21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AVPNMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

LOGICA MATEMATICA

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADA EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

HILDA MARTINEZ VEGA

ASESOR: F.M. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

285153

MEXICO,D.F. OCTUBRE 2000

21

ÍNDICE

Introducción

Capítulo I
Conceptos fundamentales de Lógica

Capítulo II
Cálculo proposicional y su sistema de prueba

Capítulo III
Cálculo de predicados y su sistema de prueba

Capítulo IV
Aplicaciones

INTRODUCCIÓN

La lógica es el estudio del razonamiento, en particular si un razonamiento es correcto. La lógica se centra en las relaciones entre los enunciados y no en el contenido de un enunciado en particular.

Tradicionalmente la lógica preservada por matemáticos y filósofos mantuvo un enfoque distinguible por sus puntos de vista, sin embargo, en años recientes la lógica ha cambiado su actividad eminentemente teórica, a ser usada como método de aplicación a diferentes ciencias.

Los métodos lógicos se utlizan en matemáticas para demostrar teoremas, y en computación para demostrar que los programas hacen precisamente lo que deberían hacer.

En el presente trabajo se mencionan los dos enfoques de la lógica: el punto de vista semántico y el sintáctico. El primero se basa en la noción de interpretación que es equivalente a la definición de modelo, y que consiste de un conjunto de fórmulas en donde todas son evaluadas como verdaderas. Por otro lado, la sintaxis concierne al sistema formal que tiene un lenguaje de cálculo de predicados o proposicional. Las fórmulas del lenguaje se obtienen de manera recursiva mediante reglas sintácticas que usan conectivos lógicos y cuantificadores.

Se desarrolla el cálculo de proposiciones y de predicados a partir de lo que es un lenguaje formal. En lógica, las deducciones se llevan a cabo mediante la operación mecánica de los símbolos, obteniendo con ellos nuevas proposiciones que denominamos conclusiones.

En el último capítulo se desarrollan varias aplicaciones de la lógica, no sólo en el área puramente matemática, sino también en otras como teoría de circuitos y computación.

CAPITULO I
CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LÓGICA

1.1 Proposiciones

La Lógica Proposicional trata con sentencias (oraciones), las cuales reciben el nombre de **proposiciones** y son evaluadas de forma excluyente como verdaderas o falsas.

Ejemplos de proposiciones son: "Aristóteles está muerto", "La tierra gira alrededor del sol".

Las proposiciones en lógica se denotan por símbolos como **G, H, P** que son llamadas **Fórmulas Atómicas o Átomo**. Dichas proposiciones pueden ser compuestas usando los conectivos lógicos: ~ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación), $\Leftrightarrow$ (sí y sólo sí), para dar como resultado las denominadas **Fórmulas Bien Formadas (FBF).**

Definición[1].- Una Fórmula Bien Formada (FBF) en lógica de proposiciones se define recursivamente como sigue:

1. Un átomo es una fórmula
2. Si G es una Fórmula, entonces ~G es una fórmula
3. Si G y H son fórmulas, entonces: $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \Rightarrow H)$ y $(G \Leftrightarrow H)$ son fórmulas.
4. Todas las fórmulas se generan aplicando alguna de las reglas anteriores.

Las evaluaciones de Fórmulas Bien Formadas en lógica de proposiciones se basan en valores de verdad, **verdadero** o **falso (V, F).**

---

[1] Chapa Vergara, Sergio; García Fernández Jesús. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.

A continuación se definen los conectivos lógicos:

~ (Negación)

Si G es una proposición, G se puede negar de varias maneras. Por ejemplo, si G es la frase "Las matemáticas son fáciles", entonces la negación de G es la frase "Las matemáticas **no** son fáciles". Si no se desea especificar la frase de la cual se habla, entonces se designa por G y su negación por **~G**. Si G es verdadera (V) entonces ~G es falsa (F). Su tabla de verdad es:

Tabla de Verdad

G	**~G**
V	F
F	V

$\wedge$ (Conjunción)

Si G y H son dos proposiciones se acepta la frase "G y H" como una frase compuesta que se designa por "G $\wedge$ H". El valor de G $\wedge$ H es V si el valor de G y H es V, de otra manera el valor de verdad de G $\wedge$ H es F. Por ejemplo, sij G es la frase "el dos es un número par" y H es la frase "el dos es un número primo", entonces la conjnción de G y H es "El dos es un número par y primo".

Tabla de Verdad

G	**H**	**G $\wedge$ H**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\vee$ **(Disyunción)**

Una proposición del tipo "G o H" se toma siempre como "G o H o ambas". Esto se abrevia escribiendo "G $\vee$ H". El valor de verdad de G $\vee$ H es F si G tiene el valor de verdad de F y H el valor de verdad de F; de otra manera G $\vee$ H tiene el valor de verdad de V. Por ejemplo, si G es la frase "el tres es un número impar" y H es la frase "5/3 es un número racional" entonces, la disyunción de G o H es la frase "el 3 es un número impar o 5/3 es un número racional".

Tabla de Verdad

G	**H**	**G $\vee$ H**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\Rightarrow$ **(Implicación)**

Una proposición G $\Rightarrow$ H es muy común en matemáticas y se lee como "G implica H", "G solamente sí H". Esta proposición G $\Rightarrow$ H solamente es falsa cuando G es verdadera y H es falsa. Por ejemplo, si G es la frase "el 6 es divisible entre 2" y H es "El 6 es un número par", entonces G implicación H es la frase "Si el 6 es divisible entre dos entonces es un número par".

Tabla de Verdad

G	H	$G \Rightarrow H$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La implicación $G \Rightarrow H$ es una abreviación de $(\sim G \vee H)$.

$\Leftrightarrow$ (Doble Implicación o Sí y sólo sí)

Otro tipo de proposición que se presenta con frecuencia es de la forma "G sí y sólo sí H". Intuitivamente esta proposición parece ser la combinación de $(G \Rightarrow H) \wedge (H \Rightarrow G)$. La proposición $G \Leftrightarrow H$ es verdadera cuando G y H tienen el mismo valor de verdad, y falsa de otra manera. Por ejemplo, si G es "el 13 es un número primo" y h es "el 13 es divisible entre 1 y 13 solamente", entonces la doble implicación de G y H es la frase "el 13 es un número primo sí y sólo sí es divisible entre 1 y 13 solamente".

Tabla de Verdad

G	H	$G \Leftrightarrow H$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definición[2]**.-** Dada una fórmula bien formada G, compuesta de $A_1, \ldots, A_n$ átomos, G tiene una interpretación como el valor de asignamiento que le dan $A_1, \ldots A_n$; donde a cada A_i se le asigna el valor verdadero o falso, pero no ambos.

La asignación de valores de verdad (F,V) a las proposiciones, se le llama **dominio de interpretación** de una fórmula G.

Ejemplo:

$$g \Rightarrow h \wedge i$$

g = "f es una función contínua en el intervalo cerrado [a,b]"

h = "f tiene un valor máximo absoluto en el intervalo cerrado [a,b]"

i = "f tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo cerrado [a,b]"

$g \Rightarrow h \wedge i$ = "Si f es una función contínua en el intervalo cerrado [a,b] entonces tiene un valor máximo absoluto y mínimo absoluto en el intervalo cerrado [a,b]."

Esta proposición se conoce como el Teorema del Valor Extremo.

Tabla de Verdad

g	**h**	**i**	**$h \wedge i$**	**$g \Rightarrow h \wedge i$**
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

[2] Chapa; García Fernández. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.

1.2 Consistencia e Inconsistencia

Definición[3]**.-** Decimos que una fórmula es **inconsistente** (o no satisfactible) sí y sólo sí es falsa bajo todas sus interpretaciones.

Una fórmula se dice que es **consistente** (o satisfactible) sí y sólo sí es **no inconsistente.**

Ejemplo:

Considere la siguiente fórmula $(g \Rightarrow h) \wedge (g \wedge \sim h)$

g = "x es una función"

h = "x es una relación"

$(g \Rightarrow h) \wedge (g \wedge \sim h)$ = "Si x es una función entonces es una relación y x es una relación y no es una función"

Tabla de Verdad

g	**h**	$g \Rightarrow h$	$\sim h$	$g \wedge \sim h$	$(g \Rightarrow h) \wedge (g \wedge \sim h)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

[3] Chapa; García Fernández. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.

1.3 Consecuencia y Vínculos

Definición[4].- Dadas las fórmulas $F_1,...,F_n$ y una fórmula G. Se dice que G es una consecuencia lógica de $F_1,...,F_n$, sí y sólo sí dada cualquier interpretación I en la cual $F_1 \wedge,...,\wedge F_n$, es verdadera, G es también verdadera. $F_1,...,F_n$ se llaman axiomas de G.

Teorema.- Dadas la fórmulas $F_1,...,F_n$ y una fórmula G, decimos que G es una consecuencia lógica de $F_1,...,F_n$, sí y sólo sí la fórmula $((F_1\wedge,...,\wedge F_n) \wedge \sim G)$ es inconsistente.

Si G es una consecuencia lógica de la fórmula $F_1,...,F_n$, la fórmula $((F_1\wedge,...,\wedge F_n) \Rightarrow G)$ se llama un teorema y G se denomina la conclusión del teorema.

1.4 Inferencia y Validez, Vinculación y Equivalencia

Definición[5].- Una fórmula G se dice que es verdadera bajo una interpretación sí y sólo sí G es evaluada únicamente con V en la interpretación, de otra forma decimos que G es falsa bajo la interpretación.

En una fórmula con n diferentes átomos se tiene $\mathbf{2^n}$ distintas interpretaciones para la fórmula que pueden ser mostradas en una tabla de verdad determinando que una fórmula es **válida**, (o una tautología) cuando es verdadera bajo todas sus interpretaciones.

[4] Ching-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee, Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving
[5] Chapa; García Fernández. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.

Definición[6]**.-** Una fórmula se dice que es **válida** sí y sólo sí es cierta bajo todas sus interpretaciones. Una fórmula se dice que no cumple con la validez sí y sólo sí es **no válida.**

Ejemplo:

$$((((p \vee q) \vee r) \wedge \sim p) \wedge \sim q) \Rightarrow r$$

p = "Voy a la fiesta"

q = "No estudio"

r = "Repruebo el examen"

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ = "Si voy a la fiesta entonces no estudio y si no estudio entonces repruebo el examen, entonces, si voy a la fiesta entonces repruebo el examen"

p	**q**	**r**	**p⇒q**	**q⇒r**	**(p⇒q) ∧(q⇒ r)**	**p⇒r**	**((p⇒q) ∧(q⇒ r)) ⇒ (p ⇒ r)**
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Definición[7]**.-** Dos fórmulas F y G son equivalentes (F ≡ G) sí y sólo sí los valores de verdad de F son los mismos de G bajo cualquier dominio de interpretación de F y G.

[6] Ching-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee, Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving

Ejemplo:

$$F = p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$G = (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

p = "Oscar estudia MAC"

q = "A Oscar le gustan las matemáticas"

r = "A Oscar le gusta la computación"

F = "Si Oscar estudia MAC entonces le gustan las matemáticas y la computación"

G = "Si Oscar estudia MAC entonces le gustan las matemáticas y si Oscar estudia MAC entonces le gusta la computación"

Tabla de Verdad para F

p	**q**	**R**	**$q \wedge r$**	**$p \Rightarrow (q \wedge r)$**
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

[7] Ching-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee, Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving

Tabla de Verdad para G

p	q	R	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Como vemos F y G tienen los mismos valores, por lo tanto son equivalentes.

1.5 Validez y Forma

Definición[8].- Un **argumento válido** es un argumento en el cual es **imposible** que todas las premisas (proposiciones) sean verdaderas y la conclusión falsa.

Definición[9].- La **forma de un argumento** es el resultado de reemplazar todas las constantes proposicionales en ese argumento, por variables proposicionales, donde la misma constante es reemplazada en el argumento por la misma variable, y diferentes constantes son reemplazadas por diferentes variables.

---

[8] Delong, Howard. A Profile of Mathematical Logic
[9] Delong, Howard. A Profile of Mathematical Logic

Ejemplo :

p = "Una función es par"

q = "Una función es impar"

r = "Una función no es par ni impar"

$(p \vee q) \vee r$	(p ó q) ó r	una función es par o impar o ni par ni impar
$\sim p$	no p	una función no es par
$\sim q$	no q	una función no es impar
$\therefore r$	por lo tanto r	una función no es par ni impar

p	q	r	p∨q	(p∨q)∨r	1ra premisa ~p	2da premisa ~q	Conclusión r
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F

CAPITULO II
CÁLCULO PROPOSICIONAL Y SU SISTEMA DE PRUEBA

2.1 Funciones de Verdad

La ~ (negación) y la ∧ (conjunción) son ejemplos de **Funciones de Verdad**; la primera es una **función unaria** (opera sobre una sola proposición) y la segunda, es una **función binaria.**

Definición[10].- Una **función de verdad** de una o más variables proposicionales tales que sus valores de verdad (V ó F) para cada variable proposicional determina un único valor de verdad para la función.

Hay cuatro posibles funciones unarias y dieciséis posibles funciones binarias. No es necesario considerar funciones terciarias, etc., ya que todas las funciones de verdad de más de 2 variables pueden ser expresadas en términos de funciones de verdad binarias.

El superíndice de la función denota el número de variables proposicionales para la función. El subíndice denota el número de la función.

Funciones de Verdad Unarias

P	**F_1^1 (p)**	**F_2^1(p)**	**F_3^1 (p)**	**F_4^1 (p)**
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Notemos que F_3^1 es la función que conocemos como **~ (negación).**

[10] Delong, Howard. A Profile of Mathematical Logic

Funciones de Verdad Binarias

p	q	$F_1^2(p, q)$	$F_2^2(p, q)$	$F_3^2(p, q)$	$F_4^2(p, q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

$F_5^2(p, q)$	$F_6^2(p, q)$	$F_7^2(p, q)$	$F_8^2(p, q)$	$F_9^2(p, q)$	$F_{10}^2(p, q)$
V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F

$F_{11}^2(p, q)$	$F_{12}^2(p, q)$	$F_{13}^2(p, q)$	$F_{14}^2(p, q)$	$F_{15}^2(p, q)$	$F_{16}^2(p, q)$
F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F

Notemos que F^2_2 es la función que conocemos como disyunción, F^2_5 la implicación, F^2_7 la doble implicación y F^2_8 la conjunción

2.2 Formas Normales Conjuntivas y Disyuntivas

En lógica es necesario transformar una fórmula a otra, especialmente a lo que se denomina como **Formas Normales**. La transformación consiste de un proceso de reemplazo de una fórmula por alguna otra equivalente.

El proceso de transformación es llevado a cabo de acuerdo con algunas leyes o reemplazos de fórmulas de mantienen los valores de verdad en los dominios de interpretación, y que se muestran a continuación:

I. $F \Leftrightarrow G = (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$

II. $F \Rightarrow G = \sim F \vee G$

III. $\sim(\sim F) = F$

Ley Conmutativa

IV. a) $F \vee G = G \vee F$

b) $F \wedge G = G \wedge F$

Ley Asociativa

V. a) $(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$

b) $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$

Ley Distributiva

VI. a) $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

b) $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$

Leyes de DeMorgan

VII. a) $\sim(F \vee G) = \sim F \wedge \sim G$

b) $\sim(F \wedge G) = \sim F \vee \sim G$

Definición[11].- Una literal es un átomo o la negación de un átomo.

Definición[12].- Una fórmula F se dice que está en un **forma normal disyuntiva** sí y sólo sí, F tiene la forma: $F \cong F_1 \vee \ldots \vee F_n$, $n \geq 1$; donde cada $F_1, \ldots, F_n$ es una conjunción de literales.

Ejemplo:

Obtener la forma normal disyuntiva de la fórmula $(P \vee \sim Q) \Rightarrow R$

$$
\begin{aligned}
(P \vee \sim Q) \Rightarrow R &= \sim(P \vee \sim Q) \vee R && \text{por II} \\
&= (\sim P \wedge \sim(\sim Q)) \vee R && \text{por VII. a)} \\
&= (\sim P \wedge Q) \vee R && \text{por III.}
\end{aligned}
$$

Una forma normal disyuntiva de $(P \vee \sim Q) \Rightarrow R$ es **$(\sim P \wedge Q) \vee R$.** Donde $F_1 = \sim P \wedge Q$, es la conjunción de las literales $\sim P$ y Q; y $F_2 = R$. Entonces $F \cong F_1 \vee F_2$, es la disyunción de F_1 y F_2.

Definición[13].- Una fórmula F se dice que está en un **forma normal conjuntiva** sí y sólo sí, F tiene la forma: $F \cong F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, $n \geq 1$; donde cada $F_1, \ldots, F_n$ es una disyunción de literales.

Ejemplo:

Obtener la forma normal conjuntiva de la fórmula $(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow S$.

[11] Chapa; García Fernández. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.
[12] Chapa; García Fernández. Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.
[13] Ching-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee, Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving

$(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow S$

$= (P \wedge (\sim Q \vee R)) \Rightarrow S$	por II.
$= \sim (P \wedge (\sim Q \vee R)) \vee S$	por II.
$= (\sim P \vee \sim(\sim Q \vee R)) \vee S$	por VII. b).
$= (\sim P \vee (\sim(\sim Q) \wedge \sim R)) \vee S$	por VII. a).
$= (\sim P \vee (Q \wedge \sim R)) \vee S$	por III.
$= ((\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim R)) \vee S$	por VI. a).
$= S \vee ((\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim R))$	por IV. a).
$= (S \vee (\sim P \vee Q)) \wedge (S \vee (\sim P \vee \sim R))$	por VI. a).
$= (S \vee \sim P \vee Q) \wedge (S \vee \sim P \vee \sim R)$	por V. a).

Una forma normal conjuntiva de $(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow S$ es $\mathbf{(S \vee \sim P \vee Q) \wedge (S \vee \sim P \vee \sim R)}$. Donde $F_1 = S \vee (\sim P \vee Q)$ es la disyunción de las literales S, ~P y Q; y $F_2 = S \vee (\sim P \vee \sim R)$ es la disyunción de las literales S, ~P y ~R. Entonces $F \cong F_1 \wedge F_2$, es la conjunción de F_1 y F_2.

2.3 Tautologías y Contradicciones

Para entender la noción de "lógicamente verdadero" para el cálculo proposicional, debemos definir lo que es una tautología.

Definición[14] **.-** Una función es una **tautología** sí y sólo sí todos sus valores de verdad en la tabla de verdad son "V" (verdaderos).

Ejemplo:

$$p \vee \sim p$$

14 Andrews, Peter B. An -Introduction to Mathematical Logic and type theory: to truth through proof.

Tabla de Verdad

p	**~p**	**p ∨ ~p**
V	F	V
F	V	V

Definición[15].- A es una **contradicción** sí y sólo sí es falsa bajo todas sus interpretaciones.

Una proposición p que es a la vez verdadera y falsa, se dice que es contradictoria.

Ejemplo:

$p \wedge \sim p$

Tabla de Verdad

p	**~p**	**p ∧ ~p**
V	F	F
F	V	F

2.4 Implicaciones y Equivalencias

La proposición "P ... implica Q" es llamada **Condicional**. La proposición P es llamada **antecedente,** y Q es llamada **consecuente.** La condicional es **equivalente** a negar el antecedente, que es verdadero; y negar el consecuente, que es falso. Es decir, $p \Rightarrow q$ se puede escribir como $\sim(p \wedge \sim q)$ ó $(\sim p \vee q)$.

$p \Rightarrow q$

Tabla de Verdad

p	**q**	**p⇒q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\sim(p \wedge \sim q)$

Tabla de Verdad

p	**q**	**~q**	**p∧~q**	**~(p∧~q)**
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

$\sim p \vee q$

Tabla de Verdad

P	**Q**	**~p**	**~p∨q**
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

[15] Andrews, Peter B. An -Introduction to Mathematical Logic and type theory: to truth through proof

Como vemos los valores en las tres tablas de verdad son iguales por lo tanto $P \Rightarrow Q$ (implicación) es equivalente a $\sim(p \wedge \sim q)$ y $\sim p \vee q$.

A $P \Leftrightarrow Q$ "p sí y sólo sí q" se le llama también **equivalencia lógica o bicondicional.** $P \Leftrightarrow Q$ es **equivalente** a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

$P \Leftrightarrow Q$

Tabla de Verdad

p	**Q**	**p⇔q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Tabla de Verdad

p	**q**	**p⇒q**	**q⇒p**	**(p⇒q)∧(q ⇒p)**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Con estas tablas de verdad nos damos cuenta de que $P \Leftrightarrow Q$ si es equivalente a $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

2.5 Sistema Formal de Cálculo Proposicional

Hasta ahora hemos desarrollado informalmente el cálculo proposicional. Ahora presentamos el sistema axiomático formal para esta teoría. Usaremos la letra ***P*** – sugiriendo el cálculo proposicional – para el sistema.

Bases Primitivas para ***P***

1) Lista de símbolos

a) Dos símbolos lógicos : $\sim$, $\Rightarrow$

b) Dos paréntesis: (,)

c) Una lista infinita de constantes proposicionales: $A, B, C, A_1, B_1, \ldots$

d) Una lista infinita de variables proposicionales: $p, q, r, p_1, \ldots$

2) Reglas de Formación

a) Una constante es una fórmula

b) Una variable es una fórmula

c) Si P y Q son fórmulas, entonces $P \Rightarrow Q$ también.

d) Si P es una fórmula, también $\sim P$

3) Una lista inicial de Fórmulass

a) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$

b) $(((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$

c) $(((\sim P) \Rightarrow (\sim Q)) \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$

4) Una regla de Transformación

a) De $(P \Rightarrow Q)$ y P, inferimos Q.

2.6 Deducción Natural

Las demostraciones de teoremas raramente se escriben completas, ya que tienden a ser muy largas. En la práctica se usan demostraciones a partir de hipótesis y se derivan reglas de inferencia. G. Gentzen[16] ingenió en 1934 diversas reglas de inferencia para la lógica.

Las reglas propuestas por Gentzen pueden dividirse en dos grupos. El primer grupo consiste en la llamadas **reglas de estructura** o, en instrucciones de carácter muy general para llevar a cabo inferencias. Una regla de estructura nos permite, por ejemplo inferir un enunciado de sí mismo; otra regla nos permite inferir una conclusión de ciertas proposiciones si 1) la conclusión se sigue de las premisas inicialmente dadas y de otra premisa suplementaria, y si 2) la proposición suplementaria se sigue a su vez de las premisas inicialmente dadas; y así sucesivamente. Las reglas en cuestión no se expresan formalmente cuando se trata de ejecutar inferencias.

El segundo grupo consiste en las llamadas **reglas de eliminación e introducción**, específicamente, una de cada clase para cada uno de los conectivos '$\wedge$', '$\vee$', '$\Rightarrow$', '$\Leftrightarrow$', '$\sim$'.

Algunas de las reglas de eliminación e introducción son las siguientes:

Regla de Eliminación para "$\Rightarrow$"

"Si una condicional y su antecedente son tomados como premisas el consecuente puede ser inferido como conclusión".

[16] Andrews, Peter B. An -Introduction to Mathematical Logic and type theory: to truth through proof

Regla de Eliminación para "~"

"Un enunciado se sigue de su doble negación"

De $M \vee A$ inferimos $M \vee \sim\sim A$

Regla de Introducción para "⇒"

'Si una conclusión se sigue de ciertas premisas, el condicional formado por la última de estas premisas como antecedente y la conclusión originaria como consecuente se sigue de las restantes premisas"

De $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow c$ inferimos $a \Rightarrow c$

Regla de Introducción para "~"

"Si un enunciado y la negación del mismo se siguen ciertas premisas, la negación de la última de estas premisas se sigue de las restantes".

De $\sim a \Rightarrow \sim b$ inferimos $a \Rightarrow b$

Regla de Introducción de "∧"

De $M \vee \sim A$ y $M \vee \sim B$ inferimos $M \vee \sim(A \vee B)$

Las reglas de inferencia propuestas por Gentzen suelen ser conocidas con el nombre de "reglas de deducción natural". Merecen este calificativo hasta cierto punto porque reflejan los modos como ordinariamente pasamos de las premisas a las conclusiones. Tales reglas han sido usadas también en varias formalizaciones del cálculo proposicional y del cálculo de predicados en donde nos permiten prescindir enteramente de axiomas.

CAPITULO III

Cálculo de Predicados y Sistema de Prueba

3.1 Objetos, Propiedades y Relaciones

El lenguaje consiste de los siguientes símbolos primitivos:

a) **Símbolos Impropios**: [ ] ~ $\vee$ $\forall$
b) **Variables Individuales**: u, v, w, x, y, z, u_1,...
c) **n Variables de función (símbolos de función)**: f^n, g^n, h^n,..., para $n \geq 1$
d) **Variables Proposicionales**: p, q, r, s p_1,...
e) **n Variables de Predicado**: P^n, Q^n, R^n,..., para $n \geq 1$.

Podemos admitir lenguajes en los que no hay variables de cierto tipo; sin embargo, las variables individuales **siempre** deben aparecer, y debe haber variables de predicado o al menos una constante de predicado.

Ejemplo:

1) Cualquier número racional es un número real

$$(\forall x)\ (Q(x) \Rightarrow R(x))$$

1) Existe un número par

$$(\exists x)\ (P(x))$$

Nota: estos símbolos ($\forall$,$\exists$) se explican en el siguiente punto.

Los términos por la siguientes reglas:

a) Cada variable individual o constante individual es un **término**

b) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f^n es una n-ésima variable de función entonces $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

Las FBF's del lenguaje se definen:

a) Si P^n es una n-ésima variable de predicado o constante de predicado, y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ es una FBF. También, cada variable proposicional es una FBF. (Las FBF's de esta forma se llaman átomos o FBF elementales)

b) Si A es una FBF, también es $\sim A$

c) Si A y B son FBF's, entonces también $(A \vee B)$

d) Si B es una FBF y x es un variable individual, entonces $\forall x\, B$ es una FBF.

En las interpretaciones del cálculo de predicados, los términos son designados como **objetos**, los símbolos de funciones son designados como Funciones de objetos a objetos, y n-ésimos símbolos de predicado son designados como **n-ésimas relaciones** entre objetos o (en el caso de n=1) **propiedades o conjuntos de objetos.**

3.2 Cuantificadores

Supongamos que p(x) es una fórmula universalmente verdadera para un universo X dado. Es equivalente, como se vio, a verificar si p(x) da una proposición verdadera para todo elemento x de X. Abreviando la frase **"para todo"** por el símbolo $\forall$, se admite la nueva frase "$\forall x$: p(x)", que representa "para todo x, p(x) da una proposición verdadera". Tal proposición es verdadera si p(x) es universalmente verdadera y falsa de otra manera. Esto muestra que el valor de verdad de "$\forall x$: p(x)" depende del universo que se dé. En la práctica no hay necesidad de distinguir entre las frases "para todo", "para cada" y " para todos". Todas se designan por $\forall$, que se llama **Cuantificador Universal.**

Como $(\forall x)p(x)$ se admite como proposición, debemos saber negarla para que sea consistente con el desarrollo anterior. Si $\forall x$, $p(x)$ no es verdadera, entonces debe existir un elemento, digamos a, en el universo, tal que $p(a)$ tenga el valor F o equivalentemente, $\sim p(a)$ tenga el valor V.

Por ejemplo, con el universo $\{2, 4, 6\}$, la proposición $\forall x$, $x>5$ es falsa. En este caso, se puede tomar "a" como 2 ó 4. Esto sugiere que la negación de $\forall x$, $p(x)$ deber ser la proposición "existe x tal que $\sim p(x)$ dé una proposición verdadera", y esta proposición es verdadera sí y solamente sí, $\forall x$, $p(x)$ es falsa. Se abrevia la frase "existe un" por $\exists$ y se escribe **$\exists x$, $\sim p(x)$** por la proposición anterior.

Así se ha definido $\sim(\forall x, p(x)) \Rightarrow \exists x, \sim p(x)$.

En general, si $q(x)$ es cualquier fórmula, la frase $\exists x$, $q(x)$ es una proposición cuyo valor de verdad es V si existe un reemplazo para x en el universo, para el cual $q(x)$ es una proposición verdadera. De otra manera $\exists x$, $q(x)$ tiene el valor de verdad F, entonces

$$\sim(\exists x, q(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim q(x)$$

No se hace distinción entre la frase "existe un" y "para algunos". Ambas se designan por $\exists$, que se llama **Cuantificador Existencial.**

3.3 Funciones y Símbolo de Funciones

La noción central a explicar es la de función (o predicado).

Una **Función** de n-lugares (o un predicado de n-lugares) es una función de n variables individuales, donde el dominio de valores es un conjunto de proposiciones. Los miembros del dominio se llaman **objetos**. Por esta razón, cuando cada variable en una Función (predicado) tiene asignada a ella un **objeto**, el resultado es una proposición.

Por ejemplo, supongamos que el dominio son todos los números naturales. **a** es primo, **a<b**, (**a<b**)∨(**a<b**) son ejemplos de Funciones. Tan pronto como **a** y **b** tomen sus valores del dominio, el resultado es una proposición (verdadera o falsa). Si a toma el valor de 7 y b el de 5 , entonces el primer ejemplo **a** es primo se vuelve una proposición verdadera, el segundo **a<b** es una proposición falsa y el tercero es una proposición verdadera.

Una función 1-lugar (como el primer ejemplo) es una **propiedad,** una función 2-lugares es una **relación binaria**, una función 3-lugares es una **relación ternaria** y así sucesivamente.

Los símbolos de función se denotan con letras minúsculas l, g, h,... o bien, una cadena como menor que, más, mayor que, etc.

Ejemplo:

Si "menor que" es representado por "h", entonces "<" es igual a "h" y podremos escribir "h(a, b)" o "<(a, b)" para "a es menor que b", pero obviamente preferimos usar "a<b".

3.4 Semántica Formal del Cálculo de Predicados

Definición[17]**.-** Una interpretación de un fórmula **F** en lógica de Primer Orden (Cálculo de Predicados) consiste de un dominio **D** no vacío y una asignación de valores para cada constante, símbolo de función o símbolos predicados que ocurren en **F**. Cumpliéndose lo siguiente:

1.- A cada constante le asignamos un elemento en **D.**

2.- Para cada símbolo de función n-aria asignamos un mapeo de $\mathbf{D^n}$ a **D.**

3.- Para cada símbolo de predicado n-ario, asignamos un mapeo de $\mathbf{D^n}$ **a {v, f}.**

Nota: $D^n = \{(x_1,\ldots, x_n) / x_1 \in D,\ldots, x_n \in D\}$

Para cualquier interpretación de una fórmula sobre un dominio D, la fórmula puede ser evaluada en V o F de acuerdo a:

1) Si las fórmulas F y G son evaluadas lógicamente entonces las fórmulas: $\sim F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, y $(F \Leftrightarrow G)$, pueden ser evaluadas bajo la consideración de la siguiente tabla:

F	G	$\sim F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \Rightarrow G$	$F \Leftrightarrow G$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

1) Una fórmula F es evaluada como verdadera sobre todo el dominio de interpretación, si lo es para toda x ($\exists x\ F[x]$).

2) El cuantificador existencial ($\exists$) aplicado a una fórmula F evalúa como verdad, si existe al menos uno que evalúa a F como verdadera.

3.5 Consistencia, Completitud y Decidibilidad

Un cálculo C es **consistente** si no hay ninguna fórmula bien formada de C tal que, tanto ella como su negación sean teoremas de C.

Un cálculo C es **completo** si, dada cualquier fórmula bien formada de C, o ella o su negación es un teorema o un axioma de C.

Un cálculo C es **decidible** si hay un proceso mecánico para decidir si cualquier fórmula bien formada de C es o no un teorema de C.

[17] Delong, Howard.A Profile of Mathematical Logic

CAPITULO IV

APLICACIONES

4.1 Aplicaciones a la Teoría de Circuitos

Un circuito puede estar **abierto** o **cerrado**. Cuando está abierto no permite el paso de corriente, mientras que cuando está cerrado sí lo permite.

Se desea resolver el siguiente problema. Dado un circuito, con algunos interruptores cerrados, determinar si pasa corriente de T_1 a T_2.

T_1 ——P —— T_2

Figura 4.1.

T_1—— P—— Q—— T_2

Figura 4.2.

La figura 4.1. muestra el circuito más simple, en el cual T_1 y T_2 están conectadas por un alambre que contiene un interruptor P. En caso de que el interruptor esté cerrado, pasa corriente de T_1 a T_2. La figura 4.2 muestra los interruptores P y Q en **serie**. Si P **y** Q están cerrados, pasa corriente de T_1 a T_2 .

Asociemos una proposición a cada interruptor. Sea **p** la proposición "el interruptor P está cerrado" y **q** "el interruptor Q está cerrado". La figura 4.1 es verdadera, pasa corriente, y la fig. 4.2 , que si p y q son verdaderas, para corriente. La fig. 4.3 muestra un circuito en el cual P y Q están conectadas en **paralelo.** La corriente pasa de T_1 a T_2 si $p \vee q$ es verdadera.

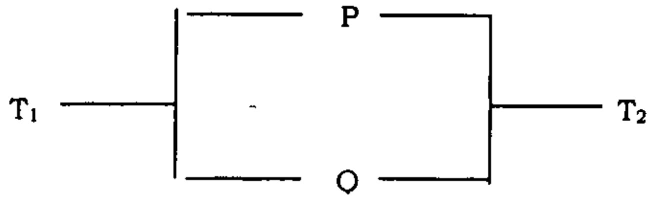


Figura 4.3.

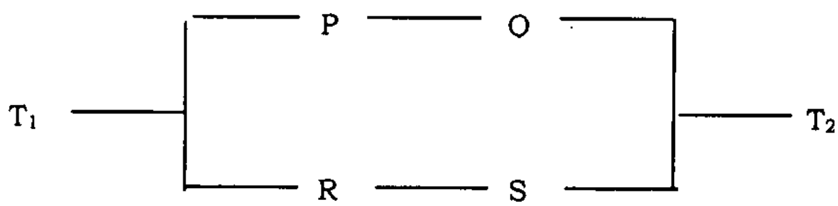
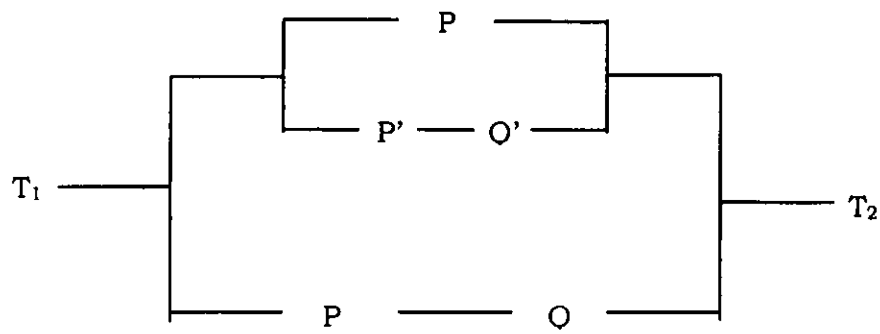


Figura 4.4.

La fig. 4.4 muestra un circuito en serie y en paralelo. La parte superior esta representada por $p \wedge q$ y la inferior por $r \vee s$; el circuito completo está representado por $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$. Como hay cuatro interruptores y cada uno puede estar abierto o cerrado, hay $2^4 = 16$ posibilidades de conexión. La tabla de verdad de $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ contiene cuatro variables, p, q, r y s, es decir, 16 filas. Las combinaciones de interruptores que permiten el paso de corriente corresponden en la tabla a las filas que dan por el valor de verdad de V. No es necesario que los interruptores actúen independientemente. Es posible acoplar dos o más interruptores, de manera que unos estén cerrados y abiertos simultáneamente. Se indica esto en el diagrama, asignando la misma letra a tales interruptores. También es posible acoplar dos interruptores, de manera que uno esté cerrado y el otro abierto. Se indica esto asignando la letra P al primero y P' al segundo.

La proposición " p esta cerrado" es verdadera si y sólo sí "P' " está cerrado o es falsa. Por tanto, si p es la frase " P está cerrado ", entonces ~p es " P' está cerrado". Esto se ilustra en la siguiente figura:



La proposición asociada es [$p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [p \wedge q$]. Como la proposición es falsa, solamente si p es falsa y q verdadera la corriente fluirá a menos que P esté abierto y Q cerrado.

Verificación: Si P está cerrado pasará corriente, pues por la parte superior pasa corriente, independientemente de que Q esté abierto o cerrado. Si ambos están abiertos, entonces P' y Q' están cerrados, por tanto, pasará corriente por el circuito intermedio. Pero si P esta abierto y Q cerrado, por ninguno de los circuitos pasa corriente.

Observe que no es necesario considerar el paso de corriente por el circuito inferior. La contraparte lógica de este hecho es que la proposición asociada al circuito es equivalente a [$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$], cuyo circuito es únicamente la parte superior del que estamos considerando.

4.2 Métodos de demostración

En resumen: una demostración matemática consiste en que a partir de una proposición verdadera R y empleando tautologías, se demuestra que una proposición S es verdadera.

La demostración de un teorema consiste en mostrar una argumentación convincente de que el teorema es consecuencia lógica de las hipótesis y teoremas ya demostrados. ¿Que significa que un teorema es **consecuencia lógica** de las hipótesis y teoremas ya demostrados? Como veremos a continuación, son precisamente las tautologías las que determinan esto; es decir, las tautologías determinan las reglas de inferencia lógica que se emplean para deducir un teorema a partir de proposiciones conocidas.

Este proceso de inferir una proposición t de las proposiciones dadas $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se llama **razonamiento** y se representa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \\ \therefore\ t \\ \hline \end{array}$$

Con esto se quiere decir que, como las proposiciones $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son verdaderas, por lo tanto ($\therefore$), t es verdadera. A las proposiciones $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se les llama **premisas del razonamiento** y a t **conclusión.** Se dice que tal razonamiento es válido si, y solamente si, la proposición $(s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_n) \Rightarrow t$ es una tautología.

Al demostrar un teorema de la forma " si p entonces q" ($p\Rightarrow q$), comúnmente se empieza suponiendo que p es dado; después se construye una cadena de proposiciones de la forma $p\Rightarrow p_1$, $p_1\Rightarrow p_2$, ... , $p_n\Rightarrow q$, cada una de las cuales es una hipótesis dada de antemano o un teorema ya demostrado. Tan pronto se llega en esta cadena a la proposición $p_n\Rightarrow q$, de ello se concluye q. Este razonamiento es válido, pero ¿cómo se demuestra el teorema, es decir, como establece la verdad de la implicación $p\Rightarrow q$? Para ver esto recordemos que una implicación $p\Rightarrow q$ es solamente falsa cuando p es verdadera y q falsa; entonces todo lo que se necesita para mostrar que $p\Rightarrow q$ es verdadera es el caso en que p es verdadera, q necesariamente debe ser verdadera.

Ejemplo Demostrar el siguiente teorema: "Si a y b son números pares, entonces a+b es un número par" ($p \Rightarrow q$)

Supongamos que a y b son números pares	p
Entonces, según la definición de número par, a/2 y b/2	$p \Rightarrow p_1$
Esto significa que a= 2m y b= 2n para dos enteros m y n, según la definición de lo que significa un número entero divide a otro.	$p_1 \Rightarrow p_2$
Pero, si a=2m y b=2n, entonces a + b = 2m + 2n = 2(m+n), por la propiedad distributiva.	$p_2 \Rightarrow p_3$
Como a + b = 2(m+n) y m+ n es un entero, (a+b)/2.	$p_3 \Rightarrow p_4$
Si a + b es divisible por 2, esto quiere decir que es par, según la definición de número par.	$p_4 \Rightarrow q$
Por tanto, a + b es un número par.	$\therefore q$

Un análisis de la demostración muestra que el razonamiento es válido. Establece el teorema, porque cada una de las proposiciones $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2$, $p_2 \Rightarrow p_3$, $p_3 \Rightarrow p_4$ y $p_4 \Rightarrow q$, es un resultado que ha sido enunciado o demostrado anteriormente.

Si el teorema que se va a demostrar no es de la forma $p \Rightarrow q$, sino una proposición q, entonces se reemplaza p en el argumento anterior por una proposición apropiada p_1 que se conoce y después se construye una cadena de proposiciones que van de p_1 a q:

$$
\begin{array}{c}
p_1 \\
p_1 \Rightarrow p_2 \\
p_2 \Rightarrow p_3 \\
\cdots\cdots\cdots \\
p_n \Rightarrow q \\
\hline
\therefore \ q
\end{array}
$$

Este razonamiento establece da verdad de $p_1 \Rightarrow q$.

Los métodos más usados son los siguientes:

4.2.1. Demostración directa o por implicación

Lo estudiado anteriormente describe el método de **demostración directa.** Consiste en la aplicación del modus ponens. Es decir, si la proposición p es verdadera y la implicación ($p \Rightarrow q$) es verdadera, entonces q es verdadera.

4.2.2. Demostración indirecta

El primer tipo de demostración indirecta se llama **demostración por contraposición.** Como el nombre lo indica, consiste en que para demostrar un teorema de la forma "si p entonces q", demuestra su contrarrecíproco $\sim q \Rightarrow \sim p$. En este caso se construye una cadena de proposiciones que conducen de $\sim q$ a $\sim p$, en vez de p a q. Esta implicación es verdadera puesto que $\sim q \Rightarrow \sim p$ es equivalente a $p \Rightarrow q$, que es verdadera.

Ejemplo Teorema. Sean a, b y c números enteros positivos. Si

$$a + c < b + c, \text{ entonces } a < b$$

Demostración. A continuación se va a demostrar el recíproco: si a b, entonces a + c b + c. Por tanto, supongamos que a b. Entonces, por la propiedad dicotómica, a = b o b < a. En el primer caso se tendría a + c = b + c, y en el segundo caso, b + c < a + c; en cualquier caso se tiene que a + c b + c. Por tanto, si a b, entonces a + c b + c.

El segundo método demostración indirecta de un teorema t consiste en establecer la verdad de t, estableciendo la falsedad de su negación de la siguiente manera: se muestra que la negación de t, ~t, lleva a una contradicción, de la forma $R \wedge \sim R$. Este método se llama demostración por contradicción o reducción al absurdo.

Si se muestra que ~t implica tal contradicción, es decir, si se establece la verdad de la proposición $(\sim t) \Rightarrow (r \wedge \sim r)$ para alguna proposición r, entonces, en virtud de que $r \wedge \sim r$ es falsa, se concluye que ~t también es falsa (porque los únicos casos en que la implicación es verdadera son $V \Rightarrow V$, $F \Rightarrow V$, $F \Rightarrow F$) y, por lo tanto, t es verdadera.

Ejemplo Teorema. Si S es el conjunto de todos los números primos, entonces S es un conjunto infinito. $p \Rightarrow q$.

Demostración. Supongamos que no, es decir, que S es el conjunto de todos los primos y que S no es infinito. $(p \wedge \sim q)$, la negación de $p \Rightarrow q$.

Entonces S es un conjunto finito, digamos $S=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Como S es finito, el producto $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de todos los primos en S se puede hacer, y además formar el número $b = (p_1, p_2, \ldots, p_n) + 1$.

Entonces existe un número primo p' tal que p' divide a b

Como p' es primo y S contiene a todos los números primos, se debe tener que p' $\in$ S. Sin embargo, ningún primo en S divide a b; por tanto, p' no divide a b ($\sim r$).

Así hemos llegado a una contradicción ($r \wedge \sim r$). Puesto que la hipótesis de que el conjunto S no es infinito conduce a la contradicción ($p \wedge \sim q$) $\Rightarrow$ ($r \wedge \sim r$) que es falsa. Por tanto, si S es el conjunto de los números primos, entonces S es un conjunto infinito.

4.2.3. Demostración por disyunción de casos

Si las implicaciones $p \Rightarrow q$ y $\sim p \Rightarrow q$ son verdaderas, entonces q es verdadera por la tautología $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

En efecto, $p \vee \sim p$ es verdadera por la tautología $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$; q es verdadera.

Ejemplo Demostrar que $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \neq 0$

Demostración. Supongamos que la negación, $x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$ es verdadera. Por un axioma de los números reales $x\, x^{-1} = 1$. También empleando $x^{-1} = 0$ y el teorema $x(0) = 0$ se obtiene $x\, x^{-1} = x(0) = 0$. Entonces $1 = 0$.

Así hemos obtenido la contradicción $1 \neq 0 \wedge 1 = 0$. Por tanto, $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \neq 0$.

4.2.4. Demostración por contraejemplo

Para demostrar la negación de una implicación $\sim(p \Rightarrow q)$ se debe dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el cual p y $\sim q$ son simultáneamente verdaderas.

Ejemplo Sea p: n es un entero divisible por 6 y por 4

Sea q: n es divisible por 24

¿Es verdad que $p \Rightarrow q$? No, porque, por ejemplo, 12 hace que p y $\sim q$ sean simultáneamente verdaderas. Entonces $\sim(p \Rightarrow q)$.

4.2.5. Demostración por recurrencia o inducción

El razonamiento por recurrencia se puede utilizar para demostrar que, cualquiera que sea el entero natural n, una proposición en la cual intervenga n es verdadera. Para eso es suficiente establecer que la afirmación es verdadera para el entero cero y que si es verdadera para el entero n, entonces es verdadera para el siguiente de n.

En efecto, la parte A de N que contiene los enteros x para los cuales la proposición es verdadera, contiene a cero, y cuando contiene a n, contiene al sucesor de n. Entonces, por el axioma de inducción, A = N.

Simbólicamente, la proposición de inducción es la siguiente:

$$p(0) \wedge \forall k\, [\, p(k) \Rightarrow p(k+1)\,] \Rightarrow \forall n p(n)$$

Si se puede demostrar que el antecedente $p(0) \wedge \forall k\, [\, p(k) \Rightarrow p(k+1)\,]$ es verdadera, entonces empleando la regla de inferencia de modus ponens se deduce que $\forall n p(n)$ es verdadera.

Hay dos pasos en la demostración por inducción:

1. Paso fundamental: Probar que p(0) es verdadera.
2. Paso inductivo: Probar que para todo k $[\, p(k) \Rightarrow p(k+1)\,]$.

Ejemplo: Mostrar que $\forall n,\ 2^{n+1} \geq 2^n$.

Demostración p(n): $2^{n+1} \geq 2^n$

1. Paso fundamental: Probar que p(0) es verdadera: $2^{0+1} \geq 2^0$, $2^{0+1}= 2$, $2^0=1$; por tanto $2^{0+1} \geq 2^0$.

2. Paso inductivo: Probar que $\forall k$ [$p(k) \Rightarrow p(k+1)$].

    Supongamos que p(k) es verdadera $2^{k+1} \geq 2^k$.

    Deducir: P(k+1): $2^{k+2} \geq 2^{k+1}$

    Como $2^{k+1} \geq 2^k$, $2^{k+1}\,2 \geq 2^k\,2$ o $2^{k+2} \geq 2^{k+1}$ es decir, p(k+1) es verdadera.

4.3 Algunas Aplicaciones a la Computación

Los tipos primitivos estándar son aquellos que se tienen a disposición en muchas computadoras como características integradas. Incluyen los números enteros, valores lógicos de verdad y un conjunto de caracteres imprimibles. En muchas computadoras los números fraccionarios se incorporan también, junto con las operaciones aritméticas comunes. Estos tipos se simbolizan por medio de los identificadores. Integer, Cardinal, Real, Boolean, Char.

De estos tipos primitivos el que se basa en la lógica matemática es el tipo Boolean. Los valores de este tipo estándar se simbolizan por los identificadores TRUE (verdadero) y FALSE (falso). Los operadores boleanos son la conjunción, disyunción y negación lógicas cuyos valores se definen en la tabla 1.1. L a conjunción lógica se denota por el símbolo AND (o bien &, y), la disyunción lógica por OR y la negación lógica por NOT (o bien ~). Las comparaciones son operaciones que producen un resultado de tipo Boolean. Así pues, el resultado de una comparación puede asinarse a una variable o bien puede usarse como operando de un operador lógico de una expresión booleana. Por ejemplo, dadas las variables booleanas p y q, y las variables enteras x = 5, y = 8, z = 10, las asignaciones

p:= x = y

q:= (x<y) & (y<z)

producen p = FALSE y q = TRUE

p	q	p and q	p or q	Not p
TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE

Tabla 1.1

Este tipo Boolean se usa en casi todos los lenguajes de programación. Algunas de las instrucciones de los programas usan variables booleanas para crear criterios de decisión. Las instrucciones que usan estas variables son: IF THEN ELSE, DO, WHILE. Un ejemplo es el siguiente programa creado en C, es el Método de Euler, el cual es un método numérico que se utiliza para resolver problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales.

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>
# include <conio.h>
# define MAX 3
/* PROGRAMA DEL METODO DE EULER
METODOS NUMERICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES*/
float p1(float t, float x, float y)
{
 return ((-4*x) + (3*y) + 6);
}
float p2(float t, float x, float y)
```

```
{
  return ((-2.4*x) + (1.6*y) +3.6);


}
float real1(float t){
  return ( (-3.375*exp(-2*t)) + (1.875*exp(-.4*t)) + 1.5);
}float real2(float t){
  return ( (-2.25*exp(-2*t)) + (2.25*exp(-.4*t)));
}void main()
{
  int i,n;
  float w1,w2,x,h,a,b,z1,z2,t,u,u1;
  float w[MAX];
  clrscr();
  gotoxy(8,2);printf("Programa que muestra las aproximaciones del m,todo de Euler");
  gotoxy(10,4);printf("Intervalos");
  gotoxy(10,5);printf("Ingrese el valor de a:    ");
  scanf("%f", &a);
  gotoxy(10,6);printf("Ingrese el valor de b:    ");
  scanf("%f", &b);
  gotoxy(10,7);printf("Total de iteraciones:    ");
  scanf("%d",&n);
  gotoxy(10,8);printf("Valor inicial x(0):           ");
  scanf("%f",&w);
  gotoxy(10,9);printf("Valor inicial y(0):           ");
  scanf("%f",&w1);
  gotoxy(5,10);printf("\n Tj        w1,j        w2,j      |I1(tj)- w1,j|   |I2(tj) - w2,j|\n");
  t=a;
  for (i=1;i<=n;i++){
  h=(b-a)/n;
  w1 = w1 + h*p1(t,w1,w2);
  w2 = w2 + h*p2(t,w1,w2);
```

```
z1=real1(t+.1);
z2=real2(t+.1);
t+=h;
if (i==18 || i==41 ){
printf("Pulse una tecla para continuar.......\n");
getch();
printf("%.5f\t  %.5f\t  %.5f\t  %.5f\t %.5f\n",t,w1,w2,
fabs(z1-w1), fabs(z2-w2));  }
getch();
```

CONCLUSIONES

En este trabajo se incluyó una descripción elemental de las reglas y símbolos que se emplean en el razonamiento lógico. Una de las mayores dificultades al analizar el rigor matemático de una demostración, se halla en el hecho de que debemos comunicar nuestras ideas empleando el lenguaje ordinario, que está lleno de ambigüedades. En ocasiones es difícil si determinada línea de razonamiento es correcta o no. La lógica elimina estas ambigüedades aclarando como se construyen las proposiciones, hallando su valor de verdad y estableciendo reglas específicas de inferencia por medio de las cuales se puede determinar si un razonamiento es válido o no. Debido a esto, creo que la verdadera importancia de las matemáticas no son los números sino su rigor lógico.

Pienso que la materia de Lógica Matemática en el nuevo plan de estudios de Matemáticas Aplicadas y Computación es fundamental, ya que proporciona las bases para distinguir un razonamiento correcto de uno incorrecto. Además es la base para poder hacer las demostraciones de las diferentes materias de matemáticas que se llevan a lo largo de la carrera, así como, para programar en diferentes lenguajes.

Espero que esta tesina, que esta basada en el programa de la materia, sirva como apoyo a los estudiantes y profesores de Lógica Matemática, ya que la bibliografía que hay esta en inglés y alguna es muy complicada, además en la biblioteca hay pocos libros.

Glosario

$\sim$	Negación (no)
$\wedge$	Conjunción (y)
$\vee$	Disyunción (o)
$\Rightarrow$	Implicación (Si ... entonces)
$\Leftrightarrow$	Doble Implicación (Sí y sólo sí)
$\cong$, $\equiv$	Equivalencia
$\forall x$	Para todo "x"
$\exists x$	Existe un "x"
$\therefore$	Por lo tanto
$P(x)$	Función

Anexo A
Ejercicios

1.- Suponga que p es " 4 es un número par" y q es " 6/7 es un número racional". Por medio de palabras exprese las siguientes proposiciones.

a) $p \vee q$
b) $p \Rightarrow \sim q$
c) $\sim p \wedge \sim q$
d) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$

2.- Escriba simbolicamente las siguientes proposiciones: si p quiere decir "ella es rubia" y q " ella es elegante"

a) No es cierto que ella sea rubia o elegante.
b) Ella es rubia o ella no es elegante y rubia.

Respuesta:
a) $\sim(p \vee q)$
b) $p \vee (\sim q \wedge p)$

3.- Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) Si $2 + 2 = 5$, entonces $3 + 3 = 6$.
b) Es falso que $1 + 1 = 3$ ó $2 + 1 = 3$.

Solución:
a) Si p es "2+2 = 5" y q es "3+3=6". Como p es falsa y q verdadera, entonces $p \Rightarrow q$ es verdadera, es decir, la proposición es verdadera.
b) Sea p " 1+1=3" y q "2+1=3" y sea r "$p \vee q$". Como p es falsa y q es verdadera, entonces $p \vee q$, que es r, es verdadera. Como la proposición dada es $\sim r$, entonces es falsa.

4.- Halle las tablas de los valores de verdad de las siguientes proposiciones:
a) $\sim p \wedge q$
b) $\sim(p \Rightarrow \sim q)$
c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
d) $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \Leftrightarrow p)$.

Respuesta:
a) F F V F
b) V F F F
c) V V V V
d) F V V V

5.- Verifique que $\sim\sim p = p$

Solución:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

6.- Verifique por medio de tablas de verdad que

a) $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$ (ley de De Morgan)
b) $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ (ley de De Morgan)
c) $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$
d) $\sim(p \Leftrightarrow q) = (p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

7.-Simplificar las siguientes proposiciones usando las reglas del ejercicio 5 y 6.

a) $\sim(p \vee \sim q)$
b) $\sim(\sim p \Rightarrow q)$
c) $\sim(p \wedge \sim q)$
d) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$
e) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$
f) $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q)$

Solución:

a) $\sim(p \vee \sim q) = (\sim p \wedge \sim\sim q) = \sim p \wedge q$
b) $\sim(\sim p \Rightarrow q) = \sim p \wedge \sim q$
c) $\sim(p \wedge \sim q) = \sim p \vee \sim\sim q = \sim p \wedge q$
d) $\sim(\sim p \wedge \sim q) = \sim\sim p \vee \sim\sim q) = p \vee q$
e) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q) = (\sim\sim p \Leftrightarrow q) = p \Leftrightarrow q$
f) $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q) = (\sim p \wedge \sim\sim q) = \sim p \wedge q$

8.- Simplifique las siguientes proposiciones:
a) No es verdad que ella sea rubia o elegante
b) No es verdad que las rosas son rojas si, y solamente si, las violetas son azules.

Solución:
a) Ella no es rubia ni elegante
b) las rosas son rojas si, y solamete si, las violetas no son azules.

9.- Verifique la ley asociativa $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, por medio de tablas de verdad.

10.- Verifique la ley distributiva $p \vee (q \wedge r) = (p \vee r) \wedge (p \vee r)$, por medio de tablas de verdad.

11.- Muestre, por medio de tablas de verdad, que la operación de disyunción se puede escribir en términos de las operaciones de conjunción y negación. O sea, $p \vee q = \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

12.- Verifique si las siguientes proposiciones son válidas.

a) $p \Rightarrow p \wedge q$
b) $p \Rightarrow p \vee q$

Respuesta:
a) No es válida

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

b) Si es válida.

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

13.- Verifique que la proposición es una tautología: $a \vee (\sim a \wedge b)$

14.- Verifique que la proposición es una inconsistencia: $(f \wedge g) \wedge \sim(f \vee g)$.

15.- Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) $\exists x$ que pertenece a A tal que $x + 3 = 10$
b) $\forall x$ que pertenece a A tal que $x + 3 < 10$
c) $\exists x$ que pertenece a A tal que $x + 3 < 5$
d) $\forall x$ que pertenece a A tal que $x + 3 < 7$

Solución:
a) Falsa. Porque ningún número de A es solución de $x + 3 = 10$.

b) Verdadera. Porque todo número de A satisface la relación $x + 3 < 10$.
c) Verdadera. Porque si $x_0 = 1$, entonces $x_0 + 3 < 5$, es decir, es solución.
d) Falsa. Porque si $x_0 = 5$ entonces $x_0 + 3 > 7$, es decir, el 5 no es solución.

16.- Cuál es la negación de las proposiciones:

a) $\forall x\ p(x) \wedge \exists y\ q(y)$
b) $\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)$

Solución:
a) Observe que $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$; entonces:

$$\sim(\forall x\ p(x) \wedge \exists y\ q(y)) = \sim\forall x\ p(x) \vee \sim\exists y\ q(y) = \exists x \sim p(x) \vee \forall y \sim q(y).$$

b) Observe que $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$; entonces:

$$\sim(\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)) = \sim\forall x\ p(x) \wedge \sim\exists y\ q(y) = \exists x \sim p(x) \wedge \forall y \sim q(y).$$

17.- Sea $p(x) = x$ es par y $q(x) = x$ divide a 44, x toma los valores en los naturales. Traslade las siguientes proposiciones simbólicas a frases:

a) $\exists x,\ p(x) \wedge q(x)$.
b) $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$.
c) $\exists x,\ \sim(p(x) \wedge q(x))$.
d) $\forall x,\ p(x) \vee q(x)$.
e) $\exists x,\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \vee (\sim p(x) \wedge \sim q(x))$.

18.- Sean las siguientes proposiciones:

P = El necesita un doctor
Q = El necesita un abogado
R = El tuvo un accidente
S = El está enfermo
U = El está herido

Establecer las siguientes fórmulas:

a) $(S \Rightarrow P) \wedge (R \Rightarrow Q)$
b) $P \Rightarrow (S \vee U)$
c) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$
d) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (S \wedge U)$
e) $\sim (S \vee U) \Rightarrow \sim P$

19.- Transformar las siguientes fórmulas en formas normales disyuntivas.

a) $(\sim P \wedge Q) \Rightarrow R$
b) $\sim(P \vee \sim Q) \wedge (S \Rightarrow T)$
c) $\sim(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$
d) $P \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$
e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$

Solución

a) $(\sim P \wedge Q) \Rightarrow R$
$= \sim(\sim P \wedge Q) \vee R$ por II.

b) $\sim(P \vee \sim Q) \wedge (S \Rightarrow T)$
$= \sim(P \vee \sim Q) \wedge (\sim S \vee T)$ por II
$= \sim(P \vee \sim Q) \wedge (\sim S \vee \sim\sim T)$ por III
$= \sim(P \vee \sim Q) \wedge \sim (S \wedge \sim T)$ por VII b)
$= \sim[(P \vee \sim Q) \vee (S \wedge \sim T)]$ por VII a)
$= \sim[(\sim\sim P \vee \sim Q) \vee (S \wedge \sim T)]$ por III
$= \sim[\sim(\sim P \wedge Q) \vee (S \wedge \sim T)]$ por VII b)

c) $\sim(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$
$= \sim(P \wedge Q) \wedge (\sim\sim P \vee \sim\sim Q)$ por III
$= \sim(P \wedge Q) \wedge \sim(\sim P \wedge \sim Q)$ por VII b)
$= \sim[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$ por VII a)

d) $P \Rightarrow [(Q \wedge R) \Rightarrow S]$
$= P \Rightarrow [\sim(Q \wedge R) \vee S]$ por II
$= \sim P \vee [\sim(Q \wedge R) \vee S]$ por II
$= [\sim(Q \wedge R) \vee S] \vee \sim P$ por IV a)
$= \sim(Q \wedge R) \vee S \vee \sim P$ por V a)

e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
$=(\sim P \vee Q) \Rightarrow R$ por II
$=\sim(\sim P \vee Q) \vee R$ por II
$=(\sim\sim P \wedge Q) \vee R$ por VII a)
$=(P \wedge \sim Q) \vee R$ por III

20.- Transformar las siguientes fórmulas en formas normales conjuntivas.

a) $P \vee (Q \wedge R)$
b) $\sim(P \Rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$
c) $\sim(P \Rightarrow Q)$
d) $(\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$
e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$

Solución:

a) $P \vee (Q \wedge R)$
$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ por vl a)

b) $\sim(P \Rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$
$= \sim(\sim P \vee Q) \vee (P \vee Q)$ por II
$= \sim(\sim P \vee Q) \vee (\sim\sim P \vee \sim\sim Q)$ por III
$= \sim(\sim P \vee Q) \vee \sim(\sim P \wedge \sim Q)$ por VII b)
$= \sim[(\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \wedge \sim Q)$ por VII b)
$= \sim[(\sim P \vee Q) \vee \sim(P \vee Q)]$ por VII a)

c) $\sim(P \Rightarrow Q)$
$= \sim(\sim P \vee Q)$ por II
$= \sim\sim P \wedge \sim Q$ por VII a)
$= P \wedge \sim Q$ por III

d) $(\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$
$= (\sim P \wedge \sim\sim Q) \vee (\sim\sim P \wedge \sim Q)$ por III
$= \sim(P \vee \sim Q) \vee \sim(\sim P \vee Q)$ por VII a)
$= \sim[(P \wedge \sim Q) \wedge (\sim P \vee Q)]$ por VII b)

e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
$= \sim(\sim P \vee Q) \vee R$ por II
$= \sim(\sim P \vee Q) \vee \sim\sim R$ por III
$= \sim[(\sim P \vee Q) \wedge \sim R$ por VII b)

21.- Verificar los siguientes pares de fórmulas equivalentes transformando las fórmulas, de los dos lados del "=", en la misma forma normal

a) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) = (P \Rightarrow (Q \wedge R))$
b) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q) = (\sim P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
c) $P \wedge Q \wedge (\sim P \vee \sim Q) = \sim P \wedge \sim Q \wedge (P \vee Q)$
d) $P \vee (P \Rightarrow (P \wedge Q)) = \sim P \vee \sim Q \vee (P \wedge Q)$

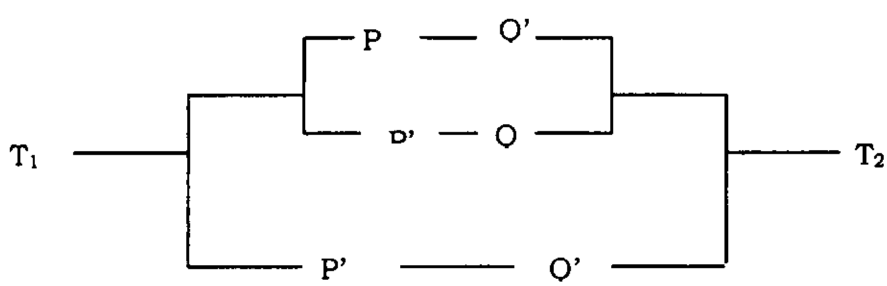
22.- Un estudiante se ve sometido a un examen del tipo falso o verdadero y que consiste en cinco preguntas. El sabe que el maestro siempre formula más preguntas con respuestas verdaderas que falsas y que nunca pone tres preguntas seguidas con la mismas respuestas. De la naturaleza de la primera y última pregunta, él sabe que éstas deben de tener una respuesta contraria. De las demás preguntas, la única ue puede contestar con certeza es el número dos. Basta con esto para que él esté suguro de que contestará todas las preguntas correctamente. ¿Cuál era el valor de verdad de la pregunta dos? ¿Cuál es la respuesta a las cinco preguntas?

Respuesta : VFVVF

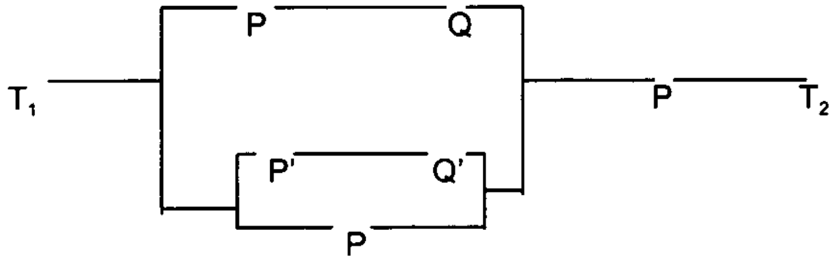
23.- Construya una red de circuitos que corresponda a:

$$((P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

Solución:



24.- ¿Qué enunciado compuesto representa a:



Solución

$$(P \wedge Q) \vee [(\sim P \wedge \sim Q) \vee P] \wedge P$$

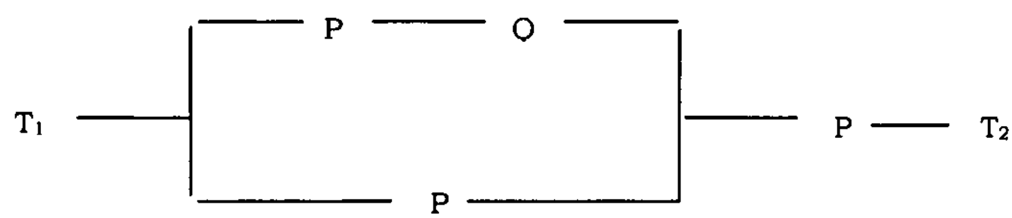
25.- Construya una tabla de verdad para el enunciado del ejercicio 24.

Solución:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$(\sim P \wedge \sim Q) \vee P$	$(P \wedge Q) \vee [(\sim P \wedge \sim Q) \vee P]$	$P \wedge Q) \vee [(\sim P \wedge \sim Q) \vee P] \wedge P$
V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V	F

26.- Diseñe un circuito más sencillo que el del ejercicio 24, que tenga las mismas propiedades.

Solución:



$[(P \wedge Q) \vee P] \wedge P$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee P$	$[(P \wedge Q) \vee P] \wedge P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

27.- La disyunción exclusiva de dos proposiciones se simboliza por $p \underline{\vee} q$ y se lee "p o q, pero no ambas".
a) Construya la tabla de verdad para $p \underline{\vee} q$.
b) Muestre que $p \underline{\vee} q = ((p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q))$. Esto muestra que $\underline{\vee}$ se puede escribir en términos de las operaciones lógicas: $\vee$, $\wedge$, $\sim$.

Solución:
a)

p	**q**	$\mathbf{p \underline{\vee} q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b) Haciendo la tabla de verdad para $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$, se verifica que los valores son idénticos a la tabla anterior, así que $p \veebar q = ((p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q))$.

28.- Las oraciones siguientes son enunciados compuestos, o cuando menos, pueden interpretarse como tales. Encuentre sus enunciados simples:

a) Hace calor y está lloviendo.
b) Hace calor pero no hay humedad. (respuesta: “hace calor”, “hay humedad”)
c) Esta lloviendo o hay mucha humedad.
d) Juan y Pedro subieron al monte.
e) El asesino es Pérez o Fernández.
f) No es ni necesario ni deseable
g) O bien Rivas escribio este libro o López no sabía quién era el autor.

29.- En el ejercicio 28 asigne letras a los varios componente, y escriba los enunciados en forma simbólica.

Respuesta: b) $p \wedge q$

30.- Usando únicamente $\vee$, $\wedge$ y $\sim$, escriba un enunciado equivalente a cada uno de los siguientes:

a) $p \Leftrightarrow q$
b) $p \Rightarrow q$
c) $\sim(p \Rightarrow q)$.

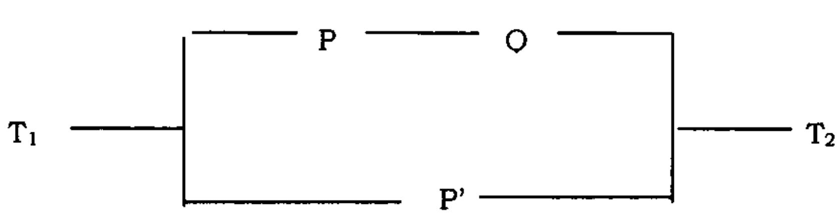
31.- Empleando únicamente $\vee$ y $\sim$ escriba el enunciado equivalente a $p \vee q$. Use el resultado para probar que cualquier tabla de verdad, puede representarse por medio de los dos conectores $\vee$ y $\sim$.

32.- Dibujar los circuitos correspondientes a las expresiones simbólicas:

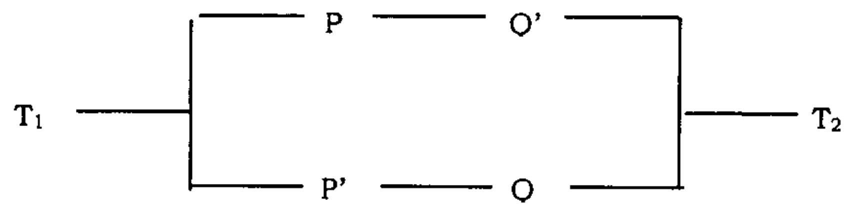
a) $(p \wedge q) \vee \sim p$
b) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Solución:

a)



b)



33.- Suponga que p, q, y r, son tres proposiciones que tienen por valor de verdad V, V y F, respectivamente. ¿ Cuál es el valor de verdad de la siguiente proposición $\sim(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$?.

34.- Suponga que $p \Rightarrow q$ es una tatuología y p tiene por valor de verdad V. ¿Qué se puede decir con respecto al valor de q?.
Respuesta:
Que tiene que ser V también ya que en la condicional si p es V y q es F todo es F, pero como es una tautología q es V.

35.- Pase a lenguaje simbólico las siguientes frases, definiendo las fórmulas y el conjunto donde cambia la variable. (Algunas proposiciones son verdaderas y otras falsas).

a) Todos los número racionales son reales.
b) Algunos enteros positivos son números primos.
c) Todo entero es positivo o negativo.
d) Los números irracionales no son nunca primos.
e) Existen enteros pares que no son negativos.

36.- Mostrar que si las implicaciones $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$, y, $(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$, son verdaderas, entonces p es falsa.

37.- Tres personas, A, B y C, dicen lo siguiente:
A: Yo tengo 22 años, y dos menos que B y uno más que C.
B: No soy el más jóven, C y yo atenemos tres años de diferencia. C tiene 25 años.
C: Yo soy más jóven que A. A tiene 23 años. B tiene tres años más que A.
Determine la edad de cada una de las personas sabiendo que únicamente una de las afirmaciones que hace cada persona es falsa.

38.- Los canibales de una tribu se preparan para comerse un misionero. Le proponen que decida su suerte haciendo una declaración corta. Si es verdadera, será asado; si es falsa, lo cocinarán. ¿Con cual declaración el misionero les puede imponer una tercera solución? (el tercero excluido, a priori, en la lógica canibal.

Respuesta:
Si el misionero declara que será cocinado...

39.- Una prisión está dotada de dos puertas: una conduce a la libertad y otra a la muerte; en cada puerta hay un guardián que conoce la función de las dos puertas; cada guardián puede responder únicamente sí o no; uno de los dos da siempre una respuesta verdadera, el otro siempre una respuesta falsa. El prisionero ignora cuál dice la verdad y cuál miente. Le puede hacer una, y sólo una, pregunta a uno de los guardianes. ¿Qué pregunta debe hacer para poder determinar la puerta que conduce a la libertad?.

Respuesta:
El prisionero puede obtener una respuesta falsa, pidiendo a uno de los guardianes la respuesta del otro.

40.- Para escoger un ministro entre tres candidatos, A, B y C, un rey los somete a una prueba: sobre la cabeza de cada uno de ellos se coloca una bola, que no ven, pero sí ven la bola situada sobre la cabeza de los demás. Los candidatos saben que las bolas se escogen entre cinco: tres negras y dos blancas; el primero que diga el color de la bola que tiene sobre su cabeza será ministro; si se equivoca, le cortan la cabeza. Uno de ellos, A que ve una bola negra sobre la cabeza de los otros dos, afirma con seguridad, viendo que los otros no dicen nada: "yo tengo una bola negra". Explique su razonamiento.

Respuesta:
A se dice: "si yo tengo una bola blanca, B se dirá: "si yo tengo una bola blanca, C ve dos bolas blancas y entonces C puede afirmar: 'yo tengo una bola negra'". C no dice nada, esa hipótesis hay que rechazarla, entonces yo tengo una bola negra". B no dice nada..., es decir: A construye una teroría T' formada por el enunciado T y el axioma: yo tengo una bola blanca; se supone entonces que B construye la teoría T" formada por T' y el nuevo axioma: yo, B, tengo una bola blanca...

41.- ¿Cuáles de los siguientes razonamientos son correctos?

a) $p \Rightarrow q$
$\underline{p\qquad}$
$\therefore\ q$

b) $p \vee q$
$\underline{\sim p\qquad}$
$\therefore\ q$

c) $p \wedge q$
$\underline{\sim p \Rightarrow q}$
$\therefore\ \sim q$

d) $p \Rightarrow q$
$\underline{\sim p \Rightarrow \sim r}$
$\therefore\ r \Rightarrow p$

e) $p \Rightarrow q$
$\underline{\sim r \Rightarrow \sim q}$
$\therefore \sim r \Rightarrow \sim p$

f) $p \Leftrightarrow q$
$q \vee r$
$\underline{\sim r \quad\quad}$
$\therefore \sim p$

g) $p \Rightarrow q$
$\sim p \Rightarrow \sim q$
$\underline{p \wedge \sim r}$
$\therefore s$

Respuesta:
Son válidos a, b, e, d.

42.- Dé una demostración indirecta de la siguiente proposición:

a) Si x^2 es impar $\Rightarrow$ x es impar (x un entero)
b) Si $p \vee q$ y $\sim q$, entonces p.
c) Si $p \Leftrightarrow q$ y $p \Rightarrow r$ y r, entonces $\sim p$.

El empadronador

En la isla de los Caballeros y los Bribones, los caballeros siempre formulan enunciados verdaderos, los bribones siempre formulan enunciados falsos, y cada habitante es un caballero o un bribón.

Un hecho fundamental en esta isla es que a todo habitante le resulta imposible declarar que es un bribón, porque un caballero nunca mentiría y diría que es un bribón, y un bribón nunca admitiría verazmente que es un bribón.

La visita de McGregor

Una vez, el empadronador señor McGregor realizó cierto trabajo de campo en la Isla de los Caballeros y los Bribones. En esa isla también se denomina a las mujeres caballero y bribones. En esa visita McGregor decidió entrevistar solamente a los matrimonios.

1. (Y)
McGregor llamó a una puerta; el marido la abrió a medias y le preguntó a McGregor qué deseaba.

Hago un censo -respondió McGregor-, y necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál, si alguno lo es, es un caballero, y cuál, si alguno lo es, es un bribón?

-¡Ambos somos bribones!- dijo el marido enojado mientras cerraba la puerta de un golpe.

43.- ¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Solución:
Si el marido fuera un caballero jamás hubiera afirmado que él y la mujer eran bribones. Por lo tanto debe de ser un bribón. Dado que es un bribón su enunciado es falso; por lo tanto ambos no son bribones. Esto significa que la esposa debe ser un caballero. Por lo tanto él es un bribón y ella es un caballero.

2. (O)

En la casa siguiente, McGregor le preguntó al marido: -¿Ambos son bribones?- El marido respondió: -Por lo menos uno de nosotro lo es.

44.- ¿De qué clase es cada uno?

Solución:
Si el esposo fuera un bribón, entonces sería verdad que por lo menos uno de los dos es un bribón, en consecuencia un bribón hubiera formulado un enunciado verdadero, lo cual es imposible. Por lo tanto el esposo debe ser un caballero. Entonces se sigue que su enunciado era verdadero, lo cual significa que él o su esposa es un bribón. Dado que él no es un bribón, entonces su esposa lo es. Y por lo tanto la respuesta es: él es un caballero y ella es un bribón.

3. (Si- entonces)

La siguiente casa que visitó McGregor resultó un mayor enigma. Un hombre algo introvertido abrió la puerta tímidamente. Cuando McGregor le pidió que dijera algo sobre sí mismo y sobre su esposa, lo único que dijo el esposo fue: -Si soy un caballero, entonces lo es mi esposa.-

McGregor se fue no muy complacido. -¿Cómo puedo deducir algo sobre alguno de los dos a partir de una respuesta evasiva?- pensó. Estaba a punto de escribir, "Marido y Muher ambos desconocidos", cuando recordó súbitamente una vieja lección de lógica de sus días de estudiante universitario. Por supuesto -se dio cuenta-, puedo determinar de qué clase son ambos.

45.- ¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Solución:

Supongamos que el esposo es un caballero, entonces lo que dijo es verdad; es decir, que si es un caballero, también lo es su esposa y, en consecuencia, la esposa también debe ser un caballero. Esto demuestra que sí el esposo es un caballero, también lo es la esposa. Bueno, eso es exactqamente lo que dijo el esposo; digo que sí él es un caballero, entonces también lo es su esposa. Por lo tanto formuló un enunciado verdadero, y en consecuencia debe ser un caballero. Ahora sabemos que es un caballero, y ya hemos demostrado que si es un caballero, también lo es su esposa. Por lo tanto marido y mujer deben ser ambos caballeros.

4.- (Si y sólo si)

Cuando el empadronador entrevistó a la cuarta pareja, el esposa dijo: -Mi esposa y yo somos de la misma clase; o ambos somos caballeros o ambos bribones.

(El esposo podría haber dicho alternativamente: -Soy un caballero si y sólo si mi esposa es un caballero. Es lo mismo).

46.- ¿Qué puede deducirse sobre el marido y qué puede deducirse sobres la mujer?.

Solución:
No puede determinarse si el esposo es un caballero o un bribón, pero se puede determinar de qué clase es la esposa, del siguiente modo:
Si la esposa fuera un bribón, el esposo jamás podría afirmar que es de la misma clase que su esposa, porque eso sería equivalente a declarar que es un bribón, lo cual no puede hacer.

Una forma alternativa de considerar el problema es ésta: El esposo es un caballero o un bribón. Si es un caballero, su enunciado es verdadero, en consecuencia él y su esposa realmente son de la misma clase, lo cual significa que la esposa también es un caballero. Por otro lado, si él es un bribón, entonces su enunciado es falso, en consecuencia él y su esposa son de distinta clase, lo cual significa que la esposa, al contrario del esposo, es un caballero. Y por lo tanto, independientemente de que el esposo sea un caballero o un bribón, la esposa deber ser un caballero. (En este caso, la clase de esposo es "indeterminada"; podría ser un caballero que afirmó verazmente ser como la esposa, o podría ser un bribón, que afirmó falsamente ser como la espos).

En busca de Oona

Existe todo un grupo de islas de caballeros y bribones en el Pacífico sur en las cuales algunos de los habitantes son mitad humanos y mitad pájaros. Estas personas-pájaro vuelan tan bien como los pájaros y hablan con tanta fluidez como los humanos.

Esta es la historia de un filósofo -un lógico, en realidad- que visitó ese grupo de islas y se enamoró de una joven-pájaro llamada Oona. Se casaron. Su matrimonio era feliz, excepto que su esposoa era demasiado escurridiza. Por ejemplo, él llegaba al hogar a la hora de la cena, pero si era una tardecita especialmente agradable, Oona se había ido volando a otra isla. Por lo tanto él tenía que remar por los alrededores en su canoa de una isla a la otra hasta encontrar a Oona y llervarla a casa. Siempre que Oona aterrizaba en una isla, todos los nativos la veían en el aire y sabían que estaba aterrizando. Sin embargo, una vez que descendiía, era muy difícil encontrarla, por lo tanto lo primero que hacía el marido cuadno llegaba a una isla era tratar de averiguar por medio de los nativos en dónde había aterrizado Oona. Lo que dificultaba tanto la tarea, por supuesto, era que algunos de los nativos eran bribones y no decían la verdad. Los siguientes son algunos de los incidentes que le ocurrieron.

47.- En una oportunidad, el esposo llegó a una isla en busca de Oona y encontró a dos nativos, A y B. Les preguntó si Oona había aterrizado en la isla. Obtuvo las siguientes respuestas:

> A: Si B y yo somos caballeros, entonces Oona está en la isla.
> B: Si A y yo somos caballeros, entonces Oona está en la isla.

¿Esta Oona en la isla?

Solución:

Supongamos que A y B son ambos caballeros. Entonces el enunciado común que formulan es verdadero, a partir del cual se sigue que Oona está en la isla. Por lo tanto si ambos son caballeros, entonces Oona está en la isla. Esto es lo que dijeron, por lo tanto ambos son caballeros. En consecuencia Oona está en la isla.

48.- En otra oportunidad, dos nativos A y B formularon los siguientes enunciados:

> A: Si alguno de los dos es un caballero, entonces Oona está en esta isla.
> B: Eso es verdad.

¿Esta Oona en la isla?

Solución:

Si uno de los dos es un caballero, entonces el enunciado que formuló es verdadero, a partir de los cual se sigue que Oona está en la isla. Por lo tanto, si alguno de los dos es un caballero, Oona está en la isla. De este modo el enunciado que ambos formularon es verdadero, en consecuencia ambos son caballeros, por lo tanto seguramente uno por lo menos es un caballero. A partir de esto y de la veracidad del enunciado que formularo, se sigue que Oona está en la isla.

49.- No recuerdo los detalles del siguiente incidente con mucha claridad. Sé que el lógico se encontró con dos nativos A y B y que A dijo: "B es un caballero y Oona está en esta isla". Pero no recuerdo exactamente lo que dijo B. O dijo: "A es un bribón, y Oona no está en esta isla". O dijo: "A es un bribón y Oona está en esta isla. ¡Ojalá pudiera recordarlo! De todos modos lo que recuerdo es que el lógico pudo determinar si Oona estaba o no en la isla. ¿Estaba?.

Solución:

En este ejercicio no se informa lo que dijo B, pero en cambio se informa que a partir de lo que dijeron A y B, el lógico pudo determinar si Oona estaba en la isla.

Primero demostraremos que si B hubiera dicho "A es un bribón y Oona no está en la isla", entonces el lógico no podría haber resuelto el problema. Por lo tanto supongamos que B lo hubiera dicho. Ahora, A no podría ser un caballero, porque si lo fuera, entonces B sería un caballero (como dijo A), lo cual convertiría a A en un bribón como dijo B. Por lo tanto, A es definitivamente un bribón. Pero también podría ser que B sea un caballero y Oona no esté en la isla, o que B sea un bribón y Oona esté en la isla, y no hay forma de determinal cuál de las dos posibilidades es la correcta. Por lo tanto si B hubiera dicho eso, el lógico no podría haber sabido si Oona estaba en la isla. Pero se nos dice que el lógico sí lo sabía, en consecuencia B no dijo eso. Tiene que habar dicho: "A es un bribón y Oona está en esta isla".n Ahora veamos lo que ocurre.

A debe ser un bribón por la misma razón anterior. Si Oona está en la isla, obtenemos la siguiente contradicción: Es entonces verdad que A es un bribón y Oona está esn la isla, en consecuencia B formuló un enunciado verdadero, lo cual convierte a B en un caballero. Pero entonces A formuló un enunciado verdadero al declarar que B es un caballero y Oona está en la isla, opuesto al hecho de que A es un bribón. La única salida de la contradicción es que Oona no esté en la isla. Por lo tanto Oona no está en la isla (y, por supuesto, A y B son bribones).

50.- En el siguiente incidente, el lógico llegó a un a isla muy pequeña con sólo seis habitantes. Interrogó a cada un de ellos y, bastante curiosamente, todos dijeron lo mismo: "Por lo menos un bribón en esta isla ha visto a Oona aterrizar aquí esta tarde."

¿Algún nativo de esa isla vio a Oona aterrizar allí esa tarde?

Solución:
Dado que los seis nativos dijeron lo mismo, entonces o sontodos caballeros o todos bribones (todos caballeros, si lo que dijeron es verdadero, y todos bribones de lo contrario). Supongamos que eran todos caballeros. Entonces sería verdad que por lo menos un bribón en la isla había visto aterrizar a Oona, pero eso sería imposible, dado que ninguno de ellos es bribón. Por lo tanto todos debern ser bribones. En consecuencia lo que dijeron es falso, lo que significa que ningún bribón de la isla vió aterrizar a Oona esa tarde. Pero dado que todos los nativos son bribones, entonces ningún nativo vio aterrizar a Oona esa tarde.

51.- En otro extraño incidente, cuando el esposo llegó a una isla buscando a Oona, se encontró con cinco nativos, A, B, C, D, y E, quienes adivinaron su propósito y le sonrieron con picardía al encontrarlo. Formularon los siguientes enunciados:

A: Oona está en esta isla.
B: Oona no está en esta isla.
C: Oona estuvo aquí ayer.

D: Oona no está aquí hoy, y no estuvo aquí ayer.
E: D es un bribón o C es un caballero.

El lógico lo meditó durante un rato, pero no pudo lograr nada.
-¿Podría alguno de ustedes formular otro enunciado, por favor?,- suplicó el lógico. En ese momento A dijo: -E es un bribón o C es un caballero.

¿Está Oona en esta isla?

Solución:

Vamos a demostrar que si A es un bribón obtenemos una contradicción: supongamos que A es un bribón. Entonces su segundo enunciado era falso, en consecuencia E debe de ser un caballero y C debe de ser un bribón.

Dado que E es un caballero, su enunciado es verdadero, y, entonces, o D es un bribón o C es un caballero. Pero C no es un caballero, por lo tanto D debe de ser un bribón. De donde el enunciado de D era falso y, por lo tanto, Oona está aquí hoy o estuvo aquí ayer. Pero Oona no estuvo aquí ayer (porque C dijo que estuvo y C es un bribón), así que ella está aquí hoy. Pero esto convierte al primer enunciado de A en verdadero, contrario al supuesto de que A es un bribón. Entonces A no puede ser un bribón; debe ser un caballero. Por lo tanto el primer enunciado de A era verdadero, y Oona está en esta isla.

Bibliografía

[1] Chapa Vergara, Sergio; García Fernández Jesús.
Lógica Matemática y Aplicaciones a la Demostración de Teoremas.
Informe Técnico
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica.

[2] Ching-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee
Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving
Academic Press, Inc.

[3] Delong, Howard
A Profile of Mathematical Logic
E.U.A, 1980.

[4] Andrews, Peter B.
An -Introduction to Mathematical Logic and type theory: to truth through proof.
Department of Mathematics
Carniege Mellon University
Pittsburgh, Pennsylvania
Academic Press, Inc.

[5] Pinzón, Alvaro
Conjuntos y Estructuras
Colección Harper
Ed. Harla
México, 1983.

[6] Ferrater Mora, J; Leblanc Hugues.
Lógica Matemática
Ed. Fondo de Cultura Económica
México, 1965.