'_2 , obtenidos del resultado analítico (3.29).

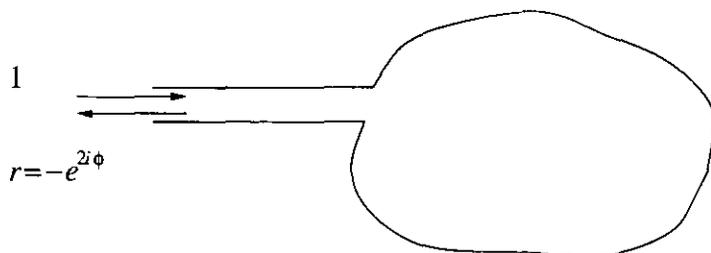


Figura 3.6: Una cavidad caótica conectada a una guía con un solo modo de propagación. La matriz de dispersión S es de 1×1 y está dada por $r = -e^{2i\phi}$. En la ausencia de procesos directos la matriz S está distribuída de acuerdo con la medida invariante.

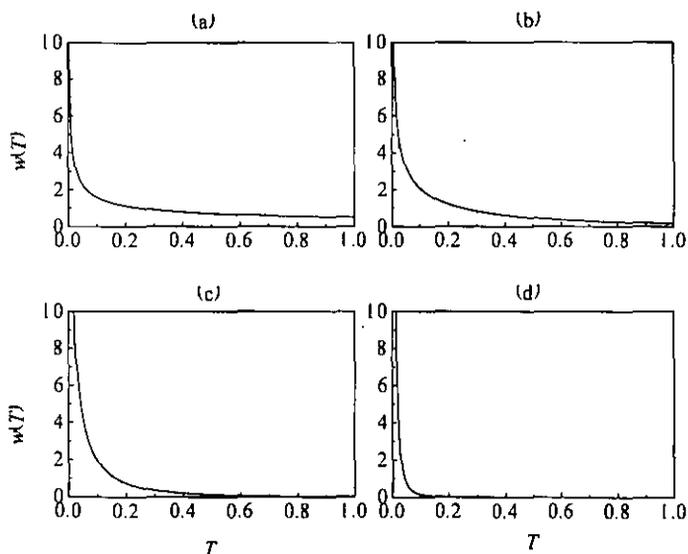


Figura 3.7: Evolución de la distribución $w(T)$ del resultado analítico (3.29) con el parámetro $r'_2 = -\cos \epsilon$ para una cavidad asimétrica. Los casos $\epsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{32}$ se muestran en (a), (b), (c) y (d), respectivamente.

Capítulo 4

El problema de dispersión para sistemas con simetría izquierda-derecha

En la presencia de simetrías adicionales, para valores fijos de los números cuánticos del grupo de simetría completa el *ensemble* invariante es uno de los tres *ensembles* circulares en el esquema de Dyson. Esto es, para sistemas con simetría de reflexión la matriz S es diagonal en bloques en una base de paridad definida con respecto a reflexiones, con un *ensemble* circular en cada bloque [17, 18].

Para un sistema con simetría izquierda-derecha (ID) la matriz S tiene la forma general [Ec. (2.40)]

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

para ($\beta = 2$), con las condiciones (2.41), (2.42) para $\beta = 1$.

Todas las matrices con la estructura (4.1) pueden llevarse simultáneamente a la forma diagonal en bloques usando la matriz de rotación

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -I_N & I_N \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde I_N es la matriz unidad de dimensión N . De hecho

$$S' = R_0 S R_0^T = \begin{bmatrix} s^{(+)} & 0 \\ 0 & s^{(-)} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

con

$$s^{(\pm)} = r \pm t. \quad (4.4)$$

Puesto que S es unitaria ($\beta = 2$) y simétrica ($\beta = 1$), S' y las dos matrices $s^{(\pm)}$ de $N \times N$ también son unitarias ($\beta = 2$) y simétricas ($\beta = 1$). Mientras S tiene la forma restringida (4.1), $s^{(\pm)}$ son las matrices *unitarias* ($\beta = 2$) y *simétricas* ($\beta = 1$) de $N \times N$ más generales.

En presencia de un campo magnético la matriz S tiene la estructura dada por las Ecs. (2.43), (2.44) y (2.45).

4.1 La medida invariante

La medida invariante para matrices S con la estructura (4.1) (con $\beta = 1$ o $\beta = 2$) se encontró en las Refs. [17, 18], basadas sobre la consideración de que dos matrices arbitrarias $s^{(\pm)}$ (para $\beta = 1$ o $\beta = 2$) pueden generar la matriz S más general con la estructura (4.1) (con $\beta = 1$ o $\beta = 2$). La medida invariante para matrices de la forma (4.1) puede escribirse como

$$d\hat{\mu}^{(\beta)}(S) = d\mu^{(\beta)}(s^{(+)})d\mu^{(\beta)}(s^{(-)}), \quad (4.5)$$

donde $d\mu^{(\beta)}(s^{(\pm)})$ es la medida invariante discutida anteriormente para matrices unitarias ($\beta = 2$) y simétricas ($\beta = 1$) en la ausencia de simetría espacial.

Nuevamente, en presencia de un campo magnético la medida invariante está dada por un *COE*, es decir por $d\mu^{(1)}(S)$, pero con los papeles de r y t intercambiados

4.2 Dispersión caótica por sistemas con simetría *ID* completa en ausencia de procesos directos

Se ha encontrado [18] que la medida invariante discutida en la Sección 4.1 describe bien la dispersión de electrones independientes por cavidades clásicamente caóticas con simetría *ID* y en ausencia de procesos directos.

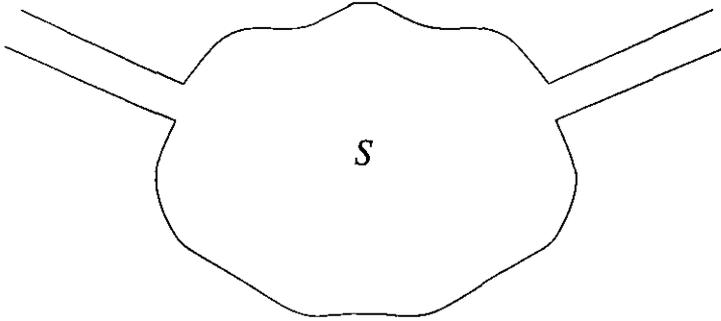


Figura 4.1: Una cavidad caótica con simetría izquierda-derecha en ausencia de procesos directos. La cavidad está conectada a dos guías de onda, cada una con un canal abierto. La matriz S es de 2×2 cuyo promedio es cero.

4.2.1 La distribución de T para el caso $N = 1$, $\beta = 1$

Consideremos el sistema mostrado en la Fig. 4.1 para el caso $N = 1$ con $\beta = 1$. En este caso la matriz S es de dimensión 2 y tiene la estructura (4.1), donde r y t son números complejos. Al aplicar la rotación de $\pi/4$ mencionada [Ec. (4.2)], podemos escribir la Ec. (4.3) como

$$S' = \begin{bmatrix} e^{i\theta^{(+)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta^{(-)}} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

con [Ec. (4.4)]

$$e^{i\theta^{(\pm)}} = r \pm t, \quad (4.7)$$

donde $\theta^{(+)}$ y $\theta^{(-)}$ están en el intervalo $[0, 2\pi]$. La medida invariante definida por la Ec. (4.5) puede escribirse como

$$d\hat{\mu}^{(1)}(S) = \frac{d\theta^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta^{(-)}}{2\pi}. \quad (4.8)$$

Aplicando la definición (3.11) para

$$T = |t|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)}) \right], \quad (4.9)$$

podemos encontrar la distribución $w(T)$ de T :

$$w(T) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta^{(+)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta^{(-)}}{2\pi} \delta\left(T - \frac{1}{2} \left[1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)}) \right]\right). \quad (4.10)$$

Cambiando a las variables $2\theta' = \theta^{(+)} - \theta^{(-)}$ y $2\theta = \theta^{(+)} + \theta^{(-)}$, con $\theta' \in [0, \pi]$ y $\theta \in [-\theta', \theta']$, $\theta' \in [\pi, 2\pi]$ y $\theta \in [-(2\pi - \theta'), (2\pi - \theta')]$, podemos escribir la expresión anterior, después de simplificar, como

$$w(T) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{T(1-T)}} \int_0^\pi d\theta' [\delta(\theta' - \theta'_1) + \delta(\theta' - \theta'_2)] \int_0^{\theta'} d\theta, \quad (4.11)$$

donde hemos usado el hecho de que

$$\begin{aligned} \delta\left(T - \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)})]\right) &= \delta(T - \sin^2 2\theta') \\ &= \frac{\delta(\theta' - \theta'_1) + \delta(\theta' - \theta'_2)}{2\sqrt{T(1-T)}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aquí, $\theta'_2 = \pi - \theta'_1$ y $\theta'_1 = \arcsin \sqrt{T}$. La integral es fácil de realizar dando como resultado [17]

$$w(T) = \frac{1}{\pi \sqrt{T(1-T)}}. \quad (4.13)$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 4.3(a), donde se compara con la de $w(T) = 1/(2\sqrt{T})$, correspondiente al caso asimétrico [Ec. (3.13)]. A diferencia de éste último podemos observar que además de un aumento en la dispersión hacia atrás, debido a la invariancia ante inversión en el tiempo, tenemos un aumento en la dispersión hacia adelante, *coherent forward scattering*, que se debe a la simetría izquierda-derecha del problema.

4.3 Sistemas con simetría *ID* completa en la presencia de procesos directos

En esta sección vamos a incluir la presencia de procesos directos en un sistema con simetría izquierda-derecha (*ID*) completa; es decir, ahora la matriz S promedio (u óptica) $\langle S \rangle$ es diferente de cero.

En lo que sigue vamos a ignorar la presencia de un campo magnético.

La matriz S tiene la estructura de la Ec. (4.1), y también $\langle S \rangle$, es decir

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} \langle r \rangle & \langle t \rangle \\ \langle t \rangle & \langle r \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

con

$$\langle r \rangle = \langle r \rangle^T \quad (4.15)$$

$$\langle t \rangle = \langle t \rangle^T \quad (4.16)$$

bloques de $N \times N$. Tanto S como $\langle S \rangle$ pueden llevarse a una forma diagonal en bloques por medio de la matriz de rotación (4.2): S pasa a ser S' de la Ec. (4.3) y $\langle S \rangle$ viene a ser

$$\langle S' \rangle = R_0 \langle S \rangle R_0^T = \begin{bmatrix} \langle s^{(+)} \rangle & 0 \\ 0 & \langle s^{(-)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Como hicimos notar después de la Ec. (4.4), $s^{(\pm)}$ son las matrices *unitarias* ($\beta = 2$) y *simétricas* ($\beta = 1$) de $N \times N$ más generales. Sus distribuciones están dadas por dos kernels de Poisson estadísticamente independientes de la forma (3.14), con $\langle s^{(\pm)} \rangle$ como sus matrices ópticas. Denotando por $d\hat{P}_{\langle S \rangle}(S)$ la distribución de S , tenemos

$$d\hat{P}_{\langle S \rangle}(S) = dP_{\langle s^{(+)} \rangle}(s^{(+)}) dP_{\langle s^{(-)} \rangle}(s^{(-)}), \quad (4.18)$$

donde

$$dP_{\langle s^{(\pm)} \rangle}(s^{(\pm)}) = \frac{\left[\det \left(I_N - \langle s^{(\pm)} \rangle \langle s^{(\pm)} \rangle^\dagger \right) \right]^{(\beta N + 2 - \beta)/2}}{\left| \det \left(I_N - s^{(\pm)} \langle s^{(\pm)} \rangle^\dagger \right) \right|^{\beta N + 2 - \beta}} d\mu^{(1)}(s^{(\pm)}). \quad (4.19)$$

Entonces podemos escribir $d\hat{P}_{\langle S \rangle}(S)$ como

$$\begin{aligned} d\hat{P}_{\langle S \rangle}(S) &= \frac{\left[\det \left(I_N - \langle s^{(+)} \rangle \langle s^{(+)} \rangle^\dagger \right) \right]^{(\beta N + 2 - \beta)/2}}{\left| \det \left(I_N - s^{(+)} \langle s^{(+)} \rangle^\dagger \right) \right|^{\beta N + 2 - \beta}} \\ &\times \frac{\left[\det \left(I_N - \langle s^{(-)} \rangle \langle s^{(-)} \rangle^\dagger \right) \right]^{(\beta N + 2 - \beta)/2}}{\left| \det \left(I_N - s^{(-)} \langle s^{(-)} \rangle^\dagger \right) \right|^{\beta N + 2 - \beta}} d\hat{\mu}^{(\beta)}(S) \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $d\hat{\mu}^{(\beta)}(S)$ está definida en la Ec. (4.5).

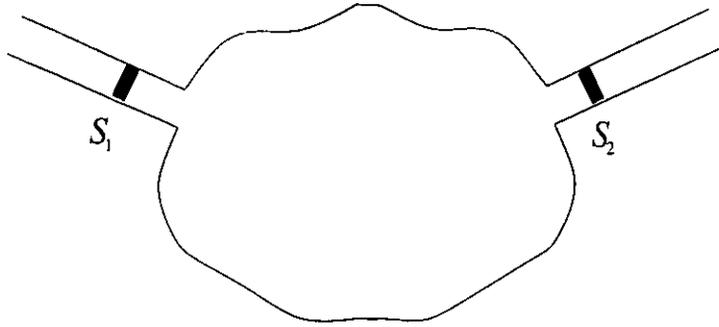


Figura 4.2: Una cavidad caótica con simetría izquierda-derecha en presencia de procesos directos representados por barreras en las guías de onda, las cuales están descritas por las matrices S_1, S_2 . La matriz S óptica es diferente de cero.

El caso especial de transmisión directa nula, $\langle t \rangle = 0$, es decir

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} \langle r \rangle & 0 \\ 0 & \langle r \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

puede escribirse como

$$d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S) = \frac{[\det(I_N - \langle r \rangle \langle r \rangle^\dagger)]^{\beta N + 2 - \beta}}{|\det(I_N - s^{(+)} \langle r \rangle^\dagger)|^{\beta N + 2 - \beta} |\det(I_N - s^{(-)} \langle r \rangle^\dagger)|^{\beta N + 2 - \beta}} d\hat{\mu}^{(\beta)}(S). \quad (4.22)$$

Físicamente, este caso puede realizarse por estructuras con simetría ID completa sin procesos directos, a las cuales se les añaden barreras idénticas (con la simetría $\beta = 1, 2$) a las dos guías, cada una con una matriz de reflexión [ver Ec. (3.23)]

$$r_1 = r_2 = \langle r \rangle. \quad (4.23)$$

La situación se ilustra en la Fig. 4.2.

4.3.1 La distribución de T para el caso $N = 1, \beta = 1$

En este caso, la Ec. (4.22) se reduce a

$$d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S) = \frac{[1 - \langle r \rangle \langle r \rangle^*]^2}{|1 - s^{(+)} \langle r \rangle^*|^2 |1 - s^{(-)} \langle r \rangle^*|^2} d\hat{\mu}^{(1)}(S), \quad (4.24)$$

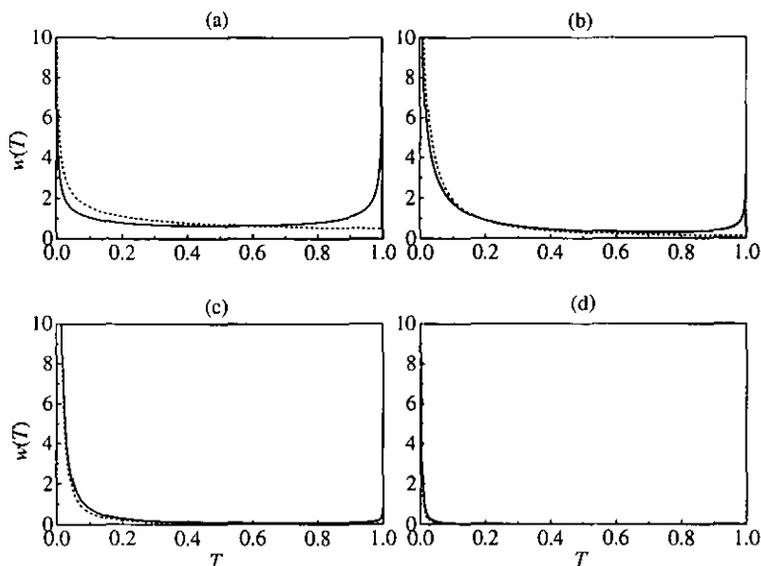


Figura 4.3: Las gráficas con líneas gruesas es la evolución de la distribución $w_{\langle r \rangle}(T)$ de la Ec. (4.25) con el parámetro $\langle r \rangle = -\cos \epsilon$ para una cavidad caótica con simetría ID completa. Los casos $\epsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{32}$ se muestran en (a), (b), (c), (d), respectivamente. Las líneas punteadas muestran por comparación la distribución de T correspondiente a una cavidad AS con dos barreras idénticas.

donde $\langle r \rangle$ y $s^{(\pm)}$ son ahora matrices de 1×1 , es decir son números complejos. La distribución de T puede obtenerse de la expresión general (3.11). Para $\langle r \rangle$ real, algunos de los pasos se encuentran en el Apéndice B, el resultado final es

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{1}{\pi \sqrt{T(1-T)}} \frac{(1 + \langle r \rangle^2)(1 - \langle r \rangle^2)}{(1 + \langle r \rangle^2)^2 - 4\langle r \rangle^2(1-T)}. \quad (4.25)$$

La distribución (4.25) se muestra en la Fig. 4.3 para varios valores de $\langle r \rangle$ y se comparan, en la misma figura, con la distribución correspondiente a una cavidad asimétrica con la misma $\langle S \rangle$, dada por la Ec. (3.27).

Para $\langle r \rangle = 0$, la distribución de la Ec. (4.25) se reduce a la de la Ec. (4.13), la cual es simétrica con respecto a $T = \frac{1}{2}$, tal que T y $R = 1 - T$ están idénticamente distribuidas; esta característica se pierde cuando $\langle r \rangle \neq 0$, donde T 's pequeñas son más probables. Conforme $\langle r \rangle \rightarrow -1$, ambas distribuciones (es decir, para sistemas con simetría ID y sin ella) mostradas en la figura tienden a $\delta(T)$.

Capítulo 5

Ruptura de la simetría espacial de reflexión de cavidades caóticas balísticas

En este capítulo estudiamos el efecto de la ruptura de la simetría de reflexión de dos formas, ambas en presencia de invariancia ante inversión en el tiempo. La primera que vamos a considerar es una configuración que consiste de una cavidad conectada a dos guías de onda colocadas simétricamente con barreras que en principio pueden ser diferentes. Una segunda configuración consiste de una cavidad conectada a cuatro guías colocadas simétricamente con una barrera en cada una de ellas. Tapando dos de las guías y abriendo completamente las otras dos podemos llegar a una configuración que consta de una cavidad conectada a dos guías pero colocadas asimétricamente, en ausencia de procesos directos.

5.1 Ruptura de la simetría de reflexión por procesos directos

En esta sección consideramos una configuración que consiste de una cavidad con simetría ID y matriz de dispersión S_0 , conectada a dos guías de onda colocadas simétricamente; las barreras en cada una de las guías, descritas por S_1 y S_2 pueden, en general, ser diferentes. Este arreglo introduce reflexiones directas y una *ruptura de la simetría de reflexión* (ver Fig. 5.1). Como un resultado, mientras la matriz de dispersión S_0 de la cavidad más

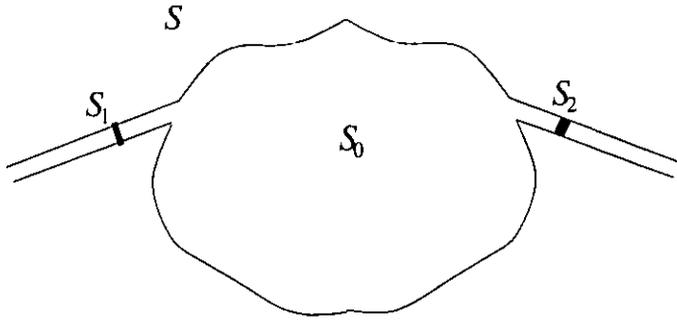


Figura 5.1: Una cavidad balística con simetría de reflexión descrita por la matriz S_0 , conectada a dos guías de onda con barreras descritas por S_1 , S_2 . Las barreras dan lugar a procesos directos y, si son diferentes, la simetría ID del sistema completo se rompe (mezcla externa).

las guías de onda colocadas simétricamente, pero sin incluir las barreras, tiene la estructura (2.40)-(2.42), la matriz de dispersión S del sistema total incluyendo las barreras tiene la forma más general (2.29)-(2.31). Ahora, S se genera de S_0 a través de la inversa de la relación (3.20); esto es, moviendo S_0 sobre su variedad de parámetros independientes, pero manteniendo las barreras fijas, se genera una matriz S que se mueve sobre una variedad con la misma dimensión. En lo que sigue nos restringiremos al caso de un canal ($N = 1$) en cada guía. Las matrices S_0 pueden expresarse en términos de *dos* parámetros continuos independientes (más un parámetro discreto σ), como en la Ec. (5.9) que aparece más abajo, mientras que S tiene la forma más general (3.9); esto es, debe existir una relación algebraica que conecta los tres parámetros continuos τ , ϕ , ψ que aparecen en la última ecuación.

Queremos que S_0 esté distribuida de acuerdo con la medida invariante $d\hat{\mu}(S_0)$. En principio, la transformación entre S_0 y S (para S_1 y S_2 fijas) define unívocamente la distribución estadística resultante de S , que llamaremos $d\hat{P}(S)$ [ver Ec. (5.21)]; para esos propósitos uno puede encontrar el Jacobiano de la transformación que relaciona S con S_0 , ambas matrices estando sujetas a las restricciones explicadas en el párrafo anterior. En lo que sigue, sin embargo, encontramos conveniente calcular $d\hat{P}(S)$ procediendo a lo largo de una ruta más simple, tomando ventaja del Jacobiano entre las matrices S *no restringidas* que ya conocemos de la Ec. (3.21). De hecho, la medida $d\hat{\mu}(S_0)$ puede expresarse primero como la medida $d\mu(S_0)$ de las matrices S_0 *irrestringidas* de la forma de la Ec. (5.5) que aparece después,

veces las funciones delta apropiadas que dan la restricción requerida entre los tres parámetros τ_0 , ϕ_0 , ψ_0 [ver Ec. (5.6)]. Después, la Ec. (3.21) expresa $d\mu(S_0)$ en términos de $d\mu(S)$, el factor en frente de $d\mu(S)$ en la Ec. (3.21) siendo el Jacobiano de la transformación de las matrices S_0 a S irrestrictas. Finalmente, la identidad (5.21) da la distribución requerida $d\hat{P}(S)$ para las matrices S . Procedemos a implementar este esquema en detalle.

La relación entre la matriz de dispersión S_0 para la cavidad y la matriz S para el sistema completo está dada por la Ec. (3.20)

$$S_0 = t_b^{-1} (S - r_b) \frac{1}{I_2 - r_b^\dagger S} t_b^\dagger, \quad (5.1)$$

con

$$t_b = t'_b = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}, \quad r'_b = \begin{pmatrix} r'_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Aquí, todas las matrices son de dimensión 2, tal que los elementos son números complejos. La matriz S tiene la estructura (3.9), mientras que S_0 tiene la estructura (4.1), es decir

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0 & r_0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Será útil escribir S_0 de la Ec. (5.4) en la representación polar (3.9) como

$$S_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\tau_0} e^{2i\phi_0} & \sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0+\psi_0)} \\ \sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0+\psi_0)} & \sqrt{1-\tau_0} e^{2i\psi_0} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Sin embargo, los tres parámetros τ_0 , ϕ_0 y ψ_0 no son independientes. De hecho, la estructura de S_0 dada en la Ec. (5.4) implica una relación entre los dos ángulos ϕ_0 y ψ_0 , i.e.

$$e^{2i\psi_0} = -e^{2i\phi_0}, \quad (5.6)$$

o, tomando la raíz cuadrada sobre ambos lados

$$e^{i\psi_0} = i\sigma e^{i\phi_0}, \quad (5.7)$$

donde $\sigma = \pm 1$. Equivalentemente

$$\psi_0 = \phi_0 + \sigma \frac{\pi}{2}, \quad \text{mod}(2\pi). \quad (5.8)$$

La forma más general de S_0 es entonces

$$S_0 = -e^{2i\phi_0} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\tau_0} & i\sigma\sqrt{\tau_0} \\ i\sigma\sqrt{\tau_0} & \sqrt{1-\tau_0} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

escrita en términos de los parámetros independientes τ_0 , ϕ_0 y la variable discreta σ , los cuales tienen el intervalo de variación

$$\begin{aligned} \tau_0 &\in [0, 1], \\ \phi_0 &\in [0, 2\pi], \\ \sigma &= \pm 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

De (4.2)-(4.4), la matriz S_0 puede diagonalizarse por una rotación de $\pi/4$ para dar

$$S'_0 = \begin{bmatrix} e^{i\theta_0^{(+)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_0^{(-)}} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

donde

$$e^{i\theta_0^{(\pm)}} = r_0 \pm l_0 = -e^{2i\phi_0 \pm i\sigma\beta_0} \quad (5.12)$$

y

$$\beta_0 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\tau_0}{1-\tau_0}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.13)$$

Con el rango de variación (5.10) para τ_0 , ϕ_0 y σ , $e^{i\theta_0^{(+)}}$ y $e^{i\theta_0^{(-)}}$ cubren *dos veces* el toro definido por los dos ángulos $\theta_0^{(+)}$, $\theta_0^{(-)}$.

La Ec. (5.12) es una transformación de los parámetros τ_0 , ϕ_0 y σ a los parámetros $\theta_0^{(+)}$, $\theta_0^{(-)}$, cuyo Jacobiano puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta_0^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta_0^{(-)}}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \frac{d\phi_0}{2\pi}. \quad (5.14)$$

Ambos lados de esta última ecuación se integran a 1 si el lado izquierdo se integra en la región $\theta_0^{(+)}$, $\theta_0^{(-)} \in [0, 2\pi]$ y se multiplica por 2 para tomar en cuenta el hecho que la región se visita dos veces, y el lado derecho se integra en la región especificada por (5.10).

De acuerdo con la Ec. (4.5), el lado izquierdo de la Ec. (5.14) representa la medida invariante para las matrices S_0 con simetría *ID*. Una función $f(\tau_0, \phi_0, \sigma)$ puede transformarse en una función $\tilde{f}(\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)})$ usando la

transformación (5.12); su promedio sobre la medida invariante de S_0 puede escribirse entonces como

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0^{(+)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0^{(-)}}{2\pi} \tilde{f}(\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)}) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} f(\tau_0, \phi_0, \sigma). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aquí, sobre el lado izquierdo integramos sobre el toro $\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)}$ solamente una vez. Supongamos ahora que se nos da una función $F(\tau_0, \phi_0, \psi_0) = F'(\tau_0, \phi_0, e^{i\psi_0})$ de los tres parámetros que aparecen en la Ec. (5.5) y queremos calcular su promedio sobre la medida anterior. Primero, hacemos uso de la Ec. (5.7) para eliminar ψ_0 y escribir

$$\begin{aligned} F(\tau_0, \phi_0, \psi_0) &= \dot{F}'(\tau_0, \phi_0, e^{i\psi_0}) = F'(\tau_0, \phi_0, i\sigma e^{i\phi_0}) \\ &= f(\tau_0, \phi_0, \sigma) = \tilde{f}(\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)}), \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $f(\tau_0, \phi_0, \sigma)$ y $\tilde{f}(\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)})$, tienen el mismo significado como en (5.15). El promedio de esta función puede escribirse como en (5.15) y subsecuentemente como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} F'(\tau_0, \phi_0, i\sigma e^{i\phi_0}) \\ = & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_0 \\ & \times \left[\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] F(\tau_0, \phi_0, \psi_0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde hemos usado la Ec. (5.8). Comparando el lado izquierdo de (5.15) con el lado derecho de (5.17) podemos escribir

$$\frac{d\theta_0^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta_0^{(-)}}{2\pi} \sim \frac{2 \left[\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right) \right]}{\sqrt{1-\tau_0}} \frac{d\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \frac{d\phi_0}{2\pi} \frac{d\psi_0}{2\pi}, \quad (5.18)$$

donde el símbolo \sim indica que las dos medidas son equivalentes cuando los lados izquierdo y derecho se usan para integrar las funciones $\tilde{f}(\theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)})$ y

$F(\tau_0, \phi_0, \psi_0)$, respectivamente, definidas antes. Obviamente, los ángulos en el argumento de las funciones delta anteriores se definen módulo 2π . Como hemos hecho notar, el lado izquierdo de la Ec. (5.18) es la medida invariante $d\hat{\mu}(S_0)$ para matrices de dispersión S_0 de la forma (5.11), es decir para una cavidad con simetría ID . Por otro lado, la Ec. (3.10) muestra que los últimos tres términos multiplicativos de la Ec. (5.18) es la medida invariante $d\mu(S_0)$ para matrices de dispersión S_0 de la forma más general (5.5). La relación entre las dos medidas es entonces

$$d\hat{\mu}(S_0) \sim \frac{2 \left[\delta \left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2} \right) \right]}{\sqrt{1 - \tau_0}} d\mu(S_0). \quad (5.19)$$

Aquí, las funciones delta restringen el espacio de matrices unitarias y simétricas al subespacio de matrices de la forma (5.9).

Como se explicó al comienzo de esta sección, ahora expresamos $d\mu(S_0)$ en términos de $d\mu(S)$ usando la Ec. (3.21). Esa ecuación se lee, para el caso presente,

$$d\mu(S_0) = \frac{[\det(I_2 - r_b r_b^\dagger)]^{3/2}}{|\det(I_2 - S r_b^\dagger)|^3} d\mu(S). \quad (5.20)$$

Sustituimos esta ecuación en la Ec. (5.19) y usamos la Ec. (3.10) para expresar $d\mu(S)$ en la representación polar. También notamos que la medida $d\hat{\mu}(S_0)$ que aparece en el lado izquierdo de la Ec. (5.19), es decir la probabilidad diferencial asociada con las matrices S_0 [que tienen la forma (5.4)] para la cavidad con simetría ID , debe coincidir con la probabilidad diferencial $d\hat{P}_{r_b}(S)$ que estamos buscando, asociada con las matrices transformadas S [que tienen la forma (3.9), pero con las restricciones apropiadas], es decir

$$d\hat{P}_{r_b}(S) = d\hat{\mu}(S_0). \quad (5.21)$$

Entonces tenemos

$$d\hat{P}_{r_b}(S) \sim 2 \frac{\delta \left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2} \right) + \delta \left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{1 - \tau_0}} \times \frac{[\det(I_2 - r_b r_b^\dagger)]^{3/2}}{|\det(I_2 - S r_b^\dagger)|^3} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (5.22)$$

Resta por expresar las variables ψ_0, ϕ_0, τ_0 que aparecen en los argumentos de las funciones delta en términos de ψ, ϕ, τ . Esto se hace en el Apéndice C

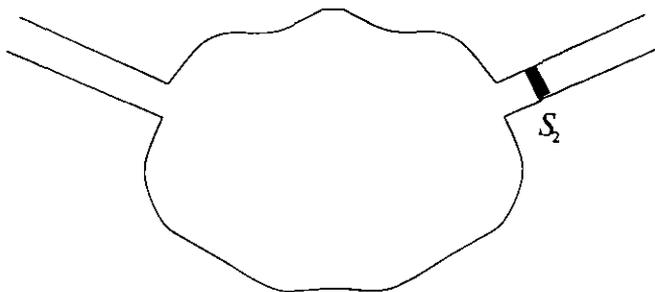


Figura 5.2: Una cavidad caótica balística con simetría de reflexión conectada a dos guías de un canal. La guía del lado izquierdo se abre completamente, mientras la del lado derecho tiene una barrera representada por la matriz S_2 .

para el caso particular en el cual la barrera del lado izquierdo es transparente, tal que su matriz de dispersión S_1 de la Ec. (3.17) es la matriz de Pauli σ_x , y la barrera del lado derecho se describe por la Ec. (3.18) con elementos matriciales *reales* (ver Fig. 5.2). El resultado es

$$\begin{aligned}
 d\widehat{P}_{0,r'_2}(S) &\sim \frac{(1 - r'^2_2)^{3/2} |\sqrt{1 - \tau} - r'_2 e^{2i\phi}|}{(2\pi)^2 \sqrt{\tau} |\sqrt{1 - \tau} (1 - r'^2_2) - r'_2 \tau e^{2i\phi}|^2} \\
 &\times \left[\delta\left(\psi - \phi - \alpha(\phi) - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \phi - \alpha(\phi) - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &\times d\tau d\phi d\psi,
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$\alpha(\phi)$ siendo dada por la Ec. (C.9). Recordemos que los ángulos en los argumentos de las funciones delta están definidos módulo 2π .

Como un primer chequeo pongamos $r'_2 = 0$, correspondiente al caso sin barreras. Obtenemos lo siguiente

$$d\widehat{P}_{0,0}(S) \sim \frac{d\tau}{\pi\sqrt{\tau}(1-\tau)} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \phi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \phi - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi. \tag{5.24}$$

Gracias a las funciones delta recobramos la situación de simetría *ID*. Como se esperaba, el lado derecho de la Ec. (5.24) es la medida invariante definida para esa simetría, la Ec. (5.18). Como un segundo chequeo, analicemos el caso $r'_2 \rightarrow -1$, que corresponde a obstruir la guía de onda del lado derecho.

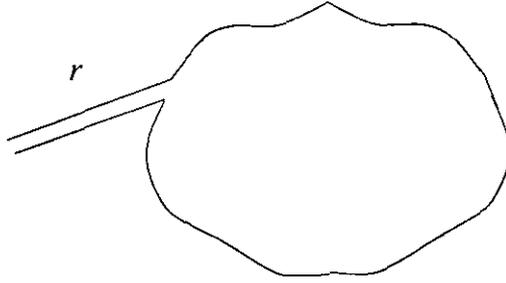


Figura 5.3: Una cavidad caótica balística con simetría de reflexión conectada a una sola guía, con un canal abierto, en la ausencia de procesos directos. La matriz S unidimensional $r = -e^{2i\psi}$ está distribuida de acuerdo con la medida invariante.

Mostramos en el Apéndice D que (5.23) da en este caso

$$d\widehat{P}_{0,-1}(S) \sim \delta(\tau) d\tau \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi. \quad (5.25)$$

La distribución de la conductancia se reduce a una función delta (definida de un solo lado) en cero, como debe ser. Nótese que la variable ϕ está uniformemente distribuida en los casos extremos $r'_2 = 0$ y $r'_2 = -1$; esto no es así para un valor arbitrario de r'_2 . En el caso límite $r'_2 = -1$ terminamos con una cavidad con simetría ID conectada a una sola guía (ver Fig. 5.3): la matriz S de 1×1 resultante, es decir $r = -e^{2i\phi}$, está distribuida de acuerdo con la *medida invariante*: esto es, *no existe memoria de la simetría ID de la cavidad*. De hecho, el lado derecho de la Ec. (5.25) es idéntico al de la Ec. (3.30) de la Sección 3.4, para una cavidad AS con la guía del lado derecho obstruida. Como veremos más tarde, en la Sección 5.2, ésta es una peculiaridad del caso de un canal.

Para obtener la distribución conjunta de τ y ϕ para r'_2 arbitraria integramos (5.23) sobre ψ . Encontramos lo siguiente

$$q_{r'_2}(\tau, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{(1 - r'^2_2)^{3/2}}{\sqrt{\tau}} \frac{|\sqrt{1 - \tau} - r'_2 e^{2i\phi}|}{|\sqrt{1 - \tau} (1 - r'^2_2) - r'_2 \tau e^{2i\phi}|^2}. \quad (5.26)$$

La distribución $w(T)$ de $T = \tau$ se obtiene integrando $q_{r'_2}(\tau, \phi)$ sobre ϕ . La Fig. 5.4 muestra (línea continua) la evolución de $w(T)$ con el parámetro r'_2 . En la misma figura comparamos la secuencia de distribuciones con las

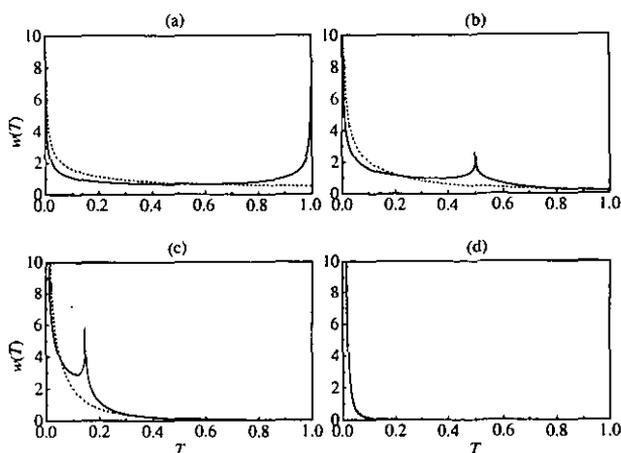


Figura 5.4: La línea continua muestra la evolución de la distribución de T obtenida por integración numérica sobre ϕ de la Ec. (5.26) para una cavidad con simetría ID y una barrera representada por $r'_2 = -\cos \epsilon$, como una función del parámetro ϵ . Las figuras (a), (b), (c), (d) muestran los casos $\epsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{32}$, respectivamente. La línea punteada muestra, por comparación, las distribuciones que corresponden a una cavidad AS y la misma barrera como para las correspondientes líneas continuas.

correspondientes a una cavidad AS (línea punteada) con la misma r'_2 . En el primer caso el sistema “recuerda” que, aunque la configuración resultante es asimétrica, la cavidad tiene simetría ID .

5.2 Ruptura de la simetría por medio de guías de onda colocadas asimétricamente

En la sección presente estudiamos el efecto de la mezcla externa de la simetría ID en la ausencia de procesos directos, es decir para $\langle S \rangle = 0$: el problema será el de una cavidad con simetría ID conectada a dos guías de onda colocadas asimétricamente en la ausencia de barreras. Procedemos como sigue. Vamos a considerar primero la cavidad con simetría ID conectada a cuatro guías colocadas simétricamente (cada una con un canal abierto), cada una de las cuales tiene una barrera, en general diferente, como se muestra en la Fig. 5.5. Posteriormente, se quitan las dos barreras del lado izquierdo, mientras las del lado derecho se hacen reflectores perfectos.

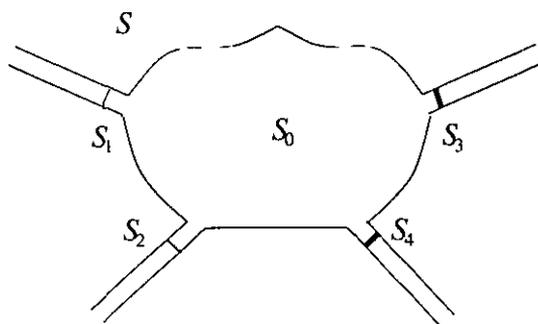


Figura 5.5: Una cavidad balística conectada a cuatro guías de onda colocadas simétricamente, con barreras que en principio son diferentes.

Llamemos S_0 a la matriz asociada a la cavidad con la simetría espacial conectada a las cuatro guías colocadas simétricamente en la *ausencia* de barreras. La matriz S en la presencia de las cuatro barreras está dada por la Ec. (3.20), es decir

$$S = r_b + t'_b \frac{1}{I_4 - S_0 r'_b} S_0 t_b, \quad (5.27)$$

donde

$$t_b = t'_b = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'_4 \end{pmatrix}, \quad r'_b = \begin{pmatrix} r'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Como se explicó anteriormente, abrimos ahora las guías de onda del lado izquierdo y bloqueamos las del lado derecho por medio de reflectores perfectos, tal que

$$t_b = t'_b = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad r_b = r'_b = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

donde I_2 y 0_2 denotan las matrices unidad y cero de dos dimensiones, respectivamente.

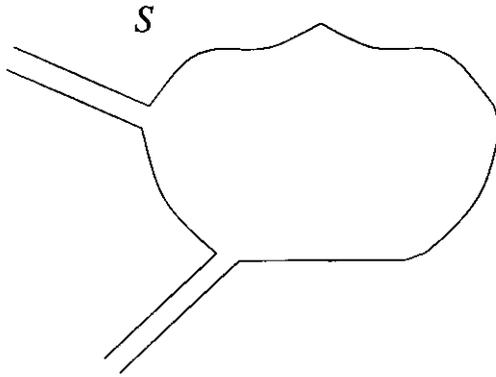


Figura 5.6: Una cavidad caótica balística conectada a dos guías de onda colocadas asimétricamente sin procesos directos. La distribución de la matriz S está muy cerca de la medida invariante.

La matriz S_0 de 4×4 tiene la estructura (4.1), es decir

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

donde r_0 y t_0 son matrices de dimensión 2. La matriz S de la Ec. (5.27) se lee entonces como

$$S = \begin{pmatrix} r_0 - t_0 \frac{1}{I_2 + r_0} t_0 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

El bloque 1-1 de las expresiones anteriores es la matriz de dispersión de 2×2 del sistema final que consiste de una cavidad balística con simetría ID conectada a dos guías de onda del lado izquierdo (ver Fig. 5.6), es decir

$$s = r_0 - t_0 \frac{1}{I_2 + r_0} t_0. \quad (5.33)$$

Usando el resultado (4.4) podemos expresar r_0 y t_0 como

$$r_0 = \frac{1}{2} [s^{(+)} + s^{(-)}], \quad (5.34)$$

$$t_0 = \frac{1}{2} [s^{(+)} - s^{(-)}], \quad (5.35)$$

donde $s^{(\pm)}$ son matrices unitarias y simétricas de 2×2 más generales posible.

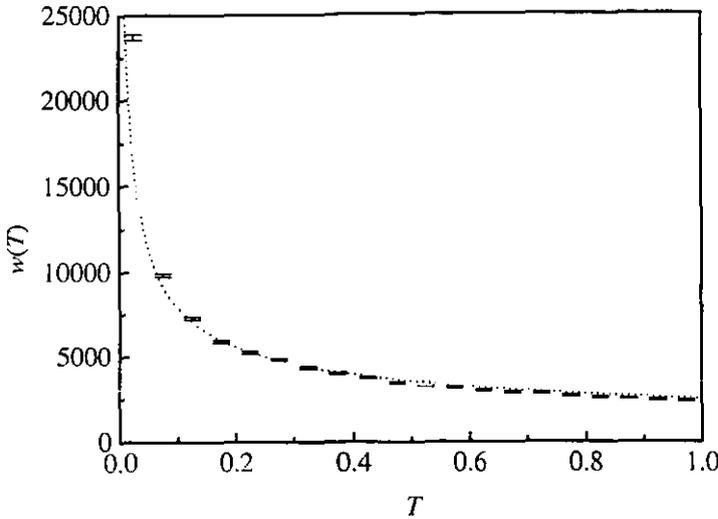


Figura 5.7: La distribución de T para una cavidad con simetría ID conectada a dos guías de onda colocadas asimétricamente. La línea punteada corresponde a una cavidad AS conectada a dos guías.

Se realizó un cálculo numérico, en el cual se generaron matrices S_0 de dimensión 4 con una distribución correspondiente a su medida invariante: esto se hizo construyendo un *ensemble* de matrices $s^{(\pm)}$, Ecs. (5.34), (5.35), distribuidas como dos *COE's* independientes. La matriz S resultante se evaluó de la Ec. (5.33).

La distribución del coeficiente de transmisión resultante T se muestra en la Fig. 5.7. Por comparación, se muestra con línea punteada la distribución $1/(2\sqrt{T})$ correspondiente a una cavidad AS conectada a dos guías de un canal y con $\langle S \rangle = 0$. Aunque la cavidad con ruptura de la simetría externa tiene una distribución de T muy cercana a $1/(2\sqrt{T})$, existe una desviación estadísticamente significativa que indica que el sistema resultante tiene una memoria de la simetría puntual de la cavidad (la diferencia entre las dos distribuciones se hace más notable en el gráfico logarítmico de la Fig. 5.8). De hecho el coeficiente de transmisión promedio más su fluctuación es

$$\langle T \rangle \pm \delta(T) = 0.3201 \pm 0.0009, \quad (5.36)$$

que difiere de $\langle T \rangle = 0.3333$, obtenido de la medida invariante. Esto contrasta

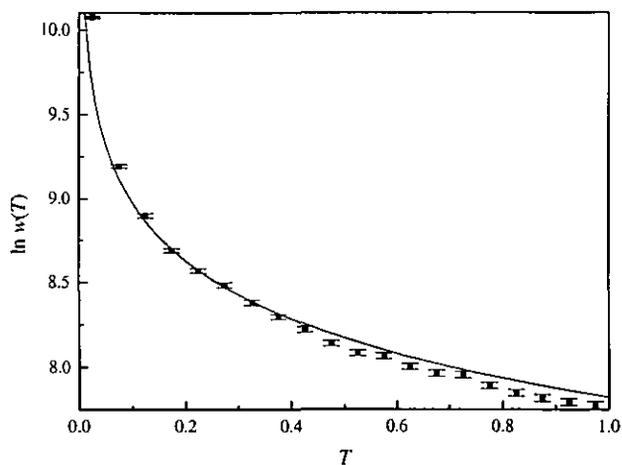


Figura 5.8: Gráfica logarítmica de la distribución de T para una cavidad con simetría ID conectada a dos guías de onda colocadas asimétricamente. La línea continua corresponde a una cavidad AS conectada a dos guías.

con el resultado mencionado justo antes de la Ec. (5.26) para la cavidad con una guía de un canal que se muestra en la Fig. 5.3.

Capítulo 6

Analogía con un sistema desordenado: el árbol de Cayley doble

En este capítulo vamos a ver la relación del problema de transporte electrónico en una cavidad caótica balística con otro de naturaleza muy diferente, a saber, un sistema desordenado. Para éste vamos a considerar una red construida por la unión de dos árboles de Cayley [25] de manera que uno sea la imagen especular del otro. Cada sitio de la red lo vamos a suponer desordenado de tal forma que al final tenemos un sistema que consta de una región compleja conectada a dos terminales.

En la Ref. [42] se ha encontrado que el árbol de Cayley simple constituye una buena aproximación de una red real. Sin embargo, la Ref. [26] muestra que el árbol de Cayley doble es una mejor aproximación todavía. En estas referencias el análisis se lleva a cabo dentro del formalismo Hamiltoniano utilizando el modelo que en la literatura se conoce como *tight-binding* [43].

De acuerdo con el modelo de Anderson [44], a cada sitio de la red se le asigna una energía estocástica para simular el desorden en el sistema. Se encuentra el *mobility edge* [45, 46], la energía crítica que separa los estados localizados de los extendidos, en función del parámetro de desorden. Los resultados son similares a los obtenidos por Anderson [44]: existe un valor crítico para el desorden, arriba del cual los estados son localizados. A esto se le conoce como *localización de Anderson* [45]. Una revisión sobre los conceptos de la teoría de la localización y sus diferentes enfoques la podemos encontrar en las Refs. [16, 26, 45, 47, 48, 49, 50].

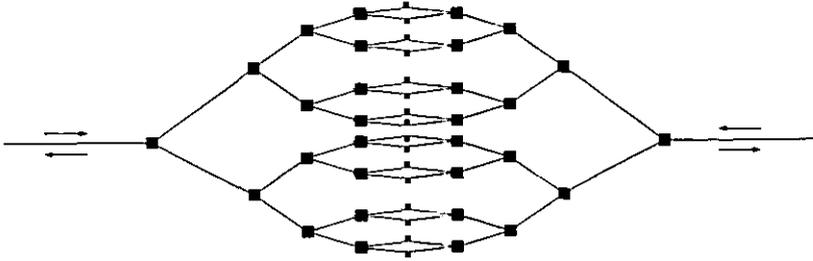


Figura 6.1: Un árbol de Cayley doble de conectividad $K = 2$ y generación $n = 4$. Cada nodo tiene asociada una matriz S . Las líneas representan conductores perfectos.

Desde el punto de vista dispersivo solo se ha estudiado el transporte cuántico en el árbol de Cayley simple [51]. En forma diferente al modelo de Anderson, el desorden se introduce asociando una matriz de dispersión aleatoria al enlace entre dos sitios consecutivos. Aquí, vamos a aplicar el formalismo de la matriz de dispersión al árbol de Cayley doble pero en concordancia con el modelo de Anderson, y a diferencia de la Ref. [51], es la matriz S asociada a cada sitio la que es aleatoria.

6.1 El problema de dispersión en un árbol de Cayley doble

El sistema que tenemos en mente consiste de un conjunto de puntos (sitios) distribuidos en el espacio de acuerdo con una malla, o red, dada por la unión de dos *árboles de Cayley*. De cada sitio (excepto los de la unión) de la malla emergen $K + 1$ ramificaciones, donde K es la *conectividad*. Partiendo de la unión hacia afuera y hasta encontrar el primer conjunto de sitios (donde se ramifica cada árbol) se dice que se ha alcanzado una *generación*, de manera que el número de generación n , partiendo desde la unión, nos da la noción de tamaño del sistema. Al dispositivo de dos terminales así construido le llamamos *árbol de Cayley doble* de conectividad K . Un ejemplo se muestra en la Fig. 6.1 para $K = 2$ y $n = 4$.

Vamos a suponer que por las terminales entran y salen ondas electrónicas. Como antes, la matriz de dispersión del sistema relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes. En general, ésta dependerá de las matrices de dispersión asociadas a los nodos, cuya regla de combinación es

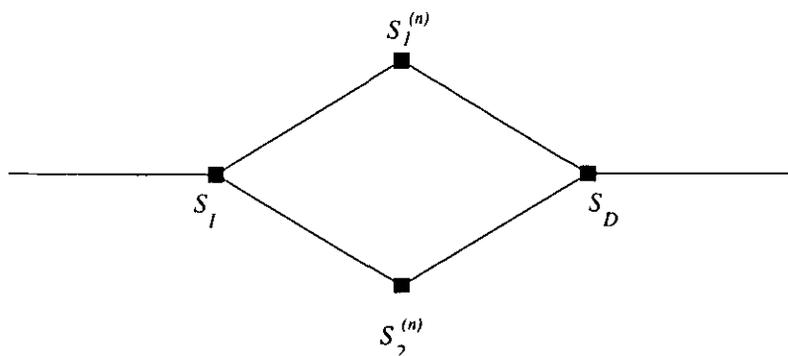


Figura 6.2: Un árbol de Cayley doble en una generación dada $n + 1$. La dispersión en los nodos está representada por las matrices S_I y S_D . $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ representan las matrices del sistema en la generación n .

en principio complicada.

Si nos fijamos en una generación dada n , el sistema es como se muestra en la Fig. 6.2. Supongamos que los conductores perfectos que conectan los nodos tienen solamente un modo de propagación, y que las matrices S de 3×3 asociadas a los nodos se denotan por S_I para el nodo izquierdo y S_D para el derecho. En principio, S_I y S_D son diferentes, de manera que no tenemos simetría de reflexión. Si en dicha generación las matrices del sistema son $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$, ambas de 2×2 , la matriz S en la generación $n + 1$, también de 2×2 , resulta ser (ver Apéndice E)

$$S^{(n+1)} = S_{PP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \frac{1}{e^{-2ika} I_4 - \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}, \quad (6.1)$$

donde la matriz $\mathbf{S}^{(n)}$ de 4×4 se contruye de $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ como sigue:

$$\mathbf{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} S_1^{(n)} & 0 \\ 0 & S_2^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Por supuesto, la matriz S resultante en cualquier generación es unitaria debido a la conservación de flujo, y simétrica si tenemos invariancia ante inversión en el tiempo. Por tanto, en la generación n la matriz S tiene la siguiente estructura

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} r^{(n)} & t^{(n)} \\ t^{(n)} & r'^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

donde $r^{(n)}$ y $r'^{(n)}$ son las amplitudes de reflexión, para incidencia por la izquierda y por la derecha, respectivamente; $t^{(n)}$ es la amplitud de transmisión.

Por otro lado, las matrices S_{PP}^{ID} , S_{PQ}^{ID} , S_{QP}^{ID} y S_{QQ}^{ID} de la Ec. (6.1) se construyen a partir de las matrices de los nodos mediante la transformación (ver Apéndice E)

$$\begin{pmatrix} S_{PP}^{ID} & S_{PQ}^{ID} \\ S_{QP}^{ID} & S_{QQ}^{ID} \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} S_I & 0 \\ 0 & S_D \end{pmatrix} O, \quad (6.4)$$

donde O es la matriz ortogonal de 6×6

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Aquí, S_{PP}^{ID} es una matriz de 2×2 que representa la dispersión en la parte externa del sistema; las matrices de 2×4 y 4×2 , S_{PQ}^{ID} y S_{QP}^{ID} , representan la dispersión desde el interior al exterior, y viceversa, respectivamente; finalmente, la matriz S_{QQ}^{ID} de 4×4 nos da la dispersión interna. Explícitamente, tenemos que

$$\left(\begin{array}{cc|cc} S_{PP}^{ID} & S_{PQ}^{ID} \\ S_{QP}^{ID} & S_{QQ}^{ID} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} s_{11}^I & 0 & s_{12}^I & 0 & s_{13}^I & 0 \\ 0 & s_{11}^D & 0 & s_{12}^D & 0 & s_{13}^D \\ \hline s_{21}^I & 0 & s_{22}^I & 0 & s_{23}^I & 0 \\ 0 & s_{21}^D & 0 & s_{22}^D & 0 & s_{23}^D \\ \hline s_{31}^I & 0 & s_{32}^I & 0 & s_{33}^I & 0 \\ 0 & s_{31}^D & 0 & s_{32}^D & 0 & s_{33}^D \end{array} \right). \quad (6.6)$$

Habiendo definido el problema de dispersión en el árbol de Cayley doble, y dado que nos interesa estudiarlo como un sistema desordenado, en la siguiente sección vamos a considerar un modelo para introducir el desorden por medio de las matrices asociadas a los nodos. El sistema ordenado, es decir el cristal del árbol doble, se analiza con detalle en el Apéndice F.

6.2 El desorden en el árbol de Cayley doble

En el modelo de Anderson [44], el desorden en un sistema se introduce asociando a cada sitio de la red una energía estocástica, es decir, distribuída con alguna ley de probabilidad. Similarmente, vamos a suponer que las matrices de cada nodo, S_I y S_D de la Ec. (6.1), son matrices aleatorias con una distribución dada. Esto funciona bien para sistemas *quasiunidimensionales*, aquellos cuya longitud es mucho mayor que el ancho, pues se obtienen los mismos resultados que en el modelo de Anderson [52]. Por tanto, esperamos que también funcione para el árbol de Cayley. Cuando se itere el sistema mostrado en la Fig. 6.2, los diferentes nodos de la Fig. 6.1 van a ser estadísticamente independientes entre sí.

Para tales matrices vamos a adoptar un modelo, que es una generalización del propuesto originalmente por Büttiker [53]. Es decir, suponemos que las matrices S_I y S_D son de la siguiente forma:

$$S_j = \begin{pmatrix} d_j & c_j & c_j \\ c_j & a_j & b_j \\ c_j & b_j & a_j \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

con $j = I, D$ (izquierda y derecha, respectivamente). Los coeficientes son números complejos que deben satisfacer la condición de unitaridad:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\epsilon} e^{i\gamma} \\ d &= \sqrt{1 - 2\epsilon} e^{i\delta} \\ a &= -\frac{1}{2} (d^* e^{2i\gamma} - e^{i\alpha}) \\ b &= -\frac{1}{2} (d^* e^{2i\gamma} + e^{i\alpha}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde solamente tenemos cuatro de los seis parámetros independientes que debe tener una matriz de 3×3 unitaria y simétrica. Aquí, *las fases* α , γ y δ *se eligen al azar de una distribución uniforme en el intervalo* $[0, 2\pi]$. El parámetro ϵ es un número real que varía en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

La Fig. 6.3 ilustra en forma esquemática el modelo anterior. Podemos ver que si incidimos con amplitud uno por el alambre denotado por 1, la amplitud de reflexión por el mismo alambre es d y la amplitud de transmisión a los alambres denotados por 2 y 3 es c . Al incidir por 2 (o por 3), la amplitud de reflexión es a y de transmisión al 3 (o al 2) es b ; la amplitud de transmisión al 1 es c .

El coeficiente de transmisión de 1 a 2 (o 3), o de 2 (o 3) a 1, es ϵ ; por tanto, podemos considerar este parámetro como una medida del acoplamiento

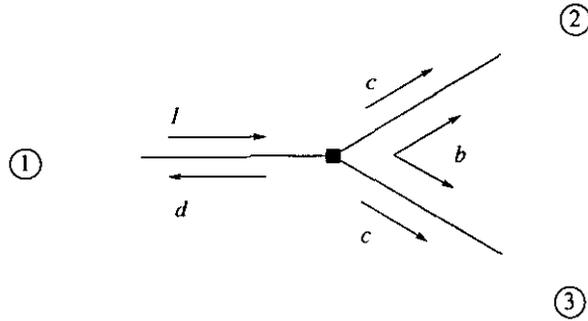


Figura 6.3: Modelo de Büttiker para matrices de 3×3 asociadas a los nodos del árbol de Cayley. d es la amplitud de reflexión al incidir por el alambre 1 y a , Ec. (6.7), cuando se incide por 2 ó 3 (no representada en la figura). La amplitud de transmisión de 1 a 2 ó 3, o viceversa, es c y la de transmisión de 2 a 3 o viceversa es b .

del alambre 1 a los otros dos. Cuando ϵ es cero la transmisión desde 1 es cero, y en ese caso tenemos acoplamiento nulo; en cambio cuando $\epsilon = \frac{1}{2}$ el acoplamiento es máximo pues la reflexión es nula.

En el caso de que las matrices S de 3×3 asociadas a los nodos no fuesen aleatorias, tendríamos el cristal del árbol de Cayley doble. Este caso se analiza en el Apéndice F para un valor arbitrario del acoplamiento.

En la siguiente sección vamos a considerar el caso desordenado pero con acoplamiento máximo. En la sección subsecuente analizaremos otros casos de acoplamiento.

6.3 Árbol desordenado con acoplamiento máximo

En esta sección vamos a analizar el caso de acoplamiento máximo. Este caso es especial porque la Ec. (6.1) se puede reducir a una forma que nos recuerda la de una cavidad con simetría izquierda derecha conectada a dos guías (una a cada lado), en la cual se le ha tapado una.

Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ las matrices S_I y S_D se escriben como:

$$S_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma_j} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma_j} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma_j} & \frac{1}{2}e^{i\alpha_j} & -\frac{1}{2}e^{i\alpha_j} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma_j} & -\frac{1}{2}e^{i\alpha_j} & \frac{1}{2}e^{i\alpha_j} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

donde $j = I, D$.

Con la adopción de este modelo las submatrices de la Ec. (6.6) toman una forma relativamente sencilla: $S_{PP}^{ID} = 0_2$,

$$\begin{aligned} S_{PQ}^{ID} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\gamma_I} & 0 & e^{i\gamma_I} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_D} & 0 & e^{i\gamma_D} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} e^{i\gamma_I} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_D} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

que podemos escribir como $S_{PQ}^{ID} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} U_\gamma \left(\begin{array}{cc} I_2 & I_2 \end{array} \right)$, donde I_2 es la matriz unidad de 2×2 y U_γ la matriz

$$U_\gamma = \left(\begin{array}{cc} e^{i\gamma_I} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_D} \end{array} \right). \quad (6.11)$$

De la misma manera,

$$S_{QQ}^{ID} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} e^{i\alpha_I} & 0 & -e^{i\alpha_I} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_D} & 0 & -e^{i\alpha_D} \\ -e^{i\alpha_I} & 0 & e^{i\alpha_I} & 0 \\ 0 & -e^{i\alpha_D} & 0 & e^{i\alpha_D} \end{array} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} U_\alpha & -U_\alpha \\ -U_\alpha & U_\alpha \end{array} \right), \quad (6.12)$$

donde se ha definido la matriz U_α . Nuevamente, podemos escribir esta ecuación como

$$S_{QQ}^{ID} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} I_2 \\ -I_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} U_\alpha & -U_\alpha \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} I_2 \\ -I_2 \end{array} \right) U_\alpha \left(\begin{array}{cc} I_2 & -I_2 \end{array} \right). \quad (6.13)$$

Si definimos la matriz V como

$$V \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} I_2 \\ -I_2 \end{array} \right), \quad (6.14)$$

podemos escribir $S_{QQ}^{ID} = V U_\alpha V^T$.

Entonces, la relación de recurrencia (6.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$S^{(n+1)} = \left(e^{ika} S_{PQ}^{ID} \right) \frac{1}{I_4 - \mathbf{S}^{(n)} \left(e^{2ika} S_{QQ}^{ID} \right)} \mathbf{S}^{(n)} \left(e^{ika} S_{QP}^{ID} \right). \quad (6.15)$$

Por otro lado, los productos $e^{ika} S_{PQ}^{ID}$ y $e^{2ika} S_{QQ}^{ID}$ implican simplemente una transformación en las fases:

$$\begin{aligned}\alpha &\longrightarrow \alpha + 2ka \\ \gamma &\longrightarrow \gamma + ka.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Entonces, ka puede absorberse en las fases α y γ , puesto que éstas se encuentran uniformemente distribuídas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por tanto, podemos escribir simplemente la relación de recurrencia como

$$S^{(n+1)} = S_{PQ}^{ID} \frac{1}{I_1 - \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}.\tag{6.17}$$

Ahora, desarrollamos en serie el cociente que aparece en la expresión anterior, para escribirla de forma siguiente:

$$\begin{aligned}S^{(n+1)} &= S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} \\ &\times \left\{ S_{QQ}^{ID} + S_{QQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID} + S_{QQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID} + \dots \right\} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}\end{aligned}\tag{6.18}$$

que a su vez se puede escribir como

$$\begin{aligned}S^{(n+1)} &= S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} V U_\alpha \\ &\times \left\{ I_2 + [(V^T \mathbf{S}^{(n)} V) U_\alpha] + [(V^T \mathbf{S}^{(n)} V) U_\alpha]^2 + \dots \right\} V^T \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

Esta serie se puede sumar, con el resultado

$$S^{(n+1)} = S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID} + [S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} V] U_\alpha \frac{1}{I_2 - [V^T \mathbf{S}^{(n)} V] U_\alpha} [S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} V]^T.\tag{6.20}$$

Al realizar todos los productos que aparecen en la expresión anterior encontramos que

$$S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID} = U_\gamma \rho_n U_\gamma\tag{6.21}$$

$$S_{PQ}^{ID} \mathbf{S}^{(n)} V = U_\gamma \tau_n\tag{6.22}$$

$$V^T \mathbf{S}^{(n)} V = \rho_n\tag{6.23}$$

donde

$$\rho_n = \frac{1}{2} [S_1^{(n)} + S_2^{(n)}] \quad (6.24)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} [S_1^{(n)} - S_2^{(n)}] \quad (6.25)$$

Por lo tanto, la relación de recurrencia se convierte en

$$S^{(n+1)} = U_\gamma \left(\rho_n + \tau_n U_\alpha \frac{1}{I_2 - \rho_n U_\alpha} \tau_n \right) U_\gamma, \quad (6.26)$$

donde ahora todas la matrices involucradas son de 2×2 .

La expresión dentro del paréntesis de la ecuación (6.26) es muy parecida a la que se obtiene en el capítulo anterior [ver Ec. (5.33)], correspondiente a un sistema que consiste de una cavidad balística con simetría de reflexión, conectada a cuatro guías de un canal (o dos de dos canales) colocadas simétricamente, donde las guías del lado derecho se han tapado con un reflector perfecto.

Podemos ver tal similitud si consideramos una cavidad con simetría de reflexión, representada por

$$S_0^{(n)} = \begin{pmatrix} \rho_n & \tau_n \\ \tau_n & \rho_n \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Esta matriz tiene la misma estructura que la matriz S_0 de la Ec. (5.31). Nótese que una rotación de $\pi/4$ lleva $S_0^{(n)}$ a la forma diagonal en bloques (6.2), tal como ocurrió en la Sección 5.2. Como se muestra en la Fig. 5.5, la cavidad se conecta a cuatro guías de un canal (o dos de dos canales), colocadas simétricamente con respecto a la cavidad, donde las guías del lado izquierdo se abren completamente, mientras que las del lado derecho se tapan con *barreras reflectoras con fases aleatorias*. Al sustituir las matrices t_b , t'_b , r_b y r'_b en la Ec. (5.27), que en este caso están dadas por

$$t_b = t'_b = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad r_b = r'_b = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & U_\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

obtenemos la ecuación matricial

$$S = \begin{pmatrix} \rho_n + \tau_n U_\alpha \frac{1}{I_2 - \rho_n U_\alpha} \tau_n & 0 \\ 0 & U_\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

donde el bloque 1-1 es precisamente la expresión que se encuentra dentro del paréntesis de la Ec. (6.26) [véase también la Ec (5.32)]. Notamos que en (6.26) tenemos una fase adicional: γ .

Dada esta similitud, vamos a aprovechar la intuición física que se obtuvo con las cavidades con simetría de reflexión para entender lo que pasa en el transporte electrónico en el árbol de Cayley doble desordenado. De hecho, algunos de los resultados en el caso de las cavidades con simetría izquierda-derecha se reproducen aquí.

6.3.1 El caso $S_I = S_D$

Para el caso que vamos a considerar aquí, $S_I = S_D$, las dos mitades del árbol de Cayley doble son desordenadas pero idénticas. Notemos que esto no significa que el árbol doble tenga simetría de reflexión, pues los nodos de la unión de las dos mitades (indicados con cuadros más pequeños en la mediana de la Fig. 6.1) pueden acoplar asimétricamente; esto es, las matrices de 2×2 asociadas a los nodos de la unión pueden no tener la estructura de simetría ID . En consecuencia, las matrices $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ de la n -ésima generación, ilustradas en la Fig. 6.2, pueden no tener la estructura de simetría ID . De hecho, vamos a considerar los dos casos, con y sin simetría ID en la unión, en las siguientes subsecciones.

Para $S_I = S_D$, independientemente de si existe o no simetría ID , la Ec. (6.26) se simplifica aún más ya que las matrices U_α y U_γ se convierten en números complejos de módulo uno veces la matriz unidad de 2×2 : $U_\alpha = e^{i\alpha} I_2$, $U_\gamma = e^{i\gamma} I_2$. Entonces,

$$S^{(n+1)} e^{i\alpha} = e^{2i\gamma} \left[\left(e^{i\alpha} \rho_n \right) + \left(e^{i\alpha} \tau_n \right) \frac{1}{I_2 - \left(e^{i\alpha} \rho_n \right)} \left(e^{i\alpha} \tau_n \right) \right]. \quad (6.30)$$

Si las matrices de dispersión en la generación n , $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$, tienen fases al azar uniformemente distribuidas, podemos absorber las fases α y γ en la matriz de dispersión misma y escribir la Ec. (6.30) como

$$S^{(n+1)} = \rho_n + \tau_n \frac{1}{I_2 - \rho_n} \tau_n. \quad (6.31)$$

Entonces, vemos que un árbol de Cayley doble cuyo desorden se introduce a través de las matrices de 3×3 asociadas a los nodos, con $S_I = S_D$, es equivalente a un árbol doble donde el desorden se introduce a través de las

matrices de 2×2 asociadas a los nodos de la unión de las dos mitades, quedando fijas las matrices de 3×3 al iterar la relación de recurrencia (6.31).

En las dos subsecciones siguientes veremos que las distribuciones de punto fijo dependen de la presencia o ausencia de simetría *ID*.

Matrices *S* con estructura *ID*

Vamos a suponer, en esta sección, que la estructura de las matrices de dispersión $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$, y consecuentemente de la *S* total, es como la que se tiene en presencia de *TRI* y simetría *ID*. El problema físico corresponde, pues, al de un árbol de Cayley doble desordenado, con simetría de reflexión.

El problema físico análogo sería el de una cavidad con simetría *ID*, conectada a una guía de onda de cuatro canales, colocada por debajo de la cavidad, de manera que al tapar dos de los canales la simetría *ID* no se rompe.

La matriz *S* a la generación *n*, Ec. (6.3), tiene la forma

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} r^{(n)} & t^{(n)} \\ t^{(n)} & r^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

que es una matriz de 2×2 con dos parámetros independientes. Como antes, la matriz de dispersión se puede diagonalizar mediante una rotación de $\pi/4$:

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

de manera que podemos escribir

$$R_0 S^{(n)} R_0^T = \begin{bmatrix} e^{i\theta_n^{(+)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_n^{(-)}} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Queremos investigar si la medida invariante definida para esta estructura, que considera fases al azar, es o no una distribución de punto fijo bajo la transformación dada por la regla de recurrencia (6.31).

La medida invariante como distribución de punto fijo. Vamos a suponer que la matriz de dispersión en la generación *n* está distribuída de acuerdo con la medida invariante, a saber [17]:

$$d\hat{\mu}(S^{(n)}) = \frac{d\theta_n^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta_n^{(-)}}{2\pi}. \quad (6.35)$$

De la regla de recurrencia (6.31) podemos ver que bajo esa transformación, la matriz de dispersión conserva su estructura, por lo que la podemos diagonalizar aplicando la rotación de $\pi/4$. Es decir, multiplicamos (6.31) a la izquierda por R_0 y a la derecha por R_0^T :

$$R_0 S^{(n+1)} R_0^T = (R_0 \rho_n R_0^T) + (R_0 \tau_n R_0^T) \frac{1}{1 - (R_0 \rho_n R_0^T)} (R_0 \tau_n R_0^T) \quad (6.36)$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} R_0 \rho_n R_0^T \\ R_0 \tau_n R_0^T \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[R_0 S_1^{(n)} R_0^T \pm R_0 S_2^{(n)} R_0^T \right] \\ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\theta_{1n}^{(+)}} \pm e^{i\theta_{2n}^{(+)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{1n}^{(-)}} \pm e^{i\theta_{2n}^{(-)}} \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

La ecuación (6.36) nos conduce a la misma ecuación para las dos fases de la matriz de dispersión en la generación $n + 1$:

$$e^{i\theta_{n+1}^{(+)}} = \frac{1}{2} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} + e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right] + \frac{\frac{1}{4} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} - e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right]^2}{1 - \frac{1}{2} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} + e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right]}; \quad (6.38)$$

los subíndices se refieren a las dos matrices $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$. Una ecuación similar vale para $e^{i\theta_{n+1}^{(-)}}$, donde aparecen solamente los parámetros $\theta_{1n}^{(-)}$, $\theta_{2n}^{(-)}$. Es decir, $\theta_{n+1}^{(+)}$ y $\theta_{n+1}^{(-)}$ son variables independientes.

Es fácil mostrar que el promedio de cualquier potencia de $e^{i\theta_{n+1}^{(+)}}$, es cero. Esto se ve claramente si desarrollamos en serie de potencias el cociente que aparece en la expresión anterior:

$$e^{i\theta_{n+1}^{(+)}} = \frac{1}{2} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} + e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right] \\ + \frac{1}{4} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} - e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} + e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right] + \dots \right\}; \quad (6.39)$$

Podemos observar que aparecen productos de potencias de $e^{i\theta_{1n}^{(+)}}$ y $e^{i\theta_{2n}^{(+)}}$. Entonces,

$$\left\langle \left[e^{i\theta_{n+1}^{(+)}} \right]^p \right\rangle = 0, \quad (6.40)$$

pues sabemos que $\theta_{1n}^{(+)}$ y $\theta_{2n}^{(+)}$ son independientes y por tanto,

$$\left\langle \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} \right]^{k_1} \left[e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right]^{k_2} \right\rangle = \left\langle \left[e^{i\theta_{1n}^{(+)}} \right]^{k_1} \right\rangle \left\langle \left[e^{i\theta_{2n}^{(+)}} \right]^{k_2} \right\rangle = 0 \quad (6.41)$$

por estar uniformemente distribuídas. De la misma manera,

$$\left\langle \left[e^{i\theta_{n+1}^{(-)}} \right]^p \right\rangle = 0 \quad (6.42)$$

Entonces, concluimos que $\theta_{n+1}^{(+)}$ y $\theta_{n+1}^{(-)}$ son dos variables independientes que están uniformemente distribuídas entre 0 y 2π . Por tanto, la distribución conjunta está dada por

$$dP \left(\theta_{n+1}^{(+)}, \theta_{n+1}^{(-)} \right) = \frac{d\theta_{n+1}^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta_{n+1}^{(-)}}{2\pi}. \quad (6.43)$$

Por tanto, la distribución de la matriz de dispersión es la medida invariante. Es decir, hemos demostrado que la medida invariante definida para esta estructura es una distribución de punto fijo bajo la regla de recurrencia que se obtiene para el árbol de Cayley doble:

$$dP \left(S^{(n+1)} \right) = d\hat{\mu} \left(S^{(n+1)} \right) = \frac{d\theta_{n+1}^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta_{n+1}^{(-)}}{2\pi}. \quad (6.44)$$

Por supuesto, lo anterior vale para la regla de recurrencia (6.31) la cual es válida cuando las matrices de dispersión en la generación n , Ec (6.32), tienen fases al azar. Nos preguntamos ahora si cualquier distribución con la que partamos, diferente de la medida invariante o cualquiera que no tenga fases al azar, tiende a la distribución de punto fijo que hemos encontrado; es decir, si tiende a la medida invariante.

¿Cualquier distribución tiende a la de punto fijo? Supongamos que la distribución de matrices de dispersión no considera fases al azar; entonces la regla de recurrencia está dada por la Ec. (6.30), donde ρ_n y τ_n están dadas por las Ecs. (6.24) y (6.25); $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ tienen la estructura (6.32). Vamos a suponer un caso extremo en que, en la generación n , las matrices tienen fases fijas, no distribuídas; es decir, son de la forma

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} e^{i\theta^{(+)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta^{(-)}} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Nuevamente podemos diagonalizar la matriz de dispersión de la regla de recurrencia mediante una rotación de $\frac{\pi}{4}$ y así obtener

$$e^{i\theta_{n+1}^{(+)}} = e^{i(2\gamma-\alpha)} \frac{1}{2} \left[e^{i(\theta_{1n}^{(+)}+\alpha)} + e^{i(\theta_{2n}^{(+)}+\alpha)} \right] + e^{i(2\gamma-\alpha)} \frac{\frac{1}{4} \left[e^{i(\theta_{1n}^{(+)}+\alpha)} - e^{i(\theta_{2n}^{(+)}+\alpha)} \right]^2}{1 - \frac{1}{2} \left[e^{i(\theta_{1n}^{(+)}+\alpha)} + e^{i(\theta_{2n}^{(+)}+\alpha)} \right]}. \quad (6.46)$$

Al igual que antes, una expresión similar vale para $\theta_{n+1}^{(-)}$, pero a diferencia del caso anterior ahora vemos que $\theta_{n+1}^{(+)}$ y $\theta_{n+1}^{(-)}$ no son más variables independientes. Tomemos por ejemplo el caso en el que $\theta_{1n}^{(+)} = \theta_{2n}^{(+)}$ y $\theta_{1n}^{(-)} = \theta_{2n}^{(-)}$. En ese caso encontramos que

$$e^{i\theta_{n+1}^{(+)}} = e^{i(\theta_{1n}^{(+)}-\theta_{1n}^{(-)})} e^{i\theta_{n+1}^{(-)}} \quad (6.47)$$

Por tanto, podemos concluir que partiendo de cualquier distribución arbitraria para la matriz de dispersión *no* obtenemos la distribución de punto fijo, la medida invariante, al menos no en una iteración. Pero un cálculo numérico para varias iteraciones muestra que cualquier distribución tiende a la medida invariante.

La distribución límite de la conductancia. Habiendo demostrado que la distribución de punto fijo es la medida invariante definida para esta estructura, es fácil saber cuál es la distribución de punto fijo para la conductancia. Ya hemos encontrado dicha distribución en el Capítulo 4, pues es el análogo al problema de una cavidad con simetría izquierda-derecha en ausencia de procesos directos:

$$w(T) = \frac{1}{\pi\sqrt{T(1-T)}}. \quad (6.48)$$

Matrices S sin estructura ID

Supongamos ahora que la matriz S en la generación n tiene la estructura dada por la Ec. (6.3):

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} r^{(n)} & t^{(n)} \\ t^{(n)} & r^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Nuevamente, de la relación de recurrencia (6.31) podemos ver que la matriz S en la generación $n + 1$ conserva la misma estructura.

Entonces, el problema consiste en un árbol de Cayley doble, con las dos mitades iguales, pero desordenado a través de la unión con matrices que rompen la simetría ID .

En forma similar al caso de la subsección anterior, nos preguntamos cuál será la distribución de la matriz S en la generación $n + 1$ cuando en la generación n está distribuida con la medida invariante.

Este problema corresponde al tratado en el Capítulo 5, en el cual se rompe la simetría ID , de una cavidad con simetría de reflexión, conectando asimétricamente dicha cavidad a dos guías de onda sin procesos directos.

El resultado que se obtiene al iterar una vez, partiendo de la medida invariante, es que la distribución de S en la generación $n + 1$ *no es la medida invariante*, aunque es muy parecida. La distribución de la conductancia para una iteración se muestra en la Fig. 5.7.

6.3.2 El caso $S_I \neq S_D$

En este caso, las dos mitades del árbol doble son desordenadas y diferentes. La estructura de la matriz S en cualquier generación es similar al caso sin estructura ID visto en la sección anterior; es decir, la matriz S tiene la forma de la Ec. (6.3):

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} r^{(n)} & t^{(n)} \\ t^{(n)} & r'^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Para este caso, realizamos un cálculo numérico para observar la evolución de la distribución de T con la generación n . La Fig. 6.4 muestra la distribución $w(T)$ de T para diferentes generaciones.

Para las gráficas de la Fig. 6.4 se usó la relación de recurrencia (6.26), donde se tomaron las fases α y γ al azar de una distribución uniforme, para generar así las matrices U_α y U_γ . Para las matrices S_1 y S_2 en la generación cero, se eligieron las matrices de Pauli: $S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = \sigma_x$. El tamaño del *ensemble* es 200 elementos.

Aunque no sabemos cuál es la distribución límite de T , podemos ver que no es la que corresponde a la medida invariante aunque la evidencia muestra que no está muy lejos de ella. En la Fig. 6.4(d) se compara la distribución en la generación $n = 18$ con la que se obtiene con la medida invariante. Por lo menos hasta esta generación la diferencia es muy pequeña pero significativa.

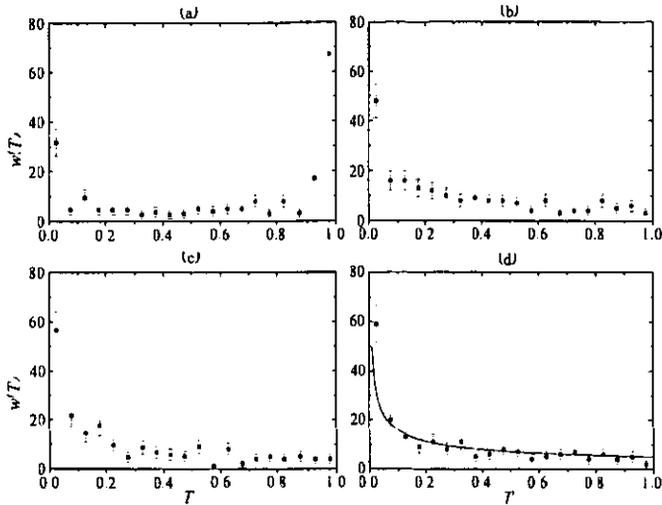


Figura 6.4: . Distribución de T en el caso de acoplamiento máximo; las dos mitades del árbol doble son diferentes: $S_I \neq S_D$. Las figuras (a), (b), (c) y (d) muestran la evolución de la distribución $w(T)$ de T con la generación, para $n = 2, 6, 12$ y 18 , respectivamente. En (d) se compara con la que se obtiene con la medida invariante: $w(T) = 1/2\sqrt{T}$.

Por ejemplo, el promedio de T resultó ser

$$\langle T \rangle \pm \delta(T) = 0.29327 \pm 0.02044, \quad (6.51)$$

que difiere significativamente de $\langle T \rangle = 1/3$, que se obtiene para la medida invariante. Por otro lado, la distribución límite de T no está muy lejos de la que se obtiene de la generación $n = 18$. La Fig. 6.5 muestra la tendencia del promedio de T con la generación. Aunque el promedio de T oscila, vemos que no cambia mucho con la generación cuando $n = 18$ donde vale aproximadamente $\langle T \rangle = 0.29$. La Fig. 6.6 muestra una gráfica logarítmica del promedio de T donde las oscilaciones son más claras.

Aunque en la subsección anterior solo realizamos el cálculo para una iteración partiendo con la medida invariante, el resultado es idéntico al que se muestra en esta sección. Es decir, partir de matrices S con la estructura (6.3) para la dispersión en la parte central del árbol doble, es equivalente a comenzar con matrices S iguales a la matriz de Pauli σ_x , pues la estructura de la matriz S al final también será de la forma (6.3).

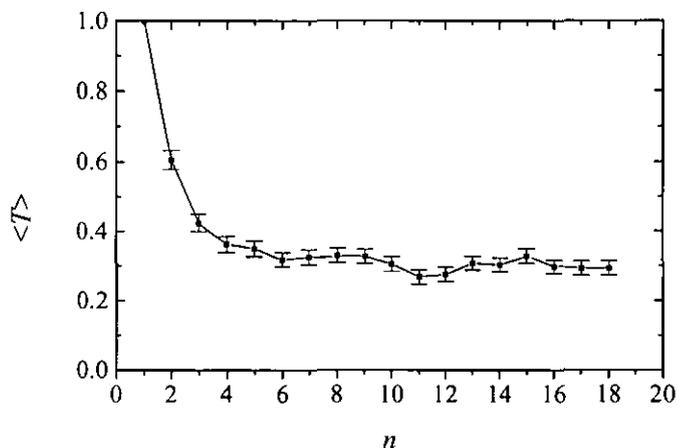


Figura 6.5: Evolución del promedio de T con la generación del árbol doble. En la generación $n = 18$ el promedio de T aparentemente se estaciona en el valor aproximado $\langle T \rangle = 0.29$, cuando el acoplamiento es máximo.

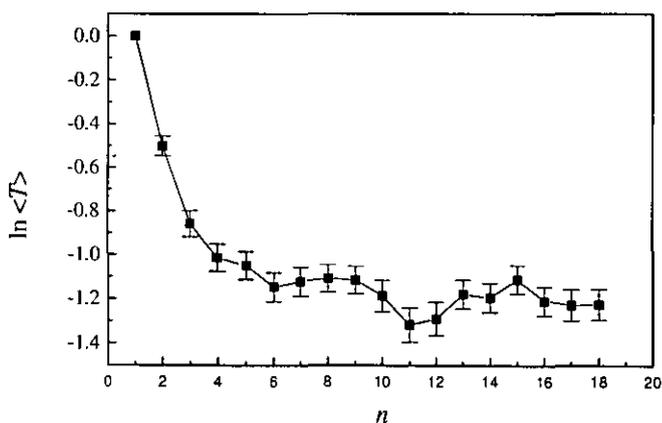


Figura 6.6: Gráfica logarítmica n del promedio de T como función de la generación. No es claro que el promedio de T tienda a algún valor fijo. En la generación $n = 18$ el promedio de T vale aproximadamente $\langle T \rangle = 0.29$, cuando el acoplamiento es máximo.

6.4 Árbol desordenado con acoplamiento intermedio

En este caso no tenemos una expresión simplificada de la relación de recurrencia para las matrices S . Por tanto, tampoco es evidente que pueda haber una analogía, o una interpretación, en términos de cavidades con simetría de reflexión como en la sección anterior. El punto de partida debe ser la relación de recurrencia dada por la Ec. (6.1).

Debido a que las matrices S de 3×3 asociadas a los nodos tienen fases al azar, la única simplificación posible es que la energía se puede absorber en dichas fases. Entonces, escribimos la Ec. (6.1) como

$$S^{(n+1)} = S_{PP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \frac{1}{I_4 - \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}, \quad (6.52)$$

Realizamos un cálculo numérico generando un *ensemble* de matrices S de 3×3 de la forma (6.7), lo cual hicimos a través de las fases α , γ y δ [ver Ec. (6.8)] elegidas de una distribución uniforme entre $[0, 2\pi]$, para una ϵ dada. Comenzamos con matrices $S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = \sigma_x$ para la generación cero e iteramos hasta la generación $n = 18$, para diferentes valores de ϵ .

Para dar una idea de la evolución de la distribución $w(T)$ de T con la generación n , la Fig. 6.7 muestra las distribuciones que se obtienen para $n = 1, 6, 12$ y 18 . Podemos observar que inicialmente T 's grandes son probables, pero cuando aumenta la generación T 's pequeñas son cada vez más probables. Suponemos que la distribución límite de la conductancia no está muy lejos de la que se muestra en la Fig. 6.7(d), pues ya no varía mucho con la generación. Una gráfica de la evolución del promedio de T se muestra en la Fig. 6.8; se observa que el promedio de T parece estacionarse en un valor cercano a $\langle T \rangle = 0.096$ de la generación $n = 18$. Esto no es claro pues la gráfica logarítmica de la Fig. 6.9 muestra oscilaciones del promedio de T . El valor es del promedio de T en este caso diferente de $\langle T \rangle = 0.29$, que se obtiene cuando $\epsilon = 0.5$.

Para valores del acoplamiento cada vez menores tenemos un comportamiento similar al anterior; es decir, inicialmente tenemos una probabilidad alta para T 's grandes, siendo esta probabilidad cada vez menor conforme el acoplamiento disminuye. Posteriormente, cuando aumenta la generación las T 's pequeñas son más probables. Una gráfica que muestra la evolución del promedio de T con la generación, para diferentes valores del acoplamiento,

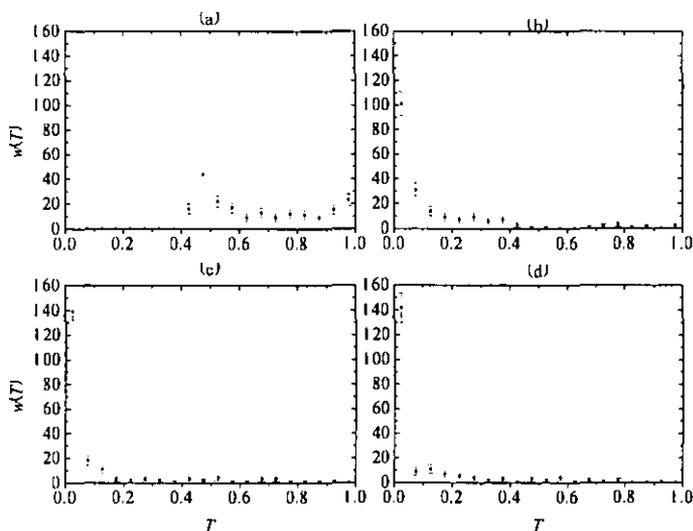


Figura 6.7: Evolución de la distribución $w(T)$ de T con la generación n , para $\epsilon = 0.4$. Las figuras (a), (b), (c) y (d) muestran la distribución para $n = 1, 6, 12$ y 18 .

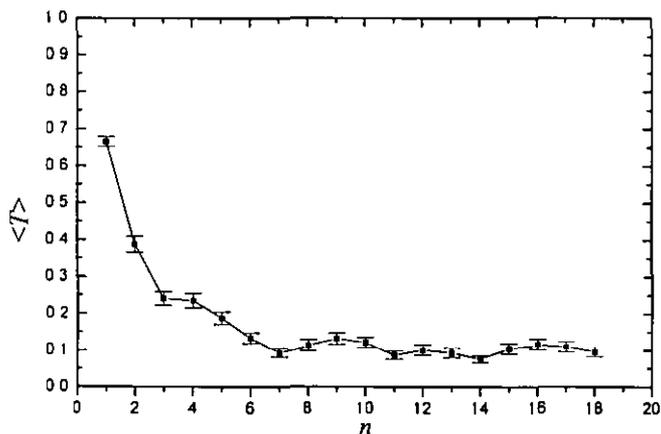


Figura 6.8: Evolución del promedio de T con la generación del árbol doble. No se ve claro que hasta la generación $n = 18$ el promedio de T se estacione en el valor aproximado $\langle T \rangle = 0.096$. En este caso el acoplamiento es $\epsilon = 0.4$.

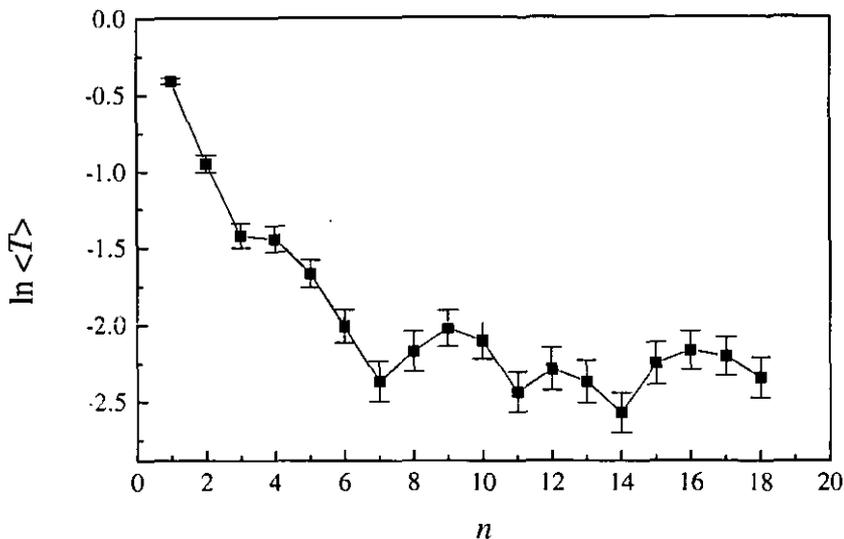


Figura 6.9: El logaritmo del promedio de T como función de la generación. Se observa que $\ln T$ oscila con n , al menos hasta la generación $n = 18$.

se muestra en la Fig. 6.10. En ella mostramos que el promedio de T parece estacionarse en valores cada vez más cercanos a cero, para ϵ tendiendo a cero. Evidentemente, la distribución de T para $\epsilon \rightarrow 0$ es una delta centrada en cero (de un solo lado).

Para una ϵ dada los resultados no muestran ninguna dependencia de la energía; por tanto, en nuestro modelo no tenemos *mobility edge*, que es la energía que separa los estados *localizados* de los *extendidos*. Por otro lado, la Fig. 6.10 muestra que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el promedio de T tiende a cero ($\langle T \rangle \rightarrow 0$) en forma continua, por lo que tampoco vemos la *transición metal aislante*.

Nuestros resultados contrastan con los encontrados por Satyanarayana [26] para el mismo sistema, donde él encuentra la transición metal-aislante; es decir encuentra él *mobility edge* como función del desorden. Una razón de la discrepancia puede ser la forma como introdujimos el desorden en nuestro modelo, donde las fases al azar absorben toda dependencia en la energía.

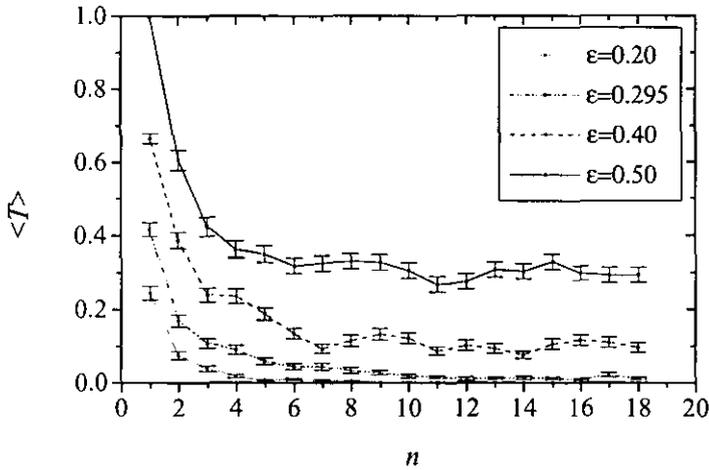


Figura 6.10: Evolución del promedio de T con la generación para diferentes valores del acoplamiento. En la generación $n = 18$ el promedio de T aparentemente se estaciona en un valor cada vez más pequeño conforme ϵ tiende a cero.

Otra razón puede ser que nuestro modelo de desorden, mediante matrices aleatorias, no sea idéntico al de Anderson [44] para el árbol doble de Cayley como lo fue para sistemas *quasiunidimensionales* y unidimensionales.

Capítulo 7

Conclusiones

Uno de los propósitos principales de la Tesis fué la extensión de estudios previos sobre el transporte a través de cavidades caóticas balísticas con simetría de reflexión para incluir la presencia de procesos directos. En el Capítulo 4 tratamos el problema de *sistema con simetría izquierda-derecha (ID) completa* en la presencia de procesos directos y con invariancia ante inversión en el tiempo (*TRI*). La distribución estadística de la matriz S , encontrada analíticamente en la Ec. (4.20), consiste en el producto de dos kernel de Poisson con las matrices ópticas $\langle s^{(+)} \rangle$ y $\langle s^{(-)} \rangle$, respectivamente. En ausencia de transmisión directa, $\langle t \rangle = 0$, y reflexiones directas $\langle r \rangle$ reales, calculamos analíticamente la distribución del coeficiente de transmisión $w(T)$ para el caso de un canal. La diferencia con la distribución de T para una cavidad asimétrica (*AS*) con la misma matriz óptica $\langle S \rangle$, la cual es grande para $\langle r \rangle = 0$, se hace menos dramática conforme $|\langle r \rangle|$ aumenta: esa evolución se muestra en la Figura 4.3.

El caso de un sistema con simetría *ID* completa con ruptura de la simetría *TRI* por un campo magnético no se trató aquí. La Ref. [18] encuentra que la matriz S correspondiente tiene una estructura similar a la del caso $\beta = 1$ pero con los papeles de r y t intercambiados. La distribución estadística $w(T)$ de T para $\langle r \rangle = 0$ está dada por $1/(2\sqrt{1-T})$, indicando un aumento en la dispersión hacia adelante, que se conoce en la literatura como *coherent forward scattering enhancement*. Partiendo de esa distribución, $w(T)$ debería evolucionar hacia $\delta(T)$ como $|\langle r \rangle|$ aumenta.

Un segundo propósito de este trabajo fue estudiar la ruptura de la simetría mediante un acoplamiento asimétrico de una cavidad con simetría *ID* hacia el exterior. Analizamos dos formas de producir mezcla externa de la simetría

espacial:

1. En la Sección 5.1 estudiamos el efecto de la ruptura de la simetría de una cavidad por procesos directos. El sistema consiste de una cavidad balística con simetría de reflexión, conectada a dos guías de onda colocadas simétricamente por medio de barreras que, en general, son diferentes (Fig. 5.1). Encontramos analíticamente, en la Ec. (5.23), la distribución estadística de la matriz S para el caso de un canal en cada guía y, por simplicidad, cuando solamente la barrera del lado derecho está presente ($r'_2 \neq 0$). La distribución de T es muy diferente de la del caso completamente AS (es decir el caso en el cual la cavidad misma es AS) teniendo la misma matriz óptica $\langle S \rangle$, como se muestra en la Fig. 5.4 para varios valores de $r'_2 \neq 0$. Concluimos que este sistema de dos guías de onda, aunque asimétrico con respecto a la operación ID , *tiene memoria de la simetría de reflexión de la cavidad* de la cual se construyó. En el límite $r'_2 \rightarrow -1$ la guía de onda del lado derecho se bloquea y terminamos con una cavidad balística con simetría ID conectada, sin barreras, a una solo guía, con un canal abierto (ver la Fig. 5.3). Encontramos que la matriz de dimensión 1 resultante $S = e^{i\theta}$ está distribuída de acuerdo a su medida invariante (es decir, θ está uniformemente distribuída) y, como resultado, *no existe efecto debido a la simetría ID de la cavidad*: esta es una peculiaridad del caso de una guía de un canal (veáse al final del próximo párrafo).
2. En la Sección 5.2 estudiamos *en la ausencia de procesos directos el efecto de la mezcla externa de la simetría ID inducida por posición asimétrica de las guías de onda*. El resultado es una cavidad con simetría ID , sin barreras, conectada a dos guías de onda sobre su lado izquierdo (ver la Fig. 5.6). Denotemos por T el coeficiente de transmisión entre esas dos guías de onda; su distribución $w(T)$ se calculó numéricamente para el caso de un canal en cada guía de onda y se comparó, en la Fig. 5.7, con $1/2\sqrt{T}$, la distribución de T que surge de la medida invariante $d\mu^{(\beta=1)}(S)$ para sistemas AS . Aunque la diferencia entre las dos distribuciones es muy pequeña, estadísticamente es significativa. Claramente, este problema es equivalente a tener, de un solo lado de la cavidad, una sola guía (acoplada a la cavidad sin barreras) con dos canales abiertos. En este problema de una guía de dos canales la matriz S resultante está distribuída muy cerca de su medida

invariante, donde la diferencia exhibe *algo de memoria de la simetría de la cavidad*.

Hicimos notar en el Capítulo 1 que desde un punto de vista experimental, aparte de los sistemas mesoscópicos, las cavidades de microondas y los sistemas acústicos pueden representar buenas posibilidades para estudiar el efecto de la simetría de la cavidad y la mezcla externa en la distribución de la conductancia del sistema y así verificar las predicciones teóricas que se hacen en esta Tesis. Estas últimas posibilidades son más económicas y además las condiciones del experimento son más fáciles de controlar.

Finalmente, en el Capítulo 6 vimos la analogía existente entre el problema de las cavidades con simetría ID y el árbol de Cayley doble desordenado, por lo que el estudio realizado sobre dichas cavidades es relevante para entender el transporte electrónico en ese sistema desordenado. Cuando el acoplamiento entre los conductores perfectos (que convergen en los nodos) es máximo, vimos que la relación de recurrencia para la matriz S del árbol de Cayley doble es similar a la que describe la dispersión en una cavidad con simetría ID conectada simétricamente a cuatro guías de onda, en la cual se le han tapado las dos de un solo lado con un espejo aleatorio (fases al azar) dejando abiertas completamente las otras dos. Aún en este caso, cuando las matrices asociadas a los nodos de un lado del árbol doble están distribuidas de acuerdo con alguna ley de probabilidad, pero idénticas con su correspondiente reflejada especularmente del otro lado, la similitud entre los dos sistemas se vuelve identidad. Así, cuando las matrices S de 2×2 en la generación n tiene la estructura que se obtiene para la simetría ID , en la generación $n+1$ la matriz S tiene también esa estructura. Encontramos que si la matriz S de 2×2 en la generación n está distribuida con la medida invariante, la distribución en la generación $n+1$ también es la medida invariante. Cuando la matriz S no tiene la estructura correspondiente a la simetría ID el problema se reduce al descrito en el párrafo 2 anterior.

Para valores intermedios del acoplamiento no encontramos una interpretación en términos de cavidades. Realizamos un cálculo numérico usando la relación de recurrencia para la matriz S partiendo de matrices S de 2×2 dadas por la matriz de Pauli σ_x en la generación cero (la unión de los dos árboles es perfecta). Los resultados hasta la generación $n = 18$ no muestran ninguna dependencia en la energía, por lo que en nuestro modelo no tenemos *mobility edge*. Por otro lado, la Fig. 6.10 muestra que cuando el acoplamiento tiende a cero, el promedio de T tiende a cero ($\langle T \rangle \rightarrow 0$) en forma continua,

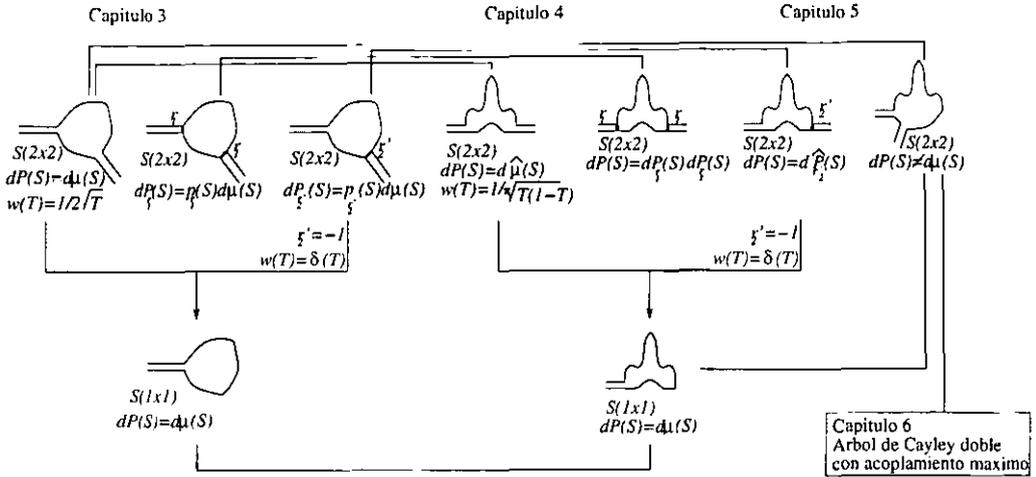


Figura 7.1: Diagrama donde se muestra en forma esquemática la relación entre los diferentes capítulos y las comparaciones entre los sistemas que se estudiaron. Las líneas indican las comparaciones.

por lo que tampoco vemos la *transición metal aislante*.

Nuestros resultados contrastan con los encontrados por Satyanarayana para el mismo sistema, donde él encuentra la transición metal-aislante: encuentra el *mobility edge* como función del desorden. Una razón de la discrepancia puede ser la forma como introdujimos el desorden en nuestro modelo, donde las fases al azar absorben toda dependencia en la energía. Otra razón puede ser que nuestro modelo de desorden, mediante matrices estocásticas, no sea idéntico al de Anderson para el árbol de Cayley doble como lo fue para sistemas *quasi* y *unidimensionales*.

Finalmente, en la Fig. 7.1 mostramos en forma esquemática los diferentes sistemas que se estudiaron, las comparaciones entre ellos y la conexión entre los diferentes capítulos.

Apéndice A

Derivación de la Ec. (3.30)

Para ver el comportamiento de $dP_{0,r'_2}(\tau, \phi, \psi)$ [Ec. (3.30)] para $r'_2 = -1$, sea r'_2 un número real que por simplicidad suponemos $r'_2 = -\cos \epsilon$; estamos interesados en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. También, sea $\eta \ll 1$ un número positivo que introducimos para evitar la singularidad integrable en τ . Por supuesto, posteriormente tomaremos el límite $\eta \rightarrow 0$. Puesto que ϕ está uniformemente distribuída, vemos inmediatamente que la densidad de probabilidad conjunta de τ y ψ puede escribirse como

$$p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi) = \frac{C_\eta}{4\pi\sqrt{\tau + \eta^2}} \frac{|\sin \epsilon|^3}{\left|1 + \cos \epsilon \sqrt{1 - \tau} e^{2i\psi}\right|^3}, \quad (\text{A.1})$$

donde C_η es una constante de normalización que depende del parámetro η .

Tenemos las siguientes propiedades de $p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi)$:

1. De (A.1) vemos que

$$p_{0,0}(\tau, \psi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi) = 0 \quad (\text{A.2})$$

para toda τ y ψ , excepto para $\tau = 0$ y $\psi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, donde el denominador es cero

$$\left|1 + \sqrt{1 - \tau} e^{2i\psi}\right|^3 = 0. \quad (\text{A.3})$$

2. Para $\tau = 0$ y $\psi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{0,0} \left(\tau = 0, \psi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{\eta,\epsilon} \left(\tau = 0, \psi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_\eta}{4\pi\eta} \left| \cot \frac{\epsilon}{2} \right|^3 \rightarrow \infty \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

3. La función $p_{0,0}(\tau, \psi)$ está normalizada a la unidad:

$$\int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\psi p_{0,0}(\tau, \psi) = \lim_{\eta, \epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\psi p_{\eta, \epsilon}(\tau, \psi) = 1 \quad (\text{A.5})$$

La única función que satisface esas condiciones es

$$p_{0,0}(\tau, \psi) = \delta(\tau) \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \frac{3\pi}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, la distribución de la matriz S en los límites anteriores está dada por la Ec. (3.30).

Apéndice B

Derivación de la Ec. (4.25)

Para $\langle r \rangle$ real y $s^{(\pm)} = e^{i\theta^{(\pm)}}$, la Ec. (4.24) puede escribirse como

$$d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S) = \frac{1 - \langle r \rangle^2}{|1 - \langle r \rangle e^{i\theta^{(+)}}|^2} \frac{1 - \langle r \rangle^2}{|1 - \langle r \rangle e^{i\theta^{(-)}}|^2} \frac{d\theta^{(+)}}{2\pi} \frac{d\theta^{(-)}}{2\pi}. \quad (\text{B.1})$$

La amplitud de transmisión está dada por [ver Ec. (4.4)]:

$$t = \frac{1}{2} (e^{i\theta^{(+)}} - e^{i\theta^{(-)}}), \quad (\text{B.2})$$

y el coeficiente de transmisión se escribe como

$$T = |t|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)})]. \quad (\text{B.3})$$

La distribución de T , $w_{\langle r \rangle}(T)$ se obtiene de

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \int \delta\left(T - \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)})]\right) d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S). \quad (\text{B.4})$$

Para resolver la integral hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} [\theta^{(+)} - \theta^{(-)}], \\ \theta' &= \frac{1}{2} [\theta^{(+)} + \theta^{(-)}]; \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

los intervalos de variación son: para $\theta' \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\theta', \theta']$ y para $\theta' \in [\pi, 2\pi]$, $\theta \in [-(2\pi - \theta'), (2\pi - \theta')]$.

Sustituyendo (B.1) en (B.4), considerando el hecho de que el integrando es una función par de θ y escribiendo la función delta en términos de sus raíces en la variable θ tenemos

$$\delta(T - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2\sqrt{T(1-T)}} [\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2)], \quad (\text{B.6})$$

donde $\theta_2 = \pi - \theta_1$ y $\theta_1 = \arcsin \sqrt{T}$; finalmente, después de un poco de álgebra $w_{\langle r \rangle}(T)$ puede escribirse como la suma de dos términos:

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1 - \langle r \rangle^2)^2}{\pi^2 \sqrt{T(1-T)}} [I_1(T, \langle r \rangle) + I_2(T, \langle r \rangle)], \quad (\text{B.7})$$

donde, para $k = 1, 2$,

$$I_k(T, \langle r \rangle) = \int_0^\pi \int_0^{\theta'} \frac{\delta(\theta - \theta_k) d\theta d\theta'}{\left[(1 + \langle r \rangle^2) - 2\langle r \rangle \cos(\theta' + \theta) \right] \left[(1 + \langle r \rangle^2) - 2\langle r \rangle \cos(\theta' - \theta) \right]}. \quad (\text{B.8})$$

Nuevamente, después de un poco de álgebra la suma de las dos integrales dan una sola:

$$I_1(T, \langle r \rangle) + I_2(T, \langle r \rangle) = \frac{1}{c} \int_0^\pi \frac{d\theta'}{a - b \cos \theta' + \cos^2 \theta'}, \quad (\text{B.9})$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{c} \left[(1 + \langle r \rangle^2)^2 - 4\langle r \rangle^2 T \right], \\ b &= \frac{4}{c} \langle r \rangle (1 + \langle r \rangle^2) \sqrt{1 - T}, \\ c &= 4\langle r \rangle^2. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ahora, realizando el cambio de variable $x = \cos \theta'$, (B.7) puede escribirse como

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1 - \langle r \rangle^2)^2}{4\langle r \rangle^2 \pi^2 \sqrt{T(1-T)}} [I_+(T, \langle r \rangle) + I_-(T, \langle r \rangle)], \quad (\text{B.11})$$

donde ahora

$$I_{\pm}(T, \langle r \rangle) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(a \pm bx + x^2)}. \quad (\text{B.12})$$

Por medio de otro cambio de variables

$$u = \frac{x + (A + B)}{x + (A - B)}, \quad (\text{B.13})$$

$$v = \frac{x - (A + B)}{x - (A - B)}, \quad (\text{B.14})$$

donde

$$A = \frac{1}{b}(1 + a), \quad (\text{B.15})$$

$$B = \frac{1}{b}\sqrt{(1 + a)^2 - b^2}, \quad (\text{B.16})$$

las integrales indefinidas $Indef_{\pm}$, correspondientes a cada una de las anteriores $I_{\pm}(T, \langle r \rangle)$, pueden transformarse a

$$Indef_{+} = \frac{2B}{\sqrt{CD}} \int \frac{|u + 1|}{\sqrt{u^2 + p}(u^2 + q)} du, \quad (\text{B.17})$$

$$Indef_{-} = -\frac{2B}{\sqrt{CD}} \int \frac{|v + 1|}{\sqrt{v^2 + p}(v^2 + q)} dv. \quad (\text{B.18})$$

donde

$$p = \frac{a - b(B + A) + (B + A)^2}{a + b(B - A) + (B - A)^2} \quad (\text{B.19})$$

$$q = \frac{1 - (B + A)^2}{1 - (B - A)^2} \quad (\text{B.20})$$

y

$$\begin{aligned} C &= 1 - (B - A)^2, \\ D &= a + b(B - A) + (B - A)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Aunque las integrales (B.12) parecen conducir al mismo resultado bajo el cambio $b \rightarrow -b$, no es así porque los cortes $x_u = B - A$ en (B.17) y $x_v = A - B$ en (B.18), son diferentes. Uno debe tener cuidado al evaluar las

integrales en los límites. Los resultados son

$$I_+(T, \langle r \rangle) = \frac{2B}{\sqrt{CD}\sqrt{p-q}} \left[\arctan \left(\frac{1 - \langle r \rangle^2}{2 \langle r \rangle \sqrt{1-T}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln \left(\frac{1 + \langle r \rangle^2 + 2 \langle r \rangle \sqrt{T}}{1 + \langle r \rangle^2 - 2 \langle r \rangle \sqrt{T}} \right) \right], \quad (\text{B.22})$$

$$I_-(T, \langle r \rangle) = \frac{2B}{\sqrt{CD}\sqrt{p-q}} \left[\pi - \arctan \left(\frac{1 - \langle r \rangle^2}{2 \langle r \rangle \sqrt{1-T}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln \left(\frac{1 + \langle r \rangle^2 + 2 \langle r \rangle \sqrt{T}}{1 + \langle r \rangle^2 - 2 \langle r \rangle \sqrt{T}} \right) \right]. \quad (\text{B.23})$$

Ahora, sustituimos la suma de las ecuaciones (B.22), (B.23) en (B.11) para obtener el resultado

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1 - \langle r \rangle^2)^2}{4 \langle r \rangle^2 \pi^2 \sqrt{T(1-T)}} \frac{2\pi B}{\sqrt{CD}\sqrt{p-q}}. \quad (\text{B.24})$$

Usando las Ecs. (B.10), (B.16), (B.19), (B.20) y (B.21) se obtiene el resultado final (4.25).

Apéndice C

Derivación de la Ec. (5.23)

Para el caso particular en el que la barrera del lado izquierdo es transparente [ver Fig. 5.1], tal que su matriz de dispersión S_1 de la Ec. (3.17) es la matriz de Pauli σ_x , y la barrera del lado derecho está descrita por la Ec. (3.18) con elementos de matriz *reales* la Ec. (5.22) se puede escribir como

$$d\hat{P}_{0,r'_2}(S) \sim 2 \frac{\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1 - \tau_0}} \times \frac{(1 - r'_2{}^2)^{3/2}}{\left|1 - \sqrt{1 - \tau} r'_2 e^{2i\psi}\right|^3} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (\text{C.1})$$

También, la transformación $S_0(S)$ dada por la Ec. (5.1) puede escribirse en términos de sus elementos como sigue:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{1 - r'_2 r'} \left[r (1 - r'_2 r') + r'_2 t^2 \right], \\ r'_0 &= \frac{1}{1 - r'_2 r'} (r' - r'_2), \\ t_0 &= \frac{1}{1 - r'_2 r'} t_2 t, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

o en términos de los parámetros independientes [ver Ecs.(3.9) y (5.5)] como:

$$\sqrt{1 - \tau_0} e^{2i\phi_0} = e^{2i\phi} \frac{\sqrt{1 - \tau} - r'_2 e^{2i\psi}}{1 - r'_2 \sqrt{1 - \tau} e^{2i\psi}} \quad (\text{C.3})$$

$$\sqrt{1-\tau_0} e^{2i\psi_0} = e^{2i\psi} \frac{\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{-2i\psi}}{1 - r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi}} \quad (C.4)$$

$$\sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0+\psi_0)} = \frac{t_2 \sqrt{\tau} e^{i(\phi+\psi)}}{1 - r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi}} \quad (C.5)$$

De (C.3) o (C.4) encontramos

$$\sqrt{1-\tau^{(0)}} = \frac{|\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{2i\psi}|}{|1 - \sqrt{1-\tau} r'_2 e^{2i\psi}|}; \quad (C.6)$$

también, dividiendo (C.3) por (C.4) obtenemos

$$e^{2i(\psi_0-\phi_0)} = e^{2i(\psi-\phi)} \frac{\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{-2i\psi}}{\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{2i\psi}}. \quad (C.7)$$

Debido a que las raíces de las funciones delta que aparecen en la Ec. (5.22) satisfacen que $e^{2i(\psi_0-\phi_0)} = -1$, de (C.7) encontramos

$$e^{2i\psi} = -e^{2i\phi} e^{2i\alpha(\phi)} \quad (C.8)$$

donde

$$e^{i\alpha(\phi)} = \frac{\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{-2i\phi}}{|\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{2i\phi}|}. \quad (C.9)$$

Entonces, tenemos las condiciones para ψ :

$$\begin{aligned} \psi - \phi - \alpha(\phi) &= \frac{\pi}{2} & \text{for } \psi_0 - \phi_0 &= \frac{\pi}{2} \\ \psi - \phi - \alpha(\phi) &= 3\frac{\pi}{2} & \text{for } \psi_0 - \phi_0 &= 3\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Por otro lado el Jacobiano de la transformación $\psi_0 \rightarrow \psi$ es

$$\left| \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi_0 - \phi_0) \right| = \frac{|(1-\tau) - r_2'^2|}{|\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{-2i\psi}|^2}, \quad (C.11)$$

y por tanto escribimos

$$\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \frac{|\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{-2i\psi}|^2}{|(1-\tau) - r_2'^2|} \delta\left[\psi - \phi - \alpha(\phi) - \frac{2n+1}{2}\pi\right], \quad (C.12)$$

para $n = 0, 1$.

De (C.8) y (C.9) encontramos que

$$\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{2i\psi} = \frac{(1-\tau) - r_2'^2}{\sqrt{1-\tau} - r'_2 e^{2i\phi}}, \quad (\text{C.13})$$

$$1 - r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi} = \frac{\sqrt{1-\tau} (1 - r_2'^2) - r'_2 \tau e^{2i\phi}}{\sqrt{1-\tau} r'_2 e^{2i\phi}}. \quad (\text{C.14})$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (C.6), (C.12), (C.13) y (C.14) en la Ec. (C.1), llegamos a la Ec. (5.23).

Apéndice D

Derivación de la Ec. (5.25)

En la Sec. 5.1 encontramos la densidad de probabilidad conjunta de τ , ϕ y ψ [Eq. (5.23)]. De dicha ecuación es fácil integrar sobre ψ para encontrar la densidad de probabilidad conjunta de τ y ϕ como

$$q_{r_2'}(\tau, \phi) = \frac{(1 - r_2'^2)^{3/2} |\sqrt{1 - \tau} - r_2' e^{2i\phi}|}{(2\pi)^2 \sqrt{\tau} |\sqrt{1 - \tau} (1 - r_2'^2) - r_2' \tau e^{2i\phi}|^2} \quad (\text{D.1})$$

En forma similar al apéndice A por simplicidad suponemos $r_2' = -\cos \epsilon$; otra vez, introducimos el parámetro $\eta \ll 1$. Por supuesto, posteriormente tomaremos los límites $\eta, \epsilon \rightarrow 0$; entonces

$$q_{\eta, \epsilon}(\tau, \phi) = \frac{C_\eta |\sin \epsilon|^3}{2\pi^2 \sqrt{\tau + \eta^2}} \frac{|\sqrt{1 - \tau} + \cos \epsilon e^{2i\phi}|}{|\sqrt{1 - \tau} \sin^2 \epsilon + \tau \cos \epsilon e^{2i\phi}|^2}. \quad (\text{D.2})$$

donde C_η es una constante de normalización que depende de η .

Nuevamente, tenemos las siguientes propiedades para $q_{\eta, \epsilon}(\tau, \phi)$:

1. De (D.2) vemos que

$$q_{0,0}(\tau, \phi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta, \epsilon}(\tau, \phi) = 0 \quad (\text{D.3})$$

para toda τ y ϕ , excepto para $\tau = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, donde el denominador es cero:

$$|\sqrt{1 - \tau} \sin^2 \epsilon + \tau \cos \epsilon e^{2i\phi}|^2 = 0 \quad (\text{D.4})$$

2. $\tau \neq 0$ y $\forall \phi$.

Es fácil ver de (D.2) que en este caso

$$q_{0,0}(\tau \neq 0, \phi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi) = 0. \quad (\text{D.5})$$

3. Para $\tau = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} q_{0,0} \left(\tau = 0, \phi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon} \left(\tau = 0, \phi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_{\eta}}{2\pi^2\eta} \left| \tan \frac{\epsilon}{2} \right| = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

4. Para $\tau = 0$, $\phi \neq \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} q_{0,0} \left(\tau = 0, \phi \neq \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon} \left(\tau = 0, \phi \neq \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_{\eta}}{2\pi^2\eta} \frac{|1 + \cos \epsilon e^{2i\phi}|}{|\sin \epsilon|} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

5. También, la función $q_{0,0}(\tau, \phi)$ está normalizada a uno:

$$\int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi q_{0,0}(\tau, \phi) = \lim_{\eta, \epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi). \quad (\text{D.8})$$

Esas condiciones definen la función

$$q_{0,0}(\tau, \phi) = \delta(\tau) \frac{1}{2\pi}. \quad (\text{D.9})$$

Entonces llegamos a la Ec. (5.25).

Apéndice E

Relación de recurrencia de matrices S para el árbol de Cayley doble

Para deducir la relación de recurrencia para las matrices de dispersión de 2×2 del árbol de Cayley doble, nos fijamos en la generación $n + 1$. Definimos los ejes de coordenadas x_1 y x_2 , que coinciden en el origen O puesto en el nodo del lado izquierdo, y los ejes x'_1 y x'_2 , que coinciden en el origen O' puesto en el nodo derecho, como se muestra en la Fig. E.1.

La matriz de dispersión $S^{(n+1)}$ del sistema en la generación $n + 1$ relaciona las amplitudes de las ondas salientes con las entrantes. Las ondas entrantes tienen amplitudes a_I y a_D , mientras las correspondientes amplitudes de las ondas salientes son b_I y b_D . Por tanto, tenemos

$$\begin{pmatrix} b_I \\ b_D \end{pmatrix} = S^{(n+1)} \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Por supuesto, la matriz $S^{(n+1)}$ depende de las matrices de 2×2 de la generación previa n y de las matrices de 3×3 asociadas a los nodos.

Vamos a suponer que la longitud de separación entre dos nodos consecutivos es a . Con respecto al origen O la amplitud de la onda entrante por el lado izquierdo en el nodo representado por $S_1^{(n)}$ es $a_1 e^{ika}$; con respecto de O' la amplitud de la onda entrante por el lado derecho es $a'_1 e^{ika}$. Las respectivas amplitudes de las ondas salientes son $b_1 e^{-ika}$ y $b'_1 e^{-ika}$. Por tanto, la matriz

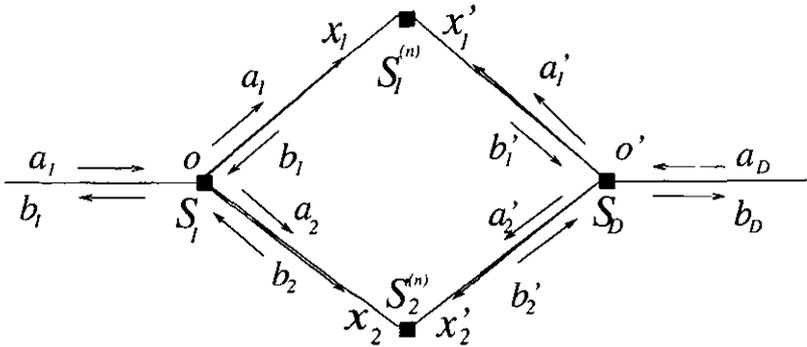


Figura E.1: Un árbol de Cayley doble en una generación dada $n + 1$. La dispersión en los nodos está representada por las matrices S_I y S_D . $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ representan las matrices del sistema en la generación n . Definimos los ejes x_1, x_2 , respecto del origen O , y x_1', x_2' con respecto del origen O' . Tenemos ondas entrantes y salientes en cada uno de los nodos como se muestra.

$S_1^{(n)}$ relaciona dichas amplitudes de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} b_1 e^{-ika} \\ b_1' e^{-ika} \end{pmatrix} = S_1^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 e^{ika} \\ a_1' e^{ika} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

la cual podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix} = \tilde{S}_1^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1' \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

donde

$$\tilde{S}_1^{(n)} = e^{2ika} S_1^{(n)} \quad (\text{E.4})$$

De manera similar, para la matriz $S_2^{(n)}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_2' \end{pmatrix} = \tilde{S}_2^{(n)} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2' \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

con

$$\tilde{S}_2^{(n)} = e^{2ika} S_2^{(n)} \quad (\text{E.6})$$

Podemos juntar las ecuaciones (E.3) y (E.5) en una sola ecuación matricial como

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \\ b_2 \\ b_2' \end{pmatrix} = \tilde{S}^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1' \\ a_2 \\ a_2' \end{pmatrix}, \quad (\text{E.7})$$

donde

$$\tilde{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1^{(n)} & 0_2 \\ 0_2 & \tilde{S}_2^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (E.8)$$

Aquí, 0_2 representa la matriz de 2×2 cuyos elementos son cero. Por supuesto, $\tilde{S}_1^{(n)} = e^{2ika} S_1^{(n)}$ y $\tilde{S}_2^{(n)} = e^{2ika} S_2^{(n)}$.

En el nodo del lado izquierdo, representado por la matriz de dispersión S_I , inciden ondas cuyas amplitudes son a_I , b_1 y b_2 ; las correspondientes amplitudes de las ondas salientes son b_I , a_1 y a_2 . Por definición la matriz S_I relaciona estas amplitudes de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} b_I \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S_I \begin{pmatrix} a_I \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (E.9)$$

De la misma manera, para el nodo del lado derecho, representado por la matriz S_D , tenemos

$$\begin{pmatrix} b_D \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = S_D \begin{pmatrix} a_D \\ b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}. \quad (E.10)$$

Juntamos, también, las ecuaciones (E.9) y (E.10) en una sola ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} b_I \\ a_1 \\ a_2 \\ b_D \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_I & 0_3 \\ 0_3 & S_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_I \\ b_1 \\ b_2 \\ a_D \\ b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}, \quad (E.11)$$

donde 0_3 representa la matriz cero de 3×3 .

La Ec. (E.11) se puede escribir como

$$O \begin{pmatrix} b_I \\ b_D \\ a_1 \\ a'_1 \\ a_2 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_I & 0_3 \\ 0_3 & S_D \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \\ b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix}, \quad (E.12)$$

donde O es la matriz ortogonal de 6×6

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.13})$$

O, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} b_I \\ b_D \\ a_1 \\ a'_1 \\ a_2 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} S_{PP}^{ID} & S_{PQ}^{ID} \\ \hline S_{QP}^{ID} & S_{QQ}^{ID} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \\ b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.14})$$

donde hemos definido

$$\begin{pmatrix} S_{PP}^{ID} & S_{PQ}^{ID} \\ S_{QP}^{ID} & S_{QQ}^{ID} \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} S_I & 0_3 \\ 0_3 & S_D \end{pmatrix} O. \quad (\text{E.15})$$

Aquí, S_{PP}^{ID} es una matriz de 2×2 que representa la dispersión en la parte externa del sistema; las matrices de 2×4 y 4×2 , S_{PQ}^{ID} y S_{QP}^{ID} , representan la dispersión desde el interior al exterior, y viceversa, respectivamente; la matriz S_{QQ}^{ID} de 4×4 nos da la dispersión interna.

Ahora, escribimos la Ec. (E.14) como dos ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} b_I \\ b_D \end{pmatrix} = S_{PP}^{ID} \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix} + S_{PQ}^{ID} \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.16})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a'_1 \\ a_2 \\ a'_2 \end{pmatrix} = S_{QP}^{ID} \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix} + S_{QQ}^{ID} \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.17})$$

Multiplicamos la Ec. (E.17), por la izquierda, por la matriz de $\tilde{S}^{(n)}$ de

4×4 , con el resultado

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a'_1 \\ a_2 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QP}^{ID} \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QQ}^{ID} \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.18})$$

Haciendo uso de la Ec. (E.7), después de simplificar, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b'_1 \\ b_2 \\ b'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{I_4 - \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QP}^{ID} \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix}. \quad (\text{E.19})$$

Sustituyendo la Ec. (E.19) en (E.16) y reagrupando terminos llegamos a que

$$\begin{pmatrix} b_I \\ b_D \end{pmatrix} = \left[S_{PP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \frac{1}{I_4 - \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \tilde{\mathbf{S}}^{(n)} S_{QP}^{ID} \right] \begin{pmatrix} a_I \\ a_D \end{pmatrix}. \quad (\text{E.20})$$

Pero, si comparamos con la Ec. (E.1), vemos que la expresión dentro del paréntesis cuadrado debe ser la matriz de dispersión del sistema en la generación $n + 1$, la cual podemos escribir como

$$S^{(n+1)} = S_{PP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \frac{1}{e^{-2ika} I_4 - \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}, \quad (\text{E.21})$$

donde

$$\mathbf{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} S_1^{(n)} & 0_2 \\ 0_2 & S_2^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.22})$$

Apéndice F

El cristal del árbol de Cayley doble

Aquí, vamos a estudiar el sistema ordenado en su totalidad. Nuevamente, el sistema que vamos a tratar consiste de un árbol de Cayley doble de conectividad $K = 2$ (ver Fig. 6.1).

En el Apéndice E vimos que la relación de recurrencia para matrices S de 2×2 es

$$S^{(n+1)} = S_{PP}^{ID} + S_{PQ}^{ID} \frac{1}{e^{-2ika} I_4 - \mathbf{S}^{(n)} S_{QQ}^{ID}} \mathbf{S}^{(n)} S_{QP}^{ID}, \quad (\text{F.1})$$

donde $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$, que aparecen en $\mathbf{S}^{(n)}$, son las matrices de dispersión en la generación n [ver Ec. (E.22)]. Las matrices S_{PP}^{ID} , S_{PQ}^{ID} , S_{QP}^{ID} y S_{QQ}^{ID} se obtienen de las matrices de 3×3 , S_I y S_D , asociadas a los nodos de la izquierda y derecha, respectivamente [Apéndice E, Ec. (E.15)]. La matriz de dispersión en la generación $n + 1$ es $S^{(n+1)}$.

En el cristal las matrices de dispersión de 3×3 asociadas a los nodos son fijas e iguales entre sí. Por tanto, las fases de dichas matrices [Ec. (6.8)] podemos elegir las, en forma arbitraria, para que las matrices (6.7) estén dadas por

$$S_I = S_D = \begin{pmatrix} d & \sqrt{\epsilon} & \sqrt{\epsilon} \\ \sqrt{\epsilon} & a & b \\ \sqrt{\epsilon} & b & a \end{pmatrix}, \quad (\text{F.2})$$

donde los elementos

$$d = -\sqrt{1 - 2\epsilon} \quad (\text{F.3})$$

$$a = -\frac{1}{2}(d-1) \quad (\text{F.4})$$

$$b = -\frac{1}{2}(d+1). \quad (\text{F.5})$$

son números reales que dependen de un solo parámetro: ϵ .

Nuevamente, con esta forma para las matrices de 3×3 , las matrices S_{PQ}^{ID} , etc., adoptan una forma muy sencilla: $S_{PP}^{ID} = dI_2$, $S_{PQ}^{ID} = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ y

$$S_{QQ}^{ID} = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ bI_2 & aI_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.6})$$

De la misma manera, en el cristal, $\mathbf{S}^{(n)}$ se simplifica a

$$\mathbf{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} S^{(n)} & 0 \\ 0 & S^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (\text{F.7})$$

Para una ϵ dada, es posible realizar un cálculo numérico del coeficiente de transmisión T como función de ka , hasta una generación grande. Un ejemplo se muestra en la figura F.1 cuando la generación es $n = 10$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.25$; el intervalo que se muestra es $0 \leq ka < 2\pi$. En este cálculo se supuso que las matriz S de 2×2 en la generación $n = 0$ es la matriz de Pauli σ_x . Lo que notamos de esta figura es que existen regiones de $T = 0$, que son las *bandas prohibidas*, y regiones de $T \neq 0$, las *bandas permitidas*, con un periodo de π . Otra cosa que podemos notar es que en la región permitida el coeficiente de transmisión oscila entre el valor máximo $T = 1$ y un valor mínimo, siendo éste cada vez menor conforme nos acercamos a al orilla de la banda.

Aunque puede realizarse un cálculo numérico, es posible hacer algunos cálculos analíticos que nos permiten entender el sistema cristalino. Para ello, vamos a suponer, como en el párrafo anterior, que la matriz de dispersión en la generación cero, está dada por la matriz de Pauli σ_x ; es decir, las dos mitades del árbol doble se unen en forma perfecta.

En componentes, la relación de recurrencia se escribe como

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= \frac{d[e^{-2ika + (r^{(n)} + t^{(n)})}] [e^{-2ika + (r^{(n)} - t^{(n)})}] + e^{-2ika} (1-d)^2 r^{(n)}}{[e^{-2ika + d(r^{(n)} + t^{(n)})}] [e^{-2ika + d(r^{(n)} - t^{(n)})}]} \\ t^{(n+1)} &= \frac{2\epsilon e^{-2ika} t^{(n)}}{[e^{-2ika + d(r^{(n)} + t^{(n)})}] [e^{-2ika + d(r^{(n)} - t^{(n)})}]} \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Debido a la simetría izquierda-derecha del caso cristalino $r^{(n)} = r^{(n)}$.

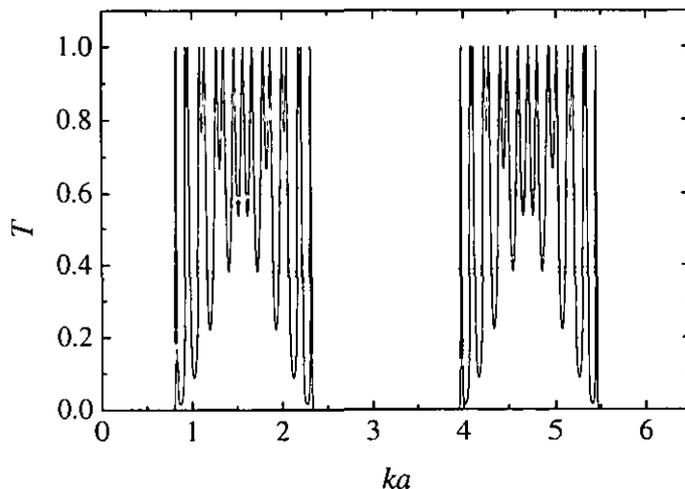


Figura F.1: Coeficiente de transmisión T como función de la “energía” ka . La generación es $n = 10$ y el parámetro de acoplamiento $\epsilon = 0.25$. Se muestran las bandas prohibidas y permitidas. En la banda permitida T oscila entre $T = 1$ y un valor mínimo.

Antes de seguir adelante es necesario analizar las primeras generaciones para tratar de entender el comportamiento del coeficiente de transmisión con la energía.

F.1 Estados ligados del árbol cristalino

Comencemos primero estudiando los estados ligados del cristal en una generación dada. La relación de recurrencia dada por las ecuaciones (F.8), nos indican cómo pasar de la generación n a la $n + 1$. Supongamos que desconectamos nuestro sistema del exterior, de manera que no hay relación entre la generación n y la $n + 1$ (esto se logra con un acoplamiento nulo en el último paso). Tenemos entonces un sistema como se muestra en la Fig. F.2. De acuerdo con las Ecs. (E.3) y (E.4), tenemos que

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b'_1 \end{pmatrix} = e^{2ika} S_1^{(n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a'_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

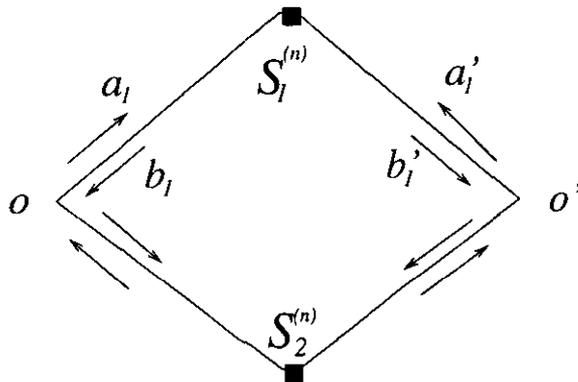


Figura F.2: El sistema se desconecta del exterior con acoplamiento es nulo en la última generación; es decir, no hay conexión entre la generación n y la $n + 1$.

Similarmente,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1' \end{pmatrix} = e^{2ika} S_2^{(n)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix}. \quad (\text{F.10})$$

Combinando estas ecuaciones tenemos el resultado

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix} = e^{4ika} S_1^{(n)} S_2^{(n)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix}. \quad (\text{F.11})$$

Pero en el cristal $S_1^{(n)} = S_2^{(n)}$, de manera que la ecuación de *eigenvalores* se escribe como

$$S^{(n)2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix} = e^{-4ika} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix}. \quad (\text{F.12})$$

Resolviendo el polinomio característico encontramos que los autovalores satisfacen la ecuación

$$e^{-2ika} = \pm [r^{(n)} \pm t^{(n)}], \quad (\text{F.13})$$

la cual habría que resolver para ka .

F.1.1 La primera generación

Un cálculo numérico para la primera generación se muestra en la Fig. F.3 para $\epsilon = 0.25$. Vemos que existen máximos, de $T = 1$, en $ka = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Analíticamente, podemos ver que estos máximos corresponden a resonancias.

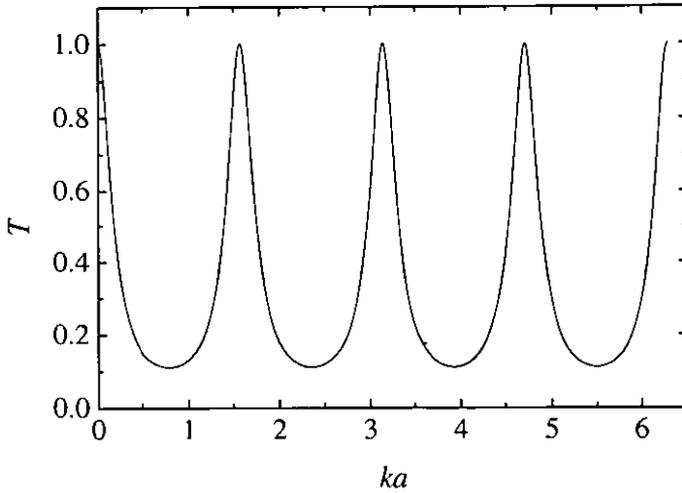


Figura F.3: El coeficiente de transmisión T como función de ka para la primera generación. Nuevamente, el acoplamiento es $\epsilon = 0.25$. Vemos que los el coeficiente de transmisión presenta máximos en $ka = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$.

De (F.8) para $n = 0$, podemos escribir explícitamente las amplitudes de reflexión y transmisión en la generación $n = 1$. Tenemos que

$$r^{(1)} = \frac{d(e^{-4ika} - 1)}{e^{-4ika} - d^2} \quad (\text{F.14})$$

$$t^{(1)} = \frac{2\epsilon e^{-2ika}}{e^{-4ika} - d^2} \quad (\text{F.15})$$

Observamos que $r^{(1)} = 0, t = \pm 1$ para $e^{-4ika} = 1$. Es decir, vemos que los máximos están en los valores de ka antes mencionados.

Por otro lado, si tomamos en cuenta la ecuación de autovalores (F.13) para $n = 0$, nos damos cuenta que los estados ligados del sistema son los que satisfacen que $e^{-4ika} = 1$. Por lo tanto, los picos que aparecen en el coeficiente de transmisión corresponden a los estados ligados del sistema; es decir, son resonancias.

Pasemos ahora a la segunda generación que es menos obvia.

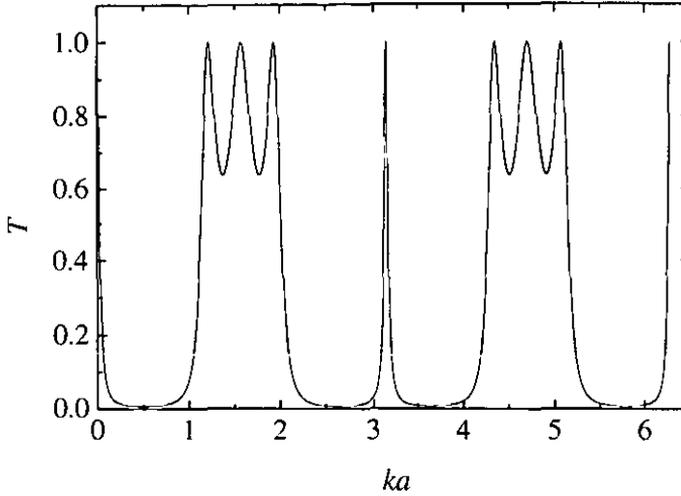


Figura F.4: Gráfica del coeficiente de transmisión T como función de ka para la generación 2. Se observan cuatro picos en el intervalo $0 \leq ka < \pi$.

F.1.2 Una generación menos obvia

El resultado del cálculo numérico para la generación $n = 2$ se muestra en la Fig. F.4, donde se grafica el coeficiente de transmisión T como función de ka (el valor del acoplamiento es $\epsilon = 0.25$). Se observan cuatro picos en el intervalo $0 \leq ka < \pi$.

En este caso la ecuación de autovalores (F.13) se escribe como

$$e^{-2ika} = \pm [r^{(1)} \pm t^{(1)}]. \quad (\text{F.16})$$

Sustituyendo $r^{(1)}$, $t^{(1)}$ de (F.14) y (F.15) encontramos que la ecuación anterior se escribe como

$$e^{-2ika} = \pm \left(\frac{de^{-2ika} \pm 1}{e^{-2ika} \pm d} \right). \quad (\text{F.17})$$

Al resolver para ka obtenemos ocho posibilidades:

$$e^{-2ika} = \pm 1 \quad (\text{F.18})$$

$$e^{-2ika} = d \pm i\sqrt{1-d^2} \quad (\text{F.19})$$

$$e^{-2ika} = -d \pm i\sqrt{1-d^2}. \quad (\text{F.20})$$

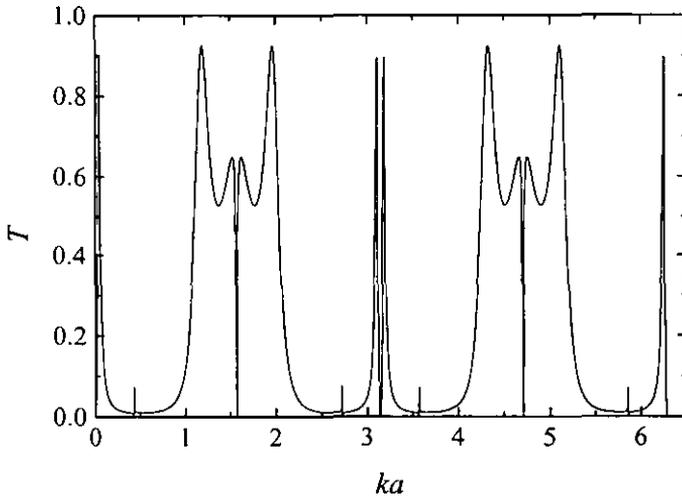


Figura F.5: Con un poco de desorden en el acoplamiento, distribuido uniformemente en el intervalo $(0.15, 0.35)$, es posible romper la degeneración que aparece en el caso del cristal. Asimismo, hace posible detectar los picos que por falta de resolución no se aprecian en el cristal.

Las primeras dos posibilidades son doblemente degeneradas; por lo tanto, debemos tener ocho picos en lugar de cuatro en el rango $0 \leq ka < \pi$. Al sustituir el valor de $\epsilon = 0.25$ encontramos la posición de esos picos en: $ka = 0, \frac{\pi}{2}$ (ambos doblemente degenerados), 0.39, 1.18, 1.96, 2.75. Por falta de resolución, las resonancias en $ka = 0.39, 2.75$, no se aprecian en la Fig F.4. Sin embargo, si ponemos un poco de desorden en el sistema, es decir, hacemos variar el acoplamiento en un intervalo pequeño de valores, dichas resonancias se hacen notables. La Fig. F.5 nos muestra todos los picos.

F.1.3 Conductancia en una generación arbitraria

En principio, podríamos realizar el análisis anterior para cualquier generación, lo cual no nos interesa. Antes bien veamos otra cuestión que es necesario recalcar.

Sustituyamos el valor de ka para el cual se satisface (F.13) en la relación de recurrencia (F.8). Después de algunas manipulaciones algebraicas obten-

emos lo siguiente:

$$T^{(n+1)} = \frac{(1 \mp d)^2 T^{(n)}}{(1 \pm d)^2 \mp 4dT^{(n)}}. \quad (\text{F.21})$$

Podemos notar claramente algunas cosas. Es obvio que la conductancia adimensional T nunca es cero en los autovalores; además si en uno de los autovalores $T = 1$, entonces la conductancia vale la unidad para cualquier generación n .

F.2 Las bandas de energía del cristal

Si observamos más detenidamente la relación de recurrencia (F.8), ésta nos sugiere un cambio de variables: $s_j = r \pm t$ ($j = 1, 2$ para la suma y la diferencia, respectivamente). Las nuevas variables son números complejos de módulo uno; es decir, son fases. El par de ecuaciones (F.8) quedan como

$$s_j^{(n+1)} = \frac{de^{-2ika} + s_j^{(n)}}{e^{-2ika} + ds_j^{(n)}}. \quad (\text{F.22})$$

En realidad tenemos un mapeo para la cantidad $s_j = e^{i\theta_j}$. Es posible obtener un diagrama de bifurcación para la fase θ_j para ver las regiones donde el comportamiento es "caótico" y las ventanas de periodicidad si las hubiera [55]. El diagrama de bifurcación para la fase θ_1 se muestra en la Fig. F.6 (uno similar se obtiene para θ_2), para un valor particular del acoplamiento: $\epsilon = 0.25$. Para este diagrama se tomaron las últimas 50 iteraciones de un total de 1000. Como podemos ver, existen dos regiones: la primera muestra los puntos fijos, mientras la segunda muestra una región "caótica".

— Analíticamente podemos explicar las dos regiones y de hecho podemos calcular el valor de ka_c que las separa, y por ende el ancho de la banda permitida.

La primera región nos dice que para n muy grande las fases $s_j^{(n)}$ tienden a un valor fijo, en el límite termodinámico, digamos s_j . Entonces las ecuaciones (F.22) se pueden resolver analíticamente dando como resultado

$$s_j^{(\pm)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-2\epsilon}} \left[-\left(e^{-2ika} - 1\right) \pm \sqrt{\left(e^{-2ika} + 1\right)^2 - 8\epsilon e^{-2ika}} \right]. \quad (\text{F.23})$$

La amplitud de transmisión es la semidiferencia $t = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$, que es cero si tomamos las soluciones \pm con \pm , en ese orden. En principio, este resultado vale para toda ka .

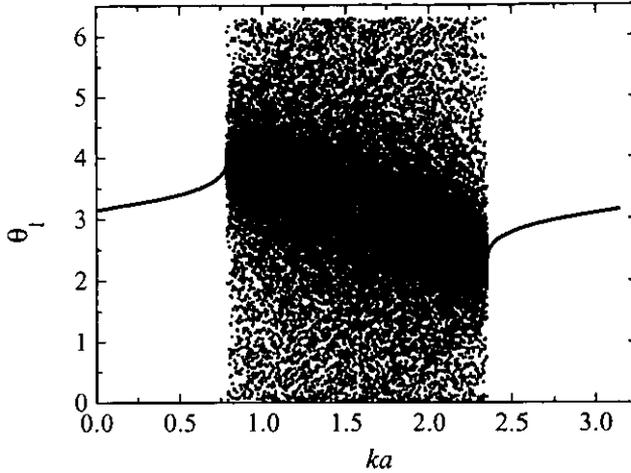


Figura F.6: Diagrama de bifurcación para la fase θ_1 de $s: s = e^{i\theta}$. En la región prohibida, θ_1 no varía con la generación. Se tomaron las últimas 50 iteraciones de un total de 1000, para cada valor de ka . Un diagrama similar se obtiene para θ_2 .

El coeficiente de transmisión no trivial se obtiene cambiando el orden de los signos en las soluciones:

$$t = \frac{1}{2} \left[s_1^{(\pm)} - s_2^{(\mp)} \right] = \mp \frac{1}{\sqrt{1-2\epsilon}} \sqrt{(e^{-2ika} + 1)^2 - 8\epsilon e^{-2ika}}. \quad (\text{F.24})$$

Por lo tanto el coeficiente de transmisión es

$$T = \frac{1}{(1-2\epsilon)} \left| (e^{-2ika} + 1)^2 - 8\epsilon e^{-2ika} \right|. \quad (\text{F.25})$$

Podemos notar que $T \geq 0$, lo cual nos da la banda permitida. Resolviendo la igualdad obtenemos los valores de ka justo en las dos orillas de la banda:

$$e^{-ika_c} = -\sqrt{2\epsilon} \pm i\sqrt{1-2\epsilon}, \quad (\text{F.26})$$

de donde obtenemos

$$ka_c = \pm \arctan \sqrt{\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon}}. \quad (\text{F.27})$$

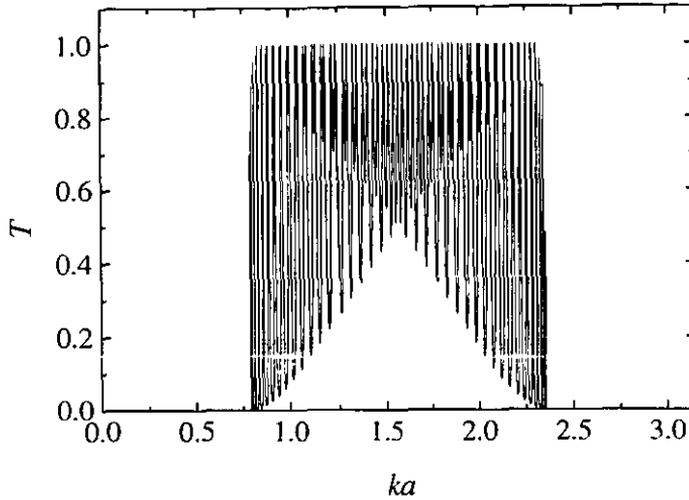


Figura F.7: Conductancia adimensional $g = T$ para el cristal del árbol de Cayley doble, de conectividad $K = 2$, en la generación cuarenta $n = 40$. Se observan claramente las bandas prohibidas y permitidas en el intervalo $0 < ka < \pi$.

El ancho de banda está dado por

$$\Delta ka = 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon}}. \quad (\text{F.28})$$

En la figura F.7 se muestra el coeficiente de transmisión T de la generación 40, para el caso particular de $\epsilon = 0.25$, donde se ven claramente tanto la región prohibida como la permitida en el intervalo $0 < ka < \pi$. Los valores de ka en las orillas de la banda son $ka_c = \frac{\pi}{4}$ y $ka_c' = \frac{3\pi}{4}$; el ancho de banda es $\Delta ka = \frac{\pi}{2}$.

Por supuesto, el resultado anterior es válido para cualquier ϵ ; sin embargo, cabe hacer notar que el caso de acoplamiento nulo es un caso trivial que no ha de tratarse de esta forma. Un caso interesante es el de acoplamiento máximo donde la banda completa es permitida.

Para finalizar el estudio del cristal de una malla de Bethe doble hago mención que la estructura cristalina que hemos estudiado ya ha sido tratada por otros autores, sin llegar a resultados analíticos, tal es el caso de la Ref. [54], donde sólo considera esta estructura hasta la sexta generación. Podemos

comparar con la figura 7 de dicha referencia y ver un total acuerdo con ese resultado.

Apéndice G

Artículos publicados

The invariant measure for scattering matrices with block symmetries

Víctor A Gopar†, Moisés Martínez†, Pier A Mello‡ and Harold U Baranger‡

† Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 01000 México DF, México

‡ AT&T Bell Laboratories, 600 Mountain Avenue, LD-230, Murray Hill, NJ 07974-0636, USA

Received 31 July 1995

Abstract. We find the invariant measure for two new types of S matrices relevant for chaotic scattering from a cavity in a waveguide. The S matrices considered can be written as a 2×2 matrix of blocks, each of rank N , in which the two diagonal blocks are identical and the two off-diagonal blocks are identical. The S matrices are unitary; in addition, they may be symmetric because of time-reversal symmetry. The invariant measure, with and without the condition of symmetry, is given explicitly in terms of the invariant measures for the well known circular unitary and orthogonal ensembles. Some implications are drawn for the resulting statistical distribution of the transmission coefficient through a chaotic cavity.

1. Introduction

A wave-scattering problem can, very generally, be described by its scattering matrix S (Newton 1966). In a stationary problem, S relates the outgoing-wave to the ingoing-wave amplitudes. The condition of flux conservation implies unitarity of S ,

$$SS^\dagger = I. \quad (1)$$

If, in addition, the problem is invariant under the operation of time reversal, S is symmetric,

$$S = S^T. \quad (2)$$

If one desires a statistical description of the scattering, the problem of assigning 'equal *a priori* probabilities' in the space of scattering matrices S (Hua 1963, Dyson 1962) may be relevant, and, in fact, has been shown to be important for the description of chaotic scattering (Mello *et al* 1985, Blitmel and Smitansky 1988, 1989, 1990, Lewenkopf and Weidenmüller 1991, Jalabert *et al* 1994, Baranger and Mello 1994, 1995). The assignment is done through the notion of the *invariant measure*: the measure $d\mu^{(\beta)}(S)$ which is invariant under the symmetry operations for the universality class, labelled by β , in question. Explicitly, $d\mu^{(\beta)}(S) = d\mu^{(\beta)}(U_0 S V_0)$ where U_0, V_0 are arbitrary fixed unitary matrices in the case of unitary S matrices (the circular unitary ensemble ($\beta = 2$)), with the restriction $V_0 = U_0^T$ in the case of unitary symmetric S matrices (the circular orthogonal ensemble ($\beta = 1$)) (Hua 1963, Dyson 1962, for a review see Mehta 1991).

As an example, consider single-electron scattering by a ballistic quantum dot connected to the outside by two leads, which play the role of waveguides, each with N transverse modes or channels (for a review see Beenakker and van Houten 1991). The S matrix is then $2N$ -dimensional and has the structure

$$S = \begin{bmatrix} r & r' \\ t & t' \end{bmatrix} \quad (3)$$

882 *V A Gopal et al*

where r, r' are the $N \times N$ reflection matrices (for incidence from either lead) and t, t' the corresponding transmission matrices. Of great physical relevance is the total transmission coefficient,

$$T = \text{tr}(tt'^{\dagger}) \quad (4)$$

which is proportional to the conductance G of the cavity, $G = (2e^2/h)T$. The invariant measure for the S matrix implies a probability distribution $w(T)$ for T which has been calculated in a number of cases by Jalabert *et al* (1994) and Baranger and Mello (1994).

In the present article we study S matrices of the form (3), with the restriction $r = r', t = t'$; i.e.

$$S = \begin{bmatrix} r & t \\ t & r \end{bmatrix}. \quad (5)$$

S matrices with this structure are physically relevant because it is possible, in principle, to study electron transport through chaotic cavities with point spatial symmetries. Consider a two-dimensional cavity connected to two parallel waveguides. With the condition of unitarity alone, the S matrices (5) are appropriate for a system with inversion symmetry with respect to a point but no time-reversal symmetry (Baranger and Mello 1996). With the additional condition (2), equation (5) describes a system which is time-reversal invariant and has either inversion symmetry or symmetry with respect to a line perpendicular to the waveguides (Baranger and Mello 1996).

The invariant measure for matrices of the form (5), with and without the condition of symmetry (2), is obtained in section 2. A number of important expectation values are obtained, for an arbitrary number of channels N , in section 3. The probability density $w(T)$ arising from the invariant measure is obtained in section 4.1 for $N = 1$; $w(T)$ for $N = 2$ is found in section 4.2 for the S matrices (5) with the condition of symmetry (2) and in section 4.3 without the symmetry condition.

2. The invariant measure for S matrices with $r = r', t = t'$

All of the $2N$ -dimensional S matrices with the structure (5) can be simultaneously brought to block-diagonal form by using the rotation matrix

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1_N & 1_N \\ -1_N & 1_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

where 1_N is the N -dimensional unit matrix:

$$S' = R_0 S R_0^{\dagger} = \begin{bmatrix} s^{(+)} & 0 \\ 0 & s^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Since S is unitary, so are S' and the two $N \times N$ matrices $s^{(\pm)} = r \pm t$. Clearly, two arbitrary unitary matrices $s^{(\pm)}$ can generate the most general unitary S matrix with the structure (5) by taking

$$r = \frac{1}{2}[s^{(+)} + s^{(-)}] \quad t = \frac{1}{2}[s^{(+)} - s^{(-)}]. \quad (8)$$

If, in addition, S is symmetric, so are r, t and $s^{(\pm)}$. The total number of independent parameters of unitary matrices with the structure (5) is thus $2N^2$ without and $N(N+1)$ with the symmetry requirement.

The most general automorphism of unitary matrices with the structure (5) is generated by the transformation

$$s^{(\pm)} = u_0^{(\pm)} s^{(\pm)} v_0^{(\pm)} \quad (9)$$

Invariant measure for scattering matrices

883

where $u_0^{(\pm)}$, $v_0^{(\pm)}$ are arbitrary but fixed $N \times N$ unitary matrices. Correspondingly, the original S is transformed into

$$\tilde{S} = U_0 S V_0 \tag{10}$$

with the $2N \times 2N$ unitary matrix U_0 given by

$$U_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha = \frac{1}{2}[u_0^{(+)} + u_0^{(-)}] \quad \beta = \frac{1}{2}[u_0^{(+)} - u_0^{(-)}] \tag{11}$$

and a similar expression holds for V_0 with $v_0^{(\pm)}$ replacing $u_0^{(\pm)}$. In this automorphism, there is the restriction $v_0^{(\pm)} = [u_0^{(\pm)}]^T$ if the S matrices are also symmetric.

Denoting by $d\hat{\mu}^{(\beta)}(S)$ the invariant measure for S matrices of the form (5), with (without) the condition of symmetry for $\beta = 1$ (2), we thus have

$$d\hat{\mu}^{(\beta)}(S) = d\mu^{(\beta)}(s^{(+)}) d\mu^{(\beta)}(s^{(-)}). \tag{12}$$

3. Expectation values

A number of expectation values have been calculated for the circular orthogonal ensemble by Mello and Seligman (1980) and for the circular unitary ensemble by Mello (1990). These results will be employed here to evaluate various expectation values of physical interest for the invariant measure (12).

We use the notation

$$Q_{\epsilon_1 \gamma_1, \dots, \epsilon_m \gamma_m}^{\alpha_1 \alpha_1, \dots, \alpha_m \alpha_m}(\beta) \equiv \langle [j_{\epsilon_1 \gamma_1}, \dots, j_{\epsilon_m \gamma_m}] [j_{\alpha_1 \alpha_1}, \dots, j_{\alpha_m \alpha_m}]^* \rangle^{(\beta)} \tag{13}$$

to indicate an expectation value for the circular ensemble β for N -dimensional unitary s matrices. One can show that $Q = 0$ unless $m = l$. A simple application of this result is the expectation value

$$\left. \begin{matrix} \langle r_{ab} \rangle^{(\beta)} \\ \langle t_{ab} \rangle^{(\beta)} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} [\langle s_{ab}^{(+)} \rangle^{(\beta)} \pm \langle s_{ab}^{(-)} \rangle^{(\beta)}] = 0 \tag{14}$$

for $a, b = 1, \dots, N$.

Using the statistical independence of $s^{(+)}$ and $s^{(-)}$, equation (12), one concludes immediately that

$$\langle r_{ab} r_{cd}^* \rangle^{(\beta)} = \langle t_{ab} t_{cd}^* \rangle^{(\beta)} = \frac{1}{2} Q_{ab}^{cd}(\beta) \quad \langle r_{ab} t_{cd}^* \rangle^{(\beta)} = 0. \tag{15}$$

In particular, the average of individual reflection and transmission coefficients is given by

$$\langle |r_{ab}|^2 \rangle^{(\beta)} = \langle |t_{ab}|^2 \rangle^{(\beta)} = \frac{1}{2} Q_{ab}^{ab}(\beta) \tag{16}$$

and the average of the total transmission coefficient of equation (4) is

$$\langle T \rangle^{(\beta)} = \frac{1}{2} \sum_{ab} Q_{ab}^{ab}(\beta). \tag{17}$$

The cross second moment of individual transmission coefficients is

$$\langle |r_{ab}|^2 |r_{cd}|^2 \rangle^{(\beta)} = \frac{1}{3} \{ Q_{ab, cd}^{ab, cd}(\beta) + Q_{ab}^{ab}(\beta) Q_{cd}^{cd}(\beta) + [Q_{ab}^{cd}(\beta)]^2 \}. \tag{18}$$

Summing over indices, we find $\langle T^2 \rangle$ and obtain the variance of T :

$$\text{var } T^{(\beta)} \equiv \langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle^{(\beta)} = \frac{1}{3} \sum_{abcd} [Q_{ab}^{cd}(\beta)]^2. \tag{19}$$

884 *V A Gopal et al*

In order to calculate definite values for $\langle T \rangle$ and $\text{var } T$, recall that for $\beta = 1$, Mello and Seligman (1980) find

$$Q_{\sigma\tau}^{\text{sc}}(\beta = 1) = \frac{\delta_c^{\text{sc}} \delta_\tau^{\text{sc}} + \delta_c^{\text{sc}} \delta_\tau^{\text{sc}}}{N + 1} \quad (20)$$

while for $\beta = 2$, Mello (1990) shows

$$Q_{\sigma\tau}^{\text{sc}}(\beta = 2) = \frac{\delta_c^{\text{sc}} \delta_\tau^{\text{sc}}}{N}. \quad (21)$$

Using these expressions in (17) and (19), we obtain

$$\langle T \rangle^{(\beta)} = \frac{N}{2} \quad (22a)$$

$$\text{var } T^{(\beta=1)} = \frac{N}{4(N + 1)} \quad (22b)$$

$$\text{var } T^{(\beta=2)} = \frac{1}{5}. \quad (22c)$$

The result for $\langle T \rangle$ is expected since reflection and transmission are statistically equivalent, equations (8) and (12). As $N \rightarrow \infty$, $\text{var } T$ tends to the universal result $\frac{1}{4}$ for $\beta = 1$, while for $\beta = 2$, $\text{var } T$ is completely independent of N .

4. The probability distribution of T

4.1. The case $N = 1$

Writing

$$J^{(\pm)} = \exp[i\theta^{(\pm)}] \quad (23)$$

we have from (8)

$$T = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)})] \quad (24)$$

for both $\beta = 1$ and $\beta = 2$. The probability distribution $w(T)$ of T is an average over the angles and can be written as

$$w(T) = \left\langle \delta \left[T - \frac{1 - \cos(\theta^{(+)} - \theta^{(-)})}{2} \right] \right\rangle_{\theta^{+}, \theta^{-}}. \quad (25)$$

Equation (12) implies that $\theta^{(+)}$ and $\theta^{(-)}$ are statistically independent and uniformly distributed in $(0, 2\pi)$, yielding

$$w(T) = \frac{1}{\pi \sqrt{T(1-T)}}. \quad (26)$$

4.2. The case $N = 2, \beta = 1$

The most general 2×2 unitary symmetric matrices $J^{(\pm)}$ can be written as

$$J^{(\pm)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\rho^{\pm}} e^{2i\alpha^{\pm}} & \sqrt{r^{\pm}} e^{i(\alpha^{\pm} + \gamma^{\pm})} \\ \sqrt{r^{\pm}} e^{i(\alpha^{\pm} + \gamma^{\pm})} & \sqrt{\rho^{\pm}} e^{2i\gamma^{\pm}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

where α^{\pm} and γ^{\pm} are defined in $(0, 2\pi)$, $0 \leq \rho^{\pm} \leq 1$, $0 \leq r^{\pm} \leq 1$, and $\rho^{\pm} + r^{\pm} = 1$. The invariant measure for $J^{(\pm)}$ is (Jalabert *et al* 1994, Baanger and Mello 1994)

$$d\mu^{(1)}(J^{(\pm)}) \propto \frac{dr^{\pm}}{\sqrt{r^{\pm}}} d\alpha^{\pm} d\gamma^{\pm}. \quad (28)$$

In terms of these variables, the probability density $w(T')$ for $T' = 1 - T \in (-1, 1)$ is

$$w(T') \propto \int \frac{d\tau^+ d\tau^-}{\sqrt{\tau^+ \tau^-}} d\alpha^+ d\gamma^+ d\alpha^- d\gamma^- \delta \left\{ T' - \frac{1}{2} \sqrt{\rho^+ \rho^-} [\cos 2(\alpha^+ - \alpha^-) + \cos 2(\gamma^+ - \gamma^-)] - \sqrt{\tau^+ \tau^-} \cos(\alpha^+ - \alpha^- + \gamma^+ - \gamma^-) \right\}. \quad (29)$$

The integrals over α^- and γ^- are trivial. Defining $2\alpha^+ = \phi + \psi$ and $2\gamma^+ = \phi - \psi$, we have

$$w(T') \propto \int \delta \left[T' - \left(\sqrt{\tau^+ \tau^-} + \sqrt{\rho^+ \rho^-} \cos \psi \right) \cos \phi \right] d\sqrt{\tau^+} d\sqrt{\tau^-} d\phi d\psi. \quad (30)$$

The integral over ϕ gives

$$w(T') \propto \int_0^1 dz \int_0^1 dz' \int_0^{2\pi} d\psi \frac{u(X^2 - T'^2)}{\sqrt{X^2 - T'^2}} \quad (31)$$

where $u(X^2 - T'^2)$ is a step function, $z = \sqrt{\tau^+}$, $z' = \sqrt{\tau^-}$, and

$$X = zz' + \sqrt{(1-z^2)(1-z'^2)} \cos \psi. \quad (32)$$

Notice that changing ψ to $\psi + \pi$, which does not alter the integral in (30), is equivalent to changing zz' to $-zz'$ in X^2 . In (31) we can thus extend the range of integration of the variables z and z' to the interval $(-1, 1)$. Furthermore, we can write, in (31), $\psi = \varphi - \varphi'$ and integrate φ and φ' separately from 0 to 2π without altering the answer (up to a constant), yielding

$$w(T') \propto \int_{-1}^1 dz \int_{-1}^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi d\varphi' \frac{u(X^2 - T'^2)}{\sqrt{X^2 - T'^2}}. \quad (33)$$

We now introduce the three-dimensional unit vector \hat{u} with components $x = \sin \theta \cos \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$ and $z = \cos \theta$, and similarly the unit vector \hat{u}' defined with primed variables. The quantity X is the cosine of the angle ξ between \hat{u} and \hat{u}' , $X = \cos \xi(\hat{u}, \hat{u}')$. Thus (33) can be written as an integral over two solid angles,

$$w(T') \propto \iint \frac{u(\cos^2 \xi(\hat{u}, \hat{u}') - T'^2)}{\sqrt{\cos^2 \xi(\hat{u}, \hat{u}') - T'^2}} d\Omega d\Omega'. \quad (34)$$

Since the integrand depends only upon the relative angle between the two unit vectors \hat{u} and \hat{u}' , we can fix \hat{u}' along the z -axis and integrate over Ω . In this case $\xi = \theta$ and

$$w(T') \propto \int_{T'}^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2 - T'^2}}. \quad (35)$$

The final result for $w(T)$, properly normalized, is

$$w(T) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{T(2-T)}}{|1-T|}. \quad (36)$$

From this distribution one finds explicitly $\langle T \rangle = 1$ and $\text{var } T = \frac{1}{2}$, consistent with the results of section 3 for $N = 2$.

886 *V A Gopal et al*4.3. The case $N = 2, \beta = 2$ The most general 2×2 unitary matrices $J^{(\pm)}$ can be written as

$$J^{(\pm)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\rho^\pm} e^{i(\alpha^\pm + \dot{\alpha}^\pm)} & \sqrt{\tau^\pm} e^{i(\alpha^\pm + \dot{\gamma}^\pm)} \\ \sqrt{\tau^\pm} e^{i(\gamma^\pm + \dot{\alpha}^\pm)} & \sqrt{\rho^\pm} e^{i(\gamma^\pm + \dot{\gamma}^\pm)} \end{bmatrix} \quad (37)$$

where $\alpha^\pm, \dot{\alpha}^\pm, \gamma^\pm, \dot{\gamma}^\pm$ are defined in $(0, 2\pi)$, $0 \leq \rho^\pm \leq 1, 0 \leq \tau^\pm \leq 1$, and $\rho^\pm + \tau^\pm = 1$. Note that if one takes $\dot{\alpha} = \alpha$ and $\dot{\gamma} = \gamma$ then equation (37) reduces to the $\beta = 1$ case (27). The invariant measure for $J^{(\pm)}$ is (Jalabert *et al* 1994, Bazantger and Mello 1994)

$$d\mu^{(2)}(J^{(\pm)}) \propto d\tau^\pm d\alpha^\pm d\dot{\alpha}^\pm d\gamma^\pm d\dot{\gamma}^\pm. \quad (38)$$

In terms of these variables, the probability density $w(T')$ for $T' = 1 - T \in (-1, 1)$ is

$$w(T') \propto \int d\tau^+ d\tau^- d\alpha^+ d\dot{\alpha}^+ d\gamma^+ d\dot{\gamma}^+ d\alpha^- d\dot{\alpha}^- d\gamma^- d\dot{\gamma}^- \\ \times \delta \left[T' - \frac{1}{2} \sqrt{\rho^+ \rho^-} [\cos(\alpha^+ - \alpha^- + \dot{\alpha}^+ - \dot{\alpha}^-) + \cos(\gamma^+ - \gamma^- + \dot{\gamma}^+ - \dot{\gamma}^-)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sqrt{\tau^+ \tau^-} [\cos(\alpha^+ - \alpha^- + \gamma^+ - \gamma^-) + \cos(\gamma^+ - \gamma^- + \dot{\alpha}^+ - \dot{\alpha}^-)] \right]. \quad (39)$$

The integrals over $\alpha^-, \dot{\alpha}^-, \gamma^-, \dot{\gamma}^-$ are trivial. Defining

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}(\alpha^+ + \dot{\gamma}^+ - \gamma^+ - \dot{\alpha}^+) \\ \psi &= \frac{1}{2}(\alpha^+ + \dot{\alpha}^+ - \gamma^+ - \dot{\gamma}^+) \\ \phi &= \frac{1}{2}(\alpha^+ + \dot{\alpha}^+ + \gamma^+ + \dot{\gamma}^+) \end{aligned} \quad (40)$$

we can write

$$w(T') \propto \int \delta \left[T' - \left(\sqrt{\tau^+ \tau^-} \cos \omega + \sqrt{\rho^+ \rho^-} \cos \psi \right) \cos \phi \right] d\tau^+ d\tau^- d\omega d\psi d\phi. \quad (41)$$

The integral over ϕ gives

$$w(T') \propto \int d\tau^+ d\tau^- d\psi d\omega \frac{u(Y^2 - T'^2)}{\sqrt{Y^2 - T'^2}} \quad (42)$$

where $u(Y^2 - T'^2)$ is a step function, and

$$Y = \sqrt{\tau^+ \tau^-} \cos \omega + \sqrt{\rho^+ \rho^-} \cos \psi. \quad (43)$$

We can write, in (42), $\omega = \varphi_1 - \varphi'_1, \psi = \varphi_2 - \varphi'_2$ and integrate over $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2, \varphi'_2$ from 0 to 2π without altering the answer. We also write $\tau^+ = \cos^2 \theta, \tau^- = \cos^2 \theta'$ and get

$$w(T') \propto \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \iiint \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi'_1 d\varphi_2 d\varphi'_2 \frac{u(Y^2 - T'^2)}{\sqrt{Y^2 - T'^2}}. \quad (44)$$

 Y can now be written as

$$Y = \cos \theta \cos \theta' \cos(\varphi_1 - \varphi'_1) + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi_2 - \varphi'_2). \quad (45)$$

If we introduce the complex unit vector u

$$u = \begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\varphi_1} \\ \sin \theta e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

with $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi_{1,2} \leq 2\pi$, and, similarly, the complex unit vector u' , defined with primed variables, we can express Y in terms of scalar products as

$$Y = \frac{1}{2}(u^\dagger u' + u'^\dagger u). \quad (47)$$

Invariant measure for scattering matrices

887

These scalar products are invariant with respect to unitary transformations. We also need to define a 'solid angle', invariant under the same operation. We first introduce the 'arc element'

$$(ds)^2 = du^{\dagger} du = (d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\varphi_1)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi_2)^2 \quad (48)$$

from which we extract a metric tensor g and construct the solid angle $d\Omega$ as

$$d\Omega = |\det g|^{1/2} d\theta d\varphi_1 d\varphi_2 = \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (49)$$

Equation (44) for $w(T')$ now becomes

$$w(T') \propto \int \frac{u[\frac{1}{4}(v^{\dagger}v' + v'^{\dagger}v)^2 - T'^2]}{[\frac{1}{4}(v^{\dagger}v' + v'^{\dagger}v)^2 - T'^2]^{1/2}} d\Omega d\Omega'. \quad (50)$$

Just as in the case of the previous subsection we now notice that, if we fix v' in the integrand of equation (50) and integrate over Ω , we get a result independent of v' . The reason is that the scalar products in equation (50) are invariant under unitary transformations and we can always transform any given v' into a fixed vector: we choose this fixed vector as

$$v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

which implies $\theta' = \varphi_1' = 0$. We thus have

$$w(T') \propto \int \frac{u(\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - T'^2)}{(\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - T'^2)^{1/2}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \quad (52)$$

where we have denoted φ_1 by φ . Doing the integral over θ we find

$$w(T') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - T'^2}}{\cos^2 \varphi} u(\cos^2 \varphi - T'^2) d\varphi. \quad (53)$$

The normalization constant in (53) was calculated by integrating over T' first and then over φ , since in both steps one finds elementary integrals. Performing the integrations in this order one can also verify that $\langle T \rangle = 1$ and $\text{var } T = \frac{1}{3}$, in agreement with the results of section 3 for $N = 2$.

The integral over φ in (53) leads to a hypergeometric function. First, doing the change of variables $\sin \varphi = \sqrt{1 - T'^2} \sin \theta$, we can write

$$w(T') = \frac{4}{\pi^2} (1 - T'^2) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{[1 - (1 - T'^2) \sin^2 \theta]^{3/2}}. \quad (54)$$

Finally, we find (Gradshteyn and Ryzhik 1965, equation (3.681.1))

$$w(T) = \frac{1}{\pi} T(2 - T) F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; T(2 - T)\right). \quad (55)$$

As an algebraic check, one can verify that $\int w(T) dT = 1$ (Gradshteyn and Ryzhik 1965, equation (7.512.4)).

Acknowledgment

The authors are indebted to T H Seligman for a number of observations that led them to equations (6)–(8).

888 V A Gopar et al

References

- Baranger H U and Mello P A 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 142
—1995 *Phys. Rev. B* **51** 4703
—1996 unpublished
- Beenakker C W J and van Houten H 1991 *Solid State Physics* vol 44, ed H Ehrenreich and D Tumbull (New York: Academic) pp 1–228
- Blümel R and Smilansky U 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 477
—1989 *Physica D* **36** 111
—1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 241
- Dyson F J 1962 *J. Math. Phys.* **3** 140
- Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1965 *Table of Integrals, Series, and Products* (New York: Academic)
- Hua L K 1963 *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex variables in the Classical Domain* (Providence, RI: AMS)
- Jalabert R A, Fichard J-L and Beenakker C W J 1994 *Europhys. Lett.* **27** 255
- Lewenkopf C H and Weidenmüller H A 1991 *Ann. Phys., NY* **212** 53
- Mehta M L 1991 *Random Matrices* (New York: Academic)
- Mello P A and Seligman T H 1980 *Nucl. Phys. A* **344** 489
- Mello P A, Pereyra P and Seligman T H 1985 *Ann. Phys., NY* **161** 254
- Mello P A 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 4061
- Newton R G 1966 *Scattering Theory of Waves and Particles* (New York: McGraw-Hill)

PHYSICAL REVIEW E, VOLUME 63, 016205

Electronic transport through ballistic chaotic cavities: Reflection symmetry, direct processes, and symmetry breaking

Moisés Martínez*

Area de Física Teórica y Materia Condensada, UAM-Acapulco, 02200 México Distrito Federal, México

Pier A. Mello

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 01000 México Distrito Federal, México

(Received 23 June 2000; published 18 December 2000)

We extend previous studies on transport through ballistic chaotic cavities with spatial left-right (LR) reflection symmetry to include the presence of direct processes. We first analyze fully LR-symmetric systems in the presence of direct processes and compare the distribution $w(T)$ of the transmission coefficient T with that for an asymmetric cavity with the same "optical" S matrix. We then study the problem of "external mixing" of the symmetry caused by an asymmetric coupling of the cavity to the outside. We first consider the case where symmetry breaking arises because two symmetrically positioned waveguides are coupled to the cavity by means of asymmetric tunnel barriers. Although this system is asymmetric with respect to the LR operation, there is an effect of the symmetry of the cavity it was constructed from. Second, we break LR symmetry in the absence of direct processes by asymmetrically positioning the two waveguides and compare the results with those for the completely asymmetric case.

DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016205

PACS number(s): 05.45.-a, 73.23.Ad

I. INTRODUCTION

The problem of chaotic wave scattering is of great interest in various branches of physics, such as optics, nuclear, mesoscopic, and microwave physics. The study of quantum-mechanical scattering problems whose classical dynamics is chaotic has been further motivated by recent experiments on quantum-electronic transport in microstructures consisting of a cavity connected to leads [1]. We know that symmetries have very interesting effects on the properties of the electric conductance in mesoscopic systems: time-reversal and spin-rotational symmetries [2,3], as well as spatial-reflection symmetries [4,5] have been studied in the literature.

The problem of electronic transport through asymmetric (AS) chaotic cavities is addressed in detail in Ref. [6] in an independent-electron approximation. In that reference, the possibility of direct processes due to the presence of short paths is accounted for by specifying the average, or optical, S matrix $\langle S \rangle$ within an information-theoretic approach. The statistical distribution for the S matrix is known as Poisson's kernel, in which $\langle S \rangle$ is a parameter. When $\langle S \rangle = 0$, i.e., in the absence of direct processes, the statistical distribution reduces to the invariant measure for the appropriate universality class.

Microstructures with reflection symmetry and a chaotic classical dynamics are studied in Refs. [4] and [5]. The analysis is performed in the absence of direct processes, so that the statistical distribution of the S matrix is the invariant measure for the universality class in question and the relevant spatial symmetry: the latter is a symmetry of the full system under consideration, i.e., the cavity plus the two leads

that connect the cavity to the outside.

One purpose of the present paper is to extend the study of Refs. [4] and [5] to include the presence of direct processes. We consider two-dimensional systems with spinless particles and concentrate on left-right (LR) symmetry only, i.e., symmetry under reflection through an axis perpendicular to the current. We also restrict the analysis to time-reversal-invariant (TRI) problems. One particular way of inducing direct reflections is by adding potential barriers between the *symmetrically positioned waveguides* and the cavity. If the two barriers are equal, the system is fully LR symmetric; if the barriers are different, we have a LR-symmetric cavity coupled *asymmetrically* to the outside: using the jargon of nuclear physicists [7], we shall refer to this type of symmetry breaking as "external mixing," with an obvious meaning. An interesting question, amenable to experimental observation, is that of the interplay between the symmetry of the cavity and external mixing in the statistical distribution of the conductance of such a structure: the study of that interplay is the second main purpose of this paper. From an experimental point of view, microwave cavities [8] and acoustic systems [9] might represent good candidates by which to study these questions.

That interplay may also be there and have interesting effects when $\langle S \rangle = 0$, as in the case of a LR-symmetric cavity coupled to the outside by two waveguides free of potential barriers but *asymmetrically located*. This problem can be addressed from the point of view of the systems described in the preceding paragraph in the following way. One may think of a LR-symmetric cavity coupled to the outside by four waveguides, also placed symmetrically. We can break the symmetry by providing the two waveguides on the right-hand side of the cavity, say, with identical barriers. The desired problem is then approached in the limit of impenetrable barriers.

This paper is organized as follows. In order to make the

*Also at Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 01000 México DF, México.

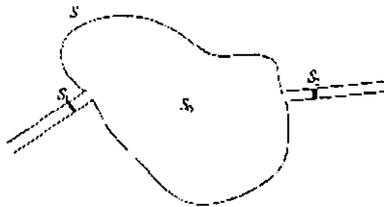


FIG. 1. A ballistic chaotic cavity with scattering matrix given by S_0 connected to two waveguides by means of two barriers with scattering matrices S_1 and S_2 .

paper reasonably self-contained, we summarize in the next section a number of concepts that we shall be using throughout the paper, such as the invariant measure and Poisson's kernel for S matrices and their application to chaotic scattering in AS cavities, and the invariant measure for LR-symmetric systems. Section III deals with the problem of fully LR-symmetric systems in the presence of direct processes. The distribution of the conductance is calculated for the particular case of one open channel in each lead and a diagonal optical matrix (implying direct reflections), and contrasted with the one obtained for an AS chaotic cavity and the same optical matrix $\langle S \rangle$. Different barriers added to the two waveguides of an otherwise fully LR-symmetric system with no direct processes give rise to direct reflections and external mixing; the problem is studied in Sec. IV. Again, the conductance distribution is computed for the one-channel case and contrasted with the one obtained for an AS chaotic cavity with the same optical matrix $\langle S \rangle$. The problem of external mixing in a LR-symmetric cavity with asymmetrically positioned leads and $\langle S \rangle = 0$ is addressed in Sec. V. The conductance distribution is calculated and compared with the one arising from the invariant measure in the AS case. Finally, for the sake of completeness, we include a number of appendices where some of the results mentioned in the text are derived.

II. THE S MATRIX AND ITS STATISTICAL DISTRIBUTION

A. The scattering problem in the absence of spatial symmetries

A single-electron scattering problem can be described by the scattering matrix S , which in the stationary case relates the outgoing-wave to the incoming-wave amplitudes [10]. For a ballistic cavity connected to two leads, each with N transverse propagating modes (see Fig. 1), the S matrix is $n=2N$ dimensional and has the structure

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

where r, r' are the $N \times N$ reflection matrices (for incidence from either lead) and t, t' the corresponding transmission matrices.

From the S matrix we can construct the total transmission coefficient, or spinless dimensionless conductance

$$T = \text{tr}(tt^\dagger), \quad (2.2)$$

which is proportional to the conductance of the cavity,

$$G = (2e^2/h)T, \quad (2.3)$$

the factor 2 arising from the two spin directions.

In Dyson's scheme [11] there are three basic symmetry classes. In the absence of any symmetry, the only restriction on S is unitarity, i.e.,

$$SS^\dagger = I, \quad (2.4)$$

resulting from the physical requirement of flux conservation. This is the "unitary" case, also designated as $\beta=2$. For orthogonal symmetry, or $\beta=1$, S is symmetric, i.e.,

$$S = S^T, \quad (2.5)$$

because one has either time-reversal invariance (TRI) and integral spin, or TRI, half-integral spin and rotational symmetry. In the "symplectic" case ($\beta=4$), S is self-dual because of TRI with half-integral spin and no rotational symmetry. From now on we consider the scattering problem of "spinless" electrons, so that the case $\beta=4$ will not be touched upon.

A convenient parametrization of the S matrix is the polar representation [12,13]

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

where τ stands for the N -dimensional diagonal matrix of eigenvalues τ_α ($\alpha=1, \dots, N$) of the Hermitian matrix tt^\dagger ; v_i ($i=1, \dots, 4$) are arbitrary $N \times N$ unitary matrices for $\beta=2$, with the restriction $v_3 = v_1^T$, $v_4 = v_2^T$ for $\beta=1$.

1. The invariant measure

When the classical dynamics of the system is chaotic, a statistical analysis of the quantum-mechanical problem is called for. That analysis is performed in terms of "ensembles" of physical systems, described mathematically by an ensemble of S matrices, endowed with a probability measure. The starting point of such an analysis is the concept of *invariant measure*, which is a precise formulation of the intuitive notion of *equal a priori probabilities* in the space of scattering matrices.

The invariant measure, to be designated as $d\mu^{(\beta)}(S)$, is invariant under the symmetry operation relevant to the universality class under consideration [11,14], i.e.,

$$d\mu^{(\beta)}(S) = d\mu^{(\beta)}(U_0 S V_0). \quad (2.7)$$

Here, U_0, V_0 are arbitrary but fixed unitary matrices in the unitary case, while $V_0 = U_0^T$ in the orthogonal one. Equation (2.7) defines the circular (orthogonal, unitary) ensembles (COE, CUE), for $\beta=1, 2$, respectively.

2. Chaotic scattering by AS cavities

The information-theoretic approach of Refs. [15,16] leads to the probability distribution known as Poisson's kernel [6,14]:

$$dP(S) = \frac{[\det(I - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger)]^{\beta n + 1 - \beta n \alpha}}{|\det(I - S \langle S \rangle^\dagger)|^{\beta n + 1 - \beta}} d\mu^{(\beta)}(S), \quad (2.8)$$

where the invariant measure is assumed normalized, i.e.,

$$\int d\mu^{(\beta)}(S) = 1. \quad (2.9)$$

Here, $n = 2N$ is the dimensionality of the S matrix and $\langle S \rangle$ is the averaged, or optical, S matrix, which describes the prompt response arising from direct processes.

In the absence of direct processes, $\langle S \rangle = 0$ and Poisson's measure [Eq. (2.8)] reduces to the invariant measure for the universality class in question. In terms of the polar representation, the invariant measure can be written as [17,18]

$$d\mu^{(\beta)}(S) = p^{(\beta)}(\{\tau\}) \prod_{\alpha} d\tau_{\alpha} \prod_i d\mu(v_i). \quad (2.10)$$

Here, the joint probability density of $\{\tau\}$ is

$$p^{(\beta)}(\{\tau\}) = C_{\beta} \prod_{\alpha} |\tau_{\alpha} - \tau_b|^{\beta} \prod_c \tau_c^{\beta - 1}, \quad (2.11)$$

C_{β} being a normalization constant and $d\mu(v_i)$ denoting the invariant measure on the unitary group $U(N)$ for matrices v_i .

For $\langle S \rangle \neq 0$, a useful construction of Poisson's ensemble is given in Refs. [19,20]. Consider the system shown in Fig. 1: it consists of a cavity described by the n -dimensional scattering matrix S_0 , connected to two leads by the tunnel barriers described by the $n \times n$ scattering matrices

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t'_1 \\ t_1 & r'_1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} r_2 & t'_2 \\ t_2 & r'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

respectively. We bunch the two leads into a "superlead" and construct the $2n \times 2n$ scattering matrix S_b

$$S_b = \begin{pmatrix} r_b & t'_b \\ t_b & r'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & t'_1 & 0 \\ 0 & r'_2 & 0 & t_2 \\ t_1 & 0 & r'_1 & 0 \\ 0 & t'_2 & 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Here, the various blocks (r_b , etc.) are n dimensional. The scattering matrix S_0 for the cavity can be written in terms of the scattering matrix S for the full system {cavity + barriers} as

$$S_0 = \frac{1}{t'_b} (S - r_b) \frac{1}{t_b} t'_b. \quad (2.15)$$

One can prove [14,16,19,20] that between the invariant measures for S_0 and for S we have the Jacobian

$$d\mu^{(\beta)}(S_0) = \frac{[\det(I - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger)]^{\beta n + 1 - \beta n \alpha}}{|\det(I - S \langle S \rangle^\dagger)|^{\beta n + 1 - \beta}} d\mu^{(\beta)}(S). \quad (2.16)$$

Now, if the matrix S_0 for the cavity is distributed according to the invariant measure, i.e., $d\mu^{(\beta)}(S_0)$, the distribution of the transformed S satisfies

$$dP(S) = d\mu^{(\beta)}(S_0) \quad (2.17)$$

and we obtain Eq. (2.8), the optical S being given by the n -dimensional matrix

$$\langle S \rangle = r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

The $N = 1, \beta = 1$ case. The T distribution. We now consider the distribution of the S matrix for the system shown in Fig. 1 for the case $N = 1$ and $\beta = 1$. The matrices S_0 of the ballistic cavity, S_1 and S_2 of the two tunnel barriers, and S [related through Eq. (2.15)] are 2×2 and have the structure (2.1) with $t' = t$. In the polar representation (2.6) we have three independent parameters τ, ϕ, ψ , where we have written $v_1 = e^{i\phi}, v_2 = e^{i\psi}$. The range of variation of these parameters is taken to be

$$\tau \in [0,1], \quad \phi, \psi \in [0, 2\pi]. \quad (2.19)$$

In terms of (2.19), S can be written as

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \tau e^{2i\phi}} & \sqrt{\tau e^{i(\phi + \psi)}} \\ \sqrt{\tau e^{i(\phi + \psi)}} & \sqrt{1 - \tau e^{2i\phi}} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

and the invariant measure of Eqs. (2.10) and (2.11) as

$$d\mu^{(1)}(S) = \frac{d\tau d\phi d\psi}{2\sqrt{\tau} 2\pi 2\pi}. \quad (2.21)$$

The distribution of S is given by Poisson's kernel, with the optical S matrix

$$\langle S \rangle = r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Substituting $\langle S \rangle$ in Eq. (2.8), Poisson's measure can be written as

$$dP_{r_1, r'_2}(S) = \frac{[(1 - |r_1|^2)(1 - |r'_2|^2)]^{\beta/2}}{[(1 - r_1 r'_1)(1 - r'_2 r_2) - t^2 r_1^* r_2^*]^{\beta}} d\mu^{(1)}(S). \quad (2.23)$$

By definition, the resulting distribution of the transmission coefficient T can be expressed as the integral

$$w_{r_1, r_2}(T) = \int \delta(T - \tau) dP_{r_1, r_2}(S). \tag{2.24}$$

For this distribution, Ref. [6] gives the expression

$$w_{r_1, r_2}(T) = \frac{1}{2\sqrt{T}} [(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)]^{3/2} \left\langle \frac{1}{|(e^{-i\phi} + |r_1| \sqrt{1-T})(e^{-i\psi} + |r_2| \sqrt{1-T}) - |r_1||r_2|T|} \right\rangle_{\phi, \psi}, \tag{2.25}$$

where $\langle \dots \rangle_{\phi, \psi}$ denotes an average over the variables ϕ and ψ over the interval $[0, 2\pi]$. When $r_1 = r_2 = 0$, the above expression (2.25) reduces to

$$w_{0,0}(T) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{T}}, \tag{2.26}$$

as it should. Figure 2 below (Sec. III) shows with dotted lines the evolution of $w_{r_1, r_2}(T)$ for $r_1 = r_2 = \langle r \rangle$ with the parameter $\langle r \rangle$, obtained from Eq. (2.25) by numerical integration. That distribution tends to $\delta(T)$ as $\langle r \rangle \rightarrow 1$.

To further illustrate the physics resulting from the S matrix distribution (2.23) we analyze the special case $r_1 \rightarrow 0$, so that the right barrier is the only one present. For this case, Eqs. (2.23) and (2.21) give, for the joint probability distribution of the parameters τ, ϕ, ψ , the expression

$$dP_{0, r_2}(S) = \frac{(1 - |r_2|^2)^{3/2}}{|1 - \sqrt{1 - \tau} e^{2i\psi} r_2^*|^3} \frac{d\tau d\phi d\psi}{2\sqrt{\tau} 2\pi 2\pi}. \tag{2.27}$$

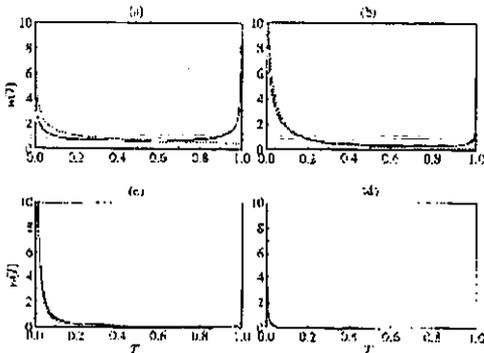


FIG. 2. Shown with a heavy line is the evolution of the distribution $w_{r_1, r_2}(T)$ of Eq. (3.11) with the parameter $\langle r \rangle = -\cos \epsilon$ for a chaotic cavity with full LR symmetry. Cases $\epsilon = \pi/2, \pi/4, \pi/8, \pi/32$ are shown in (a), (b), (c), (d), respectively. The dotted lines show for comparison the T distribution corresponding to an AS cavity with two identical barriers.

We first notice that the angular variable ϕ is uniformly distributed for all r_2 . In this particular case the T probability density of Eq. (2.25) can be integrated analytically, to give [6]

$$w_{0, r_2}(T) = \frac{(1 - |r_2|^2)^{3/2}}{2\sqrt{T}} {}_2F_1[3/2, 3/2; 1; |r_2|^2(1 - T)], \tag{2.28}$$

${}_2F_1$ being a hypergeometric function [21].

As a check, we consider two limiting situations. First, for $r_2 = 0$ we have a ballistic cavity without prompt response. The probability distribution for S , $dP_{0,0}(S)$ [see Eq. (2.27)], goes back to the invariant measure (2.21), as it should. Second, we obstruct the right lead by making the barrier there a perfect reflector. As a result, $r_2 = -1$ and it can be shown (see Appendix A) that $dP_{0, r_2}(S)$ reduces to

$$dP_{0, -1}(S) = \delta(\tau) d\tau \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \frac{3\pi}{2}\right) \right] d\psi, \tag{2.29}$$

where the angles in the arguments of the delta functions are defined modulo 2π . We see from the above expression that the distribution of τ is a one-sided delta function at zero, i.e.,

$$w(T) = \delta(T), \tag{2.30}$$

so that the transmission tends to zero, as expected. Also, the distribution of ψ consists of delta functions centered at $\pi/2$ and $3\pi/2$, so as to ensure the vanishing of the wave function at the impenetrable barrier. In contrast, as already noted, the variable ϕ is uniformly distributed from 0 to 2π . In this limiting case we end up with a ballistic cavity connected to just one lead: thus the resulting one-dimensional S matrix $r = -e^{2i\phi}$ is distributed according to the invariant measure.

Now we go back to the intermediate case in which r_2 in Eq. (2.28) is real and $-1 < r_2 < 0$. We show in Fig. 5 below (Sec. IV) with dotted lines the evolution of the T distribution for several values of r_2 , obtained from the analytical result (2.28).

B. The scattering problem for TRI, LR-symmetric systems

In the presence of additional symmetries, for fixed values for all quantum numbers of the full symmetry group the invariant ensemble is one of the three circular ensembles in

Dyson's scheme. Thus for reflection-symmetric systems S is block diagonal in a basis of definite parity with respect to reflections, with a circular ensemble in each block [4,5].

For a system with TRI and LR symmetry the general form of the S matrix is

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

with

$$r = r^T \quad (2.32a)$$

$$t = t^T. \quad (2.32b)$$

All the matrices with the structure (2.31) can be simultaneously brought to block-diagonal form using the rotation matrix

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_N & I_N \\ -I_N & I_N \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

where I_N is the N -dimensional unit matrix. In fact,

$$S' = R_0 S R_0^T = \begin{bmatrix} s^{(+)} & 0 \\ 0 & s^{(-)} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

with

$$s^{(\pm)} = r \pm t. \quad (2.35)$$

Since S is unitary and symmetric, so are S' and the two $N \times N$ matrices $s^{(\pm)}$. While S has the restricted form (2.31), $s^{(\pm)}$ are the most general $N \times N$ unitary and symmetric, i.e., $\beta = 1$, matrices.

1. The invariant measure

The invariant measure for S matrices with the structure (2.31) was found in Refs. [4,5], based on the consideration that two arbitrary unitary symmetric matrices $s^{(\pm)}$ can generate the most general unitary S matrix with the structure (2.31). The invariant measure for matrices of the form (2.31) can be written as

$$d\mu^{(1)}(S) = d\mu^{(1)}(s^{(+)}) d\mu^{(1)}(s^{(-)}), \quad (2.36)$$

where $d\mu^{(1)}(s^{(\pm)})$ is the invariant measure discussed above for unitary and symmetric matrices ($\beta = 1$) in the absence of spatial symmetries.

2. Chaotic scattering by systems with full LR symmetry in the absence of direct processes

It has been found [5] that single-electron scattering by classically chaotic cavities with LR symmetry and in the absence of direct processes is well described by the invariant measure discussed above.

The $N = 1$ case. The T distribution. Reference [4] finds the distribution of the total transmission coefficient T for the

one-channel case ($N = 1$) arising from the invariant measure (2.36) as

$$w(T) = \frac{1}{\pi\sqrt{T(1-T)}}. \quad (2.37)$$

III. SYSTEMS WITH TRI AND FULL LR SYMMETRY IN THE PRESENCE OF DIRECT PROCESSES

In this section we study a TRI system with full LR symmetry, just as in Sec. II B, but now admitting the possibility of direct processes. For the systems analyzed in Sec. II B, the average (or optical) S matrix $\langle S \rangle$ vanishes, indicating the absence of a prompt response, whereas now $\langle S \rangle \neq 0$.

The S matrix has the structure of Eq. (2.31), and so does $\langle S \rangle$, i.e.,

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} \langle r \rangle & \langle t \rangle \\ \langle t \rangle & \langle r \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

with

$$\langle r \rangle = \langle r \rangle^T, \quad (3.2a)$$

$$\langle t \rangle = \langle t \rangle^T \quad (3.2b)$$

being $N \times N$ blocks. Both S and $\langle S \rangle$ can be brought to a block-diagonal form by the rotation matrix (2.33): S becomes S' of Eq. (2.34) and $\langle S \rangle$ becomes

$$\langle S' \rangle = R_0 \langle S \rangle R_0^T = \begin{bmatrix} \langle s^{(+)} \rangle & 0 \\ 0 & \langle s^{(-)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

As we noticed right below Eq. (2.35), $s^{(\pm)}$ are the most general $N \times N$ unitary and symmetric matrices; they thus belong to the $\beta = 1$ universality class. Their distribution is given by two statistically independent Poisson kernels of the form (2.8), with $\langle s^{(\pm)} \rangle$ as their optical matrices. Denoting by $d\tilde{P}_{\langle S \rangle}(S)$ the S matrix distribution, we have

$$d\tilde{P}_{\langle S \rangle}(S) = dP_{\langle s^{(+)} \rangle}(s^{(+)}) dP_{\langle s^{(-)} \rangle}(s^{(-)}), \quad (3.4)$$

where

$$dP_{\langle s^{(\pm)} \rangle}(s^{(\pm)}) = \frac{[\det(I_N - \langle s^{(\pm)} \rangle \langle s^{(\pm)} \rangle^{\dagger})]^{(N+1)/2}}{[\det(I_N - s^{(\pm)} \langle s^{(\pm)} \rangle^{\dagger})]^{N+1}} d\mu^{(1)}(s^{(\pm)}). \quad (3.5)$$

We can thus write $d\tilde{P}_{\langle S \rangle}(S)$ as

$$d\tilde{P}_{\langle S \rangle}(S) = \frac{[\det(I_N - \langle s^{(+)} \rangle \langle s^{(+)} \rangle^\dagger)]^{(N+1)/2}}{|\det(I_N - s^{(+)} \langle s^{(+)} \rangle^\dagger)|^{N+1}} \frac{[\det(I_N - \langle s^{(-)} \rangle \langle s^{(-)} \rangle^\dagger)]^{(N+1)/2}}{|\det(I_N - s^{(-)} \langle s^{(-)} \rangle^\dagger)|^{N+1}} d\tilde{\mu}^{(1)}(S) \quad (3.6)$$

where $d\tilde{\mu}^{(1)}(S)$ is defined in Eq. (2.36).

The special case of no direct transmission, $\langle t \rangle = 0$, i.e.,

$$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} \langle r \rangle & 0 \\ 0 & \langle r \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

can be written as

$$d\tilde{P}_{\langle S \rangle}(S) = \frac{[\det(I_N - \langle r \rangle \langle r \rangle^\dagger)]^{N+1}}{|\det(I_N - s^{(+)} \langle r \rangle^\dagger)|^{N+1} |\det(I_N - s^{(-)} \langle r \rangle^\dagger)|^{N+1}} \times d\tilde{\mu}^{(1)}(S). \quad (3.8)$$

Physically, this case could be realized by fully LR-symmetric structures with no direct processes, to which identical barriers (with the $\beta=1$ symmetry) are added in the two leads, each with a reflection matrix [see Eq. (2.18)]

$$r_1 = r_2 = \langle r \rangle. \quad (3.9)$$

The situation is illustrated in Fig. 3 ahead but with equal barriers.

The $N=1$ case. The T distribution.

In this case, Eq. (3.8) reduces to

$$d\tilde{P}_{\langle r \rangle}(S) = \frac{[1 - \langle r \rangle \langle r \rangle^*]^2}{|1 - s^{(+)} \langle r \rangle^*|^2 |1 - s^{(-)} \langle r \rangle^*|^2} d\tilde{\mu}^{(1)}(S), \quad (3.10)$$

where $\langle r \rangle$ and $s^{(\pm)}$ are now 1×1 matrices, i.e., just complex numbers. The distribution of T can be obtained from the general expression (2.24). For $\langle r \rangle$ real, some of the relevant steps are found in Appendix B, the final result being

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{-1}{\pi \sqrt{T(1-T)}} \frac{\{1 + \langle r \rangle^2\}(1 - \langle r \rangle^2)}{\{1 + \langle r \rangle^2\}^2 - 4\langle r \rangle^2(1-T)}. \quad (3.11)$$



FIG. 3. A ballistic cavity with reflection symmetry described by the matrix S_0 , connected to two waveguides by means of two barriers described by S_1, S_2 . The barriers give rise to direct processes and, if they are different, the LR symmetry of the full system is broken (external mixing).

The distribution (3.11) is plotted in Fig. 2 for several values of $\langle r \rangle$ and compared, in the same figure, with the distribution corresponding to an AS cavity with the same $\langle S \rangle$, as given by Eq. (2.25).

For $\langle r \rangle = 0$, the distribution of Eq. (3.11) reduces to that of Eq. (2.37), which is symmetric with respect to $T = \frac{1}{2}$, so that T and $R = 1 - T$ are identically distributed; this feature is lost when $\langle r \rangle \neq 0$, as small T 's become more probable. As $\langle r \rangle \rightarrow -1$, both distributions shown in the figure (i.e., for LR-symmetric and AS systems) tend to $\delta(T)$.

IV. BREAKING THE REFLECTION SYMMETRY OF CAVITIES BY DIRECT PROCESSES

In this section we study a TRI configuration consisting of a ballistic cavity with LR symmetry and scattering matrix S_0 , connected to two symmetrically positioned waveguides by means of barriers described by S_1 and S_2 , respectively, in general, the barriers are allowed to be different. This arrangement introduces direct reflections and a *breakdown of the reflection symmetry* (see Fig. 3). As a result, while the scattering matrix S_0 of the cavity plus the symmetrically positioned waveguides, but not including the barriers, has the restricted structure (2.31), (2.32), the scattering matrix S of the total system including the barriers has the more general form (2.1), (2.5). Now, S is generated from S_0 through the inverse of the relation (2.15); thus, varying S_0 across its manifold of independent parameters, but keeping the barriers fixed, generates a matrix S that varies over a manifold with the same dimensionality. In what follows we restrict ourselves to the one-channel case ($N=1$) in each lead. The matrices S_0 can be expressed in terms of two independent continuous parameters (plus a discrete parameter σ), as in Eq. (4.9) below, while S has the more general form (2.20); thus there should be an algebraic relation connecting the three continuous parameters τ, ϕ, ψ appearing in the latter equation:

We want S_0 to be distributed according to the invariant measure $d\tilde{\mu}^{(1)}(S_0)$. In principle, the transformation between S_0 and S (for fixed S_1 and S_2) defines uniquely the resulting statistical distribution of S , to be called $d\tilde{P}(S)$ [see Eq. (4.21)]; for that purpose one could find the Jacobian of the transformation relating S to S_0 , both matrices being subject to the restrictions explained in the previous paragraph. In what follows, though, we find it convenient to compute $d\tilde{P}(S)$ proceeding along a simpler route, taking advantage of the Jacobian between *unrestricted* S matrices that we already know from Eq. (2.16). In fact, the measure $d\tilde{\mu}^{(1)}(S_0)$ can be first expressed as the measure $d\tilde{\mu}^{(1)}(S_0)$ of *unrestricted* S_0 matrices of the form of Eq. (4.5) below times the appropriate delta functions that provide the required restriction [see Eq. (4.6)] among the three parameters τ_0, ϕ_0, ψ_0 . Next, Eq.

(2.16) expresses $d\mu^{(1)}(S_0)$ in terms of $d\mu^{(1)}(S)$, the factor in front of $d\mu^{(1)}(S)$ in Eq. (2.16) being the Jacobian of the transformation from unrestricted S_0 to unrestricted S matrices. Finally, the identity (4.21) gives the required distribution $d\hat{P}(S)$ for the S matrices. We proceed to implement this scheme in detail.

The relationship between the scattering matrix S_0 for the cavity and the matrix S for the full system is given by Eq. (2.15), with

$$t_b = t'_b = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad r'_b = \begin{pmatrix} r'_1 & 0 \\ 0 & r'_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Here all the matrices are two-dimensional, so that the various entries are just complex numbers. We thus have

$$S_0 = t_b^{-1}(S - r_b) \frac{1}{I_2 - r_b^{-1}S} t_b^{-1}. \quad (4.3)$$

The matrix S has the structure (2.20), while S_0 has the structure (2.31), i.e.,

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0 & r_0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

It will be useful to write S_0 of Eq. (4.4) in the polar representation (2.20) as

$$S_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\tau_0} e^{2i\phi_0} & \sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0 + \psi_0)} \\ \sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0 + \psi_0)} & \sqrt{1-\tau_0} e^{2i\phi_0} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

However, the three parameters τ_0 , ϕ_0 , and ψ_0 are not independent. In fact, the structure of S_0 given in Eq. (4.4) implies a relationship between the two angles ϕ_0 and ψ_0 , i.e.,

$$e^{2i\psi_0} = -e^{2i\phi_0}, \quad (4.6)$$

or, taking the square root on both sides

$$e^{i\psi_0} = i\sigma e^{i\phi_0}, \quad (4.7)$$

where $\sigma = \pm 1$. Equivalently,

$$\psi_0 = \phi_0 + \sigma \frac{\pi}{2}, \quad \text{mod}(2\pi). \quad (4.8)$$

The most general form of S_0 is thus

$$S_0 = - \begin{bmatrix} \sqrt{1-\tau_0} & i\sigma\sqrt{\tau_0} \\ i\sigma\sqrt{\tau_0} & \sqrt{1-\tau_0} \end{bmatrix} e^{2i\phi_0}, \quad (4.9)$$

written in terms of the independent parameters τ_0 , ϕ_0 and the discrete variable σ , which have the range of variation

$$\tau_0 \in [0,1], \quad (4.10a)$$

$$\phi_0 \in [0,2\pi], \quad (4.10b)$$

$$\sigma = \pm 1. \quad (4.10c)$$

From Eqs. (2.33)–(2.35), the matrix S_0 can be diagonalized by a $\pi/4$ rotation to give

$$S'_0 = \begin{bmatrix} e^{i\theta_0^{+1}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_0^{-1}} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

where

$$e^{i\theta_0^{\pm 1}} = r_0 \pm t_0 = -e^{2i\phi_0 \pm i\sigma\beta_0} \quad (4.12)$$

and

$$\beta_0 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\tau_0}{1-\tau_0}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta_0 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.13)$$

With the range of variation (4.10) for τ_0 , ϕ_0 , and σ , $e^{i\theta_0^{+1}}$ and $e^{i\theta_0^{-1}}$ cover twice the torus defined by the two angles θ_0^{+1} , θ_0^{-1} .

Equation (4.12) is a transformation from the parameters τ_0 , ϕ_0 , and σ to the parameters θ_0^{+1} , θ_0^{-1} , whose Jacobian can be written as

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta_0^{+1}}{2\pi} \frac{d\theta_0^{-1}}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \frac{d\phi_0}{2\pi}. \quad (4.14)$$

Both sides of this last equation integrate to 1 if the left-hand side is integrated in the region $\theta_0^{+1}, \theta_0^{-1} \in [0,2\pi]$ and multiplied by 2 to account for the fact that the region is visited twice, and the right-hand side is integrated in the region specified by Eq. (4.10).

According to Eq. (2.36), the left-hand side of Eq. (4.14) represents the invariant measure for S_0 matrices with LR symmetry. A function $f(\tau_0, \phi_0, \sigma)$ can be translated into a function $\tilde{f}(\theta_0^{+1}, \theta_0^{-1})$ using the transformation (4.12); its average over the S_0 invariant measure can thus be written as

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0^{+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0^{-1}}{2\pi} \tilde{f}(\theta_0^{+1}, \theta_0^{-1}) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi\sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} f(\tau_0, \phi_0, \sigma). \quad (4.15)$$

Here, on the left-hand side we integrate over the torus $\theta_0^{+1}, \theta_0^{-1}$ only once. Suppose now that we are given a function $F(\tau_0, \phi_0, \psi_0) = F'(\tau_0, \phi_0, e^{i\psi_0})$ of the three parameters appearing in Eq. (4.5) and we want to compute its average over the above measure. First, we make use of Eq. (4.7) to eliminate ψ_0 and write

$$F(\tau_0, \phi_0, \psi_0) = F'(\tau_0, \phi_0, e^{i\psi_0}) = F'(\tau_0, \phi_0, i\sigma e^{i\phi_0}) = f(\tau_0, \phi_0, \sigma) = \tilde{f}(\theta_0^{+1}, \theta_0^{-1}), \quad (4.16)$$

MOISÉS MARTÍNEZ AND PIER A. MELLO

PHYSICAL REVIEW E 63 016205

where $f(\tau_0, \phi_0, \sigma)$ and $\tilde{f}(\theta_0^+, \theta_0^-)$, have the same meaning as in Eq. (4.15) above. The average of this function can thus be written as in (4.15) and subsequently as

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi \sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} F'(\tau_0, \phi_0, i\sigma e^{i\phi_0}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\tau_0}{\pi \sqrt{\tau_0(1-\tau_0)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_0 \left[\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] F(\tau_0, \phi_0, \psi_0), \end{aligned} \quad (4.17)$$

where we have used Eq. (4.8). Comparing the left hand-side of Eq. (4.15) to the right-hand side of Eq. (4.17) we thus wait

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta_0^+ d\theta_0^-}{2\pi} \sim \frac{2 \left[\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right) \right]}{\sqrt{1-\tau_0}} \\ & \quad \times \frac{d\tau_0 d\phi_0 d\psi_0}{2\sqrt{\tau_0} 2\pi 2\pi}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

where the symbol \sim indicates that the two measures are equivalent when the left- and right-hand sides are used to integrate the functions $\tilde{f}(\theta_0^+, \theta_0^-)$ and $F(\tau_0, \phi_0, \psi_0)$, respectively, defined above. Obviously, the angles in the argument of the delta functions above are defined modulo 2π . As we have already noticed, the left-hand side of Eq. (4.18) is the invariant measure $d\mu^{(1)}(S_0)$ for scattering matrices S_0 of the form (4.11), i.e., for a LR-symmetric cavity. On the other hand, Eq. (2.21) shows that the last line of Eq. (4.18) is the

invariant measure $d\mu^{(1)}(S_0)$ for scattering matrices S_0 of the more general form (4.5). The relationship between the two measures is thus

$$\begin{aligned} d\mu^{(1)}(S_0) &\sim \frac{2 \left[\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right) \right]}{\sqrt{1-\tau_0}} \\ &\quad \times d\mu^{(1)}(S_0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Here, the delta functions restrict the space of unitary and symmetric matrices to the subspace of matrices of the form (4.9).

As was explained at the beginning of this section, we now express $d\mu^{(1)}(S_0)$ in terms of $d\mu^{(1)}(S)$ using Eq. (2.16). That equation reads, for the present case,

$$d\mu^{(1)}(S_0) = \frac{[\det(I_2 - r_b r_b^*)]^{3/2}}{|\det(I_2 - S r_b^*)|^2} d\mu^{(1)}(S). \quad (4.20)$$

We substitute this last equation into Eq. (4.19) and use Eq. (2.21) to express $d\mu^{(1)}(S)$ in the polar representation. We also note that the measure $d\mu^{(1)}(S_0)$ appearing on the left-hand side of Eq. (4.19), i.e., the differential probability associated with the matrices S_0 [having the form (4.4)] for the LR-symmetric cavity, must coincide with the differential probability $d\hat{P}_s(S)$ we are looking for, associated with the transformed matrices S [having the form (2.20), but with the appropriate restrictions], i.e.,

$$d\hat{P}_s(S) = d\mu^{(1)}(S_0). \quad (4.21)$$

We thus have

$$d\hat{P}_s(S) \sim 2 \frac{\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\tau_0}} \frac{[\det(I_2 - r_b r_b^*)]^{3/2}}{|\det(I_2 - S r_b^*)|^2} \frac{d\tau d\phi d\psi}{2\sqrt{\tau} 2\pi 2\pi}. \quad (4.22)$$

It remains to express the variables ψ_0, ϕ_0, τ_0 appearing in the delta-function arguments in terms of ψ, ϕ, τ . This is done in Appendix C for the particular case in which barrier 1 is transparent, so that its scattering matrix S_1 of Eq. (2.12) is the Pauli matrix σ_x , and barrier 2 is described by Eq. (2.13) with real matrix elements. The result is

$$d\hat{P}_{\sigma_x}(S) \sim p_{\sigma_x}(\tau, \phi, \psi) d\tau d\phi d\psi, \quad (4.23)$$

with

$\alpha(\phi)$ being given by Eq. (C7). We recall that the angles in the arguments of the delta functions are defined modulo 2π .

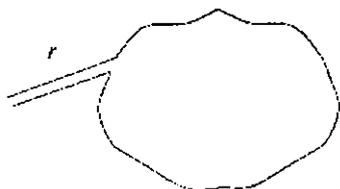


FIG. 4. A ballistic chaotic cavity with reflection symmetry connected to just one lead, supporting one open channel, in the absence of direct processes. The one-dimensional S matrix $r = -e^{2i\phi}$ is distributed according to the invariant measure.

As a first check, set $r'_2 = 0$, corresponding to the case of no barriers. We obtain

$$d\hat{P}_{0,0}(S) \sim \frac{d\tau}{\pi\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \phi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \phi - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi. \quad (4.25)$$

Thanks to the delta functions, we recover the situation of LR symmetry. As expected, the right-hand side of Eq. (4.25) is the invariant measure defined for that symmetry, Eq. (4.18). As a second check, we analyze the case $r'_2 = -1$, which corresponds to obstructing the waveguide on the right. We show in Appendix D that Eq. (4.23) gives in this case

$$d\hat{P}_{0,-1}(S) \sim \delta(\tau) d\tau \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - 3\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi. \quad (4.26)$$

The conductance distribution reduces to a one-sided delta function at zero, as it should. Notice that the variable ϕ is uniformly distributed in the two extreme cases $r'_2 = 0$ and $r'_2 = -1$; this is not so for an arbitrary value of r'_2 . In the limiting case $r'_2 = -1$ we end up with a LR-symmetric ballistic cavity connected to just one lead (see Fig. 4): the resulting one-dimensional S matrix, i.e., $r = -e^{2i\phi}$, is distributed according to the invariant measure: there is thus no effect left of the LR symmetry of the cavity. In fact, the right-hand side of Eq. (4.26) is identical to that of Sec. II A 2, Eq. (2.29), for an AS cavity with the right-hand waveguide obstructed. As we shall see later on, in Sec. V, this is a peculiarity of the one-channel case.

To get the joint distribution of τ and ϕ for arbitrary r'_2 we integrate Eq. (4.24) over ψ . We find

$$q_{r'_2}(\tau, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{(1-r'_2)^{2\tau}}{\sqrt{\tau}} \frac{|\sqrt{1-\tau-r'_2}e^{2i\phi}|}{|\sqrt{1-\tau(1-r'_2)}-r'_2\tau e^{2i\phi}|^2}. \quad (4.27)$$

The $T = \tau$ distribution $w(T)$ is obtained by integrating $q_{r'_2}(\tau, \phi)$ over ϕ . Figure 5 shows (solid lines) the evolution of $w(T)$ with the parameter r'_2 . The peak in the solid curve in Fig. 5 seems to arise from the peak that is at $T = 1$ origi-

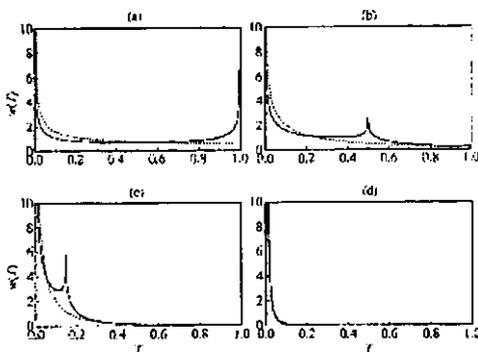


FIG. 5. The solid line shows the evolution of the T distribution obtained by numerical integration over ϕ of Eq. (4.27) for a LR-symmetric cavity and one barrier defined by $r'_2 = -\cos \epsilon$, as a function of the parameter ϵ . Panels (a), (b), (c), (d) show cases $\epsilon = \pi/2, \pi/4, \pi/8, \pi/32$, respectively. The dotted lines show, for comparison, the distributions that correspond to an AS cavity and the same barrier as for the corresponding heavy lines.

nally (i.e., for $r'_2 = 0$); that peak then "travels" towards $T = 0$ as $|r'_2|$ increases. In the same figure we compare that sequence of distributions with those corresponding to an AS cavity (dotted lines) with the same r'_2 . In the former case the system "remembers" in a rather conspicuous way that, although the resulting configuration is asymmetric, the cavity has LR symmetry.

V. BREAKING THE REFLECTION SYMMETRY OF CAVITIES WITH AN ASYMMETRIC POSITION OF THE WAVEGUIDES

In the present section we study the effect of external mixing of LR symmetry in the absence of direct processes, i.e., for $\langle S \rangle = 0$: the problem will be that of a LR-symmetric cavity connected to two asymmetrically positioned waveguides in the absence of barriers. We proceed as follows. We first consider the LR-symmetric cavity connected to four symmetrically positioned waveguides (each supporting one open channel) by means of four, in general different, barriers, as shown in Fig. 6. The two barriers on the left-hand side are then removed, while those on the right are made perfect reflectors.

We call S_0 the matrix associated with the LR-symmetric

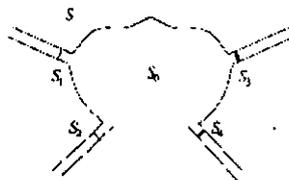


FIG. 6. A ballistic cavity connected to four waveguides symmetrically located, by means of four, in principle different, barriers.

MOISÉS MARTÍNEZ AND PIER A MELLO

PHYSICAL REVIEW E 63 016205

cavity connected to the four symmetrically located waveguides in the *absence* of barriers. The matrix S in the presence of the four barriers is then given by Eq. (2.15), i.e.,

$$S = r_b + t_b' \frac{1}{I_4 - S_0 r_b'} S_0 t_b. \quad (5.1)$$

where

$$t_b = t_b' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$r_b = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{pmatrix}, \quad r_b' = \begin{pmatrix} r_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

As explained above, we now open the left waveguides and block the right ones by means of perfect reflectors, so that

$$t_b = t_b' = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad r_b = r_b' = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

where I_2 and 0_2 denote the two-dimensional unit and zero matrices, respectively.

The 4×4 matrix S_0 has the structure (2.31), i.e.,

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

where r_0 and t_0 are two-dimensional matrices. The matrix S of Eq. (5.1) then reads

$$S = \begin{pmatrix} r_0 - t_0 \frac{1}{I_2 + r_0} t_0 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

The 1-1 block of the above expression is the 2×2 scattering matrix of the final system consisting of a LR-symmetric ballistic cavity connected to two waveguides on the left (see Fig. 7), i.e.,

$$s = r_0 - t_0 \frac{1}{I_2 + r_0} t_0. \quad (5.7)$$

Using the result (2.35) we can express r_0 and t_0 as

$$r_0 = \frac{1}{2} [s^{(+)} + s^{(-)}], \quad (5.8)$$

$$t_0 = \frac{1}{2} [s^{(+)} - s^{(-)}]. \quad (5.9)$$

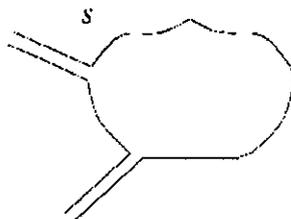


FIG. 7. A ballistic chaotic cavity connected to two asymmetrically located waveguides, without direct processes. The distribution of the two-dimensional S matrix is *not* the invariant measure, but is close to it

where $s^{(\pm)}$ are 2×2 unitary and symmetric matrices

A numerical calculation was performed, in which four-dimensional S_0 matrices were generated with a distribution corresponding to their invariant measure: this was done by constructing an ensemble of $s^{(\pm)}$ matrices, Eqs. (5.8), (5.9), distributed as two independent COE's. From Eq. (5.7), the resulting S matrices were then evaluated.

The distribution of the resulting transmission coefficient T is shown in Fig. 8. For comparison, the distribution $1/2\sqrt{T}$ corresponding to an AS cavity connected to two one-channel waveguides and with $\langle S \rangle = 0$ is shown with a dotted line. Although the LR-symmetric cavity with external symmetry breaking has a T distribution very close to $1/2\sqrt{T}$, there is a statistically significant deviation which indicates that the resulting system has a memory of the point symmetry of the cavity. This is to be contrasted with the result mentioned just before Eq. (4.27) for the single one-channel cavity illustrated in Fig. 4.

VI. RESULTS AND CONCLUSIONS

One of the main purposes of the present paper has been the extension of previous studies on transport through ballistic chaotic cavities with reflection symmetry to include the presence of direct processes. In Sec. III we treated the problem of *fully left-right (LR)-symmetric systems* in the presence of direct processes and for the time-reversal invariant (TRI)

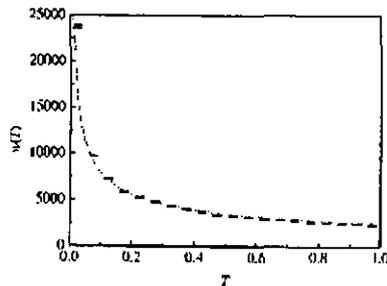


FIG. 8. T distribution for a LR-symmetric cavity connected to two asymmetrically located waveguides. The dotted line correspond to an AS cavity connected to two waveguides.

case. The statistical distribution of the S matrix, found analytically in Eq. (3.6), consists of the product of two Poisson kernels with the optical matrices $\langle s^{(+)} \rangle$ and $\langle s^{(-)} \rangle$, respectively. For no direct transmission processes, $\langle r \rangle = 0$, and real direct reflections $\langle r \rangle$, we calculated analytically the distribution of the transmission coefficient $w(T)$ for the one-channel case. The difference with the T distribution for an asymmetric cavity (AC) with the same optical matrix $\langle S \rangle$, which is large for $\langle r \rangle = 0$, becomes less dramatic as $|\langle r \rangle|$ increases: that evolution is shown in Fig. 2.

The case of a full LR-symmetric system with the TRI symmetry broken by a magnetic field is not addressed here. Reference [5] finds that the corresponding S matrix has a structure similar to that for the $\beta=1$ case but with the roles of r and t interchanged. The statistical distribution $w(T)$ of T for $\langle r \rangle = 0$ is given by $1/2\sqrt{1-T}$, indicating coherent forward scattering. Starting from that distribution, $w(T)$ would evolve towards $\delta(T)$ as $|\langle r \rangle|$ increases.

The other main purpose of this work has been the study of LR symmetry breaking by an asymmetric coupling of a LR-symmetric cavity to the outside. Two ways of producing external mixing of the spatial symmetry were analyzed:

(a) In Sec. IV we studied the effect of breaking the reflection symmetry of a cavity by direct processes. The system consists of a ballistic cavity with reflection symmetry connected to two symmetrically positioned waveguides by means of barriers which, in general, are allowed to be different (Fig. 3). We found analytically, in Eqs. (4.23) and (4.24), the statistical distribution of the S matrix for the one-channel case in each waveguide and, for simplicity, when only the barrier in the right-hand waveguide is present ($r_2' \neq 0$). The T distribution is very different from that for the fully AS case (i.e., the one in which the cavity itself is AS) having the same optical $\langle S \rangle$ matrix, as shown in Fig. 5 for various values of $r_2' \neq 0$. We conclude that this two-waveguide system, although asymmetric with respect to the LR operation, has a memory of the reflection symmetry of the cavity from which it is constructed. In the limit $r_2' = -1$ the right-hand waveguide is blocked and we end up with a LR-symmetric ballistic cavity connected, without any barrier, to just one lead, supporting one open channel (see Fig. 4). We found that the resulting one-dimensional matrix $S = e^{i\theta}$ is distributed according to its invariant measure (i.e., θ is uniformly distributed) and, as a result, there is no effect left of the LR symmetry of the cavity: this was found, though, to be a peculiarity of the one-waveguide-one-channel case (in fact, see the end of the next paragraph).

(b) In Sec. V we studied, in the absence of direct processes, the effect of external mixing of LR symmetry induced by an asymmetric position of the waveguides. The result is a LR-symmetric cavity connected, without any barriers, to two waveguides on its left-hand side (see Fig. 7). Let T denote the total transmission coefficient between those two waveguides; its distribution $w(T)$ was calculated numerically for the one-channel case in each waveguide and compared, in Fig. 8, with $1/2\sqrt{T}$, the T distribution arising from the invariant measure $d\mu^{(\beta=1)}(S)$ for AS systems. Although the difference between the two distributions is quite small, it

is statistically significant. This problem is clearly equivalent to having, on one side of the cavity, just one waveguide (coupled to the cavity without any barrier) supporting two open channels. In this one-waveguide-two-channel problem the resulting S matrix is thus distributed very closely to its invariant measure, the difference exhibiting some memory left of the reflection symmetry of the cavity.

Two additional points are worth mentioning. First, from an experimental point of view, we note that microwave cavities and acoustic systems might represent good systems with which to study the interplay between the symmetry of the cavity and external mixing in the statistical distribution of the conductance of such a structure. Finally, the problem described in b above is relevant to the study of transport between two one-channel leads connected by a "double" Cayley tree [22]. In fact, under suitable circumstances the two problems can be mapped onto each other. This problem will be reported on elsewhere.

ACKNOWLEDGMENTS

One of the authors (M.M.) wishes to acknowledge support by DGAPA-UNAM and by CONACyT, México.

APPENDIX A: DERIVATION OF EQ. (2.29)

We saw in Sec. II A 2 that the distribution $dP_{(S)}(S)$ of the scattering matrix of a cavity connected to two waveguides, where the one on the right of the cavity has a barrier, is given by

$$dP_{0,r_2'}(S) = \frac{(1-|r_2'|^2)^2}{|1-\sqrt{1-\tau e^{2i\psi} r_2'^2}|^2} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \quad (A1)$$

To see the behavior of $dP_{0,r_2'}(S)$ for $r_2' = -1$, let r_2' be a real number: assume for simplicity $r_2' = -\cos \epsilon$; we are interested in the limit $\epsilon \rightarrow 0$. Also, let us introduce the positive parameter $\eta \ll 1$ in order to avoid the singularity at $\tau = 0$. Of course, we will take the limit $\eta \rightarrow 0$ later on. Because the variable ϕ is uniformly distributed, the joint probability density of τ and ψ can be written as

$$p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi) = \frac{C_\eta}{4\pi\sqrt{\tau+\eta^2}} \frac{|\sin \epsilon|^2}{|1+\cos \epsilon \sqrt{1-\tau e^{2i\psi}}|^2}, \quad (A2)$$

where C_η is a normalization constant that depends on the parameter η .

We have the following properties of $p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi)$.

(1) From (A2) we see that

$$p_{0,0}(\tau, \psi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{\eta,\epsilon}(\tau, \psi) = 0 \quad (A3)$$

for all τ and ψ , except for $\tau = 0$ and $\psi = \pi/2, 3\pi/2$, where the denominator is zero:

$$|1 + \sqrt{1 - \tau e^{2i\psi}}| = 0. \quad (A4)$$

(2) For $\tau = 0$ and $\psi = \pi/2, 3\pi/2$ we have

MOISÉS MARTÍNEZ AND PIER A. MELLO

PHYSICAL REVIEW E 63 016205

$$\begin{aligned} \rho_{0,0}\left(\tau=0, \psi=\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{\pi, \epsilon}\left(\tau=0, \psi=\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_{\pi}}{4\pi\eta} \left| \cot \frac{\epsilon}{2} \right|^2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

(3) The function $\rho_{0,0}(\tau, \psi)$ is normalized to unity:

$$\int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\psi \rho_{0,0}(\tau, \psi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\psi p_{\pi, \epsilon}(\tau, \psi) = 1. \quad (\text{A6})$$

Then the only function which satisfies those conditions is

$$\rho_{0,0}(\tau, \psi) \rightarrow \delta(\tau) \frac{1}{2} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi - \frac{3\pi}{2}\right) \right]. \quad (\text{A7})$$

Finally, the distribution of the S matrix in the above limits is given by Eq. (2.29).

APPENDIX B: DERIVATION OF EQ. (3.11)

For $\langle r \rangle$ real and $d^{(\pm)} = e^{i\theta^{(\pm)}}$, Eq. (3.10) can be written as

$$d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S) = \frac{1 - \langle r \rangle^2}{|1 - \langle r \rangle e^{i\theta^{(\pm)}}|^2} \frac{1 - \langle r \rangle^2}{|1 - \langle r \rangle e^{i\theta^{(\mp)}}|^2} \frac{d\theta^{(\pm)}}{2\pi} \frac{d\theta^{(\mp)}}{2\pi}. \quad (\text{B1})$$

The transmission amplitude is given by [see Eq. (2.35)]

$$t = \frac{1}{2} (e^{i\theta^{(\pm)}} - e^{i\theta^{(\mp)}}), \quad (\text{B2})$$

and the transmission coefficient is written as

$$T = |t|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(\pm)} - \theta^{(\mp)})]. \quad (\text{B3})$$

The T distribution $w_{\langle r \rangle}(T)$ is obtained from

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \int d\left\{ T - \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta^{(\pm)} - \theta^{(\mp)})] \right\} d\hat{P}_{\langle r \rangle}(S). \quad (\text{B4})$$

In order to solve the integral, we make the change of variables

$$\theta = \frac{1}{2} [\theta^{(\pm)} - \theta^{(\mp)}],$$

$$\theta' = \frac{1}{2} [\theta^{(\pm)} + \theta^{(\mp)}], \quad (\text{B5})$$

the range of variation being: for $\theta' \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (-\theta', \theta')$ and for $\theta' \in (\pi, 2\pi)$, $\theta \in (-2\pi + \theta', 2\pi - \theta')$.Substituting (B1) in (B4), considering the fact that the integrand is an even function of θ and writing the delta function in terms of its roots in the variable θ , we have

$$\delta(T - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2\sqrt{T(1-T)}} [\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2)], \quad (\text{B6})$$

where $\theta_2 = \pi - \theta_1$ and $\theta_1 = \arcsin \sqrt{T}$; finally, after some algebra, $w_{\langle r \rangle}(T)$ can be written as a sum of two terms:

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1 - \langle r \rangle^2)^2}{\pi^2 \sqrt{T(1-T)}} [I_1(T, \langle r \rangle) + I_2(T, \langle r \rangle)], \quad (\text{B7})$$

where, for $k=1, 2$,

$$\begin{aligned} I_k(T, \langle r \rangle) &= \int_0^\pi d\theta' \int_0^{\theta'} d\theta \frac{1}{[(1 + \langle r \rangle^2) - 2\langle r \rangle \cos(\theta' + \theta)]} \\ &\times \frac{\delta(\theta - \theta_k)}{[(1 + \langle r \rangle^2) - 2\langle r \rangle \cos(\theta' - \theta)]}. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Again, after some algebra the sum of the two integrals give a single one:

$$I_1(T, \langle r \rangle) + I_2(T, \langle r \rangle) = \frac{1}{c} \int_0^\pi \frac{d\theta'}{a - b \cos \theta' + \cos^2 \theta'}, \quad (\text{B9})$$

where

$$a = \frac{1}{c} [(1 + \langle r \rangle^2)^2 - 4\langle r \rangle^2 T],$$

$$b = \frac{4}{c} \langle r \rangle (1 + \langle r \rangle^2) \sqrt{1 - T},$$

$$c = 4\langle r \rangle^2. \quad (\text{B10})$$

Now, making the change of variable $x = \cos \theta'$, (B7) can be written as

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1 - \langle r \rangle^2)^2}{4\langle r \rangle^2 \pi^2 \sqrt{T(1-T)}} [J_+(T, \langle r \rangle) + J_-(T, \langle r \rangle)], \quad (\text{B11})$$

where now

$$J_{\pm}(T, \langle r \rangle) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (a \pm b x + x^2)}. \quad (\text{B12})$$

By means of a change of variables

$$u = -\frac{x + (A+B)}{x + (A-B)}, \quad (\text{B13a})$$

$$v = -\frac{x - (A+B)}{x - (A-B)}, \quad (\text{B13b})$$

where

$$A = \frac{1}{b}(1+a), \quad (B14)$$

$$B = \frac{1}{b}\sqrt{(1+a)^2 - b^2}, \quad (B15)$$

the indefinite integrals, Indef_\pm , corresponding to each one of the above, can be transformed to

$$\text{Indef}_+ = \frac{2B}{\sqrt{CD}} \int \frac{|u+1|}{\sqrt{u^2+p(u^2+q)}} du, \quad (B16a)$$

$$\text{Indef}_- = -\frac{2B}{\sqrt{CD}} \int \frac{|v+1|}{\sqrt{v^2+p(v^2+q)}} dv, \quad (B16b)$$

where

$$p = \frac{a-b(B+A)+(B+A)^2}{a+b(B-A)+(B-A)^2} \quad (B17)$$

$$q = \frac{1-(B+A)^2}{1-(B-A)^2} \quad (B18)$$

and

$$C = 1 - (B-A)^2,$$

$$D = a + b(B-A) + (B-A)^2. \quad (B19)$$

Although the integrals (B12) seem to give the same result under the change $b \rightarrow -b$, they do not, because the cutoff $x_u = B - A$ in (B16a), and $x_v = A - B$ in (B16b), are different. One must be careful when evaluating the integrals in the limits. The results are

$$I_+(T, \langle r \rangle) = \frac{2B}{\sqrt{CD} \sqrt{p-q}} \left[\arctan \left(\frac{1-\langle r \rangle^2}{2\langle r \rangle \sqrt{1-T}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln \left(\frac{1+\langle r \rangle^2+2\langle r \rangle \sqrt{T}}{1+\langle r \rangle^2-2\langle r \rangle \sqrt{T}} \right) \right], \quad (B20a)$$

$$I_-(T, \langle r \rangle) = \frac{2B}{\sqrt{CD} \sqrt{p-q}} \left[\pi - \arctan \left(\frac{1-\langle r \rangle^2}{2\langle r \rangle \sqrt{1-T}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln \left(\frac{1+\langle r \rangle^2+2\langle r \rangle \sqrt{T}}{1+\langle r \rangle^2-2\langle r \rangle \sqrt{T}} \right) \right]. \quad (B20b)$$

Now, we substitute the sum of equations (B20) in (B11) to obtain the result

$$w_{\langle r \rangle}(T) = \frac{(1-\langle r \rangle^2)^2}{4\langle r \rangle^2 \pi^2 \sqrt{T(1-T)}} \frac{2\pi B}{\sqrt{CD} \sqrt{p-q}}; \quad (B21)$$

using Eqs. (B10), (B15), (B17), (B18), and (B19) the final result (3.11) is obtained.

APPENDIX C: DERIVATION OF EQS. (4.23),(4.24)

For the particular case in which barrier 1 is transparent (see Fig. 3), so that its scattering matrix S_1 of Eq. (2.12) is the Pauli matrix σ_x , and barrier 2 is described by Eq. (2.13) with real matrix elements, Eq. (4.22) can be written as

$$d\tilde{P}_{0,r'_2}(S) \sim 2 \frac{\delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - 3\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-\tau_0}} \times \frac{(1-r'_2)^2}{|1-\sqrt{1-\tau r'_2} e^{2i\psi}|^2} \frac{d\tau}{2\sqrt{2}} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}. \quad (C1)$$

Also, the transformation $S_0(S)$ given by Eq. (4.3) can be written in terms of its elements as follows:

$$r_0 = \frac{1}{1-r'_2 r'} [r(1-r'_2 r') + r'_2 t^2],$$

$$r'_0 = \frac{1}{1-r'_2 r'} (r' - r'_2),$$

$$t_0 = \frac{1}{1-r'_2 r'} t_2 t. \quad (C2)$$

or in terms of the independent parameters [see Eqs. (2.20) and (4.5)] as

$$\sqrt{1-\tau_0} e^{2i\psi_0} = e^{2i\psi} \frac{\sqrt{1-\tau-r'_2} e^{2i\psi}}{1-r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi}}, \quad (C3a)$$

$$\sqrt{1-\tau_0} e^{2i\psi_0} = e^{2i\psi} \frac{\sqrt{1-\tau-r'_2} e^{-2i\psi}}{1-r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi}}, \quad (C3b)$$

$$\sqrt{\tau_0} e^{i(\phi_0 + \psi_0)} = \frac{t_2 \sqrt{\tau} e^{2i\psi}}{1-r'_2 \sqrt{1-\tau} e^{2i\psi}}. \quad (C3c)$$

From (C3a) or (C3b) we find

$$\sqrt{1-\tau_0} = \frac{|\sqrt{1-\tau-r'_2} e^{2i\psi}|}{|1-\sqrt{1-\tau} r'_2 e^{2i\psi}|}, \quad (C4)$$

also, dividing (C3a) by (C3b) we obtain

$$e^{2i(\psi_0 - \phi_0)} = e^{2i(\psi - \phi)} \frac{\sqrt{1-\tau-r'_2} e^{-2i\psi}}{\sqrt{1-\tau-r'_2} e^{2i\psi}}. \quad (C5)$$

Because the roots of the delta functions appearing in Eq. (4.22) satisfy $e^{2i(\psi_0 - \phi_0)} = -1$, from (C5) we find

$$e^{2i\psi} = -e^{2i\phi} e^{2i\alpha(\phi)}, \quad (C6)$$

where

MOISÉS MARTÍNEZ AND PIER A. MELLO

PHYSICAL REVIEW E 63 016205

$$e^{i\alpha(\phi)} = \frac{\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{-2i\phi}}{|\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{2i\phi}|} \tag{C7}$$

Then, we have the conditions for ψ :

$$\begin{aligned} \psi - \phi - \alpha(\phi) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{for} \quad \psi_0 - \phi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \psi - \phi - \alpha(\phi) &= \frac{3\pi}{2} \quad \text{for} \quad \psi_0 - \phi_0 = 3\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{C8}$$

The Jacobian for the transformation $\psi_0 \rightarrow \psi$ is

$$\left| \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi_0 - \phi_0) \right| = \frac{|(1-\tau) - r_2'|}{|\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{2i\phi}|^2}. \tag{C9}$$

Then we write

$$\begin{aligned} \delta\left(\psi_0 - \phi_0 - \frac{2n+1}{2}\pi\right) &= \frac{|\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{-2i\phi}|^2}{|(1-\tau) - r_2'|} \\ &\times \delta\left[\psi - \phi - \alpha(\phi) - \frac{2n+1}{2}\pi\right]. \end{aligned} \tag{C10}$$

for $n=0,1$.

From (C6) and (C7) we find

$$\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{2i\psi} = \frac{(1-\tau) - r_2'^2}{\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{2i\phi}} \tag{C11}$$

$$1 - r_2'\sqrt{1-\tau}e^{2i\psi} = \frac{\sqrt{1-\tau}(1-r_2'^2) - r_2'\tau e^{2i\phi}}{\sqrt{1-\tau}r_2'e^{2i\phi}} \tag{C12}$$

Finally, substituting Eqs. (C4), (C10), (C11), and (C12) in Eq. (C1), we arrive at

$$d\tilde{P}_{0,r_2'}(\tau, \phi, \psi) \sim p_{r_2'}(\tau, \phi, \psi) d\tau d\phi d\psi, \tag{C13}$$

where $p_{r_2'}(\tau, \phi, \psi)$ is given by Eq. (4.24).

APPENDIX D: DERIVATION OF EQ. (4.26)

In Sec. IV we find the joint distribution of τ , ϕ , and ψ [Eq. (4.24)]. It is easy to integrate that distribution over ψ to find the joint distribution of τ and ϕ as

$$q_{r_2'}(\tau, \phi) = \frac{(1-r_2'^2)^{3/2} |\sqrt{1-\tau-r_2'}e^{2i\phi}|}{(2\pi)^2 \sqrt{\pi} |\sqrt{1-\tau}(1-r_2'^2) - r_2'\tau e^{2i\phi}|^2}. \tag{D1}$$

As in Appendix A, we assume for simplicity $r_2' = -\cos \epsilon$; again we introduce the parameter $\eta \ll 1$. Of course, we will take the limits $\eta, \epsilon \rightarrow 0$; then

$$q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi) = \frac{C_\eta |\sin \epsilon|^3}{2\pi^2 \sqrt{\tau+\eta^2}} \frac{|\sqrt{1-\tau+\cos \epsilon} e^{2i\phi}|}{|\sqrt{1-\tau \sin^2 \epsilon + \tau \cos \epsilon} e^{2i\phi}|^2}. \tag{D2}$$

where C_η is a normalization constant that depends on η .

Again, as before, we have the following properties for $q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi)$:

(1) From (D2) we see that

$$q_{0,0}(\tau, \phi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi) = 0 \tag{D3}$$

for all τ and ϕ , except for $\tau=0$ and $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, where the denominator is zero:

$$|\sqrt{1-\tau \sin^2 \epsilon + \tau \cos \epsilon} e^{2i\phi}|^2 = 0. \tag{D4}$$

(2) $\tau \neq 0$ and $\forall \phi$.

It is easy to see from (D2) that in this case

$$q_{0,0}(\tau \neq 0, \phi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi) = 0. \tag{D5}$$

(3) For $\tau=0$ and $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ we have

$$\begin{aligned} q_{0,0}\left(\tau=0, \phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon}\left(\tau=0, \phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_\eta}{2\pi^2 \eta} \left| \tan \frac{\epsilon}{2} \right| = 0. \end{aligned} \tag{D6}$$

(4) For $\tau=0, \phi \neq \pi/2, 3\pi/2$ we obtain

$$\begin{aligned} q_{0,0}\left(\tau=0, \phi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\eta,\epsilon}\left(\tau=0, \phi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_\eta}{2\pi^2 \eta} \frac{|1 + \cos \epsilon e^{2i\phi}|}{|\sin \epsilon|} \\ &= \infty. \end{aligned} \tag{D7}$$

(5) Also, the function $q_{0,0}(\tau, \phi)$ is normalized to unity:

$$\int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi q_{0,0}(\tau, \phi) = \lim_{\eta, \epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} d\phi q_{\eta,\epsilon}(\tau, \phi) \times d\tau d\phi = 1. \tag{D8}$$

These conditions define the function

$$q_{0,0}(\tau, \phi) = \delta(\tau) \frac{1}{2\pi}. \tag{D9}$$

We thus arrive at Eq. (4.26).

ELECTRONIC TRANSPORT THROUGH BALLISTIC ...

PHYSICAL REVIEW E 63 016205

- [1] A.G. Huibers, S.R. Patel, C.M. Marcus, P.W. Brouwer, C.I. Duruöz, and J.S. Harris, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1917 (1998) and references therein.
- [2] *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B.L. Altshuler, P.A. Lee, and R.A. Webb (North-Holland, New York, 1991).
- [3] *Mesoscopic Quantum Physics*, edited by E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1995).
- [4] V.A. Gopal, M. Martínez, P.A. Mello, and H.U. Baranger, *J. Phys. A* **29**, 881 (1996).
- [5] H.U. Baranger and P.A. Mello, *Phys. Rev. B* **54**, 14 297 (1996).
- [6] P.A. Mello and H.U. Baranger, *Waves Random Media* **9**, 105 (1999).
- [7] P.A. Mello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **45**, 240 (1967).
- [8] H. Alt, A. Bäcker, C. Dembowsky, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, *Phys. Rev. E* **58**, 1737 (1998), and references therein.
- [9] K. Schaadt and A. Kudrolli, *Phys. Rev. B* **60**, R3479 (1999).
- [10] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer, New York, 1982).
- [11] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).
- [12] P.A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, *Ann. Phys. (N.Y.)* **181**, 290 (1988).
- [13] P.A. Mello and J.-L. Pichard, *J. Phys.* **11**, 493 (1991).
- [14] L.K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains* (AMS, Providence, RI, 1963).
- [15] P.A. Mello, P. Pereyra, and T.H. Seligman, *Ann. Phys. (N.Y.)* **161**, 254 (1985).
- [16] W.A. Friedman and P.A. Mello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **161**, 276 (1985).
- [17] H.U. Baranger and P.A. Mello, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 142 (1994).
- [18] R.A. Jalabert, J.-L. Pichard, and C.W.J. Beenakker, *Europhys. Lett.* **27**, 225 (1994).
- [19] P.W. Brouwer, *Phys. Rev. B* **51**, 16 878 (1995).
- [20] P.W. Brouwer, Doctoral thesis, University of Leiden, 1997.
- [21] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. E. Stegun (National Bureau of Standards, Washington D.C., 1964), Chap. 15.
- [22] M. Martínez, Doctoral thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.

Bibliografía

- [1] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach y R. B. Laibowitz, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985).
- [2] M. L. Metha, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels* (Academic Press, New York, 1967).
- [3] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997) y las referencias contenidas.
- [4] S. Iida, H. A. Weidenmüller y J. A. Zuk, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 583 (1990).
- [5] *Mesoscopic Phenomena in Solids*, editado por B. L. Altshuler, P. A. Lee y R. A. Webb (North-Holland, New York, 1991).
- [6] *Mesoscopic Quantum Physics*, editado por E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard y J. Zinn-Justin (Elsevier, 1995).
- [7] R. Landauer, *J. Phys.: Condens. Matter I*, 8099 (1989).
- [8] M. Büttiker, *IBM J. Res. Dev.* **32**, 317 (1988).
- [9] A. G. Huibers, S. R. Patel, C. M. Markus, P. W. Brouwer, C. I. Duruöz and J. S. Harris, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1917 (1998) y las referencias ahí contenidas.
- [10] C. M. Marcus, A. J. Rimberg, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins y A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 506 (1992).
- [11] M. W. Keller y A. Mittal, J. W. Sleight, R. G. Wheeler y D. E. Prober, R. N. Sacks y H. Shtrikmann, *Phys Rev. B* **53**, R1693 (1996).

- [12] I. H. Chan, R. M. Clarke y C. M. Marcus, K. Campman y A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3876 (1995).
- [13] O. Bohigas, M. J. Giannoni y C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [14] P. Pichaureau y R. A. Jalabert, *Eur. Phys. J. B* **9**, 299 (1999).
- [15] H. U. Baranger y P. A. Mello, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 142 (1994).
- [16] B. Kramer y A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993) y las referencias contenidas.
- [17] V. A. Gopar, M. Martínez, P. A. Mello and H. U. Baranger, *J. Phys. A* **29**, 881-888 (1996).
- [18] H. U. Baranger and P. A. Mello, *Phys. Rev. B* **54**, 14297 (1996).
- [19] P. A. Mello and H. U. Baranger, *Waves Random Media* **9**, 105-146 (1999).
- [20] P. A. Mello, *Ann. Phys. (N. Y.)* **45**, 240 (1967).
- [21] A. Morales, L. Gutiérrez y J. Flores, *Am. J. Phys.* **69**, fecha tentativa de aparición febrero de 2001.
- [22] K. Schaadt and A. Kudrolli, *Phys. Rev. B* **60**, R3479 (1999).
- [23] H. Alt, A. Bäcker, C. Dembowsky, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, H. y A. Richter, *Phys. Rev. E* **58**, 1737 (1998) y las referencias contenidas ahí.
- [24] R. Méndez, resultados no publicados.
- [25] C. Domb en *Phase Transitions and Critical Phenomena*, editado por C. Domb y M. S. Green, Vol. 3, pág. 1 (Academic Press).
- [26] S. G. Satyanarayana, *A theoretical study of the disorder induced localization and the absence of diffusion in certain random lattices*, Tesis Doctoral, Bangalore University (1980).
- [27] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer, New York, 1982)

- [28] H. U. Baranger y P. A. Mello, *Phys. Rev. B* **54**, R14297 (1996-II).
- [29] R. Landauer, *Phil. Mag.* **21**, 863 (1970).
- [30] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).
- [31] P. A. Mello, P. Pereyra and N. Kumar, *Ann. Phys.* **181**, 290 (1988)
- [32] P. A. Mello and J.-L. Pichard, *J. Phys. I* **1**, 493 (1991).
- [33] L. K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains* (AMS, Providence, RI, 1963).
- [34] R. A. Jalabert, J.-L. Pichard and C. W. J. Beenakker, *Europhys. Lett.* **27**, 225 (1994).
- [35] L. Rosenfeld y V. Weisskopf en *Niels Bohr and the development of physics*, editado por W. Pauli (Pergamon Press, 1955).
- [36] *Topics in the theory of nuclear reactions*, H. Feshbach en *Reaction Dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [37] P. A. Mello, P. Pereyra and T. H. Seligman, *Ann. Phys. (N. Y.)* **161**, 254 (1985).
- [38] W. A. Friedman and P. A. Mello, *Ann. Phys. (N. Y.)* **161**, 276-302 (1985).
- [39] P. W. Brower, *Phys. Rev. B* **51**, 16878 (1995)
- [40] P. W. Brower, *On the random-matrix theory of quantum transport*, Tesis Doctoral, University of Leiden.
- [41] M. Abramowitz and I. E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Ch. 15, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1964.
- [42] R. Abou-Chacra, P. W. Anderson, D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6** (1973).
- [43] *Solid State Physics*, N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, Holt, Rinehart and Winston (1975).
- [44] P. W. Anderson, *Phys. Rev* **109**, 1492 (1958).

- [45] N. F. Mott, E. A. Davis; *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*, Segunda Edición, Clarendon Press, Oxford (1979).
 - [46] N. F. Mott, *Phil. Mag.* **22**, 7 (1970).
 - [47] D. J. Thouless, *Phys. Repts. (Phys. Lett., Sect. C)* **13C**, 93 (1974).
 - [48] *Introduction to disordered systems*, D. J. Thouless en *Critical Phenomena, random systems, gauge theories*, editado por K. Osterwalder and R. Stora (Elsevier, 1986).
 - [49] P. A. Lee y T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).
 - [50] *Localization versus percolation*, B. Shapiro en *Percolation Structures and Processes*, editado por G. Deutscher, R. Zallen y J. Adler, *Annals of the Israel Physical Society*, vol. 5 (1983).
 - [51] B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 747 (1983).
 - [52] P. A. Mello y A. D. Stone, *Phys. Rev. B* **44**, 3559 (1991).
 - [53] M. Büttiker, Y. Imry, M Ya. Azbel, *Phys. Rev. A* **30**, 1982 (1984).
 - [54] Y. Avishai, J. M. Luck, *Phys. Rev. B* **45** (1992).
 - [55] *Chaotic dynamics an introduction*, G. L. Baker y J. P. Gollub, Cambridge University Press, (1990).
-