UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRECURSORES DEL CALCULO Y EL PROBLEMA INVERSO DE LAS TANGENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

VIANEY SUSANA MENDEZ BENITEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. MIGUEL LARA APARICIO

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Precursores del Cálculo y el problema inverso de las Tangentes

realizado por Méndez Benítez Vianey Susana

con número de cuenta 8830569-7 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	M. en C. Miguel Lara Aparicio
Propietario	M. en C. Angel M. Carrillo Hoyo
Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz
Suplente	Mat. Julio César Cedillo Sánchez
Suplente	M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

Consejo Departamental de Matemáticas

Precursores del Cálculo y el problema inverso de las tangentes

A la memoria de Arnulfo Benítez,
Quién con el ejemplo
me mostró lo que significa amar la vida,
la integridad personal
y el sentido de la lucha constante.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y al gran equipo de profesores que forman parte de ella, porque me ayudaron a formarme como profesional y como persona, permitiéndome crecer como una persona libre y con criterio propio.

Agradezco al profesor Miguel Lara Aparicio que además de ser un excelente director de tesis y haberme apoyado con sus conocimientos y su paciencia me demostró que es un excelente amigo.

Asimismo, quiero reconocer la gran labor realizada por mis sinodales: el Profesor Angel Carrillo, la Profesora Julieta Verdugo, el Profesor Agustín Ontiveros y el profesor y gran amigo César Cedillo, quienes me regalaron gran parte de su tiempo y compartieron su experiencia conmigo.

A mi familia, por su compañía y por su confianza, a mis padres, porque a pesar de los momentos difíciles siempre estamos unidos, a ti mamá porque hemos aprendido a ser dos buenas amigas. A mis hermanas: Dora por tu apoyo y cariño incondicionales de siempre, muchas gracias, a Jenny por que te esfuerzas por crecer, a Margarita porque siempre he creído en tí, a Mariana por tu encanto e inteligencia, a Carlos por todos los momentos que hemos compartido juntos y lo importante que has sido para mí y a Luis porque noto como has crecido y es muy grato.

A mi abuelita por ser un ejemplo de amor y entereza, gracias por enseñarme a trabajar.

A mi tía Rosalía y Blanca, a mís tíos Israel porque siempre fuiste un padre para mí, Damián, Armando, José Guadalupe, Javier, Arnulfo y José Luis por estar siempre conmigo. Al igual que Mariela, mi tía Hilda, Samantha y Rubén. A mis primos Iván y Claudia.

A todos mis amigos por compartirlo todo alegrías, tristezas y recibir apoyo y compresión inigualables: Ricardo, Manuel, Ana, Lulú, César, Gabriel, Vera, Josefina, Gloria, Tania y Alfredo.

A Fernando, por todos los maravillosos momentos que hemos compartido, por ser mi apoyo y tener un corazón tan enorme.

A Rosa por que siempre estás y por escucharme, gracias por ser una excelente amiga, a Marcos por tu integridad y por que siempre estás dispuesto a dar.

A Lucy Zamora por tener fé en mí. A la Sra. Natividad Aparicio por su ánimo y confianza.
A Raúl Blaquer (✞) y a la Sra. Guadalupe Carrasco (✞), por el legado que nos dejaron a los que les conocimos y que nunca les olvidaremos.

A todos mis amigos, por aceptarme como soy y por todos los momentos compartidos: Tony García, Germán Segovia Kimozabi, Charly Castañeda, Namy Moreno, Gabriel, Beny Alejandro, Sandra, Raúl, el profesor Carlos Sifuentes, Vicky, Juan.

A todos y todas quienes en este momento mi memoria no tiene presentes y que sin embargo han tenido un significado importante en mi vida, con un consejo, un regaño, una sonrisa, un ejemplo, gracias a todos.

INDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar al lector cómo se llevó a cabo el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

La primera etapa de este desarrollo es la utilización implícita de la derivada y de la integral, donde se empiezan a buscar soluciones a problemas particulares que más tarde se observaría que comparten características comunes. A continuación encontramos la etapa del descubrimiento, donde se logran métodos generales para resolver los problemas antes mencionados y en la que se alcanza una notación unificada. La etapa que culmina la historia del cálculo es la del desarrollo del análisis y su fundamentación, donde ya no queda ningún concepto sin formalizar y se establece claramente la idea de límite.

Es muy sabido que el descubrimiento del Cálculo fue realizado por Leibniz y Newton en el siglo XVII. Muchas veces nos detenemos muy poco a pensar en el porqué se les reconoce como los descubridores, o cómo llevaron a cabo su trabajo. Cuando se logra un nuevo conocimiento o se habla de un descubrimiento, éste no es resultado, en general, del trabajo de un sólo hombre, sino que es el resultado de muchos esfuerzos e intentos realizados por muchos individuos que viven antes o durante la época del que se reconoce finalmente como descubridor.

En el caso del Cálculo, muchos hombres tales como Galileo, Descartes, Cavalieri, Fermat, Roverbal, Wallis, Gregory, entre otros, sentaron las bases y las ideas fundamentales que más tarde permitieron a Newton y a Leibniz lograr grandes progresos en la materia que nos atañe.

Pero no sólo esto, todos ellos no se sentaron un día y dijeron "quiero investigar este tema", primero existe un problema que resolver, algo que origina y da forma a una idea. Recordemos que durante esta época el comercio se encontraba en su auge y el describir rutas marítimas adecuadas redituaba en ahorro de tiempo, en aumento de ganancias y disminución de pérdidas. Problemas de este tipo llevaron a profundizar en el estudio del concepto de función. Más tarde se requirió encontrar bajo qué condiciones se maximizaba o minimizaba una distancia, una ganancia, una ruta. Y es aquí donde inician los descubridores a probar métodos, a construir formas de solución, mismas que en su nacimiento eran demasiado particulares e informales.

Cada uno de estos precursores, si bien encontraron una solución correcta al problema estudiado en forma independiente al problema que fue objeto de su estudio, no encontraron un método general ni establecieron las bases necesarias para establecer los fundamentos de estos métodos.

Después de esta etapa podemos situar a Leibniz y Newton, quienes lograron establecer métodos generales de solución, aplicables a todos los problemas estudiados anteriormente, lo que permitió corroborar los resultados obtenidos en forma particular. Percibían la existencia del concepto de límite y vislumbraron la necesidad de formalizarlo, de hecho hicieron buenos intentos, pero no lograron establecer los fundamentos. Nos encontramos aquí en una fase de aplicación, aunque ya se inicia la fase de formalización y generalización.

Pero no es sino hasta la presentación de los trabajos de Lagrange y Cauchy que se consiguen grandes progresos en cuanto a la formalización y generalización del Cálculo, y se establece como una disciplina formal.

Queremos mostrar al estudiante de Cálculo el qué y el porqué de esta disciplina, sus orígenes, sus problemas y para qué nos sirve todo este desarrollo, es decir, su aplicación en nuestro mundo actual.

Aprovecho para agradecer el gran apoyo recibido por el profesor Miguel Lara Aparacio, su dedicación y paciencia, así como el trabajo y ayuda desinteresadas mostrada por mis sinodales.

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DE LA ÉPOCA EN LA QUE SE DESARROLLÓ EL CÁLCULO.

Para introducir al lector al fascinante desarrollo que tuvo el Cálculo Diferencial e Integral es necesario situar históricamente el momento que se vivía en el siglo XVII. Este momento histórico tuvo ciertas características especiales que crearon un ambiente propicio para el desarrollo de las ciencias en general y del Cálculo Diferencial e integral en particular.

1. LA MATEMÁTICA EN LA ÉPOCA DE LEIBNIZ Y NEWTON

El momento histórico en el que se desarrolla el Cálculo coincide con una época de cambios políticos y con el auge comercial-marítimo que vive Europa. Es la época de transición en la que se vive el inicio del fin de las monarquías absolutistas, la sociedad exige cambios religiosos y el hombre quiere conocer la verdad, comienza a utilizar métodos de investigación y de experimentación para lograrlo.

Desde la época de los griegos podemos encontrar trabajos que ya reflejan características de lo que hoy llamamos Cálculo Diferencial e Integral, pero fue durante el siglo XVII que se lograron las bases que permitieron el desarrollo de esta importante disciplina de las matemáticas.
Podemos citar tres aspectos como los más importantes:

- El desarrollo de la Geometría Analítica.
- El desarrollo del concepto de Función.
- La necesidad de utilizar fórmulas matemáticas dentro de la ciencia.

A continuación se describirá el trabajo realizado por grandes matemáticos que influyeron en el pensamiento de Newton y de Leibniz. Newton mismo reconoce más tarde que el avance que logró se debe a que pudo subirse en los hombros de "gigantes", y de esta manera pudo ver más lejos .

2. APORTACIONES Y DESARROLLOS QUE PERMITIERON EL DESCUBRIMIENTO DEL CÁLCULO

La Geometría Analítica permitió manipular más fácilmente expresiones matemáticas, investigar nuevas curvas como la cicloide, o el folio de Descartes y, en general, analizar más fácilmente las curvas ya conocidas como las cónicas y las cúbicas.

Estas nuevas curvas surgieron a través del estudio del movimiento, dicho estudio surgió por necesidades económicas como veremos a continuación.

El estudio del movimiento predominó durante el siglo XVII. Existía una predilección por los temas referentes al movimiento de los astros. Durante esta época el estudio del movimiento de los planetas y otros cuerpos celestes, como la luna, tuvo un gran auge.

Dentro de este campo podemos mencionar los trabajos de Kepler como algunos de los más importantes acerca del movimiento de los planetas. Las leyes de Kepler fueron sólo aproximadamente exactas, serían totalmente exactas si hubiera un sol y un solo planeta girando alrededor de él, pero sabemos que estas condiciones no se cumplen, sin embargo, sus estudios fueron la base para los estudios posteriores referentes al movimiento de los planetas. Kepler consideraba que había una fuerza de atracción entre los cuerpos pero le faltaba explicarlo, así como el porqué los planetas describen la ruta elíptica que él descubrió.

Por otra parte, la astronomía perseguía un objetivo práctico. Los navegantes necesitaban métodos exactos para determinar la longitud y la latitud para poder llegar así a los destinos fijados. Recordemos que en esta época el comercio marítimo desempeñaba un papel muy importante en la economía de los países.

La latitud se determinaba observando el sol y las estrellas, pero determinar la longitud resultó ser un proceso más complejo. Se utilizó la posición de la luna con respecto a las estrellas. Pero saber cuál era el movimiento que describía la luna fue muy difícil. Además la posición de ésta con respecto a las estrellas no es exacta, varía dependiendo del lugar donde se encuentre el observador y del período del año. Además, pequeños errores en el cálculo de la longitud (digamos 15°), podían significar una desviación de al menos 100 millas del destino deseado y el atraso correspondiente en la entrega de mercancías.
Este fue uno de los motivos principales que alentó el desarrollo de expresiones matemáticas que pudieran describir el movimiento y así poder ubicar rutas con exactitud.

Otro fenómeno que atrajo la atención de los matemáticos de esta época fue el movimiento de un proyectil que al ser lanzado al espacio regresa a la tierra. Se sospechaba además que las mismas leyes que regían el movimiento en la tierra, regían el movimiento en el cielo.

Para este tipo de estudio se hizo necesaria la construcción de relojes más exactos para medir mejor el tiempo, que es una variable ligada al movimiento. Galileo observó que el péndulo oscila debido a la rotación de la Tierra y que dichas oscilaciones son constantes. Hooke y Huygens hicieron el trabajo básico en péndulos y lo aplicaron a la fabricación de relojes. Desgraciadamente estos relojes no eran buenos en los barcos ya que el movimiento del barco perturbaba el movimiento del péndulo.

De todas estas investigaciones surgió de manera implícita el concepto de función. Galileo expresa sus "funciones" como proporciones. Por ejemplo, en sus trabajos de resistencia de materiales, expresa:

- Las áreas de dos cilindros de igual volumen (en las que despreciamos sus bases) son proporcionales a la raíz cuadrada de la razón de sus alturas.
- Los volúmenes de cilindros rectos que tienen igual superficie son inversamente proporcionales a sus alturas.
- Los espacios descritos por un cuerpo que cae con una aceleración uniforme son entre sí como los cuadrados del tiempo empleado en recorrer dicha distancia.

Es claro que aquí se relacionan variables. Este tipo de relaciones se tradujeron al álgebra, como por ejemplo, el espacio descrito por un cuerpo en caída libre se escribe en forma de ecuación como,

$$s = kt^2$$

Esta ecuación refleja que el espacio recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo.

Es importante recalcar que nuevas curvas, como la cicloide, fueron introducidas al estudiar el movimiento. En tiempos de los griegos algunas curvas, como la cuadratriz y la espiral de Arquímedes, fueron definidas en términos del movimiento pero sin planteamientos matemáticos válidos. Observemos cómo se introducen nuevos conceptos y temas de estudio:

- Mersenne en 1615 definió la cicloide (conocida ya anteriormente, pero no estudiada a fondo) como el lugar geométrico de un punto que se mueve en una rueda que se desplaza sin resbalar a lo largo del suelo.

- Galileo mostró que la trayectoria que sigue un proyectil lanzado en el aire es una parábola.

- Roberval, Barrow y Newton definen la trayectoria como un conjunto de puntos en movimiento.

Gradualmente fueron introduciéndose términos y símbolos para representar curvas y funciones. Se empezó a trabajar con relaciones que contenían valores irracionales, es decir se empezó a fundamentar el conjunto que más tarde se conocería como el conjunto de los números reales. Es importante observar cómo el concepto de límite surgió y se fundamentó a la par del concepto de función y la teoría de los números.

James Gregory dio una primera definición explícita del concepto de función en 1667. Definió una función como una cantidad obtenida de otras cantidades por una sucesión de operaciones algebraicas o por cualquiera otra operación imaginable (por ejemplo logaritmos).

Por otro lado, Newton utilizó el término *fluente* para representar cualquier relación entre variables.

En 1673 Leibniz utilizó la palabra *función* para nombrar cualquier cantidad que varía de punto a punto de una curva. Por ejemplo, la longitud de la tangente, la normal, la subnormal y la ordenada. También introdujo los términos constante, variable y parámetro que más tarde aplicó a familias de curvas. En 1714 usó la palabra *función* para nombrar cantidades que dependen de una variable.

John Bernoulli adoptó la siguiente nomenclatura; como notación escribió X, ξ y más tarde Φx para una función general de x. Euler introdujo la notación $f(x)$ en 1734.

3. PROBLEMAS QUE ORIGINARON SU ESTUDIO

Después de adoptar el concepto de función, el desarrollo del Cálculo fue impresionante y se puede considerar que al igual que la Geometría Euclidiana, el Cálculo es una de las más grandes creaciones dentro de las matemáticas.
Las bases de su desarrollo se cimentaron al estudiar cuatro tipos de problemas:

PRIMER PROBLEMA:

Dada la fórmula de la distancia de un cuerpo como una función del tiempo, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante e inversamente, dada la aceleración en función del tiempo, encontrar la velocidad y la distancia recorrida. Este problema aparece directamente en el estudio del movimiento y la dificultad residía en que la velocidad y la aceleración cambian de instante a instante y para calcular la velocidad instantánea no se puede dividir el espacio recorrido entre el tiempo (como en el caso de la velocidad promedio), ya que en un instante tanto la distancia como el tiempo son cero y $\frac{0}{0}$ no está definido.

Sin embargo, es claro que un cuerpo en movimiento tiene una velocidad en cada instante de su desplazamiento. Para el problema inverso tampoco es posible hacer una multiplicación para encontrar la distancia (ya que $d = v \cdot t$ y $t = 0$).

EL SEGUNDO PROBLEMA:

Consiste en encontrar la tangente a una curva. Fue un problema de geometría pura y de gran importancia en las aplicaciones científicas. Por ejemplo en óptica, para estudiar cómo pasa la luz por una lente se debe conocer el ángulo con el cual el rayo incide en la lente para aplicar la ley de refracción; dicho ángulo es el determinado por el rayo y la normal a la curva (lente), donde la normal es la perpendicular a la tangente.

Para secciones cónicas la tangente se definió como una línea que toca a una curva en un sólo punto y que no la toca o la corta en ningún otro lado. Para curvas más complicadas esta definición no fue adecuada. Actualmente, la definición analítica de recta tangente tiene un sentido local, se define como aquella recta que toca a la curva en un único punto y cuya pendiente es la derivada de la función en el punto en cuestión.

TERCER PROBLEMA:

Encontrar los valores máximo y mínimo valor de una función. Por ejemplo, se observó que cuando se lanzaba un proyectil con un cañón, la distancia recorrida con respecto a su lugar de salida, así como la altura que alcanzaba dependían del ángulo de inclinación con que se dispara.

CUARTO PROBLEMA:

Se requería conocer la longitud de una curva (por ejemplo, la distancia que recorre un planeta en un cierto periodo), el centro de gravedad de un cuerpo, las áreas limitadas por superficies, etcétera.
Los griegos utilizaron el método de exhausión para calcular algunas áreas y volúmenes. Este método más tarde fue modificado y luego erradicado por el Cálculo, aunque realmente sirvió de base para los métodos finalmente conseguidos por esta disciplina.

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DIRECTO DEL CÁLCULO. TANGENTES A CURVAS.

LOS GIGANTES DE NEWTON

En este capítulo revisaremos los trabajos de los matemáticos predecesores a Leibniz y Newton. Observaremos cómo la idea de aproximación empieza a gestarse, cómo tienen la idea de límite pero no cuentan con toda la información necesaria para plasmar y manejar abiertamente este concepto, fundamental en el Cálculo Diferencial e Integral.

Es importante recalcar que todos los investigadores contaban con una poderosa capacidad de análisis y cálculo, ya que lograron grandes descubrimientos aún sin contar con las herramientas necesarias que se tienen hoy en día. Esta etapa representa el percatarse de la necesidad de desarrollar una herramienta que permita resolver problemas que subyacen bajo ciertas características comunes, aunque en esta primera fase se traten como problemas aislados, pues los investigadores no se dan cuenta aún que están trabajando con el mismo problema.

1. MÉTODOS GRIEGOS PARA CONSTRUIR TANGENTES A LAS CÓNICAS.

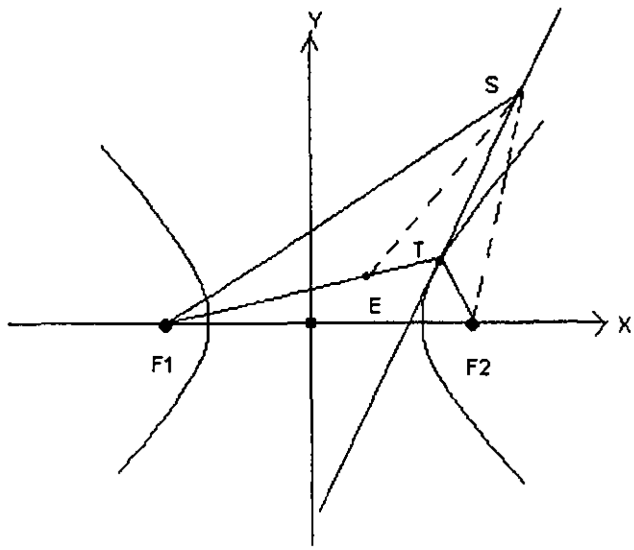
Los griegos manejan un concepto sencillo de tangente. Para ellos la tangente es la recta que toca en un solo punto a la curva. Claro está que su concepto está bien definido en cuanto se refiere a las cónicas, pero no es correcto para cualquier curva en general.

Sin embargo, el trabajo fundamental de los griegos, en este campo, se refiere a las cónicas, por lo que su definición de tangente es correcta. Entre los principales personajes que contribuyeron a estudiar esta materia podemos mencionar a Apolonio de Perga (250-175 A. de C.) y a Arquímedes (287-212 A. de C.).

Todas sus construcciones fueron hechas apoyándose en el uso de la regla y el compás. Poseían un método específico para encontrar la tangente a cada cónica.

Mostramos, como ejemplo del ingenio de los griegos, la construcción de la tangente a una hipérbola. Los demás casos podrán encontrarse en el apéndice.

Es posible realizar análogamente todos los pasos que a continuación se describen, para cualquier punto en la rama izquierda de la hipérbola o para cualquier punto en los cuadrantes III y IV que pertenezca a la curva, ya que los pasos necesarios se basan en longitudes y los signos de las distancias son irrelevantes, como podrá observarse.



El método consiste en construir la bisectriz del ángulo F_1TF_2. Afirmando así que la bisectriz encontrada es tangente a la hipérbola en el punto *T*.

Teorema: La bisectriz del ángulo F_1TF_2 es tangente a la hipérbola en el punto T.

Demostración.

Por definición de hipérbola sabemos que $F_1T - TF_2 = C$ (constante).
Por demostrar que la bisectriz del ángulo F_1TF_2 es tangente a la hipérbola en el punto T.

Será suficiente probar que T es el único punto de contacto entre la recta y la hipérbola. Es decir, para otro punto *S* sobre la bisectriz, probaremos que éste no pertenece a la hipérbola.

Trazamos un círculo con centro en T y radio TF_2. Sea *E* la intersección del círculo con el segmento F_1T.

Observamos que el triángulo TEF_2 es isósceles por construcción, esto es $ET = TF_2$; por lo que TS biseca a EF_2, esto origina que en este caso particular la bisectriz de F_1TF_2 coincida con la mediatriz del segmento TEF_2, por lo que *S* está a la misma distancia de *E* que de F_2 (propiedad de la mediatriz).

Por tanto $SE = SF_2$. Por otro lado se tiene que $F_1T = F_1E + ET$ lo que implica que $F_1T - ET = F_1E$.

Ahora, $F_1T - TF_2 = F_1E$ (F_1E es constante por definición de hipérbola.)

Del triángulo F_1ES y por la desigualdad del triángulo, tenemos que:

$$C = F_1E \rangle F_1S - SE = F_1S - SF_2$$

Por tanto S no pertenece a la hipérbola.

Por lo que la recta TS es tangente a la curva, lo que queda demostrado.

Cabe hacer notar que el método de aproximaciones sucesivas está implícito en este desarrollo, ya que, a medida que tomemos el punto S más cercano al punto T, el triángulo SEF_2, fundamental en la demostración antes expuesta, degenera paulatinamente hasta convertirse en una recta cuando el punto S coincida con el punto T. De aquí que el hecho de que el punto T sea el único punto de contacto de la tangente con la hipérbola es muy importante..

2. RENÉ DESCARTES (1596 - 1650)

EL MÉTODO DE LAS RAÍCES IGUALES

René Descartes fue filósofo, soldado, caballero y matemático, nació en Turín el 31 de marzo de 1596. Su padre fue un famoso abogado que formó parte del parlamento. René nació en una vieja familia, cuyos hijos estaban destinados a ser caballeros independientes en el servicio de Francia; nunca necesitó trabajar para vivir. Su madre murió pocos días después de su nacimiento.

Su frágil salud le obligó a permanecer en cama hasta la edad de ocho años, cuando fue enviado al colegio jesuita de La Flèche. Atrajo rápidamente la atención de su rector, quien permitió que su talentoso pupilo descansara en cama hasta que pudiera unirse a su clase. Este hábito formó parte de su vida. En esas tranquilas mañanas tuvo sus mejores ideas tanto filosóficas como matemáticas.

Después de ocho años de estudiar al lado de los jesuitas, Descartes fue a París. Sin embargo, rápidamente se aburrió de la vida social y se retiró por dos años a una villa tranquila a meditar y estudiar, obteniendo además su grado de abogado.

En 1617, sorpresivamente se enlistó en la armada de Dutch en Breda. Holanda consiguió la paz y Descartes pudo disfrutar de dos años más de meditación, mientras aprendía el arte del soldado del príncipe Mauricio de Orange.

En noviembre de 1619 cuando su regimiento estaba resistiendo el invierno en los cuarteles, Descartes tuvo un sueño un tanto traumático que lo convenció de la futilidad de su vida; es aquí donde Descartes decide ser un filósofo.

El 10 de noviembre de 1619 proclama el nacimiento de la Geometría Analítica y, claro, de las matemáticas modernas.

Tomó parte en la batalla de Praga en 1620; pero en el siguiente año completamente desilusionado de la guerra y de sus terribles consecuencias, decide abandonar su carrera militar.

Tras viajar algunos años por el norte de Europa e Italia, regresa a París en 1625. Pasa ahí tres pacíficos y felices años. La vida militar sigue atrayendo su atención y en 1628, Descartes se embarca para unirse a las fuerzas del Duque de Savoy. Le ofrecen el grado de general, mismo que rechaza. Después decide vivir en Holanda y permanece ahí durante veinte años.
Pasó sus últimos años al servicio de la reina Cristina de Suecia, que le obliga a ir a Estocolmo donde muere en 1650.

En la obra filosófica de Descartes destacan su famoso *Discurso del Método* (1637) y *Las Pasiones del Alma* (1650).

Descartes, padre de la Geometría Analítica, mérito que comparte con Fermat, atacó el problema de la tangente a una curva en una forma muy diferente a la utilizada por los griegos. Su método se basa en sus conocimientos de Geometría Analítica, aunque como podremos observar, su método no es generalizable y sólo se aplica a ecuaciones cuadráticas.

Tomemos como ejemplo la curva $y = x^2$.

Descartes inicia considerando una recta que corta en dos puntos a la parábola, es decir, una secante. A continuación manipula las ecuaciones de ambas curvas de forma tal que la recta secante se aproxime hasta concluir en la tangente buscada.

Como ejemplo, encontraremos la tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(2,4)$.

Por sus estudios en Geometría Analítica, Descartes sabía que la recta pertenece a la familia de rectas que pasan por el punto común $(2,4)$:

$$y - 4 = m(x - 2)$$

Para encontrar los puntos de intersección (ya que inicialmente considera a la recta como una secante) resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y - 4 &= m(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= mx - 2m \\ x^2 - mx + 2m - 4 &= 0 \\ x &= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m + 16}}{2} \end{aligned}$$

Para que la raíz sea única (lo que implicaría un sólo punto de intersección y por consiguiente la recta tangente), es necesario que,

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

De aquí,

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Por tanto, la ecuación de la tangente es

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$4x - y - 4 = 0$$

En general, el método de Descartes se aplica a curvas de la forma $y = ax^2 + b$. Por ejemplo, supongamos que se quiere encontrar la tangente a tal curva en el punto (x_0, y_o). Descartes sabía que la tangente pertenece a la familia de rectas $y - y_0 = m(x - x_o)$. A continuación encuentra la intersección de la curva con la secante, resolviendo el sistema

$$y = ax^2 + b$$
$$y - y_0 = m(x - x_o)$$

Obteniendo la ecuación

$$ax^2 - mx + (b + mx_0 - y_0) = 0.$$

Al utilizar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, tenemos

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4a(b + mx_0 - y_0)}}{2a}$$

Para que la raíz sea única debe cumplirse que

$$m^2 - 4amx_0 + 4ay_0 - 4ab = 0$$

Utilizando la fórmula general para m y $y = ax^2 + b$,

$$m = \frac{4ax_0 \pm \sqrt{16a^2x_0^2 - 4(4ay_0 - 4ab)}}{2}$$

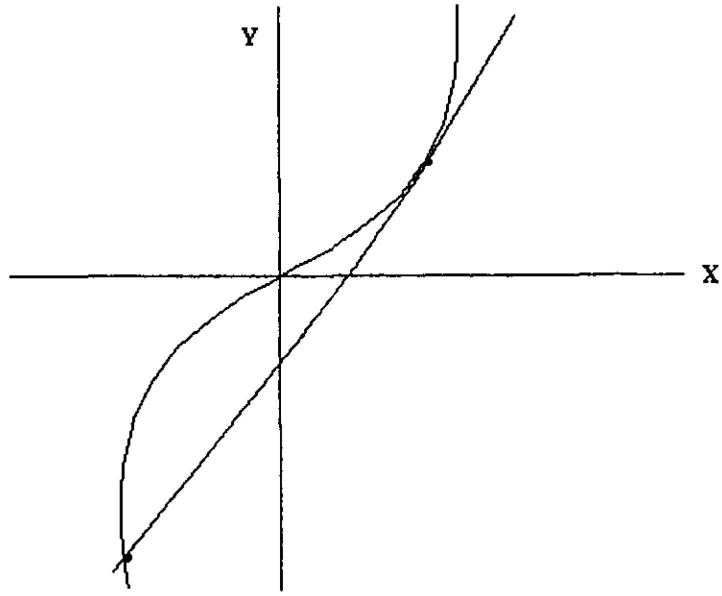
$$m = \frac{4ax_0 \pm \sqrt{16a^2x_0^2 - 4(4a(ax_0{}^2 + b) - 4ab)}}{2}$$

Observamos que dentro del radical tenemos una expresión que es igual a cero, por lo que esta ecuación tiene una raíz única,

$$m = 2ax_0,$$

Con lo que se obtiene así el valor de la pendiente de la recta tangente.

Como antes se mencionó, su método no puede aplicarse a ecuaciones como $y = x^3$, ya que la idea principal del método falla, ya que en este tipo de curvas, no es posible partir del hecho de que la tangente toca a la curva en un punto único, como ocurre en el caso de la tangente a una curva de segundo grado (cónica); veamos la siguiente figura:



3. PIERRE DE FERMAT (1601 - 1665).

Pierre de Fermat nació en 1601 en Beaumont de Lomagne, cerca de Montauban. Su padre, comerciante de cuero, después de haber dado una introducción sólida en su familia, le envió a estudiar derecho a Tolousse. Allí pasó toda su vida, ejercitando derecho, a partir de 1631, fue consejero en el parlamento, y murió en Castres en 1665.

Fermat tuvo una carrera apacible, caracterizada por un cuidado ejemplar de hacer bien su tarea y, en sus momentos de ocio, supo crearse ocupaciones literarias y apasionarse por las matemáticas. Fermat rara vez publicó sus descubrimientos; apenas algunas notas como apéndices a tratados escritos por otros. Para distraerse de su trabajo se entretenía en leer tratados de matemáticas, anotando sus resultados más bellos en los márgenes de éstos libros, por lo que un gran número de sus trabajos se ha perdido.

Mantuvo correspondencia con todos los científicos de su época; su reputación de matemático competente fue inmensa, y la estima en la que se le tuvo fue general. Pascal confesó que Fermat era *aquél a quien tengo por el gran geómetra de toda Europa* , y este personaje tan atrayente, de un carácter constante, afable, poco susceptible, sin orgullo, contribuyó ampliamente a la evolución de las matemáticas en campos tan valiosos como la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial e Integral, la Teoría de los números y la Teoría de las Probabilidades.

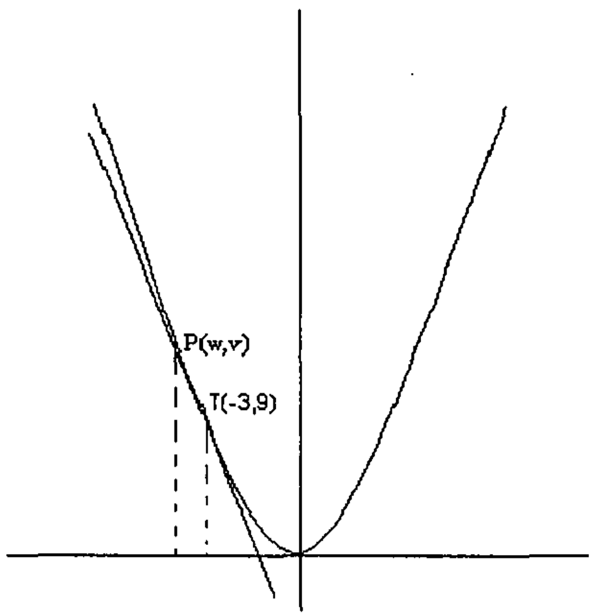
Los principales escritos de Fermat fueron publicados, después de su muerte, por su hijo Samuel en 1679, bajo el título *Varia opera mathematica* . Aunque esta publicación no encierra más que una parte de su producción, basta por sí sola para clasificar al célebre habitante de Toulouse como el más importante matemático francés del siglo XVII.

Su método es diferente al utilizado por Descartes y puede aplicarse a cualquier curva; de hecho, Fermat es el predecesor directo del método utilizado actualmente.
Primero sitúa el punto T donde quiere encontrar la tangente y toma otro punto cercano a él.
Traza, en seguida, la recta que une estos dos puntos y que es secante a la curva.

Entonces calcula la pendiente de esta recta. En general, calcula la pendiente de la familia de rectas que pasan por el punto T y observa lo que ocurre con la pendiente cuando el punto P se aproxima al punto T.

Veamos un ejemplo,

$$\text{Sea } y = x^2 \text{ y } T(-3,9)$$



La pendiente de PT es,

$$_{m}PT = \frac{v-9}{w+3}$$

Como P pertenece a la parábola,

$$_{m}PT = \frac{w^2-9}{w+3} = w-3$$
$$_{m}PT = w-3$$

si P se aproxima a T, entonces w se aproxima a -3. Por tanto,

$$_{m}PT = -6,$$

por lo que la ecuación de la tangente es,

$$y+3 = -6(x-9)$$
$$6x+y-51=0$$

En una forma más general y usando la notación actual, observemos lo que pasa con la función $y = x^3$.

Sea (x, y) el punto donde queremos encontrar la tangente y (v, w) un punto cercano a él sobre la curva.

$$\mu(x) = \underset{P \to T}{limite} \quad de \quad la \quad pendiente \quad PT$$

$$\mu(x) = \lim_{w \to x} \frac{v - y}{w - x} = \lim_{w \to x} \frac{w^3 - x^3}{w - x}$$

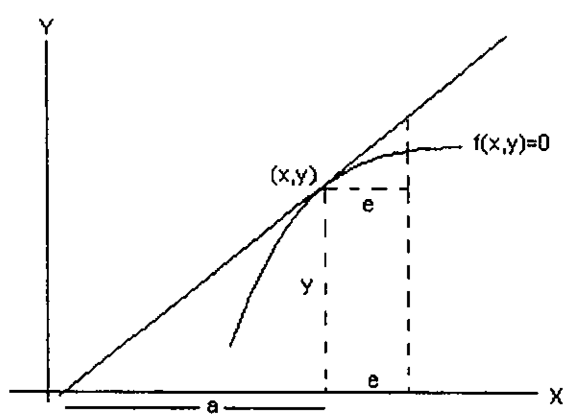
$$\mu(x) = \lim_{w \to x} \frac{(w - x)(w^2 + wx + x^2)}{w - x}$$

$$\mu(x) = \lim_{w \to x} w^2 + wx + x^2$$

$$\mu(x) = 3x^2$$

De esta manera se calcula la tangente a la curva en cualquier punto. Notamos que Fermat tiene la misma idea que más tarde se apreciaría en el trabajo de Newton, donde primero se divide entre un incremento y después lo elimina.

Otro método utilizado por Fermat para encontrar tangentes y que podemos distinguir del anterior llamándole método gráfico, es el siguiente:



Se quiere encontrar la tangente a la curva en el punto (x, y) de la función $f(x, y) = 0$. El trabajo de Fermat consiste en encontrar la subtangente a en el punto (x, y) de la curva (la subtangente es la longitud del segmento de recta comprendido entre la intersección de la tangente con el eje X y la abscisa del punto (x, y)).Para ello toma un punto cercano al punto de tangencia.

Por triángulos semejantes tenemos que,

$$\frac{y}{a} = \frac{ordenada \quad punto \quad cercano}{a + e}$$

lo que nos lleva a,

$$ordenada \quad punto \quad cercano = y\left(1+\frac{e}{a}\right)$$

por lo que las coordenadas de un punto cercano al punto de tangencia son $\left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]$.

Este punto es tentativamente tratado como si perteneciera a la curva, obteniendo

$$f\left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]=0$$

A continuación divide entre e. En seguida, Fermat supone $e=0$. La ecuación resultante nos da el valor de la subtangente.

Utilizando los procesos actuales, podemos afirmar que el proceso de Fermat equivale a obtener la derivada de la función $f\left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]=0$, con respecto a e. Tenemos la función compuesta

$$R \rightarrow R^2 \xrightarrow{f} R$$

$$e \rightarrow \left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right] \rightarrow R$$

Obteniendo la derivada con respecto a e:

$$\frac{df}{de}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial e}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial e}=\frac{\partial f}{\partial x}(1)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{a}=0$$

lo que nos lleva a

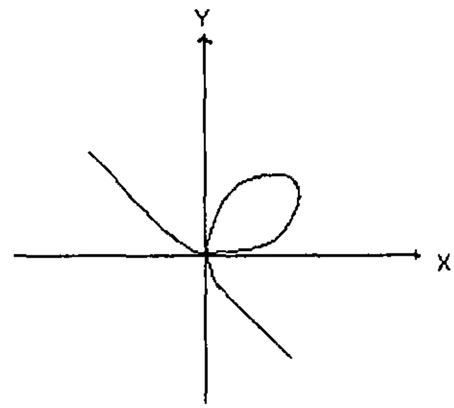
$$a=-y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Donde a es la longitud de la subtangente. De aquí, al conocer ahora dos puntos sobre la tangente, el método de Fermat nos permite conocer la tangente.

Este proceso es similar al método de diferenciales utilizado en Cálculo. El mayor problema estriba en el concepto de límite. De hecho Fermat ni siquiera utiliza el término *límite*, y en su lugar utiliza la expresión "es parecido a".

Ejemplo. Fermat aplicó su método a la curva llamada "folio de Descartes":

$$x^3+y^3=nxy$$



Sustituyendo las coordenadas de un punto cercano tenemos,

$$(x+e)^3 + y^3(1+\frac{e}{a})^3 - ny(x+e)(1+\frac{e}{a}) = 0$$

o,

$$e(3x^2 + \frac{3y^3}{a} - \frac{nxy}{a} - ny) + e^2(3x + \frac{3y^3}{a^2} - \frac{ny}{a}) + e^3(1+\frac{y^3}{a^3}) = 0$$

Dividimos entre e. A continuación se iguala e a cero, así encontramos que,

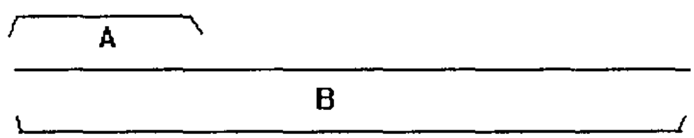
$$a = -\frac{3y^3 - nxy}{3x^2 - ny}$$

Donde a es la subtangente. De esta forma, al conocer la posición de la subtangente, Fermat puede conocer la tangente.

El método de Fermat para encontrar máximos y mínimos puede apreciarse y resumirse en el siguiente problema.

Dado un segmento de recta B se desea encontrar un segmento A (donde A es una porción de B) tal que los dos segmentos A y $B-A$ así encontrados formen un rectángulo de área máxima.

Sea B el segmento dado y A una porción del mismo:



Por tanto, el área es $A(B-A)=AB-A^2$

Al reemplazar a A por $A+\varepsilon$, donde ε es un pequeño incremento, el área es $(A+\varepsilon)(B-A-\varepsilon)$. Enseguida se igualan ambas áreas (la original y la última con el incremento en A),

$$AB-A^2 = AB-A^2-2A\varepsilon+B\varepsilon-\varepsilon^2$$

Lo que implica, $B=2A+\varepsilon$

Después toma $\varepsilon=0$ y obtiene $A=\dfrac{B}{2}$,es decir, el rectángulo de mayor área es un cuadrado.

En general, Fermat resume así su método: " Si A es la variable independiente y se incrementa a $A+\varepsilon$ entonces, cuando ε se vuelve indefinidamente pequeño y la función pasa por un máximo o un mínimo, los dos valores de la función serán iguales. La ecuación se divide entre ε y éste se anula, resultando así el valor de A que permite determinar el valor máximo (en este caso) de la función".

Lo que realmente afirma Fermat es que cuando existe un máximo (actualmente agregamos la condición de que la función sea derivable), la derivada de la función es cero. Podemos probar este resultado.

Teorema: Sea f una función definida sobre (a,b). Si en x f alcanza un máximo (o un mínimo) en (a,b), y f es derivable en x, entonces $f'(x)=0$.

Demostración

Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. (La idea del razonamiento es sencilla; las secantes trazadas por puntos a la izquierda de $(x,f(x))$ tienen pendientes mayores o iguales que cero, y las secantes trazadas a la derecha de $(x,f(x))$ tienen pendientes menores o iguales que cero). Analíticamente:

Si h es un número cualquiera (que corresponde a la ε de Fermat) tal que $x+h$ está en (a,b), entonces

$f(x)\geq f(x+h)$, puesto que f tiene un máximo sobre (a,b) en x.

Esto significa que

$$f(x+h)-f(x)\leq 0$$

Así pues, si $h>0$ tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0$$

y en consecuencia

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0$$

Por otra parte, si $h < 0$ tenemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0,$$

de modo que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

Por hipótesis, f es derivable en x, de modo que estos dos límites deben ser iguales entre sí e iguales a $f'(x)$. Esto significa que $f'(x) \leq 0$ y $f'(x) \geq 0$,
de lo cual se sigue que $f'(x) = 0$, Q.E.D.

La demostración es análoga en el caso de que f tenga un mínimo.

Fermat no vio la necesidad de justificar en su método la introducción de $\varepsilon \neq 0$, dividir entre este mismo valor y después hacer que $\varepsilon = 0$. Es decir, aún no se fundamentaba el concepto de límite.

4. ISAAC BARROW (1630 - 1677).

Realizó estudios en Charterhouse, Felsted y en el Trinity College de Cambridge. Ingresó a los catorce años al Trinity College, terminando sus estudios en 1648. Después por razones religiosas, dejó Cambridge y por tres años visitó París, Florencia, Esmirna, Constantinopla y Venecia; volvió a Inglaterra pasando por Alemania y los Países Bajos. Aprovechó sus viajes para perfeccionarse y para establecer contactos con matemáticos de Francia e Italia.

Recibió las órdenes religiosas a su vuelta a Inglaterra, ocupó inmediatamente un puesto de profesor de griego en la Universidad de Cambridge. En 1662 aceptó un puesto de profesor de Geometría en el Colegio Gresham de Londres. Fue de los primeros elegidos como Fellow por la Royal Society después de su constitución.

En 1663 se convirtió en el primer profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge, sucediendo a Henry Lucas (1610-1663), fundador de la cátedra que lleva su nombre. Barrow dejo su puesto de profesor a Newton en 1669. El mismo año fue nombrado capellán de Carlos II y en 1672, profesor del Trinity College.

Muy competente en árabe y griego, Barrow tradujo ciertas obras de Euclides y mejoró las traducciones de textos de Euclides, Apolonio, Arquímedes y Teodosio. Su admiración por los estudios clásicos le llevó probablemente a adoptar un punto de vista conservador en matemáticas, rechazando el formalismo en álgebra; pensaba que el álgebra debía formar parte de la lógica más que de las matemáticas.

Publicó en 1669 sus *Lectiones Opticae* y en 1670 aparecieron sus célebres *Lectiones Geometricae*, que comprenden trece lecciones. A pesar de una presentación enteramente geométrica que hacía difícil la lectura de sus lecciones de geometría, Barrow hizo un esfuerzo sistemático para incluir en su obra todo el campo de los procedimientos infinitesimales conocidos por él, así como un método algebraico para la determinación de las tangentes, al parecer, por sugerencia de Newton.

Los trabajos de Barrow, considerados como algunos de los trabajos culminantes de las investigaciones geométricas del siglo XVII, representan la exposición más sistemática y detallada de las propiedades de las curvas tales como las tangentes, arcos ,áreas, etcétera, lo que en manos de Newton y Leibniz, conducirá rápidamente a la invención del Cálculo Diferencial e Integral. De todos los matemáticos que se aproximaron a los distintos aspectos del Cálculo Diferencial e Integral, Barrow es el que estuvo más cerca.
Hizo un esfuerzo notable para relacionar los diferentes resultados conocidos en un bosquejo esencialmente geométrico, y fue quizás esta fidelidad a los métodos geométricos lo que le impidió desempeñar un papel más importante como había deseado.

Las razones que llevaron a Barrow a abandonar su cátedra de Cambridge para dejársela a Newton son numerosas y diversas. Se sabe sin ninguna duda que, después de la aparición de sus lecciones de geometría se consagró a la teología, dejando a su eminente sucesor la tarea de realizar su síntesis inacabada.

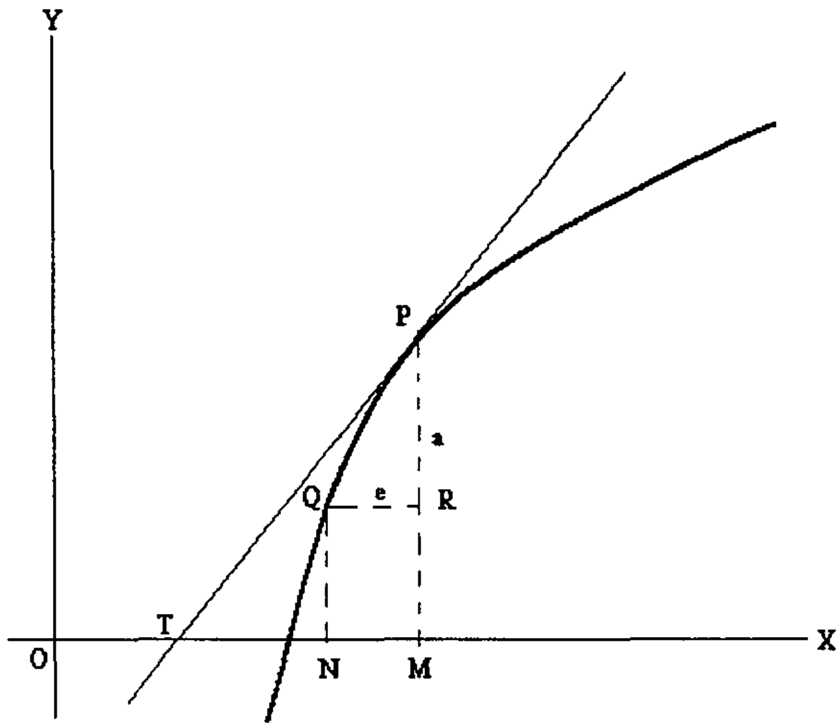
Isaac Barrow fue uno de los pioneros en descubrir métodos para encontrar tangentes a curvas. Recordemos que Barrow fue profesor de Newton y que sus ideas influyeron enormemente en los inicios de las investigaciones de este último.

El método utilizado por Barrow para encontrar tangentes es similar al seguido por Fermat.

Barrow pretende encontrar la tangente de una curva en el punto P.

Sea PT la tangente a la curva en el punto P y T el punto de intersección de la tangente con el eje X. Sea M la coordenada x del punto P. El segmento TM se conoce como subtangente.

La curva se presenta en la siguiente figura.



Sea PT la tangente que se quiere encontrar o definir. Sea Q un punto cercano a P en la curva. Los triángulos PTM y PQR son muy similares y Barrow sostiene que cuando el triángulo PQR llega a ser indefinidamente pequeño, se tiene que,

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

Llamemos $QR = e$ y $RP = a$. Si las coordenadas de P son(x, y), entonces las de Q son$(x - e, y - a)$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva y despreciando los términos que incluyen potencias mayores a uno de a y e, encontraremos la razón $\frac{e}{a}$.

Tenemos entonces que,

$$OT = OM - TM = OM - MP\left(\frac{QR}{RP}\right) = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$$

Determinándose así la recta tangente, ya que al conocer la subtangente se conocen dos puntos sobre la recta tangente. Cabe notar que el signo de la subtangente es importante ya que estamos calculando distancias. Su método no funciona cuando la derivada es cero ya que, en este caso, la tangente es una recta horizontal y no toca al eje X, por ello no es un método general pero es una idea muy cercana al concepto de derivada, además el trabajo de Barrow propició las investigaciones que Newton hizo más tarde.

Para ilustrar su método apliquémoslo a la curva $x^3 + y^3 = r^3$

Sustituyendo los valores de las coordenadas del punto Q tenemos:

$$(x-e)^3+(y-a)^3=r^3$$

$$x^3-3x^2e+3xe^2-e^3+y^3-3y^2a+3ya^2-a^3=r^3$$

Descartando los términos que contienen potencias de a y e, mayores que 1 además de utilizar el hecho de que $x^3+y^3=r^3$ tenemos

$$3x^2e+3y^2a=0$$

de donde

$$\frac{a}{e}=-\frac{x^2}{y^2}.$$

La notación para la inversa de la razón $\frac{e}{a}$ es por supuesto nuestra moderna $\frac{dy}{dx}$. Observemos que realmente lo que hace falta en el método de Barrow es la teoría de límites, sobre todo en la primera parte donde afirma que los triángulos PTM y PQR son "casi" proporcionales. También notamos la falta del concepto de límite cuando elimina los términos que contienen potencias de a y e superiores a uno.

Sin embargo, su trabajo tuvo una enorme influencia en las investigaciones que más tarde realizaría Newton, quien tuvo acceso a estos trabajos desde su época de estudiante en la Universidad de Cambridge donde Barrow fue su tutor.

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA INVERSO DEL CÁLCULO. CUADRATURAS.

En el capítulo anterior revisamos los primeros trabajos referentes a encontrar la tangente a la gráfica de una función, problema que más tarde culminaría con el descubrimiento del concepto de derivada. Ahora analizaremos los primeros trabajos que originaron la idea de integral y que unidos a las investigaciones ya tratadas en el capítulo anterior, forman los cimientos de lo que hoy conocemos como Cálculo Diferencial e Integral.

Observaremos que los primeros trabajos datan de la época de los griegos, y se formalizan sólo como métodos generales hasta la aparición de los trabajos de Newton y Leibniz. Además, veremos cómo la idea de máximo y mínimo comienza a gestarse como un problema de interés general. Al mismo tiempo y de gran importancia, cabe mencionar que ya se aprecia la relación inversa que existe entre derivada e integral, lo que redituaría en el Teorema Fundamental del Cálculo.

1. ARQUÍMEDES DE SIRACUSA (287 a. C - 212 a. C)

La posición de Arquímedes como el más creativo y original matemático de la antigüedad nunca se ha cuestionado, en lugar de eso, es considerado junto a Newton y Gauss como uno de los genios matemáticos supremos de todos los tiempos.
Nació en el año 287 a. C. en Siracusa en Sicilia, hijo de Phideas, el astrónomo. Estudió algunos años en Alejandría, después regresó a su patria a pasar el resto de sus días.

Sabemos poco de su vida, pero sabemos mucho más acerca de su muerte en el año 212 a.C. La ciudad griega de Siracusa tomo el lado equivocado durante la segunda guerra púnica; fue sitiada por la armada romana bajo las órdenes de Marcelo. Eventualmente, la ciudad fue capturada y Arquímedes asesinado.

El biógrafo histórico Plutarco narra que Arquímedes fue asesinado cuando intentaba resolver un problema geométrico en el suelo y un soldado romano le pidió que le siguiera a ver a Marcelo; Arquímedes se negó ya que se encontraba trabajando en una demostración, tras lo cual el soldado sacó su espada y le mató. La muerte de Arquímedes afligió a Marcelo.

Plutarco da varios ejemplos acerca de la vida de Arquímedes. Una de las historias más conocidas es cuando Arquímedes descubrió la ley de los fluidos en un instante de intuición mientras tomaba un baño, corrió por las calles de Siracusa completamente desnudo gritando "Eureka, eureka" (lo encontré).

Arquímedes se interesó por la astronomía, la hidráulica, la mecánica y la ingeniería en general. Fue muy conocido en Siracusa debido a sus conocimientos prácticos. Inventó la polea compuesta y el tornillo de sin fin . Comprendió la importancia del apalancamiento; Arquímedes dijo: Dénme donde apoyarme y moveré la Tierra.

Durante la guerra, Arquímedes mostró su ingenio. Plutarco nos da un vívido relato:

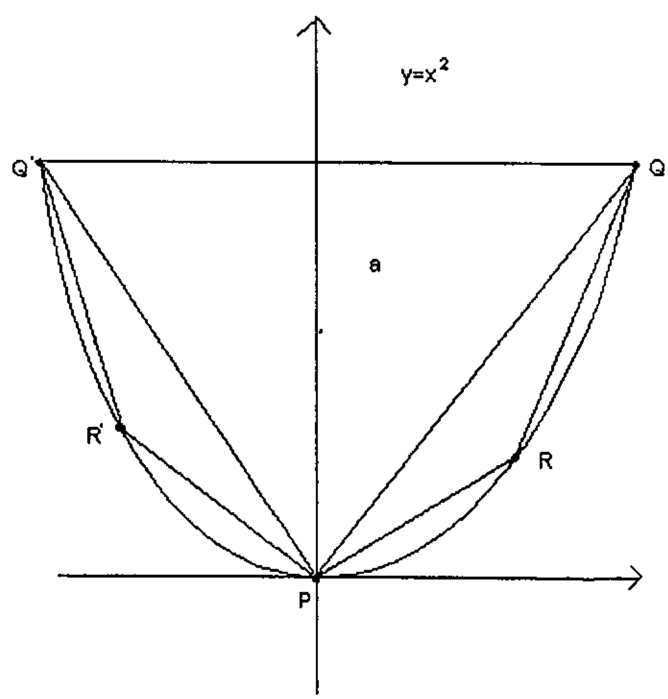
El pueblo de Siracusa estaba provisto de fuerzas superiores debido a los inventos de Arquímedes. Todas las demás armas se descartaron y con esas herramientas de defensa la ciudad resistió el *ataque y se defendió. Al final los romanos fueron reducidos considerablemente. La alarma se apoderó de ellos y bastaba con que una pieza de cuerda o de madera apareciera sobre el muro para que los romanos gritaran: ¡miren, Arquímedes está lanzando otra de sus máquinas contra nosotros!, y con ello echaran a correr. Cuando Marcelo vio esto, abandonó el intento de capturar la ciudad por asalto, y decidió sitiar la ciudad.*

Arquímedes toma parte dentro de la tradición filosófica griega, sosteniendo la primacía del pensamiento abstracto. Sus tratados son únicos en elegancia, lucidez y contenido matemático. En uno de sus prefacios se refiere a su hábito de enviar alguno de sus resultados a sus amigos de Alejandría pero sin demostración, ya que ellos debían hacerle el favor de encontrarla por sí mismos. Sabía sin embargo, que algunos de sus resultados eran usados sin demostración. En el último comunicado, les dice que ha incluido dos teoremas falsos y que *aquél que diga que los ha descubierto todos, pero que no realice las demostraciones de los mismos, debe ser refutado ya que pretende descubrir lo imposible.*

Cuadratura de un segmento parabólico.

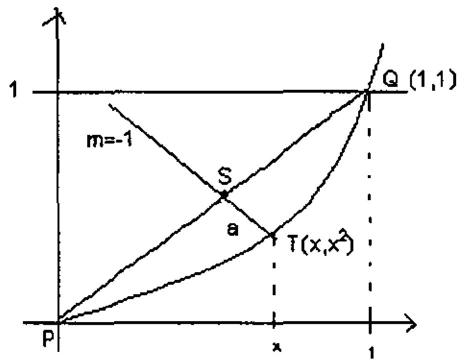
Arquímedes es, básicamente, el que primero integra "numéricamente" para aproximar el área bajo una curva y lo hace de la siguiente manera:

Considera un arco de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $(0,1)$, e inscribe un triángulo PQQ' de área a (máxima) en el segmento parabólico. En los segmentos generados por el contacto de los vértices del triángulo con la curva, PQR, $PQ'R'$, construye nuevamente triángulos de área máxima. Continúa indefinidamente con este proceso.



Después calcula el área total de estos triángulos. Arquímedes considera que el área de los triángulos obtenidos en un paso es $\frac{1}{4}$ del área de los triángulos obtenidos en el paso anterior.

Podemos mostrar que esta afirmación es cierta, usando las herramientas que actualmente conocemos de la siguiente manera. Tomemos el segmento de parábola que va de $P(0,0)$ a $Q(1,1)$. El área de del triángulo formado por los puntos $(0,1)$, P y Q tiene área igual a $\frac{1}{2}$.



Queremos encontrar el triángulo de área mayor inscrito en el espacio comprendido entre la parábola y el lado PQ del triángulo. Es decir, queremos encontrar el valor máximo de la función área $A(x)=\frac{1}{2}b.a(x)$, donde la base $b=PQ$ y la altura del triángulo varía de acuerdo a la abscisa que se tome, de tal forma $a(x)=d(S,T)$. Ya que $P(0,0)$ y $Q(1,1)$ pertenecen a la parábola, el lado PQ del triángulo tiene por ecuación $y=x$ y la ecuación de la parábola es $y=x^2$. La altura del triángulo por construir estará dada por el segmento de recta perpendicular al lado PQ que interseca a la parábola en el punto (x,x^2). La recta perpendicular al lado PQ, tiene pendiente -1 y pasa por el punto (x,x^2). De tal forma, la recta buscada tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} Y &= -(X-x)+x^2 \qquad \text{e interseca a:} \\ Y &= X \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$X=\frac{x(x+1)}{2}$$

Por tanto el punto S tiene coordenadas $S\left(\frac{x(x+1)}{2},\frac{x(x+1)}{2}\right)$.

Vamos a encontrar el máximo de la función distancia, para ello tomamos el cuadrado de la distancia entre S y T

$$a^2(x) = \left(\frac{x(x+1)}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{x(x+1)}{2} - x^2\right)^2$$

Simplificando se tiene que,

$$a(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}(x-1)$$

y, así,

$$a'(x) = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si a'(x)=0, entonces $x = \frac{1}{2}$

De tal forma que la altura es $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$; por tanto el área es:

$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, por lo que se cumple la afirmación de Arquímedes para la construcción de los primeros triángulos. Puede demostrarse por inducción que esta igualdad se cumple para la construcción de los triángulos en los pasos siguientes.

De tal forma tenemos:

$$A_\Delta = a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a$$

Arquímedes observa que,

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]a = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a$$

Después calcula,

$$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a\right] \quad (**)$$

$$= a + \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a\right) + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 a\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n a + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a\right]$$

$$= a + \frac{1}{3}\cdot a + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \cdots + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a$$

$$= a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a\right] \qquad (*)$$

Igualando a (**) con (*), tenemos que:

$$\underbrace{a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a}_{T} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n a = \underbrace{\frac{4}{3}a}_{K} \qquad (1)$$

Donde T es el área de los triángulos inscritos en el segmento parabólico y $K = \frac{4}{3}a$.

Teorema: El área de un segmento parabólico es $A_p = \frac{4}{3}a$ donde *a* es el área del primer triángulo inscrito.

Demostración.
Arquímedes realiza la prueba mediante una doble reducción al absurdo.
Sea B el área del segmento parabólico y T la suma de las áreas de los triángulos inscritos.

Caso 1. $K < B$

Si $K < B$ los triángulos pueden ser inscritos tomando n suficientemente grande, de tal forma que $B - T < B - K$, pues T puede crecer tanto como se quiera, dependiendo del número de iteraciones que se realicen para construir los triángulos inscritos.
Lo que implica $T > K$ Por (1), y así, tenemos una contradicción, ya que $K > T$.

Caso 2. $K > B$

Si $K > B$, para una n determinada y suficientemente grande $\left(\frac{1}{4}\right)^n a < K - B$

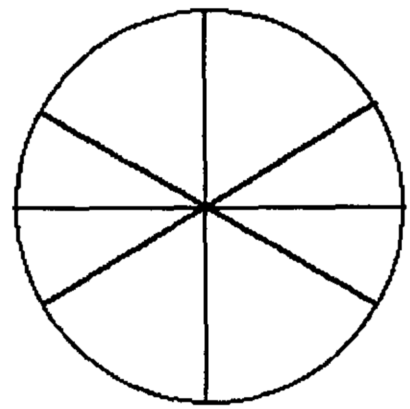
Sabemos de (1) que $K - T = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a < \left(\frac{1}{4}\right)^n a$.

Lo que implica que $K - T < K - B$, y, por tanto, $B < T$ lo que es una contradicción.

Por tricotomía
K=B
lqqd.

2. JOHANNES KEPLER (1571 – 1630).

Estamos investigando cómo se concibió la idea de integral a través del concepto de suma de áreas. Continuando con el método de aproximación por figuras geométricas, utilizado por Arquímedes encontramos también los trabajos de Kepler quien determinó el área de figuras circulares. Consideró a la circunferencia formada por una infinidad de triángulos infinitamente delgados. La altura de la infinidad de triángulos infinitesimales es igual al radio.



Si llamamos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ a la infinidad de bases infinitesimales a lo largo de la circunferencia, entonces el área del círculo (esto es, la suma de las áreas de los triángulos infinitesimales) será:

$$\frac{1}{2}b_1 r + \frac{1}{2}b_2 r + \ldots + \frac{1}{2}b_n r + \ldots = \frac{1}{2}r(b_1 + \ldots + b_n + \ldots)$$

Pero como la suma de las bases infinitesimales de los triángulos es igual a la circunferencia C, tenemos que el área del círculo es $\frac{1}{2}$ del radio multiplicado por la circunferencia,

$$A = \frac{1}{2}rC$$

Kepler utiliza una aproximación para el valor de π: $\frac{22}{7}$

Cabe hacer notar que Kepler encuentra una buena aproximación del valor real de π.

No vio la diferencia entre dos figuras, por esto una recta y un área infinitesimal eran lo mismo; en muchos problemas tomó el área como la suma de rectas.

El tercer problema (máximos y mínimos), también fue tratado por Kepler. Observó que al inscribir paralelepípedos en una esfera, el de mayor volumen era el cubo. Además, a medida que se aproximaba al máximo, el crecimiento de las dimensiones (largo, ancho y alto) del paralelepípedo era más pequeño. No se aprecia ningún tipo de procedimiento, de hecho lo que Kepler hace aquí es variar las dimensiones e ir calculando volúmenes. Sin embargo, la importancia de su trabajo radica en que se aprecia el concepto de valor máximo.

3. GALILEO GALILEI. (1564 – 1642)

Galileo coincidía con varias ideas de Descartes. Entre ellas, la afirmación de que todo fenómeno de la naturaleza podía expresarse mediante una ecuación matemática. Además los dos apoyaron la teoría atómica de la formación de los cuerpos.

Pero fue Galileo quien formuló los más radicales, efectivos y concretos procedimientos de la ciencia moderna y quien, a base de su propio trabajo, demostró su efectividad.

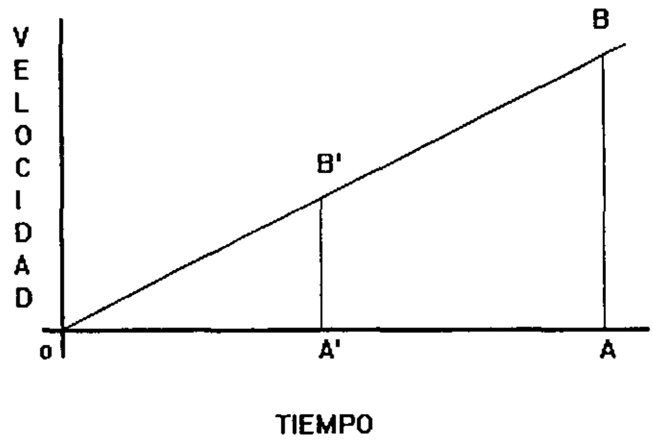
Galileo opinaba que muchos de los principios básicos son obtenidos mediante la experimentación. Incluso los resultados obtenidos deben probarse experimentalmente.

Mediante experimentos observó que los cuerpos caían con la misma aceleración en el vacío. Este hecho fue el principio de sus investigaciones.

A diferencia de los científicos medievales que buscaban el porqué de la pérdida o adquisición de las cualidades de los cuerpos, Galileo se propuso encontrar axiomas cuantitativos. Este punto es muy importante ya que lleva a la búsqueda y formulación de expresiones matemáticas, es decir, es el principio fundamental para expresar un fenómeno natural con bases matemáticas.

Por ejemplo, los griegos decían que una pelota caía porque tiene peso y que cada cuerpo busca su lugar natural, el cual es el centro de la Tierra. Estas son propiedades cualitativas.
Por otro lado, Galileo dice $v = 9.6t$; esta es una apreciación cuantitativa. Pero el uso de esta fórmula no explica porqué el cuerpo cae; nos dice solamente cómo cambia la velocidad en el tiempo. En otras palabras, las fórmulas no explican, sólo describen.
Galileo, es el fundador de la metodología de la ciencia moderna. Introduce el concepto de variable y coloca los cimientos del concepto de función. Sus trabajos influyeron enormemente en las acciones de Newton.

Galileo tenía el mismo concepto que Kepler acerca de área. Para Galileo el área bajo la curva tiempo - velocidad es la distancia. Supongamos que un cuerpo se mueve con una velocidad variable $v = 9.6t$, representada por una línea recta:

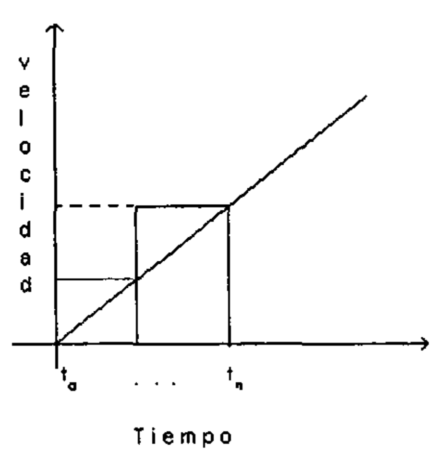


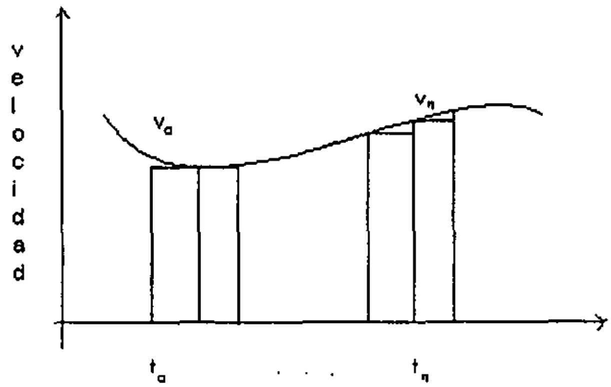
Entonces la distancia cubierta en el tiempo OA es el área AOB. Galileo llega a esta conclusión tomando a $A'B'$ como la velocidad típica en un instante y también como la distancia infinitesimal cubierta (la que obtendríamos al multiplicar la velocidad por un infinitésimo de tiempo).
De aquí concluye que el área AOB la cual está formada por segmentos de recta del tipo $A'B'$ debe ser la distancia total. Si AB es $9.6t$ y OA es t entonces el área OAB es $4.8t^2$.

El razonamiento no es muy claro, pues se trabaja con un infinito número de unidades indivisibles como $A'B'$.

El trabajo de Galileo nos permite observar la idea que llevaría a descubrir el Teorema Fundamental del Cálculo, consideremos lo siguiente:

Si $v=\frac{d}{t}$, entonces $d=v\cdot t$. Además sabemos que $d'(t)=v$. Estas consideraciones se basan en el cálculo de la velocidad promedio. Si queremos encontrar la velocidad instantánea, o distancia instantánea, comenzamos aproximándola por la velocidad promedio, de la siguiente forma:





Tomamos la velocidad en el intervalo de t_1 a t_n

$$d_{t_1} - d_{t_0} = v_0(t_1 - t_0)$$

Obteniendo así la distancia recorrida en ese intervalo

$$d = V_0(t_1 - t_0)$$

La distancia total la obtenemos en forma semejante, considerando la suma de las distancias recorridas en cada intervalo $(t_i - t_{i-1})$,

$$d_{t_0}^{t_n} \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_{t_1}^{t_n} V(t)dt$$

que es la distancia recorrida de t_1 a t_n.

Vemos que esta idea se encuentra en el procedimiento de Galileo al obtener la distancia a partir de la velocidad. Este es uno de los primeros trabajos en los que se aprecia la relación inversa entre derivada e integral, relación que culminaría, como ya se mencionó, en el Teorema Fundamental del Cálculo.

4. BONAVENTURA CAVALIERI (1598 – 1647).

Nació en Milán en 1598. Fue discípulo de Galileo a la edad de 15 años. Más tarde fue profesor de matemáticas en la Universidad de Bolonia de 1629 hasta su muerte en 1647.

Fue uno de los matemáticos más influyentes de su tiempo y escribió numerosos trabajos sobre matemáticas, óptica y astronomía. Sus ideas fueron influidas por las del propio Galileo y las de Kepler.

Su más grande contribución a las matemáticas es el tratado "Geometría indivisibilibus", publicada en 1635, donde encontramos un ancestro del cálculo "el método de los indivisibles". El tratado de Cavalieri es verbal y no claramente escrito y es difícil saber que entiende por "indivisible".

Podemos ver que para un plano, un indivisible es un segmento de recta o cuerda y para un sólido es una sección plana del mismo. Considera que un plano está formado por un conjunto infinito de cuerdas paralelas y que un sólido, a su vez, está formado por un conjunto infinito de secciones planas paralelas.

Cavalieri afirma que si rebanamos cada miembro del conjunto de cuerdas paralelas de una figura plana dada, a lo largo de su propio eje, de forma tal que los puntos finales de las cuerdas formen un contorno continuo, entonces el área de la nueva figura plana así formada, es la misma que la de la figura plana original, ya que las dos piezas están formadas por las mismas cuerdas.

El rebanar en forma similar los elementos de un conjunto de secciones planas paralelas de un sólido dado nos llevará a obtener otro sólido con el mismo volumen del sólido original. Estos resultados se generalizan en los llamados *principios de Cavalieri*:

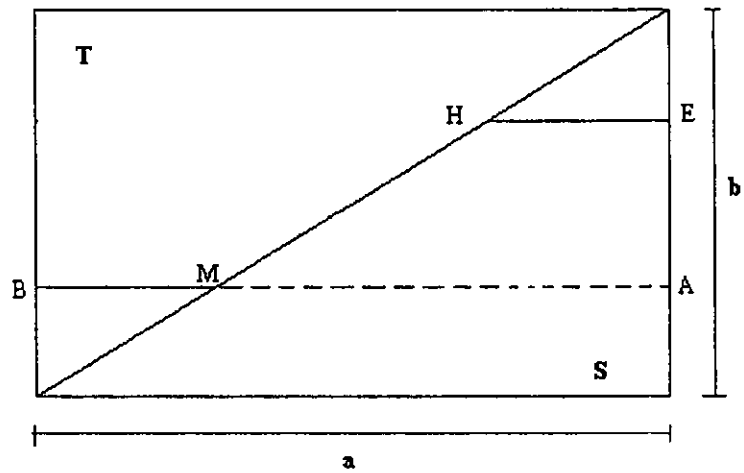
1. Si dos figuras planas se encuentran entre un par de rectas paralelas y si la longitud de los dos segmentos cortados por ellas en cualquier recta paralela a las rectas que las incluyen están siempre en una razón dada, entonces las áreas de las 2 figuras planas están también en la misma razón

2. Si dos sólidos están incluidos entre dos planos paralelos y las áreas de las dos secciones cortadas por ellos en cualquier plano paralelo a los planos que los incluyen, están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están también en esa razón.

Su método constituyó una nueva herramienta para calcular áreas y volúmenes.

Ilustremos su método como sigue:

La idea fundamental se basa, como ya se dijo, en que un plano F está constituido por un conjunto de rectas, denotado como $\theta_F(\ell)$.



Supongamos que el rectángulo F de base a y altura b, está dividido, por su diagonal, en dos triángulos: el triángulo T y el triángulo S.
Cada línea BM en el triángulo T corresponde a otra igual HE en el triángulo S, entonces si representamos al conjunto se segmentos que forman una figura con $\theta_F(\ell)$, tenemos que,

$$\theta_T(\ell) = \theta_S(\ell)$$

Por otro lado, cada recta BA está constituida por un segmento del triángulo S y otro segmento del triángulo T.

$$\theta_F(\ell) = \theta_T(\ell) + \theta_S(\ell)$$
$$\Rightarrow \theta_F(\ell) = 2\theta_T(\ell)$$

Lo que denota que la longitud de las rectas del rectángulo es el doble de la longitud de las rectas que hay en cada triángulo.

Observando la figura, tenemos que, por triángulos semejantes, $\frac{b}{a} = \frac{y}{t}$, de donde se tiene que cada segmento de recta está definido por $y = \frac{b}{a}t$. Cavalieri suma entonces la infinidad de segmentos de recta. Con notación moderna esto significa que:

$$ab = 2\int_0^a \frac{b}{a} t\,dt$$

De esta manera lo que logra Cavalieri es encontrar la fórmula o valor de la integral definida

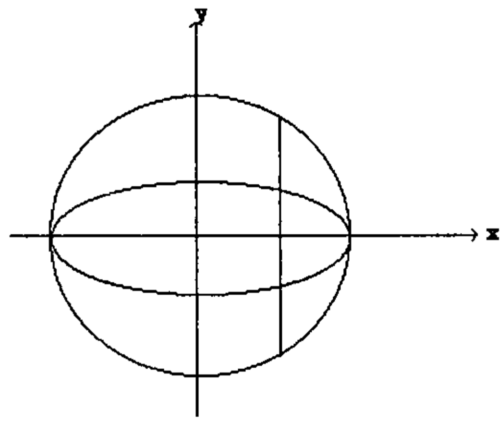
$$\int_0^a t\,dt = \frac{a^2}{2}$$

Observemos ahora cómo es que Cavalieri usa su método para calcular el área de una elipse a partir del área de un círculo.

Sean $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a>b>0$ y $x^2+y^2=a^2$ las ecuaciones de la elipse y el círculo respectivamente.

Despejando a y se tiene que,

$$y=\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$



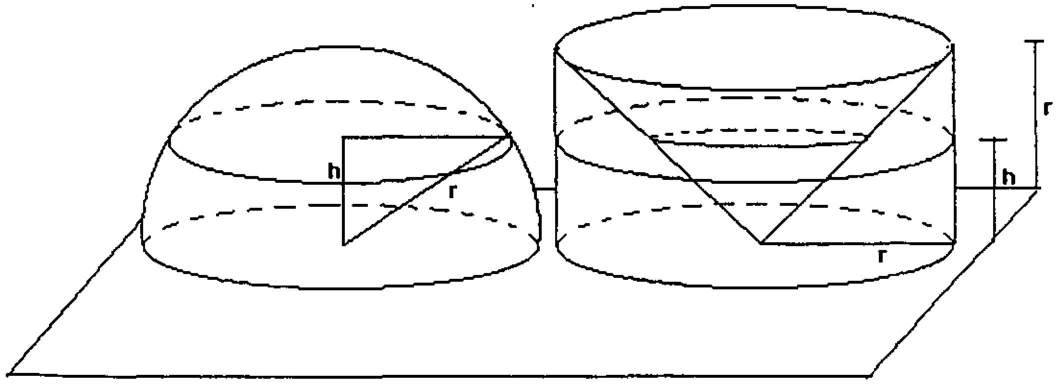
De aquí se sigue que las ordenadas de la elipse y del círculo están en la razón $\frac{b}{a}$. Por tanto, las cuerdas verticales de la elipse y del círculo están también en esa razón y por el primer principio de Cavalieri, también las áreas de la elipse y del círculo, por lo que se concluye que:

$$\text{Area elipse}=\frac{b}{a}(\text{área del círculo})$$

$$=\frac{b}{a}(\pi a^2)=\pi ab,$$

que es un resultado correcto.

Para ilustrar cómo aplica Cavalieri su método en el caso de un sólido, encontraremos el volumen de una esfera de radio r.



Tenemos un hemisferio de radio r a la izquierda y a la derecha un cilindro de radio r y altura r, con un cono en su interior cuya base es la base superior del cilindro y cuyo vértice es el centro de la base inferior del cilindro, de tal forma que el sólido es el cilindro con una perforación en su centro formada por la introducción del cono. Los dos sólidos están sobre un plano común.

Cortamos ambos sólidos con un plano paralelo al plano base a la distancia h de éste. Este plano corta al hemisferio en una sección circular y al cilindro en una sección en forma de anillo.

Las dos secciones tienen un área igual a $\pi(r^2 - h^2)$ (para el cilindro hay que restar el área de la sección plana circular del cono de la sección circular plana del cilindro; para obtener el área de la sección plana originada en el hemisferio, nos basamos en el triángulo rectángulo de altura h e hipotenusa r, que se muestra en la figura, para así obtener el radio y calcular el área de esta sección plana).

Del principio de Cavalieri se sigue que los dos sólidos tienen igual volumen. De ahí que el volumen V de la esfera este dado por,

$$V = 2\,(\text{volumen del cilindro} - \text{volumen del cono})$$

$$V = 2(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Otros investigadores como Fermat, Pascal y Roverbal usaron este método pero consideraron al área como una infinidad de rectángulos más que como una infinidad de rectas.

Precisamente, es en esta parte donde podemos apreciar la falta de precisión en la idea de Cavalieri, lo que provocó que su método fuera fuertemente criticado. Ya que si bien su idea se basaba en rectángulos infinitesimales, sólo menciona que el área está formada por un conjunto "infinito" de rectas. Cierto que su idea dio pie a las investigaciones efectuadas para encontrar áreas, problema que originó el concepto de integral. Sin embargo, él construía áreas a partir de rectas.

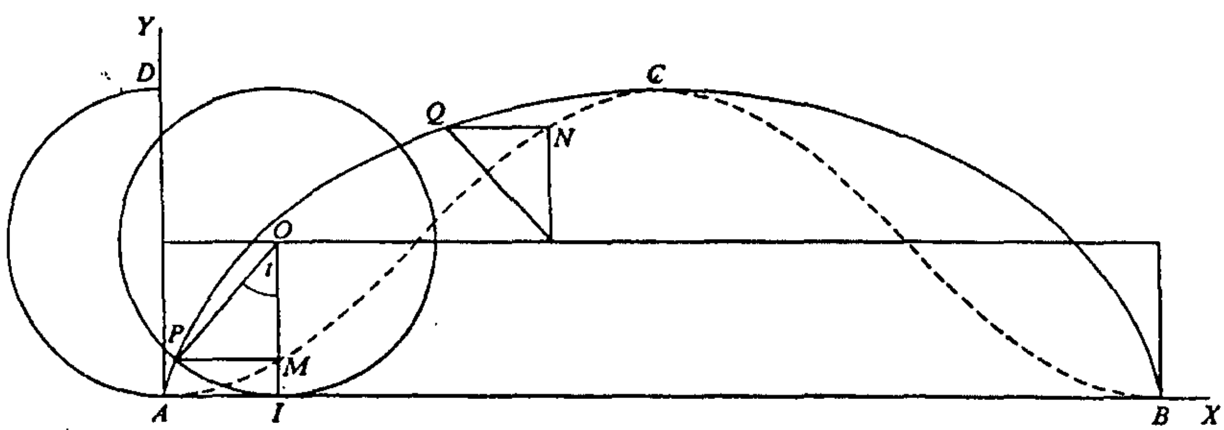
Como se mencionó anteriormente, varios de sus contemporáneos cambiaron esta idea, pero se basaron en el trabajo realizado por Cavalieri. Este trabajo fue de suma importancia para el desarrollo posterior del Cálculo.

5. GILLES PERSONE DE ROVERBAL (1602 - 1675)

Roverbal usó esencialmente el método de los indivisibles para encontrar el área bajo un arco de la cicloide, llamó a este método el "método de los infinitos".

Para mostrar el trabajo que realizó Roverbal, y que su resultado es correcto, vamos a utilizar las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

$$x = a(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$



Sea PM la perpendicular trazada a partir de P al radio OI. Dibujemos posiciones sucesivas de PM. El lugar geométrico de M (conocida como curva de Roverbal o acompañante de la cicloide) divide cada uno de los rectángulos AC y CB simétricamente. Afirmamos que la curva de Roverbal divide al rectángulo $ADCR$ en dos partes iguales.

Demostración

Sean M y N dos puntos sobre la cicloide, correspondientes a t y $\pi - t$ respectivamente.

P.D. que PM está a la misma distancia hacia arriba y a la derecha de A como QN está hacia abajo y a la izquierda de C. Es decir,

P.D.

$$AI = NK$$
$$MI = CK$$

$$\begin{aligned}
AI &= arcPI = at \\
NK &= AR - (Q_x + QN) \\
&= \pi - (x(\pi - t) + a\operatorname{sen} t) \\
&= \pi a - [a(\pi - t) - a\operatorname{sen}(\pi - t) + a\operatorname{sen} t] \\
&= \pi a - [\pi a - at - a(\operatorname{sen}\pi\cos t - \cos\pi\operatorname{sen} t) + a\operatorname{sen} t] \\
&= at + a(-\operatorname{sen} t) + a\operatorname{sen} t \\
&= at.
\end{aligned}$$

Por tanto $NK = AI$.

P. D. Que $IM = CK$

$$IM = a - a\cos t$$
$$\begin{aligned}
CK &= CR - KR \\
KR &= Q_y = y(\pi - t) \\
&= a - a\cos(\pi - t) \\
&= a - a[\cos\pi\cos t + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} t] \\
&= a - a(-\cos t) \\
&= a + a\cos t.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $CR = 2a$, por lo que,

$$CK = 2a - a - a\cos t$$

Por lo tanto $IM = CK$.

Por el principio de Cavalieri, sabemos que la curva de Roverbal divide simétricamente al rectángulo $ADCR$.

Para obtener el área bajo la cicloide vamos a sumar el área bajo la curva de Roverbal al área comprendida entre la cicloide y la curva de Roverbal.

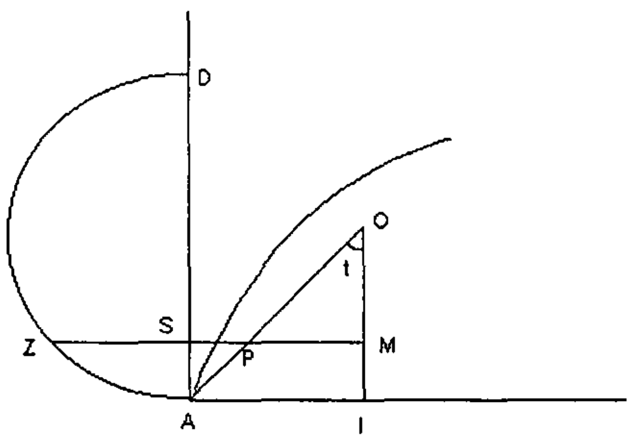
El área bajo la curva de Roverbal es

$$A(acompañante) = \frac{1}{2}ADCR = \frac{1}{2}(2\pi a \cdot 2a) = 2\pi a^2$$

Para calcular el área entre la cicloide y la curva de Roverbal probaremos que ésta área es igual a la semicircunferencia AD.

La semicircunferencia AD tiene por ecuaciones paramétricas

$$(x(\theta), y(\theta)) = (a\cos\theta, a - a\,\text{sen}\,t\theta)$$



P.D. que $PM = ZS$.

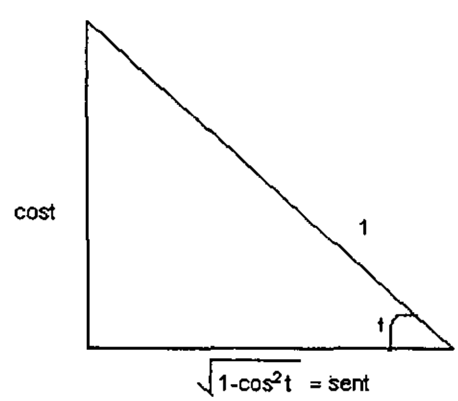
$$AS = a - a\cos t = P_y$$

Como Z pertenece a la circunferencia AD,

$$Z_y = a - a\,\text{sen}\,\theta = AS$$

lo que implica que $\text{sen}\,\theta = \cos t$ y

$$\theta = ang\,\text{sen}(\cos t)$$



lo que implica que $\cos\theta = \text{sen}\,t$

$$Z_x = a\cos\theta = a\,\mathrm{sen}\,t$$
$$ZS = a\,\mathrm{sen}\,t = PM$$

Por lo tanto el área entre la cicloide y su curva acompañante es $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

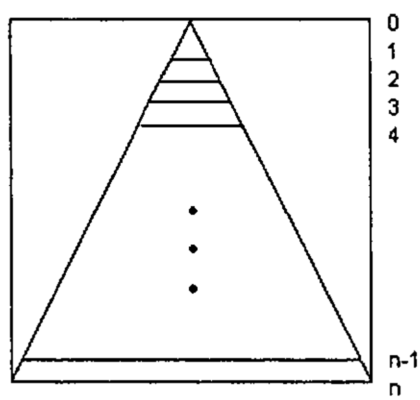
De donde el área bajo un arco de la cicloide es

$$A(cicloide) = 2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

6. JOHN WALLIS (1616 - 1703)

En *Aritmética Infinitorum*, Wallis aplica técnicas analíticas, basándose en el método de los indivisibles de Cavalieri. Trabajo que mostraremos a continuación.
Wallis se dedicó a reemplazar técnicas geométricas con conceptos algebraicos cuando esto era posible.

Wallis se mantiene a favor de las ideas manejadas en su tiempo, sosteniendo que un plano se forma por una infinidad de rectas.



Toma las longitudes de las rectas sucesivas en el triángulo como $1,2,3,4,\ldots,n$.

Claramente se tiene que,

$$\frac{0+1+\cdots+n}{n+n+\cdots+n} = \frac{\acute{a}rea \quad del \quad tri\acute{a}ngulo}{\acute{a}rea \quad del \quad rect\acute{a}ngulo} = \frac{1}{2}$$

Después intenta evaluar una razón similar con sumas de cuadrados.

Si $n=1$,

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Si $n=2$,

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

En general

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Observamos que la razón tiende a $\frac{1}{3}$ si n es muy grande.

Esto es equivalente a decir que el área (o cuadratura) bajo la curva $y=x^2$ de $x=0$ a $x=1$ es $\frac{1}{3}$.

Siguiendo el ejemplo anterior y tomando las potencias 3, 4 ,etcétera. Wallis encuentra las cuadraturas para las funciones $y=x^m$, que en notación actual corresponde a:

$$\int_0^1 x^m=\frac{1}{m+1}$$

CAPÍTULO 4

Después de analizar los trabajos de sus predecesores, toca ahora revisar los trabajos de Newton y Leibniz. Es importante observar la generalidad de sus procedimientos, el desarrollo de una notación unificada y el reconocimiento de un concepto único que se encuentra atrás de los problemas a resolver. Por todo ello, se les reconoce como los descubridores del Cálculo aunque, a pesar del avance logrado, no llegaron a formalizarlo.

LOS TRABAJOS DE NEWTON Y LEIBNIZ CON RESPECTO A LA DERIVADA

Los métodos del análisis utilizados por los predecesores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objeto de resolver problemas bien definidos, tales como la construcción de tangentes a curvas, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas. Gracias a la geometría analítica de Descartes y Fermat, resultaba posible tratar cuestiones no como problemas específicos de cada curva, sino mediante un método general aplicable a todas las curvas de una cierta clase. Considerando la forma algebraica de la ecuación de una curva se podía intentar su clasificación. Se podía esperar entonces que, mediante un proceso de refinamiento gradual de los algoritmos, resultara posible combinarlos con el fin de elaborar soluciones más generales todavía. Aunque diversos matemáticos del siglo XVII habían desarrollado algoritmos eficaces, ninguno de ellos había conseguido proporcionar el método general que se esperaba. Asimismo, pocos matemáticos habían percibido los estrechos lazos existentes entre los problemas estudiados porque les faltaba un método general de cálculo o porque se preocupaban demasiado en encontrar una solución específica para su problema.

Newton y Leibniz fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo aplicable a muchos tipos de problemas. La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la de la geometría, sino también estudiar diversos problemas de geometría y física mediante el mismo método general.

El descubrimiento final del cálculo diferencial e integral exigió la asimilación de los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow y de los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis. Hacía falta también estar en condiciones de comprender la relación de reciprocidad entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas, cualquiera que fuera la naturaleza de los problemas específicos. Además, había que traducir los problemas de variación, tangentes, máximos y mínimos y sumas a problemas de derivación y derivación inversa (integración). A continuación observaremos lo que debemos a Newton y a Leibniz y por lo cual ahora se les reconoce como los descubridores del Cálculo Diferencial e Integral.
En esta sección nos referiremos únicamente al problema directo del Cálculo: la derivada. El problema inverso de las tangentes será tratado en el siguiente capítulo.

1. ISAAC NEWTON (1642 – 1727).

Nació en 1642, en el pueblito de Woolsthorpe, en Lincolnshire, Inglaterra. Fue un niño prematuro y su padre murió antes de su nacimiento, a los treinta y siete años. Newton frecuentó la escuela del lugar y desde muy pequeño manifestó un marcado interés por los juguetes mecánicos. El reverendo William Ayscough, tío de Newton convenció a su madre de que lo enviara a Cambridge en lugar de dejarlo en la granja familiar. Así pues, en junio de 1661, a los 18 años era alumno del Trinity College. Esta institución le brindó hospitalidad, libertad y una atmósfera amistosa que le permitieron tomar contacto verdadero con el campo de la ciencia.

Al comienzo de su estancia en Cambridge se interesó por la química y, probablemente por primera vez, leyó una obra de matemáticas sobre la geometría de Euclides, lo que le despertó el deseo de continuar estudiando otras obras. En 1663 Newton leyó los trabajos de Descartes, de Galileo y de Kepler, y en 1644 la *Aritmética* de Wallis que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el teorema del binomio y ciertas cuadraturas.

A partir de 1663, Newton conoció a Barrow y tuvo contacto con sus trabajos y con los de Fermat, Huygens y otros. Desde finales de 1664 inicia su contribución a las matemáticas, aborda el teorema del binomio a partir de los trabajos de Wallis y el cálculo de fluxiones. Debido a una epidemia de peste bubónica, Newton pasa al lado de su familia los años 1665-1666; este es un periodo muy intenso de descubrimientos: descubre la ley del inverso de los cuadrados, de la gravitación, desarrolla el cálculo de fluxiones, generaliza el teorema del binomio y pone de manifiesto la naturaleza física de los colores. Debido a fuertes críticas a sus trabajos Newton guarda silencio sobre sus descubrimientos y reanuda sus estudios en Cambridge en 1667.

En 1669 Barrow renuncia a su cátedra lucasiana de matemáticas, sustituyéndole Newton, puesto que ocupó hasta 1696. Después de las críticas a su publicación sobre la teoría de la luz en 1672, Newton no publica nada hasta 1687, año en que publica sus *Principia*. Hacia 1679, verificó su ley de la gravitación y estableció la compatibilidad entre su ley y las tres de Kepler sobre los movimientos de los planetas.

Newton descubrió los principios de su Cálculo Diferencial e Integral hacia 1665-1666, y durante el decenio siguiente elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis. Gracias al apoyo moral y económico de Edmund Halley, Newton publicó sus Principia en 1687.

En este mismo año, Newton defendió los derechos de la universidad de Cambridge contra el impopular rey Jacobo II, como resultado fue elegido miembro del parlamento en 1689, momento en el que el rey es destronado y obligado a exiliarse. Durante estos años se dedicó al estudio de la hidrostática y la hidrodinámica, además de construir telescopios.

Después de haber sido profesor durante cerca de treinta años, Newton abandonó su puesto para aceptar la responsabilidad de Director de la Moneda en 1696. Durante los últimos treinta años de su vida, abandonó prácticamente sus investigaciones y se consagró progresivamente a los estudios religiosos. Fue elegido presidente de la Royal

Society en 1703, y reelegido cada año hasta su muerte. En 1705 fue hecho caballero por la reina Ana, como recompensa por los servicios prestados a Inglaterra.

Los últimos años de su vida se vieron ensombrecidos por la desgraciada controversia sobre la invención del Cálculo, con Leibniz. Controversia que terminó con la muerte de Leibniz en 1716.
Después de una larga y atroz enfermedad, Newton murió el 20 de marzo de 1727, y fue enterrado en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

> *No se como puedo ser visto por el mundo, pero en mi opinión, me he comportado como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte buscando de vez en cuando una piedra más pulida y una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad de exponía ante mí completamente desconocido.*

Esta era la opinión que Newton tenía de sí mismo al fin de su vida. Fue muy respetado y recibió muchos honores. Heredó de sus predecesores, como él bien dice - *si he visto más lejos que otros hombres es porque me he subido en hombros de gigantes* - los ladrillos necesarios que supo disponer para erigir la arquitectura de la dinámica y la mecánica celeste, al tiempo que aportaba al Cálculo Diferencial e Integral el impulso vital que le faltaba.

Básicamente Newton utiliza tres métodos o procedimientos para calcular derivadas. Los llamó método de los momentos, de las fluxiones y de la primera y última razón. Cabe mencionar que los hemos nombrado de acuerdo al orden en que Newton los creó.

Básicamente, Newton utiliza el teorema del binomio para calcular fluxiones como mostraremos un poco más adelante.

Método de los momentos.

Newton escribió *De Analysi* a partir de conceptos elaborados entre 1665 y 1666. Sin embargo, no fue sino hasta 1669 que se tuvieron las primeras noticias de este trabajo que finalmente fue publicado en 1711. En esta época, Newton estudió los trabajos de Barrow y enunció el teorema del binomio, mismo que le fue de gran utilidad en sus métodos seguidos para calcular derivadas.
En 1666, Newton todavía no había desarrollado completamente la notación de las fluxiones, y en 1669, cuando redacta *De Analysi*, reserva para una ulterior publicación sus fluxiones como concepto operacional a nivel algorítmico.

En este periodo, Newton aún no aclara la idea de fluxión y todavía utiliza la idea de *infinitésimos* tal como lo hacen Barrow y Fermat. Un punto básico y fundamental que podemos apreciar en el trabajo de Newton es el hecho de que muestra procedimientos generales, es decir, que se pueden aplicar a diversas funciones, a diferencia de los procedimientos utilizados por sus antecesores que se aplicaban únicamente a una función particular.

Ilustremos el enfoque que Newton utilizó para la determinación del cambio instantáneo de una variable con respecto a otra.

En su primer trabajo, Newton parte de la *cuadratura de una función f* (o sea la primitiva F de una función f) y usando el concepto de *momento* de área recupera la función f.

Consideremos una curva cuya área se expresa como.

$$A = ax^m . \qquad (1)$$

Donde m es un racional. Newton denota con o a un intervalo de tiempo muy pequeño y con el *momento de* x representa a un incremento infinitesimal de x. Aquí o es equivalente a la E de Fermat. De la misma manera, oy se llamará el momento de y y $A + oy$ el crecimiento del área cuando x varía o. Por tanto,

$$A + oy = a(x + o)^m .$$

Desarrollemos esta expresión aplicando el teorema del binomio:

$$A + oy = a\left[x^m + mx^{m-1}o + \ldots + o^m\right]. \qquad (2)$$

Restemos el área (1) del área (2) con lo que se tiene,

$$oy = a\left[mx^{m-1}o + \ldots + o^m\right],$$

dividamos entre el incremento o y eliminemos los términos que aún contienen a o con lo que se obtiene,

$$y = max^{m-1}$$

De este modo, el cambio del área para todo valor de x es el valor de y para este valor de x. Observemos que el proceso anterior, corresponde al que se emplea hoy en día para obtener la derivada de una función pero sin justificar el paso al límite. De hecho, apreciamos el método de los cuatro pasos que suele enseñarse en el bachillerato, como un método de introducción a los estudiantes de Cálculo.

Método de las fluxiones.

Básicamente, Newton utiliza el teorema del binomio para calcular fluxiones.
Por fluxión, Newton entiende una cantidad que no está fija, que cambia de instante a instante, es decir, que fluye.

Cuando Newton considera que no parte de una cuadratura sino de una función arbitraria, que es función del tiempo, entonces utiliza básicamente el método de las fluxiones para calcular la derivada de la función a lo que le llama la fluxión de la función. En este caso, Newton está derivando con respecto al tiempo, empleando la regla de la cadena.

Además, en este caso cambia la notación de la manera que se ilustra a continuación con un ejemplo.

Para determinar la fluxión de $y = x^n$ sustituye a x y y por $x+\dot{x}o, y+\dot{y}o$ respectivamente, donde considera a o como un pequeño intervalo de tiempo y, así, $\dot{x}o, \dot{y}o$ serán los momentos de x y y, respectivamente. De esta manera,

$$y+\dot{y}o = (x+\dot{x}o)^n,$$

por lo que,

$$y+\dot{y}o = x^n + nx^{n-1}(\dot{x}o) + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}(\dot{x}o)^2+\ldots+(\dot{x}o)^n.$$

Ahora, cancela términos que no contienen a o y divide entre o,

$$\dot{y} = nx^{n-1}(\dot{x}) + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-2}(\dot{x})^2 o+\ldots+(\dot{x})^n o^{n-1}.$$

Como supuso que o era infinitamente pequeño, elimina los términos que contienen a o para obtener, finalmente,

$$\dot{y} = nx^{n-1}(\dot{x}).$$

Este proceso fue duramente criticado por Berkeley, como más adelante se verá.

Método de la última razón de los cambios.

Otro procedimiento seguido por Newton, es el de la *última razón*. En seguida se muestra un ejemplo de este procedimiento.

Para determinar la fluxión de x^n, reemplaza a x por $x+o$, en lugar de $x+\dot{x}o$, como lo hizo en el método de las fluxiones.

Luego desarrolla $(x+o)^n$ utilizando el teorema del binomio, después sustrae x^n. El resultado es el cambio en x^n correspondiente al cambio o en x después de despreciar los términos que contienen a o, y forma la razón de cambio en x con respecto al cambio en x^n:

El cambio en x^n	El cambio en x
$(x+o)^n - x^n$	$(x+o) - x$

Por tanto la razón de cambio es:

$$\frac{(x+o)-x}{(x+o)^n - x^n}$$
$$= \frac{o}{o(nx^{n-1} + \cdots + o^{n-1})}$$
$$= \frac{1}{nx^{n-1}}$$

A esta última razón Newton la llama *la última razón de los cambios.* El inverso de este resultado es lo que hoy conocemos como la derivada de la función $f(x) = x^n$. Newton llama a este método la última razón de los cambios porque a medida que o se hace más y más pequeño, la sucesión de cocientes formados por el cambio en x^n entre el cambio en x, se aproxima cada vez más a $\frac{1}{nx^{n-1}}$. De tal forma que este último cociente es para Newton, la última razón de los cambios.

2. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 - 1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, ingresó a los 15 años a la universidad y a los 17 se graduó. Estudió teología, leyes, filosofía y matemáticas en la universidad y algunas veces se le recuerda como el último sabio que tuvo un conocimiento universal. Cuando tenía 20 años de edad estaba preparado para recibir el grado de doctor en leyes, pero le fue denegado debido a su juventud.

Dejó Leipzig y obtuvo su doctorado en Altdorf en Nuremberg, donde se le ofreció un profesorado en leyes, el cual declinó. Leibniz ingresó al servicio diplomático, primero por el electorado de Mainz, después por el de la familia de Brunswick y finalmente por el de los Hanoverianos, a quienes sirvió durante 40 años.

En 1672 fue a París. Ahí conoció a Huygens, quien le sugirió que debería dedicarse a las matemáticas y leer los tratados de Pascal de 1658-1659. En 1673 una misión política lo llevó a Londres, donde compró una copia de *Lectiones Geometricae* de Barrow, conoció a Oldenburg y a Collins, y llegó a ser miembro de la Royal Society. De estos sucesos se diría después, en cuanto a las controversias por la prioridad del descubrimiento del cálculo, que Leibniz quizás tuvo acceso a los manuscritos de *De Analysi* de Newton. Sin embargo esto es dudoso, ya que, en esta época Leibniz no estaba preparado en geometría ni en análisis.

En 1676, Leibniz visita nuevamente Londres, llevando consigo su máquina calculadora; fue durante estas dos visitas a Londres que el Cálculo Diferencial había tomado forma. En el caso de Newton, las series infinitas desempeñaron un papel importante en sus primeros trabajos.

El triángulo armónico.

Huygens alentó a Leibniz para que investigara el problema de encontrar la suma del recíproco de los números triangulares, esto es, números de la forma $\frac{2}{n(n+1)}$. Leibniz descompuso el término en dos fracciones, de la siguiente forma:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

de donde es obvio que al desarrollar algunos términos,

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n+1}\right)$$

la suma de los primeros n términos es $2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$, por lo que la suma de la serie infinita es 2.

Con el éxito de este trabajo, Leibniz concluyó que podía encontrar la suma de casi cualquier serie infinita.

A Leibniz le fascinó la analogía del triángulo armónico con el triángulo aritmético de Pascal,

Triángulo Aritmético

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots & \\
1 & 4 & 10 & 20 & \ldots & & \\
1 & 5 & 15 & \ldots & & & \\
1 & 6 & \ldots & & & & \\
1 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

Triángulo Armónico

$$\begin{array}{lllllll}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \ldots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \ldots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \ldots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \ldots & & & & \\
\frac{1}{6} & \ldots & & & & & \\
\ldots & & & & & &
\end{array}$$

El triángulo aritmético se forma colocando unos en el primer renglón y en la primera columna; a partir de ellos los demás elementos son el resultado de sumar todos los elementos en el renglón precedente y que se encuentran a la izquierda de él (por ejemplo el 6 del tercer renglón resulta de sumar $1+2+3$ del renglón anterior). Por otro lado, para formar el triángulo armónico se coloca en el primer renglón los inversos de los números naturales; a partir de ellos cada elemento es el resultado de la diferencia de los términos exactamente arriba de él y a la derecha (en el tercer renglón, $\frac{1}{12}=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$, los últimos términos se encuentran en el segundo renglón por arriba de $\frac{1}{12}$).

Así vemos, que en el triángulo aritmético cada elemento (que no esté en la primera columna) es la diferencia de los dos términos directamente abajo y a la izquierda; en el triángulo armónico cada término (que no esté en el primer renglón) es la diferencia de los dos términos que se encuentran directamente arriba y a la derecha. Más aún, en el triángulo aritmético cada elemento (que no esté en el primer renglón o columna) es la suma de todos los términos que se encuentran en la línea arriba y a la izquierda de él, mientras que en el triángulo armónico, cada elemento es la suma de todos los términos que se encuentran en el renglón debajo y a la derecha de él. Ya que el número de términos en el triángulo armónico es infinito, Leibniz adquirió mucha práctica sumando series infinitas. La serie en el primer renglón es la serie armónica, que diverge; para todos los demás renglones las series convergen.

Los números que aparecen en el segundo renglón del triángulo armónico son la mitad de los recíprocos de los números triangulares y Newton sabía que la suma de estos números es 1. Los números en el tercer renglón son la tercera parte de los recíprocos de los números piramidales,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n+1)(n+2)}$$

y el triángulo armónico indica que la suma de esta serie es $\frac{1}{2}$; los números en el cuarto renglón son un cuarto del recíproco de los números figurados correspondientes a la cuarta dimensión,

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

y su suma es $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente para los demás renglones en el triángulo armónico. Los números de la enésima diagonal en este triángulo son los recíprocos de los números de la enésima diagonal correspondiente del triángulo aritmético divididos entre n.

El triángulo aritmético de Pascal y el triángulo armónico de Leibniz comparten una cierta relación inversa con respecto a la manera en que se forman, conteniendo sumas en el primer caso y diferencias en el segundo. En el triángulo aritmético cada renglón consta de las sumas de los términos en el renglón anterior y de las diferencias de los términos en el siguiente renglón. En el triángulo armónico, sin embargo, cada renglón consta de las diferencias de los términos en el renglón precedente y de las sumas del renglón siguiente.

Es importante recalcar que Leibniz inicia sus estudios en matemáticas un poco tarde, pero el estudio de las series, fue importante para los descubrimientos logrados más tarde en Cálculo Diferencial e Integral. El estudio de los triángulos armónico y aritmético y sus propiedades inversas implantaron en el pensamiento de Leibniz una concepción que desempeñó un papel dominante en el desarrollo de su Cálculo, la noción de una relación inversa entre la operación de tomar diferencias y formar sumas de los elementos de una sucesión.

Después de sus estudios sobre series infinitas y el triángulo armónico, leyó los trabajos de Pascal sobre la cicloide y otros aspectos del análisis infinitesimal.

Leibniz se dio cuenta cerca de 1673, que la determinación de la tangente a una curva dependía de la razón de las diferencias en las ordenadas y en las abscisas, cuando éstas se hacían infinitamente pequeñas y que las cuadraturas dependían de las sumas de las ordenadas o rectángulos infinitamente angostos conteniendo área.

La notación y fórmulas de Leibniz

Una de las aportaciones más importantes de Leibniz al cálculo fue su notación, la que todavía se usa hoy en día.
Además, Leibniz establece las reglas básicas para la derivación de productos, sumas, cocientes y potencias de funciones.

$$\begin{aligned}
&d(a)=0\\
&d(v \pm y)=dx \pm dy\\
&d(uw)=udw+wdu\\
&d(\frac{v}{y})=\frac{ydv-vdy}{y^2}\\
&d(x^n)=nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Leibniz enuncia esta última ecuación sin dar una demostración de la misma y establece las ecuaciones anteriores en la forma siguiente:
Tomemos el producto xy, entonces

$$\begin{aligned}
&d(xy)=(x+dx)(y+dy)-xy\\
&d(xy)=xdy+ydx+xy+dxdy-xy\\
&d(xy)=xdy+ydx
\end{aligned}$$

Leibniz descarta *dxdy*, considerando que su valor es demasiado pequeño. En forma similar obtiene las otras ecuaciones.

Su notación hace más comprensible la regla de la cadena, como lo podemos observar en el siguiente ejemplo.

Sea la función $z = \sqrt{g^2 + y^2}$ donde g es una constante.

$$\text{Sea } r = g^2 + y^2 \quad \text{y} \quad dr = 2ydy$$

$$dz = d\sqrt{r} = \frac{dr}{2\sqrt{r}}$$

Sustituyendo r y dr:

$$dz = \frac{2ydy}{2\sqrt{g^2 + y^2}} = \frac{ydy}{\sqrt{g^2 + y^2}} = \frac{ydy}{z}.$$

CAPÍTULO 5

Hemos analizado hasta ahora cómo se investigó la forma de construir una recta tangente a una curva, cómo calcular áreas bajo curvas, para llegar finalmente a analizar los trabajos de Leibniz y Newton, respecto a obtener la derivada de una función.

Para complementar los temas centrales del Cálculo, analizaremos ahora los trabajos realizados por Leibniz y Newton en lo que respecta al método inverso de las tangentes, primer nombre con el que se reconoce a la integral.

Cabe destacar que estos trabajos se encuentran en la correspondencia que sostuvieron Newton y Leibniz y que algunas partes no se conocen actualmente.

EL MÉTODO INVERSO DE LAS TANGENTES: un diálogo entre Leibniz y Newton (1665-1667)

Después de la creación de la Geometría Analítica, se describieron varios procedimientos para determinar tangentes a ciertas clases de funciones, dada una relación entre dos variables.

El inverso de este método directo de construcción de tangentes, consiste en deducir la ecuación de la propia función dada cierta propiedad característica de su recta tangente. Cuando Leibniz inició el desarrollo del Cálculo Diferencial, se percató de la importancia de este método relativo al problema de cuadraturas.

Los manuscritos del periodo inicial de sus primeros estudios matemáticos son evidencia del significativo papel que desempeñó el problema inverso de las tangentes en el pensamiento de Leibniz. En repetidas ocasiones tuvo contacto con el problema inverso de las tangentes en su correspondencia con Newton.

La opinión de Newton sobre este tema se encuentra principalmente en su segunda carta a Leibniz, llamada "Epístola Posterior". Ésta, en cierto grado, se encuentra respaldada por sus publicaciones, sin embargo el trabajo completo no se conoce en el presente.

1. Leibniz: La creación del Cálculo y sus primeros pensamientos acerca del método inverso de las tangentes.

Se sabe que desde 1673 Leibniz había estado buscando un método para manejar problemas infinitesimales, un cálculo, un método formal conveniente para expresar la variación de relaciones funcionales que ocurren en este tipo de problemas.

Durante octubre de 1675 dio pasos decisivos: la introducción de los símbolos *dx* (primero como $\frac{x}{d}$) y $\int f(x)dx$ en el estudio de problemas infinitesimales y el establecimiento de reglas básicas en el uso de la nueva notación.

Como ya se mencionó, se habían descubierto varios métodos para determinar las rectas tangentes de ciertos tipos de funciones, pero nadie había conocido aún métodos similares para la solución del problema inverso:

"Dada la recta tangente a una curva que tiene cierta propiedad, ¿Cómo determinar la curva?"

Desde 1673 Leibniz tenía una idea clara de este problema. De hecho, mientras se introducía en importantes trabajos matemáticos de su tiempo (debemos recordar que Leibniz se dedicó en un principio al estudio de otras corrientes de la ciencia),hizo algunos progresos en este campo.

En un manuscrito de agosto de 1673, del cual sólo se han publicado algunos fragmentos, dio un título significativo: *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.*

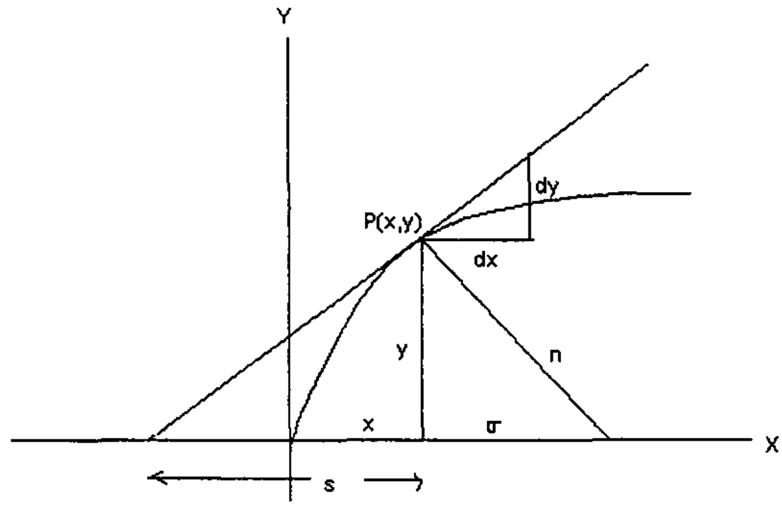
Leibniz estableció el problema de la siguiente forma: "Determinar el lugar geométrico de la función, provisto de la ley que determina la subtangente". En otros manuscritos habla de "regresar de las tangentes u otras funciones, a las ordenadas" donde con "otras funciones" se refiere a normales, subtangentes, subnormales, etcétera.

La idea de Leibniz consistía en preparar un conjunto de tablas de funciones junto con sus derivadas. Esta tabla indicaría cuales funciones aparecen como derivadas de curvas comunes como el círculo, la elipse, la hipérbola, la parábola, la cicloide, la tractriz, etcétera, y al mismo tiempo serviría como una tabla útil para tratar con cuadraturas, rectificaciones y problemas inversos de la tangente.

Finalmente, Leibniz enfatiza que... "casi toda la teoría del método inverso de la tangente es reducible a cuadraturas".

A continuación analizaremos algunos ejemplos donde Leibniz utilizó series infinitas para resolver el problema inverso de la tangente.

La subtangente s de una función es proporcional a su respectiva y, como la unidad infinitesimal dx lo es a la diferencia de dos ordenadas dy. dx es una unidad arbitraria tan pequeña como se quiera. A dx Leibniz le asignó el valor de 1:



$$\frac{s}{dx} = \frac{y}{dy}$$

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

El problema, por tanto, es determinar la ordenada y como una función de x, de la diferencia dy de las ordenadas; esta diferencia es (en el caso $dx = 1$) igual a la razón de la ordenada y a la subtangente s.

Considerando la parábola para la cual se cumple la siguiente relación,

$$\frac{y}{s} = \frac{y}{2x}$$

y, considerando además a $\frac{dy}{dx}$ como la diferencia de dos ordenadas,

$$\frac{dy}{dx} = y_1 - y_0$$

Por tanto, tomando $dx = 1$ y usando (1) tenemos:

$$\frac{y_0}{2x} = y_1 - y_0 .$$

Despejamos a y_1.

$$y_1 = \frac{y_0}{2x} + y_0$$

En general:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2x_n} + y_n \,.$$

Leibniz introduce los valores $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, ..., x_n = n+1$ para obtener una serie para y_n.

Con $x_0 = 1$ tenemos que:

$$y_1 = \frac{y_0}{2} + y_0$$

Para $x_1 = 2$

$$\frac{y_1}{4} = y_{2-}y_1$$

lo que implica $$y_2 = \frac{y_1}{4} + y_1 = \frac{y_0}{2\cdot 2^2} + \frac{y_0}{2^2} + \frac{y_0}{2} + y_0 \,,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2\cdot 2^2} + \frac{y_0}{2^2} \,.$$

Para $x_2 = 3$

$$\frac{y_2}{6} = y_3 - y_2$$

$$y_3 = \frac{y_2}{6} + y_2 = \frac{y_0}{6} + \frac{y_0}{2\cdot 6} + \frac{y_0}{2\cdot 2^2\cdot 6} + \frac{y_0}{2^2\cdot 6} + y_0 + \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2\cdot 2^2} + \frac{y_0}{2^2}$$

$$y_3 = y_0 + \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2^2\cdot 2} + \frac{y_0}{2^3\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

En general, se tiene la expresión,

$$y_n = y_0 + \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2^2\cdot 2} + \frac{y_0}{2^3\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Leibniz obtuvo resultados similares para el círculo y la hipérbola y aunque su razonamiento no fue muy claro, estaba seguro de poseer un método general que producía series finitas de números racionales. Aunque era un método muy general pudo, en principio, reducir el método inverso de las tangentes a series infinitas pero a diferencia de Newton, no dedicó mucho tiempo al estudio de las series.

En otros documentos de 1675 se encuentran algunos ejemplos específicos, mismos que se desarrollan a continuación:

1. Supongamos que $\sigma = y\frac{dy}{dx}$ (σ=subnormal), es inversamente proporcional a la ordenada y, es decir $\sigma = \frac{a^2}{y}$.

De aquí encuentra fácilmente que:

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{y},$$

$$y^2 dy = a^2 dx,$$

lo que implica,

$$\frac{y^3}{3} = a^2 x.$$

Leibniz no añade ninguna constante al resultado ya que considera que todas las curvas pasan por el origen.

2. Después estudió $\sigma = \frac{a^2}{x}$, obteniendo:

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{x},$$

$$ydy = \frac{a^2}{x}dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = a^2 \int \frac{dx}{x}.$$

Leibniz se da cuenta de que para resolver esta ecuación requiere de la curva logarítmica.

Los dos ejemplos siguientes inician con condiciones similares: $x + \sigma = \frac{a^2}{y}$ y $x + \sigma = \frac{a^2}{x}$ donde $x + \sigma$ representa la distancia desde el origen hasta la intersección de la normal con el eje x.

$x+\sigma=\dfrac{a^2}{y}$	$x+\sigma=\dfrac{a^2}{x}$
$x+y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{y}$	$x+y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{x}$
$dx(x-\dfrac{a^2}{y})=-ydy$	$dx(x-\dfrac{a^2}{x})=-ydy$
$xdx+ydy=\dfrac{a^2}{y}dx$	$xdx+ydy=\dfrac{a^2}{x}dx$
$\dfrac{x^2+y^2}{2}=a^2\int\dfrac{dx}{y}$	$\dfrac{x^2+y^2}{2}=a^2\int\dfrac{dx}{x}$

Sin embargo, Leibniz cometió un error al considerar $\int\frac{dx}{y}$ como el logaritmo de y.

En este trabajo Leibniz muestra otro ejemplo, que como observaremos, pudo haber sido inspirado por los ejemplos previos.

$$\sigma=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

$$ydy=\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,,$$

$$\frac{y^2}{2}=\int\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,.$$

Leibniz intenta aproximar esta integral, ya que no puede resolverla directamente.
Sustituye $x=1$ en la ecuación

$$y^2=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y^4=1+y^2\,.$$

Despeja erróneamente a y como $y=\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right)$. Sustituye para obtener

$$y^2=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

como una buena aproximación.

Es interesante observar la claridad del trabajo realizado por Leibniz, lo que le condujo a la solución de la integral. No hay descripciones difíciles, ni transformaciones geométricas especiales. Claridad y generalidad que no se encuentra en el trabajo de sus antecesores.

El trabajo de Leibniz muestra el manejo algebraico de los infinitesimales, en una forma clara, que permite comprender el significado de los mismos.

Basándose en su trabajo, Leibniz creó una tabla de funciones y sus derivadas y por ende tenía una tabla de primitivas de tales funciones. Confiaba en que esta tabla fuera una clave para el nuevo análisis y ligara el método directo con el inverso de las tangentes.

Pensaba que teniendo las funciones básicas podría obtener las restantes a través de investigar sus propiedades y de hacer comparaciones y formar otras funciones con sumas y restas de las funciones básicas.

Otro resultado interesante lo obtiene a partir de la serie:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

y encuentra

$$\int_0^x y dx = y - x\,.$$

Sabía que esta ecuación diferencial podría ser satisfecha solamente por

$$x = \log(1 + y)\,.$$

Nótese que usaba la función logaritmo pero no la exponencial pues en este momento aún no la conocía.

A diferencia de Newton, Leibniz no continuó sus investigaciones utilizando series.

2. Comentarios a la epístola posterior de Newton.

Newton trabajó con ecuaciones que relacionaban *fluentes* con sus *fluxiones* . En términos modernos, para resolver ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden, Newton trabajó con los siguientes casos:

1. Ecuaciones que contienen a $\dot{x}$ o a $\dot{y}$.
2. Ecuaciones con x y y.
3. Ecuaciones con más de dos fluxiones.

Caso 1.

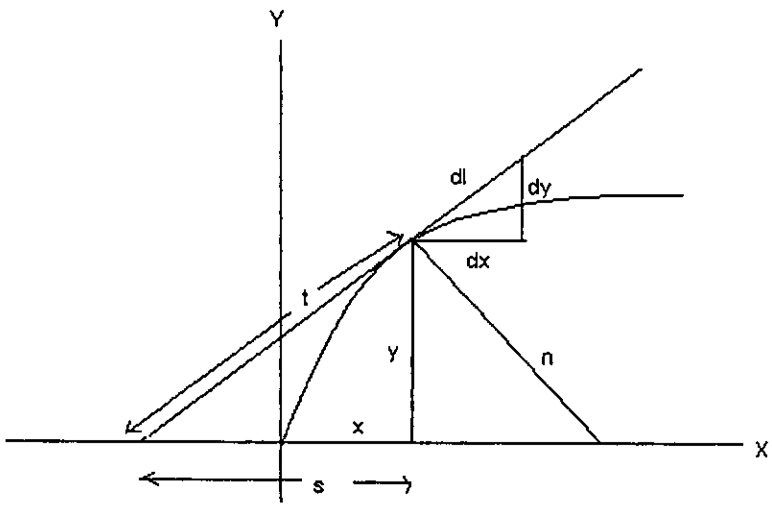


Fig. 1

De la fig. 1, por las propiedades de los triángulos semejantes, se tiene que

$$s = y\frac{dx}{dy} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{s}$$

O lo que es lo mismo, en la simbología de Newton:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{s}{y}$$

Para resolver esta ecuación, Newton sugiere reemplazar a y por $b + y$ (donde b es cualquier constante arbitraria).

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{s}{b+y} = \frac{s}{b} - \frac{sy}{b^2} + \frac{sy^2}{b^3} - \frac{sy^3}{b^4} + \cdots$$

Integrando término a término con respecto a y tenemos que:

$$x = \frac{sy}{b} - \frac{sy^2}{2b^2} + \frac{sy^3}{3b^3} - \cdots$$

Caso 2.

Mediante un ejemplo ilustraremos cómo trabajó Newton con las ecuaciones diferenciales de este tipo.
Sea

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y}{2} - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$$

Newton obtiene la solución de este problema mediante los siguientes pasos (ver tabla 1):

Paso 1.
Escribe todos los términos que no contienen a x en el primer renglón, ordenados de acuerdo a sus potencias.

Paso 2.
Escribe los términos en x en la primera columna de la sección A

Paso 3.
Reserva el siguiente renglón libre para las sumas que se formen durante el proceso.

Paso 4.
De aquí obtendrá los valores de x por integración (colocándolos en el siguiente renglón de la sección B).

Paso 5.
En la sección B hay dos renglones más, uno para calcular $x^{\frac{1}{2}}$ y otro para x^2.

Paso 6.
Se suman los valores de la primera columna de la sección A.

Paso 7.
Se encuentra x por integración y a partir de ésta los valores de $x^{\frac{1}{2}}$ y x^2 y se expresan en los lugares correspondientes de la sección B.

Paso 8.
Se sustituyen en las expresiones de la primera columna de la sección A y los términos obtenidos se colocan en la columna correspondiente con términos semejantes.

Paso 9.
Se suma la columna y se repiten los pasos 7 y 8.

El valor aproximado de x se obtiene en una serie en x en el renglón SUMA..

		$\frac{1}{2}y$	$-4y^2$	$7y^{\frac{5}{2}}$	$2y^3$			
A	$2yx^{\frac{1}{2}}$	*	y^2	*	$-2y^3$	$4y^{\frac{7}{2}}$	$-2y^4$	...
	$-\frac{4}{5}x^2$	*	*	*	*	*	$-\frac{1}{2}y^4$	...
	Suma	$\frac{1}{2}y$	$-3y^2$	$7y^{\frac{5}{2}}$	*	$4y^{\frac{7}{2}}$	$\frac{-41}{20}y^4$	...
B	$x =$	$\frac{1}{4}y^2$	$-y^3$	$2y^{\frac{7}{2}}$	*	$\frac{8}{9}y^{\frac{7}{2}}$	$-\frac{41}{100}y^5$	....
	$x^{\frac{1}{2}} =$	$\frac{1}{2}y$	$-y^2$	$2y^{\frac{5}{2}}$	$-y^3$	....		
	$x^2 =$	$\frac{1}{16}y^4$	....					

Caso 3.

De la fig. 1, Newton plantea la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{t}{dl} = \frac{y}{dy}$$

$$t = y\frac{dl}{dy} = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

$$dx = \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{y}dy \quad \ldots(*)$$

No mostraremos el procedimiento que Newton utilizó para resolver esta ecuación diferencial, únicamente mencionaremos que usó la ecuación de una hipérbola y ciertos cambios de variable.

CAPÍTULO 6

CONTROVERSIAS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO, ANTES DE SU FORMALIZACION

LAS CRITICAS DE GEORGE BERKELEY.

GEORGE BERKELEY (1685 - 1753)

Fue obispo anglicano y filósofo, nació en Kilkenny, Irlanda. Estudió en el Trinity College de Dublín, donde permaneció como pupilo y tutor hasta 1713. Sus libros más importantes fueron publicados en estos primeros años: *Essay towards a New Theory of Vision* (1709), *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge* (1710), y *Three Dialogues between Hylas and Philonous* (1713).

En estos trabajos Berkeley desarrolla su celebrada frase *ser es ser percibido – el contenido del mundo material son ideas que sólo existen cuando son percibidas con la mente.*

Berkeley llegó a ser decano de Londonberry (1724), pero se obsesionó con la romántica idea de fundar un colegio en las Bermudas *para promover la propagación del evangelio entre los salvajes americanos.*
Después de años de intensa búsqueda de financiamiento en Londres, navegó hacia América con su esposa (1728) y temporalmente convirtió a Rhode Island en su hogar.
Berkeley esperó cerca de tres años, los donativos no se materializaron y el colegio nunca se fundó.

Berkeley regresó primero a Londres y en 1734 fue nombrado Obispo de Cloyne. Su trabajo literario restante se divide entre cuestiones de reforma social y reflexión religiosa.

A raíz de los trabajos realizados durante el siglo XVIII existían dudas generales acerca de los fundamentos de los métodos de fluxiones y del Cálculo Diferencial.
En Inglaterra, la falta de claridad de los conceptos y la inconsistencia de la notación fomentó la confusión de fluxiones con momentos.

En la parte continental de Europa los seguidores de Leibniz deliberadamente intentaron interpretar las diferenciales como cero, esta inconsistencia repercutió en fuertes críticas para Leibniz.

Esta situación no podía continuar así por más tiempo.
El físico y geómetra holandés Bernard Nieuwentijdt pronto cuestionó la validez de las diferenciales de orden superior. El matemático francés Pierre Gassendi dijo que las demostraciones matemáticas basadas en diferenciales no eran válidas.
Sin embargo, el más general y significativo ataque acerca de la estructura de los procedimientos del nuevo análisis corresponde al obispo George Berkeley. En 1734 su

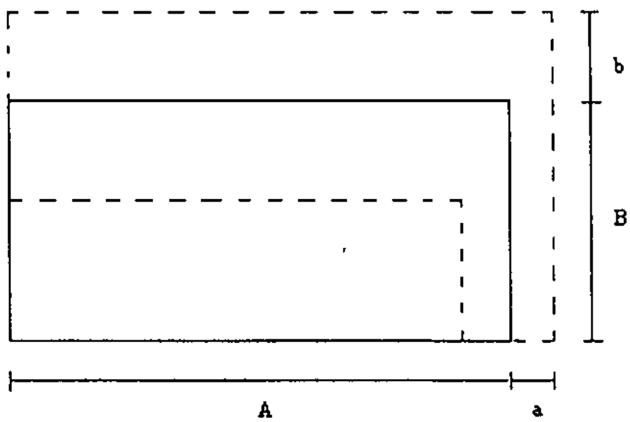
trabajo apareció publicado en un articulo titulado " El analista ", y subtitulado "una disertación dirigida a un matemático infiel", el que se presume es Edmund Halley.

Berkeley no niega la utilidad del cálculo o la validez de sus resultados, simplemente sostiene que los matemáticos no tienen bases sólidas que respalden sus métodos y que, en la mayoría de los casos, habían utilizado un razonamiento inductivo en lugar del deductivo que es propio de la ciencia matemática.

Analizaremos algunos puntos claves que Berkeley criticó con más énfasis.
Primero centra su atención en una demostración realizada por Newton en su libro "Principia" , donde Newton utiliza cantidades infinitamente pequeñas al determinar el momento de un producto. Para ello encuentra el momento de un rectángulo de la siguiente forma:

Sean A y B las dimensiones del rectángulo y $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, los incrementos de A y B respectivamente.
En seguida Newton forma un rectángulo aumentado cuyos lados son $A+\frac{1}{2}a$, $B+\frac{1}{2}b$ y otro disminuido cuyos lados son $A-\frac{1}{2}a$, $B-\frac{1}{2}b$.

Después, sustrae el rectángulo disminuido del rectángulo aumentado para así obtener el momento del rectángulo original.



Berkeley critica el hecho de que Newton utilice los incrementos $\frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}b$ en lugar de a,b, y así poder omitir la cantidad infinitamente pequeña ab, del cálculo final .
Observemos los resultados obtenidos utilizando los incrementos $\frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}b$ como lo hizo Newton y lo que se obtiene utilizando los incrementos completos (a,b), para comprender a lo que se refiere Berkeley.

Según Newton,

$$\left(B+\frac{1}{2}b\right)\left(A+\frac{1}{2}a\right)-\left(B-\frac{1}{2}b\right)\left(A-\frac{1}{2}a\right)=$$

$$AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab-AB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{2}aB-\frac{1}{4}ab=$$

$$=bA+aB$$

ahora, si utilizamos los incrementos completos tenemos que:

$$(A+a)(B+b)=AB+aB+bA+ab\,,$$

nuestro rectángulo original tiene área AB, de tal forma que el incremento esta formado por

$$aB+bA+ab\,.$$

Como se observa la diferencia es el término ab.

Lo que Berkeley objeta es que al usar la mitad de los incrementos omite el término ab del cálculo final, es decir, Newton se vale de artificios para no tener que explicar la desaparición del término ab.

Otra crítica importante realizada por Berkeley está dirigida al método de la última razón utilizada por Newton en "De Quadratura", donde Newton intenta evitar el uso de cantidades infinitamente pequeñas, de la siguiente forma:

Usa x y el incremento o, y desarrolla $(x+o)^n$ utilizando el teorema del binomio, después sustrae x^n para obtener el incremento en x^n, luego divide entre o para encontrar la razón de los incrementos x^n y x. A continuación toma o igual a cero para determinar la última razón de los incrementos.

Berkeley afirma que Newton se contradice al tomar o diferente de cero y después, cuando le resulta conveniente para alcanzar el resultado esperado, lo toma igual a cero. Berkeley sostiene que el hecho de que los incrementos se anulen destruye el hecho de que había incrementos.

La interpretación moderna en términos de límites considera la secuencia infinita formada por las razones de incrementos que se aproximan a cero y esta secuencia no tiene un último término, aunque ésta es la definición de límite, misma que no se conocía en esa época.

Todos los problemas que aparecen en los conceptos de infinito, continuo y número real fueron resueltos hasta la segunda mitad del siglo XIX.

Aunque las críticas de Berkeley estaban dirigidas al método británico de fluxiones, el método de diferenciales también atrajo su atención.

Berkeley explica que para encontrar tangentes, primero se dan incrementos que determinan una secante, no la tangente; sin embargo, se corrige este error al rechazar las diferenciales de grado mayor que uno. Así, mediante un proceso no válido se llega a un resultado correcto y este procedimiento no es un método científico.

Otra crítica más está dirigida al concepto de velocidad instantánea. Berkeley argumenta que el concepto de velocidad depende de intervalos de espacio y de tiempo y que es imposible concebir una velocidad instantánea donde el tiempo y el espacio son nulos. Su argumento es completamente válido al mostrar que la velocidad instantánea no tiene una realidad física, pero su falla radica en que este concepto debe entenderse como una abstracción matemática.

Muchos se dieron a la tarea de defender los trabajos y opiniones de Newton de las críticas realizadas por Berkeley.

Lejos de ser perjudiciales estas críticas, vastamente fundamentadas, fueron de gran ayuda para buscar los cimientos del cálculo pues mostraron claramente que las bases no estaban firmes. Gracias a esto, los seguidores se afanaron en dar una respuesta clara y precisa a los *detractores* del cálculo.

A continuación, se describen las primeras respuestas de los defensores del cálculo y de cómo sus ideas fueron paulatinamente evolucionando hasta culminar con las bases claras y precisas con que cuenta hoy el Cálculo Diferencial e Integral.

LEONHARD EULER (1707 - 1783)

Euler nació en Basel, Suiza. Estudió matemáticas bajo la instrucción de Jean Bernoulli. Fue profesor de física (1731) y después de matemáticas (1733) en la Academia de Ciencias de San Petersburgo. En 1738 perdió la vista de un ojo. En 1741 se trasladó a Berlín como director de matemáticas y física en la Academia de Berlín, pero regresó a San Petersburgo en 1766, tan pronto perdió la vista del otro ojo. Fue un gigante de las matemáticas, publicó cerca de 800 diferentes libros y artículos en matemáticas puras y aplicadas, física y astronomía. Su *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 y los tratados siguientes en Cálculo Diferencial e Integral son tomados como libros de texto durante un siglo y su notación del número e es usada desde entonces.

Euelr escribió a la princesa de Anhalt-Dessau *Lettres à une princesse d'Allemagne* (1768-1772), mostrando en este trabajo un resumen claro y no técnico de las principales teorías físicas de la época.
Euler tuvo una memoria prodigiosa, la que le permitió continuar con su trabajo matemático y cálculos complejos en su cabeza cuando estaba totalmente ciego. No tuvo igual en el uso de algoritmos para resolver problemas.

Otra tendencia a seguir dentro de los intentos por formalizar el cálculo fue utilizar manipulaciones algebraicas más que geométricas. Los trabajos de Euler son los más representativos de esta tendencia. Euler rechazó la geometría como base del cálculo e intentó trabajar pura y formalmente con funciones, esto es, con sus representaciones algebraicas.

Rechaza el concepto de infinitesimal como una cantidad menor que cualquier cantidad asignada y no nula. Euler considera a el cociente $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ como un número definido, y procede de la siguiente manera:

Para cualquier número n

$$n\cdot 0=0$$

$$n=\frac{0}{0}$$

Por tanto, para él la derivada sólo fue una forma conveniente para determinar el cociente $\frac{0}{0}$.

Euler afirma que $(dx)^2$ se anula antes que dx. Es interesante observar cómo maneja algebraicamente las diferenciales, veamos un ejemplo:

Si tenemos la proporción $dx+(dx)^2 : dx$, entonces

$$\frac{dx+(dx)^2}{dx}=1+dx=1$$

Otro punto interesante lo encontramos en su concepto de infinito. Para Euler el ∞ es un número definido. Así $\frac{a}{dx}=\infty$ pero $\frac{a}{(dx)^2}=\infty$ es un infinito de segundo orden, etcétera.

Para calcular derivadas, no apreciamos realmente un avance con respecto a lo obtenido por Newton, sólo podemos mencionar que logra manipular algebraicamente y con mucha facilidad las expresiones de funciones.

Por ejemplo, para obtener la derivada de $y = x^2$ da a x el incremento w y el incremento para *y* es $\eta = 2xw + w^2$. A continuación toma la razón $\frac{\eta}{w} = 2x + w$. Afirma que la razón se aproxima a $2x$ cuando se toma el valor más pequeño de w (que en su concepción es igual a cero).

Euler acepta que existen cantidades que son absolutamente cero pero que su razón es un número finito.

Veamos otro ejemplo:

Sea $y = \log x$

reemplaza x por $x + dx$. Por tanto,

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log(1 + \frac{dx}{x})$$

Utiliza a continuación el resultado

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

Reemplaza z por $\frac{dx}{x}$

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} + \frac{(dx)^3}{3x^3} - \ldots$$

ya que después del primer término los demás son nulos, y obtiene finalmente:

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

Euler manipula las expresiones algebraicas de las funciones en una forma muy sencilla, pero su trabajo no aporta nada que pueda aclarar los fundamentos del cálculo tales como límite y continuidad.
Estos conceptos se aclararían más tarde con Bolzano, Cauchy y Weierstrass.

El último trabajo que vamos a analizar antes de llegar a la formalización del cálculo es el trabajo realizado por Lagrange.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 - 1813)

Nació el 25 de enero de 1736 en Turín, capital del reino de Cerdeña.

Cursó sus estudios en Turín; después la lectura fortuita de una memoria sobre álgebra del astrónomo Halley le orienta hacia las matemáticas y entra luego en contacto con los trabajos de Newton, Leibniz, Euler y los Bernoulli. Con sólo dieciocho años, se muestra dispuesto a volar con sus propias alas y comienza una correspondencia matemática con Fagnano y Euler. En 1755, enseña en la Escuela de Artillería de Turín, y en esa misma época, redacta sus primeras memorias.

En las *Investigaciones sobre la naturaleza y propagación del sonido*, da la razón a Euler en contra de su amigo D'Alembert en lo que respecta a la solución del problema de las cuerdas vibrantes.
Una segunda memoria, presentada primero como cartas a Euler, que trata del problema de los isoperímetros y comprende la primera exposición del cálculo de variaciones mediante un nuevo método, le permite ingresar, como miembro extranjero, a la Academia de Berlín gracias al apoyo de Euler.

En 1758, Lagrange funda, en colaboración con científicos de Turín y alumnos suyos, una sociedad que más tarde se convertirá en la Academia de Ciencias de Turín. En el boletín publicado por esta nueva sociedad científica se encuentran los principales trabajos de Lagrange y en particular los cinco volúmenes conocidos generalmente bajo el título de *miscellanea Taurinensia.* Es laureado por la Academia de Ciencias de París en varias ocasiones.

El trabajo más famoso de Lagrange es su *Mécanique Analytique* de 1768; en este trabajo generalizó, formalizó y coronó el trabajo de Newton sobre mecánica. Las solucionesexactas particulares que obtuvo en el problema de los tres cuerpos ocasionó que Legarange ganara un premio en 1772 con su obra *Essai sue lè problème des trois corps.*

Lagrange viaja a París donde conoce a los matemáticos D'Alembert, Fontaine, Clairaut, Condorcet y otros.

Regresa a su país natal, deseoso de obtener un puesto de profesor de matemáticas menos molesto que el de la Escuela militar, y por invitación de Federico II acepta ocupar el puesto que dejara vacante Euler en la Academia de Berlín. Gracias a las recomendaciones conjuntas de Euler y D'Alembert, Lagrange obtiene ese puesto y parte hacia París en 1766. Lagrange reside en Berlín hasta 1787.

Lagrange lleva en Berlín una vida ordenada en la que cada día se desarrolla según un horario rigurosamente establecido que le permite repartir sus actividades, para evitar así el exceso de trabajo y sacar partido al máximo de las horas más aprovechables para sus trabajos científicos. Lagrange da muestras siempre de una gran dulzura de carácter y una amabilidad desconcertante.

Durante su estancia en Berlín, Lagrange redacta cerca de ciento cincuenta memorias consagradas a las matemáticas y a la mecánica. Sus memorias, todas escritas en francés, muestran un cuidado extremo por la perfección de forma y de pensamiento.

Su obra menos vasta que la de Euler, casi iguala a la de su padrino y rival en variedad e importancia. El método analítico gozó de sus preferencias, siendo uno de los que más contribuyeron a introducirlo en la enseñanza.

Napoleón le cubre de honores, haciéndole miembro del Senado conservador, gran oficial de la Legión de Honor, conde del Imperio. Concluye una carrera de sesenta años consagrados a las matemáticas el 10 de abril de 1813, a los setenta y siete años.

Intentó dar una definición de derivada eliminando toda referencia a conceptos que no estuvieran completamente comprendidos como infinitesimal, fluxión y límite. Al igual que Euler utiliza métodos algebraicos. Su trabajo se basa principalmente en expresar cualquier función como una serie de potencias.

Para Lagrange, cualquier función puede expresarse como

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$

donde p, q, r son funciones de x que no dependen de h. Verificó por experiencia que era posible expresar todas las funciones que él conocía en serie de potencias.

El proceso que sigue es el siguiente:

Primero supone que $f(x+h) = f(x) + hP(x,h)$ donde

$$P(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \ldots\ldots(1)$$

define $p(x) = P(x,0)$ como la parte que no se anula cuando $h = 0$.

A continuación define $Q(x,h) = \dfrac{P(x,h) - p(x)}{h}$ de tal forma que

$$P(x,h) = p + hQ$$

y así,

$$f(x+h) = f(x) + hp + h^2 Q$$

Repite el proceso para Q y así sucesivamente.

Para encontrar la derivada de una función Lagrange elimina todos los términos después del segundo,

$$f(x+h) - f(x) = hp$$

$$p = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Lagrange afirmaba que este método le permitía derivar los resultados básicos sin necesidad de considerar infinitesimales o límites, aunque estos conceptos estaban implícitos en su desarrollo. En realidad, su método estaba muy lejos de resolver el problema referente a las bases del cálculo ya que, en lugar de evadirlos, lo que se requería era cimentarlos.

Veamos un ejemplo de su método.

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

Por (1),

$$P = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+h)} \; ; \; p = -\frac{1}{x^2}$$

$$Q = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{x(x+h)} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2(x+h)} \; ; \; q = \frac{1}{x^3}$$

por tanto,

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \ldots$$

De aquí que la derivada es

$$p = -\frac{1}{x^2}$$

Si aplicamos este proceso a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, observaremos que la falta del uso del concepto de límite nos lleva a obtener el cociente indeterminado $\frac{0}{0}$. Lagrange, como ya mencionamos, no logra cimentar el concepto de límite, pues el proceso que sigue es aplicable sólo a funciones polinomiales.

LA FORMALIZACIÓN DEL CÁLCULO.

A principios del siglo XIX los críticos de Lagrange empezaron a cuestionar la validez del principio que enunció, en el que afirma que una función continua puede siempre ser expresada mediante el teorema de Taylor como una serie infinita.
Empezaron a preguntar qué era una función en general y una función continua en particular y criticaron el uso casi indiscriminado de series infinitas. Lagrange inició un cambio en este aspecto al considerar sólo algunos términos de la serie y un residuo.
Al igual que Arquímedes, Lagrange no consideraba que las series se extendieran hasta el infinito, le bastaba con tomar un residuo suficientemente pequeño.
Sin embargo, durante el siglo XIX, el concepto de infinito fue básico en el cálculo a través de series infinitas.
Uno de los pioneros en la formalización del cálculo fue Bernhard Bolzano.

BERNHARD BOLZANO (1781 - 1848)

Filósofo, lógico y matemático checo, nació en Praga en 1781. Era hijo de un anticuario italiano y de una alemana. Al terminar sus estudios se piensa en él para la cátedra de matemáticas recientemente vacante en la Universidad de Praga. Después de haberse consagrado como sacerdote, enseña filosofía y religión en la Universidad, pues el puesto de matemáticas había sido adjudicado a un candidato que poseía mayor experiencia pedagógica que la suya. Acusado de racionalismo, en 1820 se le expulsó de la Universidad y se prohibió la publicación de sus obras. Bolzano menciona en una carta del 18 de diciembre de 1843, dirigida a su alumno Fesl en Viena que durante la estancia de Cauchy en Praga, se visitaron varias veces.

En su memoria de 1817, titulada *Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación,* Bolzano presenta definiciones rigurosas de la función continua y de la derivada de una función, así como una concepción clara de las relaciones que unen la diferenciabilidad y la continuidad de una función.

Al igual que Lagrange, Bolzano evitó introducir el tiempo y el movimiento en sus estudios matemáticos. Esta actitud hizo necesaria en primer lugar una definición satisfactoria de continuidad.
Newton evitó este problema al considerar un movimiento continuo. Leibniz evadió el mismo problema utilizando postulados de continuidad.

Bolzano, sin embargo, dio una definición de función continua, la que por primera vez indicaba claramente que las bases de la idea de continuidad se encontraban en el concepto de límite.

Bolzano define una función $f(x)$ continua en un intervalo, si para cualquier valor de x en ese intervalo la diferencia $f(x+\Delta x)-f(x)$ es menor que cualquier cantidad dada para Δx suficientemente pequeña, positiva o negativa. Esta definición no es esencialmente diferente de la presentada más tarde por Cauchy.

Bolzano define la derivada de $f(x)$, para cualquier valor de x, como la cantidad $f'(x)$ tal que,

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

donde Δx se aproxima tanto como se desee a cero, para Δx positiva o negativa.

Esta definición es similar a otras que se expresaron antes, pero Bolzano explica mejor la naturaleza del concepto de límite.

Lagrange y otros matemáticos usan límites del cociente de cantidades que se anulan al igual que Euler que interpretó a $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de ceros.

Pero Bolzano enfatiza el hecho de que la razón $\frac{dy}{dx}$ no debe tomarse como el cociente de ceros, sino como un símbolo para una función única.

Lagrange con su método de series había tratado de evitar la necesidad de considerar los infinitesimales o los límites de funciones, pero para Bolzano en cuestiones de series infinitas era necesario considerar los problemas de convergencia.

Sus trabajos sobre el infinito son muy extensos, intentaremos mostrar a grandes rasgos la forma en que manejaba este concepto.

Bolzano afirma que es posible efectuar cálculos con lo infinitamente grande al igual que con lo infinitamente pequeño:

"En efecto, si N_0 es infinitamente grande, es necesario que $\frac{1}{N_0}$ sea infinitamente pequeño."

Bolzano ejemplifica su afirmación con el siguiente ejemplo: "Si nos preguntan cuál es la probabilidad de que alguien dispare una bala al azar y de que el punto medio del proyectil pase exactamente por el punto medio de la manzana que cuelga de un árbol, es necesario admitir que el conjunto de todos los casos posibles con sus distintos grados de probabilidad, es infinito. Pero de esto se sigue que el grado de probabilidad en cuestión es igual o menor que $\frac{1}{\infty}$".

Por otro lado, supone lícito el utilizar al cero como divisor y que el cociente $\frac{1}{0}$ no es en realidad otra cosa más que una cantidad infinitamente grande, mientras que el cociente $\frac{0}{0}$ denota una cantidad completamente indeterminada.

En lo que se refiere al cálculo diferencial e integral escribe:

"Supongamos ahora que se sabe, por ejemplo, que el valor de una cantidad variable y depende del de otra cantidad x de tal manera que entre ambas se de constantemente la relación expresada por la ecuación:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y que la circunstancia de que éstas puedan adquirir valores infinitamente pequeños sea compatible con la naturaleza de la clase especial de cantidades a las que pertenecen tanto x como y ".

Si x se incrementa en la cantidad infinitamente pequeña dx y denotamos la modificación correspondiente de y con dy obtendremos:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a(x + dx)^3 + b(x + dx)^2 + c(x + dx) + d$$

$$y + dy = (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) + dx(4x^3 + 3x^2 + 2bx + c) + dx^2(6x^2 + 3ax + b) + dx^3(4x + a) + dx^4$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 3x^2a + 2bx + c) + dx(6x^2 + 3ax + b) + dx^2(4x + a) + dx^3$$

Esta última ecuación representa la relación de dos cantidades infinitamente pequeñas como algo que depende no sólo de a, b, c y x sino del valor de la variable dx.

Veamos otro ejemplo donde Bolzano utiliza infinitesimales. Una vez que se tiene una ecuación en x y y resulta muy fácil, y es algo conocido, encontrar la derivada de y. Por ejemplo, si

$$y^3 = ax^2 + a^3$$

Se tiene que para cada $\Delta x \neq 0$

$$(y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3.$$

De donde,

$$y^3 + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3 = a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + a^3$$

por tanto,

$$\Delta y(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2) = \Delta xa(2x + \Delta x)$$

lo que implica

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}$$

Siendo la función derivada $\frac{2ax}{3y^2}$ que es una función que se obtiene a partir de sustituir en la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ los términos Δx y Δy iguales a cero, es decir, en la expresión

$$\frac{2ax + a\Delta x}{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}.$$

Aunque las ideas de Bolzano indicaron la dirección en la cual se encontraba la formulación final del cálculo, no constituyeron una influencia definitiva para ello, ya que su trabajo no fue conocido sino hasta medio siglo después, cuando Hermann Hankel lo redescubrió.

Afortunadamente, Cauchy trabajó en ideas similares al mismo tiempo y tuvo éxito en establecerlas como básicas para el cálculo.

Hemos visto desarrollarse gradualmente el concepto de límite desde los griegos con el método de exhausión hasta que fue expresado en forma definitiva por Bolzano y otros, como un concepto básico del cálculo.

Sin embargo, a través de este largo periodo, le faltaba precisión para su formalización. Un punto importante que impedía dar una definición precisa es que los trabajos presentados se basaban sólo en la intuición geométrica.

El cálculo fue interpretado, por sus precursores, como un instrumento que trataba con proporciones entre cantidades asociadas a problemas geométricos y esta idea siguió aceptándose por sus sucesores.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 - 1857)

Nació el 21 de agosto de 1789 en París, casi seis semanas después de la caída de la Bastilla. Era el mayor de una familia pobre de seis hijos y creció durante la Revolución. A pesar de la buena voluntad de su padre, Louis François, Cauchy, sobrevivió al terror, pero heredó una salud delicada. Su educación primaria quedó asegurada enteramente por su padre, porque las escuelas de aquella época eran prácticamente inoperantes. El 1 de enero del año 1800, su padre fue elegido secretario del senado y el joven Augustin Louis continuó sus estudios en el despacho de su padre. Fue así como conoció a los grandes matemáticos franceses de la época, Laplace y Lagrange y este último manifestó ya entonces, con respecto a él una cierta admiración. Sin embargo su padre no descuidó su educación literaria, preocupándose de que su hijo no se limitara exclusivamente a las matemáticas. Hacia los trece años, Cauchy entró en la escuela Central del Panteón y allí obtuvo primeros premios en griego y en composición latina. En 1804, hace su primera comunión, deja la escuela para estar bajo la instrucción de un tutor en matemáticas. En 1805, Cauchy es el segundo en el concurso de entrada en la Escuela Politécnica, pero, a causa de su salud, Lagrange y Laplace le aconsejan consagrarse a las matemáticas.

Diplomado por el cuerpo de Ingenieros de Caminos, Cauchy participó a partir de 1810 en las obras del puerto de Cherburgo, pero abandonó pronto su trabajo como ingeniero para dedicarse a la ciencia pura.
En efecto, vuelve a París en 1813, y a los veinticuatro años, Cauchy atrae la atención de los matemáticos experimentados de Francia por sus trabajos de investigación sobre los poliedros y las funciones simétricas.

En febrero de 1811, presenta su primera memoria consagrada a la teoría de los poliedros, en la que Cauchy muestra que no existen más poliedros regulares que los que tienen 4,6,8,12 ó 20 caras, además de desarrollar la célebre fórmula de Euler que une las aristas, las caras y vértices de un poliedro. Estimulado por Legrendre, publica una segunda memoria sobre el tema en enero de 1812. Después en 1814, presenta *Mémoire sur la theorie des intégrales définies* (Memoria sobre las integrales definidas.), seguida en 1815 de una memoria fundamental sobre los grupos de sustitución, así como una demostración de un importante teorema de Fermat: todo entero positivo puede expresarse como una suma de tres números triangulares, cuatro números cuadrados, cinco números pentagonales, etc. El año siguiente, Cauchy es merecedor del Gran Premio que ofrece la Academia por su memoria sobre *Une théorie des ondes sur la surface d'un fluide dense de profondeur infinie* (*Un estudio de la teoría de las ondas sobre la superficie de un fluido denso de profundidad infinita).* A los 27 años de edad, Cauchy es propuesto para ocupar el próximo puesto vacante en la Academia, enseñando al mismo tiempo álgebra en la Facultad de Ciencias, física matemática en el Cóllege de France y mecánica en la Escuela Politécnica,

Nombrado académico por decreto en 1816, en el lugar de Monge que había sido excluido por Napoleón a su regreso de la isla de Elba, Cauchy desarrolló una actividad matemática increíble, tanto por su producción incesante como por la calidad incomparable de sus memorias sobre prácticamente todas las ramas de las matemáticas.

Su reputación se extendió por toda Europa y numerosos oyentes acudían a Berlín, Madrid, San Petesburgo, etc. Para asistir a sus maravillosas conferencias, en las que Cauchy presentaba los resultados originales de sus investigaciones, particularmente en análisis y en física matemática. Se casó, en 1818, con Aloise de Bure, hija de una familia cultivada. De su unión que duró casi cuarenta años, nacieron dos hijas que fueron educadas según los principios de la religión católica.

Siguiendo la tradición establecida en la Escuela Politécnica, Cauchy fue estimulado a escribir los apuntes de sus cursos y así aparecieron sucesivamente los *Cours d'analyse de L'Ecole Polytechnique* (1821), el *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) y las *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).

Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con un gran rigor y el concepto de límite constituye la piedra angular de su análisis. A partir de 1826, publicó una especie de diario personal titulado *Exercises de mathématiques* que será proseguido, después de 1830 bajo el título de *Exercises d'analise mathématique et de physique* en el que publicará mensualmente sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas.

Pero en 1830 las intrigas políticas modificaron durante algunos años su carrera de hombre de ciencia. En efecto, ardiente realista y partidario de los Borbones, perdió su empleo por haberse negado a prestar juramento a la monarquía de julio, y decidió expatriarse voluntariamente.

Se fue a Suiza por algún tiempo y después aceptó una cátedra en la Universidad de Turín, dejando a su familia en París y conservando siempre su sillón en la Academia. Llamado a Praga en 1833 por Carlos X, quien le confió la educación científica del conde de Chambord, aceptó esta invitación. Su familia se reunió con él un año más tarde. Su trabajo de tutor fue pesado y agotador y Cauchy conseguía difícilmente librarse de él de vez en cuando para proseguir sus investigaciones. Pudo al menos escribir una larga memoria sobre la dispersión de la luz durante este periodo de tutela. Pero en 1838, regresa a Francia con el título de barón, Cauchy enseñó en varios establecimientos religiosos y fue elegido miembro de la Oficina de Longitudes en 1839, pero el gobierno de Luis Felipe no ratificó esta propuesta. La república restaurada después de la revolución de 1848 le nombró profesor de astronomía matemática en la Facultad de Ciencias, y en la Sorbona, aunque era un legitimista declarado.

Durante los diecinueve últimos años de su vida, escribió más de 500 memorias sobre todas las ramas de las matemáticas, incluyendo la mecánica y la física. Hombre universal, interesado por todo y en particular por la poesía, autor de un trabajo sobre la prosodia hebraica, profesó siempre con fervor la fe católica. Pasó con quietud y paz los últimos años de su vida y su muerte acaecida en Sceaux el 23 de mayo de 1857, dejó el recuerdo de una personalidad algo ambigua. Hombre sociable, moderado y sincero, fue un profesor admirable y un hábil conversador. En cambio, fanático de la religión, intentó demostrar toda su vida su superioridad y su insaciable deseo de producir siempre más le impidió probablemente ayudar a aquellos que, como Abel y Bolzano, habrían podido beneficiarse de su inmensa influencia para dar a conocer sus trabajos. La obra científica que realizó le coloca entre los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Autor de más de setecientas memorias (sólo Euler le sobrepasa en número), su obra inmensa, en la edición moderna, llena 27 volúmenes.

Cauchy fue el fundador de la teoría de las funciones analíticas. Hizo experimentar inmensos progresos a la teoría de determinantes, además de introducir el rigor en el análisis. Sus contribuciones originales se refieren en especial a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, a la teoría de grupos de sustitución, a la clarificación y a la formulación de los conceptos de la teoría de curvas, a los números complejos y a las congruencias polinómicas. En mecánica, escribió importantes memorias sobre el equilibrio de varillas y placas elásticas, sobre la teoría de ondas que Fresnel acababa de establecer, así como sobre el tema de la dispersión y la polarización de la luz.

Euler y Lagrange intentaron manejar los conceptos del cálculo en una forma diferente, utilizando el concepto de función. Sin embargo, rechazaron y evadieron la idea de límite. En el trabajo de Cauchy el concepto de límite es claro y definitivamente más aritmético que geométrico.

Al dar su definición en su "Cours d'analyse", Cauchy separa la idea de toda referencia a figuras geométricas o magnitudes de las mismas, "Cuando los valores sucesivos de una variable se aproximan a un valor, de tal forma que al final la diferencia entre ellos es tan pequeña como se desee, este valor es el límite de todos los otros".

La definición de Cauchy se aplica a las nociones de número, de variable y de función más que a intuiciones geométricas y dinámicas.

Cauchy trató a los infinitesimales como a cualquier otra función, excepto que se debe comprender que la variable toma valores de tal forma que converge a cero como su límite.

Habiendo establecido las nociones de límite, infinitesimal e infinito, Cauchy pudo definir uno de los conceptos centrales del Cálculo, a saber, la derivada.
Su formulación es la misma que dio Bolzano:

Sea la función $y = f(x)$, la variable x toma un incremento $\Delta x = h$; y considérese la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$. Al límite de esta razón (si existe) cuando h se aproxima a cero, Cauchy la representa por $f'(x)$ y la llama la derivada de y con respecto a x.

Leibniz había considerado que las diferenciales eran el concepto fundamental y el cociente diferencial se definía con base en ellos. Pero Cauchy hizo exactamente lo contrario. Habiendo definido la derivada en términos de límites, expresó las diferenciales en términos de derivadas, de la siguiente manera,

Si dx es una constante finita entonces la diferencial dy de $y = f(x)$ es definida como $f'(x)dx$. En otras palabras, las diferenciales dy y dx son cantidades escogidas de tal forma que su razón $\frac{dy}{dx}$ coincide con el límite $y' = f'(x)$ de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero .

Cauchy dio a la derivada y a la diferencial una precisión formal valiéndose sólo del concepto de función. La diferencial $dy = f'(x)dx$ es una función de x y dx. Tomando dx como fija, la función $f'(x)dx$ tendrá una derivada $f''(x)dx$ y una diferencial $d^2y = f''(x)dx^2$. En general, $d^n y = f^n(x)dx^n$.

En seguida, Cauchy se dio cuenta de que era necesaria una definición de continuidad como la siguiente,

"La función $f(x)$ es continua en límites dados si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño h en la variable x produce siempre un incremento infinitamente pequeño $f(x+h) - f(x)$ en la función"

La expresión "infinitamente pequeño" debe entenderse como cualquiera en el trabajo de Cauchy, es decir, $f(x)$ es continua en un intervalo, si el límite de una variable $f(x)$ cuando x se aproxima a a es $f(a)$, para cualquier valor de a dentro de ese intervalo.
Cauchy muestra que la noción matemática de continuidad depende de la idea de límite y no al revés como lo consideraron sus predecesores.

En cuanto a la definición de integral, los últimos antecesores de Cauchy habían intentado eliminar la idea de suma en la definición de integral. La integral se consideró como la antiderivada de una función.

Cauchy restauró la idea de suma y definió a la integral como sigue.
Para una función $y = f(x)$ continua en el intervalo de x_0 a x, forma la suma de los productos

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Sí los valores absolutos de las diferencias $x_{i+1} - x_i$ decrecen indefinidamente, el valor de S_n "finalmente alcanzará un cierto límite" S para el cual dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos del intervalo x_0 y X ... este límite se llama la integral definida".

Cauchy mostró que si $f(x)$ es una función continua, entonces la función definida como la integral $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$ tiene una derivada, la función $f(x)$.Esta fue la primera demostración rigurosa del teorema fundamental del Cálculo.

En los trabajos de Lagrange observamos que constantemente utiliza series, pero al rechazar la idea de límite tampoco se preocupa por la convergencia de las series.
Cauchy trabaja con la convergencia de las series de la forma siguiente:

Sea

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

que es la suma de los primeros elementos de una suma infinita (para n un entero arbitrario). Si al incrementar los valores de n, la suma S_n se aproxima a un límite S, se dice que la serie es convergente y el límite en cuestión será la suma de la serie.
Por el contrario, si al aumentar el valor de n la suma S_n no se aproxima a ningún límite, la serie será divergente y no existirá una suma.

En seguida mostramos la forma en que Cauchy realiza sus demostraciones, utilizando su metodología y sus conceptos.

<u>Teorema:</u> Si la función $f(x)$ es continua entre los valores $x = x_0$ y $x = X$ y si A y B son los valores más pequeño y más grande, respectivamente, de la derivada $f'(x)$ en ese intervalo, entonces la razón de las diferencias finitas $\dfrac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$ está entre A y B.

Cauchy inicia su demostración escogiendo δ y ε de forma que para todos los valores de h con $|h|<\delta$ y para cualquier valor de x en el intervalo $[x_{0,}X]$ se cumple que:

$$f'(x)-\varepsilon<\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<f'(x)+\varepsilon \quad \ldots(1)$$

El hecho de que tal valor exista se sigue de la definición de Cauchy de la derivada como un límite. Cauchy usa el hecho de que dada ε la misma δ funciona para cada x en el intervalo. En cualquier caso, Cauchy toma *n-1* valores: $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$ entre $x=x_0$ y $x=X$ con la propiedad de que $x_i-x_{i-1}<\delta$ para toda *i* (*i*=1,2,...,*n*)

La desigualdad (1) se aplica para cada par de valores de los n dados, por tanto,

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}<B+\varepsilon$$

Cauchy utiliza un resultado algebraico para concluir que la suma de los numeradores dividido entre la suma de los denominadores también satisface la misma desigualdad:

$$A-\varepsilon<\frac{f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_1-x_0+x_2-x_1+\ldots+x_n-x_0}<B+\varepsilon.$$

Como $x_n=X$ tenemos,

$$A-\varepsilon<\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}<B+\varepsilon$$

Con lo que se concluye el teorema.

Esta demostración es la primera donde se utilizan los símbolos ε y δ, tan familiares y tan difíciles para los alumnos hoy en día.

BERNHARD RIEMANN (1826 - 1866)

Nació el 17 de septiembre de 1826 en Bresenlenz, Hannover, en una familia pobre pero feliz. Su padre, pastor luterano, se ocupó personalmente de instruirle en historia, aritmética y geometría y completó su primera educación. Más tarde, a los catorce años, comenzó sus estudios secundarios y su timidez acentuada constituyó para él una fuente de numerosos sinsabores. Durante sus estudios en el colegio, Riemann demostró ya un talento natural y prodigioso para las matemáticas. En 1846, entra en la Universidad de Gotinga como estudiante de filosofía y teología. En esta época Riemann quería ser pastor como su padre. Después de un año en Gotinga fue a Berlín, en donde fue alumno de

Jacobi, Dirichlet, Steiner y Einstein. Volvió a Gotinga para redactar su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss. En 1851 presentó la tesis titulada *Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja* , en la que introdujo las célebres superficies que llevan su nombre. Después de haber ocupado diversos puestos de enseñanza en la universidad fue nombrado profesor extraordinario en 1857 y sucedió a Dirichlet en 1859 en la cátedra de matemáticas de Gotinga. En 1862, aproximadamente un mes después de su matrimonio con Elise Kich, cayó gravemente enfermo y el gobierno alemán le concedió fondos para proseguir su convalecencia en Italia esperando que el clima le permitiera recuperarse completamente. Interrumpida por viajes a Gotinga, su estancia en Italia no le permitió curarse y murió el 20 de julio de 1866 en Selasca, cuando tenía solamente 39 años.

Riemann generalizó el concepto de integral que engloba las funciones $f(x)$ definidas y acotadas en un intervalo cerrado $[a,b]$. Subdivide el intervalo en n subintervalos $\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Riemann forma la serie,

$$S_n = \Delta x_1 f(a+\delta_1\varepsilon_1) + \Delta x_2 f(x_1+\delta_2\varepsilon_2) + \dots + \Delta x_n f(x_{n-1}+\delta_n\varepsilon_n)$$

donde $x_{i-1}+\delta_i\varepsilon_i$ es cualquier punto en el intervalo (x_{i-1},x_i) donde $0 \le \varepsilon_i \le 1$ para toda i

Si n se aproxima a un límite fijo A, cuando todos los $\Delta x_i \to 0$ independientemente de la elección de los Δx_i y de los ε_i, entonces A es el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

Riemann habla de la condición necesaria y suficiente para que una función acotada sea integrable en $[a,b]$ y la formula de la siguiente forma

Sea

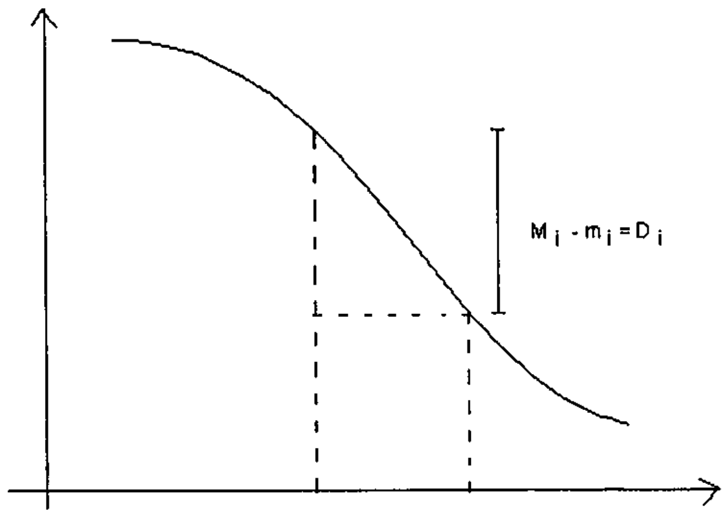
$$S = M_1\delta_1 + \dots + M_n\delta_n$$

y

$$s = m_1\delta_1 + \dots + m_n\delta_n$$

donde M_i y m_i son los valores máximos y mínimos, respectivamente de $f(x)$ en δ_i.

Sea $D_i = M_i - m_i$.



Riemann enuncia que la integral de $f(x)$ en $[a,b]$ existe si y sólo si

$$\lim_{max\ \delta_i \to 0} \{D_1\delta_1 + D_2\delta_2 \ldots + D_n\delta_n\} = 0$$

para todos los δ_i que cubren enteramente el intervalo $[a,b]$.

Ahora veamos la demostración del teorema de Riemann.

Teorema

Supóngase que f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, si $P = \{t_0,\ldots,t_n\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$ con todas las longitudes $t_i - t_{i-1} < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann tomando x_i en $[t_i - t_{i-1}]$.

Demostración

Para demostrar este teorema nos valdremos de algunas definiciones y teoremas que no demostraremos aquí.

Definición 1. Una función f acotada sobre $[a,b]$ es integrable sobre $[a,b]$ si

$$\sup\{L(f,P) : P / \quad \varepsilon \quad [a,b]\} = \inf\{U(f,P) : P / \quad \varepsilon \quad [a,b]\} = \int_a^b f$$

Definición 2. Suma inferior $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$

Suma superior $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$, donde

$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

Teorema 1. Sea f acotada sobre $[a,b]$, f es integrable sobre $[a,b]$ sí y sólo sí para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Teorema 2. Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.

Teorema 3. Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Ahora iniciemos nuestra demostración.

Dado $\varepsilon > 0$ tómese $\delta > 0$ de tal modo que si $|x - y| < \delta$ para todos los x, y en $[a,b]$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Valiéndonos del teorema que demuestra que si f es continua entonces es integrable, tenemos

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

por definición de suma de Riemann sabemos,

$$L(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq U(f,P)$$

pero como es una función integrable

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P)$$

para todas las particiones de $[a,b]$.

De aquí,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \text{ lqqd.}$$

KARL WEIERSTRASS (1815 - 1897)

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Westfalia, en una familia católica pero liberal.

Karl fue el mayor de una familia que contaba además con otro hijo y dos hijas, pero ninguno de ellos se casaría, probablemente a causa de la actitud dominadora de su padre. Después de brillantes estudios secundarios, ingresó a la Universidad de Bonn como estudiante de Derecho, pero no logró completar sus estudios universitarios. Se dedicó a las matemáticas sólo a partir de 1838, pero no llegó a terminar sus estudios de doctorado.

Karl se orientó más bien hacia la enseñanza y de 1841 a 1854 fue profesor en un colegio privado. Después de haber debutado como maestro en Munster, y luego en Deutsch-Drone y Braunsberg, fue nombrado profesor en 1856 en el Instituto Profesional de Berlín, gracias principalmente a algunos resultados que fueron publicados en un periodo durante el cual no mantuvo prácticamente ninguna correspondencia con matemáticos de su época, excepto con Christopher Guderman (1798-1851) que estaba interesado, particularmente, en la representación de funciones mediante series de potencias.

Encargado del curso en 1856 en la Universidad de Berlín, Weierstrass se convirtió en profesor titular de esa Universidad a partir de 1863. Permaneció en su puesto hasta su muerte, a los ochenta y dos años, el 19 de febrero de 1897. Metódico y cuidadoso, Weierstrass intentó fundamentar las matemáticas y en particular el análisis con el máximo rigor posible, evitando recurrir a la intuición.
Al haber publicado muy poco, se dio a conocer por sus enseñanzas en la universidad. Su influencia se hizo sentir a través de las publicaciones matemáticas de sus numerosos discípulos. En el congreso Internacional de París en 1900, Charles Hermite dijo refiriéndose a Weierstrass "es el maestro de todos nosotros".

Los trabajos de Weierstrass sobre la aritmetización del análisis completaron los trabajos de Bolzano y Cauchy y serían conocidos sólo a partir de 1859 por sus enseñanzas en la Universidad de Berlín. La expresión "una variable se aproxima a un límite" que se encuentra en las definiciones de Cauchy y Bolzano sugiere implícitamente el tiempo y el movimiento.

Weierstrass por su parte, resalta el concepto aritmético e interpreta sencillamente una variable como "una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado", eliminando así la idea de movimiento.

Para Weierstrass una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuidos a la variable y δ es cualquier número positivo, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Aunque Cauchy fue quien dio a los conceptos del cálculo su forma presente, en general, basado, principalmente, en el concepto de límite, la última palabra en rigor no había sido

dicha. Fue Karl Weierstrass quien construyó una base puramente aritmética para la formalización del cálculo, independiente de toda intuición geométrica.

La primera definición de límite de una función en términos de ε y δ propuesta por Weierstrass puede encontrarse en su curso de Cálculo de 1861. La formulación de Weierstrass precisa la expresión vaga "llega a ser, y sigue siendo, tan pequeña como cualquier cantidad dada", que puede encontrarse en las definiciones de Cauchy y Bolzano, en estos términos:

Si es posible determinar una cota δ tal que para todo valor de h, más pequeño en valor absoluto que δ, f(x+h)-f(x) sea más pequeña que una cantidad ε tan pequeña como se quiera, entonces se dirá que se ha hecho corresponder a una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función.

La definición de la continuidad de una función propuesta por Weierstrass, equivalente a las de Bolzano y Cauchy, tiene el mérito de ser más precisa y menos ambigua:

$f(x)$ es continua en $x = x_0$ si para un número positivo y arbitrariamente pequeño ε es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 de amplitud δ tal que para todos los valores en ese intervalo la diferencia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Weierstrass extiende la continuidad de la función en un intervalo mostrando que es continua en cada punto de ese intervalo.

Para Cauchy resultaba suficiente que una función fuera continua para que existiera su derivada, excepto para algunos valores aislados en el intervalo. Después de 1861 Weierstrass se planteó la cuestión de la construcción de una función continua que no es derivable en ningún punto. La célebre función de Weierstrass fue comunicada en una carta de 1874 a Du Bois-Reymond. Fue a partir de esta correspondencia cuando los matemáticos se plantearon un nuevo y completo examen de los fundamentos del análisis.

Su función se define como sigue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

donde *x* es una variable real, *a* es un número impar y *b* es una constante positiva menor que uno, de tal manera que:

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

La serie es uniformemente convergente y por tanto continua Esta función que es continua en todos los reales pero no derivable en ningún punto, precipitó la crisis que engendró la construcción del sistema de los números reales.

De esta forma, para Weierstrass la intuición no debería ser seguida y trató de hacer las bases del análisis precisas y formales tanto como fuera posible.

Una parte importante del curso de 1861 fue el estudio de la derivación de las series infinitas, en el que Weierstrass introdujo la noción de convergencia uniforme. Sabemos que la convergencia uniforme exige que, dado un ε cualquiera, exista un N natural tal que para todo $n > N$,

$$\left| S - \sum_{1}^{n} u_n(x) \right| \langle \varepsilon$$

para todo x en el intervalo considerado, donde S es la suma de la serie. Weierstrass utilizó esta noción de convergencia uniforme para demostrar que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua y también para demostrar los teoremas de derivación e integración término a término de una serie de funciones.

Weierstrass se distinguió en numerosas ramas de las matemáticas, fue el primero que utilizó ampliamente las series de potencias para representar funciones en dominios diferentes; sus estudios sobre las funciones elípticas expresados como cocientes de series de potencias le condujeron a completar y remodelar la teoría de estas funciones; sus trabajos referentes al cálculo de variaciones engendraron un nuevo interés y estimularon las actividades de matemáticos dedicados a esta disciplina. Weierstrass se ocupó igualmente de las álgebras de dimensión finita, de las integrales abelianas y de la Geometría Algebraica. Finalmente, sus estudios sobre los fundamentos de la aritmética y su teoría de números reales, marcaron profundamente el desarrollo de los fundamentos lógicos de las matemáticas, no sólo del Cálculo Diferencial e Integral.

CONCLUSIONES

Todos los que alguna vez hayan tenido contacto con algún tema de Cálculo diferencial e Integral recordarán, como un dato importante, que sus descubridores son Newton y Leibniz.

Sin embargo, rara vez un estudiante sabe algo más referente a la historia que hay atrás de esa rama de las matemáticas que representa una herramienta poderosa y que es el cálculo.

Newton y Leibniz efectivamente son considerados los descubridores en el sentido de que fueron ellos los que iniciaron la fundamentación de los procesos infinitesimales que los precursores habían desarrollado e incluso crearon procedimientos algorítmicos y sentaron las bases para que sus sucesores dieran una precisión necesaria para continuar con el desarrollo del cálculo.

Su trabajo difiere de los métodos que utilizaron sus predecesores, como Barrow y Fermat, más en actitud y generalidad que en sustancia y detalle.

Como sucede, generalmente, atrás de un gran descubrimiento matemático o de cualquier otro descubrimiento científico, en el cálculo diferencial e integral se tuvo un proceso evolutivo desde la germinación de las ideas a partir de los problemas que dan origen al cálculo hasta su concepción general y el desarrollo de un lenguaje propio para poder expresar tales conceptos.

Sin la contribución realizada por sus predecesores, Leibniz, Newton y sus sucesores seguramente no hubiesen logrado cimentar el cálculo.

Es importante observar, por ejemplo, que el concepto de continuo de Cantor había sido expresado ya por Zenón y que el concepto de límite de Weierstrass había sido interpretado en forma idéntica en la primera y última razón de Newton o aun con el antiguo método griego de exhausión. Asimismo, la derivada y la diferencial de Cauchy es idéntica en concepto a las ideas de Leibniz. También la integral definida de Cauchy se describió en forma similar por Fermat o aun por Cavalieri y por Arquímedes. Claro es que en cada etapa se cimentaba y perfeccionaba una idea, aunque en principio los motivos de investigación eran similares.

Por todo ello, no debemos olvidar que la fundamentación del cálculo es la culminación de siglos de pruebas, errores y siempre un espíritu firme de investigación.

Al familiarizarnos no sólo con los elementos del cálculo sino también con la historia de su desarrollo, se fomenta la convicción de que los fundadores de la materia son en realidad varios personajes como Weierstrass, Cauchy, Newton, Leibniz, Barrow, Fermat, Cavalieri, Kepler, Arquímedes y Eudoxo, entre otros.

En la enseñanza del cálculo, normalmente se parte de definiciones para obtener teoremas que desarrollan la parte teórica de la materia y después se ven las aplicaciones de tales resultados.

Sin embargo, es importante recalcar que el descubrimiento del cálculo no se hizo de esta manera, de hecho, de los problemas de aplicaciones surge la necesidad de formalizar y generalizar los resultados.

Como hemos observado a lo largo de la exposición de este trabajo, el cálculo se inició resolviendo ciertos problemas que más tarde se notó que compartían una forma de solución común y por último se estableció, en forma precisa, los conceptos del cálculo.

En efecto, podemos decir que las etapas del desarrollo del cálculo tienen el siguiente orden cronológico:

La derivada y la integral fueron manejadas en forma implícita y en problemas aislados sin percatarse de su generalidad y sin tener cabal idea de sus conceptos. No es sino mucho tiempo después que se logra la fundamentación teórica de tales conceptos.

Los primeros indicios del cálculo los encontramos en la época de los griegos.

Los conceptos que marcan su nacimiento son aquéllos que abarcan la variación y la continuidad, lo infinito y lo infinitesimal.

Estos principios los observamos en el método de exhausión de Eudoxo o en las paradojas de Zenón.

No obstante, en el siglo XVII se da un auge para hallar la solución de problemas planteados desde la antigüedad y para resolver problemas que estaban vigentes en esa época.

Un punto importante y fundamental que permitió el desarrollo del cálculo fue el desarrollo de la geometría analítica por medio de la cual se pudo representar a una curva mediante una ecuación, además de establecer que cada ecuación representaba una curva. Lo que significó que se aumentara significativamente la clase de curvas que se podían estudiar ya que con los métodos clásicos no era posible hacerlo.

De esta forma aparecieron varios métodos para calcular tangentes, áreas y máximos y mínimos. En esa época se utilizan ya los conceptos de infinito, infinitesimal, movimiento y continuidad, aunque en la mayoría de los casos, los investigadores de este periodo evitan el uso del álgebra y de la geometría analítica y sus métodos no son compatibles con la demanda de rigor heredada de los griegos.

Es aquí donde mencionamos los trabajos de Fermat, Roverbal, Descartes, Wallis y Barrow entre otros. En general, podemos decir que basan sus métodos para encontrar tangentes en calcular la pendiente de la secante $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, suponen después de desarrollar este cociente que la tangente la encontrarán cuando *un cierto incremento* h tienda a cero

Durante este periodo gran parte de los problemas estudiados que permitieron el desarrollo del cálculo se basaron en la física del movimiento, como fue el caso de los estudios realizados por Newton. Aunque no podemos decir que el origen del cálculo es puramente físico sino también geométrico, sí podemos afirmar que este tipo de problemas preparó al pensamiento de los investigadores para la introducción del concepto de cambio.

Los primeros problemas para ser resueltos, así como las primeras aplicaciones, aparecen principalmente en la geometría.

El concepto de derivada se desarrolló gradualmente junto a las ideas de tangente, límite, continuidad y función. El concepto de función fue de gran importancia ya que todos los desarrollos del cálculo se referían de alguna forma a funciones, sin embargo este concepto se desarrolló en forma paralela al desarrollo del cálculo y al lograr formalizarse permitió la fundamentación de los conceptos del cálculo.

Todos los procedimientos de solución dependían del establecimiento del concepto de límite. La carencia de este concepto llevó a la confusión y falta de lógica en docenas de métodos para la solución de un problema fundamental: encontrar la derivada de una función.

Aunque el trabajo realizado por Newton y Leibniz fue de gran importancia no concluye el desarrollo total del cálculo ni de su conceptualización. Ellos manejaron las propiedades de la derivada que fueron muy útiles y que permitieron encontrar resultados ciertos, pero el concepto de límite sobre el que se basa el cálculo, tampoco queda claro en ese momento.

Newton utiliza el término límite en la siguiente forma: "Las razones últimas con las que se anulan las cantidades no son realmente razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales convergen esas razones de cantidades que decrecen sin límite y a los cuales se acercan más que cualquier diferencia dada; pero ni los rebasan ni los alcanzan, sólo cuando las cantidades decrecen infinitamente".

Al decir "ni los alcanzan, ni los rebasan", Newton impide que una variable oscile alrededor de su límite y realmente para él el límite es una cota.

Más tarde, George Berkeley ataca al cálculo de Newton precisamente en ese punto y critica fuertemente la falta de rigor de Newton al utilizar en sus demostraciones la cantidad infinitamente pequeña o la cual, afirma Newton no es nula, sin embargo, cuando le conviene a Newton la considera igual a cero. Con justa razón, Berkeley opina que esta consideración es contradictoria y por lo tanto invalida la forma de proceder de Newton.

Las críticas de Berkeley están fundamentadas. Es uno de los principales atacantes de los procesos del cálculo, aunque nunca niega la validez de los resultados obtenidos. Lejos de ser dañinas sus críticas, fomentan el estudio a fondo de las bases del cálculo. Es aquí donde podemos situar la siguiente fase en el desarrollo del cálculo: El desarrollo profundo de los conceptos.

En esa etapa podemos situar los trabajos de Euler, Taylor y Lagrange. En general, podemos decir que lo que intentan hacer es explicar el concepto de límite o en su caso evadirlo.

Brook Taylor desarrolló una herramienta muy útil: partiendo de las diferencias finitas, escribió una ecuación expresando que la escribiría como $f(x+h)$ en términos de $f(x)$ y sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Dejó que las diferencias se volvieran pequeñas, de ahí pasó al límite y dio la fórmula que lleva su nombre, *las series de Taylor.* La importancia de esta propiedad de las derivadas radica en que proporciona una herramienta poderosa para estudiar funciones y para aproximar las solución de ecuaciones.

Esta herramienta fue fuertemente usada por Lagrange quien intentó demostrar que cualquier función tenía una expresión en series de potencias. Su intención era utilizar métodos puramente algebraicos para encontrar los cimientos del cálculo en forma precisa. Lagrange no logra obtener los resultados que esperaba, pero su trabajo muestra aspectos importantes; por ejemplo, fue el primero en mostrar a la derivada como una función que a su vez tiene también una derivada y justamente es él quien introduce el término "función derivada".

Para Lagrange, la derivada es más una función que una razón o una velocidad como se había manejado antes de él.

Otros matemáticos, entre ellos Leonhard Euler, lograron obtener resultados interesantes a partir de las series de Taylor. Pero sus conceptos eran aún más oscuros, ya que para él las diferenciales y sus cocientes eran ceros absolutos. De tal forma que el cociente $\frac{0}{0}$ no era una cantidad inconmensurable sino más bien definida, pues parte del siguiente razonamiento: si $x \cdot 0 = 0$ implica que $x = \frac{0}{0}$, entonces el cociente $\frac{dy}{dx}$ representa a cualquier número.

Después de esta época encontramos los trabajos de Bolzano, Cauchy y Weierstrass principalmente, con quienes se llega a la etapa final del cálculo: su conceptualización.

Bolzano logra manejar extraordinariamente el concepto de infinito y realiza un trabajo completo referente a este tema, aunque le faltan detalles para completar la definición de derivada. Aunque su trabajo es muy importante, no fue conocido sino hasta después de las investigaciones realizadas por Cauchy.

El trabajo de Cauchy es uno de los más importantes, ya que casi logra la cimentación del cálculo.

Cauchy enunció la definición de límite con palabras y logra una exactitud muy grande, ya que siempre considera la desigualdad algebraica abandonando la restricción de que las variables nunca sobrepasan sus límites.

Siempre afirmó que el concepto de derivada y de continuidad dependían del concepto de límite y no a la inversa, como muchos de sus predecesores afirmaban.

Cauchy definió a la derivada de $f(x)$ como el límite (cuando existe) del cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h tiende a cero.

Aunque la definición no está completa sí está fundamentada y es clara. Cauchy logra colocar al cálculo en un plano riguroso con métodos poderosos, cimentados en bases correctas.

Finalmente, encontramos a Karl Weierstrass, quien logra la conclusión de los conceptos del cálculo. Weierstrass sustituye con desigualdades algebraicas las palabras que antes usara Cauchy en sus definiciones. De hecho las definiciones actuales del cálculo que encontramos en los libros sobre la materia, que utilizan la notación delta – épsilon, son las de Weierstrass.

Antes de Weierstrass se intuía que todas las funciones continuas eran derivables, pero Weierstrass muestra una función continua que no es derivable en ningún punto. Esto es importante, pues muestra que no es posible intuir nada, por lo que hay que fundamentar cualquier afirmación y es así que nos encontramos en la época del análisis matemático.

El formalismo del siglo XIX se basó en relaciones simbólicas entre entidades matemáticas abstractas, lo que logra una total generalización en los conceptos del cálculo.

El propósito de esta tesis es mostrar el desarrollo que tuvo el cálculo, desde sus orígenes, sus motivos de estudio, hasta su conceptualización.

Pero más que narrar toda una consecución de hechos, la intención es mostrar la complejidad de los conceptos del cálculo, su manejo desde un punto de vista histórico y cómo evolucionan hasta nuestros días y se busca hacer partícipe al estudiante del cálculo diferencial e integral de cada uno de los pasos logrados dentro de su desarrollo, de los problemas que se tuvieron que superar y cómo se logró y de esa manera lograr que el estudiante se interese más en el estudio de la materia y se coopere en el abatimiento de los altos índices de reprobación de la misma.

Como estudiantes pocas veces nos detenemos a pensar en los orígenes de una materia o pocas veces se nos informa y sólo vemos un tema interesante o una materia difícil. Esta falta de información nos impide muchas veces captar la importancia y, la utilidad de los conceptos que estamos utilizando.

El conocer toda la estructura y problemática del cálculo puede motivar y emocionar al alumno al percatarse por sí mismo de cómo se descubrieron todos estos conceptos y, de cierta manera, sentir que participa de los hechos.

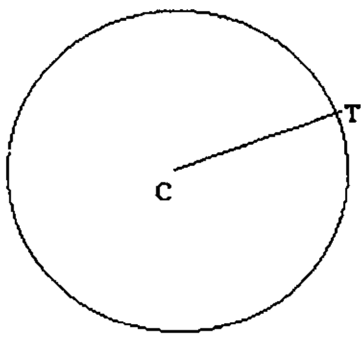
Creemos que el cambio, en el sentido señalado, en la estructura de la enseñanza del cálculo fomenta el espíritu investigador del alumno lo que le ayudaría a comprender realmente el valioso material que se coloca en sus manos a cada paso, para lo cual debería estructurarse un método de enseñanza histórico-didáctico que contemple las ventajas del enfoque histórico y del didáctico.

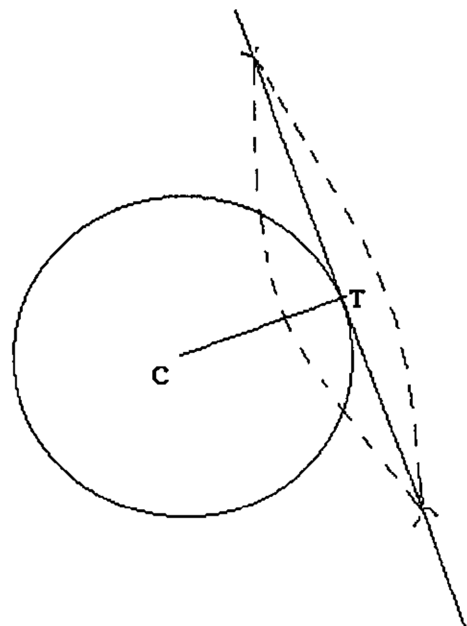
APÉNDICE

A) Métodos griegos para encontrar tangentes a cónicas

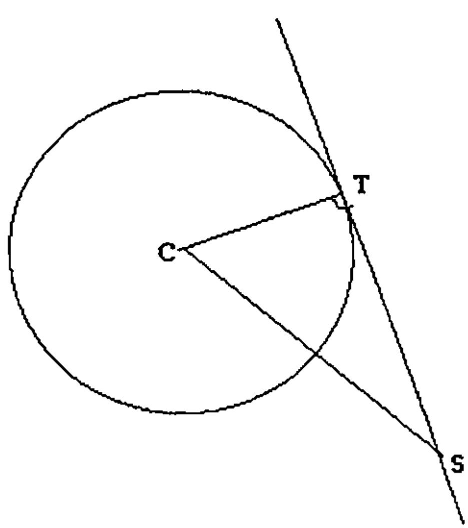
EL CÍRCULO.

Se traza el radio y la perpendicular a él será la tangente al círculo.





Para probar que esta recta es tangente es suficiente mostrar que toca al círculo únicamente en el punto T.



Sea S un punto cualquiera en la recta distinto de T. El triángulo CST es rectángulo y tiene como hipotenusa a CS.

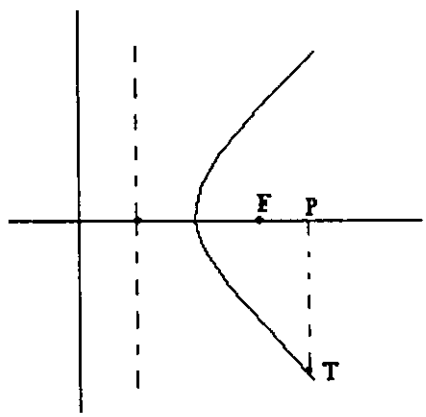
Lo que implica $CS > CT$ pero CT es el radio.

Por tanto S no pertenece al círculo.

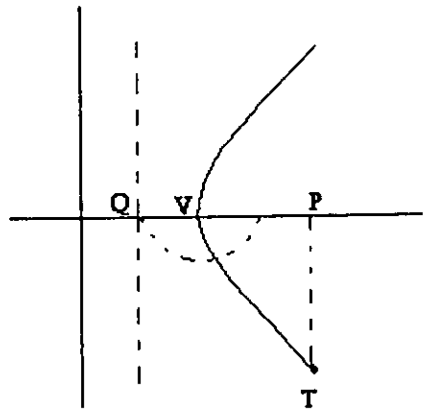
Implica T es el único punto de tangencia.

LA PARÁBOLA.

1. Sea T el punto donde queremos encontrar la tangente. Trazamos por este punto una perpendicular al eje. Sea P el punto de intersección del eje y su perpendicular en T.

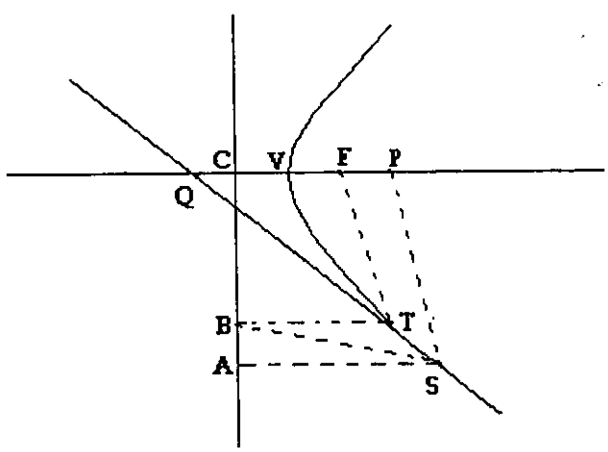


2. Dibujamos un círculo que pase por P y tenga al vértice V como centro. Este círculo interseca al eje en un nuevo punto Q.



3. Trazamos la recta QT. Podemos probar que esta recta toca únicamente en T a la parábola por lo cual es tangente.

Supongamos que S es un punto sobre la recta QT diferente de T. Debemos probar que S dista más del foco que de la bisectriz y por lo tanto no pertenece a la parábola.



Trazamos la perpendicular de S y T a la bisectriz, las intersecciones son A y B respectivamente.

ABS es un triángulo rectángulo. De aquí que $SB > SA$.

Debemos demostrar que SF y SB son iguales en longitud, pero una vez que lo hayamos hecho tendremos que SF debe ser más largo que SA.

Lo que implica que $SF = SB > SA$

Por tanto S no puede pertenecer a la parábola.

Así, nuestra demostración se reduce a demostrar que $SB = SF$.

Sabemos que los puntos que están en la bisectriz perpendicular de un segmento están a la misma distancia de los extremos del segmento.

Vamos a ver que QT es la bisectriz perpendicular del segmento BF.

Sea C la intersección del eje y de la bisectriz de la parábola: $CV = VF$, ya que V está en la parábola y $QV = VP$, ya que así se construyó Q.
Por lo tanto,

$$CP = QF$$

ya que BT y CP son los lados opuestos de un rectángulo ($BT = CP$).

Por tanto $BT = QF$. Lo que implica que $QFBT$ es un paralelogramo.

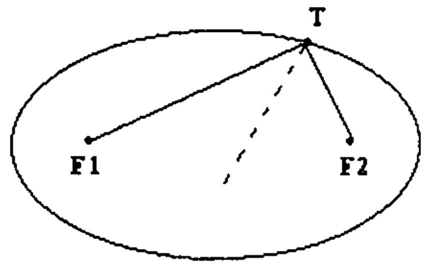
Como T pertenece a la parábola $TF = BT$. Por lo tanto el paralelogramo es un rombo.

Ahora, sabemos que las diagonales de un rombo son bisectrices perpendiculares entre sí.
Por tanto BF es perpendicular a QT.

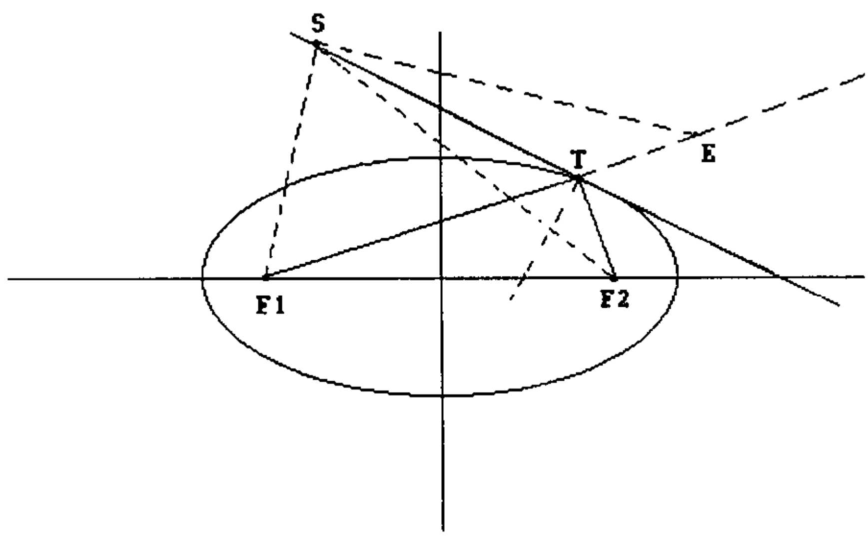
Así $\mathrm{SB} = \mathrm{SF}$. Lqqd.

LA ELIPSE.

Construimos la bisectriz del ángulo F_1TF_2. Finalmente trazamos la perpendicular a esta bisectriz, obteniendo así la tangente deseada.



Para demostrar que la recta así encontrada es tangente a la elipse, supongamos que S es un punto distinto de T que se encuentra en la recta perpendicular construida. Demostraremos que S no pertenece a la elipse.



Trazamos un círculo con centro en T y radio TF_2 (o al foco más cercano) y extendemos F_1T hasta que toque al círculo en un punto fuera de elipse y llamemos E a este punto de intersección.

El triángulo TEF_2 es isósceles. El ángulo F_2TE es bisectado por ST ya que ST fue trazada perpendicularmente a la bisectriz de un ángulo exterior adyacente.

Consecuentemente ST debe bisecar perpendicularmente a la base del triángulo isósceles F_2E.

Sabemos que:

$$F_1T + F_2T = F_1E$$

Y

$$F_1E < F_1S + SE$$

Lo que implica,

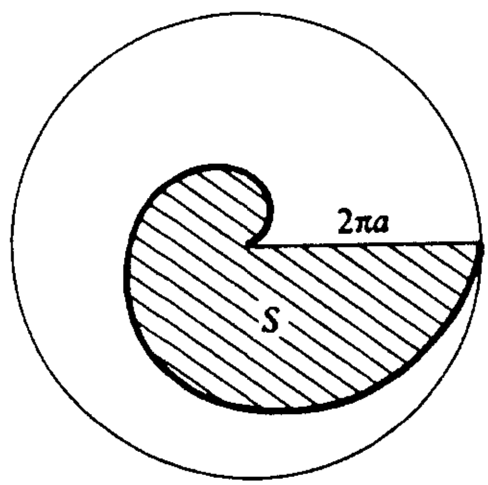
$$F_1T + F_2T < F_1S + F_2S$$

Por tanto S no pertenece a la elipse.

B) La espiral de Arquímedes

Arquímedes demostró que el área de la región S, comprendida entre un rizo de la espiral y el segmento que une el punto inicial y final es igual a $\frac{1}{3}$ del área del círculo C con centro en el punto inicial y radio igual al segmento que va del punto inicial al punto final; esto es,

$$A(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$



Para probar esta afirmación usaremos los resultados (que no demostraremos),

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

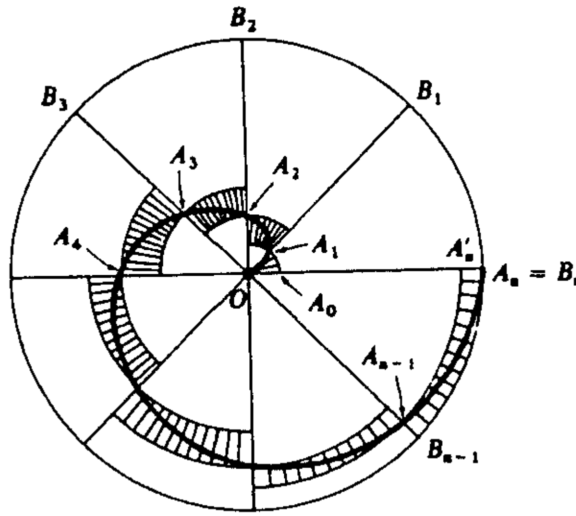
de donde,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Para probar el resultado de Arquímedes dividamos el circulo C en n sectores iguales, con sus radios intersecando a la espiral en los puntos $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si escribimos $OA_1 = b$, tenemos además $OA_2 = 2b, \ldots, OA_n = nb$.

En consecuencia observamos que la región S contiene a una región P formada de sectores circulares con radios $0, b, 2b, \ldots, (n-1)b$ y una región Q formada de sectores circulares con radios $b, 2b, \ldots, nb$.

Afirmamos que, $A(S)$ es igual a $\frac{1}{3}$ del área del círculo C.



Demostración.

Si

$$A(S) < \frac{1}{3} A(C),$$

para n suficientemente grande, tenemos

$$A(Q) - A(P) < \frac{1}{3} A(C) - A(S)$$

de aquí,

$$A(Q) < \frac{1}{3} A(C).$$

Ya que la razón de las áreas de sectores semejantes es igual a la razón del cuadrado de sus radios, tenemos que,

$$\frac{A(Q)}{A(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + ... + (nb)^2}{n(nb)^2}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}.$$

Esta contradicción muestra que $A(S)$ no es menor que $\frac{1}{3}A(C)$.

Supongamos que

$$A(S) > \frac{1}{3}A(C)$$

para n suficientemente grande, tenemos

$$A(Q) - A(P) < A(S) - \frac{1}{3}A(C),$$

de aquí,

$$A(P) > \frac{1}{3}A(C)$$

tenemos que,

$$\frac{A(P)}{A(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + ... + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}.$$

Esta contradicción muestra que $A(S)$ no es mayor que $\frac{1}{3}A(C)$. De aquí concluimos que

$$A(S) = \frac{1}{3}A(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

C) INVESTIGADORES

NOMBRE	PERIODO DE VIDA
René Descartes	1596-1650
Galileo Galilei	1564-1642
Pierre de Fermat	1601-1665
Gilles Persone de Roverbal	1602-1675
Isaac Barrow	1630-1677
Bonaventura Cavalieri	1598-1647
Johannes Kepler	1571-1630
Blaise Pascal	1623-1662
John Wallis	1616-1703
Apolonio de Perga	250-175 A. C.
Arquímedes de Siracusa	287-212 A. C.
Isaac Newton	1642-1727
Wilhelm Leibniz	1646-1716
George Berkeley	1685 - 1753
Leonhard Euler	1707 - 1783
Joseph Louis Lagrange	1736 - 1813
Bernhard Bolzano	1781 - 1848
Augustin Louis Cauchy	1789 - 1857
Bernhard Riemann	1826 - 1866
Karl Weierstrass	1815 - 1897

BIBLIOGRAFIA

- A book of curves.
  Lockwood, E. H.
  Cambridge, at University press, 1971.

- A history of mathematics.
  Boyer, Carl Benjamin.
  New York, J. Wiley c1968.

- A history of mathematics.
  Katz, Víctor J.
  New York.: Harper Collins c 1993.

- An introduction to the history of mathematics.
  Eves, Howard Whitley.
  Orlando, Florida. Saunders College c1992.

- Curso de Análisis.
  Augustin Louis Cauchy.
  Mathema Colección. UNAM.

- Las paradojas del infinito.
  Bernhard Bolzano.
  Mathema Colección. UNAM.

- Makers of mathematics.
  Hollingdale, Stuart.
  Middlesex, England. Penguin 1989.

- Mathematical thought from ancient to modern times.
  Kline, Morris.
  New York, Oxford, Oxford University 1990-1999.

- Mathematics and the physical world.
  Kline, Morris.
  Dover Publications, Inc.

- The development of mathematics.
  Bell, Eric Temple.
  New York, McGraw – Hill, 1945.

- The history of the calculus and its conceptual development.
  Boyer, Carl Benjamin
  New York, Dover 1969.

- The inverse Method of Tangents: A Dialogue between Leibniz and Newton. (1675-1677).
  Christoph J. Scriba.
  Artículo, Berlín.