



5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS  
FINITOS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE  
INGENIERIA DURANTE EL PROCESAMIENTO DE  
ALIMENTOS SOMETIDOS A RADIACION EN  
HORNOS DE MICROONDAS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERA EN ALIMENTOS  
P R E S E N T A :

**BEGONIA SONIA MARTINEZ MOTA**

ASESOR: I.Q.. GILBERTO ATILANO AMAYA VENTURA

287192

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEXICO

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN  
UNIDAD DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
DEPARTAMENTO DE EXÁMENES PROFESIONALES

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES CUAUTITLÁN



DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLÁN  
PRESENTE

ATN: Q. Ma. del Carmen García Mijares  
Jefe del Departamento de Exámenes  
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos el Trabajo de Servicio Social.

Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Resolución de Problemas de Ingeniería. Durante el Procesamiento de Alimentos Sometidos a Radiación en Hornos de Microondas.

que presenta la pasante Begonia Sonia Martínez Mota.  
con número de cuenta 9156226-1 para obtener el TÍTULO de:  
Ingeniera en Alimentos.

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

ATENTAMENTE.

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 7 de JUNIO de 2000.

PRESIDENTE Dr. José L. Arjona Román.

VOCAL M. en C. Ricardo P. Hernández García.

SECRETARIO L.Q. Gilberto A. Amaya Ventuca.

PRIMER SUPLENTE Dra. Silvia Estrada Flores.

SEGUNDO SUPLENTE I.A. Francisco López Martínez.

\*\*\*\*\*

## AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS:

\*\*\*\*\*

GRACIAS...

... DIOS MÍO por darme fortaleza para lograr una de mis metas más añoradas.

... por mi FAMILIA, mis padres: José Martínez y Guadalupe Mota, mis hermanos, Baruch, Arturo y Diego, con quienes unidos podemos lograr cualquier cosa sin importar la adversidad, mis abuelitos, q.e.p.d., mi abuelita Magdalena, mis tías, tíos, primos, cuñadas y sobrinos Roberto y Melanie, a todos gracias por su amor, apoyo y comprensión.

... a la FES Cuautitlàn, institución formadora de investigadores de excelencia, a mis profesores, a los integrantes de mi jurado, en especial a una excelente persona: Gilberto Amaya por su amistad incondicional, a los integrantes de la 15ava Generación de Ingeniería en Alimentos, a mis amigos del cubo: Jessi, Richard y Joselo.

... a mis amigas en las buenas y en las malas Cielo y Azucena y sobretodo a Everardo que contribuyó en gran parte a la realización de esta tesis.

... a mis compañeros de trabajo en la Secretaria de Marina, del departamento de Recursos Financieros y a las personas que laboran en esta H. institución.

... en especial a todos mis amigos, enemigos, conocidos y desconocidos que contribuyeron de manera directa e indirecta a la culminación de mi carrera.

\*\*\*\*\*

	Pagina
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	3
OBJETIVO GENERAL	
OBJETIVOS PARTICULARES	
ALCANCE	
RESUMEN	4
CAPITULO I	
* Generalidades.	
1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.	5
1.2. CONDUCCIÓN.	
1.2.1. CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO.	
1.2.2. CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO.	6
1.3. CONVECCIÓN.	
1.4. RADIACIÓN.	7
1.4.1. RELACIONES DE ENERGÍA RADIANTE.	
1.4.2. TIPOS DE SUPERFICIE.	8
1.4.3. LEYES DE RADIACIÓN.	9
1.4.3.1. LEY DE DISTRIBUCIÓN DE PLANCK.	10
1.4.3.2. ECUACIONES DE MAXWELL.	11
1.5. PRINCIPIOS DE RADIACIÓN DE MICROONDAS.	
1.5.1. COMPONENTES PRINCIPALES DE UN HORNO DE MICROONDAS.	13
1.6. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES DEL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.	15
1.6.1. PARÁMETROS QUE AFECTAN EL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.	17
1.6.1.1. PROPIEDADES DIELECTRICAS.	18
1.6.1.2. PROPIEDADES DIELECTRICAS EN SISTEMAS HOMOGÉNEOS.	20
1.6.1.3. COMPORTAMIENTO DIELECTRICO.	
A. SOLVENTES POLARES.	25
B. SOLUCIONES IÓNICAS.	
C. SÓLIDOS ORGÁNICOS.	
D. MEZCLAS NO INTERACTIVAS.	
E. MEZCLAS INTERACTIVAS.	

	Pagina
1.6.2. MECANISMOS DE CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.	25
1.6.2.1. CONDUCCIÓN IÓNICA.	25
1.6.2.2. ROTACIÓN DIPOLAR.	
1.6.2.3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LAS INTERACCIONES.	26
1.7. CONVERSIÓN DE ENERGÍA.	
1.8. PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.	28
1.8.1. DISIPACIÓN DE POTENCIA Y TEOREMA DE POYNTING.	29
1.8.2. ECUACIÓN DE POYNTING APLICADO A LA ENERGÍA DE MICROONDAS.	
1.8.3. GENERACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.	32
1.8.4. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO EN HORNO DE MICROONDAS.	33
SIMULACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA EN UN HORNO DE MICROONDAS EN BASE A DIFERENTES ALTURAS.	35
A) CAVIDAD CARGADA HOMOGÉNEAMENTE.	
B) CAVIDAD CARGADA NO HOMOGÉNEAMENTE.	38

## CAPITULO II.

### \* Método de Elemento Finito.

2.1. INTRODUCCIÓN.	42
2.1.1. DEFINICIÓN.	44
2.2. MÉTODOS PARA IMPLEMENTAR LOS ALGORITMOS DE ELEMENTO FINITO.	
2.2.1. FUNDAMENTOS DEL PRINCIPIO VARIACIONAL.	45
2.2.2. ECUACIÓN DE EULER LAGRANGE.	47
2.2.3. MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS.	50
2.2.3.1. MÉTODO DE COLOCACIÓN POR PUNTOS.	50
2.2.3.2. MÉTODO POR COLOCACIÓN POR SUBDOMINIOS.	
2.2.3.3. MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.	52
2.2.3.4. MÉTODO DE GALERKIN (BUBNOV - GALERKIN)	53
2.3. ALGORITMO GENERAL PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MEF	54
2.4. EJEMPLOS DE LAS TÉCNICAS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.	56
2.4.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS EN LA RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.	

	Pagina
2.4.2. EJEMPLO DEL MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN.	
2.4.2.1 PROGRAMA PARA DETERMINAR LA TRANSFERENCIA DE CALOR 1-D POR CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO.	60
2.4.3. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO VARIACIONAL EN EL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.	61
2.5. APLICACIONES DE ELEMENTO FINITO EN LA INDUSTRIA DE ALIMENTOS.	
2.5.1. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.	66
2.5.2. OTROS USOS POTENCIALES DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.	73
	74

### CAPITULO III.

#### \* Transferencia de Calor en Estado Estacionario Bidimensional.

3.1. INTRODUCCIÓN.	80
3.2. FORMULACIÓN VARIACIONAL.	81
3.3. MATRICES DE ELEMENTO Y MATRICES DE FRONTERA.	84
3.4. EJEMPLO DE APLICACIÓN.	86
3.4.1. PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR EN DOS Y TRES DIMENSIONES.	89

### CAPÍTULO IV

#### \* Técnica de Elemento Finito en Estado Estacionario.

4.1. TRANSFERENCIA DE CALOR EN GEOMETRÍA AXISIMÉTRICA, UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.	99
4.1.1. INTRODUCCIÓN.	100
4.1.2. FUNDAMENTOS.	
4.1.2.1. CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE CALOR EN UN CILINDRO.	
4.1.3. EJEMPLO DE APLICACIÓN EN UN CILINDRO CON PROPIEDADES CONSTANTES Y SIN GENERACIÓN INTERNA DE CALOR.	102
4.1.3.1. PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN GEOMETRIAS AXISIMÉTRICAS PARA UN CILINDRO HUECO EN ESTADO ESTACIONARIO.	104

	<b>Pagina</b>
CONCLUSIONES.	<i>150</i>
BIBLIOGRAFÍA	<i>151</i>
ANEXOS	
ANEXO I "ESTADISTICOS"	<i>I</i>
ANEXO II "ELIMINACIÓN GAUSIANA"	<i>III</i>
ANEXO III "DESCOMPOSICIÓN LU"	<i>VI</i>
ANEXO IV "PROCEDIMIENTO DE GRAFICACIÓN"	<i>XII</i>
ANEXO V "PROGRAMA PARA CONSTRUIR EL GRAFICADOR BIDIMENSIONAL"	<i>XIV</i>
ANEXO VI "PROGRAMA PARA CONSTRUIR EL GRAFICADOR TRIDIMENSIONAL"	<i>XVI</i>
ANEXO VII "LISTA DE GRAFICOS, FIGURAS Y TABLAS"	<i>XVIII</i>
ANEXO VIII "NOTACIÓN DE SIMBOLOS"	<i>XX</i>



## INTRODUCCIÓN:

Mediante el estudio teórico de las operaciones unitarias y de los fenómenos de transporte asociados a ellas se han logrado desarrollar modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales que permiten predecir el comportamiento de las variables de proceso con bases bien fundamentadas.

Una de las herramientas más importantes que ha contribuido al avance científico y tecnológico en todos los ámbitos durante los últimos años, es la simulación computacional desarrollada en computadoras digitales, la cual ha influenciado en el diseño y control de procesos industriales para hacerlos más eficientes. La simulación digital de procesos se utiliza para caracterizar desde casos simples en la naturaleza hasta niveles de desarrollo industrial de procesos a gran escala. En el campo de la ingeniería, permite obtener modelos predictivos del funcionamiento de equipos de proceso, así como de operaciones unitarias.

Los fenómenos de transporte que son modelados por ecuaciones diferenciales en derivadas de espacio y tiempo se pueden caracterizar analíticamente solo para algunos casos en los que la geometría lo permite. En la mayoría de las aplicaciones, la geometría irregular da lugar a condiciones de frontera matemáticamente complicadas que impiden llevar a cabo la solución analítica en forma práctica, debido a la dificultad en la integración de las ecuaciones diferenciales.

El presente trabajo tiene como objetivo la integración numérica basada en algoritmos computacionales que es la alternativa más viable para resolver problemas de este tipo. Se utilizará el método de Elemento Finito (MEF) debido a la flexibilidad que implica en el manejo de las condiciones de frontera y de la geometría del sistema. Además se desarrollarán las soluciones analíticas por integración mediante series de Fourier para tener resultados con los cuales cuantificar la exactitud del método.

Una de las finalidades de esta tesis es la introducción de este método semiteórico, mediante el cual se optimizan los parámetros de una función de aproximación que se propone como solución a la ecuación diferencial y que es muy versátil en cuanto a su adaptación a geometrías irregulares frecuentemente encontradas en la mayoría de los alimentos. Abordaremos el caso particular de materiales sometidos a radiación electromagnética en el interior de un horno de microondas convencional, tratando de predecir la evolución de los perfiles de temperaturas durante procesos de calentamiento sin cambio de fase.

La estructura de este trabajo está basada en introducir las ideas fundamentales del MEF e ir aplicándolo progresivamente a la resolución de ecuaciones diferenciales de mayor grado de dificultad.

En el capítulo I se presenta un breve resumen de la fenomenología de los procesos de transferencia de calor y los modelos matemáticos correspondientes, tratando de profundizar en la transmisión de calor en hornos de microondas. Debido a que dicho proceso corresponde a un fenómeno de resonancia electromagnética, se analiza el significado físico de las ecuaciones de Maxwell y la forma en que se aplican en la

evaluación de los campos electromagnéticos en el interior de materiales sometidos a radiación, que depende de las propiedades eléctricas del material.

En el capítulo 2 se introducen los fundamentos matemáticos del MEF. Se da una breve reseña histórica de los trabajos relacionados al desarrollo de la técnica, desde finales del siglo XVII hasta la época actual. Se presenta la clasificación de los métodos de Elementos Finitos y se explican las características de cada uno de ellos. Se establecen las ideas básicas del Principio Variacional y se desarrolla el álgebra necesaria para llegar a la ecuación de Euler-Lagrange, que es requisito indispensable para que una ecuación diferencial pueda ser resuelta por Métodos Variacionales. Se explican los métodos de Residuos Ponderados, poniendo especial énfasis en la técnica de minimización del cuadrado del error y en el método de Galerkin, de los cuales se dan ejemplos numéricos. Posteriormente se desarrolla la aplicación de los principios variacionales a la ecuación diferencial gobernante para la transferencia de calor por radiación de microondas. Después se especifica un algoritmo de cómputo general, a nivel de diagrama de bloques, para la implementación de los métodos de elementos finitos. Finalmente se reporta una breve recopilación bibliográfica de los avances más recientes de la utilización de esta técnica en la industria de los alimentos, señalando ventajas y desventajas frente a otro tipo de soluciones.

En el capítulo 3 se empiezan a introducir los algoritmos computacionales en base a código qbasic, iniciando con el caso más sencillo que corresponde a la transferencia de calor por conducción en estado estacionario 1-D. Se construye un algoritmo de cómputo basado en el método de Galerkin retomando las bases para el transporte 1-D en coordenadas cartesianas desarrolladas en el capítulo 2. Además se analiza matemáticamente el proceso de transferencia de calor 1-D en coordenadas cilíndricas, realizando el álgebra matricial y llegando a la construcción del código qbasic para procesos de conducción entre cilindros concéntricos con condiciones de frontera isotérmicas, con y sin fuente interna de calor.

En el capítulo 4 se abordan problemas de transferencia de calor bidimensional en estado estacionario, para coordenadas cartesianas y cilíndricas, desarrollando el álgebra matricial para llegar a las ecuaciones características del MEF y construyendo los algoritmos computacionales correspondientes.

En el capítulo 5 se introduce el análisis de Elemento Finito combinado con Diferencias Finitas para la resolución de problemas de transferencia de calor en estado transitorio. Los resultados del algoritmo de cómputo híbrido se comparan contra la solución analítica obtenida mediante series de Fourier para problemas de fácil integración.

En el capítulo 6 se presenta un algoritmo de cómputo para transporte bidimensional de calor por radiación en estado transitorio, el cual puede ser útil en aplicaciones prácticas de calentamiento por medio de microondas.

## **OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL:**

Desarrollar modelos matemáticos y los correspondientes algoritmos de cómputo basados en métodos de elementos finitos variacionales para la caracterización de la evolución de los perfiles de temperatura en procesos de transferencia de calor por radiación en hornos de microondas que sean útiles para aplicaciones en la industria de alimentos.

### **OBJETIVOS PARTICULARES:**

1. Desarrollar modelos computacionales para la determinación de la distribución de temperaturas en procesos de transferencia de calor en diferentes geometrías bajo condiciones de estado estacionario.

2. Establecer la solución de problemas de Transferencia de Calor por radiación en diferentes geometrías y elaborar un programa de cómputo en base al método de los Elementos Finitos que permita predecir los cambios de los perfiles de temperatura que pueda ser aplicado en aplicaciones prácticas.

3. Determinar la exactitud de los modelos computacionales comparando con las soluciones que se desarrollen.

### **ALCANCES:**

Se considerarán propiedades eléctricas constantes de los materiales irradiados, procesos de transferencia de calor sin cambios de fase y geometrías regulares

## RESUMEN:

Se presenta un conjunto de programas de cómputo basados en el Método de Elementos Finitos para la caracterización de procesos de Transferencia de Calor en orden creciente de complejidad, empezando con el transporte unidimensional en estado estacionario tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas; posteriormente se aborda el problema de la transferencia bidimensional en coordenadas cartesianas y cilíndricas en estado estacionario y para el caso tridimensional con geometrías axisimétricas; por último se construyen los modelos matemáticos y algoritmos computacionales para transferencia de calor unidimensional por conducción en estado transitorio, finalizando con la aplicación de la transferencia de calor por radiación en hornos de microondas.

Se determina la exactitud del método comparando los resultados frente a las soluciones analíticas desarrolladas para casos en los cuales se puede integrar la ecuación diferencial de transferencia de calor.

## **Generalidades.**

### **1.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.**

Se le denomina transferencia de calor, a la manifestación del transporte de energía térmica de un punto a otro, como efecto de una diferencia de temperaturas o por un fenómeno de resonancia electromagnética.

Existen tres diferentes mecanismos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación.

### **1.2 CONDUCCIÓN.**

La conducción es el mecanismo molecular de transferencia de calor, el cual se manifiesta por medio de la transferencia de energía de movimiento traslacional, rotacional o vibracional, entre moléculas adyacentes en un material. Las moléculas "más calientes", presentan mayor energía interna y se encargan de impartir energía a las moléculas colindantes con niveles energéticos menores.

Este tipo de energía siempre está presente en mayor o menor grado en los sólidos, líquidos y gases, en los que exista un gradiente de temperaturas.

#### **1.2.1 CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO.**

El modelo matemático que caracteriza la transferencia de calor por conducción en estado estacionario es conocido como ley de Fourier, la cual manifiesta que en un campo de temperaturas no homogéneas el flujo de calor por unidad de área es proporcional al gradiente de temperaturas, como se muestra en la siguiente ecuación, escrita para flujo unidireccional en estado estable:

$$Q/A = -k \, dT / dx. \quad (1.1)$$

Donde: Q es el flujo de calor en la dirección x ( $MT^{-3}$ ); A es el área perpendicular a la dirección del flujo de calor ( $L^2$ ); T es la temperatura ( $\theta$ ); x es la distancia (L), y el factor de proporcionalidad k es la conductividad térmica.

La cantidad Q/A se denomina flujo específico de calor, densidad de flujo o simplemente flux. Mientras que la cantidad  $dT/dx$  es la rapidez del cambio de temperatura con la distancia x (o sea el gradiente de temperaturas). El signo negativo indica que el flujo de calor se verifica en sentido contrario del gradiente de temperaturas, de puntos calientes a puntos fríos.

La ecuación 1.1 fue desarrollada por Jean Baptiste Fourier a principios del siglo XIX para obtener un modelo matemático ad-hoc que caracterizase la transferencia de calor por conducción y constituye la definición de la conductividad térmica como el factor de proporcionalidad que relaciona a la densidad de flujo de calor y el gradiente de temperatura.

Para transporte tridimensional de calor, la ley de Fourier se formula en términos del operador vectorial diferencial Nabla, relacionando el gradiente del potencial térmico:

$$\vec{q} = -k\nabla T. \quad (1.2)$$

Donde  $\vec{q}$  es el vector de densidad de flujo de calor por conducción.

### 1.2.2. CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO

El modelo matemático para la transferencia de calor en estado transitorio corresponde a un balance de flujos de entradas – salidas de calor transportado por conducción y la energía térmica almacenada en un elemento de volumen de control. La formulación se puede establecer fácilmente utilizando la función divergencia del campo de flux de calor, de la siguiente manera:

$$-\nabla \cdot \vec{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

Sustituyendo la definición de  $\vec{q}$ , obtenemos:

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.4)$$

En un espacio isotrópico y homogéneo, k es constante y se puede escribir la ecuación anterior en función del operador Laplaciano:

$$k\nabla^2 T = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.5)$$

## 1.3 CONVECCIÓN

La transferencia de calor por convección corresponde al flujo de energía térmica asociado a una corriente de fluido que se mueve con velocidad  $v$ . Escribiendo esto en lenguaje matemático, tenemos:

$$-\nabla \cdot H\vec{v} = -\nabla \cdot \rho C_p (T - T_{ref}) \vec{v} \quad (1.6)$$

Donde la divergencia negativa expresa el flujo de entradas – salidas de energía térmica (Entalpía) asociada a la corriente de fluido cuya velocidad es  $v$ . Para un fluido en el que no ocurre un cambio de fase, la entalpía es igual al producto de la capacidad calorífica por la diferencia de temperaturas entre el fluido y una temperatura de referencia para la evaluación del contenido entálpico.

La convección es el mecanismo de transferencia de calor en donde las moléculas se mueven de un punto a otro dentro en un fluido e intercambian energía con las moléculas en otra posición. Existen dos tipos de convección: natural y forzada. La diferencia radica en que en la primera el movimiento del fluido se debe totalmente a diferencias en las densidades que resultan de gradientes de temperaturas en un fluido; la segunda requiere de un dispositivo mecánico que provoca el flujo.

En situaciones prácticas y sobre todo para el manejo de condiciones de frontera, la transferencia de calor por convección se evalúa como la velocidad del intercambio de calor en la interfase entre un fluido y un sólido. Esta velocidad de calor transferido por convección es proporcional a la diferencia de temperaturas y se expresa como:

$$q_{\text{convección}} = h_T A (T_m - T_s) = h_T A \Delta T \quad (1.9)$$

En donde  $h_T$  es el coeficiente convectivo de transferencia de calor;  $A$  es el área de interfase donde el calor está siendo transferido y  $\Delta T$  es la fuerza impulsora para la transferencia de calor;  $T_m$  es la temperatura promedio del fluido y  $T_s$  es la temperatura interfacial. El coeficiente  $h_T$  se determina empíricamente y es una función de las condiciones de flujo y de la geometría de la interfase.

## 1.4 RADIACIÓN

En el caso de los mecanismos de transferencia de calor por conducción y convección se requiere la existencia de un medio material; para la conducción se necesita que haya una desigualdad de temperatura entre los puntos contiguos del medio, mientras que en la convección debe existir un fluido con libertad de movimiento, que en su desplazamiento transporte energía.

El tercer mecanismo de transferencia de calor es la radiación, en el cual la energía es transportada a la velocidad de la luz sin necesitar de un medio material. Siendo el único mecanismo que transporta calor en el vacío.

El mecanismo de transporte de calor por radiación está constituido fundamentalmente por tres etapas o fases:

1) La emisión de energía térmica por una fuente de calor, tal como el sol, el magnetrón en un horno de microondas o la pared de un horno a fuego directo que emite energía radiante en forma de ondas electromagnéticas (con preferencia en el intervalo del infrarrojo, ultravioleta, visible, radiación térmica, etc.).

2) Las ondas electromagnéticas se desplazan a través del espacio en línea recta y a la velocidad de la luz.

3) Cuando las ondas electromagnéticas se ponen en contacto con otro cuerpo, una porción de la energía incidente es absorbida por él y se vuelve a transformar en energía térmica, en un proceso de resonancia.

La radiación térmica es el mecanismo dominante en equipos a altas temperaturas, tales como calderas y hornos. A temperaturas inferiores a 1000 °F, solo proporciona una distribución en el calor transferido, y esta aportación decrece con la temperatura. En un medio gaseoso la radiación térmica actúa simultáneamente con el mecanismo de transferencia de calor por convección.

En un horno de microondas, un dispositivo electromagnético, el magnetrón, produce campos electromagnéticos de cierta frecuencia que llenan el interior de la cavidad incidiendo sobre los materiales a calentar, los cuales incrementarán su temperatura si algún proceso tal como la vibración dipolar de las moléculas de agua entra en resonancia con las ondas electromagnéticas incidentes.

### 1.4.1 RELACIONES DE ENERGÍA RADIANTE

El proceso de transferencia de calor puede ser considerado basándose en las formas en que la energía incide sobre un cuerpo y es aprovechada ó se encuentra en tránsito, y se acostumbra expresar dicha energía en términos de porcentajes ó cocientes.

Se utilizan dos importantes términos para describir la relación de energía:

1) Energía Emisiva Total ( $E_T$ ) es aquella energía radiante que se emite desde la superficie de un cuerpo, cuando se calienta y se expulsa en forma de ondas electromagnéticas en todas direcciones. Cuando ésta energía se pone en contacto con un cuerpo receptor, parte de ella es reflejada, otra es transmitida y otra absorbida.

2) Irradiación Total ( $G$ ), que es la energía incidente ó entrante en una superficie.



La fig. 1.1. describe el efecto de la radiación entrante en una superficie. El balance de energía en la superficie puede ser definido en términos de G como:

$$G = \alpha_a G + \rho_r G + \tau_t G \quad (1.10)$$

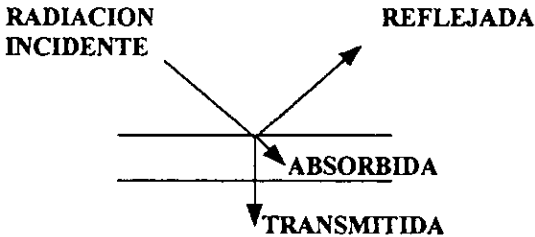
$$1 = \alpha_a + \rho_r + \tau_t \quad (1.11)$$

donde:

$\alpha_a$  = es la fracción de energía radiante absorbida por la superficie.

$\rho_r$  = es la fracción de energía reflejada por la superficie.

$\tau_t$  = es la fracción de energía transmitida por la superficie.



**Fig.1.1. Distribución de la energía incidente sobre la superficie de un cuerpo.**

#### 1.4.2 TIPOS DE SUPERFICIE.

En el estudio de transferencia de calor por radiación, al estudiar los tipos de superficie tenemos que referimos convencionalmente al cuerpo negro, el cual representa una superficie ideal que absorbe toda la energía radiante sin hacer caso de la dirección o longitud de onda. Por lo que es un excelente “absorbedor de calor” y por definición obtenemos que las propiedades de un cuerpo negro son:

$$\alpha_a = 1; \rho_r = 0; \tau_t = 0$$

Para la mayoría de los propósitos de ingeniería, los cuerpos son opacos cuando presentan cero de transmitividad, pero varían en el grado de absorptividad y reflectividad.

En adición a esto, un cuerpo negro también es un excelente emisor de energía. La totalidad de energía transmitida por un cuerpo negro es una función de la temperatura del cuerpo. Sin embargo, es emitida a diferentes longitudes de onda.

### 1.4.3 LEYES DE LA RADIACIÓN.

Para explicar el espectro de un cuerpo negro se propusieron varios modelos que son hoy en día conocidos solo de carácter histórico. El primero propuesto por Wilhelm Wien en 1894, el cual predice el espectro del cuerpo negro a longitudes de onda bajas, el segundo modelo fue propuesto por Rayleigh y Jeans en 1900 en el que se proporciona un espectro que se ajusta muy bien a los datos experimentales para longitudes de onda altas.

Sin embargo, no existía una continuidad entre los modelos propuestos en la zona del ultravioleta, a este suceso se le denominó como la "Catástrofe del ultravioleta".

Para octubre de 1900 el Físico Alemán Max Planck presenta un modelo empírico que se ajusta con las curvas observadas para el cuerpo negro y en ese mismo año presentó una teoría para la justificación del modelo propuesto por él.

#### 1.4.3.1 LEY DE DISTRIBUCION DE PLANCK.

Esta ley enuncia que para cada valor de longitud de onda se tiene un correspondiente potencial emisor por unidad de volumen.

$$E_{b\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \left[ \frac{1}{e^{(c_2/\lambda T_a)} - 1} \right] \quad (1.12)$$

Donde:

$E_{b\lambda}$  = Potencia emisiva por unidad de volumen.

$c_1 = 2\pi c^2 h_P$

$c_2 = ch / k_B$

$c$  = velocidad de la luz ( $3.00 \times 10^8$  m/s).

$h_P$  = constante de Planck ( $6.63 \times 10^{-34}$  J s).

$k_B$  = constante de Boltzman ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K).

$T_a$  = Temperatura absoluta (°K).

$\lambda$  = longitud de onda (m).

La radiación para un intervalo diferencial  $d\lambda$  corresponde a una diferencial de energía:

$$dE_b = E_b \lambda d\lambda. \quad (1.13)$$

Esta ecuación especifica el flujo de energía que es emitido por un cuerpo negro en el rango de longitudes de onda de  $\lambda$  y  $\lambda+d\lambda$ . Para problemas prácticos de transferencia de calor por radiación se requiere un flujo de energía promedio para una temperatura dada; de esta forma se integra la ecuación anterior en un rango de longitudes de onda, que para un cuerpo negro corresponde de cero a infinito.

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{c_1}{\lambda^5} \left[ \frac{1}{e^{(c_2/\lambda T_a)} - 1} \right] d\lambda$$

$$E_b = 2\pi c^2 h \int_0^{\infty} \left[ \frac{\lambda^{-5}}{e^{(c_2/\lambda T_a)} - 1} \right] d\lambda \quad (1.14)$$

En esta integración se efectúa el siguiente cambio de variable  $x = c h_p / K_B T_a \lambda$ , la integración se realiza desarrollando  $1 / (e^x - 1)$  en función de  $e^x$  e integrando término a término.

$$E_b = \frac{2\pi K_B^4 T_a^4}{c^2 h_p^3} \left[ \frac{\pi^4}{15} \right] \quad (1.15a)$$

El flujo de energía emisivo para un cuerpo negro es:

$$E_b = \left[ \frac{2\pi^5 K_B^4}{15c^2 h_p^3} \right] T_a^4 \quad (1.15b)$$

Substituyendo los valores de  $c$ ,  $h_p$  y  $K_B$  se obtiene la constante de Steffan-Boltzman:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[ \frac{2\pi^5 K_B^4}{15c^2 h_p^3} \right] = 4.878 \times 10^{-8} \text{ Kcal} / \text{m}^2 \text{h}^\circ \text{K}^4 \\ &= 1.322 \times 10^{-14} \text{ Btu/Ft}^2 \text{h}^\circ \text{R} \end{aligned} \quad (1.16)$$

La igualdad expresada en la ec. (1.14) se conoce como la ecuación de Steffan-Boltzman, que es utilizada ampliamente.

$$E_b = \sigma T_a^4 \quad (1.17)$$

La ecuación de Steffan-Boltzman implica que en todo cuerpo radiante de energía, la cantidad de energía irradiada es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta

### 1.4.3.2 ECUACIONES DE MAXWELL.

La teoría electromagnética se basa en las formulaciones de James Clerk Maxwell, que llegó a un planteamiento matemático a partir de las ecuaciones de Gauss y Faraday conocidas en su época, reduciendo significativamente las leyes de la electricidad y el magnetismo a cuatro ecuaciones diferenciales que comprende flujos y circulaciones de campos eléctricos y magnéticos, distribución de carga y densidad de corriente, las cuales se conocen como las ecuaciones de Maxwell, y se muestran a continuación en la tabla 1.1:

SIMBOLO	NOMBRE	ECUACIÓN	No.
I	Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \epsilon_0$	(1.18)
II	Ley de Gauss para el campo magnético	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	(1.19)
III	Ley de inducción de Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\phi_B$	(1.20)
IV	Ley de Ampere	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(\epsilon_0 d\phi_E / dt + I_c)$ $= \mu_0(I_d + I_c)$	(1.21)

**Tabla 1.1 Ecuaciones básicas del electromagnetismo.**

En la tercera ecuación aparece el término  $-d\phi_B / dt$  que se interpreta informalmente diciendo que: " Si el flujo de un campo magnético cambia ( $d\phi_B / dt$ ), se produce un campo eléctrico que induce el campo magnético ".

Maxwell demostró que existía una inconsistencia lógica en la Ley de Ampere, cuando se aplicaba a situaciones relacionadas con campos eléctricos dependientes del tiempo, ya que anteriormente se suponía que no existían campos eléctricos variables de tal forma que el segundo término era cero en la ecuación 1.20. Descubrió que esa inconsistencia se podría evitar añadiendo el término de corriente de conducción a la de corriente de desplazamiento.

Una consecuencia importante de la idea de Maxwell consiste en prever la existencia de las ondas electromagnéticas, ya que demostró que por medio de sus ecuaciones que una perturbación electromagnética al propagarse debería presentar todas las características del movimiento ondulatorio; por lo tanto, de acuerdo con Maxwell, dicha radiación electromagnética, experimenta la reflexión, la refracción, y la difracción exactamente como sucede con todas las ondas. Por este motivo, la perturbación constituida por la propagación del campo eléctrico y magnético ha recibido el nombre de "onda electromagnética".

La predicción de Maxwell de la existencia de ondas electromagnéticas fue confirmada por Hertz en 1887.

Hertz produjo ondas electromagnéticas por las oscilaciones de electrones en los hilos metálicos de un circuito de C. Alterna modulado; el detecto estas ondas usando un aro de alambre (igual que la antena de los aparatos de TV o radio detectan señales de las transmisores de TV o de Radio).

El campo eléctrico oscilante de la onda electromagnética ejerce una fuerza variable con el tiempo sobre los electrones en los hilos del circuito detector, produciendo, por tanto una corriente alterna en estos hilos.

Otra relación importante encontrada por Maxwell es la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.22)$$

Donde:

$c$  = Velocidad de propagación de una onda electromagnética

$\mu_0$  = Permeabilidad del vacío =  $4\pi \times 10^{-7}$  Tm/A

$\epsilon_0$  = Permitividad del vacío =  $(.854 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup> / Nm<sup>2</sup>)

Sustituyendo los valores dentro de la ecuación 1.20, obtenemos:

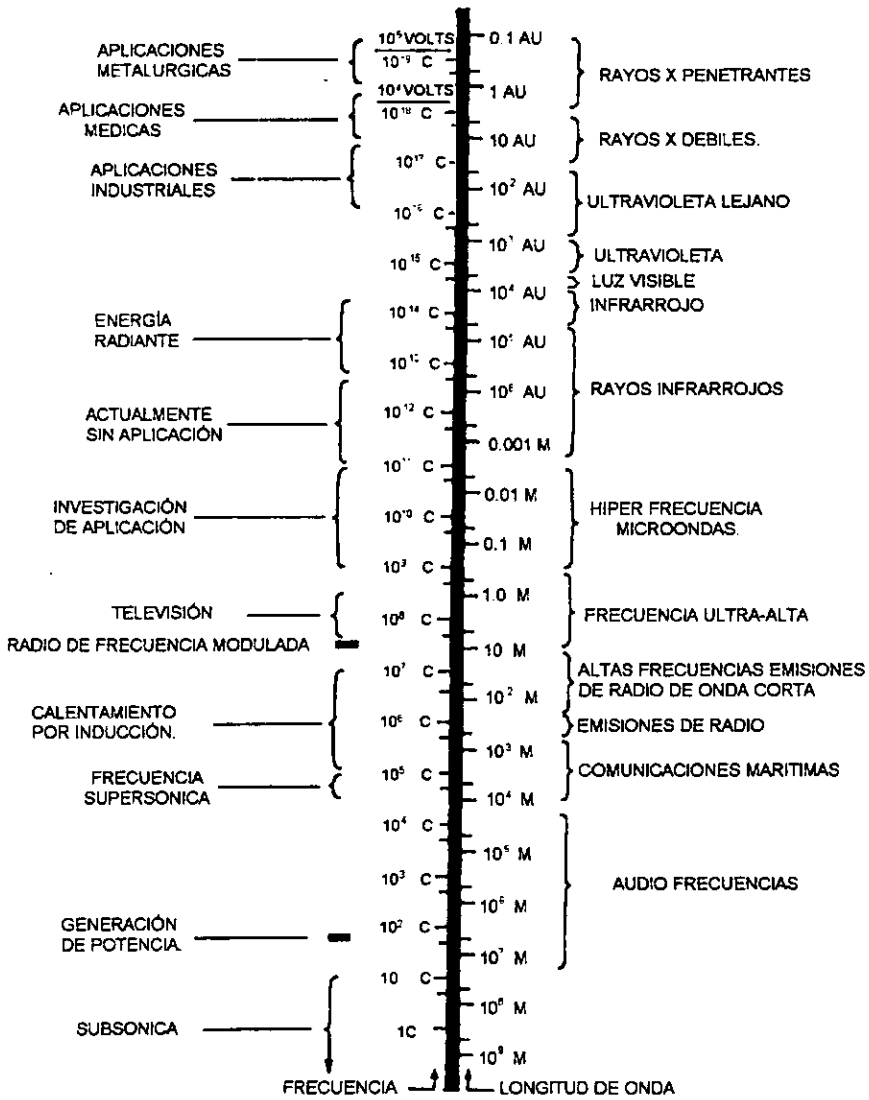
$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} (\text{T m / A}) * 8.854 \times 10^{-12} (\text{C}^2 / \text{Nm}^2)}} = 2.99 \times 10^8 \quad (\text{m / s})$$

La constante  $c$  fue determinada experimentalmente por Hippolyte Fizeau en 1849 obteniendo un valor de  $2.998 \times 10^8$  (m/s).

## 1.5 PRINCIPIOS DE RADIACIÓN DE MICROONDAS

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética en el intervalo de 400 nm (luz violeta) a 750 nm (Luz roja), pero no hay límite ni superior ni inferior para los valores de  $\lambda$  y  $\nu$  de una onda electromagnética la figura 1.3 muestra el espectro electromagnético, el intervalo de frecuencias y longitudes de onda de las ondas electromagnéticas. Por comodidad, el espectro electromagnético se divide en varias regiones pero no hay fronteras bruscas entre regiones adyacentes.

Las microondas son ondas electromagnéticas que cubren una parte del espectro electromagnético, normalmente consideradas dentro del rango de frecuencias de 300 MHz a 300 GHz, se encuentran delimitadas por las radioondas y las radiaciones infrarrojas.



**Fig 1.2 Espectro Electromagnético**

Las microondas son una radiación no ionizante. A diferencia de la radiación ionizante como los rayos gamma y los rayos X que provocan el rompimiento de las ligaduras químicas o causan cambios moleculares en componentes por la extracción de sus electrones, las microondas interaccionan con los materiales dieléctricos para la generación de calor por medio de la excitación de las moléculas sujetas a un campo electromagnético oscilante.

Las microondas viajan de la misma manera que un rayo de luz en línea recta, pueden ser reflejadas por un objeto metálico, absorbidas por algunos materiales dieléctricos (como por ejemplo: El agua, carbón, Los alimentos con alto índice de humedad y sustancias polares); y transmitidas sin acción significativa a través de otros materiales dieléctricos (como ejemplo de los materiales transparentes a las microondas son: El vidrio, los cerámicos y los termoplásticos, que permiten pasar a las microondas con poca o nula absorción)<sup>[Ducarcou, 1986]</sup>.

### 1.5.1 COMPONENTES PRINCIPALES DE UN HORNO DEMICROONDAS.

El horno de microondas es un dispositivo de amplio uso doméstico para calentar alimentos. Sin embargo, a escala industrial aún tiene poco uso a pesar de su limpieza en la generación de calor y la alta eficiencia en el aprovechamiento de la energía térmica.

Un horno de microondas está constituido de siete componentes principales:

- 1) *El abastecedor de energía* conformado por un transformador que convierte la energía eléctrica de 240 v (60 Hz) de corriente alterna a 4Kv (A.C.) la que a su vez es rectificadora a corriente directa y que es la energía requerida por el magnetrón para hornos pequeños.
- 2) *Magnetron* el cual es un oscilador que convierte la energía de baja frecuencia (60 Hz) a energía de alta frecuencia (de 915 a 2450 MHz)
- 3) *El guía de ondas*, el cual permite la transferencia de energía del magnetron al horno.
- 4) *La cavidad del horno* constituida por paredes metálicas donde la energía es reflejada y distribuida a los alimentos.
- 5) *El ventilador*, el cual mantiene frío al magnetron.
- 6) *Un agitador de campo*, el cual es un dispositivo que se encuentra dentro de la cavidad y es semejante a un ventilador.
- 7) Y por último los *Controles de Seguridad y Operación del horno*.

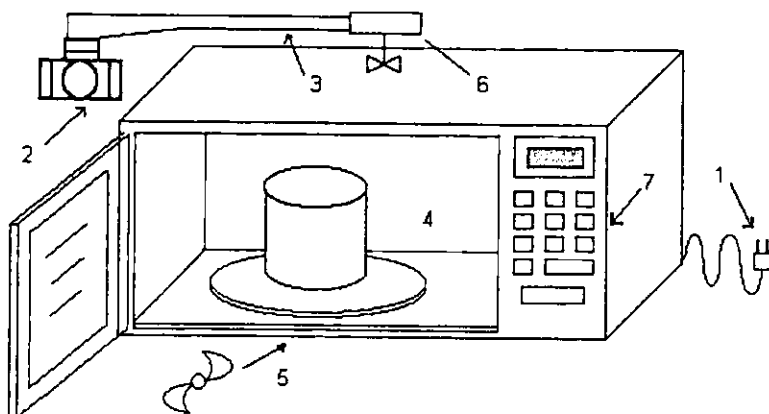


Fig 1.3 Componentes principales de un horno de microondas.

Las microondas viajan en el espacio libre a la velocidad de la luz, su longitud de onda en el espacio libre ( $\lambda_0$ ) está relacionado a la frecuencia con la siguiente ecuación:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \quad (1.23)$$

Donde:

- $\lambda_0$  = longitud de onda en el vacío
- c = Velocidad de la luz.
- f = Frecuencia (ciclos/s)

En la siguiente tabla (1.2) se ilustra las diferentes regiones en el espectro electromagnético:

NOMBRE	ABREVIATURA.	FRECUENCIA.
MUY BAJA FRECUENCIA.	VLF	10-30 KILOCICLOS.
BAJA FRECUENCIA.	LF	30-300 KILOCICLOS.
MEDIA FRECUENCIA.	MF	300-3000 KILOCICLOS.
ALTA FRECUENCIA.	HF	3-30 MEGACICLOS.
MUY ALTA FRECUENCIA.	VHF	30-300 MEGACICLOS.
ULTRA ALTA FRECUENCIA.	UHF	300-3000 MEGACICLOS.
SUPER ALTA FRECUENCIA.	SHF	3-30 GIGACICLOS.
EXTRA ALTA FRECUENCIA.	EHF	30-300 GIGACICLOS.

Tabla 1.2 Rango de frecuencias para las diferentes regiones en El espectro electromagnético. [Decareau, 1986]



## 1.6. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES DEL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.

Las microondas se utilizan para el procesamiento de alimentos debido a que ellos generalmente presentan altas constantes dieléctricas relativas por el alto contenido de humedad, así como una tangente de pérdida relativamente alta, (0.1 - 1.0).

La energía de microondas es la única que puede combinarse con otras fuentes de energía para la obtención de un resultado deseable, utilizando algunas unidades que combinan el calentamiento por microondas con otros métodos de calentamiento convencional, dependiendo del material alimenticio.

El procesamiento por microondas ofrece diferentes ventajas, cuando se le compara con métodos de calentamiento convencional, presentando beneficios como:

- \* Velocidad de operación: el calentamiento por microondas se lleva a cabo en una cuarta parte del tiempo en comparación con un calentamiento convencional.

- \* Uniformidad de calentamiento: debido a que las microondas penetran en el alimento, provocando un calentamiento interno y no sobre la superficie y el sobrecalentamiento de la superficie puede ser evitado.

- \* Calidad del producto: el acelerado calentamiento y el control de velocidad ofrece una alta calidad del producto, en términos de textura y contenido nutricional.

- \* Ahorro de energía: es posible un uso más eficiente de energía, ya que el calentamiento por microondas, toma lugar dentro del material alimenticio, y no en el medio circundante.

- \* Calentamiento selectivo: debido a la selectividad de un material para absorber energía de microondas; esto puede dar lugar a una gran eficiencia en el calentamiento y así mismo causar perfiles de temperatura en sistemas de alimentos multicomponentes.

Las principales aplicaciones de microondas en el procesamiento de alimentos, se muestran a continuación en la tabla 1.3:

PROCESO:	OBJETIVO:	PRODUCTOS:
BLANQUEADO	Inactivación Enzimática	Frutas, vegetales, maíz.
COCINADO	Modificación del sabor y Textura	Piezas de carne, pollo, salchichas, sardinas.
HORNEADO	Modificación del sabor y Textura.	Levantamiento de pastas ó pan.
SECADO	Reducción del contenido de humedad	Pastas, cebolla, y jugos de frutas.

PROCESO:	OBJETIVO:	PRODUCTOS:
PASTEURIZACIÓN	Inactivación de Microorganismos Vegetativos	Leche, yoghurt, alimentos precocidos, jamón, pescado, pan y bebidas.
ESTERILIZACIÓN	Inactivación completa de esporas	Alimentos precocidos semisólidos.
TEMPLADO	Elevación de la temperatura justo abajo de la temperatura de congelación.	Piezas de carne, pescado, pollo, etc.

**Tabla 1.3. Principales aplicaciones de energía de microondas en alimentos.**  
[Reyes - Solano,1995].

### 1.6.1 PARÁMETROS QUE AFECTAN EL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.

El calentamiento de materiales por la energía de microondas es afectado por diferentes aspectos, como pueden ser: las características, y las partes componentes del equipo empleado (capacidad, modelo, frecuencia a la cual se usa, etc.), así como las características del material que se calienta (propiedades dieléctricas y físicas), además del impacto de cada uno de estos que debe ser considerado en el desarrollo de la tecnología de producción del producto y el diseño del sistema de procesamiento<sup>[Reyes - Solano, 1995]</sup>.

#### 1.6.1.1. PROPIEDADES DIELECTRICAS.

Las propiedades dieléctricas de los alimentos son de gran interés en el área de ingeniería, ya que determinan el acoplamiento y distribución de energía al ser sometidas a un proceso de calentamiento por medio de altas frecuencias en las cuales exista transferencia de calor por medio de conducción y radiación.

Los materiales biológicos son malos conductores de calor, así como capacitores no ideales; en términos de su habilidad de almacenar y disipar energía eléctrica en un campo electromagnético por radiación<sup>[Von Hippel, 1974]</sup>.

Estas propiedades resultan del almacenamiento de y pérdida de energía eléctrica relacionados con la capacitancia y resistencia eléctrica, y son definidas como propiedades dieléctricas, las cuales pueden ser expresadas en términos de conductividad compleja:

Una de las propiedades de interés para el procesado de alimentos por microondas es la constante dieléctrica ( $k'$  ó  $\epsilon'$ ) que es una medida de la habilidad para almacenar energía eléctrica, mientras que el factor dieléctrico de pérdida relativo ( $k''$  ó  $\epsilon''$ ) es la medida que muestra la habilidad del material para disipar la energía eléctrica en forma de calor.

El término “relativo” se introduce para mostrar el hecho de que los valores se determinan en relación con el aire o al vacío, volviéndose así adimensionales. Sin embargo, a veces se omite el término “relativo”. Las denominaciones de permitividad y capacidad se recomiendan en la actualidad, con preferencia al término de constante dieléctrica.

Al determinar la constante dieléctrica y el factor dieléctrico de pérdida para un material, se puede calcular la permitividad compleja relativa de un material, usando la siguiente relación:

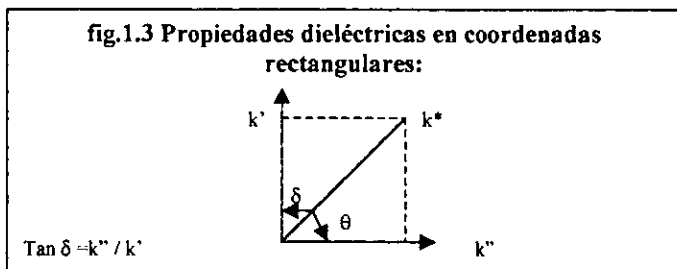
$$k^* = k' - i k'' \tag{1.24}$$

Donde:

- $k^*$  = permitividad compleja relativa.
- $k'$  = constante dieléctrica.
- $k''$  = factor dieléctrico de pérdida.
- $i$  = constante

Los componentes de la permitividad relativa compleja se obtienen a partir de la división de la permitividad compleja por la constante dieléctrica del espacio libre ( $8.854 \times 10^{-12}$  Faraday/m) [Sarbacher y Edson, 1956]; en donde el componente real es la constante dieléctrica y la componente imaginaria es el factor dieléctrico de pérdida, y la constante dieléctrica que es definida como la tangente de pérdida.

Estas propiedades se ilustran como vectores cartesianos para una capacitor ideal por medio de un gráfico de tiempo & variación del campo.



El radio del material dieléctrico para esta constante dieléctrica es definido como el factor de disipación ó tangente de pérdida.

$$D = \tan \delta = k'' / k' \tag{1.25}$$

Como se observa en la figura el ángulo de pérdida es complementario a la fase del ángulo entre el voltaje y la currencia relacionada al material de impedancia en conducción eléctrica.

La tangente de pérdida está definida para el material, como la habilidad a ser penetrado por un campo eléctrico y disipar la energía eléctrica en forma de calor; de esa forma los materiales pueden ser clasificados basándose en la tangente de pérdida

Existen materiales con un alto valor en su tangente de pérdida, tales como el agua, que absorbe la energía de microondas eficientemente, mientras que materiales como el teflón que son altamente transparentes a las microondas generan poco calentamiento, presentando así tangentes de pérdida bajos. Es importante mencionar que dichas propiedades varían considerablemente con la frecuencia y la temperatura de procesamiento.

### 1.6.1.2 PROPIEDADES DIELECTRICAS EN SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Las propiedades dieléctricas de los alimentos y otros materiales biológicos son determinadas por su contenido de humedad, sólidos y contenido de sales.

Estas propiedades son caracterizadas como una función de la frecuencia y la temperatura por una ecuación designada como el modelo distributivo, que se basa en el tratamiento de alimentos sólidos como una mezcla homogénea de dos fases, que presenta iones acuosos dieléctricamente activos y el alimento sólido inerte.

En el modelo de distribución, la constante de permitividad compleja para una solución por unidad de volumen está dada por:

$$k^*_m = k'_c k_{vc} + k'_s X_{vs} \tag{1.25}$$

Donde:

- $k^*_m$  = Permitividad compleja relativa para la mezcla.
- $k'_c$  = Permitividad relativa compleja para la fase continua.
- $k'_s$  = Permitividad relativa compleja para la fase suspendida.
- $X_{vc}$  = Fracción volumen para la fase continua.
- $X_{vs}$  = Fracción volumen para la fase suspendida.

Las propiedades para la fase acuosa son predichas por el modelo de Hasted Debye, para soluciones acuosas iónicas <sup>[Mudgeert, 1988]</sup>.

$$\epsilon' = \frac{k'_s - 2\delta C - k'_0}{1 + (\lambda_s / \lambda)^2} + k'_0 \tag{1.27}$$

$$\epsilon_i = \frac{(k'_s - 2\delta c - k'_0)(\lambda_s / \lambda)}{1 + (\lambda_s / \lambda)^2} + \frac{\Lambda C}{1000\omega\epsilon_0} \tag{1.28}$$

Donde:

C = concentración de sales disueltas.

$k'$  = constante dieléctrica relativa para la solución iónica.

$k''$  = factor dieléctrico de pérdida para la solución iónica.

$k'_s$  = constante dieléctrica estática

$k'_0$  = constante dieléctrica óptica.

$\epsilon_0$  = constante dieléctrica en el espacio libre. ( $8.854 \times 10^{-14}$  Faraday / cm).

$\omega$  = frecuencia angular (radianes).

$\lambda$  = longitud de onda en el dieléctrico (cm).

$\lambda_0$  = longitud de onda en el espacio libre (cm).

$\delta$  = Número promedio de hidratación.

$\Lambda$  = Conductividad equivalente de iones en solución (mhocm<sup>2</sup>/eq).

El modelo de Hasted Debye se utiliza también para estimar la constante dieléctrica y el factor dieléctrico de pérdida en fluidos iónicos de bajo contenido de sólidos suspendidos, tal como el jugo de frutas y la leche como una función de la temperatura y la frecuencia.

Las propiedades dieléctricas básicas se relacionan a otras propiedades eléctricas que afectan la distribución de energía eléctrica dentro de un producto y la eficiencia de transferencia de energía del equipo de procesamiento por microondas al producto.

La distribución de energía dentro de un material biológico es determinada por un factor de atenuación relacionando al material por su constante dieléctrica y la tangente de pérdida dieléctrica. Estas propiedades varían con el tiempo y posición durante el ciclo de calentamiento, como una función de frecuencias de procesamiento y el gradiente local de temperaturas.

La generación de calor puede ser modelado utilizando la ec. de Lambert-Bougerot o una solución más rigurosa utilizando las ecs. de Maxwell para determinar el término de potencia absorbida de las microondas.

La potencia atenuada en alguna profundidad desde la superficie es determinada por el factor de atenuación basado en la ecuación de absorción de Bougerot - Lambert [Mudgett1988]

$$P_a = P_o e^{-2\alpha \Delta x} \quad (1.29)$$

Donde:

$P_a$  = Potencia absorbida o atenuada por la profundidad.

$P_o$  = Potencia inicial.

$\alpha$  = Factor de atenuación.

$\Delta x$  = Profundidad.

El factor de atenuación es definido como sigue:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[ \frac{\epsilon' [1 + \tan^2 \delta]^{1/2} - 1}{2} \right]^{1/2} \quad (1.30)$$

El factor de atenuación es el recíproco de la profundidad de penetración (o profundidad bajo la superficie), en un material; en el que la intensidad del campo eléctrico ha decaído hasta un porcentaje  $1/e$ .

Cuando la potencia incidente es absorbida a la mitad, la profundidad a la que esto sucede se le denomina "profundidad de media potencia".

$$D_{50} = \frac{0.189\lambda_0}{\epsilon'^{1/2} \left[ [1 + \tan^2 \delta]^{1/2} - 1 \right]^{1/2}} \quad (1.31)$$

Donde:

$D_{50}$  = Profundidad de media potencia.

$\epsilon'$  = constante dieléctrica.

$\lambda_0$  = longitud de onda en el espacio libre.

$\tan \delta$  = tangente de pérdida.

Para valores de la  $\tan \delta \ll 1$  la ecuación anterior puede ser simplificada a:

$$D_{50} = 0.269\lambda_0 / \epsilon'^{1/2} \tan \delta. \quad (1.32)$$

El comportamiento dieléctrico de productos homogéneos (líquidos), durante el procesamiento de alimentos y bebidas, puede no depender únicamente de las propiedades de líquidos tales como el aceite, agua, ó alcohol (así como mezclas de las mismas) sino además de los efectos que provoquen sólidos disueltos y suspendidos, que pueda contener el líquido.

Los productos homogéneos líquidos pueden ser considerados para incluirlos dentro de suspensiones que contengan partículas de sólidos relativamente pequeñas, como ejemplos serían los jugos (naranja, tomate, o pera).

Las propiedades eléctricas de sistemas heterogéneos (volumétricas) en cuanto a humedad, sales disueltas, y sólidos suspendidos pueden ser idénticas en este tipo de productos, pero son diferentes con respecto al tamaño de partícula, homogeneidad y distribución de temperatura.

### 1.6.1.3 COMPORTAMIENTO DIELECTRICO.

Generalmente el comportamiento dieléctrico de un material alimenticio va a depender de sus propiedades físicas; tales como la temperatura, humedad, densidad, área superficial, (tamaño - forma), masa,  $C_p$ , ya que estos factores son decisivos en la profundidad de penetración de las microondas dentro del alimento, la velocidad global de calentamiento, y la velocidad de transferencia de calor (conducción interna y convección superficial) son determinadas por la conductividad térmica [Reyes - Solano, 1995].

#### A. SOLVENTES POLARES.

Al referirnos a solventes polares en alimentos tenemos que referirnos necesariamente al agua, ya que es el solvente más poderoso, así como el componente mayoritario de la mayoría de los alimentos, además de ser el principal componente que afecta significativamente el comportamiento dieléctrico durante el calentamiento por medio de microondas, por los efectos de polarización - orientación. Estos efectos resultan de la descomposición del tetraedro de hidrógeno al ser sometido a altas frecuencias, que están asociados con la rotación de moléculas de agua libres (dipolar) en un campo electromagnético. Entre centros de cargas parciales positivas y negativas sobre los átomos de hidrógeno y oxígeno de las moléculas de agua [Fennema, 1977].

#### B. SOLUCIONES IÓNICAS.

El efecto de sales disueltas las cuales actúan como medio de transporte de carga conductiva en un campo eléctrico sobre el comportamiento dieléctrico de fluidos acuosos iónicos en alimentos, el cual disminuye la constante dieléctrica y eleva la constante de pérdidas con respecto al comportamiento del agua pura [Hasted, 1979].

La disminución de la constante dieléctrica resulta de la "oposición de las moléculas de agua libre", por las sales disueltas contenidas en la solución acuosa.

El aumento de la constante de pérdida en soluciones iónicas acuosas se debe a la alta concentración de cargas conductivas (sales disueltas); que son resultantes de la migración por electroforesis en dirección opuesta a la polaridad del campo [Mudgett, 1988].

Los efectos del incremento de la temperatura a concentración constante, son que se incrementa la constante dieléctrica y elevar la constante de pérdida en la solución iónica.

El comportamiento dieléctrico de soluciones iónicas acuosas a varias frecuencias y temperaturas se puede conocer por medio de las ecuaciones mencionadas anteriormente, por Hasted y Debye (ecuaciones 1.26 y 1.27), las cuales representan los efectos combinados de rotación y migración de carga conductiva. Estos efectos varían inversamente con la temperatura, lo que significa que el componente dipolo de una solución iónica disminuye, y el componente de pérdida iónico aumenta con la temperatura, y viceversa.

El comportamiento que se presenta del dipolo de pérdida resulta de la dependencia de la temperatura con la constante dieléctrica y su interacción con las cargas presentes en el alimento <sup>[Mudgett, 1988]</sup>.

### **C. SÓLIDOS ORGÁNICOS.**

Las propiedades dieléctricas de sólidos orgánicos presentes en alimentos dependen directamente de sus constituyentes tales como: humedad, carbohidratos, lípidos, proteínas, ó contenidos similares que son dieléctricamente inertes, comparados con fluidos tales como el agua ó soluciones acuosas.

El mayor efecto de sólidos coloidales sobre el comportamiento dieléctrico en alimentos es la disminución de los niveles de actividad dieléctrica por la eliminación de materiales dieléctricamente activos del total del volumen ocupado por el producto.

Las propiedades de sólidos indisueltos son similares a temperaturas cercanas al punto de congelación, relativamente independientes de la frecuencia y de la temperatura.

### **D. MEZCLAS NO INTERACTIVAS.**

En términos de comportamiento dieléctrico, la mayoría de los alimentos líquidos y semisólidos; Pueden ser considerados como mezclas de sólidos dieléctricamente inertes y fluidos dieléctricamente activos, los cuales no presentan interactividad química o eléctrica, y se les denominan “mezclas no interactivas”.

En algunas mezclas, la fase inerte se suspende en la fase activa o viceversa, dependiendo de la naturaleza del producto. La conductividad compleja de tales mezclas se predice por medio del modelo de Frickel, siendo ampliamente utilizado para partículas coloidales en suspensión, como por ejemplo salsas, y aderezos para carnes. <sup>[Frickel: 1975]</sup>

### **E. MEZCLAS INTERACTIVAS.**

Las mezclas de alcohol y agua presentan un comportamiento similar, al caso de carbohidratos disueltos en agua, y son de potencial interés en el procesamiento de fluidos, a este tipo de mezclas se les denomina “mezclas interactivas”. El estudio de tales mezclas es de gran importancia en el procesamiento de pasteurización de jarabes y bebidas alcohólicas por medio de altas frecuencias.

El comportamiento dieléctrico de alcoholes se predice por el modelo de Debye para solventes polares (ecuaciones 1.25 y 1.26), basados sobre las características estáticas y constantes dieléctricas ópticas, así como de longitudes de onda críticas las cuales también varían con la frecuencia y la temperatura.



## 1.6.2 MECANISMOS DE CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.

Los 2 mecanismos principales para explicar el calentamiento por microondas son la conducción iónica y la rotación dipolar

### 1.6.2.1 CONDUCCIÓN IÓNICA.

Los componentes ionizados presentan cargas eléctricas y son acelerados por un campo eléctrico. Estos iones chocan aleatoriamente con los grupos no ionizados cuando están sujetos a un campo eléctrico. La energía cinética de estos iones se transmite como calor durante las colisiones, presentándose como un aumento en la temperatura del material dieléctrico.

La velocidad de calentamiento debido a la fuerza iónica puede ser expresada así:

$$[dT/dt]_{\text{iónica}} = P \mu / V \mu \bar{E}^2 q_e n_{\mu} . \quad (1.33)$$

Donde:

$P_{\mu}$  = potencia.

$V_{\mu}$  = volumen del material.

$\bar{E}$  = campo eléctrico.

$q_e$  = carga eléctrica de cada uno de los iones.

$n$  = número de cargas.

$\mu$  = nivel de movilidad de los iones.

Para materiales que contienen diferentes tipos de iones en un volumen específico, la conductividad total es la suma de las conductividades individuales de cada ión.

La conductividad ( $\sigma_i$ ) puede ser expresada como:

$$\sigma_i = q_e n_{\mu} . \quad (1.34)$$

### 1.6.2.2 ROTACIÓN DIPOLAR.

Los efectos del campo electromagnético en las frecuencias de radio y de microondas sufren de interacciones entre los componentes eléctricos de un campo electromagnético generado por un oscilador de altas frecuencias, en el caso de las microondas el magnetrón es el que produce dichas altas frecuencias e interaccionan con las vibraciones moleculares de los constituyentes químicos de los alimentos.

Estas interacciones resultan en un principio, de la rotación dipolar de las moléculas de agua libre y de la migración conductiva de cargas asociadas con la electrofóresis de la sal disuelta, contenida en dirección opuesta a la polaridad del campo.

La rotación dipolar está asociada con centros de cargas parciales positivas y negativas, sobre los átomos de moléculas de agua <sup>[Collie, 1948]</sup>. Varios mecanismos de polarización en materiales biológicos están asociados con diferentes regiones del espectro electromagnético <sup>[de Loor y Hejboom, 1976]</sup>.

El mecanismo de rotación dipolar es conocido también como polarización - orientación y es operativa en fluidos polares alrededor de un rango de frecuencias de radio y de microondas.

### 1.6.2.3 MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LAS INTERACCIONES.

A frecuencias menores en la región de microondas, los efectos de migración conductiva asociados con la electrofóresis de sales disueltas en soluciones iónicas se incrementa de manera más pronunciada, como resultado de una relación inversa entre pérdida iónica y la frecuencia, y esto se manifiesta como:

$$k'' = \sigma_1'' / \omega \epsilon_0 \quad (1.34)$$

En la Rotación dipolar, se presenta una rotación aleatoria de los dipolos de los compuestos que sufren alineamiento, así como ciclos de desorientación a una velocidad igual a la frecuencia del campo aplicado. Este aumento y decremento de la orientación genera energía cinética, que es convertida en calor. Para la rotación de dipolos, la conductividad de calentamiento ( $\sigma_0$ ) es expresada por la siguiente ecuación:

$$\sigma_0 = 2\pi f \epsilon' \tan \delta. \quad (1.35)$$

Donde:

$\epsilon'$  = constante dieléctrica relativa.

$\tan \delta$  = tangente de pérdida.

$f$  = frecuencia del campo.

Las ecuaciones 1,34 y 1.35 permiten caracterizar las propiedades dieléctricas del material y sustituirlas posteriormente en el modelo de Lambert-Bouger para la determinación de la evolución de los perfiles de temperaturas durante el calentamiento por microondas.

## 1.7 CONVERSIÓN DE ENERGÍA.

En el desarrollo de productos por el procesado con microondas, es necesario reconocer que las microondas son una forma de energía, y no una forma de calor, que se manifiesta como calor bajo la interacción con un material, como resultado de uno o más mecanismos de resonancia.

La ecuación fundamental para la absorción de potencia de las microondas en un material se expresa como sigue:

$$P_D = 55.61 E^2 f \epsilon' \tan\delta \times 10^{-14} \text{ (Watts / cm}^3\text{)} \quad (1.36)$$

Donde:

$P_D$  = Potencia desarrollada en un volumen de material.

$E$  = Intensidad del campo eléctrico.

$f$  = Frecuencia (Hz).

$\epsilon'$  = Constante dieléctrica.

$\tan \delta$  = Tangente de pérdida.

Dos de estos parámetros: la Intensidad del campo y la frecuencia, son propiedades de la fuente de energía, la constante dieléctrica y la tangente de pérdida son propiedades del material que es calentado. Incrementando el valor de algún factor se incrementa la cantidad de energía convertida.

Seleccionando la frecuencia más alta que sea disponible y la más alta potencia del campo la conversión de energía puede ser limitada por las fallas en consideración al voltaje.

La constante dieléctrica relativa y la tangente de pérdida no pueden ser incrementadas sin alterar el material, pero en algunos materiales, especialmente alimentos, esto puede ser posible.

Sobre la base de todos los parámetros relacionados que afectan el calentamiento de alimentos por energía de microondas se mencionan los siguientes parámetros cuyo control puede guiar a mejorar el desarrollo de productos alimenticios:

- **Parámetros del Producto:**

- \*Cambios reológicos con la temperatura.
- \*Balance de los calores específicos en sistemas multicomponentes.
- \*Actividad de Agua.
- \*Forma y geometría del producto.
- \*Cambios de formulación.

- **Parámetros del Sistema:**

- \*Salida de potencia de las microondas / velocidad de calentamiento.
- \*Frecuencia del sistema de microondas.
- \*Distribución del campo de microondas.
- \*Movimiento del producto a través del campo.

## 1.8 PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS.

El fenómeno de propagación de las ondas electromagnéticas esta constituido por dos componentes el primero es el campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) y segundo la del campo magnético ( $\vec{H}$ ). Las ecuaciones básicas que describen su dependencia en el espacio y en el tiempo son las siguientes ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.37)$$

Y

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.38)$$

Donde  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente,  $\vec{J}$  es el flujo de corriente,  $\vec{D}$  es el desplazamiento eléctrico y  $\vec{B}$  es la inducción magnética,

Las relaciones constitutivas que relacionan  $\vec{J}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , y  $\vec{H}$  son:

$$\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E}(t) \quad (1.39)$$

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{H}(t) \quad (1.40)$$

y

$$\vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}(t) \quad (1.41)$$

donde :

$\sigma(\omega)$  = Conductividad.

$\varepsilon(\omega)$  = Constante dieléctrica

$\mu(\omega)$  = Permeabilidad magnética.

$\vec{E} = \vec{E} e^{-i\omega t}$  y  $\vec{H} = \vec{H} e^{-i\omega t}$ . Alternativamente pueden ser utilizadas para expresar la dependencia del tiempo, mediante las ecuaciones 1.37 y 1.38 para obtener.

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu(\omega) \vec{H} \quad (1.42)$$

y

$$\nabla \times \vec{H} = [\sigma(\omega) - i\omega\mu(\omega)] \vec{E} \quad (1.43)$$

Donde la "constante compleja dieléctrica" ( $\epsilon^*$ ) está definida como:

$$\epsilon^*(\omega) \equiv \epsilon(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega} \equiv \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad (1.44)$$

La habilidad del material para almacenar energía eléctrica está representado por:  $\epsilon' = \text{Re}(\epsilon^*)$ , y  $\epsilon'' = \text{Im}(\epsilon^*)$  que toman en cuenta las pérdidas a través de la disipación de energía. La conductividad,  $\sigma(\omega)$ , la constante dieléctrica  $\epsilon'(\omega)$  y la permeabilidad magnética  $\mu(\omega)$ , en general son funciones complejas de la frecuencia ( $\omega$ ) de la radiación.

Si los efectos magnéticos son despreciables, lo cual es cierto para la mayoría de los materiales utilizados en aplicaciones de calentamiento por microondas, la permeabilidad magnética  $\mu(\omega)$  es bien aproximada por su valor  $\mu_0$  en el espacio libre. En lo que sigue asumiremos que esto es cierto. Las propiedades del material son dependientes de la temperatura, entonces  $\mu$  y  $\epsilon$  en la ecuación 1.42 y 1.43 son funciones del tiempo también. Debido a que la escala de tiempo de propagación electromagnética es significativamente más pequeña que las escalas de tiempo para la difusión térmica, un análisis de los ordenes de magnitud indican que los términos que involucran las derivadas temporales de  $\sigma$  y  $\epsilon$  son muy pequeños y pueden ser despreciados. Bajo esta consideración y la condición de electroneutralidad del material en cuestión (lo cual implica que  $\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0$ , las ecuaciones 1.42 y 1.43 pueden ser combinadas para dar la siguiente ecuación de onda:

$$\nabla \cdot \left( \vec{E} \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) + \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.45)$$

### 1.8.1 DISIPACIÓN DE POTENCIA Y TEOREMA DE POYNTING.

Para encontrar la potencia en una onda plana uniforme es necesario desarrollar un teorema de la potencia para el campo electromagnético, conocido como teorema de Poynting, (1884).

Empecemos con la ley de Ampère:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.46)$$

y multiplíquese escalarmente cada miembro por  $\vec{E}$ ,

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.47)$$

Ahora se utilizará la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.48)$$

Que se puede probar desarrollándola en coordenadas cartesianas. De esta forma.

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{E}} - \nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (1.49)$$

Pero de la ley de Faraday se tiene

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (1.50)$$

y por lo tanto

$$-\vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (1.51)$$

Con la ley de Coulomb-Gauss.

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \quad (1.52)$$

se tiene

$$-\nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} + \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (1.53)$$

Sin embargo

$$\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}^2}{2} \right) \quad (1.54)$$

y

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \vec{\mathbf{H}}^2}{2} \right) \quad (1.55)$$

de donde:

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) \quad (1.56)$$

Finalmente se integra en todo el volumen,

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \int_{\text{vol}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV \quad (1.57)$$

y se aplica el teorema de la divergencia, para obtener

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_{\text{vol}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV \quad (1.58)$$

La primera integral de la derecha es la potencia Óhmica total (pero instantánea) disipada dentro de una superficie Gaussiana. La integral en el segundo término de la derecha es la energía total almacenada en los campos eléctrico y magnético, y las derivadas parciales con respecto al tiempo ocasionan que este término sea la rapidez de incremento respecto al tiempo de la energía almacenada dentro de este volumen o la potencia instantánea que va a incrementar la energía almacenada dentro de este volumen.

Por lo tanto, la suma de las expresiones de la derecha debe ser la potencia total que fluye hacia este volumen y, consecuentemente, la potencia total que fluye hacia afuera del volumen es:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (1.59)$$

Donde la integral es sobre la superficie cerrada que rodea el volumen. El producto cruz de  $\vec{E} \times \vec{H}$  se conoce como vector de Poynting  $\mathbf{P}$ .

Que se interpreta como una densidad de potencia instantánea, medida en Watts por metro cuadrado ( $W / m^2$ ). Las mismas configuraciones filosóficas son aplicables a la descripción de  $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot (\vec{E})$  o  $\frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{H})$  como densidades de energía. Puede demostrarse rigurosamente que la integración del vector de Poynting sobre una superficie cerrada proporciona por si solo la potencia total que cruza la superficie en sentido hacia afuera.

La dirección del vector de Poynting indica la dirección del flujo instantáneo de potencia en el punto de interés, por lo tanto, se puede imaginar el vector de Poynting como un vector "señalador".

### 1.8.2 ECUACIÓN DE POYNTING APLICADO A LA ENERGÍA DE MICROONDAS

El flujo de energía asociada con la propagación de una onda electromagnética están representadas por el vector de Poynting  $\mathbf{P}$ , y el promedio temporal del flujo para campos armónicos se representa por la ecuación de Stratton, (1941).

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* \quad (1.60)$$

Donde:

$\mathbf{P}$  = Vector de Poynting,  $\text{W m}^{-2}$

$\bar{\mathbf{E}}$  = Intensidad de l campo eléctrico  $\text{V m}^{-1}$

$\bar{\mathbf{H}}^*$  = Intensidad del campo magnético  $\text{Amp/m}$

El teorema de Poynting, permite la evaluación de la potencia disipada en el medio, la cual es expresa como:

$$\oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds = -\frac{1}{2} \omega \epsilon_0 k'' \int_V \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* dV + i\omega \int_V \left( \frac{\mu_0}{2} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* + \frac{\epsilon_0 k'}{2} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* \right) dV \quad (1.61)$$

Y establece que el flujo de energía neto que atraviesa una superficie Gaussiana  $S$  envolvente de un volumen  $V$  es igual a la potencia disipada en el medio (Parte real) que ha sido almacenada en los campos eléctrico y magnético (Parte imaginaria).

Aplicando el teorema de divergencia a la ecuación 1.57, la forma puntual del teorema de Poynting es:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{2} \omega \epsilon_0 K'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega \left( \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \frac{\epsilon_0 K'}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \quad (1.62)$$

ya la potencia (energía por unidad de tiempo) disipada por unidad de volumen es:

$$p(r) = -\text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 K'' (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \quad (1.63)$$

Entonces, con un conocimiento de la intensidad del campo eléctrico en el medio, la potencia local disipada, se obtiene a partir de la ecuación 1.38, <sup>(Ayyappa, 1941)</sup>.



### 1.8.3 GENERACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

Un requisito para generar ondas electromagnéticas es conseguir simultáneamente campos eléctricos  $\vec{E}$  y magnéticos  $\vec{H}$  oscilantes orientados de modo que conduzcan a un valor finito de el vector propagación de energía  $\vec{P}$ , donde  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ .

El dispositivo más sencillo para ello es el vector oscilante. Cualquier sistema en el que exista un desplazamiento periódico de carga a lo largo de una recta, de modo que sus extremos se carguen con signos opuestos y, periódicamente se inviertan sus cargas, constituyendo un dipolo oscilante. Es equivalente a una corriente sinusoidal en un hilo conductor. Podemos ver fácilmente como de este modo se producen los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$

En la figura 1.4 se ha representado una onda electromagnética que se propaga hacia la derecha. Se puede observa que esta constituida por los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que oscilan en forma periódica de manera similar a los puntos en una cuerda en la cual se propaga una onda mecánica.

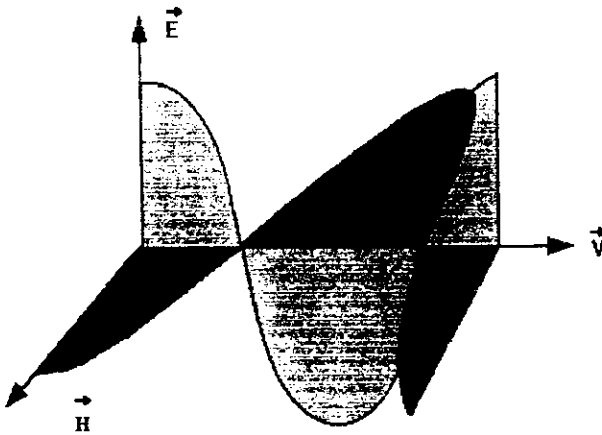


Figura 1.4 Representación del campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) y el campo magnético ( $\vec{H}$ ) de una onda senosoidal

En esta figura se observa que los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son perpendiculares entre sí y ambos son normales a la dirección de propagación de la onda.

## 1.8.4 ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO EN HORNOS DE MICROONDAS.

Los dos problemas principales asociados con el calentamiento y secado por microondas son el fenómeno del sobre calentamiento y la no-uniformidad espacial de la tensión del campo de microondas, la cual se caracteriza por la localización de puntos fríos o calientes dentro del horno de microondas. El conocimiento de la estructura del campo de microondas y la distribución de potencia dentro del aplicador es esencial para minimizar ambos problemas.

Debido a la complejidad involucrada en el cálculo matemático del campo de microondas y la distribución de potencia en el interior del horno, la mayoría de los trabajos en la literatura se han referido a medidas experimentales.

Es difícil calcular la estructura del campo en un horno de microondas por métodos analíticos. Para un horno convencional donde las cargas pueden tener diferentes geometrías y las propiedades dieléctricas pueden variar con el espacio, frecuentemente no hay otra alternativa que recurrir a un método numérico. En virtud del avance logrado en el desarrollo de métodos numéricos, el desarrollo del método computacional reportado para la distribución de potencia disipada en materiales utilizando métodos de elemento finito 3-D corresponde a una guía de ondas rectangulares cortocircuitada [de Pourcq, 1984].

Jia y Jolly, en 1992 presentaron un segundo artículo acerca del uso del elemento finito para simular la estructura del campo de microondas y la distribución de potencia asociada en el interior de un material dieléctrico contenido dentro de una cavidad rectangular multinodal excitada por guías de ondas.

Ellos verificaron su método analizando un problema de carga simple que puede ser resuelto analíticamente. Siendo este el primer ejemplo de solución de una cavidad multinodal, por el método de elemento finito 3-D, el cual provee una importante herramienta para tener un mejor conocimiento del calentamiento por microondas de un material dieléctrico y así proveer una notación de la optimización del diseño y las condiciones de operación durante el procesamiento en hornos de microondas.

El problema a resolver concierne a una cavidad rectangular que puede contener un material inhomogéneo, isotrópico, de forma arbitraria, como se muestra en la figura 1.5

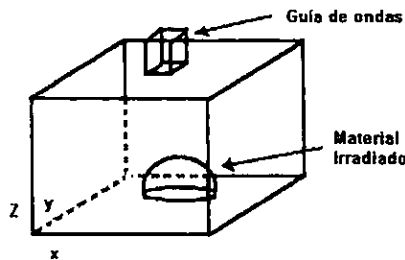


Fig. 1.5 Cavidad rectangular sometida a radiación por un guía de ondas.

# SIMULACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA EN UN HORNO DE MICROONDAS EN BASE A DIFERENTES ALTURAS:

## A) Cavity cargada homogéneamente.

En este caso se considera un material dieléctrico de 2.0 cm cubriendo el plano (x, y) de la cavidad, la distancia del material dieléctrico a la base de la cavidad es representada por z.

El método es analizado para un problema simple y los resultados numéricos son buenos con respecto a la solución exacta. El método puede ser utilizado para resolver problemas de calentamiento en hornos de microondas dependiendo de la carga en la cavidad y las variaciones en sus propiedades dielectricas.

A partir de los resultados de la simulación de los materiales empleados con las siguientes características:

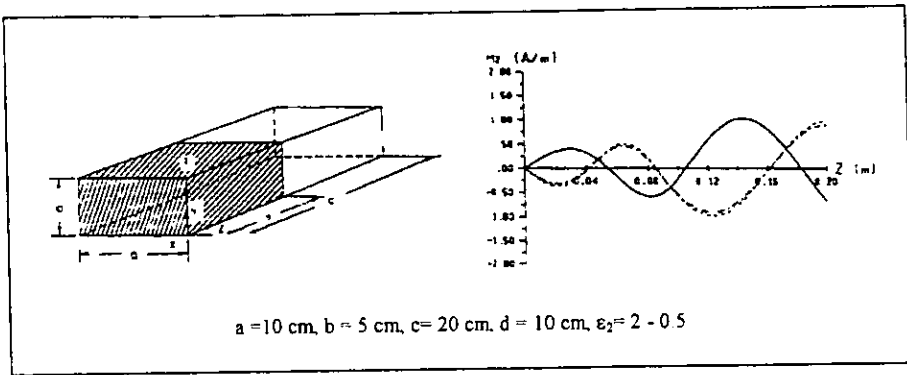


Fig. 1.6 características del material dieléctrico empleado

### Condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera a satisfacer de la permitividad y permeabilidad ( $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ ) son las siguientes:

$$n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = k$$

$$n \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0$$

$$n \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$k = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\mu_2}{\mu_0} = 0$$

En las figuras 1.7, 1.8, 1.9 y 1.10 que se muestran a continuación se maneja una cavidad de carga homogénea, en este caso se utiliza un material dieléctrico con un espesor de 2.0 cm que cubra completamente el plano X-Y de la cavidad (Figura 1.6). La distribución desde el material dieléctrico hasta la base de la cavidad es representada por Z. Las figuras mencionadas representan los perfiles de densidad de potencia en el plano tridimensional.

En los tres casos, la vista isométrica (a), representa los perfiles de densidad de potencia. Mientras que la vista superior (b), exhibe la potencia disipada en el plano del dieléctrico, a diferentes distancias desde la base de la cavidad. Los resultados muestran que casi toda la potencia es disipada dentro del material en la boca del guía de ondas, cuando la placa es colocada contra el plano del guía de ondas. Cuando la placa se aleja un medio del espacio libre de la boca del guía de ondas, la potencia es disipada sobre el plano entero en un patrón ondulado el cual es altamente no uniforme para obtener un calentamiento uniforme se utilizan algunos medios tales como una coraza rotante a modo de agitador (Rusman et al, 1987)

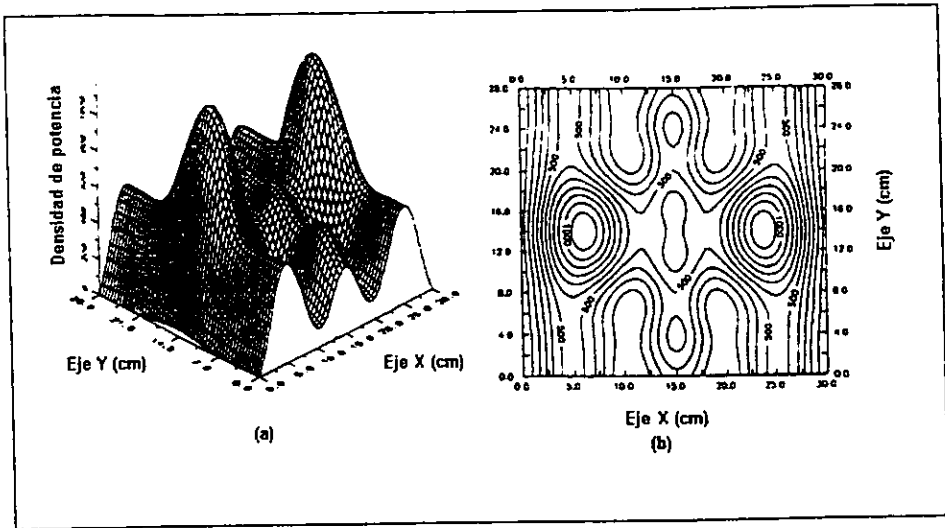
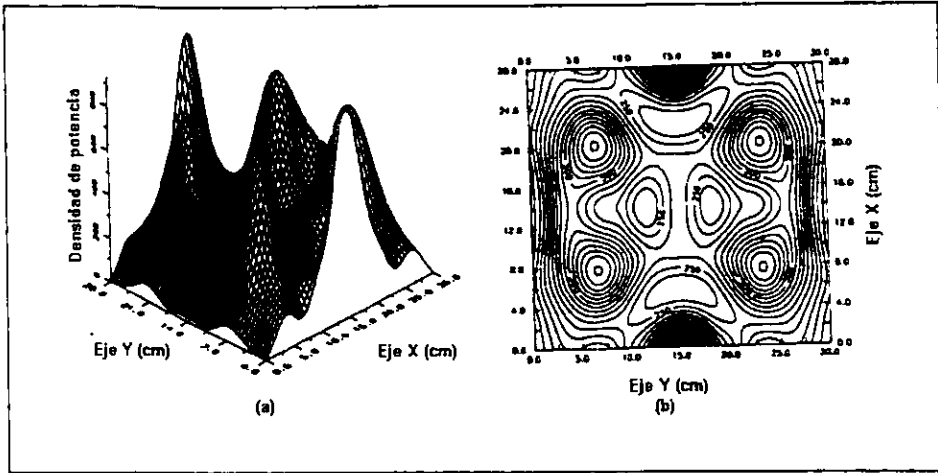
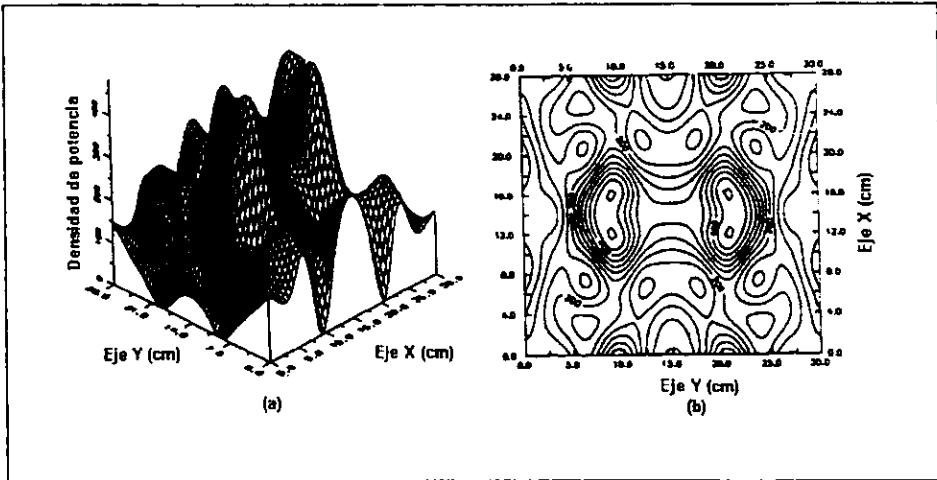


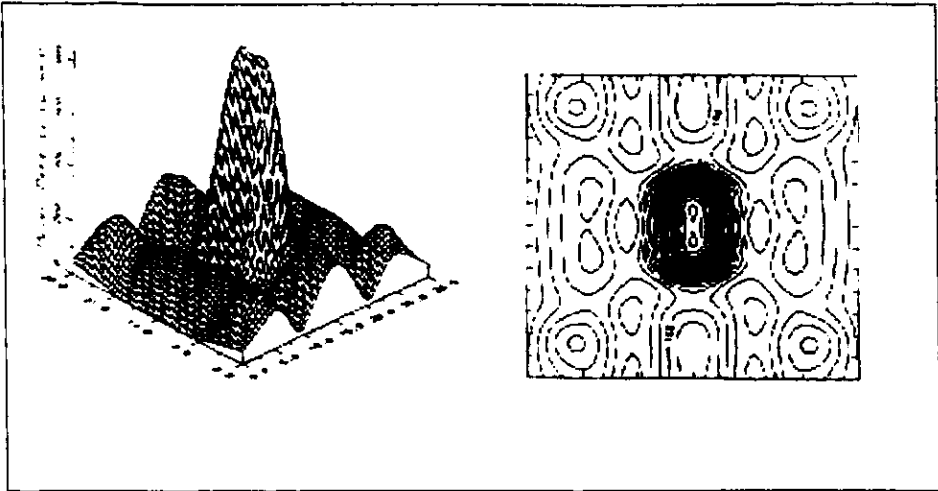
Figura 1.7 Distribución de potencia a una altura de: 0.0 cm  
 (a) Vista tridimensional del perfil de densidad de potencia.  
 (b) Vista superior asociada con el perfil (a)



**Figura 1.8 Distribución de potencia a una altura de: 8.0 cm**  
 (a) Vista tridimensional del perfil de densidad de potencia.  
 (b) Vista superior asociada con el perfil (a)

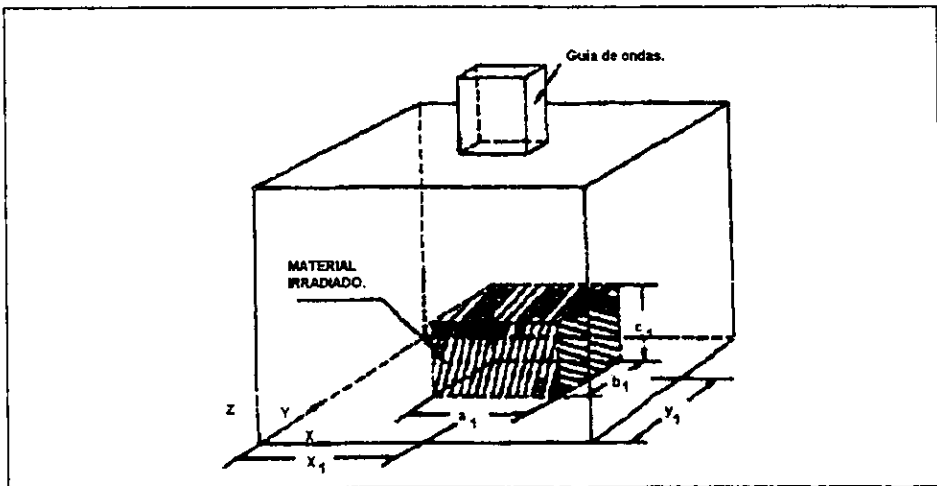


**Figura 1.9 Distribución de potencia a una altura de: 16.0 cm**  
 (c) Vista tridimensional del perfil de densidad de potencia.  
 (d) Vista superior asociada con el perfil (a)



**Figura 1.10 Distribución de potencia a una altura de:22.0 cm**  
 (e) Vista tridimensional del perfil de densidad de potencia.  
 (f) Vista superior asociada con el perfil (a)

**B) Cavity cargada no homogéneamente:** En la practica la mayoría de los materiales dieléctricos son parcialmente cargados (o cargados no homogéneamente) en un horno de microondas, en vez de ser cargados homogéneamente. Un ejemplo de una cavity cargada no homogéneamente es ilustrado en la figura 11



**Figura 1.11 Cavity con carga no homogénea.**

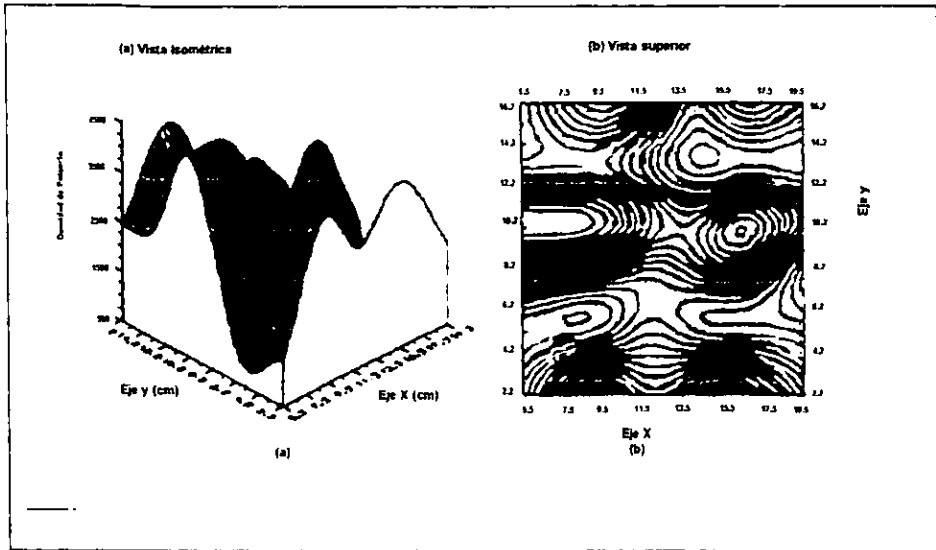


Figura 1.12 Distribución de potencia en el bloque de la figura 1.6  
 $x_1 = 12.3$  cm,  $y_1 = 9.2$  cm.  $a_1 \times b_1 \times c_1 = 14.0 \times 14.0 \times 2.0$  cm.

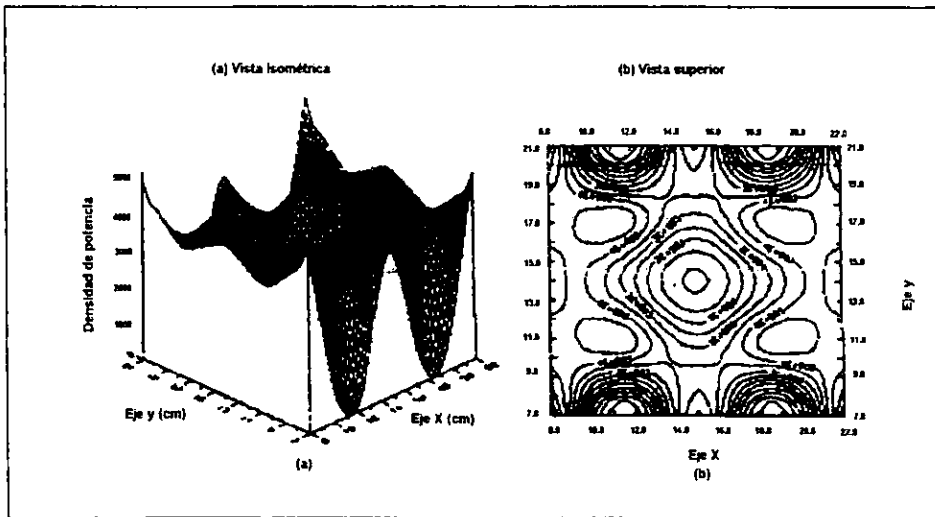
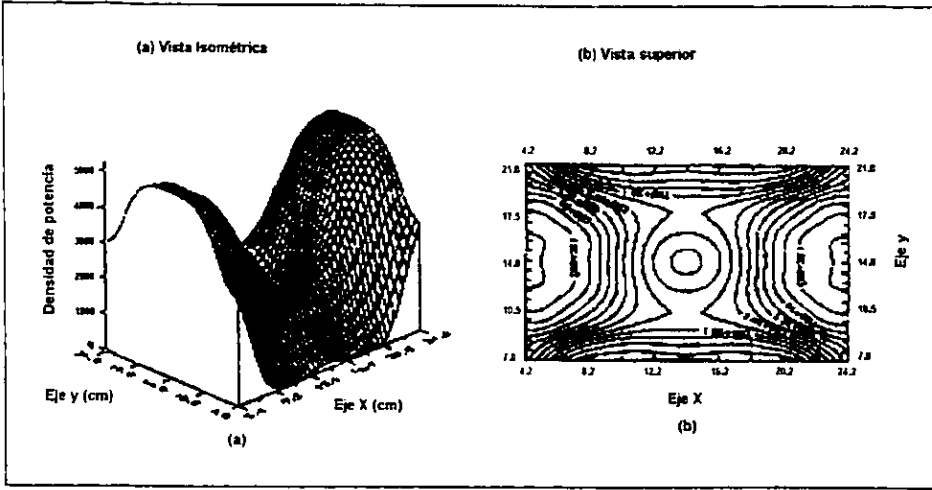


Figura 1.13 Distribución de potencia en el bloque de la figura 1.6  
 $X_1 = 15.0$  cm,  $y_1 = 14.0$  cm,  $a_1 \times b_1 \times c_1 = 19.2 \times 14.0 \times 2.0$  cm



**Figura 1.14 Distribución de potencia en el bloque del a figura 1.10**  
 $x_1=15.0$  cm,  $y_1=14.0$  cm,  $a_1 \times b_1 \times c_1 = 19.2 \times 14.0 \times 2.0$  cm

Para una cavidad de cargada no homogéneamente, los métodos analíticos no son recomendables para analizar el problema.

Un ejemplo de una cavidad de carga no homogénea se ilustra en la figura 1.11.

Las dimensiones del bloque dieléctrico son  $a_1 \times b_1 \times c_1$ , las coordenadas del bloque son  $x_1$  y  $y_1$ .

En las figuras 1.12 a la 1.14 se representan los perfiles de densidad de potencia (Inciso a) y las correspondientes gráficas de contorno (Inciso b), para los casos en los que el bloque tiene diferente tamaños y esta a diferentes posiciones en la cavidad. Las figuras 1.12 y 1.13 exhiben el efecto de las posiciones del bloque sobre la distribución de potencia. En ambas figuras las dimensiones del bloque son las mismas. Los resultados *indican que al variar la posición del bloque puede cambiar la distribución de potencia.*

En la figura 1.14 se observa que aparecen 4 puntos frios en la frontera y un punto frio en el centro, mientras en la figura 1.13 la densidad de potencia se despliega un patrón ondulante, con los puntos calientes y frios ubicándose en diferentes posiciones a aquellas observadas en la figura 1.14. *Esto explica el porque un escudo rotante puede proveer un calentamiento más uniforme dentro del material.*



Las figuras 1.13 y 1.14 muestran el efecto de las dimensiones del bloque sobre la distribución de potencia, cuando el bloque está ubicado en el centro de la cavidad; en la figura 1.14 la única dimensión que cambia en comparación con la de la figura 1.13 es su longitud a lo largo de la dirección "x" que alcanza un valor de 5.3 cm.

Este cambio de dimensiones provoca la distribución de potencia en el bloque sea distinta. A partir de las figuras 1.12 y 1.14 se concluye que *la distribución de potencia depende altamente de la geometría del material y su posición en la cavidad.*

Debe remarcarse que los métodos de elemento finito 3-D requieren de una gran cantidad de memoria computacional y largos tiempos de computo. La dificultad con la modelación de materiales de alta permitividad es que se necesitan mallas más pequeñas para la evaluación de la longitud de onda en el interior del material.

## Método de Elemento Finito.

### 2.1. INTRODUCCIÓN.

El universo en que vivimos es discreto. Las dos formas básicas de manifestación de la materia: la masa y la energía son cuantizables a niveles microscópicos. Sin embargo, los fenómenos físicos tienen lugar en campos definidos por propiedades físicas que hasta ahora se han considerado continuas, el espacio y el tiempo.

Una descripción correcta de los fenómenos que ocurren en la naturaleza debería tomar en cuenta las características discretas de la materia. Sin embargo a nivel pragmático, en muchas situaciones es conveniente la hipótesis de continuidad de la materia, lo cual permite modelar matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales y utilizar la poderosa herramienta del cálculo diferencial e integral en la caracterización de los fenómenos físicos.

La mayoría de los modelos matemáticos que encontramos en el ámbito de la ingeniería corresponden a ecuaciones diferenciales que pueden consistir en derivadas ordinarias o parciales en espacio y tiempo, o en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales acopladas lineales o no lineales, etc., en realidad son muy pocos los modelos basados en la propiedad discreta de la materia, con aplicación en ingeniería.

Por otra parte, las limitaciones de la mente humana son tales que no puede captar el comportamiento del complejo mundo que lo rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros y científicos consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales o "elementos", cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes, a pesar de que el modelo matemático sea continuo.

Para vencer la dificultad que presenta la solución de problemas continuos reales, caracterizados por ecuaciones diferenciales, ingenieros y matemáticos han propuesto a través de los años, diversos métodos de discretización, desde el simple y limitado método de diferencias finitas hasta los versátiles métodos de elemento finito. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna aproximación de tal manera que se pueda esperar que la misma se acerque, tan estrechamente como se quiera, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas.

Uno de los métodos numéricos que permite hallar soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales parciales, es la técnica del Elemento Finito.

Las primeras publicaciones que presentan la idea principal de esta técnica aparecieron en un trabajo del matemático alemán Karl Frederick Gauss en 1795, acerca del uso de residuos ponderados para la resolución de ecuaciones diferenciales y que en 1915 permitió al ruso Galerkin instrumentar la técnica más ampliamente usada en nuestra época dentro de los algoritmos de elemento finito.

Por otra parte Newton presenta el problema de la Braquistocrána. En 1870 el británico Lord Rayleigh publicó el artículo "On the theory of resonance" en el que introdujo el cálculo variacional, trabajo continuado en 1909 por el alemán Ritz en su artículo (Über eine neue methode zur lösung gewissen variations-probleme der mathematischen physik), donde estableció de manera formal las bases matemáticas de los métodos de elementos finitos que siguen el principio variacional.

En los primeros años de la década de los 40's, los ingenieros civiles norteamericanos McHenry (1943), Hrenikoff, (1941) y Newmark, (1949) demostraron que pueden obtenerse soluciones razonablemente correctas de un problema de medio continuo sustituyendo pequeñas porciones del medio continuo por una distribución de barras elásticas simples.

En 1943 Courant, introduce funciones de interpolación cuasicontinuas en el cálculo variacional.

En la década de los 50's se desarrolló esta técnica en el ámbito de la ingeniería aeronáutica, y se utilizó por primera vez en el diseño de un aeroplano. El nombre del método como -Elemento Finito- aparece primeramente en las publicaciones de Clough en 1960. Debido a su versatilidad en el manejo de diferentes geometrías y condiciones de frontera complicadas, su campo de aplicación se ha extendido en muchas áreas de la ingeniería, ciencias, y matemáticas.

Actualmente sus aplicaciones principales se desarrollan en el campo de la mecánica de sólidos (elasticidad, plasticidad, estática y dinámica), la meteorología, la transferencia de calor (conducción, convección y radiación), la mecánica de fluidos (viscosos y no viscosos), la acústica y el electromagnetismo, así como la interacción de estos fenómenos. (Zienkiewics, 1989)

El cálculo variacional es una técnica de resolución de ecuaciones diferenciales en la que, sin conocer la solución de la ecuación diferencial, se propone una función de aproximación (también denominada función de interpolación) continua en el dominio de la solución, y luego siguiendo el principio de mínimos cuadrados, se minimizan las desviaciones de la función de aproximación respecto a la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera, como veremos más detalladamente con algunos ejemplos.

El procedimiento puede ser aplicado en forma global sobre el dominio completo o dividiéndolo en subdominios para lograr un mejor ajuste.

### 2.1.1. DEFINICIÓN.

La técnica de Elemento Finito, es un método para encontrar la mejor solución aproximada de una ecuación diferencial por optimización de los parámetros de una función propuesta como solución. La región de solución se divide en "subregiones" o "elementos finitos", y se ensaya una función de aproximación a la solución de la ecuación diferencial dentro de cada elemento, imponiendo las condiciones apropiadas de continuidad en las fronteras entre las subregiones.

Para cada región se buscan los parámetros que minimizan el error de la solución propuesta respecto a la solución de la ecuación diferencial. El mejoramiento de la precisión se puede lograr, ya sea al disminuir el tamaño de los elementos (consecuentemente aumentar su número) o al aumentar el número de términos en las funciones de aproximación dentro de cada subregión.

Este método permite dividir la región de interés, es decir, el dominio de solución de la ecuación diferencial, de una manera mucho más flexible que con la técnica de diferencias finitas. Los nodos en los cuales se desea hallar el valor de la variable de interés no tienen que descansar en un arreglo rígido sino que pueden formar parte de una malla flexible, lo cual permite el manejo de geometrías complicadas y bordes móviles.

Un programador inteligente le puede dar versatilidad al algoritmo del elemento finito que con un simple cambio de las coordenadas nodales, se logre implementar los cálculos para otra geometría. Las condiciones de frontera también se manejan de una manera más conveniente, de manera que un algoritmo computacional estándar puede ser fácilmente modificado para incluir otras condiciones límite. El resultado es un algoritmo con el que se puede calcular las distribuciones de las variables dependientes para varias configuraciones geométricas y tipos de condiciones de frontera.

La flexibilidad de la malla se obtiene directamente de los principios subyacentes del método, que puede ser uno de una gran cantidad de principios clasificados como variacionales o de residuos ponderados.

### 2.2. MÉTODOS PARA IMPLEMENTAR LOS ALGORITMOS DE ELEMENTO FINITO.

El principio de este método consiste en convertir la ecuación diferencial parcial del elemento, acotada por las condiciones de frontera, en un sistema de ecuaciones algebraicas que al ser resuelto permita hallar una muy buena aproximación de la variable dependiente en cada una de las coordenadas espaciales de la región de interés. O alternativamente, los parámetros de la función de aproximación para cada uno de los elementos del dominio.

El sistema de ecuaciones algebraicas se obtiene mediante el uso de una función de aproximación continua definida para todos los puntos en el dominio de la solución de la ecuación

diferencial. En cada subregión se optimizan los parámetros de dicha función de interpolación, buscando disminuir la desviación respecto a la solución de la ecuación diferencial.

Existen varias maneras de optimizar los parámetros de la función de aproximación para disminuir el error con respecto a la solución exacta. Entre los métodos más utilizados podemos mencionar:

-Principio Variacional.

-Residuos Ponderados.

\* Método de Colocación.

\* Método por Subdominios.

\* Método de Mínimos Cuadrados.

\* Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin).

### 2.2.1. FUNDAMENTOS DEL PRINCIPIO VARIACIONAL.

El cálculo variacional es una rama de las matemáticas que se puede definir como una teoría general sobre los valores extremos (mínimos y máximos) de una funcional. En virtud de ello, los métodos variacionales proponen técnicas para la optimización de funciones, que eventualmente podrían ser las funciones de aproximación a la solución de una ecuación diferencial.

El problema general que se plantea es hallar los extremales de una funcional, donde dicha funcional es una función de otra función, de las variables independientes y las derivadas de las variables dependientes.

Un ejemplo de una funcional es:

$$I = I [y(x), y'(x), y''(x), x] \quad (2.1)$$

Ecuación en la cual la función argumento es  $y(x)$ . Para el cálculo variacional es de principal interés el caso en que la funcional  $I$  corresponde a una integral.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [y(x), y'(x), y''(x), x] dx \quad (2.2)$$

El problema es encontrar una función  $y(x)$  que haga que la funcional  $I$  sea óptima.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x)] dx \quad (2.3)$$

Donde  $I$  es una función que depende de una función argumento y una variable independiente;  $y(x)$  es una forma de la ec. diferencial.

Se desea calcular el valor extremal de  $I$  para lo cual se deberá encontrar la forma particular de  $y(x)$  que optimice  $I$ .

En un dominio dado de funciones admisibles, debe hallarse la función (o funciones) de una funcional dada, para la cual esta última es un extremal con respecto a la función argumento, en una cercanía suficientemente pequeña.

Si la función bajo estudio depende explícitamente de ciertos parámetros además de la función argumento, también se debe determinar el óptimo tomando en cuenta el valor de estos parámetros.

En general:

$$I[y(x, z)] = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F\left[x, z, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}\right] dx dz \quad (2.4)$$

$$I[y(x, z, k)] = \int_{k_1}^{k_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, z, k, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial k}\right) dx, dz, dk \quad (2.5)$$

Para el primer caso se debe determinar la función óptima  $y^*(x, z)$ , y en el segundo  $y^*(x, y, z)$ , en donde  $k$  es un parámetro.

**Definición de Funcional:**

Sea  $S$  un conjunto de elementos bien definidos. Si  $F$  denota el mapeo de  $S$  en el conjunto de números reales  $R$ , tal que, para cada elemento  $f$  perteneciente a  $S$ , le corresponde un número real, entonces  $F$  es una funcional en  $S$ .

**Definición de la cercanía en el dominio de la ecuación diferencial:**

Un subconjunto  $N(x_0)$  representa la cercanía de  $\delta$  de  $x_0$ , si contiene todos los puntos  $x$  para los cuales  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ; Es decir, si contiene todos los puntos  $x_0 + h$  para los cuales  $|h| < \delta$ .

### 2.2.2. ECUACIÓN DE EULER LAGRANGE.

Considérese una función continua y diferenciable  $y(x)$ , con el siguiente rango  $x_0 < x < x_1$  y una función  $F$ , tal que cada valor de  $x$  dependa explícitamente del valor de  $y(x)$  y de su derivada  $y'(x)$ , esto es:

$$F = F(y, y', x) \quad (2.6)$$

El problema a estudiar es el de minimizar la integral:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[y, y', x] dx \quad (2.7)$$

Donde  $y(x_0)$  y  $y(x_1)$  son funciones conocidas.

Supóngase que se conoce la función óptima  $y(x)$  que minimiza  $I[y(x)]$ . Esto es, supóngase que en una cercanía ( $h$ ) de  $y(x)$ , la integral es mínima.

Considérese además una función cualquiera  $\eta(x)$  continua y diferenciable en el intervalo  $x_0 < x < x_1$ , con  $\eta(x_1) = 0$  y  $\eta(x_0) = 0$ . Ya que corresponden a las condiciones de frontera ya conocidas y  $\eta$  la desviación, consecuentemente es cero.

Constrúyase la nueva función:

$$y^*(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (2.8)$$

Es decir, la nueva función es igual a la óptima más una desviación cualquiera multiplicada por un escalar  $\varepsilon$ .

Donde  $\varepsilon$  es un parámetro que se puede hacer tan pequeño como se desee, es decir la nueva función,  $y^*(x)$ , es una función en las cercanías de  $y(x)$ .

$$I[y^*(x)] = \phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F[y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x] dx \quad (2.9)$$

Todos los valores posibles de la función  $y(x)$  están en la cercanía. Por lo tanto, la integral se puede considerar como una función ordinaria de  $\varepsilon$ . Ya que  $\varepsilon$  especificaría el valor de  $\phi(\varepsilon)$ , entonces se debe hacer que  $\partial\phi(\varepsilon)/\partial\varepsilon = 0$ . También el mínimo de  $\phi(\varepsilon)$  ocurre en  $\varepsilon = 0$ ; por definición

$$\phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F[y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x), x] dx$$

$$\phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F[y^*, y^{**}, x] dx \quad (2.10)$$

Diferenciando el funcional  $\phi(\varepsilon)$ , con respecto a  $\varepsilon$ , se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F[y^*, y^{**}, x] dx \quad (2.11)$$

Si se deriva  $F[y, y^{**}, x]$  tenemos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y^*} dy^* + \frac{\partial F}{\partial y^{**}} dy^{**} + \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (2.12)$$

Al diferenciarlo con respecto a  $\varepsilon$  se obtiene:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y^*} \left( \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial F}{\partial y^{**}} \left( \frac{\partial y^{**}}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{dx}{d\varepsilon} \right) \quad (2.13)$$

Donde  $(dx/d\varepsilon) = 0$ , ya que  $x$  se considera como una constante. Se buscan los cambios desde una curva a otra para valores constantes en  $x$ .

Para evaluar la integral de la ecuación (2.13) se tiene lo siguiente:

$$\frac{dy^*}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} [y(x) + \varepsilon \eta(x)] = \eta(x) \quad (2.14)$$

$$\frac{dy^{**}}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} [y'(x) + \varepsilon \eta'(x)] = \eta'(x) \quad (2.15)$$

Sustituyendo las consideraciones anteriores en la ecuación (2.13) da por resultado:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y^*} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y^{**}} \eta'(x) \quad (2.16)$$

Tomando como límites para la ecuación anterior el hecho de que a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $y, y^* \rightarrow y, y^{**} \rightarrow y'$  e igualando el resultado a cero, se obtiene:



$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx \quad (2.17)$$

Sustituyendo  $F_y = \partial F / \partial y$ ,  $F_{y'} = \partial F / \partial y'$  además de separar en dos integrales se obtiene que:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \eta'(x) dx = 0 \quad (2.18)$$

Al integrar el segundo término como una integral por partes se obtiene una forma más conveniente.

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \eta'(x) dx = F_{y'} \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{dF_{y'}}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{dF_{y'}}{dx} dx \quad (2.19)$$

Ya que  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ , por definición, sustituyendo este resultado en las integrales se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{dF_{y'}}{dx} dx = 0 \quad (2.20)$$

Así que finalmente la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[ F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right] dx = 0 \quad (2.21)$$

Para resolver esta integral es necesario hacer uso de del siguiente lema: Si  $x_1, x_2, (> x_1)$  son constantes fijas y  $g(x)$  es una función conocida en el intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$  y si:

$$\int \eta(x) g(x) dx = 0 \quad (2.22)$$

Para cualquier  $\eta(x)$  continua y diferenciable con:

$$\eta(x_1) + \eta(x_2) = 0. \quad (2.23)$$

Entonces se cumple que  $g(x) = 0$ , en el intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$

Aplicando este lema en la ecuación 2.21, se obtiene la ecuación de Euler Lagrange

$$F_1 - \frac{dF_2}{dx} = 0$$
$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.24)$$

La cual está asociada con el principio de Cálculo Variacional y corresponde a una condición necesaria, pero raramente suficiente, que una funcional debe satisfacer para maximizar o minimizar una integral definida.

Cuando una ecuación diferencial satisface la ecuación de Euler - Lagrange, entonces es posible escribir un Principio Variacional.

Al resolver las ecuaciones resultantes, se optimiza la funcional; hallándose la mejor solución a la ecuación diferencial, por minimización del acercamiento. Sin embargo no para todas las ecuaciones diferenciables es posible escribir un Principio Variacional, y en esos casos se procede a la aplicación de otros métodos, tal como es el caso de Residuos Ponderados que se explica a continuación

### 2.2.3. MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS

Este método prescinde del principio del Cálculo Variacional, ya que consiste en obtener la solución aproximada de la ecuación diferencial que minimice la diferencia entre la aproximación y la solución exacta de la ecuación diferencial mediante la multiplicación de dicha diferencia (residuo) por una función de ponderación.

La determinación de la función de ponderación (que es nuestro primer problema a resolver) puede llevarse a cabo por medio de diferentes métodos, entre los cuales los mas conocidos son:

- \* Método de Mínimos Cuadrados.
- \* Método de Colocación.
- \* Método por Subdominios.
- \* Método de Bubnov-Galerkin.

### 2.2.3.1 MÉTODO DE COLOCACIÓN POR PUNTOS.

Se utilizan funciones de aproximación:

$$y = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.25)$$

Para cada parámetro no determinado  $a_1, b_1, c_1, \dots, x_n$ , seleccionando en un subintervalo en el dominio, se fuerza que el residuo en cada  $x_i$  sea exactamente cero.

$$R(x_1; a_1) = 0 \quad (2.26)$$

$$R(x_2; a_2) = 0 \quad (2.27)$$

⋮

$$R(x_n; a_n) = 0 \quad (2.28)$$

Para una función de ponderación con  $n$  parámetros, se obtiene un sistema con  $n$  ecuaciones residuales. Los puntos  $x_i$  son denominados entonces como puntos de colocación. Estos pueden ser localizados en cualquier lugar del dominio y en la frontera, pero no necesariamente en algún arreglo en particular.

### 2.2.3.2 MÉTODO POR COLOCACIÓN POR SUBDOMINIOS.

Para cada parámetro no determinado  $a_i$ ; Seleccionado en un intervalo  $\Delta x$  dentro del dominio se fuerza a que el término del residuo sea cero:

$$\frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} R(x_1; a_1) dx = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} R(x_2; a_2) dx = 0 \quad (2.30)$$

⋮

$$\frac{1}{\Delta x_N} \int_{\Delta x_N} R(x_N; a_N) dx = 0 \quad (2.31)$$

Otra vez, para una función de ponderación con  $n$  parámetros se tiene un sistema de  $n$  ecuaciones residuales.

El intervalo  $\Delta x$  es llamado subdominio, ellos pueden ser escogidos en cualquier forma, incluso superponiéndose o de manera que exista separación entre ellos.

### 2.2.3.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.

Con este criterio se minimiza, con respecto a cada  $a_i$ , la integral sobre el dominio entero del cuadrado del residuo, es decir, se trata de un criterio de mínimos cuadrados. La integral del cuadrado del residuo es una función de los  $a_i$ .

Para su minimización se requiere poner las derivadas parciales con respecto a cada  $a_i$  iguales a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_1^2 R^2(x_1; a_1) dx &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \int_1^2 R^2(x_2; a_2) dx &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_n} \int_1^2 R^2(x_n; a_n) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.32 - 2.34)$$

Aplicando las propiedades de linealidad de los operadores derivada e integral, es posible introducir la derivación parcial dentro de la suma

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x_1; a_1) \frac{\partial R(x_1; a_1)}{\partial a_1} dx &= 0 \\ \int_1^2 R(x_2; a_2) \frac{\partial R(x_2; a_2)}{\partial a_2} dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_1^2 R(x_n; a_n) \frac{\partial R(x_n; a_n)}{\partial a_n} dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.35 - 2.36)$$

$$(2.37)$$

### 2.2.3.4 MÉTODO DE GALERKIN (BUBNOV - GALERKIN)

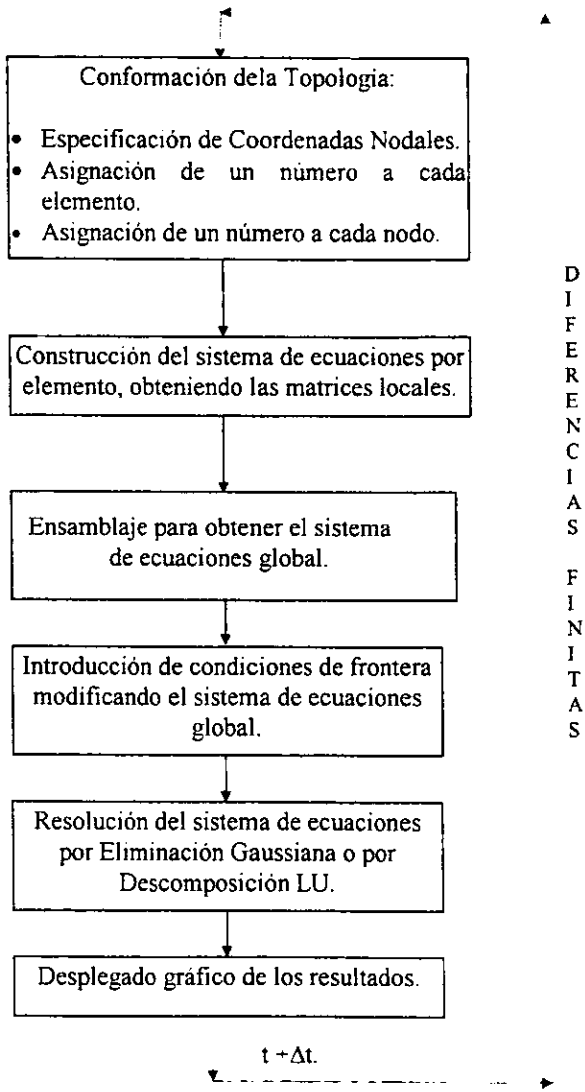
Para cada parámetro  $a_i$ , se requiere que el promedio ponderado del residuo  $R(x_i, a_i)$  dentro del dominio sea cero. Las funciones de peso son funciones de aproximación  $\phi_i(x)$  asociadas a cada  $a_i$

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x_1; a_1) \phi_1(x) dx &= 0 \\ \int_1^2 R(x_2; a_2) \phi_2(x) dx &= 0 \\ \vdots & \\ \int_1^2 R(x_N; a_N) \phi_N(x) dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.38 - 2.40}$$

Resultando una función de aproximación con  $N$  parámetros de campo y un sistema de  $N$  ecuaciones.

### 2.3. ALGORITMO GENERAL PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MEF.

La siguiente figura muestra un diagrama de bloques en el que se especifican los pasos que sigue un programa standard basado en el MEF para la resolución de ecuaciones diferenciales.



D  
I  
F  
E  
R  
E  
N  
C  
I  
A  
S  
  
F  
I  
N  
I  
T  
A  
S

Para problemas en estado transitorio se construye un ciclo externo de tiempo en base al esquema de diferencias finitas (lineas discontinuas)

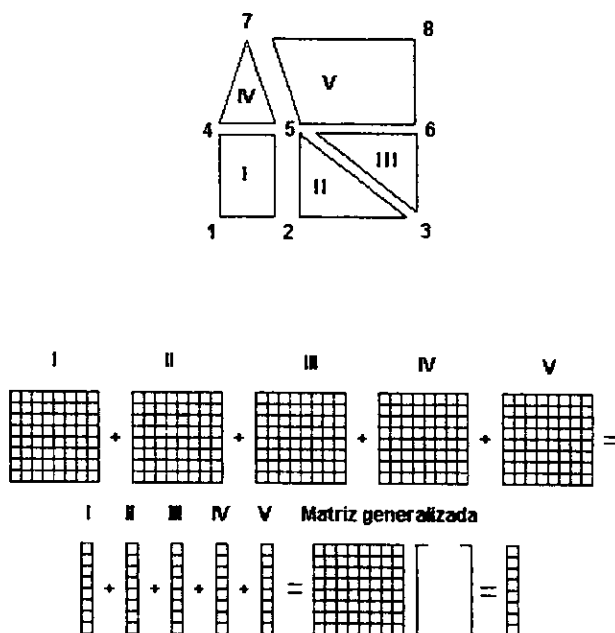
Para ejemplificar el ensamblaje de ecuaciones de los programas que se muestran a continuación se presenta la siguiente ilustración en la cual se presenta las partes que conforman una casa en la cual para poder conformarla los elementos se presentan con números romanos del I al V (paredes y techo) y las partes a ser conformadas son los nodos que se presenta con números arábigos del 1 al 8.

Primero se procede al ensamblaje de los elementos y su relación de los nodos y cómo es que se relacionan con los demás nodos (se representa con los cuadros de 8 por 8)

Las figuras que se presentan de 8 por 1 nos representan los elementos y cada uno de los nodos que los rodean.

Al final se suma el resultado de las matrices formadas formando así la matriz generalizada.

Fig. 2.1. Ensamblaje de ecuaciones.



El método de eliminación Gaussiana y de descomposición LU se presentan en los anexos de este trabajo; así como el ensamblaje de ecuaciones y la elaboración de los gráficos que se presentan al final de cada programa.

## 2.4. EJEMPLOS DE LAS TÉCNICAS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

### 2.4.1 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS EN LA RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.

Si se tiene la ecuación diferencial:

$$y'' - 4x = 0 \quad (2.41)$$

En la que se requiere obtener la mejor solución, con las siguientes condiciones de Frontera:

$$\text{C.F. 1: } y(0) = -2$$

$$\text{C.F. 2: } y(1) = 1$$

Para la obtención de la solución exacta se procede a integrar la ec. 2.41

$$y'' = 4x \quad (2.42)$$

$$y' = 4x^2 / 2 + C_1 \quad (2.43)$$

$$y = 2x^3/3 + C_1x + C_2 \quad (2.44)$$

Aplicando la condición de frontera 1:

$$y(0) = 2(0)^3/3 + C_1(0) + C_2 = -2 \quad (2.45)$$

$$C_2 = -2.$$

$$\text{Se obtiene: } y = 2x^3/3 + C_1x - 2 \quad (2.46)$$

Para determinar el valor de la función "y" se aplica la segunda condición de frontera en la ecuación 2.46.



$$y(1) = 2(1)^3/3 + C_1(1) - 2 = 1 \quad (2.47)$$

$$C_1 = 7/3$$

Por lo tanto:

$$y = 2x^3/3 + 7x/3 - 2 \quad (2.48)$$

La solución general de la ecuación diferencial nos proporciona una serie de curvas (ec. 2.44), y en el caso de imponer condiciones de frontera se obtiene una sola curva (ec. 2.48), que es la solución exacta de la ecuación diferencial.

Aplicando el Cálculo Variacional para la ecuación (2.41):

1) Se propone una función de Aproximación, por ejemplo un polinomio cuadrático:

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad (2.49)$$

Se establecen las condiciones de Frontera anteriores:

$$\text{C.F. 1: } y(0) = -2$$

$$\text{C.F. 2: } y(1) = 1$$

En el caso del Cálculo Variacional, primero se procede a derivar la ec. 2.49

$$y_p' = 2ax + b \quad (2.50)$$

2) Se procede a determinar la segunda derivada.

$$y_p'' = 2a \quad (2.51)$$

Sustituyendo la segunda derivada de la función de aproximación en la ec. (2.41)

$$2a - 4x = 0. \quad (2.52)$$

Si fuera la solución exacta  $2a + 4x$  deberá ser cero, como el polinomio cuadrático es solo una aproximación a la verdadera solución, entonces debe haber un residuo o error (R) respecto a la solución exacta:

$$2a + 4x = R. \quad (2.53)$$

La función residuo se presenta en todo el intervalo, dando desviaciones positivas en algunos puntos dentro de dicho intervalo y negativos en otros. Para minimizar el error primero se eleva al cuadrado los residuos con la finalidad de eliminar el signo, luego se suman en todo el intervalo mediante una integración y finalmente se minimiza la suma de errores mediante el método clásico de obtener la primera derivada e igualarla a cero.

3) Vayamos por partes, primero se suman todos los errores dentro del intervalo y se elevan al cuadrado para obtener valores absolutos.

$$\int R^2 dx \quad (2.54)$$

4) Ahora se minimiza el residuo buscando los parámetros óptimos de la función de aproximación, en este caso "a".

$$\frac{d}{da} \left[ \int_0^1 R^2 dx \right] = 0 \quad (2.55) \quad \int_0^1 \frac{d}{da} (R^2) dx = 0 \quad (2.57)$$

$$dR^2 = 2RdR \quad (2.56) \quad \frac{d}{da} R^2 = 2R \left( \frac{dR}{da} \right) = 2(2a + 4x)(2) \quad (2.58)$$

$$\frac{d}{da} R^2 = 4(2a - 4x) \quad (2.59)$$

Por lo tanto la integración es la siguiente:

$$\int_0^1 \frac{d}{da} (R^2) dx = 4 \int_0^1 (2a - 4x) dx = 0 \quad (2.60)$$

$$\left[ ax - x^2 \right]_0^1 = 0 \quad (2.61)$$

$$a = 1$$

Sustituyendo la primera condición de frontera en la ecuación (2.49), se obtiene:

$$y(0) = a(0)^2 + b(0) + c = -2 \quad (2.62)$$

Por lo tanto:

$$c = -2$$

Se procede a evaluar el valor de  $b$  sustituyendo la segunda condición de frontera en la ec. 2.49 obteniendo lo siguiente:

$$y(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 1 \quad (2.63)$$

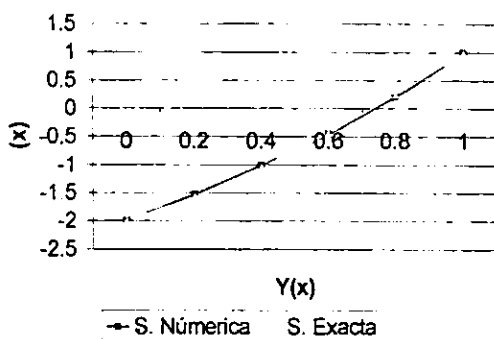
por lo tanto

$$b = 2$$

La mejor aproximación cuadrática a la solución exacta de la ecuación diferencial en el intervalo de 0 a 1, es:  $y = -x^2 + 2x - 2$

$x$	$y = 2x^3/3 + 7x/3 - 2$	$y = x^2 + 2x - 2$
0.0	-2.0	-2.0
0.2	-1.528	-1.560
0.4	-1.024	-1.040
0.6	-0.456	-0.440
0.8	0.208	0.240
1.0	1.0	1.0

**Tabla 2.1. Comparación de resultados entre la solución analítica y numérica del método variacional.**



**Gráfico 2.1. Comparación de resultados entre solución analítica y numérica del ejemplo 4.2.1**

## 2.4.2. EJEMPLO DEL MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN.

Para ilustrar el método de Bubnov-Galerkin se considera el siguiente ejemplo:

Una barra de longitud  $L$ , con coeficiente de conductividad térmica igual a uno y área transversal unitaria, produce calor en su mitad izquierda en una cantidad igual a 100 unidades de energía en sistema internacional (Joules), mientras que su mitad derecha no genera energía térmica. La temperatura en ambos extremos se mantiene igual a cero, el problema es determinar la distribución de temperatura a lo largo de la barra en condiciones de estado estacionario.

La ecuación diferencial, que puede ser expresada como una función de la temperatura ( $T$ ) es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Q = 0$$

Con  $Q = Q(x)$  dado por:

$$Q = 100 \quad \text{para } (0 \leq x \leq L/2), \text{ y}$$
$$Q = 0 \quad \text{para } (L/2 \leq x \leq L)$$

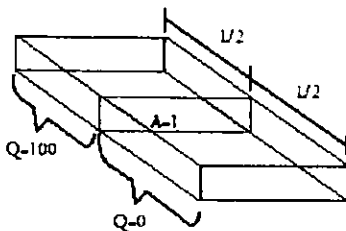


Fig. 2.2 barra de longitud  $L$ , con suministro de calor en la primera mitad

Las condiciones de frontera son:

$$T = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y en } x = L.$$

En búsqueda de la solución numérica propondremos una función de aproximación lineal que satisfaga exactamente las condiciones de frontera y sea continua en todo el dominio de la ecuación diferencial.

El programa que se lista a continuación permite determinar el perfil de temperaturas para el caso de interés, por el método de Galerkin. La exactitud del método es del 100% aun para un pequeño número de nodos.

Durante la ejecución del programa se le pide al usuario que introduzca el número de nodos en el que se subdivide la barra, a lo cual se debe de responder con un número impar para que exactamente la mitad de la barra funcione como fuente de calor. Cuando el número de nodos rebasa 25, se tiene problemas de precisión debido a la manipulación de las ecuaciones a resolver por el método de eliminación Gaussiana.

**2.4.2.1. PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR 1-D POR CONDUCCIÓN ESTADO ESTACIONARIO.**

```

PRINT *****
PRINT **          MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN          **
PRINT *****
PRINT **          CONDUCCIÓN 1-D EN ESTADO ESTACIONARIO          **
PRINT *****
PRINT **          DETERMINACIÓN DEL PERFIL DE TEMPERATURA          **
PRINT "EN UNA BARRA CON GENERACIÓN DE CALOR EN SU PRIMERA "
PRINT "**          MITAD Y TEMPERATURA CERO EN AMBOS EXTREMOS          **"
PRINT *****
SCREEN 12
COLOR 14
INPUT "NÚMERO DE DIVISIONES ="; N
    
```

L = 1; Q = 100  
LE = L (N - 1)

- \* Se especifica el número de nodos a lo largo de la barra
- \* El número de elementos es igual a N - 1
- \* Se define la longitud de la barra y el calor total producido (SI)
- \* Se calcula la longitud de los elementos

- Se dimensionan los arreglos matriciales:
- Una matriz cuadrada [K] de dimensión 2, 2 donde se almacenarán los elementos de la matriz local de conductancia
  - Una matriz cuadrada [KG] de dimensión N, N donde se guardan los elementos de la matriz global de conductancia
  - Una matriz bidimensional [F], de dimensiones N, 2 donde se almacenan los términos independientes de cada uno de los N - 1 elementos.
  - Un vector [FG] donde se guardan los términos independientes del sistema ensamblado.
  - El vector X de dimensión N para implementar la subrutina de eliminación gaussiana para la resolución del sistema de ecuaciones

```

DIM K(2, 2), KG(N, N), F(N, 2), FG(N)
DIM X(N), Y(N), XN(N), YN(N), DIVX(N ^ 2), DIVY(N ^ 2)
REM construcción de la matriz de conductancia
K(1, 1) = 1 / LE
K(2, 2) = 1 / LE
K(1, 2) = -1 / LE
K(2, 1) = -1 / LE
    
```

$$[K] = \frac{1}{LE} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```

PRINT "**MATRIZ LOCAL DE CONDUCTIVIDAD PARA TODOS LOS ELEMENTOS: [K]**"

FOR i = 1 TO 2: FOR J = 1 TO 2
    PRINT K(i, J);
NEXT J: PRINT: NEXT i
    
```

Imprime la matriz local de conductividad

## REM CONSTRUCCIÓN DEL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

```
FOR i = 1 TO (N - 1) / 2  
  F(i, 1) = Q * LE / 2  
  F(i, 2) = F(i, 1)
```

A cada uno de los nodos de los elementos correspondientes a la mitad izquierda se le asigna una producción de calor igual al 50% de la que se produce en cada elemento.

```
'PRINT "**VECTOR LOCAL DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES DEL  
ELEMENTO*"; i  
'PRINT F(i, 1)  
'PRINT F(i, 2)
```

Imprime vector local de términos independientes, lado izquierdo

```
NEXT i  
FOR i = (N - 1) / 2 + 1 TO N - 1  
  F(i, 1) = 0  
  F(i, 2) = 0
```

A cada uno de los nodos de los elementos correspondientes a la mitad derecha se le asigna una producción de calor igual a cero.

```
'PRINT "**VECTOR LOCAL DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES DEL  
ELEMENTO*"; i  
'PRINT F(i, 1)  
'PRINT F(i, 2)  
NEXT i
```

Imprime vector local de términos independientes, lado derecho

```
'DO  
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
```

```
REM GLOBALIZACIÓN
```

Se procede a la globalización, es decir, al ensamblaje del sistema de ecuaciones

La siguiente tabla muestra los resultados de la solución analítica y los de la solución numérica:

Coordenada	Sol. Numérica	Sol. Analítica
0	0	0
0.05	1.75	1.75
0.1	3.25	3.25
0.15	4.5	4.5
0.2	5.5	5.5
0.25	6.25	6.25
0.3	6.75	6.75
0.35	7	7
0.4	7	7
0.45	6.75	6.75
0.5	6.25	6.25
0.55	5.625	5.625
0.6	5	5
0.65	4.375	4.375
0.7	3.75	3.75
0.75	3.125	3.125
0.8	2.5	2.5
0.85	1.875	1.875
0.9	1.25	1.25
0.95	0.625	0.625
1	0	0

**Tabla 2.2. Comparación entre sol. Analítica y numérica del ejemplo de mínimos cuadrados.**

La solución analítica se obtiene por integración directa de la ecuación diferencial de segundo grado:

$$T'' = -Q / k \quad (2.64)$$

$$\text{con } T' = (-Q / k)x + C_1, \text{ y } T = (-Q / k)x^2 / 2 + C_1x + C_2 \quad (2.65)$$

En la mitad izquierda, la condición a la frontera:

$T = 0$  en  $x = 0$ , da  $C_2 = 0$ , y entonces:

$$T_{IZQ} = (-Q / k)x^2 / 2 + C_1x \quad (2.66)$$

En el lado derecho, como  $Q = 0$ :

$$T_{DER} = C_3x + C_4, \text{ y como } T = 0 \text{ en } x = L: T_{DER} = C_3(x - L) \quad (2.67)$$

La distribución de temperatura debe ser una función continua en el intervalo de  $x$ , por lo tanto en  $x=L/2$ , tanto  $T$  como su primera derivada deben ser la misma en ambos lados, consecuentemente:

$$T_{DER} = T_{IZQ} \text{ en } x = L / 2 \quad (2.68)$$

$$T'_{DER} = T'_{IZQ} \text{ en } x = L / 2 \quad (2.69)$$

Al sustituir estas condiciones de frontera se llega a:

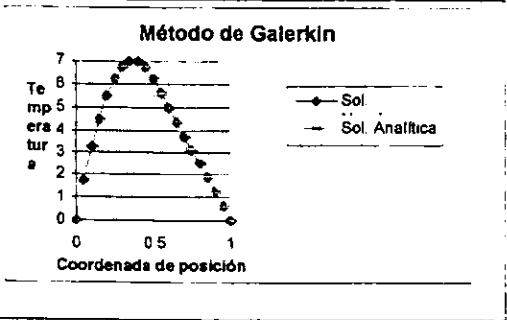
$$T_{IZQ} = (3 Q L / 8 k)x - (Q / 2 k)x^2, \text{ y}$$

$$T_{DER} = (Q L / 8 k) (L - x)$$

(2.70-2.71)

Estas son las expresiones matemáticas que se usan para hallar la solución analítica que se reporto en la tabla anterior.

La gráfica que se muestra a continuación, exhibe la distribución de temperatura a lo largo de la placa. Los valores calculados por el método analítico y el de Galerkin coinciden por completo para los 20 elementos, pero también para 2 o 4, como puede constatarse al ejecutar el programa con 3 o 5 nodos, respectivamente



Gráfica 2.2. Resultado gráfico entre solución numérica y solución analítica, para el ejemplo del método de Galerkin.

Para mostrar la versatilidad del método, utilizaremos el mismo programa para resolver un problema ligeramente diferente. Consideremos la misma barra con generación interna de calor en su mitad izquierda y sin producción en su otra mitad, pero con un extremo derecho por el cual se pierde calor a razón constante de 20 Joules / segundo. El sistema se encuentra en estado estacionario, así que la ecuación diferencial a considerar es la misma.

La solución analítica ahora es:

$$T_{IZQ} = -(Q/2k)x^2 + (L/k)(Q/2 + Q_2)x \quad (2.70)$$

$$T_{DER} = (QL^2 / 8k) + (Q_2L / k)x \quad (2.71)$$



Donde  $Q_2$  es la potencia del sumidero de calor, y tendrá un valor de  $-20$  para efectos de cálculo en este ejemplo.

El programa de elemento finito se modifica simplemente cambiando un par de instrucciones en el bloque de especificación de condiciones de frontera, ellas son:

$$KG(N-1, N) = 0; KG(N, N-1) = 0; \quad (2.72)$$

$$FG(1) = 0; FG(N) = 0 \quad (2.73)$$

A la primera de estas dos líneas se le coloca una comilla para anularla, y en la segunda se especifica el valor de  $Q_2$ , quedando:

$$'KG(N-1, N) = 0; KG(N, N-1) = 0; \quad (2.74)$$

$$FG(1) = 0; FG(N) = -20 \quad (2.75)$$

Al ejecutar el programa se obtiene el perfil de temperaturas en la barra. La siguiente tabla muestra los resultados y su comparación con la solución analítica:

Coord. Nodal	Sol. Analítica	Sol. Numérica
0	0	0
0.05	1.375	1.375
0.1	2.5	2.5
0.15	3.375	3.375
0.2	4	4
0.25	4.375	4.375
0.3	4.5	4.5
0.35	4.375	4.375
0.4	4	4
0.45	3.375	3.375
0.5	2.5	2.5
0.55	1.5	1.5
0.6	0.5	0.5
0.65	-0.5	-0.5
0.7	-1.5	-1.5
0.75	-2.5	-2.5
0.8	-3.5	-3.5
0.85	-4.5	-4.5
0.9	-5.5	-5.5
0.95	-6.5	-6.5
1	-7.5	-7.5

Gráfico 2.3. Resultado gráfico de la soln. Analítica y numérica en una barra con generación interna de calor, utilizando el método de Galerkin.



Nuevamente el método de Galerkin coincide 100% con la solución exacta.

Tabla 2.3. Resultados numéricos para el ejemplo de una barra con generación interna de calor, utilizando el método de Galerkin.

### 2.4.3. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO VARIACIONAL EN EL CALENTAMIENTO POR MICROONDAS.

El problema que se considera es la resolución de la ecuación diferencial:

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right] = k \nabla^2 T + Q. \quad (2.76)$$

Para empezar se considera un proceso de transferencia de calor unidireccional en coordenadas cartesianas y estado inestable. Sujeto a la condición inicial  $T = T_{amb}$ , para todos los puntos del material en  $t = 0$  y con condición de frontera de transporte de calor por convección en la superficie. Para cumplir con la ecuación de Euler-Lagrange conviene definir el funcional tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial \xi / \partial x)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial (\partial \xi / \partial y)} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial (\partial \xi / \partial z)} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = Q - \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p T)$$

La aplicación del principio de cálculo variacional permite llegar a la siguiente función:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left\{ k_x \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]^2 + k_y \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]^2 + k_z \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right]^2 - 2T(Q - \rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right]) \right\} dV + \int_\Gamma h T^2 d\Gamma \quad (2.79)$$

Donde:

$V$  = Volumen de la muestra.

$\Gamma$  = Contorno en la muestra

$Q$  = Término de generación de calor interno por unidad de volumen

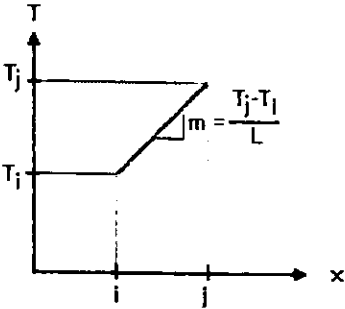
La minimización respecto a los parámetros de la función de aproximación de esta integral permitirá llegar a un sistema de ecuaciones simultáneas que tendrá la siguiente forma:

$$[C] \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right] + [k][T] = [F] \quad (2.80)$$

Donde [C] es la matriz de capacitancia  $[dT/dt]$  es el vector de derivadas temporales de la temperatura, [K] es la matriz de conductancia y [F] es el vector de términos independientes.

Para empezar se introduce una función de aproximación lineal de la temperatura:

**\*INTERPOLACIÓN LINEAL\***



**Fig. 2.4. Interpolación lineal.**

La gráfica representa la forma de obtener el polinomio de interpolación lineal, el procedimiento puede ser visualizado como una aplicación de la regla de la palanca.

$$T_x = \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] T_i + \left[ \frac{x}{L} \right] T_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = [H^{(e)}] [T] \quad (2.81)$$

Donde :  $\begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} = [H^{(e)}]$       y       $\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = [T]$       (2.82)

y su transpuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{bmatrix} = [H^{(e)}]^T \quad \text{y} \quad [T_i \ T_j] = [T]^T \quad (2.83)$$

L es la longitud del elemento y x es la distancia recorrida en el elemento.

Desarrollando cada uno de los términos de la ecuación por separado:

Al haber obtenido la función de aproximación se prosigue a resolver cada uno de los términos por separado de la ecuación (2.79) considerando la transferencia de calor en la dirección x:

$$k = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} = \text{Matriz de conductividades térmicas.}$$

$$I^e = \frac{kA}{2} \int \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.84)$$

Se prosigue a introducir la función de aproximación  $T^{(e)} = [H^{(e)}] [T]$ .

Donde:  $[H^{(e)}]$  = Matriz de funciones de interpolación.

<sup>(e)</sup> = Superíndice que especifica que las matrices corresponden a un elemento "e" en particular.

$$I^e = \frac{kA}{2} \int \left( \frac{\partial}{\partial x} T \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} T \right) dx \quad (2.85)$$

$$I^e = \frac{kA}{2} \int \left( [T] \frac{\partial}{\partial x} [H^{(e)}] \right) \left( [T]^T \frac{\partial}{\partial x} [H^{(e)}]^T \right) dx \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [H^{(e)}] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1-x/L & x/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [H^{(e)}]^T = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Después se deriva con respecto a x la función de aproximación y finalmente se integra para poder obtener una ec. Algebraica.

En lo siguiente, se eliminan los superíndices <sup>(e)</sup> en notaciones matriciales y solo se referirá a ellos en caso de ser necesario.

$$I^e = \frac{kA}{2} [T] [T]^T \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} dx \quad (2.89)$$

$$I^e = \frac{kA}{2L} [T] [T]^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [T] [K] [T]^T \quad (2.90)$$

La última expresión caracteriza el transporte de calor por conducción.

En la generación de calor, se obtiene dos integrales:

$$[I]^e = -2 \int \int \int T Q dv + 2 \int \int T q ds \quad (2.91)$$

En los casos que se analizaron no existe fuente superficial de calor, así que la segunda integral es cero. Por otra parte, la absorción de la radiación genera fuentes volumétricas de calor cuya intensidad sigue las leyes de Maxwell, discutidas previamente en el capítulo 1. En consideración a esto, la expresión anterior se reduce a:

Para el término de Generación de calor, si se considera que es constante en cada elemento y se tiene el siguiente funcional:

$$I^e = -\frac{A}{2} \int 2TQ dx \quad (2.92)$$

$$I^e = -AQ \int T dx \quad (2.93)$$

Introduciendo la función de aproximación

$$I^e = -AQ \int ([T]^T [H^e]^T) dx \quad (2.94)$$

Después se deriva con respecto a  $x$  la función de aproximación y finalmente se integra de 0 a  $L$  que es la longitud de todo el elemento, para poder obtener una ec. Algebraica.

$$I^e = -\frac{AQL}{2} [T]^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [Q] [T]^T \quad (2.95)$$

La integral de superficie que se evalúa enseguida, caracteriza las pérdidas de calor longitudinales por convección, las cuales se verifican a través del perímetro ( $p$ ) del material.

$$I_r = h \int_{\Gamma} (T)^2 d\Gamma \quad (2.96)$$

Donde  $\Gamma$  representa la superficie total. Si simplificamos diciendo que solo existe pérdida de calor por convección en el eje  $x$ , se tiene:

$$I^b = hP \int (T)(T^T) dx \quad (2.97)$$

Se prosigue a introducir la función de aproximación

$$I^b = hP \int ([T] [H^e]) ([T]^T [H^e]^T) dx \quad (2.98)$$

Después se deriva con respecto a x la función de aproximación y finalmente se integrase para poder obtener una ec. Algebraica.

$$I^b = hP [T] [T]^T \begin{bmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{bmatrix} = [T] [h] [T]^T \quad (2.99)$$

Donde :

$$[h] = hP \begin{bmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{bmatrix} = \text{Matriz Convectiva} \quad (2.100)$$

La matriz de capacitancia se obtiene en función del termino de acumulación de energía. El funcional correspondiente es:

$$I^c = \rho C_p A \int T \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx \quad (2.101)$$

$$I^c = \rho C_p A \int (T) \frac{d}{dt} (T^T) dx \quad (2.102)$$

Se prosigue a introducir la función de aproximación

$$I^c = \rho C_p A \int ([T] [H^e]) \frac{d}{dt} ([T]^T [H^e]^T) dx \quad (2.103)$$

$$I^c = \rho C_p A [T] \int ([H^e] [H^e]^T) \frac{d}{dt} ([T]^T) dx \quad (2.104)$$

Después se deriva con respecto a x la función de aproximación e integrar.

$$I^c = \rho C_p A [T] \int \left( [1 \quad -x/L] \begin{bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{bmatrix} \right) \frac{d}{dt} ([T]^T) dx \quad (2.105)$$

$$I^e = \rho C_p A [T] \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2} & \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \\ \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dx \frac{d}{dt} [T]^T \quad (2.106)$$

$$I^e = \rho C_p A [T] \begin{bmatrix} x - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{3L^2} & \frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} \\ \frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} & \frac{x^3}{3L^2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} [T]^T \quad (2.107)$$

$$I^e = [T] \rho C_p A \begin{bmatrix} L/3 & L/6 \\ L/6 & L/3 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} [T]^T = [T] [C] \frac{d}{dt} [T]^T \quad (2.108)$$

Las variaciones temporales de la temperatura en cada uno de los nodos se evalúa por medio del esquema de diferencias finitas, aproximando las derivadas con incrementos finitos. Más adelante se resolverán mediante Diferencias Finitas.

Finalmente se procede a evaluar todo el sistema sumando todos los funcionales de los elementos y de frontera de acuerdo con la ec.

$$I = [T] [K] [T]^T + [Q] [T]^T + [T] [C] \frac{d}{dt} [T]^T - [T] [h] [T]^T \quad (2.109)$$

Simplificando con:

$$[T] [D] [T]^T = [T] [K] [T]^T - [T] [h] [T]^T \quad (2.110)$$

Se tiene:

$$I = [T] [D] [T]^T + [Q] [T]^T + [T] [C] \frac{d}{dt} [T]^T \quad (2.111)$$

Se procede a minimizar los errores, para obtener un sistema de ecuaciones como la ecuación 2.80

Para la minimización se requiere que:  $\frac{\partial I}{\partial T} = 0$

$$\frac{\partial I}{\partial T} = [D] [T]^T + [Q] + [C] \frac{d}{dt} [T]^T = 0 \quad (2.112)$$

El sistema de ecuaciones obtenido es:

$$[D] [T]^T + [C] \frac{d}{dt} [T]^T = -[Q] \quad (2.113)$$

Al igual que se han tomado funciones representativas para cada región basándose en aproximaciones lineales, para los "elementos finitos de tiempo" se tomará una media aritmética de la temperatura en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que será finalmente los que se manejarán en las matrices  $[T^{(e)}]$  para obtener el sistema de ecuaciones simultáneas.

Entonces se procederá a definir el promedio para los elementos de tiempo en cada nodo como:

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} &= \frac{T_i^{1+\Delta t} - T_i^1}{\Delta t} & \langle T_i \rangle &= \frac{T_i^{1+\Delta t} + T_i^1}{2} \\ \frac{dT_j}{dt} &= \frac{T_j^{1+\Delta t} - T_j^1}{\Delta t} & \langle T_j \rangle &= \frac{T_j^{1+\Delta t} + T_j^1}{2} \end{aligned} \quad y \quad (2.114)$$

$$\frac{d}{dt} [T] = \frac{1}{\Delta t} ([T_i^{1+\Delta t}] - [T_i^1]) \quad (2.115)$$

$$[\langle T \rangle] = \frac{1}{2} ([T_i^{1+\Delta t}] + [T_i^1]) \quad (2.116)$$

Si se asumen propiedades físicas invariantes durante el tiempo de procesamiento, tanto de la fuente de radiación, como del material calentado, y del medio ambiente circundante, las matrices  $[<C>]$ ,  $[<k>]$ , y  $[<F>]$ , son exactamente iguales a  $[C]$ ,  $[K]$ , y  $[F]$ , respectivamente.

$$\frac{[D]}{2} ([T_i^{1+\Delta t}] + [T_i^1]) + \frac{[C]}{\Delta t} ([T_i^{1+\Delta t}] - [T_i^1]) = -[Q] \quad (2.117)$$



Colocando todo en términos de la temperatura:

$$\left(\frac{\Delta t[D] - 2[C]}{2\Delta t}\right) [T_i^t] + \left(\frac{\Delta t[D] + 2[C]}{2\Delta t}\right) [T_i^{t+\Delta t}] = -[Q] \quad (2.118)$$

La fórmula de recurrencia para implementar los ciclos de cálculos iterativos en el transcurso del tiempo, se obtiene despejando la matriz  $[T_i^{t+\Delta t}]$ : Esta expresión es con la que se construyen las ecuaciones locales para cada elemento finito. Una vez escritas éstas ecuaciones se procede a la globalización de las matrices, llevando a cabo una suma de las funciones resultantes en los nodos de intersección de cada elemento, y finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones algebraico, para obtener la distribución espacio - temporal de la temperatura.

## 2.5. APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO EN LA INDUSTRIA DE ALIMENTOS.

El método de Elemento Finito ha sido utilizado satisfactoriamente para la modelación de diversas operaciones en el procesamiento de alimentos. Algunas de las áreas donde existen extensos trabajos son: esterilización, refrigeración y congelación, calentamiento y enfriamiento, secado y en la determinación de daño mecánico y térmico de productos. La mayoría de los trabajos se han estudiado en el caso de figuras axisimétricas y en el caso unidimensional y bidimensional así como en estado transitorio. Un limitado grupo de investigadores ha estudiado casos tridimensionales acoplados con el análisis de calentamiento, humedad y distribución de esfuerzos en productos alimenticios.

El potencial del Elemento Finito no ha sido explotado ampliamente. Algunas otras áreas de investigación se limitan al campo de la panadería, cocinado, procesamiento por microondas, calidad y evaluación de la textura, retención de nutrientes, y degradación microbiana.

### 2.5.1. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.

El Método de Elemento Finito se compara con el método de Diferencias Finitas que es el método más ampliamente utilizado en la simulación de diversas operaciones en el procesamiento de alimentos.

Las ventajas del Método de Elemento Finito son:

1. El método puede manejar variaciones espaciales de propiedades de materiales con facilidad relativa.
2. Las regiones irregulares pueden ser modeladas con mayor exactitud.
3. El método es más adecuado para problemas no lineales.
4. Los tamaños de los elementos pueden ser variables.
5. La interpolación espacial es más significativa.
6. Problemas mixtos de valores de frontera son más fáciles de manejar.

Las desventajas del método de elemento finito son:

1. Las ecuaciones de los elementos son matemáticamente más complejas, comparada con las ecuaciones de puntos nodales utilizadas en el método de diferencias finitas.
2. El método es numéricamente intensivo y abarca mayor tiempo en la memoria en el CPU, comparado con el método de diferencias finitas, para resolver el mismo problema.
3. Para la estimación del flujo (dadas las temperaturas) el sistema de ecuaciones tiene que ser resuelto.

### **2.5.2. OTROS USOS POTENCIALES DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.**

Los usos comunes del MEF en el procesamiento de alimentos han sido restringidos a la evaluación de temperaturas y humedad durante el Calentamiento / Enfriamiento / Secado de alimentos.

Como ejemplos de estos trabajos de investigación se citan a continuación los más importantes:

AUTOR	Dependientes del Tiempo	1-D	2-D	Geometría Axissimétrica	3-D	Conducción de Calor	Difusión de Humedad	Producto	Aplicaciones
Naveh y colaboradores (182,1983)	x		x	x		x		Alimentos Fluidos	Esterilización de productos alimenticios
Sastry y colaboradores (1985,1986)	x				x	x		Hongos Enlatados	Esterilización (Destrucción microbiana)
Mc Carthy y colaboradores (1987,1989)	x		x					Alimentos Fluidos	Refrigeración y Congelación
Abdalla y colaboradores (1985)	x		x			x		Carne (Fmbutidos)	Refrigeración n
Purwadaria y colaboradores (1980,1982)	x		x			x		Carne	Refrigeración
Comini y colaboradores (1973,1974,1978)	x		x			x		Carne	Refrigeración
Upadhyaya y colaboradores (1986)	x			x		x		Hojuelas de soya	Calentamiento
Turner y colaboradores (1987)	x		x			x		Carne	Efectos de Calentamiento Enfriamiento
Gustafson y colaboradores (1977,1979)	x		x			x	x	Maiz	Efectos del Calentamiento / Humedad
Sokhansanj y colaboradores (1982)	x		x			x		Arroz	Calentamiento
Lin y colaboradores (1989,1990)	x			x		x		Gel de Alginato	Calentamiento en hornos de Microondas
Potluri (1985)	x		x			x		Bistec	Enfriamiento

AUTOR	Dependientes del Tiempo	1-D	2-D	Geometría Axisimétrica	3-D	Conducción de Calor	Difusión de Humedad	Producto	Aplicaciones
Arce y colaboradores (1983)	x		x					Bistec	Enfriamiento
Jiang y colaboradores (1987)	x		x	x			x	Brócoli	Enfriamiento
Hayakawa y colaboradores (1982)	x			x				Jitomate	Enfriamiento
Stringer y colaboradores (1989)	x				x	x		Gel de Alginato	Calentamiento en hornos de Microondas
Misra y Young (1979)	x					x		Manzanas	Enfriamiento
Chinnan y colaboradores (1984)	x						x	Ciruela	Secado
Haghighi y colaboradores (1987,1988)	x			x			x	Hojuelas de soya	Efectos de Secado
Upadhyaya y Rumsey y colaboradores (1989)	x		x			x	x	Hojuelas de soya	Efectos de Secado
Irudayara y colaboradores (1989)	x		x			x	x	Uvas	Secado
Misra y colaboradores (1977,1978,1981)	x		x			x	x	Hojuelas de soya	Efectos de Secado
Syarief y colaboradores (1987)			x				x	Maiz	Parámetros de Hidratación /Deshidratación
Zhang y colaboradores (1983)			x				x	Arroz	Parámetros de Hidratación /Deshidratación

AUTOR	Dependientes del Tiempo	1-D	2-D	Geometría Axisimétrica	3-D	Conducción de Calor	Difusión de Humedad	Producto	Aplicaciones
Bakshi y colaboradores (1984)			x				x	Ciruelas	Parámetros de Hidratación /Deshidratación
Rumsey y Fortis (1983)			x					Granos	Flujo de Aire (Bulbo seco)
Seegerlind (1982)			x					Fruta	Flujo de Aire (Bulbo seco)
Talbot (1989)				x				Granos	Flujo de Aire
Chapman y colaboradores (1988)			x					Granos	Flujo de Aire
Rumsey y colaboradores (1977)			x	x				Granos	Impacto de daños
Gustafson y Seegerlind (1977)			x	x				Granos	Impacto de daños
Chen y colaboradores (1984)			x	x				Frutas	Impacto de daños
Cooke y colaboradores (1978)			x	x				Películas Biológicas	Impacto de daños en células
Cardenas-Weber y colaboradores (1989)	x			x	x			Melones	Daños por contacto
Hong y colaboradores (1985,1986)	x		x				x	Almendras, Plátanos y Uvas	Empacado

Tabla 2.1. Aplicaciones del Método de Elemento Finito en el procesamiento de Alimentos.

Fuente: Summary of the use of the finite element method in food processing, Journal of Food Engineering

El uso del MEF para describir el procesamiento térmico, a sido demostrado por un número limitado de investigaciones (Naveh, 1982; Sastry, 1985; McCarthy y Merson, 1989).

El cálculo numérico de valores de temperaturas puede ser estimado para calcular los cambios de los parámetros de calidad, tales como retención de nutrientes y destrucción microbiana en alimentos durante el procesado de alimentos.

Esta información puede ser utilizada para optimizar el procesamiento térmico con respecto a la calidad de los alimentos.

El MEF también tiene potencial para describir el flujo de fluidos y transferencia de calor durante el calentamiento aséptico de alimentos.

El calentamiento por microondas en alimentos no homogéneos de formas irregulares es otra área en donde puede ser utilizado satisfactoriamente el MEF.

El calentamiento y transferencia de masa simultánea que ocurre en alimentos de formas irregulares puede ser analizado durante el calentamiento por microondas usando la formulación por Elemento Finito.

Los alimentos de cualquier geometría pueden ser estudiados a través de sus variaciones físicas y sus propiedades dieléctricas como una función de temperatura y el contenido de humedad durante el calentamiento.

El efecto de la distribución no uniforme en el campo de microondas sobre la superficie del alimento resulta en una dependencia de las condiciones de frontera espaciales, que pueden ser investigadas por el uso de este método numérico.

La información de la temperatura puede ser utilizada para analizar la destrucción microbiana y la degradación de nutrientes durante el calentamiento por microondas.

El MEF también puede ser utilizado para simular transferencia de calor y masa durante el secado y así optimizar el proceso con respecto a la calidad del producto.

Otras áreas en donde se puede explotar el MEF son para elaboración de modelos de simulación durante el congelamiento y descongelamiento de alimentos.

En el área de los fluidos no newtonianos se utiliza las propiedades reológicas de los alimentos para así elaborar plantas de procesamiento más eficientes. La extrusión de alimentos es otra área donde el MEF puede ser implementado efectivamente para simular matemáticamente el proceso de extrusión.

Este método puede ser implementado para resolver la ecuación de transferencia de calor y de flujo dentro de la barrera del extrusor.

Las aplicaciones durante el procesamiento de alimentos envuelven las interacciones termo-mecánicas y termo-hidromecánicas, las cuales son eficientemente modeladas por el uso del MEF.

En el caso del empaque de alimentos solo se ha utilizado en el caso de plantas piloto. Los beneficios económicos que se obtienen en la industria del procesamiento de alimentos son muy redituables utilizando el MEF como una herramienta de investigación que puede resultar en grandes beneficios.

... ..

## Transferencia de Calor en Estado Estacionario Bidimensional.

### 3.1 INTRODUCCIÓN.

En un trabajo de tesis profesional anterior dirigido por mi asesor, en el campo de la Ingeniería Civil (diseño de pavimentos flexibles), se demostró que las interrelaciones básicas para la formulación de la solución por métodos de elemento finito de problemas de elasticidad, pueden obtenerse simplemente por minimización de la energía potencial total del sistema, sin ninguna referencia directa a las ecuaciones de equilibrio estático.

En muchas áreas de física e ingeniería es posible obtener soluciones analíticas aproximadas de diferentes problemas minimizando algún funcional sujeto a ciertas condiciones de frontera. En el caso de la elasticidad, este funcional corresponde físicamente a la energía potencial total del sistema (El principio de trabajos virtuales).

En varios casos, el funcional puede ser simplemente una cantidad definida matemáticamente. En otros campos, la interpretación física puede no ser tan obvia. Por ejemplo, en algunos casos del flujo de un fluido ideal, el funcional podría representar la rapidez de producción de entropía.

El comportamiento físico que gobierna una gran variedad de problemas en ingeniería, puede ser descrito mediante las bien conocidas ecuaciones diferenciales de Laplace y de Poisson. La solución analítica de dichas ecuaciones en problemas de campo bi y tri dimensionales puede representar una tarea formidable, especialmente en el caso en que existan condiciones de frontera complejas y regiones de geometría irregular. La formulación vía elemento finito de esta clase de problemas ha probado ser una aproximación muy efectiva y versátil a la solución. Las dificultades a que se enfrentan los métodos de diferencias finitas, asociadas con geometría irregular y condiciones de frontera complejas son virtualmente eliminadas.

Algunos ejemplos de problemas que se encuentran frecuentemente en la práctica de la ingeniería y que caen dentro de esta categoría, son: conducción de calor, percolación a través de medios porosos, torsión de vigas prismáticas, flujo de potencial irrotacional en fluidos, distribución de campos eléctricos y magnéticos, etc. En el área de la ingeniería en alimentos los problemas de interés corresponden, en la mayoría de los casos, a la solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos de transporte de momentum, calor y masa.

Abordaremos el problema de encontrar la solución aproximada óptima para la ecuación de Fourier en estado estacionario con un término de fuente calorífica, cuyo modelo matemático corresponde al tipo de ecuación conocido como ecuación de Poisson.



El siguiente desarrollo es general. Una redefinición de las cantidades físicas involucradas, hacen a la formulación igualmente aplicable a otros problemas que involucran la ecuación de Poisson.

### 3.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL.

La ecuación diferencial que gobierna la transferencia de calor en estado no estacionario es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \frac{\partial}{\partial t} \rho C_p T \quad (3.1)$$

Donde:

$k_x, k_y, k_z$  = coeficientes direccionales de conductividad térmica.

$T$  = temperatura.

$Q$  = calor generado por unidad de volumen y unidad de tiempo

$\rho$  = densidad

$C_p$  = capacidad calorífica.

Si enfocamos nuestra atención al problema estacionario bidimensional, como el que se muestra en la figura 3.1

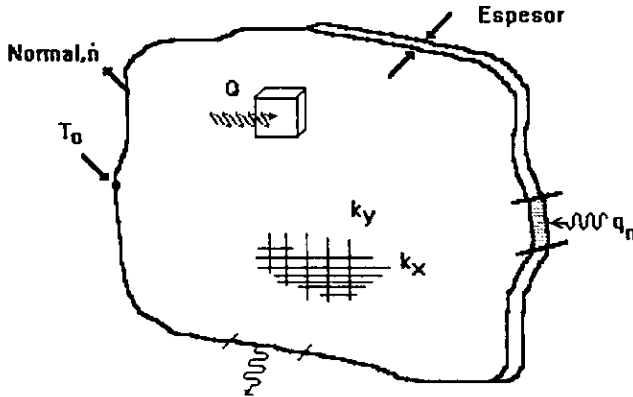


Fig. 3.1 Una región de conducción anisotrópica.

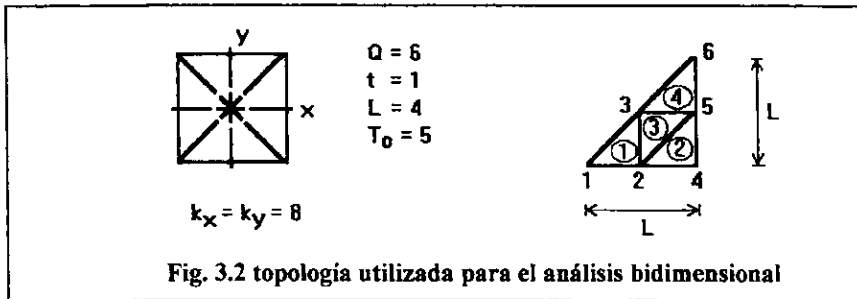


Fig. 3.2 topología utilizada para el análisis bidimensional

La ecuación gobernante se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (3.2)$$

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) junto con las condiciones de frontera apropiadas especifican completamente el problema. Las condiciones de frontera más frecuentemente encontradas en aplicaciones prácticas son:

1.- La temperatura es una función definida en la frontera (condición de Dirichlett)

$$T = T(s), \text{ en el contorno } \Gamma_s, \quad (3.3)$$

2.- El flux de calor se especifica en alguna parte  $\Gamma_q$  del contorno (condición de Neumann)

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial T}{\partial x} \ell_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \ell_y + q + h(T - T_r) &= 0 \\ \text{En } \Gamma_q & \quad (3.4) \\ \text{o: } k_n \frac{\partial T}{\partial n} + q + h(T - T_r) &= 0 \end{aligned}$$

Donde  $\ell_x$  y  $\ell_y$  son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie de contorno,  $q$  representa el flux de calor por unidad de superficie y  $h(T-T_r)$  es la pérdida de calor por convección.

Como se estableció previamente, se puede formular alternativamente la solución del problema de conducción de calor utilizando cálculo variacional. El teorema de Euler del cálculo variacional establece que si la integral:

$$I(u) = \int_{\text{vol}} f(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) dx dy dz + \int_{\text{sup}} (qu + hu^2 / 2) dA \quad (3.5)$$

ha de ser minimizada, la condición necesaria y suficiente para que el mínimo sea alcanzado es que la función desconocida  $u(x,y,z)$  satisfaga la siguiente ecuación diferencial (Reyes - Solano, 1995)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial u}{\partial x})} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial u}{\partial y})} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial u}{\partial z})} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad (3.6)$$

Asegurando que  $u$  satisface las condiciones esenciales de frontera. Podemos verificar que la minimización de la integral de volumen:

$$I = \int_{\text{vol}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} - QT \right] dx dy dz + \int_{\text{sup}} [qT + hT^2] dA \quad (3.7)$$

Conduce directamente a la formulación equivalente a la ecuación (3.2) para el caso de estado estacionario.

La contribución volumétrica al funcional es el argumento de la primera integral. Por lo tanto, si dicho funcional volumétrico ha de ser minimizado, debe satisfacer la ecuación (3.6) De ahí que:

$$\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial T}{\partial x}} = k_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial T}{\partial y}} = k_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial T}{\partial z}} = k_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = -Q \quad (3.8)$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación (3.6), se llega directamente a la ecuación (3.1) para estado estacionario. Verificando que la función  $f$  conduce a la solución estacionaria correcta.

Euler también estableció que la condición de frontera natural asociada a la ecuación (3.5) es

$$\ell_x k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \ell_y k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \ell_z k_z \frac{\partial T}{\partial z} + g + hT = 0 \quad (3.9)$$

o simplemente:

$$k_n \frac{\partial T}{\partial n} + g + hT = 0 \quad (3.10)$$

Donde  $n$  es la normal unitaria a un punto sobre la superficie y  $k_n$  es la conductividad en dicha dirección.

Esta es la condición de frontera natural dada anteriormente por la ecuación (3.4).

### 3.3 MATRICES DE ELEMENTO Y MATRICES DE FRONTERA.

A partir de las ecuaciones (3.1) y (3.7) se ve claramente que el funcional bidimensional requerido para el análisis en estado estacionario, es.

$$I = \int_{\text{Area}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - QT \right] dx dy \epsilon + \int_{\text{contorno}} [qT + hT^2 / 2] dl \epsilon \quad (3.11)$$

Donde  $\epsilon$  es el espesor del dominio. Nosotros procederemos exactamente en la misma forma que como lo hicimos en la formulación variacional previa. Es decir, asumiremos que la integral de área es la suma de las integrales sobre las áreas de cada elemento. De manera semejante, la integral de contorno donde la temperatura no está especificada, se asume que es la suma de las integrales de los segmentos de frontera.

Entonces:

$$I = \sum_e I^e + \sum_b I^b \quad (3.12)$$

Donde las contribuciones al elemento son:

$$I^e = \int_{\text{Area}} \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - QT \right] \epsilon dx dy \quad (3.13)$$

Y las contribuciones de los segmentos frontera son:

$$I^b = \int_{\text{contorno}} [qT + hT^2 / 2] \epsilon dl \quad (3.14)$$

Si se hacen las consideraciones de interpolación usuales en le interior del elemento y en sus fronteras, entonces podemos expresar estas cantidades como:

$$I^e = \frac{1}{2} T^{eT} S^e T^e - T^{eT} C^e \quad (3.15)$$

$$I^b = \frac{1}{2} T^{bT} S^b T^b - T^{bT} C^b \quad (3.16)$$

De aquí que las matrices del elemento sean:

$$S^e = \int_{A^e} (k_x H_x^{eT} H_x^e + k_y H_y^{eT} H_y^e) T^e dx dy \quad (3.17)$$

$$C^e_Q = A^e \int H^e T^e dA \quad (3.18)$$

$$S_h^b = \int_{\Gamma} h^b H^b T^b ds, \quad C_h^b = \int_{\Gamma} T_{\Gamma}^b h^b H^b T^b ds \quad (3.19)$$

$$C_q^b = \int_{\Gamma} q^b H^b T^b ds. \quad (3.20)$$

Donde  $H$  denota las funciones de forma y  $H_x = \partial H / \partial x$ , etc. Para esta clase de problemas existe solamente una temperatura desconocida por nodo. Una vez más si el vector  $T$  denota todas esas incógnitas, entonces  $T^e$  es subconjunto de  $T$  y  $T^b$  es subconjunto de  $T$ .

Si seleccionamos un elemento triangular de tres nodos, entonces las funciones de interpolación por elemento,  $H^e$  están dadas en coordenadas unitarias por la ecuación 3.13 y en coordenadas globales por las ecuaciones 3.18 a 3.20. A partir del conjunto anterior de ecuaciones notamos que:

$$H_x^e = \frac{\partial H^e}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^e / 2A^e = dx \quad (3.21a-3.21b)$$

$$H_y^e = \frac{\partial H^e}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^e / 2A^e = dy$$

Debido a que todos los parámetros son constantes, podemos evaluar la ec.3.9 por inspección, si las conductividades térmicas también son constantes:

$$S = \frac{k_x^e t^e}{4A^e} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix}^e + \frac{k_y^e t^e}{4A^e} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix}^e \quad (3.23)$$

Esta es la conocida como matriz de conductividad del elemento. Note que esta expresión permite modificar los valores de las conductividades en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Las ecuaciones en (3.21a) y (3.21b) muestran que la conducción en la dirección  $x$  depende del tamaño del elemento en la dirección  $y$ , y viceversa. Si la generación interna de calor  $Q$ , también es constante, entonces la ecuación 3.18 puede ser integrada para dar:

$$C^e = \frac{Q^e A^e t^e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sobre un segmento de frontera típico, la interpolación en el borde puede ser correspondiente a la ecuación 3.19 u otras formas.

Las integrales exactas pueden ser evaluadas por la ecuación 3.5. Por ejemplo si el coeficiente  $h$  es constante, entonces el segmento de frontera se obtiene mediante la matriz cuadrada como:

$$S^h = \frac{h^b l^b t^b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Similarmenete, si existe un flux normal constante  $q$  en la superficie, entonces el vector de flux de frontera es:

$$C^b = \frac{q^b l^b t^b}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

En este caso la mitad del flux normal total es diferido a cada uno de los dos nodos del segmento.

### 3.4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Consideremos un material cuadrado uniforme cuyo perímetro exterior se mantiene a temperatura constante, mientras que su interior genera calor a velocidad constante. Notamos que la solución será simétrica alrededor de los centros de línea del cuadrado así como alrededor de sus dos diagonales. Esto significa que solamente necesitamos utilizar 1/8 de la región en el análisis. Por simplicidad asumiremos que el material es homogéneo y que la conductividad térmica es la misma en todas direcciones,  $k_x = k_y = k$ .

Los planos de simetría tienen flux normal de calor igual a cero,  $q = 0$ . Esta condición es una condición de frontera natural en el análisis de Elemento Finito.

Esto es cierto, debido a que  $C_q$  en la ecuación 3.20 es idénticamente igual a cero cuando el flux normal  $q = 0$ . La condición esencial restante corresponde a la temperatura de frontera conocida como se muestra en la Fig.3.2. Para este modelo hemos seleccionado 4 elementos y 6 nodos.

Los últimos tres nodos tienen condición de frontera isotérmica, y los primeros tres corresponden a las temperaturas internas desconocidas.

Para esta región homogénea los datos son:

ELEMENTO	$K^e$	$Q^e$	TOPOLOGÍA	$t^e$
1	8	6	1,2,3	1
2	8	6	2,4,5	1
3	8	6	5,3,2	1
4	8	6	3,5,6	1

Para la geometría de la Fig. 3.2. determinamos las propiedades geométricas del elemento a partir de la ecuación 3.20.

Ellas son:

	$e = 1,2,4$				$e = 3$		
I	1	2	3	i	1	2	3
b <sub>i</sub>	-2	2	0	b <sub>i</sub>	2	-2	0
c <sub>i</sub>	0	-2	2	c <sub>i</sub>	0	2	-2

$$A^e = 2$$

$$A^e = 2$$

A partir de la ec. 3.22 la matriz de conducción para los elementos 1,2 y 4 son:

$$S^e = \frac{8(1)}{4(2)} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{8(1)}{4(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

O simplemente:

$$S^e = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

El ensamblaje para los cuatro elementos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$ST = C \quad (3.29)$$

Donde:

$$S = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & (+8+4+4) & (-4-4) & -4 & 0 & 0 \\ 0 & (-4-4) & (+4+8+4) & 0 & (-4-4) & 0 \\ 0 & -4 & 0 & +8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & (-4-4) & -4 & (+4+4+8) & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & +4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

y:

$$C = \frac{QA_t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1 \\ 1+1+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \\ 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

En el vector anterior las  $q$ 's son los fluxes de calor nodales, reacciones requeridas para mantener la temperatura externa especificada. Debido a que las últimas tres ecuaciones tienen condiciones de frontera esenciales aplicadas, podemos reducir las tres primeras a:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} - T_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} - T_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Sustituyendo los datos de que la superficie exterior es 5, se reduce el término fuente a:

$$C^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 32 \\ 52 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$T^* = \begin{bmatrix} 8.75 \\ 7.75 \\ 7.125 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Substituyendo estos valores en el sistema original de ecuaciones se obtienen los valores de los fluxes de calor nodales externos. Por ejemplo, la cuarta ecuación indica que:

$$-4 T_2 + 8 T_4 - 4 T_5 = 4 + q_4, \quad (3.35)$$

$$\text{De donde } q_4 = -15. \quad (3.36)$$

Los otros dos fluxes nodales son:

$$q_5 = -29; q_6 = -4. \quad (3.37)$$



y el calor interno generado total es:

$$\Sigma Q^e A^e t^e = 48. \quad (3.38)$$

El calor generado internamente es igual al calor disipado hacia el exterior para mantener condiciones de estado estacionario.

### 3.4.1.PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR EN DOS Y TRES DIMENSIONES.

El análisis se realiza sobre la octava parte de un rectángulo, el cual corresponde a un triángulo y a su vez el triángulo isósceles de lados  $(L/2)$ ,  $L/2$ ,  $(2)^{1/2}L/4$  el dominio de la ecuación diferencial se divide en elementos triangulares de longitud  $2$  y  $L/2$  neb, donde neb= número de elementos en la base.

#### BLOQUE I:

Se especifica el número de elementos en la base del triángulo (neb), se calcula el número de nodos totales (sum) en función del número de elementos en cada nivel del triángulo, mediante un ciclo FOR-NEXT, el cual va sumando nodos triangulares en cada nivel.

```
CLS
neb = 5
FOR I = 1 TO neb + 1
    SUM = SUM + I 'contabiliza el número total de nodos
NEXT I
PRINT "num. de nodos = "; sum
```

#### BLOQUE II:

Se dimensionan los arreglos matriciales para cada una de las variables y de las subrutinas:

-Se dimensiona un vector [AP] de dimensión (sum) para especificar el número de elementos que son vecinos para cada nodo, es decir, las veces que aparece un nodo en el sistema de ecuaciones globalizada.

-Los vectores [x], [y],[xn], y [yn] se utilizan para almacenar las variables de graficación, se les asigna una dimensión  $(2*sum-1)$  para tener la posibilidad de gráfica la distribución de temperaturas para la placa rectangular completa.

-Se calcula el número de nodos en la base del triángulo y se dimensiona una matriz cuadrada [T] de dimensión  $(2 * \text{número de nodos en la base} + 1)$ .

-En la matriz [m] de dimensión  $(neb^2, 3)$  se guardan el número de elemento y la identidad de los tres vértices, es decir el número de nodos en cada uno de sus vértices, de acuerdo a la topología.

-La matriz [mg] de dimensión igual al (número total de nodos, número total de nodos + 1) se guardan los coeficientes de la matriz globalizada que resulte del ensamblaje de las ecuaciones para cada elemento.

-La matriz cuadrada [COEF] de dimensión (3,3) se utiliza para guardar los coeficientes correspondientes a cada uno de los vértices del sistema de ecuaciones planteado para cada elemento, siendo diferentes valores para los triángulos normales e invertidos.

-La matriz [a1] de igual dimensión que en el caso de la matriz [mg], para transferir el sistema de ecuaciones a la subrutina de eliminación Gaussiana.

-El vector [nc] especifica el número de capa a que pertenece cada elemento.

```
DIM nc(neb + 1), m(neb ^ 2, 3), mg(SUM, SUM + 1), COEF(3, 3), a1(SUM, SUM + 1)
DIM x(SUM ^ 2), ap(SUM)
DIM y(SUM ^ 2), yn(SUM ^ 2), xn(SUM ^ 2), YI(SUM ^ 2)
NNODOS = neb + 1 'número de nodos en la base
DIM T(2 * NNODOS, 2 * NNODOS)
```

### BLOQUE III:

Se especifica el número de elementos por capa y al mismo tiempo el número de capa para cada elemento.

```
FOR N = 1 TO neb ^ 2
  'determinación de la capa
  FOR I = 1 TO neb
    lim = 2 * I * neb - I ^ 2
    IF N < 1.001 * lim THEN c = I: GOTO 10
  NEXT I
10 COLOR c
  nc(I) = nc(I) + 1
  PRINT "n="; n, "c="; c
```

### BLOQUE IV.

Se calcula un conjunto de funciones auxiliares que serán útiles en la especificación del número de capa de cada elemento.

$$rc = 1/2 * c^2 - (neb * 2 - 1) / 2 * c + neb - 1$$

$$rc1 = 1/2 * (c - 1)^2 - (neb * 2 - 1) / 2 * (c - 1) + neb - 1$$

$$rc2 = 1/2 * (c + 1)^2 - (neb * 2 - 1) / 2 * (c + 1) + neb - 1$$

## BLOQUE V:

Se determina la topología del arreglo triangular de elementos, es decir se determina el número de nodo que le corresponde a cada vértice de los triángulos normales e invertidos.

Mediante un ciclo FOR-NEXT en el que se van barriendo los renglones de la región triangular desde la base, hasta el vértice.

```
'determinación e impresión de la topología
lim2 = -1 * c ^ 2 + (2 * neb + 1) * c - neb + 1
IF N < -1 * c ^ 2 + (2 * neb + 1) * c - neb + 1 THEN 20 ELSE 30
20 COLOR 14:
nodo1 = N + rc: nodo2 = N + rc + 1: nodo3 = N + rc1 + 2
'PRINT "elemento="; n, "("; n + rc; n + rc + 1; n + rc1 + 2; ")"
GOTO 40
30 COLOR 3:
nodo1 = N + rc + 2: nodo2 = N + rc + 1: nodo3 = N + rc2 - 1
'PRINT "elemento="; n, "("; n + rc + 2; n + rc + 1; n + rc2 - 1; ")"
40 'PRINT "elemento="; n, "("; nodo1; nodo2; nodo3; ")"
m(N, 1) = nodo1: m(N, 2) = nodo2: m(N, 3) = nodo3
NEXT N

'DO
'LOOP WHILE INKEYS = ""

FOR I = 1 TO neb
'PRINT "nc("; I; ")="; nc(I)
NEXT I
```

## BLOQUE VI:

Especificación de los coeficientes del sistema de ecuaciones para cada elemento.

```
COEF(1, 1) = 4: COEF(1, 2) = -4: COEF(1, 3) = 0
COEF(2, 1) = -4: COEF(2, 2) = 8: COEF(2, 3) = -4
COEF(3, 1) = 0: COEF(3, 2) = -4: COEF(3, 3) = 4
```

## BLOQUE VII:

Es el ensamblaje de los sistemas de ecuaciones para obtener la matriz globalizada.

Una vez determinada la topología, es decir el número de nodo que corresponde a cada vértice de cada elemento se van llenando las casillas en la matriz globalizada con los coeficientes correspondientes según el BLOQUE VI, donde se van guardando los valores de los coeficientes para cada casilla y conforme van llegando más términos a esa casilla se van sumando algebraicamente.

```
FOR N = 1 TO neb ^ 2
  FOR I = 1 TO 3
    FOR j = 1 TO 3
      mg(m(N, I), m(N, j)) = mg(m(N, I), m(N, j)) + COEF(I, j)
    NEXT j
  NEXT I
NEXT N
```

## BLOQUE VIII:

Se especifica el número de elementos con que es vértice cada nodo:

-A cada nodo se le asigna un número de seis elementos circundantes y posteriormente a los nodos que son vértice, se les especifica el valor de 1 y a los nodos que son orilla se les asigna un número de tres elementos como corresponde a la topología.

```
REM especificación de número de elementos con los que es vértice cada nodo
FOR I = 1 TO SUM
  ap(I) = 6          ' Inicializa apariciones de todos los nodos con 6
NEXT I              ' es decir, se especifica q /nodo es vértice de 6 elementos
ap(1) = 1: ap(neb + 1) = 1 ' nodos esquina de la base solo son vértice de 1 elemento
FOR I = 2 TO neb
  ap(I) = 3          ' nodos orilla de la base son vértice de 3 elementos
NEXT I
ap(neb + 2) = 3: sumy = neb + 2 '
FOR I = 1 TO neb - 2
  sumy = sumy + neb - (I - 1)
  ap(sumy) = 3      ' nodos orilla diagonal son vértice de 3 elementos
NEXT I
sume = neb + 1
FOR I = 1 TO neb - 1
  sume = sume + neb - (I - 1)
  ap(sume) = 3      ' nodos orilla derecha son vértice de 3 elementos
```

```

NEXT I
ap(SUM) = 1           'nodo esquina superior es vértice de un elemento
FOR I = 1 TO SUM
  PRINT "AP"; I, "="; ap(I), 'imprime relación nodo-núm de elementos
                              ' Conque es vértice
NEXT I
PRINT

```

### BLOQUE IX:

Se especifica el calor producido (qprod) en el interior de cada elemento.  
 'qprod= calor producido en cada elemento (16 es el calor total producido en la placa)  
 qprod = 16 / neb ^ 2

### BLOQUE X:

Se calcula la contribución del término fuente a cada vértice multiplicando el número de elementos que circundan a cada nodo por el qprod del elemento y se construye el vector correspondiente al término fuente.

```

FOR k = 1 TO SUM           'calcula el término de qprod para c/nodo
  mg(k, SUM + 1) = ap(k) * qprod 'correspondiente a la matriz de capacitancia
NEXT k

```

```

FOR k = 1 TO SUM
  FOR L = 1 TO SUM + 1
    PRINT mg(K, L);           'imprime sistema de ecuaciones
  NEXT L                       'sin condiciones de frontera
  PRINT
NEXT k

```

```

DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
COLOR 3

```

### BLOQUE XI:

Se introducen las condiciones de frontera isotérmica en el borde derecho y las condiciones de frontera adiabática (condición de frontera natural) en los otros bordes del triángulo, procediéndose a la modificación de los arreglos matriciales en función de las temperaturas conocidas.

```

REM introducción de condiciones frontera
REM frontera isotérmica en el borde derecho
temp = 1
FOR I = neb + 1 TO 1 STEP -1
    suma = suma + I      'suma es el número de nodo isotérmico
    FOR j = 1 TO SUM
        IF mg(j, suma) <> 0 THEN mg(j, SUM + 1) = mg(j, SUM + 1) - mg(j, suma) *
temp
        mg(j, suma) = 0      'hace cero coeficientes del renglón suma
        mg(suma, j) = 0      'hace cero coeficientes de la columna suma
    NEXT j
    mg(suma, suma) = 1      'hace 1 el coeficiente de la diagonal del nodo isotérmico
    mg(suma, SUM + 1) = temp 'igual a la temperatura del nodo isotérmico al valor temp
NEXT I
COLOR 4

```

### REM IMPRESION DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER

```

FOR k = 1 TO SUM
    FOR L = 1 TO SUM + 1
        ' PRINT mg(k, L);
    NEXT L
    'PRINT
NEXT k

```

### BLOQUE XII.

Resolución del sistema de ecuaciones mediante eliminación Gaussiana, e impresión de la misma.

### BLOQUE XIII:

Después de hallar la solución del sistema de ecuaciones se obtiene la temperatura en cada uno de los nodos de la región triangular, enseguida se procede a copiar esos valores a los puntos que sean simétricos, respecto a las diagonales del rectángulo y a las perpendiculares mediatrices. Esto se realiza mediante el siguiente conjunto de ciclos iterativos:

```

SUMAT = 0
FOR I = 1 TO NNODOS - 1
    SUMAT = SUMAT + I
NEXT I

```

```

NTOTAL = NNODOS ^ 2 - SUMAT
'PRINT "NTOTAL="; NTOTAL
FOR k = 1 TO NNODOS
    sum2 = 0
    SUM1 = SUM1 + k

```

'Copia las temperaturas nodales al triángulo adyacente inferior  
'conservando la simetría con la perpendicular mediatriz horizontal

```

FOR L = k TO NNODOS
    T(k, L) = x(NTOTAL - sum2 - SUM1 + 1)
    PRINT "T"; K; L; "="; T(K, L),
    sum2 = sum2 + L
NEXT L

```

'Copia las temperaturas nodales del nuevo triángulo al triángulo adyacente  
'Respetando la simetría con la diagonal.

```

PRINT
FOR L = 1 TO NNODOS - k
    T(k, NNODOS + L) = T(k, NNODOS - L)
NEXT L

```

'Copia las temperaturas nodales del nuevo triángulo al triángulo adyacente  
'Respetando la simetría con la perpendicular mediatriz vertical.

```

FOR L = 1 TO NNODOS
    T(L, k) = T(k, L)
NEXT L
FOR L = 1 TO NNODOS - k
    T(NNODOS + L, k) = T(NNODOS - L, k)
NEXT L

```

NEXT k

'Hasta este momento se ha obtenido la distribución de temperaturas  
'para la mitad del rectángulo, bajo la diagonal superior.  
'y se procede entonces a copiarlo hacia la parte superior de la diagonal  
'mediante el siguiente ciclo:

```

FOR k = 1 TO 2 * NNODOS - 2
    FOR L = 1 TO 2 * NNODOS - k - 1
        T(2 * NNODOS - k, 2 * NNODOS - L) = T(k, L)
    NEXT L
NEXT k

```

'Ciclo de impresión de las temperaturas nodales para toda la región rectangular.

```
FOR I = 1 TO NNODOS * 2 - 1
  FOR j = 1 TO NNODOS * 2 - 1
    PASOA = PASOA + 1
    Y1(PASO) = T(j, I)
    COLOR 13
    PRINT T(j, I); Y1(PASO)
  NEXT j
  PRINT
NEXT I
```

```
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
CLS
```

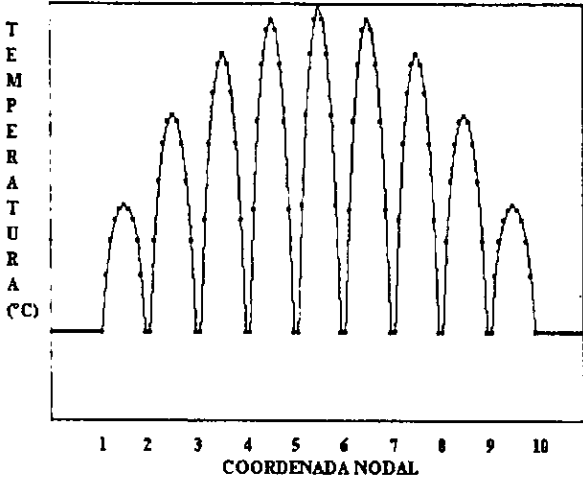
```
  PSET (xgraf(I), ygraf(I, j)), j
  IF I > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-(xgraf(I - 1), ygraf(I - 1, j)), INT(j / 10 + 1)
  IF j > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-(xgraf(I) + e / nz, ygraf(I, j - 1)), INT(I / 10) + 1
  NEXT I
NEXT j
```

```
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
```

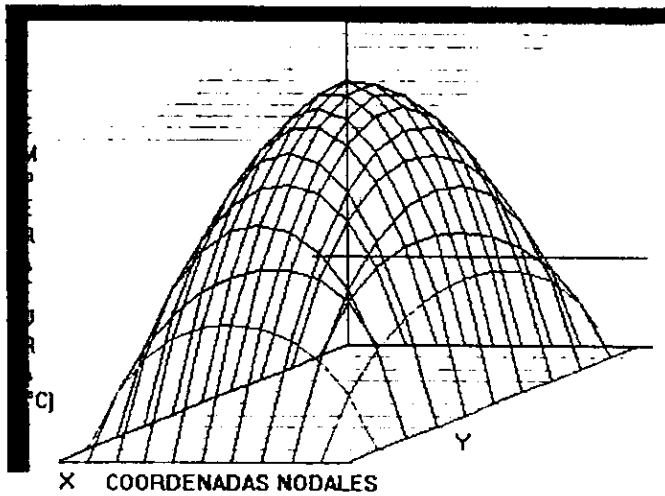
```
CLS
```



**GRAF. 3.1. TRANSFERENCIA DE CALOR BIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO SOBRE LA OCTAVA PARTE DE UN RECTÁNGULO, Y CALOR CONSTANTE.**



**GRAF.3.2. TRANSFERENCIA DE CALOR TRIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO, Y CALOR CONSTANTE SOBRE LA OCTAVA PARTE DE UN RECTÁNGULO.**



La bibliografía nos señala que es más práctico trabajar sobre la octava parte de un rectángulo, ya que al rotar la figura en el rectángulo se obtendrán los valores deseados de temperatura en cada uno de los niveles, al representar el ejemplo anterior se puede observar claramente en los gráficos para dos y tres dimensiones, como es que al evaluar la transferencia de calor en estado estacionario y calor producido constante

En este caso se está llevando un calentamiento interno del material con condiciones de frontera de temperatura constante en los bordes. En la gráfica se visualiza las temperaturas para cada nivel cuyo valor exacto puede ser leído en el eje de las ordenadas. Cada curva le corresponde a los diferentes valores y es por ello que llegan al mismo valor de temperatura en cada uno de sus extremos (de la campana).

El punto máximo refleja que el centro no existe disipación de calor como en los bordes, a continuación se presenta un gráfico 3-D que refleja una visualización global de la temperatura.

## Técnica de Elemento Finito en estado estacionario

### 4.1. TRANSFERENCIA DE CALOR EN GEOMETRÍA AXISIMÉTRICA, UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.

#### 4.1.1. INTRODUCCIÓN.

Una gran cantidad de problemas pueden ser modelados adecuadamente empleando un esquema axisimétrico. Muchos de estos problemas se pueden analizar empleando una coordenada radial  $R$  y una coordenada axial  $Z$ .

Los problemas de transferencia de calor en sólidos de revolución pueden formularse en términos de ecuaciones bidimensionales escritas para el área transversal, la cual se gira alrededor de su eje.

Numerosos objetos son muy largos en la dirección axial y pueden ser tratados como segmentos de un cilindro (aproximación de cilindro infinito). Esto reduce el estudio a una sola dimensión, en la dirección radial. A continuación se tratará este caso en particular.

Al cambiar a coordenadas cilíndricas se hacen pequeños cambios en las ecuaciones diferenciales gobernantes y en los teoremas integrales correspondientes que gobiernan la formulación de Elemento Finito en coordenadas cartesianas.

Las integrales de superficie y volumen toman formas especiales. En ellas se hace uso de los Teoremas de Pappus. El primero de ellos establece que el área superficial de un arco revolucionado es el producto de la longitud del arco y la distancia viajada por el centroide del arco. El segundo establece que al girar el área de un arco, el volumen de revolución del área generatriz es el producto del área y la distancia viajada por su centroide. En ambos casos la distancia recorrida por el centroide durante una revolución completa es  $2\pi \langle R \rangle$ , donde  $\langle R \rangle$  es la coordenada radial del centroide del arco o área.

Si consideramos arcos o áreas diferenciales, entonces la diferencial correspondiente de superficie o volumen de revolución es:

$$dA = 2\pi R \, dl \quad (4.1)$$

$$dV = 2\pi R \, dR \, dz. \quad (4.2)$$

## 4.1.2. FUNDAMENTOS.

### 4.1.2.1. CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE CALOR EN UN CILINDRO.

Cuando se considera un punto sobre una línea radial, y se gira alrededor de la dirección axial de las coordenadas cilíndricas, se obtiene una área de revolución (una envolvente cilíndrica) de tamaño directamente proporcional a la distancia del punto al eje.

Por lo tanto, conforme se lleva a cabo transferencia de calor por conducción en dirección radial hacia afuera, se atraviesa una cantidad cada vez mayor de material (una superficie más grande).

La ecuación diferencial resultante para el equilibrio térmico es bien conocida:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( k \frac{dT}{dR} \right) + Q = 0 \quad (4.3)$$

donde:

R= es la distancia radial desde el eje de revolución.

k= conductividad térmica.

T= temperatura.

Q= generación interna de calor por unidad de volumen.

Se pueden tener condiciones de frontera iniciales donde T tenga un valor definido por alguna función de distribución, o donde se conozca la distribución del flux superficial de calor:

$$-k \frac{dT}{dR} = q. \quad (4.4)$$

donde:

q= es el flujo normal a la superficie (es decir, radialmente).

Si se multiplica la ecuación (4.3) por R, entonces obtendremos para la forma unidimensional:

$$\frac{d}{dR} \left( k * \frac{dT}{dR} \right) + Q^* = 0 \quad (4.5)$$

donde:

$$k^* = Rk. \quad (4.6)$$

$$Q^* = RQ \quad (4.7)$$

Que puede ser visualizada como una ecuación diferencial de coeficientes variables. Esto nos permite encontrar la forma de la integral variacional requerida mediante una simple inspección, quedando:

$$I = 2\pi\Delta Z \int \left[ \frac{1}{2} k \left( \frac{dT}{dR} \right)^2 - Q^* T \right] dR \rightarrow \text{a minimizar}$$

(4.8)

$$I = 2\pi\Delta Z \int \frac{1}{2} \left[ k \left( \frac{dT}{dR} \right)^2 - QT \right] R dR \rightarrow \text{a minimizar}$$

La ecuación 4.5 representa el principio variacional en coordenadas cilíndricas. Donde los límites de integración son el radio interior y el exterior del segmento cilíndrico bajo estudio. La longitud típica en la dirección axial se denota con  $\Delta Z$ , que es usualmente denotado como la unidad.

El elemento correspondiente de la matriz de conducción es:

$$S^e = 2\pi \int_{r^e} k^e \frac{d\mathbf{H}^{eT}}{dR} \frac{d\mathbf{H}^e}{dR} R dR$$

(4.9)

y el vector fuente (si existe un manantial de calor) es:

$$C_0^e = 2\pi \int_{r^e} \mathbf{H}^{eT} Q^e R dR$$

(4.10)

Si se considera un elemento lineal de dos nodos en la dirección radial, podemos usar nuestros resultados previos para escribir estas matrices por inspección. Definiendo:

$$l^e = (R_2 - R_1)^e \quad y:$$

(4.11)

$$\frac{d\mathbf{H}^e}{dR} = \frac{1}{l^e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.12)

y asumiendo una propiedad del material constante, en el elemento se obtiene:

$$S^e = 2\pi \frac{k^e}{(l^e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{R_1}^{R_2} R dR$$

(4.13)

$$S^e = 2\pi \frac{k^e (R_2^2 - R_1^2)^e}{2(l^e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.14)

$$S^e = \pi \frac{k^e (R_2 + R_1)^e}{(R_2 - R_1)^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Entonces a diferencia del caso unidimensional cartesiano, la matriz de conducción depende de donde está localizado el elemento. Es decir, de la cantidad de material que esté incluido por unidad de longitud en la dirección axial.

Asumiendo un término fuente constante:

$$C_Q^e = 2\pi Q^e \int_{l^e} H^{eT} R dR \quad (4.16)$$

Pero las funciones de interpolación lineal  $H$ , también dependen directamente de la posición radial. Una aproximación a esta integral se consigue utilizando la interpolación isoparamétrica con la cual tenemos:

$$R = H^e R^e \quad (4.17)$$

Entonces:

$$C_Q^e = 2\pi Q^e \left[ \int_{l^e} H^{eT} H^e dR \right] R^e \quad (4.18)$$

Así que:

$$C_Q^e = 2\pi \frac{Q^e l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^e = 2\pi \frac{Q^e l^e}{6} \begin{bmatrix} 2R_1 + R_2 \\ R_1 + 2R_2 \end{bmatrix}^e \quad (3.19)$$

#### 4.1.3 EJEMPLO DE APLICACIÓN EN UN CILINDRO CON PROPIEDADES CONSTANTES Y SIN GENERACIÓN INTERNA DE CALOR.

Como ejemplo numérico se considera un cilindro con propiedades constantes y sin generación interna de calor, con una temperatura radial interior de  $T = 100$  en  $R = 4$  y una temperatura radial exterior de  $T = 10$  en  $R = 8$ .

Seleccionaremos un modelo con 4 segmentos de línea equivalentes y 5 nodos. La numeración de los nodos es de adentro hacia afuera. Las condiciones de frontera de  $T_1 = 100$  y  $T_5 = 10$ .

A partir de la ecuación 4.15 se nota que los términos  $(R_2 + R_1)^e / l^e$  para cada elemento son: 9, 11, 13, y 15; respectivamente y se procede a ensamblar el sistema de ecuaciones como:

$$\pi k^{\circ} \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & (9+11) & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & (11+13) & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & (13+15) & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5 \end{pmatrix} \quad (4.19-a)$$

Aplicando las condiciones de frontera esenciales y dividiendo ambos lados por el factor constante dado, se obtiene el sistema de ecuaciones reducido:

$$\begin{bmatrix} 20 & -11 & 0 \\ -11 & 24 & -13 \\ 0 & -13 & 28 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Resolviéndolo se obtiene la distribución de temperatura interna de  $T_2 = 71.06$ ,  $T_3 = 47.39$ , y  $T_4 = 27.34$ . Comparando con la solución exacta:

$$T = [ T_1 \ln(R_5 / R) + T_5 \ln(R / R_1) ] / \ln(R_5 / R_1) \quad (4.21)$$

Se observa que nuestra aproximación es adecuada en al menos tres cifras significativas. También se puede notar que tanto la distribución de temperaturas aproximada como la exacta son independientes del valor de la conductividad térmica, ( $k$ ). Esto es cierto, únicamente porque la generación interna de calor ( $Q$ ) fue cero.

Por supuesto, la conductividad térmica tiene algunos efectos sobre los flujos de calor externos (reacciones térmicas  $q_1$  y  $q_5$ ) necesarios para mantener las temperaturas superficiales prescritas.

Resustituyendo en la primera ecuación del sistema 4.19-a, para recuperar la reacción térmica, se obtiene:

$$[9(100) - 9(71.06) + 0] = q_1 / \pi k^{\circ}$$

$$818.3 = q_1 / \pi k^{\circ}$$

Que corresponde al flux de calor que entra por el radio interior. La quinta ecuación da  $q_5$  una cantidad de calor igual que sale por la superficie envolvente del cilindro de radio exterior, así que en este problema el flujo de calor es siempre en la dirección radial positiva.

Debe hacerse notar que si se hubiese usado un elemento de más alto orden, entonces las integrales hubieran sido mucho más complicadas que en el caso unidimensional. Esto es típico en la mayoría de los problemas axisimétricos. En la práctica se puede utilizar integración numérica para evaluar las matrices elemento.

### 4.1.3.1 PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN GEOMETRIAS AXISIMÉTRICAS PARA UN CILINDRO HUECO EN ESTADO ESTACIONARIO

En el programa AXIS1TX.BAS sirve para calcular la transferencia de calor por conducción y con términos fuente de radiación en coordenadas cilíndricas y bajo condiciones de geometría axisimétrica del material en estado estacionario. Se puede definir  $P_0 = 0$  y entonces se trataría de un fenómeno exclusivamente de conducción 1-D.

#### BLOQUE I:

Se especifican las propiedades físicas del material que son:

- longitud del elemento, conductividad térmica, profundidad de penetración, radio máximo y radio mínimo del material (cilindro hueco). También se define una variable (n) que indica el número de elementos a considerar

```
CLS  
REM ANALISIS AXYSIMETRICO  
LE = 1  
K = 1  
L = 1  
RMIN = 4  
RMAX = 8  
n = 16.
```

#### BLOQUE II:

Consiste en el dimensionamiento de las matrices para la implementación del método de elemento finito.

-Una matriz cuadrada [A] de dimensión igual al número de nodos, la cual es la matriz de conductividad.

-Una matriz cuadrada [S] del mismo tamaño.

-Un vector [R] para guardar los valores de las coordenadas radiales de cada nodo.

-Un vector [C] para guardar los términos fuente en cada nodo y corresponde a la suma de la radiación incidente por el radio interior y el radio exterior del cilindro.

-Una matriz cuadrada [A1] para la implementación del método de eliminación gaussiana en la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales resultantes.

-Cuatro vectores x, y, xn, y yn, para los procedimientos de graficación.

-Una matriz [SS] que corresponde al álgebra desarrollada en la explicación previa.

#### BLOQUE III:

Se asigna el valor del radio mínimo al primer elemento del vector [R] y el del radio máximo al último elemento. Se calcula la variable A1 a partir de la profundidad de penetración y la distancia al borde.

```
FOR I = 1 TO n  
R(I + 1) = I * (RMAX - RMIN) / n + RMIN
```



#### BLOQUE IV:

Se construyen las matrices locales de conductividad y capacitancia en base a un ciclo "FOR-NEXT", imprimiéndose el resultado.

REM CONSTRUCCION DE LAS MATRICES LOCALES DE CONDUCTIVIDAD y CAPACITANCIA

$$A(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I))$$

$$s(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I)) + A(I - 1, I - 1)$$

$$s(I, I + 1) = -A(I, I)$$

$$s(I + 1, I) = -A(I, I)$$

$$s(I + 1, I + 1) = A(I, I)$$

$$c(I) = 2 * 3.1416 * P0 * ((A1 - 2 / L * B + D / L ^ 2) * R(I) + (B / L - D / L ^ 2) * R(I + 1))$$

$$c(I + 1) = 2 * 3.1416 * P0 * ((B / L - D / L ^ 2) * R(I) + D / L ^ 2 * R(I + 1))$$

NEXT I

'REM CICLO DE IMPRESION

FOR I = 1 TO n + 1

FOR J = 1 TO n + 1

'PRINT s(J, I); " ";

NEXT J

'PRINT c(I)

NEXT I

#### BLOQUE V:

Se introducen las condiciones de frontera isotérmicas, estableciendo las temperaturas en el primer y último nodo.

' CONDICIONES DE FRONTERA

$$c(1) = 100$$

$$c(n + 1) = 10$$

#### BLOQUE VI:

Es la reconstrucción del sistema de ecuaciones ya que al haber introducido las condiciones de frontera en los extremos, la temperatura en el primer y último nodo son conocidas, por lo tanto se hace que en la matriz de capacitancia el primer coeficiente y el último tengan el valor de 1.

Además en las ecuaciones que contienen como incógnita a dichos coeficientes se sustituye la temperatura conocida y se pasa con signo contrario al vector de términos independientes.

#### BLOQUE VII:

Enseguida se manda a la resolución del sistema de ecuaciones. La matriz [S] se convierte en la matriz [A1] y el término independiente C1 conforma la última columna de dicha matriz, que es la que se emplea en el método de eliminación Gaussiana.

' RECONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

$$c(2) = c(1) * s(1, 1); s(1, 1) = 1;$$

FOR I = 2 TO n

$$s(1, I) = 0; s(I, 1) = 0$$

```

NEXT I
c(n) = c(n + 1) * s(n + 1, n + 1): s(n + 1, n + 1) = 1
FOR I = 1 TO n
    s(I, n + 1) = 0: s(n + 1, I) = 0
NEXT I
COLOR 3
REM CICLO DE IMPRESION
FOR I = 1 TO n + 1
FOR J = 1 TO n + 1
PRINT s(J, I); " ";
NEXT J
PRINT c(I)
NEXT I

```

### BLOQUE VIII.

Se procede a la graficación de los resultados.

```

REM "GRAFICADOR"
xmin = 1: xmax = n
DELTAX = (xmax - xmin) / (n - 1)
x(0) = xmin - DELTAX

```

### BLOQUE IX.

Es una instrucción para mandar a hacer la subrutina del sistema de ecuaciones.

```

REM CALCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCION
FOR I = 1 TO n
x(I) = x(I - 1) + DELTAX
NEXT I
REM OBTENCION DE VALORES EXTREMOS DE LA FUNCION
YMIN = Y(1): ymax = Y(1)
FOR I = 2 TO n
IF YMIN > Y(I) THEN YMIN = Y(I)
IF ymax < Y(I) THEN ymax = Y(I)
NEXT Y

```

### BLOQUE X.

Asignación de las variables para graficación.

```

xmingraf = 0: xmaxgraf = xmax: ymingraf = 0: ymaxgraf = ymax
scalex = 1: scaley = 10
SCREEN 12

```

### BLOQUE XI.

Se procede a escribir la subrutina de graficación.

### BLOQUE XII.

Es la subrutina de eliminación Gaussiana.

#### 4.1.3.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA TRANSPORTE UNIDIRECCIONAL DE CALOR EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESTADO ESTACIONARIO.

La transferencia de calor por conducción en estado estacionario y coordenadas cilíndricas cuando el calor fluye en dirección radial en condiciones axisimétricas; se puede caracterizar mediante el Laplaciano en dirección radial igual a cero, dando lugar a la siguiente expresión matemática:

$$d^2T/dr^2 + dT/rdr = 0. \quad (4.22)$$

Esta ecuación se resuelve mediante el siguiente cambio de variable:

$$y = dT / dr. \quad (4.23)$$

Sustituyendo se obtiene una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden de variables separables.

$$dy/dr + (1/r)y = 0 \quad (4.24)$$

Separando variables e integrando, retrosustituyendo la variable "y" queda lo siguiente e integrando se obtiene la siguiente solución general:

$$dy/dr = -y/r \quad (4.25)$$

$$\int dy/y = \int -dr/r. \quad (4.26)$$

e integrando:

$$\ln y = \ln(c_1 / r). \quad (4.27)$$

$$y = c_1 / r \quad (4.28)$$

retrosustituyendo la variable "y":

$$c_1 / r = dT/dr. \quad (4.29)$$

e integrando se obtiene la siguiente solución general:

$$T = c_1 \ln r + c_2. \quad (4.30)$$

Para evaluar las constantes de integración  $c_1$  y  $c_2$  se introducen las condiciones de frontera, como ejemplo consideremos:

CONDICIONES ISOTÉRMICAS:

$$T = T_1 \text{ en } r = R_1 \quad (R_1 = \text{radio exterior}).$$

$$T = T_0 \text{ en } r = R_0 \quad (R_0 = \text{radio interior}).$$

entonces:

$$T_0 = c_1 \ln R_0 + c_2. \quad (4.31)$$

$$T_1 = c_1 \ln R_1 + c_2. \quad (4.32)$$

restando:

$$T_1 - T_0 = c_1 \ln R_1/R_0 \quad (4.33)$$

Consecuentemente:

$$c_1 = (T_1 - T_0) / \ln (R_1 - R_0). \quad (4.34)$$

y

$$c_2 = T_0 - c_1 \ln R_0 = T_0 - (T_1 - T_0) \ln R_0 / \ln (R_1 - R_0) \quad (4.35)$$

Finalmente:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) / \ln (R_1 / R_0) (\ln r / R_0). \quad (4.36)$$

Esta solución servirá como referencia para comparar los resultados que se obtengan con los programas de elemento finito. Se calcula la desviación standard del error y la media del error, obteniendo como resultado un error de 0.1382%.

#### 4.1.3.3.COMPARACIÓN ENTRE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA Y LA SOLUCIÓN NUMÉRICA OBTENIDA POR EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.

Radio	sol. numérica	sol. Analítica	ERROR	ERROR ^2
4	100	100	0	0
4,25	93,878	93,87760111	-0,00039889	1,59111E-07
4,5	88,107	88,1052499	-0,0017501	3,06285E-06
4,75	82,647	82,64507406	-0,00192594	3,70925E-06
5	77,467	77,46503336	-0,00196664	3,86768E-06
5,25	72,54	72,53778041	-0,00221959	4,9266E-06
5,5	67,842	67,8397867	-0,0022133	4,89872E-06
5,75	63,353	63,35066308	-0,00233692	5,46121E-06
6	59,055	59,05262495	-0,00237505	5,64086E-06
6,25	54,932	54,93006672	-0,00193328	3,73759E-06
6,5	50,971	50,96921973	-0,00178027	3,16936E-06
6,75	47,159	47,15787485	-0,00112515	1,26597E-06
7	43,486	43,48515546	-0,00084454	7,13255E-07
7,25	39,942	39,94133034	-0,00066966	4,48443E-07
7,5	36,518	36,51765831	-0,00034169	1,16754E-07
7,75	33,207	33,20625827	-0,00074173	5,50159E-07
8	30	30	0	0
SUMA DE ERRORES AL CUADRADO =				4,17278E-05
MEDIA CUADRÁTICA DEL ERROR =				0,000379983

Tabla 4.1. Comparación entre sol. analítica y numérica del ejemplo de geometría axisimétrica

COMPARACIÓN ENTRE SOLUCIÓN NUMÉRICA Y ANALÍTICA  
PARA TRANSPORTE 1-D DE CALOR EN EDO. ESTACIONARIO.

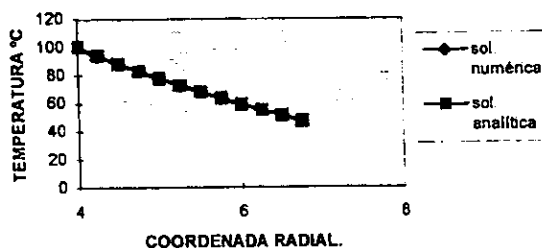


Gráfico 4.1. Comparación entre sol. analítica y numérica del ejemplo de geometría axisimétrica

En la tabla 4.1. se presentan los cálculos correspondientes a la comparación entre la solución analítica (solución exacta) y la aproximación por elementos finitos variacionales para conducción de calor radial en coordenadas cilíndricas.

La primera columna corresponde al radio en coordenadas cilíndricas de cada uno de los nodos que conforman la malla de elementos finitos.

La segunda columna especifica los valores de temperatura calculado por aproximación variacional, mientras que la tercera columna exhibe los valores obtenidos por integración directa de la ecuación diferencial gobernante, presentada en la página anterior.

En la cuarta columna se presentan las desviaciones entre la solución exacta y la aproximación por elementos finitos. En la parte inferior se presenta el cuadrado del error, y la media cuadrática del error por medio de la siguiente ecuación:

Puede observarse que el error máximo corresponde a  $-0.002013\%$  y la media cuadrática del error es de  $0.0000385\%$ .

#### 4.2. Transferencia de calor axisimétrica, utilizando el MEF.

Si la dirección axial también es importante, entonces la ecuación 3.3 se generaliza a:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R k_r \frac{\partial T}{\partial R} \right) + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + Q = 0. \quad (3.12)$$

La correspondiente matriz de conducción del elemento es:

$$\mathbf{S}^e = 2\pi \int_{A^e} \left( K_r \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial R} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} + K_z \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \right) R dR dZ \quad (3.13)$$

y el vector fuente es:

$$\mathbf{C}_Q^e = 2\pi \int_{A^e} \mathbf{H}^T Q^e R dR dZ. \quad (3.14)$$

##### 4.2.1. Ejemplo de Aplicación.

Si otra vez se consideran elementos triangulares simples de tres nodos, como en el caso de transporte de calor bidimensional en coordenadas cartesianas, y recordamos que tienen derivadas globales constantes, podemos nuevamente integrar la ecuación 3.13 por inspección.

La matriz constante es removida de la integral y nos quedamos solamente con el cálculo en el volumen; utilizando el teorema de Pappus:

$$V^e = 2\pi \int_{A^e} R dR dZ = 2\pi \int_{A^e} R dA = 2\pi \langle R \rangle A^e$$

Donde  $\langle R \rangle = (R_1 + R_2 + R_3)^e / 3$  es el centroide radial del elemento.

en la ecuación 3.14 el elemento plano tenía un volumen de  $V = tA$ , donde  $t$  era el espesor; ahora simplemente se tiene que reemplazar  $t$  con  $2\pi \langle R \rangle$

Aún con una fuente constante la ecuación 3.14 no es trivial. Si interpolamos la posición radial a partir de las coordenadas nodales:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \mathbf{R}^e.$$

Entonces:

$$\mathbf{C}_Q^e = 2\pi Q^e \int_{A^e} \mathbf{H}^T \mathbf{H} dR dZ \mathbf{R}^e.$$

La integral es fácil de resolver. Sustituyendo la matriz integrada, obtenemos:

$$\mathbf{C}_Q^e = \frac{2\pi Q^e A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}^e \quad (3.15)$$

#### 4.2.2. PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR EN GEOMETRÍAS AXISIMÉTRICAS.

El siguiente programa en Basic permite calcular el perfil de temperaturas para transferencia de calor bidimensional en estado estacionario a través de un cilindro sólido de radio  $r_0$  con un hueco concéntrico de radio  $r_1$  y generación interna de calor homogénea en su volumen. Considerando condiciones de frontera isotérmicas en las paredes interna y externa del cilindro, así como en las tapas.

El análisis axisimétrico bidimensional se realiza eligiendo elementos finitos triangulares cuyo número puede ser modificado por el usuario, quien establece el número de elementos en la base del cilindro, siendo el número de elementos verticales igual al número de elementos horizontales.

En el primer bloque de instrucciones se especifica la longitud del elemento y el número de elementos en la base (neb), el número de nodos en la base es igual al número de elementos más uno.

El número de elementos totales es igual a 2 veces el número de elementos de la base al cuadrado porque se utilizan elementos triangulares y cada capa o nivel contendrá un a hilera de elementos triangulares normales y otra de elementos triangulares invertidos. El programa calcula ese número de elementos totales (nel), así como el número de nodos totales, que se guarda en la variable sum.

```
CLS
LE = 3
neb = 10    número de elementos en la base
nel = 2 * neb ^ 2    'calcula el número de elementos totales
PRINT "número de elementos totales"; nel
sum = (neb + 1) ^ 2.
PRINT "num. total de nodos = "; sum
```

En el segundo conjunto de instrucciones se dimensionan las matrices y vectores que se utilizarán a lo largo del programa, y que son:

- Una matriz [m] de dimensión (nel,3), donde se guardan el número de elemento y la identidad de los tres vértices, es decir el número de nodo de cada uno de sus vértices.
- Una matriz [mg] de dimensión igual a (número total de nodos, número total de nodos más uno), donde se guardan los coeficientes de la matriz globalizada que vayan resultando durante el ensamblaje de las ecuaciones para cada elemento. No se trata de una matriz cuadrada porque en la última columna se guardan los términos independientes del sistema de ecuaciones globalizado.

- Una matriz cuadrada [CEF] de dimensión (3,3), que se utiliza para guardar los coeficientes correspondientes a cada uno de los vértices en el sistema de ecuaciones planteados para cada elemento individual, y que han sido calculados analíticamente mediante el álgebra reportada anteriormente.
- -El vector [cq] donde se guarda para cada nodo, la contribución al término fuente que generan cada uno de los elementos circundantes.
- El vector [RPROM] donde se guarda el radio promedio de cada elemento.
- Los vectores [r1],[ r2], y[ r3] donde se guardan las coordenadas de los tres vértices para cada elemento.

DIM c(neb), m(nel, 3), mg(sum, sum + 1), COEF(3, 3)

DIM cq(sum)

DIM RPROM(nel), r1(nel), r2(nel), r3(nel)

- En el siguiente bloque de instrucciones se especifican las variables de graficación, que según la subrutina graficadora se denominan x, y.

DIM x(sum), y(sum), xn(sum), yn(sum),

- En la siguiente instrucción se define la variable ALE que sirve para la reducción del sistema de ecuaciones globalizada al introducir las condiciones de frontera isotérmicas.

ALE = (neb - 1) ^ 2

- Con la siguiente instrucción se dimensionan el vector [COEFI] donde se guardan los términos independientes del sistema de ecuaciones globalizado, la matriz [mg1] donde se guardan los coeficientes del sistema de ecuaciones globalizado, y la matriz [a1] con la que se transfieren los coeficientes del sistema de ecuaciones a resolver hacia la subrutina de eliminación Gaussiana.

DIM COEFI(ALE), MG1(ALE, ALE + 1), A1(ALE, ALE + 1)

- El ciclo "For - Next" siguiente sirve para establecer la topología del arreglo de elementos finitos. Con el se especifican los números a cada uno de los elementos, se identifica si se trata de un triángulo normal o invertido (parado o de cabeza), también se especifica que número de nodo le corresponde a cada uno de sus vértices, y la capa o nivel a que pertenece cada elemento. El programa da la posibilidad de que el usuario visualice la topología mediante la impresión del listado.

FOR N = 1 TO nel

c = INT((N - 1) / 2 / neb) + 1

'DETERMINACIÓN DE LA CAPA A QUE  
CORRESPONDE CADA ELEMENTO

' PRINT "num ele= "; n; "capa="; c

IF N - 2 \* neb \* (c - 1) <= (neb) THEN 10 ELSE 20

DETERMINA SI EL TRIÁNGULO ESTÁ  
PARADO O DE CABEZA



```

10 nodo1 = N - (c - 1) * (neb - 1): NODO2 = nodo1 + 1: NODO3 = N + 2 + neb - (c - 1) *
(neb - 1)
COLOR 9: PRINT N; "("; nodo1; NODO2; NODO3; ")"
GOTO 30
20 nodo1 = N + 2 - (c - 1) * (neb - 1): NODO2 = nodo1 - 1: NODO3 = N - neb - (c - 1) *
(neb - 1)
color4: PRINT N; "("; nodo1; NODO2; NODO3; ")"
30 m(N, 1) = nodo1: m(N, 2) = NODO2: m(N, 3) = NODO3
NEXT N

```

- El siguiente conjunto de instrucciones sirve para establecer los coeficientes del sistema de ecuaciones para cada elemento basándose en el álgebra desarrollada en la explicación previa

```

COEF(1, 1) = 4: COEF(1, 2) = -4: COEF(1, 3) = 0
COEF(2, 1) = -4: COEF(2, 2) = 8: COEF(2, 3) = -4
COEF(3, 1) = 0: COEF(3, 2) = -4: COEF(3, 3) = 4

```

- El siguiente paso es la determinación del radio promedio y coordenadas radiales de los nodos de cada elemento. Lo cual se logra mediante el procedimiento a continuación:

**Para triángulos normales:**

```

FOR I = 1 TO neb * 2 STEP 2
  FOR j = 1 TO neb
    r1(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    r2(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    r3(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    RPROM(neb * (I - 1) + j) = LE * (2 * j + (j - 1)) / 3
  NEXT j
NEXT I

```

**Para triángulos invertidos:**

```

FOR I = 2 TO neb * 2 STEP 2
  FOR j = 1 TO neb
    r1(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    r2(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    r3(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    RPROM(neb * (I - 1) + j) = LE * (j + 2 * (j - 1)) / 3
  NEXT j
NEXT I

```

-

- Con el siguiente ciclo se imprimen los radios promedio de cada elemento

```

FOR I = 1 TO nel
  PRINT "rpro"; I; "=", RPROM(I),
NEXT I

```

- Se ensamblan las ecuaciones para cada elemento para obtener la matriz globalizada. Mediante el siguiente procedimiento de ensamblaje se van leyendo los números de celda asignados a cada uno de los términos para cada vertice en la matriz globalizada y se van llenando con los coeficientes que le corresponden si se trata del nodo 1, 2 o 3. Conforme van llegando nuevos valores a la celda se van sumando con los que se tenían anteriormente

```
FOR N = 1 TO nel
  FOR I = 1 TO 3
    FOR j = 1 TO 3
      mg(m(N, I), m(N, j)) = mg(m(N, I), m(N, j)) + COEF(I, j) * RPROM(N)
    NEXT j
  NEXT I
NEXT N
PRINT
```

- En la siguiente instrucción se calcula el calor producido en cada elemento. qprod puede ser una constante o una función que dependa de la posición, o eventualmente puede ser cero, lo cual indicaría ausencia del término fuente. El usuario tiene la posibilidad de acceder a esta instrucción para modificar la naturaleza de la fuente de calor en la simulación.

'qprod= calor producido en cada elemento.

qprod = 0 \* 8 / neb ^ 2 / 2

- El siguiente ciclo de cálculos iterativos permite ensamblar el vector de los términos fuente.

```
FOR N = 1 TO nel
  cq(m(N, 1)) = cq(m(N, 1)) + 2 * r1(N) + r2(N) + r3(N)
  cq(m(N, 2)) = cq(m(N, 2)) + r1(N) + 2 * r2(N) + r3(N)
  cq(m(N, 3)) = cq(m(N, 3)) + r1(N) + r2(N) + 2 * r3(N)
NEXT N
```

- Impresión del vector de terminos fuente:

```
FOR I = 1 TO sum
  PRINT "CQ"; I, "="; cq(I),
NEXT Y
```

- En la siguiente instrucción se le asigna a la última columna de la matriz globalizada los valores correspondientes del vector de términos fuente multiplicando por el perímetro del cilindro para tomar en cuenta las correcciones por variación del tamaño (espesor) de los elementos

```
FOR k = 1 TO sum
  mg(k, sum + 1) = cq(k) * qprod * 2 * 3.1416 / 12
NEXT k
```

- Impresión de la matriz globalizada:

```
FOR k = 1 TO sum
  FOR L = 1 TO sum + 1
    PRINT mg(k, L),
  NEXT L
  PRINT
NEXT k
DO
LOOP WHILE INKEYS = ""
COLOR 3
```

- Introducción de condiciones frontera, se especifican las condiciones de frontera isotérmicas para cada uno de los nodos en las paredes interna y externa y las tapas inferior y superior

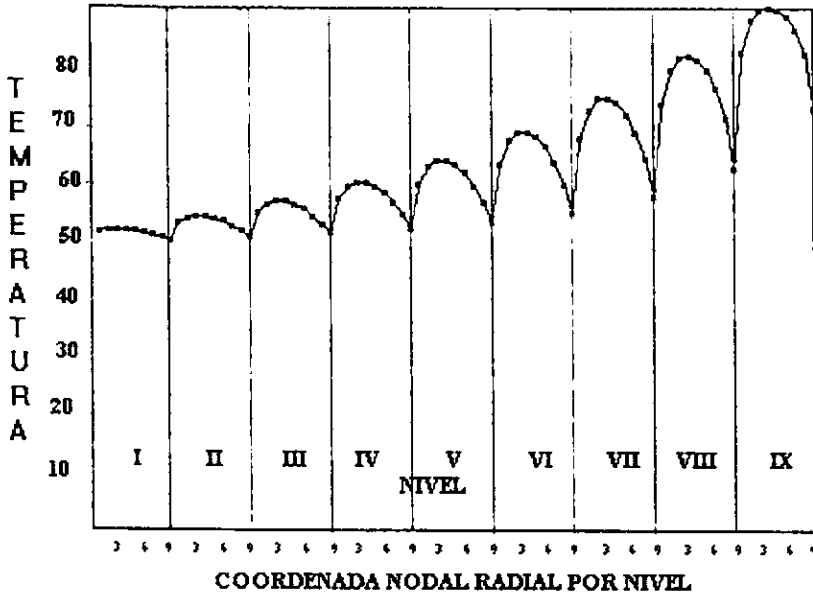
```
TEMP = 5
FOR I = 1 TO neb
  FOR j = 1 TO sum
    'BORDE INFERIOR
    IF mg(j, I) < 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I) * TEMP
    mg(j, I) = 0
    mg(I, j) = 0
  NEXT j
  mg(I, I) = 1
  mg(I, sum + 1) = TEMP
  I1 = I * (neb + 1)
  'BORDE DERECHO
  FOR j = 1 TO sum
    IF mg(j, I1) < 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I1) * TEMP
    mg(j, I1) = 0
    mg(I1, j) = 0
  NEXT j
  mg(I1, I1) = 1
  mg(I1, sum + 1) = TEMP
  I2 = I * (neb + 1) + 1
  'BORDE IZQUIERDO
  FOR j = 1 TO sum
    IF mg(j, I2) < 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I2) * TEMP
    mg(j, I2) = 0
    mg(I2, j) = 0
  NEXT j
  mg(I2, I2) = 1
  mg(I2, sum + 1) = TEMP
  I3 = neb * (neb + 1) + I
  'BORDE SUPERIOR
  FOR j = 1 TO sum
    IF mg(j, I3) < 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I3) * TEMP * 2
    mg(j, I3) = 0
    mg(I3, j) = 0
  NEXT j
```

```

mg(13, 13) = 1
mg(13, sum + 1) = TEMP * 2
NEXT I
-
FOR j = 1 TO sum
  IF mg(j, sum) < 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, sum) * TEMP
  mg(j, sum) = 0
  mg(sum, j) = 0
NEXT j
mg(sum, sum) = 1
mg(sum, sum + 1) = TEMP
COLOR 4
REDUC = 0
FOR I = 1 TO sum
  IF mg(I, I) < 1 THEN 110 ELSE 120
110 REDUC = REDUC + 1
  'PRINT "REDUC"; REDUC
  COEFI(REDUC) = I
120 NEXT I
FOR j = 1 TO REDUC
  FOR k = 1 TO REDUC
    MG1(j, k) = mg(COEFI(j), COEFI(k))
    MG1(j, k + 1) = mg(COEFI(j), sum + 1)
  NEXT k
NEXT j
COLOR 9
FOR j = 1 TO REDUC
  FOR k = 1 TO REDUC + 1
    PRINT MG1(j, k);
  NEXT k
  PRINT
NEXT j
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""

```

**GRAF. 4.2 TRANSFERENCIA BIDIMENSIONAL DE CALOR  
A TRAVÉS DE UN CILINDRO HUECO EN ESTADO  
ESTACIONARIO**



La gráfica anterior muestra los resultados de la ejecución del programa evaluando la distribución de temperatura a lo largo y ancho de un cilindro hueco, de radio interior de 4m, exterior 8m y longitud de 8m. Con una conductividad térmica de 1.

Los números romanos representan el número de nivel contado desde el plano inferior hasta el plano superior. Las divisiones en cada nivel representan las coordenadas nodales de 0 a 9, correspondiendo el radio de 4m al nodo 0, y de 8m al nodo 9.

Las temperaturas en cada pared externa e interna así como en las tapas, se introducen como condiciones de frontera isotérmicas: Dichas temperaturas son:

- Pared interior es de 50°.
- Pared exterior es de 75°.
- Pared superior es de 100°.
- Pared inferior de 50°.

## Análisis transitorio.

### 5.1 TECNICA DE ELEMENTO FINITO EN ESTADO TRANSITORIO.

#### 5.1.1. INTRODUCCIÓN.

Muchos problemas requieren la solución de ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo. En este contexto, hay numerosos tópicos teóricos (convergencia, exactitud y estabilidad) que un analista debe investigar antes de seleccionar un algoritmo computacional. Estos incluyen: los límites de estabilidad, la amplitud del error, el error de fase (Zienkiewicks, 1992), etc. El propósito de este capítulo es citar procedimientos típicos que surgen en problemas de integración del tiempo. Solamente se considerarán problemas no estacionarios con primeras derivadas temporales.

### 5. 2. MÉTODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS EN ESTADO TRANSITORIO.

#### 5.2.1. FUNDAMENTOS.

Recordemos la definición del cálculo diferencial e integral para la derivada de una cantidad,  $R$ , con respecto al tiempo:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Como no vamos a emplear la teoría de las ecuaciones diferenciales, entonces haremos una aproximación para reemplazar el operador derivada temporal anterior con una expresión algebraica. Las aproximaciones de diferencias finitas más comúnmente empleadas son las diferencias hacia adelante:

$$\dot{R} = \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (5.2)$$

las diferencias hacia atrás:

$$\dot{R} = \frac{R(t) - R(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.3)$$

y las diferencias centrales:

$$\dot{R} = \frac{R(t + \Delta t) - R(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.4)$$

Donde  $\Delta t$  denota una pequeña diferencia de tiempo.

Se pueden desarrollar expresiones similares para estimar la segunda derivada.

El algoritmo de integración en el tiempo queda determinado por la selección de los operadores de diferencias y las formas en que se combinen. Estas expresiones son denominadas diferencias finitas debido a que la diferencia de tiempo  $\Delta t$  es finita en lugar del límite infinitesimal en la derivada.

### 5.2.2. MÉTODOS PARA INTEGRACIÓN TEMPORAL.

El sistema de ecuaciones gobernantes para un fenómeno transitorio es generalmente un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$A\dot{R}(t) = B R(t) = P(t) \quad (5.5)$$

Donde el punto representa las derivadas con respecto al tiempo. Generalmente, uno o varios de los componentes de la matriz  $R$ , digamos  $R(j)$ , estará definido mediante las condiciones de frontera como una función del tiempo, es decir  $R(j) = g(t)$ . También, los valores iniciales  $R(0)$ , deberán ser conocidos al inicio del tratamiento de la solución transitoria. Nótese que las ecuaciones gobernantes involucran ahora dos matrices cuadradas,  $A$  y  $B$ . Por lo tanto, en general, será necesario aplicar dos veces el procedimiento de ensamblaje de matrices cuadradas discutido previamente.

Esto es

$$A = \sum_{e=1}^{NE} A^e \quad (5.6)$$

$$B = \sum_{e=1}^{NE} B^e \quad (5.7)$$

Donde  $A^e$  y  $B^e$  son generadas a partir del procedimiento de ensamblaje directo y las correspondientes contribuciones al elemento,  $a^e$  y  $b^e$  (matrices locales).

Solamente se considerará la integración temporal directa paso por paso de la ecuación (5.5). Hay una gran cantidad de tales procedimientos publicados en la literatura.

El texto de Zienkiewicks examina en detalle muchos aspectos de los procedimientos simples de integración temporal para aplicaciones lineales transitorias. Dicho autor utiliza tanto aproximaciones de diferencias finitas como de elemento finito

### 5.2.3. EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE EULER.

La exactitud, estabilidad y costo computacional relativo de un esquema de integración temporal depende de como se aproxime la "velocidad" durante el paso de tiempo. Por ejemplo, se puede asumir que la velocidad durante el paso de tiempo es: a) constante, b) igual al valor promedio al principio y al final del paso, c) varía linealmente durante el paso, etc. Para ilustrar los casos a) y c), consideremos un intervalo de tiempo  $k=\Delta t$  y asumamos una serie de Taylor para  $R(t)$  en términos de su valor en el paso de tiempo previo,  $R(t-k)$ :

$$R(t) = R(t-k) + k \dot{R}(t-k) + k^2 / 2 \ddot{R}(t-k) + \dots \quad (5.8)$$

Como se ilustra en la Fig. 5.1, la primera consideración y la ecuación anterior dan  $R(t)$ . El procedimiento de integración estándar de Euler se obtiene, para una aceleración cero, multiplicando ambos lados de la ecuación 5.8 por  $A$  y resulta:

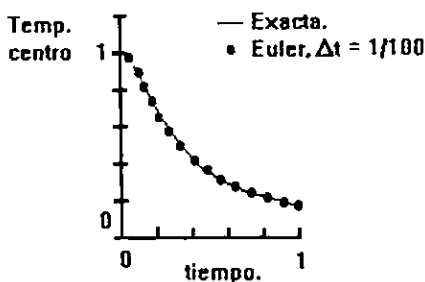


Fig. 5.1 Método de integraciones típicas

$$A \dot{R}(t) = A \dot{R}(t-k) + k \ddot{R}(t-k) \quad (5.9)$$

Sustituyendo en la ecuación 5.5 al tiempo  $(t-k)$

$$A \ddot{R}(t-k) = P(t-k) - B \dot{R}(t-k) \quad (5.10)$$

y reemplazando  $\dot{R}(t-k)$  en la ecuación 5.9, se obtiene el resultado final:

$$A \dot{R}(t) = k P(t-k) + \{A - k B\} \dot{R}(t-k). \quad (5.11)$$



Se puede hacer la observación general de que el sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes ha sido reducido a un nuevo conjunto de ecuaciones algebraicas de la forma:

$$S R(t) = F(t) \quad (5.12)$$

El cual puede resolverse en cada paso de tiempo. En el caso actual el método de Euler da lugar al sistema de matrices:

$$S = A \quad (5.13)$$

y

$$F(t) = k P(t-k) + (A - kB) R(t-k). \quad (5.14)$$

Como se ilustra en la Tabla 5.1 todas las integraciones pueden ser reducidas a la forma de la ecuación 5.12. Cuando el problema es lineal y el tiempo  $k$ , es constante, la matriz cuadrada del sistema no cambia con el tiempo. Por lo tanto necesita ser ensamblado e "invertido" (cuando la solución algebraica es vía matriz inversa), solo una vez. Entonces a cada paso del tiempo es únicamente necesario evaluar  $F(t)$  y resolver para  $R(t)$ .

Antes de considerar el significado práctico de formas alternas de la ecuación 5.12 regresaremos a la suposición de que es lineal durante el paso del tiempo. A partir de la Fig. 5.1 se nota que:

$$\dot{R}(t) = \dot{R}(t-k) + k \ddot{R}(t-k) \quad (5.15)$$

Resolviendo la ec. 5.8 para  $\ddot{R}$  y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$\dot{R}(t) = 2 [R(t) - R(t-k)] / k - \dot{R}(t-k) \quad (5.16)$$

Sustituyendo  $t$  en la ecuación 5.5 se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$SR(t) = F(t), \quad (5.17)$$

donde ahora

$$S = B + 2A/k \quad (5.18)$$

$$F(t) = P(t) + A(2R(t-k)/k + \dot{R}(t-k)). \quad (5.19)$$

Esta ecuación se refiere a un algoritmo de velocidad lineal. Una comparación de las ecuaciones 5.15 y 5.20 es útil. El método de Euler se conoce como un método explícito, mientras que la formulación de la velocidad lineal es uno de muchos algoritmos implícitos.

Nótese que la formulación de Euler no requiere almacenamiento adicional, mientras que el algoritmo de velocidad lineal requiere de almacenar la velocidad en el tiempo  $t$  y en el tiempo  $(t-k)$ , para llevar a cabo los cálculos necesarios que permitan actualizar sus valores en cada paso del tiempo. La relación de recurrencia necesaria que utiliza los valores calculados anteriormente para  $R(t)$ , se obtiene a partir de la ecuación 5.16. Nótese también que el procedimiento implícito requiere que se tengan valores iniciales de la velocidad para empezar. Esto puede ser obtenido a partir de la ec. 5.5 como:

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{P}(0) - \mathbf{B} \mathbf{R}(0)). \quad (5.20)$$

Sin embargo, este es un enfoque práctico solamente cuando  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal.

Tabla 5.1 Matrices de Sistema para Transitorios Lineales	
1. Método de Euler (diferencias hacia adelante), $k = \Delta t$	
$\mathbf{S} = \mathbf{A} / k$	
$\mathbf{F} = \mathbf{P}(t-k) + (\mathbf{A} / k - \mathbf{B}) \mathbf{R}(t-k)$	
2. Cranck Nicholson (diferencias centrales) $h = \Delta t/2$ .	
$\mathbf{S} = \mathbf{A} / k + \mathbf{B}/2$ .	
$\mathbf{F} = \mathbf{P}(t-h) + (\mathbf{A}/k - \mathbf{B}/2) \mathbf{R}(t-k)$	
3. Velocidad Lineal.	
$\mathbf{S} = 2\mathbf{A} / k + \mathbf{B}$	
$\mathbf{F} = \mathbf{P}(t) + \mathbf{A} (2\mathbf{R}(t-k) / k - \mathbf{R}(t-k))$	
$\dot{\mathbf{R}}(t) = 2 (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t-k)) / k + \dot{\mathbf{R}}(t-k)$	

#### 5.2.4. MATRICES DIAGONALES PARA SOLUCIONES TRANSITORIAS.

Cuando se utiliza una formulación espacial de diferencias finitas, la matriz  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal, sin embargo si se utiliza una formulación de Elemento Finito, no se obtiene una matriz diagonal. Por lo tanto, la forma consistente de la formulación de Elemento Finito introduce un acoplamiento de algunos de los coeficientes de la matriz de las derivadas del tiempo. Como fue demostrado por Myers, esto tiende a generar un algoritmo de integración menos estable en el tiempo.

Claramente, la conversión de  $\mathbf{A}$  a una matriz diagonal deberá también economizar la memoria de almacenamiento y hacer la evaluación de las ecuaciones más económica. Algunas aproximaciones de Ingeniería para la modificación de  $\mathbf{A}$  han demostrado ser exitosas. Para ilustrar esto, considérese la forma típica de la contribución de un elemento, digamos  $a^e$ . La definición consistente para propiedades constantes es:

$$\mathbf{a}^e \equiv \int_{V^e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{H}^e dV \quad (5.28)$$

Donde  $q$  es alguna propiedad constante por unidad de volumen y la matriz  $H$  denota las funciones de interpolación del elemento. Esto generalmente puede ser escrito como:

$$a^e = QM \quad (5.29)$$

Donde  $Q = qV^e$ , y  $M$  es una matriz simétrica llena. Hagamos que la suma de los coeficientes de la matriz  $M$  sea  $T$ , es decir:

$$T \equiv \sum_i \sum_j M_{ij} \quad (5.30)$$

En la mayoría de los casos  $T$  puede ser unitaria, pero no en el caso de las integrales axisimétricas. Otra cantidad de interés es la suma de los términos diagonales de  $M$ , es decir:

$$d \equiv \sum_i M_{ii} \quad (5.31)$$

La solución más común en Ingeniería para definir una matriz diagonal es diferir o sumar todos los términos de un renglón dado sobre la diagonal del renglón y después hacer los términos fuera de la diagonal igual a cero.

Esto es la matriz diferida  $L$  que se define como:

$$L_{ii} = \sum_j M_{ij} \quad (5.32)$$

$$L_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j. \quad (5.33)$$

Nótese que haciendo esto no se altera el valor de  $T$ . Otra matriz diagonal  $D$ , con el mismo valor  $T$  puede ser obtenida extrayéndola de la diagonal de  $M$  y escalándola por un factor de  $T/d$ . Esto es:

$$D_{ii} = M_{ii} T/d. \quad (5.34)$$

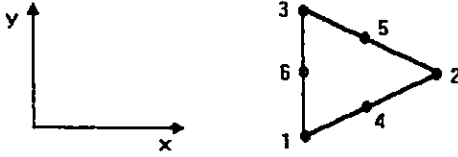
$$D_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j. \quad (5.35)$$

La matriz  $D$  será llamada matriz diagonalizada y  $L$  la matriz diferida. Estas matrices son referidas como matrices condensadas.

Para elementos lineales simples en dos y tres dimensiones ambos procedimientos dan lugar a matrices diagonales idénticas.

Aunque para problemas axisimétricos y elementos de mayor orden se obtienen resultados diferentes y la matriz diagonalizada parece ser la mejor en general.

Esto es debido a que los elementos de más alto orden en la forma diferida pueden introducir ceros en la diagonal. Las matrices  $M$ ,  $L$  y  $D$  son presentadas para un triángulo cuadrático en la Fig. 5.2.



$$M = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ & & 6 & -4 & 0 & 0 \\ & & & 32 & 16 & 16 \\ & & & & 32 & 16 \\ \text{sim.} & & & & & 32 \end{bmatrix}$$

(a) Matriz consistente

$$M = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 60 & & \\ & & & & 60 & \\ & & & & & 60 \end{bmatrix}$$

(b) Matriz diferida.

$$M = \frac{1}{114} \begin{bmatrix} 6 & & & & & \\ & 6 & & & & \\ & & 6 & & & \\ & & & 32 & & \\ & & & & 32 & \\ & & & & & 32 \end{bmatrix}$$

(c) Matriz Diagonalizada

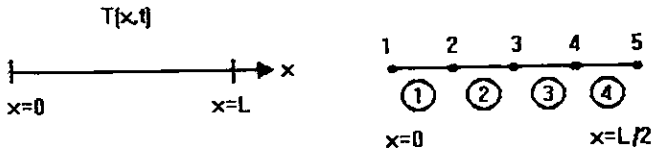
Fig. 5.2. Matrices diagonales y consistentes para un triángulo cuadrático.

### 5.3. TRANSFERENCIA DE CALOR TRANSITORIA

Como un ejemplo más detallado de lo anterior aplicaremos el método de Cranck - Nicholson a un problema de Transferencia de Calor simple.

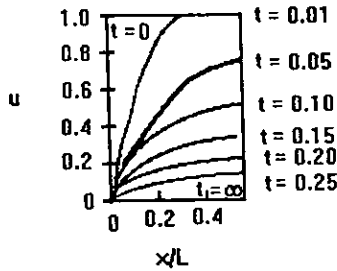
Consideremos una barra uniforme que está inicialmente a temperatura constante, digamos cero. Supongamos que los dos extremos de la barra sufren incrementos repentinos hasta temperaturas diferentes. Por simplicidad, utilizaremos tres elementos lineales iguales y un total de cuatro nodos como se muestra en la Fig. 5.3.

Debido a que los dos nodos extremos son de temperatura conocida, necesitamos determinar la historia térmica de los dos nodos restantes.



a) Problema original.

b) modelo de 4 elementos.



c) Solución exacta para cada diferentes corridas.

Fig.5.3. Problema típico transitorio lineal.

La ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno es:

$$\rho C_p \frac{\partial R}{\partial t} - k \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0 \quad (5.36)$$

Donde  $R$  denota la temperatura,  $t$  es el tiempo, y las propiedades del material  $k$ ,  $\rho$  y  $C_p$  son la conductividad térmica, la densidad másica y el calor específico respectivamente.

Este sistema también requiere condiciones iniciales, es decir  $R(x, t=0)$  y las condiciones de frontera como una función del tiempo, es decir  $R(x, t=0)$  y  $R(L, t)$ . Nosotros hemos tomado la condición inicial de temperatura cero, y arbitrariamente estableceremos que las condiciones de frontera sean  $R_1(t) = 10^\circ\text{C}$  y  $R_4(t) = 20^\circ\text{C}$ .

La contribución del elemento a la matriz de conducción global es:

$$B^e = \frac{K^2}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Myers da la derivación de la correspondiente matriz de capacitancia del elemento como:

$$A^e = c^e \rho^e \int_{l^e} H^{eT} H^e dx = \frac{c^e \rho^e l^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

El ensamblaje de tres elementos iguales da la ecuación 5.1 como:

$$\frac{\rho C_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \dot{R} + \frac{K}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} R = P \quad (5.39)$$

De ahí que la longitud total de la barra es  $L=3l$ . El término de fuerza  $P$  contiene las fuentes internas de calor dependientes del tiempo y las fuentes de calor nodales. Aquí se asume que ellos son cero en los nodos interiores.

La forma anterior fue utilizada para ilustrar el punto de que la ecuación 5.1 requiere de los dos sistemas de matrices cuadradas. Sin embargo, podríamos no desear almacenarlas en la forma anterior. Cuando comparamos las opciones de la tabla 5.1 con las ecuaciones actuales a resolver, es decir la ecuación 5.7, vemos que es probablemente más eficiente usar las dos matrices cuadradas alternas. Por ejemplo, la opción de Crank Nicholson necesita que la matriz

$$S = A/k + B/2 \quad (5.40)$$

así como

$$Q = A/k - B/2. \quad (5.41)$$

sean usadas en la actualización del término de fuerza F. Suponiendo un paso de tiempo constante, k, y multiplicando todos los términos por  $(6k/\rho c)$ , permite escribir el método de Crank Nicholson (para  $P=0$ ) como:

$$S' R(t+k) = Q' R(t) = F' \quad (5.42)$$

Donde

$$S' = \begin{bmatrix} (2+b) & (1-b) & 0 & 0 \\ & (4+b) & (1-b) & 0 \\ & & (4+2b) & (1-b) \\ \text{sim.} & & & (2+b) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

y donde  $b = 3kK/\rho C_p t^2$ . La matriz  $Q'$  la misma excepto por un cambio en el signo de todos los términos b. Si renormalizamos de manera que  $b=3$ , nuestro modelo numérico actual llega a ser:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} R(t+k) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} R(t) \quad (5.44)$$

Por supuesto, esta ecuación aún debe ser modificada posteriormente, debido a que el lado izquierdo involucra términos de R que son definidos por las condiciones de frontera.

Cuando esos términos se mueven hacia la derecha solamente el segundo y el tercer renglones permanecen independientes:

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2(t) \\ R_3(t) \end{Bmatrix} - R_1(t+k) \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} - R_4(t+k) \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

Para los resultados en el primer paso sustituimos las condiciones iniciales en  $R_2$  y  $R_3$ , y las nuevas condiciones de frontera son  $R_1$  y  $R_4$ . El lado derecho resultante en este caso es

$$F' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 10 \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} - 20 \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 40 \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

Resolviendo para los nuevos valores de  $R_2$  y  $R_3$ :

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 20 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.917 \\ 4.583 \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

En el siguiente paso el lado derecho cambia a:

$$F^* = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.917 \\ 4.583 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \end{Bmatrix}. \quad (5.48)$$

Las nuevas temperaturas correspondientes son:

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.271 \\ 5.104 \end{Bmatrix}. \quad (5.49)$$

Continuando de esta manera se encuentra que esas temperaturas eventualmente alcanzan sus valores estacionarios de 13.333 °C y 16.667 °C, respectivamente. La primera y última ecuación no utilizadas, pueden ser usadas para determinar el flux de calor en los extremos dependiente del tiempo,  $P_1$  y  $P_4$ , necesarios para mantener las dos temperaturas extremas.

Este tipo de cálculo transitorio es sensitivo al tamaño del paso del tiempo,  $k$ . Si el paso de tiempo es demasiado largo, pueden surgir oscilaciones de las temperaturas calculadas. Si es demasiado pequeño, entonces un flux de calor nodal shock, o un incremento repentino de temperatura puede conducir a cambios de temperatura físicamente imposibles.

Ambos efectos son causados por tamaños incompatibles de la malla y del paso del tiempo. Ellos pueden ser combinados con propiedades del material para dar el número adimensional de Fourier

$$f = \frac{kK}{\rho C_p l^2}. \quad (5.50)$$

Para problemas térmicos transitorios el número de Fourier deberá tener un valor aproximadamente igual a la unidad en todos los nodos donde hay un severo shock térmico. En tal caso  $l$  denota la distancia más pequeña hasta otro nodo en el elemento.



### 5.3.1 PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO 1-D.

El programa de cómputo SONI2R evalúa el perfil de temperaturas en el interior de un sólido en forma de una barra sólida con una envolvente aislante y condiciones de frontera de temperatura constante en los extremos. La temperatura inicial de la barra es  $T_0$  en una distribución completamente homogénea; en un momento determinado uno de los extremos adquiere una temperatura que eventualmente puede ser igual a la temperatura izquierda, bajo estas condiciones la distribución de temperaturas en el interior de la barra evoluciona paulatinamente hacia la distribución de equilibrio térmico.

El usuario tiene la posibilidad de especificar los valores de la temperatura inicial y las temperaturas en los extremos, así como la longitud de la barra, el coeficiente de conductividad térmica y la capacidad calorífica del material.

#### BLOQUE I:

En el primer bloque de instrucciones se dimensionan las variables de interés:

-Una matriz [A] de  $(n+1)$  renglones y  $(n+1)$  columnas, la cual contiene a los coeficientes que multiplican al vector de temperaturas en el tiempo  $t + \Delta t$ .

-Una matriz cuadrada [B] de dimensión  $(n+1)$  que corresponde a los coeficientes que multiplican al vector de temperaturas en el tiempo actual, antes de introducir las condiciones de frontera

-Una matriz cuadrada [C] de dimensión  $(n-1)$  para los coeficientes de  $t + \Delta t$  reducida al introducir las condiciones de frontera.

-Un vector [P] en el que se almacenará el producto de la matriz [B] por el vector de temperaturas actuales.

-Un vector [D] de dimensión  $(n-2)$  en el que se almacenan los valores resultantes de la reducción del vector [P] al eliminar los términos de temperatura constante.

CLS  
'EL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER ES [A][T+]=[B][T]  
FO = 3: N = 14  
DIM F(N + 1, N + 1), C(N - 2, N - 2), G(N + 1, N + 1), P(N), D(N), L(N, N), U(N, N),  
C1(N), X(N)  
DIM T(N), X1(N), Y(N), XN(N), YN(N)

## BLOQUE II:

En el segundo bloque de instrucciones se especifica el valor de la temperatura inicial para todos los nodos.

```
'TEMPERATURA INICIAL
TINIC = 0
FOR I = 1 TO N: T(I) = TINIC: NEXT I
```

## BLOQUE III:

En el tercer conjunto de instrucciones es un ciclo "FOR-NEXT" anidado en el que se construye la matriz [A] especificando el valor de los coeficientes en el diagrama como  $(2+Fo)$  y de los términos fuera de la diagonal  $(1 - Fo)$  y llevando a cabo el ensamblaje para obtener la matriz global [A] a partir de las matrices de cada elemento, del ensamblaje resultan los términos  $(4+2Fo)$  para los términos de la diagonal, excepto en las esquinas donde se conserva el valor de  $(2+Fo)$ .

```
'CONDICIONES DE FRONTERA
TIZQ = 10: TDER = 20
'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [F]
FOR I = 1 TO N
  FOR J = I - 1 TO I + 1
    IF J = I THEN F(I, J) = 4 + 2 * FO ELSE F(I, J) = 1 - FO
  NEXT J
NEXT I
F(1, 1) = 2 + FO: F(N, N) = 2 + FO
```

## BLOQUE IV:

En el cuarto bloque se imprime la matriz [F] mediante un ciclo anidado FOR-NEXT.

```
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    PRINT F(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT I
```

### BLOQUE V:

En el bloque V se lleva a cabo la reducción de la matriz [F] a la matriz, eliminando [F] de los renglones y columnas cuyo término en la diagonal corresponde a una temperatura conocida.

```
'REDUCCIÓN DE MATRIZ [F]--->[C]
COLOR 3
FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    C(I, J) = F(I + 1, J + 1)
  PRINT C(I, J);
  NEXT J
PRINT
NEXT I
COLOR 15
```

### BLOQUE VI:

Se construye la matriz [G] especificando los valores de ("Fo) para los términos en la diagonal y (1+Fo) para los términos fuera de la diagonal, excepto en los extremos.

```
'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [G]
FOR I = 1 TO N
  FOR J = I - 1 TO I + 1
    IF I = J THEN G(I, J) = 4 - 2 * FO ELSE G(I, J) = 1 + FO
  NEXT J
NEXT I

G(1, 1) = 2 - FO: G(N, N) = 2 - FO
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
```

### BLOQUE VII:

```
Impresión de la matriz [G].
PRINT G(I, J);
NEXT J
```

### BLOQUE VIII:

Se calcula el producto de [G] por [T], en el tiempo actual obteniéndose el vector [P], e imprimiéndose el resultado mediante un ciclo FOR-NEXT anidado.

```

PRINT
NEXT I
PRINT
100 ' MULTIPLICACIÓN [G][T]=[P]
FOR I = 1 TO N
    SUMAT = 0
    FOR J = 1 TO N
        SUMAT = SUMAT + G(I, J) * T(J)
    NEXT J
    P(I) = SUMAT
PRINT "P"; I, "="; P(I)
NEXT I

```

### BLOQUE IX:

Se lleva acabo la reducción del vector [P] al vector [D], tomando en cuenta las condiciones de frontera en el extremo izquierdo y derecho de la barra, especificando entonces el término[D1] como resultante en el despeje de la segunda ecuación en la que está contenida la temperatura de la izquierda, similar es el caso para el término [D(n-2)]

```

'REDUCCIÓN DEL VECTOR [P]-->[D]
D(1) = P(2) - F(2, 1) * TIZQ
D(N - 2) = P(N - 1) - F(N - 1, N) * TDER
FOR I = 2 TO N - 3
    D(I) = P(I + 1)
NEXT I
COLOR 3
'FOR I = 1 TO N - 2: PRINT D(I): NEXT
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOSUB 200
GOTO 100
END

```

200 'DESCOMPOSICIÓN LU

**El siguiente programa incluye la comprobación analítica al ejecutarse**

```

CLS
'EL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER ES [A][T+]=[B][T]
FO = 3: n = 15
DIM F(n + 1, n + 1), C(n - 2, n - 2), G(n + 1, n + 1), P(n), D(n), L(n, n), U(n, n), C1(n),
X(n)
DIM T(n), X1(n), Y(n), XN(n), YN(n), temp(n)

```

### 'TEMPERATURA INICIAL

```
tinic = 0
FOR i = 1 TO n: T(i) = tinic: NEXT i
'CONDICIONES DE FRONTERA
tizq = 20: TDER = 20
```

### 'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [F]

```
FOR i = 1 TO n
  FOR J = i - 1 TO i + 1
    IF J = i THEN F(i, J) = 4 + 2 * FO ELSE F(i, J) = 1 - FO
  NEXT J
NEXT i
```

$F(1, 1) = 2 + FO$ :  $F(n, n) = 2 + FO$

```
FOR i = 1 TO n
  FOR J = 1 TO n
    PRINT F(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT i
```

### 'REDUCCIÓN DE MATRIZ [F]→[C]

```
COLOR 3
FOR i = 1 TO n - 2
  FOR J = 1 TO n - 2
    C(i, J) = F(i + 1, J + 1)
    PRINT C(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT i
COLOR 15
```

### 'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [G]

```
FOR i = 1 TO n
  FOR J = i - 1 TO i + 1
    IF i = J THEN G(i, J) = 4 - 2 * FO ELSE G(i, J) = 1 + FO
  NEXT J
NEXT i
G(1, 1) = 2 - FO: G(n, n) = 2 - FO
FOR i = 1 TO n
  FOR J = 1 TO n
    PRINT G(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT i
PRINT
```

```

100 ' MULTIPLICACIÓN [G][T]=[P]
FOR i = 1 TO n
  SUMAT = 0
  FOR J = 1 TO n
    SUMAT = SUMAT + G(i, J) * T(J)
  NEXT J
  P(i) = SUMAT
  PRINT "P"; i, "="; P(i)
NEXT i

```

```

'REDUCCIÓN DEL VECTOR [P]→[D]
D(1) = P(2) - F(2, 1) * tizq
D(n - 2) = P(n - 1) - F(n - 1, n) * TDER
FOR i = 2 TO n - 3
  D(i) = P(i + 1)
NEXT i
COLOR 3
FOR I = 1 TO N - 2: PRINT D(I): NEXT

```

```

'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""

```

\*\*\*\*\* SOLUCIÓN ANALÍTICA \*\*\*\*\*

```

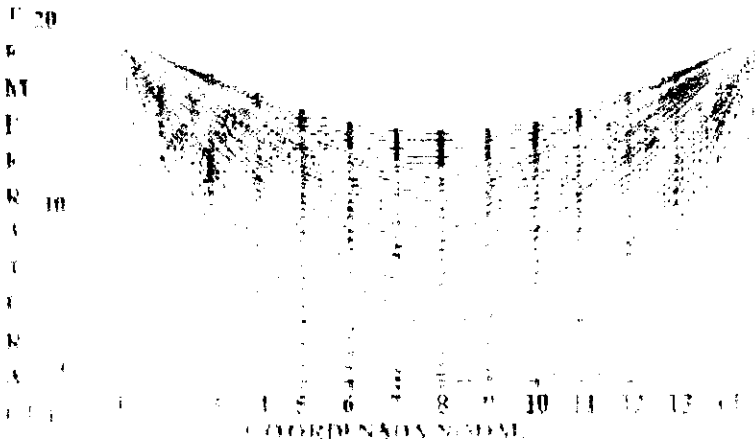
nod = (n + 1) / 2
LTOT = 2 * nod - 1: DELTAT = 1: ALFA = 1
PAS1 = PAS1 + 1
FOR i = 1 TO nod
  sumatl = 0
  FOR J = 0 TO 40
    sumatl = sumatl + ((-1) ^ J) / (2 * J + 1) * COS((2 * J + 1) / 2 * 3.1416 * (nod - i + 1)
    / (LTOT + 1) * 2) * EXP(-(J + 1 / 2) ^ 2 * 3.1416 ^ 2 * ALFA / ((LTOT + 1) / 2) ^ 2 *
    PAS1 * DELTAT)
  NEXT J
  PRINT "sumatl="; sumatl
  temp(i) = tizq + 4 * (tinic - tizq) / 3.1416 * sumatl
NEXT i
PRINT "NOD="; NOD
FOR i = 1 TO nod
  temp(LTOT - i + 1) = temp(i)
  PRINT "TEMP"; i, TEMP(i)
NEXT i

GOSUB 200
GOTO 100
END

```

200 'DESCOMPOSICIÓN LU

**FIG 4.4 PREDICCIÓN DE LA EVALUACIÓN DEL PERFIL DE TEMPERATURAS POR MÉTODO DE ELEMENTO FINITO Y COMPARACIÓN CON LA SOLUCIÓN ANALÍTICA OBTENIDA POR SERIES DE FOURIER, PARA TRANSFERENCIA DE CALOR 1D NO ESTACIONARIO EN COORDENADAS CARTESIANAS.**



La figura de esta página es una representación gráfica de la comparación de los datos obtenidos por simulación computacional y la solución analítica desarrollada por series de Fourier.

El programa soni2rb es una implantación del Método de elemento finito para transporte unidireccional de calor en régimen transitorio y coordenadas cartesianas para una barra inicialmente a 0°C que se calienta súbitamente por sus extremos, hasta una temperatura estable de 201°C; Manteniéndose condiciones de frontera isotérmicas durante todo el intervalo de tiempo considerado (líneas en verde).

La solución analítica fue construida en base al método de separación de variables con series de Fourier:

$$T^* = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi x^*\right) \exp\left(-\left[\frac{2n+1}{2} \pi\right]^2 t^*\right) \right]$$

Y se presenta en el gráfico con las líneas en rojo.

El programa de cómputo denominado soni2rb contienen una subrutina que permite calcular la aproximación entre las dos soluciones, reportando un porcentaje de error promedio durante todo el proceso de la evaluación del perfil de temperaturas hasta que el sistema llega al equilibrio térmico, el cual toma un valor de 3.56 %.

El programa también permite calcular el error porcentual máximo que se obtiene en las primeras etapas de cálculo y que corresponde a un valor de 5.6 %.

El alto porcentaje de error se debe básicamente a la introducción del método de diferencias finitas para el ciclo externo de tiempo, ya que se demostró anteriormente en el capítulo 4 para geometrías axisimétricas, que el método de elemento finito tiene un porcentaje de error casi despreciable (0.00035 %).

Aparte el método de diferencias finitas introduce un factor de inestabilidad en los cálculos que se traduce en una restricción con el número de Fourier a utilizar durante la simulación computacional.



## Radiación en Geometrías Axisimétricas

### 6.1. RADIACIÓN EN GEOMETRÍAS AXISIMÉTRICAS Y RÉGIMEN TRANSITORIO.

El presente capítulo presenta una recopilación de los programas presentados en la presente tesis anexando ahora el término de radiación para analizar el fenómeno de transferencia de calor sometida a radiación al utilizar energía electromagnética en el procesamiento de alimentos, esto puede ser utilizado para su posterior utilidad en experimentación, o escalamiento a nivel industrial.

Para introducir el término de radiación en los programas presentados se procede a integrar la siguiente ecuación:

$$2\pi \int_0^L \left[ \begin{array}{c} 1 - \frac{R}{L} \\ \frac{R}{L} \end{array} \right] \left[ 1 - \frac{R}{L} \quad \frac{R}{L} \right] P_0 e^{-\beta(R-R_0)} dR [R^c] = 2\pi P_0 \int_0^L \left[ \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{R}{L}\right)^2 & \frac{R}{L} \left(1 - \frac{R}{L}\right) \\ \frac{R}{L} \left(1 - \frac{R}{L}\right) & \frac{R^2}{L^2} \end{array} \right] e^{-\beta(R-R_0)} dR [R^c] \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1.) se procede a integrar por partes en los incisos del (I) al (IV):

INTEGRACIÓN DE (I):

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_0^L P_0 e^{-\beta(R-R_0)} dR - 4\pi \frac{P_0}{L} \int R e^{-\beta(R-R_0)} dR + \frac{2\pi P_0}{L^2} \int R^2 e^{-\beta(R-R_0)} dR = \\ & = \left[ \frac{-2\pi P_0}{\beta} e^{-\beta(R-R_0)} \right]_0^L - \frac{4\pi P_0}{\beta L} \left[ e^{-\beta(R-R_0)} \left( R + \frac{1}{\beta} \right) \right]_0^L \\ & + \frac{2\pi P_0}{L^2} \left[ \frac{-R^2}{\beta} e^{-\beta(R-R_0)} - \frac{2}{\beta^2} R e^{-\beta(R-R_0)} - \frac{2}{\beta^3} e^{-\beta(R-R_0)} \right]_0^L \end{aligned} \quad (6.2)$$

INTEGRACIÓN DE (II):

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\beta(L-R_0)} \left[ -\frac{2\pi P_0}{\beta} + \frac{4\pi P_0}{\beta L} \left( L + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{2\pi P_0}{L^2} \left( -\frac{L^2}{\beta} - \frac{2L}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \right) \right] + e^{\beta R_0} \left[ \frac{2\pi P_0}{\beta} - \frac{4\pi P_0}{\beta^2 L} + \frac{4\pi P_0}{\beta^3 L^2} \right] \\
 &2\pi P_0 e^{-\beta(L-R_0)} \left[ -\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2 L} - \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta^2 L} \frac{1}{\beta^3} \right] + 2\pi P_0 e^{-\beta R_0} \left[ \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta^2 L} + \frac{2}{\beta^3 L^2} \right] \\
 &= -\frac{4\pi P_0}{\beta^3} e^{-\beta(L-R_0)} + 2\pi P_0 e^{-\beta R_0} \left[ \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta^2 L} + \frac{2}{\beta^3 L^2} \right]
 \end{aligned}$$

(6.3)

INTEGRACIÓN DE (III Y IV):

$$\begin{aligned}
 2\pi \int_0^L \frac{R}{L} \left( 1 - \frac{R}{L} \right) P_0 e^{-\beta(R-R_0)} dR &= \frac{2\pi P_0}{L} \int_0^L R e^{-\beta(R-R_0)} dR - \frac{2\pi P_0}{L^2} \int_0^L R^2 e^{-\beta(R-R_0)} dR \\
 &= -\frac{2\pi P_0}{L} \left[ e^{-\beta(R-R_0)} \left( \frac{R}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right]_0^L + \frac{2\pi P_0}{L^2} \left[ e^{-\beta(R-R_0)} \left( \frac{R^2}{\beta} + \frac{2R}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} \right) \right]_0^L \\
 &= -\frac{2\pi P_0}{L} \left[ e^{-\beta(L-R_0)} \left( \frac{L}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) - e^{\beta R_0} \frac{1}{\beta^2} \right] \\
 &+ \frac{2\pi P_0}{L^2} \left[ e^{-\beta(L-R_0)} \left( \frac{L^2}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} \right) - e^{\beta R_0} \left( \frac{2L}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

(6.4.)

Finalmente obtenemos, la ecuación (6.5) la cual presenta la estructura necesaria para proceder a implementar el Método de Elemento Finito de forma variacional a los programas que a continuación se presentan los cuales nos permiten evaluar la transferencia de calor en geometrías axisimétricas (6.1.1.) y en estado transitorio(6.2.1.):

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{L^2} \int_0^L R^2 P_0 e^{-\beta(R-R_0)} dR &= \frac{2\pi P_0}{L^2} \left[ e^{-\beta(R-R_0)} \left( -\frac{R^2}{\beta} - \frac{2R}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \right) \right]_0^L \\
 &= \frac{2\pi P_0}{L^2} \left[ e^{-\beta(L-R_0)} \left( -\frac{L^2}{\beta} - \frac{2L}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \right) - e^{\beta R_0} \left( \frac{2}{\beta^3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

(6.5.)

### 6.1.1 PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN EN GEOMETRIAS AXISIMÉTRICAS.

En el programa AXISITX.BAS sirve para calcular la transferencia de calor por conducción y con términos fuente de radiación en coordenadas cilíndricas y bajo condiciones de geometría axisimétrica del material en estado estacionario. Se puede definir  $P_0 = 0$  y entonces se trataría de un fenómeno exclusivamente de conducción 1-D.

#### BLOQUE 1:

Se especifican las propiedades físicas del material que son:

- longitud del elemento, conductividad térmica, profundidad de penetración, radio máximo y radio mínimo del material (cilindro hueco). También se define una variable (n) que indica el número de elementos a considerar

```
CLS
REM ANALISIS AXYSIMETRICO
LE = 1
K = 1
L = 1
BETA = 1
R0 = 8
P0 = 15206
RMIN = 4
RMAX = 8
n = 16.
```

#### BLOQUE II:

Consiste en el dimensionamiento de las matrices para la implementación del método de elemento finito.

-Una matriz cuadrada [A] de dimensión igual al número de nodos, la cual es la matriz de conductividad.

-Una matriz cuadrada [S] del mismo tamaño.

-Un vector [R] para guardar los valores de las coordenadas radiales de cada nodo.

-Un vector [C] para guardar los términos fuente en cada nodo y corresponde a la suma de la radiación incidente por el radio interior y el radio exterior del cilindro.

-Una matriz cuadrada [A1] para la implementación del método de eliminación gaussiana en la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales resultantes.

-Cuatro vectores x, y, xn, y yn; para los procedimientos de graficación.

-Una matriz [SS] que corresponde al álgebra desarrollada en la explicación previa.

```
DIM R(n + 1), A(n + 1, n + 1), s(n + 1, n + 1), c(n + 1), A1(n + 1, n + 1), x(n), xn(n), Y(n), yn(n)
```

```
R(1) = RMIN
```

```
R(n) = RMAX
```

```

A1 = 1 / BETA * (EXP(BETA * (L - R0)) - EXP(-BETA * R0))
B = (L / BETA) * EXP(BETA * (L - R0)) - 1 / BETA ^ 2 * (EXP(BETA * (L - R0)) -
EXP(-BETA * R0))
D = L ^ 2 / BETA * EXP(BETA * (L - R0)) - 2 * L / BETA ^ 2 * EXP(BETA * (L - R0)) +
2 / BETA ^ 3 * (EXP(BETA * (L - R0)) - EXP(-BETA * R0))

```

### BLOQUE III:

Se asigna el valor del radio mínimo al primer elemento del vector [R] y el del radio máximo al último elemento. Se calcula la variable A1 a partir de la profundidad de penetración y la distancia al borde.

```
FOR I = 1 TO n
```

```
R(I + 1) = I * (RMAX - RMIN) / n + RMIN
```

### BLOQUE IV:

Se construyen las matrices locales de conductividad y capacitancia en base a un ciclo "FOR-NEXT", imprimiéndose el resultado.

REM CONSTRUCCION DE LAS MATRICES LOCALES DE CONDUCTIVIDAD y CAPACITANCIA

```
A(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I))
```

```
s(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I)) + A(I - 1, I - 1)
```

```
s(I, I + 1) = -A(I, I)
```

```
s(I + 1, I) = -A(I, I)
```

```
s(I + 1, I + 1) = A(I, I)
```

```
c(I) = 2 * 3.1416 * P0 * ((A1 - 2 / L * B + D / L ^ 2) * R(I) + (B / L - D / L ^ 2) * R(I + 1))
```

```
c(I + 1) = 2 * 3.1416 * P0 * ((B / L - D / L ^ 2) * R(I) + D / L ^ 2 * R(I + 1))
```

```
NEXT I
```

```
'REM CICLO DE IMPRESION
```

```
'FOR I = 1 TO n + 1
```

```
'FOR J = 1 TO n + 1
```

```
'PRINT s(J, I); " ";
```

```
'NEXT J
```

```
'PRINT c(I)
```

```
'NEXT I
```

## BLOQUE V:

Se introducen las condiciones de frontera isotérmicas, estableciendo las temperaturas en el primer y último nodo.

```
' CONDICIONES DE FRONTERA
```

```
c(1) = 100
```

```
c(n + 1) = 10
```

## BLOQUE VI:

Es la reconstrucción del sistema de ecuaciones ya que al haber introducido las condiciones de frontera en los extremos, la temperatura en el primer y último nodo son conocidas, por lo tanto se hace que en la matriz de capacitancia el primer coeficiente y el último tengan el valor de 1.

Además en las ecuaciones que contienen como incógnita a dichos coeficientes se sustituye la temperatura conocida y se pasa con signo contrario al vector de términos independientes.

## BLOQUE VII:

Enseguida se manda a la resolución del sistema de ecuaciones. La matriz [S] se convierte en la matriz [A1] y el término independiente C1 conforma la última columna de dicha matriz, que es la que se emplea en el método de eliminación Gaussiana.

```
' RECONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES
```

```
c(2) = c(1) * s(1, 1): s(1, 1) = 1:
```

```
FOR I = 2 TO n
```

```
    s(1, I) = 0: s(I, 1) = 0
```

```
NEXT I
```

```
c(n) = c(n + 1) * s(n + 1, n + 1): s(n + 1, n + 1) = 1
```

```
FOR I = 1 TO n
```

```
    s(I, n + 1) = 0: s(n + 1, I) = 0
```

```
NEXT I
```

```
COLOR 3
```

```
REM CICLO DE IMPRESION
```

```
'FOR I = 1 TO n + 1
```

```
'FOR J = 1 TO n + 1
```

```
'PRINT s(J, I); " ";
```

```
'NEXT J
```

```
'PRINT c(I)
```

```
'NEXT I
```

## BLOQUE VIII.

Se procede a la graficación de los resultados.

```
REM "GRAFICADOR"  
xmin = 1: xmax = n  
DELTAX = (xmax - xmin) / (n - 1)  
x(0) = xmin - DELTAX
```

## BLOQUE IX.

Es una instrucción para mandar a hacer la subrutina del sistema de ecuaciones.

```
REM CALCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCION  
FOR I = 1 TO n  
x(I) = x(I - 1) + DELTAX  
NEXT I  
REM OBTENCION DE VALORES EXTREMOS DE LA FUNCION  
YMIN = Y(1): ymax = Y(1)  
FOR I = 2 TO n  
IF YMIN > Y(I) THEN YMIN = Y(I)  
IF ymax < Y(I) THEN ymax = Y(I)  
NEXT Y
```

## BLOQUE X.

Asignación de las variables para graficación.

```
xmingraf = 0: xmaxgraf = xmax: ymingraf = 0: ymaxgraf = ymax  
scalex = 1: scaley = 10  
SCREEN 12
```

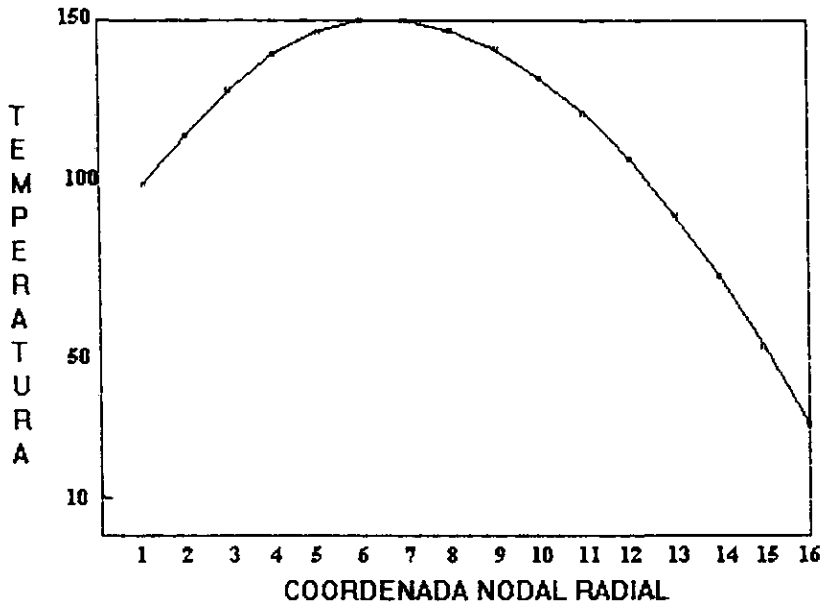
## BLOQUE XI.

Se procede a escribir la subrutina de graficación.

## BLOQUE XII.

Es la subrutina de eliminación Gaussiana.

GRAF. 6.1. DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA 1D DE CALOR A TRAVÉS DE UN CILINDRO HUECO SOMETIDO A RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA.



La gráfica anterior es un ejemplo de la ejecución del programa para caracterizar el perfil de temperaturas en estado estacionario a través de un cilindro hueco con radio interno igual a 4 m y radio externo igual a 8 m. con una conductividad térmica igual a 1 y condiciones de frontera isotérmicas de temperatura en la pared interior igual a 100° y en la pared exterior de 30°, con una potencia de la radiación incidente igual a 15206 Watts y una Beta=1.

Se puede notar que debido a la incidencia de la radiación por las dos paredes la distribución de temperaturas presenta un máximo en una coordenada radial interna

## 6.2 RADIACIÓN EN ESTADO TRANSITORIO.

### 6.2.1. PROGRAMA PARA DETERMINAR TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO Y TERMINO DE RADIACIÓN.

El programa SONI3R permite obtener la evolución del perfil de temperaturas para un proceso de calentamiento por microondas en coordenadas cartesianas 1-D para una intensidad constante de la radiación electromagnética.

El programa que se lista a continuación consta de los siguientes bloques de instrucciones:

#### BLOQUE I:

Se definen las propiedades físicas del material (conductividad térmica, capacidad calorífica densidad coeficiente de difusividad térmica, la longitud, la profundidad de penetración y la potencia de las ondas electromagnéticas

CLS

'EL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER ES [A][T+]=[B][T]

#### BLOQUE II:

Se define el número de elementos y el incremento de la temperatura, con los cuales se va a llevar a cabo la simulación, también se calcula el número de Fourier, y el número adimensional ALE, que son los parámetros adimensionales que definen al término de conductancia, y al término fuente respectivamente.

FO = 3. N = 14.

BETA = 1. LE = 1. ALE = 1. PO = .7

#### BLOQUE III:

Se dimensionan los arreglos matriciales:

- Una matriz cuadrada [F] de dimensiones (n+1), donde se almacenan los coeficientes que multiplican al vector de temperaturas en el tiempo actual, antes de introducir condiciones de frontera.

- Una matriz cuadrada [C] de dimensiones (n), donde se almacenan los cocientes que multiplican al vector de temperaturas actuales para pasarlos al subrutina de descomposición LU.

- Una matriz cuadrada [G] de dimensiones (n+1) donde se guardan los coeficientes que guardan al vector de temperaturas en el tiempo  $t + \Delta t$



- Un vector [P] en donde se almacena el producto de la matriz [G] por el vector de temperaturas actuales, antes de introducir los términos radiación y condiciones de frontera.

- Un vector [D] de dimensiones (n), en el que se almacenan el producto de [G] por el vector de temperaturas actuales sumándole el término de absorción de calor por radiación y restándole la disipación convectiva en los nodos de los extremos.

- Una matriz cuadrada [L] y una matriz cuadrada [U], un vector [C1] y un vector [X] para uso en la subrutina de solución del sistema de ecuaciones simultaneas lineales.

- Los vectores [X1], [Y], [XN] y [YN], donde se guardan los valores de la variable a graficar.

- El vector [T] para la conversión de las temperaturas calculadas para el tiempo  $t + \Delta t$  a temperaturas actuales en el siguiente paso de tiempo para iniciar el ciclo de Diferencias Finitas.

```
DIM F(N + 1, N + 1), C(N, N), G(N + 1, N + 1), P(N), D(N), L(N, N), U(N, N), C1(N), X(N)
DIM T(N), X1(N), Y(N), XN(N), YN(N)
```

#### BLOQUE IV

Se especifican los valores del coeficiente convectivo, la temperatura ambiental, la temperatura inicial del sistema y se inicializa la temperatura mediante un ciclo "For-Next"

```
HCONV = 1, TAMB=25
'LONGITUD TOTAL DE LA BARRA = N*LE
'TEMPERATURA INICIAL
TINIC = 25
FOR I = 1 TO N T(I) = TINIC. NEXT I
```

#### BLOQUE V

Mediante un ciclo "For-Next" anidado se construye la matriz [F] especificando el valor de los coeficientes en la diagonal como  $(2+Fo)$  y los términos fuera de la diagonal como  $(1-Fo)$  llevando al mismo tiempo el ensamblaje para obtener la matriz [F] globalizada a partir de las matrices de cada elemento. Del ensamblaje resultan los términos  $(4 + 2Fo)$  para los coeficientes sobre la diagonal, excepto en las esquinas donde se conserva el valor de  $(2+Fo)$

```
'CONDICIONES DE FRONTERA
'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [F]
FOR I = 1 TO N
  FOR J = I - 1 TO I + 1
    IF J = 1 THEN F(I, J) = 4 + 2 * FO ELSE F(I, J) = 1 - FO
  NEXT J
NEXT I
F(1, 1) = 2 + FO: F(N, N) = 2 + FO
```

## BLOQUE VI

En el sexto bloque se imprime la matriz [F] globalizada mediante un ciclo "For-Next" anidado.

```
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    'PRINT F(I, J),
  NEXT J
  'PRINT
NEXT I
COLOR 15
```

## BLOQUE VII

Se construye la matriz [G] especificando los valores de  $(4-2Fo)$  para los términos en la diagonal y  $(1 + Fo)$  para los términos fuera de la diagonal, excepto en los extremos y posteriormente se imprime la matriz resultante.

```
'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [G]
FOR I = 1 TO N
  FOR J = I - 1 TO I + 1
    IF I = J THEN G(I, J) = 4 - 2 * FO ELSE G(I, J) = 1 + FO
  NEXT J
NEXT I
G(1, 1) = 2 - FO G(N, N) = 2 - FO

FOR J = 1 TO N
  FOR I = 1 TO N
    ' PRINT G(I, J),
    C(I, J) = G(I, J)
  NEXT J
  'PRINT
NEXT I
'PRINT
```

## BLOQUE VIII

Se calcula el producto de [G][T] (con los valores de las temperaturas actuales), obteniéndose el vector [P] e imprimiéndose el resultado mediante un ciclo "For-Next".

```
100 ' MULTIPLICACIÓN [G][T]=[P]
FOR I = 1 TO N
  SUMAT = 0
  FOR J = 1 TO N
    SUMAT = SUMAT + G(I, J) * T(J)
  NEXT J
  P(I) = SUMAT
  'PRINT "P", I, "=", P(I)
NEXT I
```

## BLOQUE IX

Se introducen los términos de producción de calor por radiación en cada nodo y condiciones de frontera convectiva en los nodos extremos.

```
' adición del término de producción de calor por radiación en cada nodo
FOR I = 1 TO N
  D(I) = P(I) + PO * (EXP((I - 1) * LE * BETA) + EXP((N - I) * LE * BETA))
NEXT I

' condiciones de frontera
D(1) = D(1) - HCONV * (T(1) - TAMB)
D(N) = D(N) - HCONV * (T(N) - TAMB)

LOCATE 1,1
'FOR I = 1 TO N PRINT D(I). NEXT
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOSUB 200
GOTO 100
END
```

## BLOQUE X

Se actualiza el vector temperaturas para proceder a los cálculos en el siguiente paso de tiempo.

```
FOR I = 2 TO N
  T(I) = X(I)
NEXT I
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOSUB 2000
RETURN
```

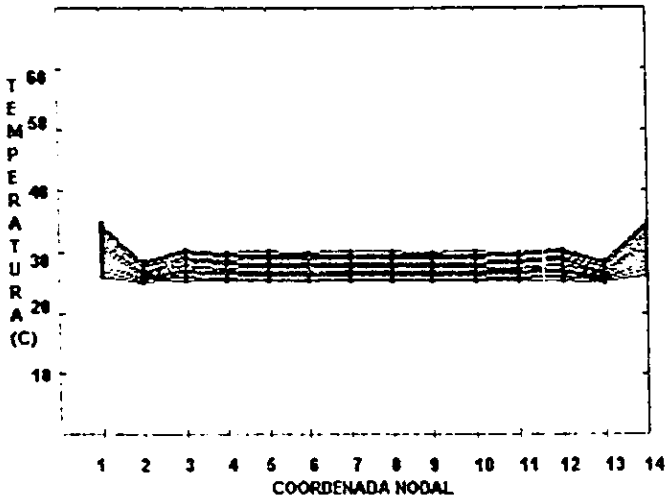
## BLOQUE XI

Se gráficán los resultados obtenidos en cada paso de tiempo

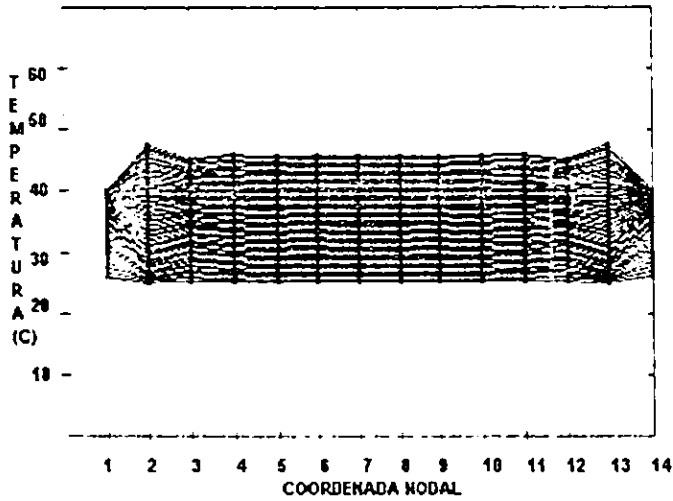
### SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR 1-D POR RADIACIÓN EN ESTADO TRANSITORIO CON CONDICIONES DE FRONTERA

El programa Soni3b listado anteriormente permite determinar la evaluación del perfil de temperaturas para una barra sometida a radiación electromagnética con condiciones de frontera convectivas en cada uno de sus extremos.

La siguiente gráfica corresponde a los resultados de la ejecución del programa de computo después de 20 intervalos de tiempo. Se puede notar que la distribución de temperaturas es casi homogénea en el centro del material y tiene valores más elevados en los extremos, esto es debido a que el gradiente de temperaturas entre los puntos nodales de los bordes y el medio ambiente no es suficiente para provocar un rápido enfriamiento del material y domina notablemente la cantidad de calor que absorben dichos nodos por radiación. Aparentemente la energía que se desprende por convección es tomada de los segundos nodos hacia adentro del material.



La gráfica que se muestra a continuación corresponde a la distribución de temperaturas evaluada para 70 pasos de tiempo. Nótese que la temperatura en los nodos extremos es menor que la de los nodos restantes. Esto es debido a que llegó un momento en el que el gradiente de temperaturas entre el material y el medio ambiente fue suficientemente alto como para permitir que la disipación convectiva de calor hacia el aire circundante fuera más intensa que la absorción de calor por radiación en dichos nodos. Alrededor del cuarentesimo paso de tiempo se observa una homogeneidad térmica total en el material, correspondiente a una temperatura de 39°C



El algoritmo computacional da la posibilidad de predecir la distribución de temperaturas como función del tiempo para materiales irradiados en forma continua o intermitente tal como ocurre en hornos caseros e industriales, simplemente por la nulificación del término de generación de calor por resonancia electromagnética en la ejecución del programa. Las variables de entrada se pueden modificar para obtener el perfil de temperaturas deseado en el interior del material que se trate, lo cual es función de las propiedades físicas y electromagnéticas del mismo.

## CONCLUSIONES:

Al aplicar el método numérico de los elementos finitos se obtienen modelos predictivos bastante precisos, tal como se comprueba al resolver analíticamente la ecuación diferencial para transferencia de calor en estado estacionario y comparar dicha solución con los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de cómputo basado en la técnica de Elementos Finitos. Por ejemplo, en el caso de geometrías axisimétricas y transporte en estado estacionario, el error es casi despreciable ya que se obtiene una desviación promedio de 0.00034% para una función de aproximación cuadrática, lo cual certifica que el modelo puede ser aplicado de manera confiable.

En el caso del estado transitorio, para poder elaborar el algoritmo computacional que pueda calcular la evolución de los perfiles de temperaturas, se tuvo que implementar el Método de Diferencias Finitas como un ciclo externo en el que se anidaron las instrucciones correspondientes al Método de Elemento Finito. El algoritmo híbrido resultante presentó un error máximo del 5.6% y un error promedio del 3.6% respecto a la solución analítica. Esta deficiencia se debe a que el Método de Diferencias Finitas no tiene bases matemáticas tan firmes como en el caso de Elemento Finito, y el error es proporcional al cuadrado del intervalo de tiempo y espacio que se utilicen al ejecutar el algoritmo.

Los programas para estado transitorio deben ser cuidadosamente ejecutados debido al problema de la inestabilidad que surge naturalmente en el Método de Diferencias Finitas, ya que existe un límite en el número de Fourier por encima del cual la solución es inestable, prediciendo oscilaciones temporales entre bajas y altas temperaturas, lo cual corresponde a resultados que no se presentan en la realidad.

La representación gráfica de los resultados se hace dentro del algoritmo de cómputo en forma gráfica de la manera acostumbrada para el caso de transferencia de calor unidimensional, es decir, representando los valores de la temperatura vs la coordenada de posición. En el caso bidimensional se pueden predecir las temperaturas por medio del gráfico tridimensional (temperatura vs  $[x,y]$ ) complementando la visualización mediante una gráfica plana en colores.

Todos los programas pueden ser utilizados para diferentes materiales alimenticios introduciendo solamente sus propiedades físicas y las condiciones de operación, ya que los programas son flexibles en cuanto a las variables que se puedan introducir para la ejecución.

Los algoritmos computacionales presentados dan la posibilidad de predecir la distribución de temperaturas como función del tiempo para materiales irradiados en forma continua e intermitente como es el caso de los hornos caseros e industriales.

El campo a explotar todavía es bastante extenso, los programas presentados aquí pueden servir como punto de partida para comparar los resultados obtenidos con experimentación a nivel planta piloto y escalar dichos resultados a operaciones industriales

## BIBLIOGRAFIA:

1. Chapra C. 1992.  
Métodos numéricos para Ingenieros.  
Edit. McGraw Hill.
2. Rao, M.A. 1983  
The Finite Element Method Engineering.  
2a. Edición.  
Edit. Pergamon Press. New York..
3. Mudget, R.E. 1982.  
Electrical Properties of food in microwave processing  
J. of Food Technology (2), 109-115.
4. Lyn, Y.E. 1991.  
Heating Characteristics of Simulated solid foods in a microwave oven.  
Ph.D. Thesis Pennsylvania.
5. Ohlsson T. y Bengston A. 1996.  
Temperature Distribution of Microwave Heating of Spheres and Cylinder .  
Journal of Microwave Power. Vol. 3 No. 4 (303-310).
6. Anantheswaran, R.C. 1996.  
Effect of electrical Shield on Time-Temperature distribution and flow profiles in water in  
a cylindrical container. Microwave Heating.  
Journal of Microwave Power. Vol. 3 No. 4 (220-230).
7. Rao, M.A. y Rizvi, S.H. 1995.  
Engineering Properties of foods.  
Edit. Dekker.
8. Lewis M.J. 1986.  
Propiedades Físicas de los Alimentos y los Sistemas de Procesado.  
Acribia, Zaragoza, España.
9. Kern, D.Q. 1987.  
Procesos de Transferencia de Calor.  
C.E.C.S.A. México
10. Von Hippel, A.R. 1984.  
Dielectric and Waves  
M.I.T. Press, Cambridge Mass.
11. Von Hippel, A.R. 1984.  
Dielectric Materials and Applications.  
M.I.T. Press, Cambridge Mass.
12. Young V.G. 1970.  
Las Microondas.  
U.R.M.O., España.
13. Francis S.- Elena C. 1991.  
Métodos Numéricos.  
Mc. Graw Hill 2a. Edición.
14. Ronald Wagnes. 1990  
Campo electromagnético.  
Limusa, Noriega, México, D.F.

5. Zienckiewicz, O.C. - Taylor, R.L. 1988.  
El Método de los Elementos Finitos.  
Vol. 1 y 2 Mc. Graw Hill, Zaragoza, España.
6. Bird, R.B. 1992  
Fenómenos de Transporte.  
Alhambra, Barcelona, España.
7. Sánchez A. 1985.  
Principios Básicos del Calentamiento por Microondas.  
Tesis, FES-C, UNAM.
8. Reyes, C. - Solano, P. 1995.  
Cálculo de Tiempos de Residencia para procesos de Pasteurización  
por Microondas de Productos Lácteos.  
Tesis, FES-C, UNAM.
9. Valderrama, C. 1996.  
Microondas aplicadas a los alimentos  
Tesis, FES-C, UNAM.
10. Ayappa, K.G. - Davis H.T. 1991.  
Analysis of Microwave Heating of Materials with temperature dependent properties.  
A.I.C.H.E. J. Vol.37, No.3.
11. Burnett, D. 1988.  
Finite Element Analysis from Concepts to Application.  
Addison, Wesley Massachusetts
12. Akin, C. 1987.  
Applied Numerical Methods with Personal Computers.  
Mc. Graw Hill. Singapore.
13. Decareau, R. 1987.  
Microwave Food Processing and Engineering  
Ellis Horwood Ltd. Chichester.
14. Kotake, S. 1992.  
Numerical Simulation of Heat Transfer and Fluid Flow on a Personal Computer.  
John Wiley and Sons, New York.
15. Pangrle, B.J. - Ayappa, K.G. 1991.  
Microwave Thawing of Cylinders.  
A.I.C.H.E. J. Vol. 37, No. 12(1790-1798)
16. Jia - Jolly. 1992.  
Effect of Electromagnetic Field In a microwave oven.  
Journal of Microwave Power and electromagnetic energy  
Vol. 27, No.1 (15-22).
17. Fennema, O.W. 1994.  
Propiedades fisicoquímicas de los alimentos.  
Dekker, N. York.
18. Spiegel, M.R.  
Estadística.  
2ª. Edición, Edit. Schaumm, México, 1991.
19. Howard A.  
Introducción al álgebra lineal.  
Edit. Limusa Noriega. México, D.F. 1990.



## **ANEXOS**

## ANEXO I "ESTADISTICOS"

### Valores de la tendencia central

Una vez que los datos han sido reunidos y tabulados, comienza el análisis con el objeto de calcular un número único, que represente o resuma todos los datos. Dado que por lo general la frecuencia de los intervalos centrales es mayor que el resto, este número se suele denominar valor o medida de la *tendencia central*.

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  los datos de un estudio estadístico. El valor utilizado más a menudo es la *media aritmética* o *promedio aritmético* que se escribe  $\bar{x}$ , y que es igual a la suma de todos los valores dividida por  $n$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

El símbolo  $S$ , o *sumatorio*, denota la suma de todos los datos. Si las  $x$  se agrupan en  $k$  intervalos, con puntos medios  $m_1, m_2, \dots, m_k$  y frecuencias  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , la media aritmética viene dada por

$$\frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$$

donde  $i = 1, 2, \dots, k$

La *mediana* y la *moda* son otros dos valores de la tendencia central. Si las  $x$  se ordenan según sus valores numéricos, si  $n$  es impar la mediana es la  $x$  que ocupa la posición central y si  $n$  es par la mediana es la media o promedio de las dos  $x$  centrales. La *moda* es la  $x$  que aparece con mayor frecuencia. Si dos o más  $x$  aparecen con igual máxima frecuencia, se dice que el conjunto de las  $x$  no tiene moda, o es *bimodal*, siendo la moda las dos  $x$  que aparecen con más frecuencia, o es *trimodal*, con modas las tres  $x$  más frecuentes.

### Medidas de la dispersión

Normalmente la estadística también se ocupa de la *dispersión* de la distribución, es decir, si los datos aparecen sobre todo alrededor de la media o si están distribuidos por todo el rango. Una medida de la dispersión es la diferencia entre dos *percentiles*, por lo general entre el 25 y el 75. El percentil  $p$  es un número tal que un  $p$  por ciento de los datos son menores o iguales que  $p$ . En particular, los percentiles 25 y 75 se denominan *cuartiles* inferior y superior respectivamente. La *desviación típica* es otra medida de la dispersión, pero más útil que los percentiles, pues está definida en términos aritméticos como se explica a continuación. La *desviación* de un elemento del conjunto es su diferencia con respecto a la media; por ejemplo, en la sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la desviación de  $x_1$  es  $x_1 - \bar{x}$ , y el cuadrado de la desviación es  $(x_1 - \bar{x})^2$ .

La *varianza* es la media del cuadrado de las desviaciones. Por último, la desviación típica, representada por la letra griega sigma ( $s$ ), es la raíz cuadrada de la varianza, y se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

Si la desviación típica es pequeña, los datos están agrupados cerca de la media; si es grande, están muy dispersos. (Spiegel, 1991).

## ANEXO II. "ELIMINACIÓN GAUSSIANA".

Es un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales; se basa en la idea de reducir la matriz aumentada a una forma que sea lo suficientemente simple como para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Se localiza la columna (línea vertical) que no conste completamente de ceros y que esté más a la izquierda.

$$\begin{bmatrix} *0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ *2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ *2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(\*)Columna más a la izquierda que no consta completamente de ceros.

Paso 2. Se intercambia el renglón superior con otro renglón, si es necesario, para llevar un elemento diferente de cero a la parte superior de la columna que se encontró en el paso 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron el primero y segundo renglones de la matriz ejemplo.

Paso 3. Si el elemento que está ahora en la parte superior de la columna encontrada en el paso 1 es  $a$  se multiplica el primer renglón por  $1/a$  para introducir un 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

El primer renglón de la matriz anterior se multiplicó por  $1/2$ .

Paso 4. Se suman múltiplos apropiados del renglón superior a los renglones de abajo, de modo que todos los elementos debajo de 1 principal se conviertan en ceros.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-2$  veces el primer renglón de la matriz anterior al tercer renglón.

Paso 5. Se cubre ahora el renglón superior de la matriz y se empieza nuevamente con el paso 1 aplicando la submatriz que queda. Se continúa de esta manera hasta que la matriz completa quede en la forma escalonada en los renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & * -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & * -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & * 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Columna más a la izquierda que no consta de ceros en la submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el primer renglón de la submatriz por  $\frac{1}{2}$ , para introducir un 1 en la diagonal principal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-5$  veces el primer renglón al segundo de ella misma para introducir un cero debajo del 1 principal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se cubrió el renglón superior de la submatriz y se regresó una vez más al paso 1.  
\* Columna más a la izquierda que no consta completamente de ceros en la nueva submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el primer (y único) renglón de la nueva submatriz por 2 para introducir un 1 principal.

La matriz completa está ahora en la forma escalonada en los renglones. A fin de encontrar la forma escalonada en los renglones reducida se necesitan los siguientes pasos adicionales:

Paso 6. Empezando con el último renglón diferente de cero y yendo hacia arriba, se suman múltiplos apropiados de cada renglón a los de arriba, para introducir ceros arriba de los 1 principales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $7/2$  veces el tercer renglón de la matriz anterior al segundo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó  $-6$  veces el tercer renglón al primero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sumó 5 veces el segundo renglón al primero.

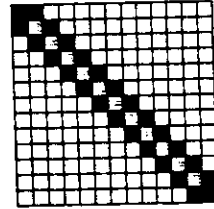
La última matriz está en la forma escalonada en los renglones reducida.

# IMPLEMENTACIÓN DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA EN LA PROGRAMACIÓN

REM CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ GLOBAL DE COEFICIENTES

```
FOR R = 1 TO N - 1
  IF R = 1 THEN
    KG(R, R) = K(1, 1)
    KG(R, R + 1) = K(1, 2)
    KG(R + 1, R) = K(2, 1)
    KG(R + 1, R + 1) = K(2, 2) + K(1, 1)
  ELSE
    KG(R, R + 1) = K(1, 2)
    KG(R + 1, R) = K(2, 1)
    KG(R + 1, R + 1) = K(2, 2) + K(1, 1)
  END IF
NEXT R
KG(N, N) = K(1, 1)
'PRINT "KG"; N; N; "="; KG(N, N)
```

[KG] =



REM GLOBALIZACIÓN DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES

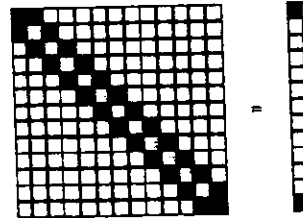
```
'PRINT "*VECTOR GLOBAL DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES*"
FOR K = 1 TO N
  IF K = 1 THEN
    FG(K) = F(K, 1)
  ELSE
    FG(K) = F(K - 1, 2) + F(K, 1)
  END IF
NEXT K
FOR i = 1 TO N: PRINT FG(i): NEXT
```



```
'DO
'LOOP WHILE INKEYS = ""
```

REM INTRODUCCIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA:

```
KG(1, 2) = 0: KG(2, 1) = 0
KG(N - 1, N) = 0: KG(N, N - 1) = 0:
FG(1) = 0: FG(N) = 0
REM *****
'PRINT "*SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER:*"
DIM A1(N, N + 1)
FOR i = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    A1(i, J) = KG(i, J)
    'PRINT A1(i, J); " ";
  NEXT J
  REM TÉRMINO INDEPENDIENTE
  A1(i, N + 1) = FG(i)
  'PRINT "="; A1(i, N + 1)
NEXT i
'DO
'LOOP WHILE INKEYS = ""
```



### ANEXO III "DESCOMPOSICION LU".

El método de descomposición LU (también llamado reducción Crout o Cholesky por sus descubridores) habitualmente se utiliza en los programas de computadora. En la matriz de coeficientes A se transforma al producto de dos matrices L y U, en donde L es una triangular inferior y u es una matriz triangular superior con solo 1 en cada elemento de su diagonal principal.

Cualquier matriz se puede escribir como un producto de matrices triangulares superiores e inferiores, en una infinidad de maneras. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

A                      L1                      U1

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

L2                      U2

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

L3                      U3

Si el conjunto entero de LU cuyo producto es igual a la matriz A, se escoge el par en el cual U sólo tenga unos en su diagonal, y como es el caso en el primer par anterior. Se obtienen las reglas para tal descomposición LU a partir de la relación que dice que LU = A. En el caso de una matriz de 4 X 4.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$



Multiplicando las filas de L por la primera columna de U, se obtiene  $l_{11} = a_{11}$ ,  $l_{21} = a_{21}$ ,  $l_{31} = a_{31}$ ,  $l_{41} = a_{41}$ ; la primera columna de L es la misma que la primera de A.

Ahora se multiplica la primera fila de L por las columnas de U:

$$l_{11} u_{12} = a_{12}, \quad l_{11} u_{13} = a_{13}, \quad l_{11} u_{14} = a_{14} \quad (\text{A-4})$$

De lo cual

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}, \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} \quad (\text{A-5})$$

Así queda determinada la primera fila de U.

En este método se alterna entre obtener una columna de L y una fila de U. De manera que a continuación se obtienen las ecuaciones de la segunda columna de L multiplicando las filas de L por la segunda columna de U:

$$\begin{aligned} l_{21} u_{12} + l_{22} &= a_{22} \\ l_{31} u_{12} + l_{32} &= a_{32} \\ l_{41} u_{12} + l_{42} &= a_{42} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

lo cual de

$$\begin{aligned} l_{22} &= a_{22} - l_{21} u_{12} \\ l_{32} &= a_{32} - l_{31} u_{12} \\ l_{42} &= a_{42} - l_{41} u_{12} \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

procediendo de la misma forma, las ecuaciones necesarias son

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21} u_{13}}{l_{22}}, \quad u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21} u_{14}}{l_{22}} \quad (\text{A-9})$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23}, \quad l_{43} = a_{43} - l_{41} u_{13} - l_{42} u_{23} \quad (\text{A-10})$$

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31} u_{14} - l_{32} u_{24}}{l_{33}} \quad (\text{A-11})$$

$$l_{44} = a_{44} - l_{41} u_{14} - l_{42} u_{24} - l_{43} u_{34} \quad (\text{A-12})$$

La formula general para obtener los elementos de L y U correspondientes a la matriz de coeficientes. Para n ecuaciones simultaneas se puede escribir como:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j \leq i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (A-13)$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ij}}, \quad i < j, \quad j=2,3,\dots,n \quad (A-14)$$

Para j=1, la regla para l de reduce a:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad (A-15)$$

Para i=1, la regla para u se reduce a:

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{1j}} \quad (A-16)$$

La razón de que este método sea tan popular en los programas, es que se economiza el espacio de almacenamiento. No hay necesidad de almacenar los 0 ya sea en L o U, y los i de la diagonal de U se pueden omitir (Ya que estos valores siempre son los mismos y siempre son conocidos, resulta redundante registrarlos). Entonces se pueden almacenar los elementos esenciales de U en donde los 0 aparecen en el arreglo L. El examen de las ecuaciones (A-2) hasta ( muestra que después de que se use cualquier elemento de A, nunca aparecerá de nuevo en las ecuaciones. Por tanto, su lugar en el arreglo original n x n de A, puede ser utilizado para almacenar un elemento ya sea de L o U. En otras palabras, el arreglo A se transforma por las ecuaciones anteriores y se hace:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \quad (A-17)$$

Debido a que se pueden considerar las matrices L y U en un solo arreglo y almacenar sus elementos en el espacio de A, este método con frecuencia es llamado un esquema compacto.

Ejemplo: Considere la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-18})$$

Aplicando las ecuaciones para las l y las u, se obtiene:

$$l_{11} = 3 \quad l_{21} = 1 \quad l_{31} = 2 \quad u_{12} = -1/3 \quad u_{13} = 2/3 \quad (\text{A-19})$$

$$l_{22} = 2 - (1)(-1/3) = 7/3 \quad l_{32} = -2 - (2)(-1/3) = -4/3 \quad (\text{A-20})$$

$$u_{23} = \frac{3 - (1)(2/3)}{7/3} = 1 \quad l_{33} = -1 - (2)(2/3) - (-4/3)(1) = -1 \quad (\text{A-21})$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-22})$$

Si las cantidades están escritas en la forma compacta conforme se calculan se tiene:

$$LU = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 7/3 & 1 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (2) \\ \leftarrow (4) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (1) & (3) & (5) \end{matrix} \quad (\text{A-23})$$

Los números dentro del círculo muestran el orden en el cual se obtienen las columnas y filas de la nueva matriz.

A continuación se da un algoritmo para la descomposición LU. Este algoritmo no calcula las matrices L y U en su lugar, sino que las establece como matrices separadas o independientes.

PROGRAMACION INCLUIDA EN LOS PROGRAMAS PRESENTADOS PARA  
RESOLVER ECUACIONES NO LINEALES POR MEDIO DEL METODO DE  
DESCOMPOSICIÓN L.U.

200 'DESCOMPOSICIÓN LU

```

FOR I = 1 TO N - 2
  L(I, 1) = C(I, 1)
NEXT I
FOR J = 1 TO N - 2
  U(1, J) = C(1, J) / L(1, 1)
NEXT J
FOR J = 2 TO N - 2
  FOR I = J TO N - 2
    SUMAC1 = 0
    FOR K = 1 TO J - 1
      SUMAC1 = SUMAC1 + L(I, K) * U(K, J)
    NEXT K
    L(I, J) = C(I, J) - SUMAC1
  NEXT I
  U(J, J) = 1
  FOR I = J + 1 TO N - 2
    SUMAC2 = 0
    FOR K = 1 TO J - 1
      SUMAC2 = SUMAC2 + L(J, K) * U(K, I)
    NEXT K
    U(J, I) = (C(J, I) - SUMAC2) / L(J, J)
  NEXT I
NEXT J
'PRINT "MATRIZ L"
FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    PRINT L(I, J),
  NEXT J
  PRINT
NEXT I
'PRINT
'PRINT "MATRIZ U"
FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    PRINT U(I, J),
  NEXT J
  PRINT
NEXT I
C1(1) = D(1) / L(1, 1)
FOR I = 2 TO N - 2
  SUM3 = 0
  FOR K = 1 TO I - 1

```

```

        SUM3 = SUM3 + L(I, K) * C1(K)
    NEXT K
    C1(I) = (D(I) - SUM3) / L(I, I)
NEXT I
COLOR 14
'PRINT "D PRIMA:"
FOR I = 1 TO N - 2
'    PRINT C1(I),
NEXT I

X(N) = C1(N)
FOR I = N - 1 TO 1 STEP -1
    SUM4 = 0
    FOR K = I + 1 TO N - 2
        SUM4 = SUM4 + U(I, K) * X(K)
    COLOR 4
    NEXT K
    X(I) = C1(I) - SUM4
NEXT I

PRINT
COLOR 3
'PRINT "X="
FOR I = 1 TO N - 2
'    PRINT X(I),
NEXT I

FOR I = 2 TO N - 1
    T(I) = X(I - 1)
NEXT I
T(1) = TIZQ
T(N) = TDER
'X(1) = T(1): X(N) = T(N)
COLOR 4
'FOR I = 1 TO N: PRINT T(I), : NEXT I
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOSUB 2000
RETURN
2000
SCREEN 12
FOR I = 1 TO N
    X1(I) = I
    Y(I) = T(I)
NEXT I
PASO = PASO + 1
IF PASO = 1 THEN 2010 ELSE 2020

```

## ANEXO IV "PROCEDIMIENTO DE GRAFICACIÓN"

Los valores de temperatura calculados por las subrutinas de Elemento Finito se grafican mediante la ejecución de una subrutina incluida dentro del listado del programa y consta de los siguientes pasos:

### PASO 1.

Conversión de la temperatura a coordenada de graficación "y".

### PASO 2.

Conversión de la temperatura a coordenada de graficación "x".

### PASO 3.

Determinación de los valores máximos y mínimos de la temperatura.

### PASO 4.

Especificación de los parámetros de graficación.

-Intervalo de graficación en "x"; desde una "x" mínima =1, hasta una "x" máxima = número total de nodos.

-Intervalo de graficación en "y"; desde una temperatura mínima =1, hasta una temperatura máxima (más un pequeño margen en ambos casos).

-Escala de graficación en "x" (comúnmente de 1 en 1).

-Escala de graficación en "y" (dependiendo de las necesidades del usuario).

-Posición del eje de las abscisas y de las ordenadas.

### PASO 5.

Normalización de las variables a graficar para que todos los puntos entren dentro del campo seleccionado en la pantalla y además a que el origen de sistema de coordenadas en la pantalla que manejan los lenguajes de cómputo se encuentra ubicado en el extremo superior izquierdo.

### PASO 6.

Mediante un ciclo FOR-NEXT se ubican los valores (coordenada nodal-temperatura) utilizando la instrucción PSET de la biblioteca de funciones de Qbasic.

### PASO 7.

Mediante un ciclo iterativo se unen parejas de puntos contiguos utilizando la instrucción LINE de Qbasic.

\*\*\*\*\* GRAFICADOR BIDIMENSIONAL \*\*\*\*\*

```
a = 4: b = 636: c = 4: d = 436
COLMARC = 4
LINE (a, c)-(b, d), 3, BF
LINE (640, c)-(1, 1), COLMARC, BF
LINE (1, 1)-(a, 440), COLMARC, BF
LINE (1, 440)-(640, d), COLMARC, BF
LINE (b, 1)-(640, 440), COLMARC, BF
a = 20: b = 620: c = 20: d = 420
LINE (a, c)-(b, d), 15, BF
```

\*\*\*\*\* DETERMINA LOS VALORES DE LA FUNCIÓN (Y) \*\*\*\*\*

```
REM "GRAFICADOR"
xmin = 1: xmax = (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
COLOR 14: 'PRINT "xmax="; xmax, "xmin="; xmin
DELTAX = (xmax - xmin) / (NNODOS * 2 - 1) ^ 2 - 1
x(0) = xmin - DELTAX
REM VALORES DE LA FUNCION
FOR I = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
y(I) = Y1(I)
x(I) = I
COLOR 3
'PRINT "x="; x(I), "y="; y(I)
NEXT I

REM VALORES EXTREMOS DE LA FUNCION
YMIN = y(1): YMAX = y(1)
FOR I = 2 TO (2 * NNODOS + 1) ^ 2 - 1
IF YMIN > y(I) THEN YMIN = y(I)
IF YMAX < y(I) THEN YMAX = y(I)
NEXT I
PRINT "TMIN="; YMIN, "TMAX="; YMAX
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""
xmingraf = 0: xmaxgraf = xmax: ymingraf = YMIN: ymaxgraf = YMAX
scalex = 2 * (neb + 1) - 1: scaley = 1
'SCREEN 12

1100
izq = 40: der = 400: sup = 20: inf = 300
'LINE (0, 0)-(639, 440), 15, BF
COLOR 9
LINE (izq, sup)-(izq, inf)
LINE (izq, sup)-(der, sup)
LINE (izq, inf)-(der, inf)
```

```

LINE (der, sup)-(der, inf)
PASX = xmaxgraf + ABS(xmingraf)
PASY = ymaxgraf + ABS(ymingraf)
EJEY = izq + (der - izq) / PASX * ABS(xmingraf)
EJEX = sup + (inf - sup) / PASY * ymaxgraf
COLOR 4
LINE (EJEY, sup)-(EJEY, inf)
LINE (izq, EJEX)-(der, EJEX)
REM normalizacion de escala
NY = INT(PASY / scaley)
NX = INT(PASX / scalex)
'PRINT "NX="; NX, "NY="; NY
DIM DIVX(NX), DIVY(NY)
DIVX(1) = izq: DIVY(1) = inf
FOR I = 2 TO NX
DIVX(I) = DIVX(I - 1) + scalex * (der - izq) / PASX
COLOR 7
LINE (DIVX(I), EJEX - 2)-(DIVX(I), EJEX + 2)
LINE (DIVX(I), sup)-(DIVX(I), sup + 2)
LINE (DIVX(I), inf - 2)-(DIVX(I), inf)
NEXT I
FOR j = 2 TO NY
DIVY(j) = DIVY(j - 1) - scaley * (inf - sup) / PASY
LINE (EJEY - 3, DIVY(j))-(EJEY + 3, DIVY(j))
LINE (izq, DIVY(j))-(izq + 3, DIVY(j))
LINE (der - 3, DIVY(j))-(der, DIVY(j))
NEXT j

1200
FOR I = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
xn(I) = x(I) * (der - izq) / PASX + EJEY
yn(I) = -Y1(I) * (inf - sup) / PASY + EJEX
COLOR 3
PSET (xn(I) - 1, yn(I) + 1)
PSET (xn(I) - 1, yn(I))
PSET (xn(I) - 1, yn(I) - 1)
PSET (xn(I), yn(I) + 1)
PSET (xn(I), yn(I))
PSET (xn(I), yn(I) - 1)
PSET (xn(I) + 1, yn(I) + 1)
PSET (xn(I) + 1, yn(I))
PSET (xn(I) + 1, yn(I) - 1)
NEXT I
FOR j = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2 - 1
COLOR 4
LINE (xn(j), yn(j))-(xn(j + 1), yn(j + 1))
NEXT j

```



\*\*\*\*\* GRAFICADOR TRIDIMENSIONAL \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

a = 4: b = 636: c = 4: d = 436  
 COLMARC = 4  
 LINE (a, c)-(b, d), 3, BF  
 LINE (640, c)-(1, 1), COLMARC, BF  
 LINE (1, 1)-(a, 440), COLMARC, BF  
 LINE (1, 440)-(640, d), COLMARC, BF  
 LINE (b, 1)-(640, 440), COLMARC, BF  
 a = 20: b = 420: c = 20: d = 280  
 LINE (a, c)-(b, d + 30), 15, BF

\*\*\*\*\* DETERMINA LOS VALORES DE LA FUNCIÓN (Y) \*\*\*\*\*

xmin = 1: xmax = NNODOS \* 2 - 1  
 ZMIN = 1: ZMAX = NNODOS \* 2 - 1  
 NX = xmax: nz = ZMAX  
 DIM Z(nz), yTRI(NX, nz), xgraf(NX), ygraf(NX, nz), limizq(nz), limder(nz), liminf(nz),  
 limsup(nz)  
 DELTAX = (xmax - xmin) / NX: DELTAZ = (ZMAX - ZMIN) / nz  
 PASOG = 0  
 FOR I = 1 TO NX  
 x(I) = xmin + (I - 1) \* DELTAX  
 FOR j = 1 TO nz  
 Z(j) = ZMIN + (j - 1) \* DELTAZ  
 yTRI(I, j) = T(I, j)  
 PASOG = PASOG + 1  
 Y1(PASOG) = T(I, j)  
 PRINT "X("; I; ")="; X(I), "Z("; J; ")="; Z(J); "Y("; I; J; ")="; Y(I, J)  
 NEXT j  
 NEXT I

\*\*\* DETERMINACIÓN DE LOS VALORES EXTREMOS DE LA FUNCIÓN \*\*\*

YMIN = yTRI(1, 1): YMAX = yTRI(1, 1)  
 FOR I = 1 TO NX  
 FOR j = 1 TO nz  
 IF yTRI(I, j) < YMIN THEN YMIN = yTRI(I, j)  
 IF yTRI(I, j) > YMAX THEN YMAX = yTRI(I, j)  
 NEXT j  
 NEXT I  
 e = 200: f = 200: colcuad = 7

FOR j = 1 TO nz  
 limizq(j) = e - (j - 1) \* e / nz  
 limder(j) = limizq(j) + (b - e)  
 limsup(j) = c + (j - 1) \* (d - f) / nz  
 liminf(j) = limsup(j) + f

```

LINE (limizq(j) + 20, limsup(j))-(limder(j) - 10, limsup(j)), colcuad
LINE -(limder(j) - 10, liminf(j)), colcuad
IF j = 1 THEN color1 = 9 ELSE color1 = colcuad
LINE -(limizq(j) + 20, liminf(j)), color1
LINE -(limizq(j) + 20, limsup(j)), color1
NEXT j

xmingraf = xmin * e / (xmax - xmin)
ymingraf = YMIN * f / (YMAX - YMIN)

FOR j = 1 TO nz
  FOR I = 1 TO NX
    xgraf(I) = x(I) * e / (xmax - xmin) + limizq(j) - xmingraf + 20
    ygraf(I, j) = -yTRI(I, j) * f / (YMAX - YMIN) + liminf(j) + ymingraf
    PSET (xgraf(I), ygraf(I, j)), j
    IF I > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-(xgraf(I - 1), ygraf(I - 1, j)), INT(j / 10 + 1)
    IF j > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-(xgraf(I) + e / nz, ygraf(I, j - 1)), INT(I / 10) +
    I
  NEXT I
NEXT j

DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
CLS

SCREEN 12

```

**ANEXO VII "LISTA DE GRÁFICOS, FIGURAS Y TABLAS".**

CAPITULO	TABLAS	FIGURAS::	GRAFICOS.
<b>CAPITULO 1.</b>  GENERALIDADES.	1.1.Ecuaciones basicas de Electromagnetismo.	1.1.Distribución de la energia incidente sobre la superficie de un cuerpo	
	1.2.Diferentes regiones en el espectro electromagnético.	1.2.Espectro electromagnético 1.3.Componentes principales de un horno de microondas	
	1.3.Aplicaciones de microondas en el procesamiento de alimentos.	1.4. Representación del campo eléctrico (E) y el campo magnético (H) de una onda senosoidal. 1.5.Cavidad rectangular sometida a radiación por un guía de ondas. 1.6.Características de material dieléctrico empleado. 1.7-1.10.Distribución de potencia del espectro electromagnético. Dentro de una cavidad homogénea. 1.11. Cavidad con carga no homogénea. 1.12-1.14. Distribución de potencia del espectro electromagnético dentro de una cavidad no homogénea.	
<b>CAPITULO 2</b>  MÉTODO DE ELEMENTO FINITO.	2.1.Comparación de resultados entre sol. numérica y analítica. para el ejemplo de mínimos cuadrados.	2.1.Ensamblaje de ecuaciones.	2.1Gráfico del ejemplo de mínimos cuadrados.
	2.2. Resultados de sol. Analítica y numérica para el ejemplo de Galerkin.	2.2. Barra de longitud L, con suministro de calor en la primera mitad.	2.2.Gráfico del ejemplo de Galerkin.
	2.3.Resultados numéricos para una barra con generación interna de calor, utilizando el método de Galerkin.	2.3. Interpolación lineal.	2.3. Gráfico del ejemplo de Galerkin, en una barra con generación interna de calor.
	2.4. Aplicaciones del Método de Elemento Finito en el procesamiento de ecuaciones.		

<b><u>CAPITULO 3.</u></b> TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO ESTACIONARIO BIDIMENSIONAL.	3.1. Topología para 1/8 de rectángulo.	3.1. Región de conducción anisotrópica.	3.1. Gráfico 2-D de T de C. A través de 1/8 de rectángulo en estado estacionario.
		3.2. Numeración de nodos y elementos para 1/8 de rectángulo.	3.2. Gráfico 3-D de T de C. a través de 1/8 de rectángulo en estado estacionario.
<b><u>CAPITULO 4</u></b> GEOMETRIA AXISIMETRICA EN ESTADO ESTACIONARIO.		4.1. Comparación entre sol. Analítica y numérica del ejemplo de geometría axisimétrica.	4.1. Gráfico del programa para T de C. 1-D en geometría axisimétrica. 4.2. Tránsito de T a través de un cilindro hueco en estado estacionario.
<b><u>CAPITULO 5.</u></b> ANALISIS TRANSITORIO.	5.1. Matrices de sistema para transitorios lineales.	5.1. Método de Integraciones típicas. 5.2. Matrices diagonales y consistentes para un triángulo cuadrático. 5.3. Problema típico transitorio lineal.	Predicción de la evolución del perfil de temperaturas por el MEF y comparación de la solución analítica. Obtenida por series de Fourier para T. de C. 1-D transito en coordenadas cartesianas.
<b><u>CAPITULO 6.</u></b> RADIACION EN GEOMETRIAS AXISIMETRICAS Y ESTADO TRANSITORIO.			6.1. Gráfico en geometrías axisimétricas con radiación.
			6.2. Gráfico en estado transitorio con geometrías axisimétricas.

## ANEXO VIII "NOTACIÓN DE SIMBOLOS".

- $Q$  = flujo de calor en la dirección  $x$  ( $MT^{-3}$ )  
 $A$  = área perpendicular a la dirección del flujo de calor ( $L^2$ );  
 $T$  = temperatura ( $^{\circ}C$ )  
 $x$  = distancia ( $L$ ),  
 $k$  = conductividad térmica.  
 $Q/A$  = se denomina flujo específico de calor, densidad de flujo o simplemente flux.  
 $dT/dx$  = rapidez del cambio de temperatura con la distancia  $x$  (o sea el gradiente de temperaturas).  
 $q$  = densidad de flujo de calor por conducción.  
 $E_{b,\lambda}$  = Potencia emisiva por unidad de volumen.  
 $c$  = velocidad de la luz ( $3.00 \times 10^8$  m/s).  
 $h$  = constante de Planck ( $6.63 \times 10^{-34}$  J s).  
 $K_B$  = constante de Boltzman ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K).  
 $T_a$  = Temperatura absoluta ( $^{\circ}K$ ).  
 $\lambda$  = longitud de onda ( $M$ ).  
 $\alpha$  = difusividad térmica ( $K / \rho Cp$ ).  
 $h_T$  = coeficiente de transferencia de calor.  
 $A$  = área de interfase donde el calor está siendo transferido.  
 $\Delta T$  = fuerza impulsora para la transferencia de calor.  
 $T_m$  = temperatura promedio del fluido.  
 $T_s$  = temperatura interfacial.  
 $E_T$  = energía radiante que se emite desde la superficie de un cuerpo.  
 $G$  = energía incidente o entrante en una superficie.  
 $\alpha_a$  = fracción de energía radiante absorbida por la superficie.  
 $\rho_R$  = fracción de energía reflejada por la superficie.  
 $\tau_t$  = fracción de energía transmitida por la superficie.  
 $Im(\epsilon^*)$  = representa la pérdida de energía por disipación.  
 $\sigma$  = conductividad eléctrica.  
 $\mu$  = permeabilidad magnética  
 $\omega$  = frecuencia angular (radianes).  
 $K'$  = constante dieléctrica relativa.  
 $K''$  = factor dieléctrico de pérdida.  
 $\epsilon_0$  = permitividad del vacío. ( $8.854 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup> (N m<sup>2</sup>)).  
 $\mu_0$  = Permeabilidad del vacío =  $4(\pi \times 10^{-7})$  Tm/A  
 $\lambda_0$  = longitud de onda en el espacio libre.  
 $c$  = velocidad de la luz.  
 $f$  = frecuencia (ciclos / s).  
 $K^*$  = permitividad compleja relativa.  
 $K'$  = constante dieléctrica.  
 $K''$  = factor dieléctrico de pérdida.

$K_m^*$  = Permitividad compleja relativa para la mezcla.  
 $K_c'$  = Permitividad relativa compleja para la fase continua.  
 $K_s'$  = Permitividad relativa compleja para la fase suspendida.  
 $X_{vc}$  = Fracción volumen para la fase continua.  
 $X_{vs}$  = Fracción volumen para la fase suspendida.  
 $c$  = concentración de sales disueltas.  
 $K_1'$  = constante dieléctrica relativa para la solución iónica.  
 $K_1''$  = factor dieléctrico de pérdida para la solución iónica.  
 $K_s$  = constante dieléctrica estática.  
 $K_o$  = constante dieléctrica óptica.  
 $P_a$  = potencia absorbida o atenuada por la profundidad.  
 $P_o$  = potencia inicial.  
 $D50$  = Profundidad de media potencia.  
 $\tan \delta$  = tangente de pérdida.  
 $P$  = potencia.  
 $E$  = campo eléctrico.  
 $q_e$  = carga eléctrica de cada uno de los iones.  
 $n$  = número de cargas.  
 $P_D$  = Potencia desarrollada en un volumen de material.  
 $E$  = Intensidad del campo eléctrico.  
 $f$  = Frecuencia (Hz).  
 $P$  = Vector de Poynting, ( $W m^{-2}$ )  
 $H$  = campo magnético.