

01170

Control de Motores de Inducción para  
Maximización de Par con mejora en el Desempeño:  
Una Evaluación Experimental

Cuauhtémoc Guerrero Tejada  
División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería  
UNAM

Septiembre del 2000

282618



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Modelo del Motor de Inducción</b>	<b>15</b>
2.1	Ecuaciones de Lagrange . . . . .	15
2.2	Modelo Matemático del Motor de Inducción . . . . .	18
2.2.1	Modelo del Motor de Inducción Trifásico . . . . .	18
2.2.2	Modelo del Motor de Inducción en Dos Fases . . . . .	23
2.2.3	Marco de Referencia $dq$ . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Sintonización de Ganacias en el Lazo PI del FOC</b>	<b>31</b>
3.1	Campo Orientado . . . . .	32
3.1.1	Control por Campo Orientado Directo . . . . .	33
3.1.2	Control por Campo Orientado Indirecto . . . . .	34
3.2	Formulación del Problema . . . . .	35
3.3	Cambio de Coordenadas . . . . .	36
3.4	Estabilidad Local . . . . .	38
3.5	Estabilidad Global e Intervalos de Desempeño . . . . .	40
3.6	Experimentación . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Optimización de Par en Motores de Inducción</b>	<b>47</b>
4.1	Modelo Matemático del Motor de Inducción en Coordenadas de Flujo	48
4.2	Trayectorias del Flujo de Referencia . . . . .	49
4.2.1	Optimización de Par con Corriente Acotada . . . . .	50
4.2.2	Optimización de Par con Voltaje Acotado . . . . .	51
4.3	Optimización de Par con Voltaje y Corriente Acotados . . . . .	55
4.4	Resultados Experimentales para Sintonizar el FOC con el $\beta_*$ Óptimo	59
<b>5</b>	<b>Banco de Experimentos</b>	<b>65</b>
5.1	El Motor de Inducción . . . . .	65
5.1.1	Codificador Óptico Incremental . . . . .	67
5.2	Inversor Trifásico de 1 kVA Controlado en Corriente . . . . .	68
5.2.1	Especificaciones Técnicas . . . . .	70
5.3	Tarjeta de Adquisición de Datos (DSP) . . . . .	71
5.3.1	Vista de la Arquitectura . . . . .	72
5.3.2	Requerimientos del Host . . . . .	72
5.4	Implantación de los Experimentos . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Estructura Física de las Máquinas de Inducción</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Parámetros del Motor de Inducción</b>	<b>81</b>
B.1	Parámetros Eléctricos del Motor de Inducción . . . . .	82
B.2	Ecuaciones de Voltaje con las Variables en un Marco de Referencia Arbitrario . . . . .	85
B.3	Cálculo de los Parámetros . . . . .	86

---

C Estabilidad de Lyapunov	91
C.1 Estabilidad . . . . .	92



# Índice de Figuras

2.1	Representación del motor de inducción trifásico . . . . .	19
2.2	Representación del motor de inducción en dos fases . . . . .	24
3.1	Descomposición del sistema en lazo cerrado . . . . .	41
3.2	Inestabilidad Experimental . . . . .	44
3.3	Resultado experimental de la respuesta de la velocidad angular del motor a diferentes sintonizaciones . . . . .	45
3.4	Resultado experimental de la respuesta de la velocidad angular del motor a diferentes valores del flujo . . . . .	46
4.1	Flujo de rotor . . . . .	48
4.2	Las cuatro raíces de la ecuación de $\delta$ para una velocidad de 0 a 8000 rpm . . . . .	52
4.3	velocidad vs. delta considerando restricción de voltaje . . . . .	54
4.4	velocidad vs. par considerando restricción de voltaje . . . . .	54
4.5	Velocidad (rpm) vs. Delta ( $\frac{i_a}{i_d}$ ) . . . . .	58
4.6	Velocidad (rpm) vs. Par (N-m) . . . . .	58
4.7	Velocidad (rpm) vs. Par Máximo Óptimo (N-m) . . . . .	58
4.8	Velocidad (rpm) vs. Delta Óptimo . . . . .	58
4.9	Velocidad (rpm) vs. Flujo Óptimo (Wb) . . . . .	59
4.10	Resultado experimental de la respuesta en el arranque a 500 rpm . . . . .	60

4.11	Resultado experimental de la respuesta en el arranque a 150 rpm . . .	60
4.12	Resultado experimental de la respuesta en estado estacionario a 500 rpm . . . . .	61
4.13	Resultado experimental de la respuesta en estado estacionario a 150 rpm . . . . .	62
4.14	Resultado experimental de la respuesta a una referencia de velocidad cuadrada . . . . .	63
5.1	Control de histerisis para un iversor leg . . . . .	68
5.2	Forma de onda de corriente sinusoidal generada por el control por histéresis . . . . .	69
5.3	Control PWM de frecuencia fija para un iversor leg . . . . .	69
5.4	Diagrama a Bloque de la DS1102 . . . . .	72
5.5	Modelo en Simulink del controlador con el algoritmo de Bodson . . . .	74
A.1	Estructura básica de un rotor jaula de ardilla . . . . .	80
B.1	Máquina de inducción simétrica conectada en estrella, trifásica de dos polos . . . . .	81
B.2	Circuito equivalente para operación en estado estable de una máquina de inducción simétrica . . . . .	86



# Capítulo 1

## Introducción

Los motores de inducción son posiblemente las máquinas electromecánicas rotatorias de corriente alterna (CA) que más se utilizan en los distintos sectores de nuestra sociedad (doméstica, comercial, industrial, etc.). Su función básica de convertir potencia eléctrica a mecánica se lleva a cabo aprovechando muchas de sus ventajas, de las que podemos mencionar: su bajo costo por tener una construcción simple; la obtención de más potencia en menos espacio; mantenimiento mínimo; capacidad de ser utilizados en un medio ambiente hostil; etc.

En un motor de inducción, por su estructura física, el problema de control (conocido como seguimiento) es elegir los voltajes de estator de la forma más conveniente para que la posición y/o velocidad angular sigan una trayectoria de referencia definida. Usualmente, solo las corrientes de estator y la posición angular del rotor son las únicas variables disponibles para medición, ya que las corrientes de rotor, cuando es posible, son muy difíciles de medir. De hecho, en los motores tipo jaula de ardilla, dichas corrientes son imposible de medir ya que están distribuidas sobre la superficie del rotor. En relación al flujo magnético resultante, éste puede ser medido a través de sensores Hall, los cuales se pueden localizar en el entrehierro, pero estos son por sí mismos muy caros y su instalación muy costosa, además de complicada.

Los desarrollos que en los últimos años ha experimentado la teoría de control (sobre todo en el área del control no-lineal) la han hecho, por un lado, una teoría más rigurosa debido a la incorporación de herramientas analíticas muy poderosas y que han ayudado para que muchos problemas sean clarificados, mientras que por otro lado ha habido una gran aplicabilidad a distintos problemas prácticos como consecuencia de lo antes dicho.

El avance tecnológico que se ha tenido en la electrónica de potencia ha reducido los costos de los distintos dispositivos electrónicos, por lo que es más fácil realizar

e implantar los diseños de los inversores que proporcionan las señales de una forma adecuada a los motores. Además, el avance tecnológico en el área de las computadoras personales (en el hardware y el software) son en lo general más accesibles, por lo que los diseños ingenieriles se han mejorado debido a que la simulación, primero, y la implantación, posteriormente, son menos difíciles con el uso de estas herramientas tecnológicas.

Las aplicaciones de la teoría de control y de la electrónica de potencia a los motores de inducción, en consecuencia, han sido múltiples, por lo que han ido remplazando en tareas de alto desempeño a los motores que tradicionalmente se habían utilizado, es decir, a los de corriente directa y síncronos.

El modelo del motor de inducción es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales muy complejas, por lo que su análisis es sumamente difícil y realizar alguna estrategia de control no es evidente. Es por esto que en un inicio se le relegó a trabajos donde solo involucraban velocidades constantes, mientras que en tareas donde se requería un seguimiento o regulación de posición, velocidad o par se usaron sobre todo los motores de corriente directa. Las primeras estrategias de control para los motores de inducción fueron utilizando las ecuaciones del motor en estado estable o linealizadas, para aplicar los métodos del control clásico.

En el inicio de los setentas, aprovechando lo aplicado a los motores de corriente directa, se realizó la primera estrategia de control para motores de inducción con el conjunto de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del motor, utilizando un cambio de variables naturales del modelo hacia variables de flujo de campo, aprovechando propiedades geométricas. Esta es conocida como control de campo orientado (FOC por sus siglas en inglés). En los noventas, aprovechando la teoría de control moderno, hubo otros enfoques para diseñar estrategias de control para los motores de inducción, entre los que podemos citar la linealización exacta, el de *backstepping* y la basada en ideas de pasividad.

El Control por Campo Orientado ha sido desde sus inicios, y lo sigue siendo, ampliamente utilizado en el sector industrial por la gran confiabilidad que tiene en su desempeño. La sintonización de las ganancias del lazo PI utilizado para que el error de velocidad en esta ley de control sea cero, ha sido a través de la experiencia e intuición de los diseñadores, sin reportar, en la mayoría de los casos, que criterios utilizan para dicha sintonización.

El modelo del motor de inducción obtenido a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, por su desarrollo, presenta varias propiedades. Una de ellas es que el sistema dinámico puede representarse como una retroalimentación negativa de dos subsistemas pasivos (uno de naturaleza eléctrica y el otro mecánico). Con esto, si el esquema de control no destruye esta estructura, queda plenamente resuelto el problema de estabilidad por el hecho de que en una retroalimentación negativa de

dos sistemas pasivos, el sistema resultante es pasivo y por esto el sistema es estable (véase [Khalil, 1996]). Desde ésta perspectiva, se ha desarrollado el Control basado por Pasividad (PBC por sus siglas en inglés).

En las evaluaciones que se han realizado a las distintas estrategias de control utilizadas para los motores de inducción alimentados por voltaje, ha resultado que, por diversas ventajas, el que mejor aplicabilidad tiene es el controlador basado por pasividad. Ahora bien, bajo la suposición de que el inversor se puede modelar como una fuente de corriente ideal, entonces dicho controlador se reduce exactamente al Control por Campo Orientado (FOC).

En distintos artículos han demostrado que el Control de Campo Orientado para el motor de inducción preserva estabilidad bajo un amplio margen de variaciones de los parámetros tanto del motor como del controlador. Este utiliza un lazo interno de un control integral-proporcional (PI) en el error de velocidad además de depender de la norma del flujo de rotor, por lo que el desempeño depende críticamente de las ganancias del lazo PI.

Algunos otros trabajos de investigación se han enfocado a estudiar el desempeño que presenta el Controlador por Campo Orientado suponiendo las posibles variaciones que puede tener, en un momento dado, algunos de los parámetros del motor, así como los valores que se puede considerar en las ganancias del lazo PI de velocidad. Específicamente en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] dirigen su trabajo a desarrollar un procedimiento fuera de línea para elegir dichas ganancias a pesar de la alta incertidumbre de la constante de tiempo de rotor. Se realiza un cambio de coordenadas con lo que se establece las condiciones necesarias para garantizar la estabilidad local y global del lazo cerrado del motor con el controlador. La principal contribución de este trabajo es un algoritmo que, para cada sintonización de las ganancias del PI, evalúa el error máximo del estimado de la constante de tiempo de rotor para el cual la estabilidad global es garantizada. El resultado de estabilidad también se puede usar de una manera dual que es de interés práctico, es decir, se fija el valor de la resistencia de rotor y se estima un intervalo para que las ganancias PI preserven la estabilidad global.

Un buen desempeño en la respuesta transitoria al aplicar el Control por Campo Orientado también depende de una buena elección de la norma del flujo de rotor y en el trabajo mencionado en el párrafo anterior esta no incide en los intervalos de las ganancias PI para preservar la estabilidad global ni local. Con la motivación de evaluar en forma física alguna forma de elegir ésta, se consideró el trabajo de [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] en donde propone un algoritmo con el cual se determina la referencia de flujo óptimo.

Por lo establecido en los párrafos anteriores, el objetivo principal de esta tesis fue validar de una forma experimental el desempeño en la respuesta transitoria en un

motor de inducción con un Control por Campo Orientado considerando lo reportado en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998], realizando primero sintonizaciones en intervalos de las ganancias del Lazo PI del Control por Campo Orientado, y [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995], para obtener el flujo óptimo y realizar las sintonizaciones en conjunto con lo anterior, para estudiar las respuestas del motor con estos enfoques. Para esta finalidad se utilizó, además de un motor de inducción, una computadora personal, una tarjeta de adquisición de datos y un inversor trifásico de corriente.

En el Capítulo 2 se derivará el modelo de motor de inducción por medio de las ecuaciones Euler-Lagrange, que es exactamente el mismo modelo clásico que resulta de la aplicación de las leyes de Faraday, Ohm y Newton. En este mismo capítulo se muestra el modelo en el marco de referencia  $dq$  y que es el que tradicionalmente se ha utilizado.

Con respecto al Capítulo 3 se analiza y valida en forma experimental lo reportado en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998]. En éste apartado, basado en lo establecido en el artículo antes citado, se desarrolla el modelo del control por Campo Orientado directo e indirecto. Posteriormente se formula el problema de control y se establecen las suposiciones necesarias para estudiar la estabilidad local y global del sistema completo en lazo cerrado, llegando a establecer un algoritmo para encontrar, fuera de línea, intervalos de ganancias PI para realizar una buena sintonización en el controlador. Por último, se presentan los resultados obtenidos al implantar en forma física los intervalos de ganancias obtenidos al considerar los parámetros del motor. En [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] se puede observar que los intervalos de la sintonización no dependen de la norma del flujo de rotor deseada. La ley de control utilizada (FOC) depende de esta variable por lo que al realizar la sintonización, debemos tenerla en cuenta para lograr un buen desempeño, y en este capítulo se encuentran valores para ésta a través de una prueba de acierto y error para realizar la prueba de una forma física.

Considerando que haber encontrado los valores de la norma del flujo de rotor por medio de una prueba por acierto y error no es lo más conveniente o deseable para la respuesta del sistema en lazo cerrado, el Capítulo 4 se desarrolla de acuerdo a lo reportado en [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] para obtener un flujo óptimo para nuestro controlador. Se presenta un enfoque sistemático para determinar la referencia de flujo óptimo para obtener el par óptimo en un motor de inducción teniendo en cuenta restricciones de voltaje y de corriente utilizando el modelo del motor en un marco de referencia en variables de flujo de rotor y en estado estacionario. Por lo tanto, dicha referencia de flujo óptimo es utilizada en nuestra ley de control y de esta manera tener una respuesta óptima. De igual forma, se presentan los resultados obtenidos al implantar físicamente este algoritmo junto con lo establecido en el Capítulo 3.

---

Debido a que la intención principal del presente trabajo consistió en validar físicamente varios trabajos, es necesario tener el banco de experimentos funcionando para tal objetivo. En el Capítulo 5 se explica de manera breve los distintos componentes que se utilizan en el banco de experimentos, el cual consiste en el motor de inducción, el inversor trifásico de corriente, la tarjeta de adquisición de datos (DSP) y una computadora personal.



## Capítulo 2

# Modelo del Motor de Inducción

La forma clásica para obtener el modelo matemático del motor de inducción es utilizando las leyes de Faraday, Ohm y Newton. Este modelo es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales complejas (véase [Leonhard, 1996] o [Krause, 1986]).

En este capítulo se utiliza el método basado en las ecuaciones de Lagrange para la obtención del modelo matemático para el motor de inducción. La principal ventaja de las ecuaciones de Lagrange es que permiten trabajar el modelo de una manera sistemática y con una mayor intuición física. Esto, a partir de la perspectiva de diseño de controladores y de análisis de sistemas no lineales, da ventajas al contar con funciones de energía que se pueden utilizar como funciones de Lyapunov.

Se hacen las suposiciones necesarias para realizar el modelado, trabajando primero en forma trifásica para posteriormente obtener un modelo equivalente de dos fases para disminuir la complejidad de las ecuaciones que describen el sistema. Estos dos modelos representan al motor de inducción en un marco de referencia natural, i.e. donde las variables de estator se describen en un marco de referencia fijo mientras que las de rotor se describen en uno giratorio, por lo que adicionalmente se realiza otro cambio de coordenadas para eliminar la dependencia respecto a la posición mecánica.

### 2.1 Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange son un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución en el tiempo de sistemas físicos sujetos a ciertos tipos de restricciones, denominadas holonómicas. Dichas ecuaciones, están sustentadas en la realización de la energía cinética, potencial y el trabajo realizado por términos

disipativos, para el equilibrio de fuerzas internas y externas. Para obtener la formulación general de las ecuaciones de Lagrange puede ser, ya sea por el método de desplazamiento virtual o por el principio de Hamilton ([Spong & Vidyasagar, 1989] pag. 130).

En ([Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramírez, 1999] pag. 15) se define un sistema Euler-Lagrange como un sistema cuyo movimiento es descrito por las Ecuaciones Euler-Lagrange, donde éstas son un punto de vista puramente matemático y son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con una estructura específica. Históricamente su aplicación principal fué a sistemas mecánicos, pero posteriormente se demostró que se pueden emplear a cualquier sistema físico sin importar el tipo de naturaleza que involucre. Esos sistemas han tenido una evolución tan amplia en su estudio y análisis, que muchos textos lo reportan. Para mayor referencia véase a [Meisel, 1966] para una perspectiva de modelado, [Arnold, 1995] para una perspectiva de análisis y [Nijmeijer & Sachaft, 1990] para un punto de vista de control.

Para el desarrollo de las ecuaciones de Lagrange considere<sup>1</sup> un sistema físico  $\mathcal{S}$  compuesto por  $m$  elementos ideales (sin importar el tipo de naturaleza). Si entre estos no existe alguna conexión, el comportamiento dinámico de  $\mathcal{S}$  requerirá un total de  $m$  coordenadas para especificar completamente la configuración de cada elemento, es decir, puede ser especificado por  $m$  coordenadas básicas  $x_i$ , donde  $i = 1, \dots, m$ , por lo que posee  $m$  grados de libertad.

Si estos  $m$  elementos son interconectados de acuerdo a una configuración particular, estas coordenadas originales no tienen total libertad en su comportamiento, siendo restringido a la dependencia que exista de una con respecto a las otras, por lo que se establezcan ecuaciones de restricción entre las coordenadas<sup>2</sup> y con esto el número de grados de libertad es reducido. Esto es, si  $\mathcal{S}$  se somete a  $r$  ecuaciones de restricción, el número de coordenadas independientes es  $n = m - r$ , es decir, la cantidad de grados de libertad se reduce a  $n$ .

Ahora, si se definen las coordenadas independientes como  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se les denomina coordenadas generalizadas, entonces se puede afirmar que establecen una representación del sistema completo, debido a que las  $m$  coordenadas básicas pueden ser expresadas como función de ellas, es decir,

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, m$$

por lo que el comportamiento dinámico de  $\mathcal{S}$  puede ser representado solamente en términos de  $q, \dot{q}$ . En forma particular, la coenergía cinética del sistema puede ser representado como  $T(q, \dot{q})$  y a la energía potencial como  $V(q)$ .

<sup>1</sup>El siguiente desarrollo está basado en el trabajo reportado en [Espinosa, 1993]

<sup>2</sup>Aquí, si las ecuaciones de restricción involucran solamente relaciones entre las coordenadas, son llamadas ecuaciones holonómicas, véase [Spong & Vidyasagar, 1989] o [Meisel, 1966]



Si se considera que el sistema  $\mathcal{S}$  está en equilibrio y se define una nueva función, denominada *lagrangiano*, como la diferencia entre la energía cinética y potencial, es decir

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2.1)$$

aplicando el principio de Alambert, se llega a la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = Q_i^e \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

donde el término del lado derecho representan a las *fuerzas externas generalizadas*. La ecuación (2.2) es conocida como las ecuaciones de Lagrange<sup>3</sup> para sistemas conservativos.

Todos los sistemas físicos contienen algún tipo de disipación, y consecuentemente cualquier análisis práctico usando las ecuaciones de Lagrange no estará completo sin la inclusión de estos. Para este fin, se introduce la función de disipación de Raleigh  $\mathcal{F}(\dot{q})$ , y además, se considera que las fuerzas externas generalizadas  $Q_i^e$  tienen la forma

$$Q_i^e = Q_i - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.3)$$

es decir, las fuerzas externas aplicadas a cada coordenada generalizada o grado de libertad menos la fuerzas de disipación.

Con esta última condición se obtiene la forma completa de las ecuaciones de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n} \quad (2.4)$$

Si (2.4) es vista desde un enfoque de control [Nijmeijer & Sachaft, 1990], se puede considerar el comportamiento dinámico de ésta como un sistema de control, considerando las fuerzas externas generalizadas  $Q_i$  como entradas o variables de control. De esta forma podemos obtener una representación más general si se considera que solamente algunos grados de libertad pueden ser controlados directamente.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = \begin{cases} Q_i & i = 1, \dots, k \\ 0 & i = k + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.5)$$

con  $Q_1, \dots, Q_k$  como entradas de control. A (2.5) se le llama Sistema Lagrangiano de Control.

<sup>3</sup>Esta ecuación es también llamada Euler-Lagrange por varios autores, como por ejemplo [Spong & Vidyasagar, 1989], sin embargo [Goldstein, 1950] menciona que *las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange* para varias variables tiene la forma  $\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$

## 2.2 Modelo Matemático del Motor de Inducción

La máquina de inducción representa una de las formas más útiles de dispositivos electromecánicos giratorios de potencia de corriente alterna. Estos pueden construirse sin alguna conexión física externa en los devanados del rotor, solo suministrándole corriente a los circuitos del estator. Las corrientes de rotor son generadas debido al acoplamiento magnético entre el estator y el rotor, por lo tanto, la máquina resulta extremadamente rígida, segura y libre de mantenimiento [Meisel, 1966]. En [Fitzgerald et al, 1990] se menciona que:

*“Un motor de inducción es un sistema electromecánico en el que se suministra al estator, en forma directa, corriente alterna y al rotor, por inducción o acción de transformador, desde el estator”.*

Para realizar el modelo del motor de inducción es conveniente hacer las siguientes suposiciones:

- Los devanados por fase son sinusoidalmente distribuidos e idealmente simétricos
- El estator y el rotor son considerados concéntricos y el espacio de aire entre ellos (entrehierro) tienen una longitud radial constante
- La permeabilidad de los núcleos se supone infinita, mientras que la saturación, pérdidas en el entrehierro, partes terminales de los devanados y los efectos de las ranuras son despreciados
- Los materiales magnéticos se consideran lineales
- Los neutros de los devanados del estator y rotor del motor son aislados y las terminales de rotor son cerradas por anillos deslizantes o bien están en corto circuito internamente
- El motor de inducción en su estructura no posee imanes permanentes.

### 2.2.1 Modelo del Motor de Inducción Trifásico

Muchos motores de inducción que se utilizan, sobre todo a nivel industrial, son trifásicos, y una explicación puede ser:

“Casi toda la generación de energía eléctrica y la mayoría de la transmisión de energía en el mundo se realiza hoy en día a través de circuitos

trifásicos de ca. Un sistema trifásico de potencia está constituido por generadores trifásicos, líneas de transmisión y cargas. Los sistemas de potencia de ca, comparados con los sistemas de cc, presentan la gran ventaja de poder variar los niveles de voltaje para reducir las pérdidas de transmisión. Los sistemas trifásicos de ca son mucho más ventajosos que los sistemas monofásicos puesto que es posible obtener mayor potencia por libra de metal de una máquina trifásica, y también porque la potencia entregada a una carga trifásica es constante en todo momento, en vez de ser pulsatoria como los sistemas monofásicos (*sic*)" [Chapman, 1987].

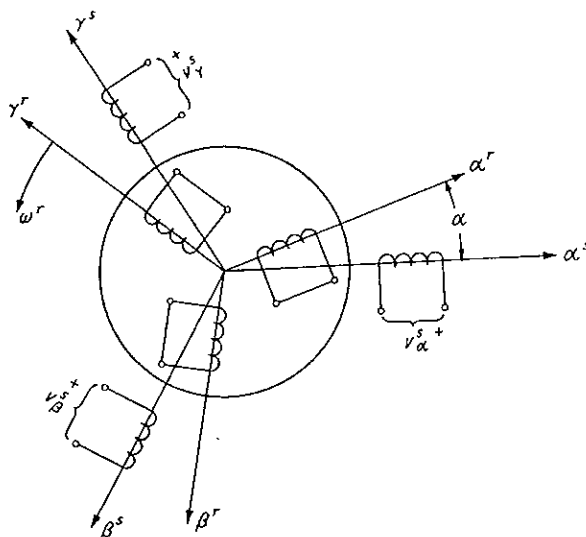


Figura 2.1: Representación del motor de inducción trifásico

Con lo antes expuesto, nuestro enfoque estará dirigido a motores de inducción trifásicos. Un motor de inducción de tres fases está constituido por tres devanados fijos de estator y tres devanados de rotor que giran a una velocidad angular  $\omega$  (véase Fig. 2.1).

Una vez hechas todas las suposiciones necesarias para realizar el modelo del motor de inducción, el vector de corrientes es

$$\dot{q}_e^3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1}^3 \\ \dot{q}_{s2}^3 \\ \dot{q}_{s3}^3 \\ \dot{q}_{r1}^3 \\ \dot{q}_{r2}^3 \\ \dot{q}_{r3}^3 \end{bmatrix}$$

y el vector de flujos

$$\lambda = [\lambda_s^T, \lambda_r^T]^T$$

donde los subíndices  $s$  y  $r$  denotan la pertenencia de las variables al estator y rotor respectivamente y el superíndice 3 es para referirnos a la naturaleza de tres fases del sistema. Con la aplicación de las leyes de Gauss y Ampere, con la relación lineal de flujos y el vector de corrientes se obtiene

$$\lambda = D_e(q_m)\dot{q}_e \quad (2.6)$$

donde  $q_m$  es la posición mecánica del eje del motor,  $D_e(q_m) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$  es una matriz de inductancias (simétrica, definida positiva y periódica en  $q_m$ ). La estructura de ésta matriz tiene la siguiente forma (véase [Krause, 1986])

$$D_e(q_m) = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr}U(q_m) \\ L_{sr}U^T(q_m) & L_r \end{bmatrix}$$

$L_s$  y  $L_r$  son matrices de 3x3, véase el apéndice B para su definición, y corresponden a las inductancias propias de estator y rotor respectivamente mientras que  $L_{sr}$  es la inductancia mutua entre el estator y rotor, y

$$U(q_m) = \begin{bmatrix} \cos(n_p q_m) & \cos(n_p q_m + \gamma) & \cos(n_p q_m - \gamma) \\ \cos(n_p q_m - \gamma) & \cos(n_p q_m) & \cos(n_p q_m + \gamma) \\ \cos(n_p q_m + \gamma) & \cos(n_p q_m - \gamma) & \cos(n_p q_m) \end{bmatrix}$$

con  $\gamma = \frac{2\pi}{3}$  y  $n_p$  son el número de pares de polos.

Definiendo como coordenadas generalizadas del sistema a las cargas de cada devanado  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , y la posición angular  $q_m$ , se puede calcular la coenergía magnética de la parte eléctrica como

$$\mathcal{K}_e = \sum_{i=1}^6 \int_0^{q_i} \lambda_i(\dot{q}_i) d\dot{q}_i = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e$$

y coenergía cinética de la parte mecánica como

$$\mathcal{K}_m = \frac{1}{2} D_m \dot{q}_m^2$$

donde  $D_m$  es la inercia rotacional del motor (observe que ' denota las variables de integración).

Considerando que en el motor no existen efectos capacitivos en los devanados y que la flecha es rígida, lo que significa que no existen efectos torsionales, se puede concluir que no hay almacenamiento ni de energía eléctrica, para la parte eléctrica, ni energía potencial, para la mecánica, i.e.

$$V(q) = 0$$

Ahora, el lagragiano resultante, según (2.1) y las tres ecuaciones anteriores, es

$$\mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e + \frac{1}{2} D_m \dot{q}_m^2 \quad (2.7)$$

En cuanto a los términos de disipación eléctricos en los devanados, se considera que estos se deben solamente a sus resistencias y suponiendo que las resistencias en los tres devanados de estator, denotada como  $R_s$ , y en los tres devanados del rotor, identificada como  $R_r$ , tienen el mismo valor, la matriz de resistencias tiene la forma

$$R_e^3 = \begin{bmatrix} R_s I_3 & 0_3 \\ 0_3 & R_r I_3 \end{bmatrix}$$

la cual es definida positiva,  $I_3$  es la matriz identidad de 3x3 y  $0_3$  es la matriz de ceros de 3x3.

Por lo tanto, la función de disipación eléctrica de Raleigh resulta

$$\mathcal{F}_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e$$

Si para la parte mecánica se supone que existen términos de fricción viscosa, la función de disipación mecánica de Raleigh es

$$\mathcal{F}_m(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2$$

con  $B$  como el coeficiente de amortiguamiento.

La función completa de disipación de Raleigh del motor es la suma de ambas ecuaciones de Raleigh

$$\mathcal{F}_e(\dot{q}_e, \dot{q}_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e + \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2 \quad (2.8)$$

Las fuerzas externas generalizadas del sistema son: el par de carga  $\tau_L$  el cual, en general, es una función no lineal de la posición y velocidad; los voltajes aplicados son solamente a los devanados de estator, por las suposiciones hechas al principio, por lo tanto la matriz de entrada para la parte eléctrica tiene la forma

$$M_e = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \end{bmatrix}$$

y el vector de entrada es  $\bar{u}^3 = [u_1^3, u_2^3, u_3^3]^T$

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de acuerdo a (2.5) se considera primero la parte eléctrica. Tomando la derivada parcial de (2.7) con respecto a  $\dot{q}_e$ , resulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_e} = D_e(q_m) \dot{q}_e$$

esto último implica

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right) = D_e(q_m) \ddot{q}_e + \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e$$

Por otro lado, considerando todavía como coordenada a  $\dot{q}_e$ , respecto a la función de disipación de Raleigh (2.8), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_e} = R_e \dot{q}_e$$

debido a que no existe dependencia de (2.7) con respecto a  $q_e$ , las ecuaciones de equilibrio para la parte eléctrica del motor está dada por

$$D_e(q_m) \ddot{q}_e + \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e + R_e \dot{q}_e = M_e \bar{u} \quad (2.9)$$

Para la parte mecánica, la derivada parcial de (2.7) con respecto a  $q_m$  es

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} = D_m \dot{q}_m$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right) = D_m \ddot{q}_m$$

ya que en (2.7) existe dependencia con respecto a la posición angular  $q_m$  y la función de disipación mecánica, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} &= B \dot{q}_m \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio para la parte mecánica se construye como

$$D_m \ddot{q}_m - \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e + B \dot{q}_m = -\tau_L(q_m, \dot{q}_m) \quad (2.10)$$

En (2.10) el segundo término del lado izquierdo de la igualdad es el par mecánico de origen eléctrico. Note que si consideramos como entrada total a este subsistema la suma total de pares, i.e. par generado menos par de carga, esta ecuación puede ser vista como un filtro lineal de primer orden estable.

En un contexto matricial, **el modelo completo para el motor de inducción de tres fases** es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} U(q_m) \\ L_{sr} U^T(q_m) & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} - n_p L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & W_{12}(q_m) \\ W_{21}(q_m) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} \dot{q}_m \\ + \begin{bmatrix} R_s I_3 & 0_3 \\ 0_3 & R_r I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$D_m \ddot{q}_m + B \dot{q}_m = \tau(\dot{q}_e, q_m) - \tau_L(q_m, \dot{q}_m) \quad (2.12)$$

donde

$$W_{12}(q_m) = \begin{bmatrix} \sin(n_p q_m) & \sin(n_p q_m + \gamma) & \sin(n_p q_m - \gamma) \\ \sin(n_p q_m - \gamma) & \sin(n_p q_m) & \sin(n_p q_m + \gamma) \\ \sin(n_p q_m + \gamma) & \sin(n_p q_m - \gamma) & \sin(n_p q_m) \end{bmatrix} = W_{21}^T(q_m)$$

y el par generado es de la forma

$$\tau(\dot{q}_e, q_m) = n_p L_{sr} \dot{q}_s^T W_{12}(q_m) \dot{q}_r$$

### 2.2.2 Modelo del Motor de Inducción en Dos Fases

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) representan al motor de inducción trifásico, estas son un conjunto de 7 ecuaciones diferenciales no lineales con dependencia de la matriz de inductancias respecto a la posición del rotor, resultando muy complejo y difícil de trabajar. La suposición de neutros aislados tanto en los circuitos de estator como de rotor, establece el hecho de que una de las corrientes de ambos es redundante en el modelo trifásico. Se explota esta característica con el fin de obtener un modelo de orden reducido equivalente.

En el Capítulo 3 de [Krause, 1986] se establece que un cambio de variables que formula una transformación de circuitos estacionarios trifásicos variables a un marco de referencia arbitrario es dado por

$$T = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \gamma) & \cos(\theta + \gamma) \\ \sin \theta & \sin(\theta - \gamma) & \sin(\theta + \gamma) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

con

$$\gamma = \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad \theta = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \theta(0)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular  $\xi$  es la variable de integración. La inversa de la transformación antes mencionada es

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos(\theta - \gamma) & \sin(\theta - \gamma) & 1 \\ \cos(\theta + \gamma) & \sin(\theta + \gamma) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La *transformación de Blondel* que relaciona variables de tres fases con variables equivalentes de dos fases tiene la forma (véase [Meisel, 1966] o [Espinosa, 1993] para su obtención)

$$T_{3\phi}^{2\phi} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

es la misma que (2.13) considerando a  $\theta = 0$  y sin considerar el tercer renglón de ésta que es la corriente de secuencia cero. Esta transformación solo puede ser utilizada para excitaciones trifásicas *balanceadas* [Meisel, 1966].

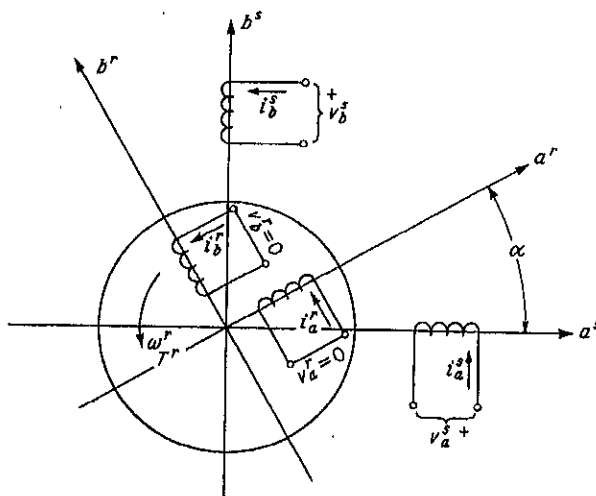


Figura 2.2: Representación del motor de inducción en dos fases

En la Fig. 2.2 se observa un diagrama esquemático de un circuito equivalente del motor de inducción trifásico en uno de dos fases.

### Modelo $\alpha\beta$

La transformación de Blondel puede aplicarse de la misma forma a los devanados del estator como a los de rotor del motor de inducción. Dicha transformación se aplica por igual a voltajes, flujos y corrientes, por lo que se puede establecer la siguiente transformación completa de corrientes

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1}^3 \\ \dot{q}_{s2}^3 \\ \dot{q}_{s3}^3 \\ \dot{q}_{r1}^3 \\ \dot{q}_{r2}^3 \\ \dot{q}_{r3}^3 \end{bmatrix}$$



mientras que los voltajes están dados por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las últimas transformaciones al modelo del motor de inducción de tres fases, dadas por las ecuaciones (2.11) y (2.12), se obtiene **el modelo  $\alpha\beta$  del motor** como

$$D_e(q_m)\ddot{q}_e + W_1(q_m)\dot{q}_m\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (2.16)$$

$$D_m\ddot{q}_m + B\dot{q}_m = \tau(\dot{q}_e, q_m) - \tau_L(q_m, \dot{q}_m) \quad (2.17)$$

$$\tau(\dot{q}_e, q_m) = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1(q_m)\dot{q}_e \quad (2.18)$$

donde  $R_e = \text{diag}\{R_s I_2, R_r I_2\}$ ,  $M_e = [I_2, 0_2]^T$

$$D_e(q_m) = \begin{bmatrix} L_s I_2 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_m} \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_m} & L_r I_2 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathcal{J} n_p q_m} = \begin{bmatrix} \cos(n_p q_m) & -\sin(n_p q_m) \\ \sin(n_p q_m) & \cos(n_p q_m) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}^T n_p q_m} \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{J}^T$$

$$W_1(q_m) = \frac{dD_e(q_m)}{dq_m} = n_p L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J} e^{\mathcal{J} n_p q_m} \\ -\mathcal{J} e^{-\mathcal{J} n_p q_m} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$L_{sr}$ ,  $L_s$  y  $L_r > 0$  son las inductancias mutuas, de estator y de rotor definidas en [Krause, 1986] (véase también el Apéndice B) para este marco de dos fases, mientras que  $\mathcal{J}$  es una matriz antisimétrica de  $2 \times 2$  y  $u = [u_1, u_2]^T$  los voltajes de estator.

Notese que aún hay dependencia con respecto a la posición del rotor. Una explicación a esto es reportada en ([Espinosa, 1993], pag. 48), mencionando algo que es muy importante:

“Esto se debe a que las variables de estator no están representadas en el mismo marco de referencia que las variables de rotor (recuerde que mientras el primero está fijo, el segundo gira a una velocidad angular  $\omega = \dot{q}_m$ ). Sin embargo, la gran ventaja que el modelo  $\alpha\beta$  presenta es que es una representación directa del motor real, i.e. su comportamiento es el mismo que el modelo del motor en tres fases, por lo tanto, si un controlador es diseñado considerando este modelo, este tendrá directamente su forma implementable”.

### 2.2.3 Marco de Referencia $dq$

El vector de flujos tiene la forma  $\lambda \triangleq [\lambda_s^T, \lambda_r^T]^T = [\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \lambda_{r1}, \lambda_{r2}]^T$  y está relacionado con el vector de corrientes como en (2.6), es decir,

$$\lambda = D_e(q_m)\dot{q}_e \quad (2.20)$$

de donde se obtiene que

$$\lambda_r = L_{sr}e^{-\mathcal{J}n_p q_m}\dot{q}_s + L_r\dot{q}_r \quad (2.21)$$

Hay que notar que los voltajes en el rotor jaula de ardilla, debido a que sus devanados están en cortocircuito, la segunda ecuación de (2.16) tiene la forma

$$\dot{\lambda}_r + R_r\dot{q}_r = 0 \quad (2.22)$$

De (2.18) y (2.19) el par puede escribirse como

$$\tau = n_p L_{sr}\dot{q}_s^T \mathcal{J} e^{\mathcal{J}n_p q_m} \dot{q}_r \quad (2.23)$$

teniendo en cuenta que  $\mathcal{J}$  y  $e^{\mathcal{J}n_p q_m}$  conmutan y que la matriz antisimétrica  $\mathcal{J}$  tiene la propiedad  $\mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$  lo que implica que  $x^T \mathcal{J} x = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Ahora bien, si se resuelve (2.21) para  $\dot{q}_r$  se tiene

$$\dot{q}_r = \frac{1}{L_r}(\lambda_r - L_{sr}e^{-\mathcal{J}n_p q_m}\dot{q}_s) \quad (2.24)$$

Sustituyendo esto último en (2.23) resulta

$$\tau = n_p \frac{L_{sr}}{L_r} \dot{q}_s^T \mathcal{J} e^{\mathcal{J}n_p q_m} \lambda_r \quad (2.25)$$

Resolviendo (2.21) para  $\dot{q}_s$

$$\dot{q}_s = \frac{1}{L_{sr}}e^{-\mathcal{J}n_p q_m}(\lambda_r - L_r\dot{q}_s) \quad (2.26)$$

Sustituyendo en (2.25) y considerando (2.22) llegamos a

$$\tau = -n_p \dot{q}_r^T \mathcal{J} \lambda_r = \frac{n_p}{R_r} \dot{\lambda}_r^T \mathcal{J} \lambda_r \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) son el modelo del motor de inducción en su marco de referencia natural, el cual se puede representar en un marco de referencia giratorio a

una velocidad arbitraria  $\omega_a(t)$ . En esta nueva representación las variables naturales del motor asociadas con los devanados del estator y del rotor son sustituidas por variables  $dq$  (variables de eje de cuadratura y de directa) asociadas con devanados ficticios (véase [Krause, 1986])

Definiendo las nuevas variables como

$$\begin{aligned} u_{dq} \triangleq \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} &= e^{-\mathcal{J}\theta_a} u & i_{dq} \triangleq \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} &= e^{-\mathcal{J}\theta_a} \dot{q}_s \\ \lambda_{dq} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} &= e^{-\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \lambda_r \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $\theta_a$  es la solución de  $\dot{\theta}_a = \omega_a$ , que es precisamente la variable que nos indica qué marco de referencia es seleccionado,  $\theta(0) = 0$ ,  $\lambda_{dq}$  los flujos de enlace de rotor,  $i_{dq}$  las corrientes de estator y  $u_{dq}$  voltajes de estator en este nuevo marco de referencia ficticio.

Sustituyendo la expresión para  $\dot{q}_r$  de (2.24) en (2.22) y multiplicando por  $\frac{L_r}{R_r}$  nos resulta

$$T_r \dot{\lambda}_r + \lambda_r = L_{sr} e^{-\mathcal{J}n_p q_m} \dot{q}_s \quad (2.29)$$

donde  $T_r \triangleq \frac{L_r}{R_r}$  es la constante de tiempo de la dinámica del circuito eléctrico del rotor.

Note que de (2.28) tenemos que  $\lambda_r = e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \lambda_{dq}$ . Calculando la derivada de esta última expresión y sustituyendola en (2.29), reorganizando términos, multiplicando por la izquierda por  $e^{-\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)}$  y usando la definición de  $i_{dq}$  dad en (2.28), llegamos a

$$T_r \dot{\lambda}_{dq} + T_r (\omega_a - n_p \dot{q}_m) \mathcal{J} \lambda_{dq} + \lambda_{dq} = L_{sr} i_{dq} \quad (2.30)$$

Para expresar las dos primeras ecuaciones de (2.16) referentes al estator en este nuevo marco de referencia, expresemos (2.24) en términos de  $i_{dq}$  y  $\lambda_{dq}$  de acuerdo a lo definido en (2.28) llegamos a

$$\dot{q}_r = \frac{1}{L_r} \left( e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \lambda_{dq} - L_{sr} e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} i_{dq} \right) \quad (2.31)$$

y su derivada

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r &= \frac{1}{L_r} \left( e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \dot{\lambda}_{dq} + (\dot{\theta}_a - n_p \dot{q}_m) \mathcal{J} e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \lambda_{dq} \right. \\ &\quad \left. - L_{sr} e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \frac{d}{dt} i_{dq} - L_{sr} (\dot{\theta}_a - n_p \dot{q}_m) \mathcal{J} e^{\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} i_{dq} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Las dos ecuaciones del estator de (2.16) son

$$\frac{d}{dt} \left( L_s \dot{q}_s + L_{sr} e^{\mathcal{J} n_p q_m} \dot{q}_r \right) + R_s \dot{q}_s = u \quad (2.33)$$

tomando en cuenta (2.28) con respecto a  $\dot{q}_s$  y  $u$  para sustituirlo en esta última expresión, para posteriormente realizar la derivada correspondiente y además de multiplicar por la izquierda  $e^{-\mathcal{J} \theta_a}$  tenemos

$$L_s \frac{d}{dt} i_{dq} + (L_s \omega_a \mathcal{J} + R_s) i_{dq} + L_{sr} e^{-\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \ddot{q}_r + n_p L_{sr} \dot{q}_m e^{-\mathcal{J}(\theta_a - n_p q_m)} \mathcal{J} \dot{q}_r = u_{dq}$$

Sustituyendo (2.31) y (2.32) en esta última expresión llegamos a

$$\begin{aligned} L_s \frac{d}{dt} i_{dq} + (L_s \omega_a \mathcal{J} + R_s) i_{dq} + \frac{L_{sr}}{L_r} \left[ \dot{\lambda}_{dq} + (\omega_a - n_p \dot{q}_m) \mathcal{J} \lambda_{dq} - L_{sr} \frac{d}{dt} i_{dq} \right. \\ \left. - L_{sr} (\omega_a - n_p \dot{q}_m) \mathcal{J} \lambda_{dq} \right] + \frac{n_p L_{sr}}{L_r} \dot{q}_m \mathcal{J} [\lambda_{dq} - L_{sr} i_{dq}] = u_{dq} \end{aligned}$$

sustituyendo  $\dot{\lambda}_{dq}$  de (2.30) en esta ecuación y simplificando llegamos a

$$\frac{d}{dt} i_{dq} + [\omega_a \mathcal{J} + \gamma I_2] i_{dq} + \frac{L_{sr}}{\sigma L_s L_r} \left[ n_p \dot{q}_m \mathcal{J} - \frac{1}{T_r} I_2 \right] \lambda_{dq} = \frac{1}{\sigma L_s} u_{dq} \quad (2.34)$$

con  $\sigma = 1 - \frac{L_{sr}^2}{L_s L_r} > 0$  el factor de enlace total del motor y

$$\gamma = \frac{R_s}{L_s \sigma} + \frac{L_{sr}^2}{L_s \sigma L_r T_r}$$

Para expresar el par en términos de variables  $dq$ , sustituyamos en (2.25)  $\lambda_r$  y  $\dot{q}_s$  según está definido en (2.28)

$$\tau = n_p \frac{L_{sr}}{L_r} i_{dq}^T \mathcal{J} \lambda_{dq} = n_p \frac{L_{sr}}{L_r} (\lambda_d i_q - \lambda_q i_d) \quad (2.35)$$

Un marco de referencia que es ampliamente utilizado es cuando se utilizan a  $\omega_a = 0$  y que es el marco fijo de estator (denominado también marco ab) y el cual se puede obtener sustituyendo el valor de  $\omega_a$  en (2.30) y (2.34). Este modelo normalmente es escrito en modelo de espacio de estado en donde en lugar de utilizar los subíndices  $d$  y  $q$  se emplean  $a$  y  $b$  quedando, a detalle, de la siguiente forma

$$\dot{i}_a = \frac{L_{sr} R_r}{L_s \sigma L_r^2} \lambda_a + \frac{n_p L_{sr}}{L_s \sigma L_r} \dot{q}_m \lambda_b - \gamma i_a + \frac{1}{L_s \sigma} u_1$$

$$\begin{aligned}
\dot{i}_b &= \frac{L_{sr}R_r}{L_s\sigma L_r^2}\lambda_b - \frac{n_p L_{sr}}{L_s\sigma L_r}\dot{q}_m\lambda_a - \gamma i_b + \frac{1}{L_s\sigma}u_2 \\
\dot{\lambda}_a &= -\frac{R_r}{L_r}\lambda_a - n_p\dot{q}_m\lambda_b + \frac{R_r L_{sr}}{L_r}i_a \\
\dot{\lambda}_b &= -\frac{R_r}{L_r}\lambda_b + n_p\dot{q}_m\lambda_a + \frac{R_r L_{sr}}{L_r}i_b
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_m &= \frac{1}{D_m}(\tau - \tau_L) \\
\tau &= \frac{n_p L_{sr}}{L_r}(\lambda_a i_b - \lambda_b i_a)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

donde  $\lambda_{ab} = [\lambda_a, \lambda_b]^T$  son los flujos de rotor,  $i_{ab} = [i_a, i_b]^T = \dot{q}_s$  son las corrientes de estator,  $u_{ab} = [u_1, u_2]^T$  son los voltajes de estator y se asumirá que la constante de amortiguamiento viscoso es  $B = 0$ .



## Capítulo 3

# Sintonización de Ganacias en el Lazo PI del FOC

Debido a su gran confiabilidad, el Control por Campo Orientado (FOC por sus siglas en inglés) es el más común para el control de motores de inducción para alto desempeño. Históricamente, este notable controlador fue derivado de la intuición física y de un profundo entendimiento de la operación de la máquina, con poco estudio analítico riguroso respecto a su estabilidad y desempeño. En muchas ocasiones ha sucedido que, con un análisis aproximado, solo se emplea el controlador en aplicaciones simples. Para simplificar la sintonización fuera de línea del FOC, y eventualmente llegar a buen término con su desempeño, es necesario un mejor entendimiento teórico de la conducta dinámica del FOC. Tal análisis es muy difícil, por el hecho de que la conducta dinámica del sistema en lazo cerrado es descrito por relaciones complejas no lineales.

Reconociendo la importancia práctica que tiene el FOC, y motivados por la necesidad de clarificar su teoría, se han realizado muchos proyectos de investigación en los que podemos resaltar: que se ha demostrado que el FOC tiene una muy buena interpretación de disipación de energía; que el controlador basado por pasividad propuesto para máquinas alimentadas por voltaje se reduce exactamente al Control por Campo Orientado (FOC) para máquinas alimentadas por corriente; posteriormente se estableció la fuerte cualidad de estabilidad exponencial global y probaron, como producto destacado, propiedades de estabilidad robusta del FOC *vis à vis* a la incertidumbre en la constante de tiempo de rotor.

En este trabajo se valida en forma experimental lo que se reporta en el artículo [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998], en donde se continúa la línea de investigación mencionada en el párrafo anterior y se concentraron en la importancia práctica del problema de la **sintonización fuera de línea** de las ganancias del lazo PI de la

velocidad. Se sabe que el desempeño del FOC depende de la sintonización de estas ganancias, una tarea que es difícil proporcionar por la alta incertidumbre de la constante de tiempo del rotor. En [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] se proporcionan algunas reglas simples para realizar la sintonización del PI y asegurar estabilidad robusta *vis à vis* con estos parámetros. Precisamente, la principal contribución de dicho trabajo es la de proponer un algoritmo simple que, para cada juego de ganancias de PI, estima el error máximo de la constante de tiempo del rotor para el cual la estabilidad global es garantizada. De esta forma se puede estimar el margen de estabilidad de un controlador PI antes de cerrar el lazo

### 3.1 Campo Orientado

Las ecuaciones dadas por (2.36) y (2.37) nos da el modelo del motor de inducción en un marco de referencia fijo al estator.

En muchas aplicaciones prácticas se utilizan lazos de corrientes de alta ganancia de la forma

$$u = \frac{1}{\epsilon}(i_{ab}^d - i_{ab})$$

para forzar a  $i_{ab}$  a seguir su referencia correspondiente  $i_{ab}^d$ , donde  $\epsilon$  es un número positivo pequeño. Por lo tanto, es razonable considerar que el modelo del motor es singularmente perturbado y que se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_{ab} &= -\frac{R_r}{L_r}\lambda_{ab} - n_p\dot{q}_m\mathcal{J}\lambda_{ab} + \frac{R_r L_{sr}}{L_r}i_{ab} \\ \ddot{q}_m &= \frac{1}{D_m}(\tau - \tau_L) \\ \tau &= \frac{n_p L_{sr}}{L_r}i_{ab}^T\mathcal{J}\lambda_{ab}\end{aligned}\tag{3.1}$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{J}$  definida antes.

La suposición implícita de este modelo es que las corrientes de estator son exactamente iguales a su referencia, i.e.  $i_{ab} \equiv i_{ab}^d$ . Para simplificar aún más estas últimas ecuaciones se introduce un cambio de coordenadas

$$v = e^{-\mathcal{J}n_p q_m}i_{ab} \quad \lambda_r = e^{-\mathcal{J}n_p q_m}\lambda_{ab}\tag{3.2}$$

donde  $e^{-\mathcal{J}n_p q_m}$  es definida como antes.

Con esto  $v = [v_1, v_2]^T$ ,  $\lambda_r = [\lambda_{r1}, \lambda_{r2}]^T$  son cantidades expresadas en marco de referencia giratorio con la velocidad (eléctrica) del motor. En este nuevo estado



de coordenadas  $[\lambda_r, q_m, \dot{q}_m]^T$  y con las nuevas entradas de control  $v$ , nos resulta el siguiente modelo

$$\begin{aligned} T_r \dot{\lambda}_r &= -\lambda_r + L_{sr} v \\ D_m \ddot{q}_m &= (\tau - \tau_L) \\ \tau &= \frac{n_p L_{sr}}{L_r} v^T \mathcal{J} \lambda_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

El conjunto de ecuaciones definidas por (3.3) es conocido como el modelo dinámico del motor de inducción alimentado por corriente (*current fed*) y es expresado por el flujo de rotor y las corrientes de estator en un marco de referencia giratorio a la velocidad angular del rotor.

Definiendo la amplitud del flujo de rotor como  $\beta = \|\lambda_r\|$  y el ángulo del flujo de rotor como  $\rho = \arctan(\lambda_{r2}/\lambda_{r1})$  e introduciendo el siguiente cambio de coordenadas en la entrada

$$i_{dq} \triangleq \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}\rho} v$$

con

$$e^{-\mathcal{J}\rho} = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & \sin(\rho) \\ -\sin(\rho) & \cos(\rho) \end{bmatrix}, \quad (e^{-\mathcal{J}\rho})^{-1} = (e^{-\mathcal{J}\rho})^T = e^{\mathcal{J}\rho}$$

entonces, podemos reescribir el modelo (3.3) en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} T_r \dot{\beta} &= -\beta + L_{sr} i_d \\ \dot{\rho} &= \frac{R_r}{n_p \beta^2} \tau \\ \tau &= \frac{n_p L_{sr}}{L_r} i_q \beta \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Control por Campo Orientado Directo

En la primera ecuación de (3.4) se puede observar que  $\beta$  es la salida de un filtro lineal con entrada  $i_d$ , mientras que en la tercera ecuación  $\tau$  es el producto de la segunda entrada de control  $i_q$  y  $\beta$ . Esto motiva a elegir  $i_d$  para regular a  $\beta$  a su valor de referencia  $\beta_*$  y a  $i_q$  para manejar el par a alguna referencia deseada  $\tau_d$  de la siguiente forma

$$i_{dq} = \frac{1}{L_{sr}} \begin{bmatrix} \beta_* \\ \frac{L_r}{n_p \beta_*} \tau_d \end{bmatrix} \left( e^{-\mathcal{J}(\rho + n_p q_m)} i_{ab} \right) \quad (3.5)$$

donde

$$\tau_d = - \left( K_P + K_I \frac{1}{p} \right) \dot{\tilde{q}}_m$$

con  $\dot{\tilde{q}}_m \triangleq \dot{q}_m - \dot{q}_{m*}$ ,  $p \triangleq \frac{d}{dt}$ , donde tanto  $\beta_*$  como  $\dot{q}_{m*}$  son valores deseados de la magnitud de flujo y de velocidad respectivamente, y  $K_P, K_I > 0$  son las ganancias de sintonización.

Entonces la implantación de las señales reales deben tener la forma

$$i_{ab} = \frac{1}{L_{sr}} e^{\mathcal{J}(\rho + n_p q_m)} \begin{bmatrix} \beta_* \\ \frac{L_r}{n_p \beta_*} \tau_d \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

El ángulo de flujo  $\rho$  deberá medirse o estimarse. La no disponibilidad de esta señal junto con la alta sensibilidad de sus estimados (con respecto a la alta incertidumbre del parámetro  $T_r$ ), son la principal desventaja de este enfoque que es conocido como **Control por Campo Orientado Directo**.

### 3.1.2 Control por Campo Orientado Indirecto

Para evitar la necesidad de medir el ángulo de flujo de rotor  $\rho$  del enfoque anterior, podemos pensar en remplazarlo por su estimado, esto es, el valor al que convergerá si  $\beta$  y  $\tau$  se comporta como su deseado. Aplicando este criterio a la segunda ecuación de (3.4), y llamandole ahora como  $\rho_d$ , tenemos

$$\dot{\rho}_d = \frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} \tau_d \quad (3.7)$$

$$\tau_d = - \left( K_P + K_I \frac{1}{p} \right) \dot{\tilde{q}}_m \quad (3.8)$$

Continuando con la misma definición para  $\tau_d$  antes presentada y con  $\hat{R}_r > 0$  la resistencia de rotor estimada. Ahora podemos usar este estimado en lugar del  $\rho$  actual en el FOC directo y llegamos a

$$i_{dq} = \frac{1}{L_{sr}} \begin{bmatrix} \beta_* \\ \frac{L_r}{n_p \beta_*} \tau_d \end{bmatrix} \left( e^{-\mathcal{J}(\rho_d + n_p q_m)} i_{ab} \right) \quad (3.9)$$

La ley de control resultante es

$$i_{ab} = \frac{1}{L_{sr}} e^{\mathcal{J}(\rho_d + n_p q_m)} \begin{bmatrix} \beta_* \\ \frac{L_r}{n_p \beta_*} \tau_d \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

conocida como **Control por Campo Orientado Indirecto**.

## 3.2 Formulación del Problema

En el trabajo realizado por [Ortega, R. & Taoutaou, D., 1996] demostraron que el sistema dado por las ecuaciones (3.3), (3.7) y (3.10), es global asintóticamente estable si  $\hat{R}_r = R_r$ . Además, en [De Wit, P., Ortega, R. & Mareels, I., 1996] demostraron que la estabilidad es en realidad exponencial y que el sistema se mantiene estable bajo grandes variaciones de la resistencia de rotor. El problema en que se concentraron en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] es como elegir los parámetros  $K_P$  y  $K_I$  para garantizar, no solamente la estabilidad del lazo cerrado, sino también cómo mejorar el desempeño a pesar de las incertidumbres en la resistencia del rotor  $R_r$ .

Los sistemas lineales tienen una representación matemática por ecuaciones diferenciales lineales. De éstos se conoce su solución de una forma analítica. En particular, para los sistemas lineales de primer y segundo orden se sabe qué tipo de comportamiento tienen en el tiempo. De acuerdo a esto, el desempeño, en el sentido clásico, es una respuesta transitoria rápida y con pequeño sobrepaso. En cuanto a los sistemas no lineales no conocemos una solución analítica de su estado por la misma naturaleza de las ecuaciones diferenciales no lineales que son modeladas, pero desde el punto de vista de control robusto podemos estudiar la estabilidad robusta del sistema no lineal, i.e., operación estable en grandes rangos de incertidumbre de parámetros. Por lo que una interrelación entre estabilidad robusta y desempeño no es obvia, particularmente en un sistema no lineal. Sin embargo, se puede asegurar algún margen de estabilidad para una operación correcta del sistema. Es razonable entonces esperar que una sintonización de estabilidad robusta producirá un buen desempeño.

Para formular matemáticamente este problema tomemos el punto de vista que “estabilidad robusta implica un desempeño bueno”. Entonces, se observa que la sintonización de los PI nos permitirá grandes errores de estimación de la resistencia de rotor.

De esta forma el problema de control es formulado como:

- Proporcionados los parámetros del motor de inducción,  $L_r$ ,  $L_{sr}$ ,  $n_p$ ,  $D_m$ , y un estimado *a priori* de la resistencia de rotor  $\hat{R}_r$  y estableciendo las ganancias

$K_P, K_I$ , encontrar un rango de valores de la estimación de resistencia de rotor

$$\tilde{R}_r \triangleq \hat{R}_r - R_r$$

para el cual la estabilidad del sistema en lazo cerrado sea preservado. Es decir, se desea encontrar un intervalo  $\tilde{\mathcal{R}} \triangleq [\tilde{R}_r^{min}, \tilde{R}_r^{max}] \in \mathfrak{R}$  (claramente conteniendo el cero) tal que, si  $\hat{R}_r \in \tilde{\mathcal{R}}$ , entonces el sistema (3.3), (3.7) y (3.10) es globalmente estable

Este análisis también se puede plantear de una manera dual de naturaleza práctica. Esto es,

- Proporcionados los parámetros del motor de inducción,  $L_r, L_{sr}, n_p, D_m$  y un intervalo de incertidumbre para la resistencia de rotor  $R_r \in [R_r^{min}, R_r^{max}] \in \mathfrak{R}$ . Encontrar un rango de ganancias PI (si existe alguno) para el cual la estabilidad del sistema en lazo cerrado es preservado.

### 3.3 Cambio de Coordenadas

Para resolver el problema antes formulado, usemos el siguiente cambio de coordenadas

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{rd}^T \mathcal{J} \lambda_r \\ \lambda_{rd}^T \lambda_r \\ \tau_d \\ \dot{\tilde{q}}_m \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde

$$\lambda_{rd} = e^{\mathcal{J}\rho_d} \begin{bmatrix} \frac{\beta_*}{L_{sr}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta transformación a las ecuaciones del lazo cerrado resulta el siguiente modelo dinámico no lineal

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & \frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} v_3 & -\frac{R_r}{n_p L_{sr}} & 0 \\ -\frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} v_3 & -\frac{R_r}{L_r} & 0 & 0 \\ -\frac{n_p K_P L_{sr}}{L_r D_m} & 0 & -\frac{K_P L_{sr}}{D_m \beta_*^2} v_2 & -K_I \\ \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r} & 0 & \frac{L_{sr}}{D_m \beta_*^2} v_2 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_r \beta_*^2}{L_r L_{sr}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_P}{D_m} \\ -\frac{1}{D_m} \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.12)$$

donde se separan los términos dependientes de  $\tau_L$ , para que el estado  $v$  sea lineal. Se puede probar estabilidad exponencial del sistema con  $\tau_L = 0$  aunque también dicho sistema se mantiene estable (en el sentido de globalidad acotada) cuando  $\tau_L \neq 0$ . En la Sección 5 del Capítulo 11 de [Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramírez, 1999] demuestran que los puntos de equilibrio de este sistema es definido por una relación algebraica muy compleja y el sistema en realidad puede tener múltiples puntos de equilibrio. Mientras consideremos que  $\tau_L = 0$ , el punto de equilibrio es único y es dado por

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4]^T = \left[ 0, \frac{\beta_*^2}{L_{sr}}, 0, 0 \right]^T$$

Bajo este hecho, se tratará el par de carga como una perturbación y se concentrará en el caso  $\tau_L = 0$ .

Para aplicar el análisis de estabilidad de Lyapunov necesitamos trasladar el punto de equilibrio de (3.12) al origen. Para esta finalidad, se introduce el cambio de coordenadas  $z_i = v_i - \bar{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , por lo que (3.12) en términos de esta nueva variable resulta

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & \frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} z_3 & -\frac{R_r}{n_p L_{sr}} & 0 \\ -\frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} z_3 & -\frac{R_r}{L_r} & 0 & 0 \\ -\frac{n_p K_P L_{sr}}{L_r D_m} & 0 & -\frac{K_P L_{sr}}{D_m \beta_*^2} \left( z_2 + \frac{\beta_*^2}{L_{sr}} \right) & -K_I \\ \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r} & 0 & \frac{L_{sr}}{D_m \beta_*^2} \left( z_2 + \frac{\beta_*^2}{L_{sr}} \right) & 0 \end{bmatrix} z \quad (3.13)$$

Se puede observar que (3.13) es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma  $\dot{z} = f(z)$  con un único punto de equilibrio en el origen (véase [Khalil, 1996] y el Apéndice C, donde se da una breve explicación de estas definiciones basadas en este autor).

### 3.4 Estabilidad Local

Si reescribimos (3.13) separando los términos no lineales de la siguiente manera

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & 0 & -\frac{1}{n_p L_{sr}} (\hat{R}_r - R_r) & 0 \\ 0 & -\frac{R_r}{L_r} & 0 & 0 \\ -\frac{n_p K_P L_{sr}}{L_r D_m} & 0 & -\frac{K_P}{D_m} & -K_I \\ \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r} & 0 & \frac{1}{D_m} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} z_2 z_3 \\ -\frac{\hat{R}_r}{n_p \beta_*^2} z_1 z_3 \\ -\frac{K_P L_{sr}}{D_m \beta_*^2} z_2 z_3 \\ \frac{L_{sr}}{D_m \beta_*^2} z_2 z_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

el sistema se puede representar de una manera compacta como  $\dot{z} = A_L z + F(z)$ , quedando de tal forma que podemos aplicar el método indirecto de Lyapunov el cual establece que un sistema no lineal es localmente estable *si y sólo si* su aproximación lineal es asintóticamente estable, es decir, todos los valores propios de la matriz  $A_L$  están en el semiplano izquierdo del plano complejo. La aproximación de primer orden del sistema es simplemente  $\dot{z} = A_L z$ , cuyo polinomio característico es

$$\det(sI - A_L) = \left( s + \frac{R_r}{L_r} \right) g(s)$$

con

$$g(s) = s^3 + \left( \frac{K_P}{D_m} + \frac{R_r}{L_r} \right) s^2 + \left( \frac{K_P \hat{R}_r}{D_m L_r} + \frac{K_I}{D_m} \right) s + \frac{K_I \hat{R}_r}{D_m L_r}$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz<sup>1</sup> al polinomio  $g(s)$ , las condiciones necesarias y suficientes para estabilidad local son

$$\text{i) } K_P > -\frac{D_m R_r}{L_r}$$

$$\text{ii) } K_I > 0$$

$$\text{iii) } h_1(R_r, K_P, K_I) \triangleq \frac{\left[ \left( \frac{K_P}{D_m} + \frac{R_r}{L_r} \right) \left( \frac{K_P \hat{R}_r}{D_m L_r} + \frac{K_I}{D_m} \right) - \frac{K_I \hat{R}_r}{D_m L_r} \right]}{\frac{K_P}{D_m} + \frac{R_r}{L_r}} > 0$$

<sup>1</sup>Existen muchos autores que abordan este tema, véase por ejemplo a [Kuo, 1995]

Se observa que las primeras dos condiciones son satisfechas trivialmente con valores positivos para las ganancias del lazo PI. En la tercera condición se ve que el denominador es siempre positivo, por lo que dicha condición se puede reescribir en términos de la resistencia de rotor  $R_r$  como

$$h_1(R_r, K_P, K_I) > 0 \quad \iff \quad R_r > \frac{K_I \hat{R}_r}{\frac{K_P \hat{R}_r}{L_r} + K_I} - \frac{K_P L_r}{D_m} \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta que la desigualdad  $a \geq \frac{ba}{c+b}$  se mantiene para todo número positivo  $a, b, c$ , tenemos que

$$\hat{R}_r \geq \frac{K_I \hat{R}_r}{\frac{K_P \hat{R}_r}{L_r} + K_I}$$

para todo  $K_P, K_I, L_r$ , por lo que podemos establecer la siguiente

**Proposición 3.1** *Considere el modelo del motor de inducción alimentado por corriente en lazo cerrado con el FOC indirecto (3.3), (3.7), (3.8) y (3.10). Si*

$$R_r > \hat{R}_r \quad (3.16)$$

*entonces el sistema es localmente estable para  $\tau_L = 0$ . Cuando  $\tau_L \neq 0$  todas las trayectorias entran (en tiempo finito) a una vecindad al origen de radio  $|\tau_L|$ .*

La importancia de este resultado es que la estabilidad es preservada para todas las ganancias PI, proporcionándonos un sobreestimado de la resistencia de rotor. Sin embargo, nuestro interés es obtener reglas de sintonización independiente de  $R_r$  por lo que consideraremos el caso cuando

$$\frac{K_I \hat{R}_r}{\frac{K_P \hat{R}_r}{L_r} + K_I} \leq \frac{K_P L_r}{D_m}$$

es decir, cuando la condición (3.15) se mantiene para todo  $R_r$ . Esta última desigualdad se puede reescribir como

$$\hat{R}_r K_P^2 \geq K_I (D_m \hat{R}_r - K_P L_r)$$

de la cual se puede llegar a la siguiente

**Proposición 3.2** *Considere el modelo del motor de inducción alimentado por corriente en lazo cerrado con el FOC indirecto (3.3), (3.7), (3.8) y (3.10). Entonces, el sistema (con  $\tau_L = 0$ ) es local exponencialmente estable para toda  $R_r$  si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumplen*

**Condición 1:**

$$K_P \geq \frac{D_m \hat{R}_r}{L_r} \quad y \quad K_I > 0 \quad (3.17)$$

**Condición 2:**

$$0 < K_P < \frac{D_m \hat{R}_r}{L_r} \quad y \quad 0 < K_I \leq \frac{K_P^2 \hat{R}_r}{D_m \hat{R}_r - K_P L_r} \quad (3.18)$$

Note que este resultado es independiente de  $\beta_*$

### 3.5 Estabilidad Global e Intervalos de Desempeño

En esta sección se definen intervalos de la resistencia de rotor para el cual la estabilidad global es preservada como una función de las ganancias PI. El tamaño de estos intervalos proporcionan una medida cuantitativa del desempeño de la sintonización PI. Para esta finalidad, es conveniente descomponer el sistema en lazo cerrado (3.13) como una interconexión retroalimentada de dos subsistemas. Uno de estos contiene todas las no linealidades y resulta ser estrictamente pasivo. El otro subsistema es lineal e Invariante en el Tiempo (LTI).

Esta descomposición del sistema va en dos sentidos: Primero, de la interconexión retroalimentada negativa de dos subsistemas pasivos, el sistema resultante es pasivo (véase el apéndice A de [Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramírez, 1999]), y si uno de estos es estrictamente pasivo entonces el sistema en lazo cerrado es estable. Segundo, para sistemas LTI hay una caracterización analítica muy simple de pasividad en términos de positividad de la parte real de su función de transferencia. Mientras esta última dependa de los parámetros del motor y las ganancias PI, la prueba de positividad real nos proveerá de un criterio para estabilidad global.

Podemos reescribir (3.13) como la interconexión de los siguientes subsistemas

$$G_1 : u_1 \mapsto y_1 \begin{cases} \dot{z}_2 &= -\frac{R_r}{L_r} z_2 + \frac{1}{\beta_*^2} z_3 u_1 \\ u_1 &= -\frac{\hat{R}_r}{n_p} z_1 \\ y_1 &= z_2 z_3 \end{cases} \quad (3.19)$$



$$G_2 : u_2 \mapsto y_2 \begin{cases} \dot{v} = -Av + bu_2 \\ u_2 = z_2 z_3 \\ y_2 = c^T v \end{cases} \quad (3.20)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{1}{n_p L_{sr}} (\hat{R}_r - R_r) & 0 \\ -\frac{n_p K_P L_{sr}}{L_r D_m} & -\frac{K_P}{D_m} & -K_I \\ \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r} & \frac{1}{D_m} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{1}{\beta_*^2} \begin{bmatrix} \frac{\hat{R}_r}{n_p} \\ -\frac{K_P L_{sr}}{D_m} \\ \frac{L_{sr}}{D_m} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{\hat{R}_r}{n_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

y la estructura de interconexión

$$u_1 = -y_2$$

$$u_2 = y_1$$

La descomposición antes mencionada se muestra en la Fig. 3.1 donde tenemos definida la función de transferencia  $G_2(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$

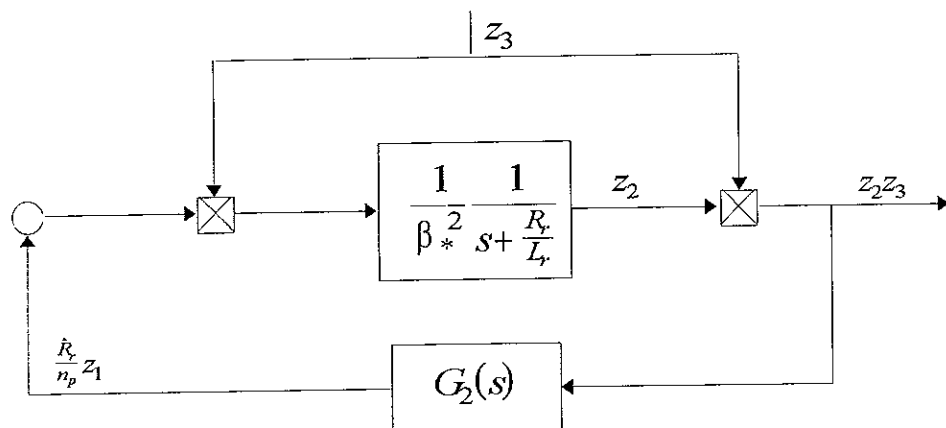


Figura 3.1: Descomposición del sistema en lazo cerrado

Esto es,

$$G_2(s) = \frac{L_r \hat{R}_r}{n_p^2 \beta_*^2} \frac{D_m \hat{R}_r s^2 + K_P R_r s + K_I R_r}{D_m L_r s^3 + (K_P L_r + D_m R_r) s^2 + (K_P \hat{R}_r + K_I L_r) s + K_I \hat{R}_r} \quad (3.21)$$

Las principales características de dicha descomposición del sistema son: El subsistema  $G_1$ , a pesar de ser no lineal, es estrictamente pasivo;  $G_2$  es un sistema lineal Invariante en el Tiempo (LTI) de grado relativo uno y de fase mínima que puede hacerse estrictamente positivo real para valores convenientes de los parámetros del motor y el controlador.

**Proposición 3.3** *Considere el modelo del motor de inducción alimentado por corriente en lazo cerrado con el FOC indirecto (3.3), (3.7), (3.8) y (3.10). Asuma que las condiciones para estabilidad local ((3.16) o (3.17) o (3.18)) son satisfechas,*

$$h_1(R_r, K_P, K_I) > 0$$

y que las siguientes desigualdades se satisfacen

$$h_2(R_r, K_P, K_I) > 0 \quad y \quad h_3(R_r, K_P, K_I) > 0 \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} h_2(R_r, K_P, K_I) &\triangleq D_m^2 R_r \hat{R}_r + K_P D_m L_r (\hat{R}_r - R_r) \\ h_3(R_r, K_P, K_I) &\triangleq f_1 + 2\sqrt{h_2 f_2} \\ f_1(R_r, K_P, K_I) &\triangleq K_P^2 R_r \hat{R}_r - K_I D_m (\hat{R}_r^2 + R_r^2) \\ f_2(R_r, K_P, K_I) &\triangleq K_I^2 R_r \hat{R}_r \end{aligned}$$

*Entonces, el equilibrio trivial del sistema en lazo cerrado es estable asintótica y globalmente si  $\tau_L = 0$ . Cuando  $\tau_L \neq 0$  todas las trayectorias entran (en tiempo finito) a una bola centrada al origen de radio  $|\tau_L|$ .*

De igual forma que en la estabilidad local, este resultado es independiente del valor de referencia tanto de la norma del flujo de campo  $\beta_*$  y la velocidad  $\omega_*$ . Para la prueba de esta proposición véase [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] o [Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramírez, 1999]

La Proposición 3.3 establece que la región en el espacio paramétrico  $(R_r, K_P, K_I) \subset \mathfrak{R}_+^3$  donde  $h_i(R_r, K_P, K_I) > 0$ , con  $i = 1, 2, 3$ , corresponde a una región de estabilidad

global. Del resultado obtenido de estabilidad para el caso de que la resistencia es conocida de [Ortega, R. & Taoutaou, D., 1996], se sabe que esta región no es vacía, debido a que contiene el conjunto  $(\hat{R}_r, K_P, K_I) \subset \mathfrak{R}_+^3$ . Se Puede fijar el rango de la resistencia de rotor y estimar un intervalo admisible para las ganancias PI que preserve estabilidad global. Para la estimación del intervalo de desempeño tenemos el siguiente algoritmo

### Algoritmo para la estimación del Intervalo de Desempeño

**Paso 1** Entrada de datos: Valores numéricos para todos los parámetros del motor de inducción, la resistencia estimada de rotor  $\hat{R}_r > 0$  y las ganancias del controlador  $K_P > 0, K_I > 0$ .

**Paso 2** Defina  $R_r = \hat{R}_r$

**Paso 3** Checar las condiciones para estabilidad local ((3.16) o (3.17) o (3.18)) y estabilidad global (3.22). Si alguno no es satisfecho entonces  $R_r^{max}$  (el valor máximo que garantiza estabilidad global) es encontrado. Vaya al **paso 5**. Si ambas condiciones se cumplen proceda con el siguiente paso.

**Paso 4** Incremente el valor actual de  $R_r$  por un número pequeño  $\delta > 0$ , y vaya al **paso 3**

**Paso 5** Defina  $R_r = \hat{R}_r$ .

**Paso 6** Decrementa el valor actual de  $R_r$  por un número pequeño  $\delta > 0$

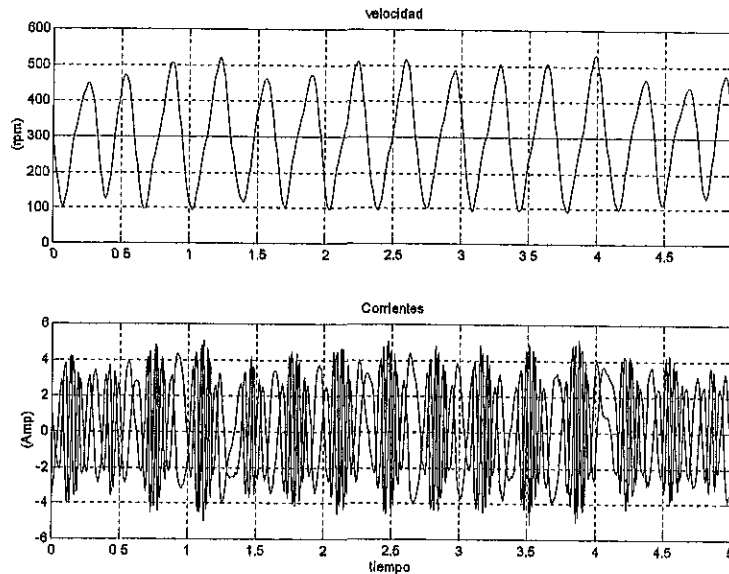
**Paso 7** Checar las condiciones para estabilidad local ((3.16) o (3.17) o (3.18)) y estabilidad global (3.22). Si alguno no es satisfecho entonces  $R_r^{min}$  (el valor mínimo que garantiza estabilidad global) es encontrado y la búsqueda del algoritmo termina. Si ambas condiciones se mantienen vaya al **paso 6**

## 3.6 Experimentación

El interés principal del presente trabajo es el de validar en forma experimental lo reportado en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] en el *banco de experimentos* para el motor de inducción que se encuentra ubicado en el Laboratorio de Automatización del Instituto de Ingeniería (II) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por lo que solo se presentan este tipo de resultados. Las características de este banco de experimento están expuestas en el Capítulo 5 de este escrito.

En un inicio se observó la frontera de Estabilidad-Inestabilidad de acuerdo a (3.15). Para esta finalidad, los valores que se le asignaron a las ganancias de nuestro controlador son: la ganancia de proporción  $K_P = 0.2$ ; la ganancia de integración  $K_I = 5$  y una resistencia estimada fija de rotor a  $\hat{R}_r = 20\Omega$ , que es grande respecto a su valor nominal (véase la Tabla 5.1 para los valores de los parámetros del motor).

En la Fig 3.2 se muestra el resultado obtenido trabajando el controlador a una velocidad de referencia de 300 rpm. Es importante decir que, para esta prueba en particular, la cota (3.15) es solamente de interés teórico.



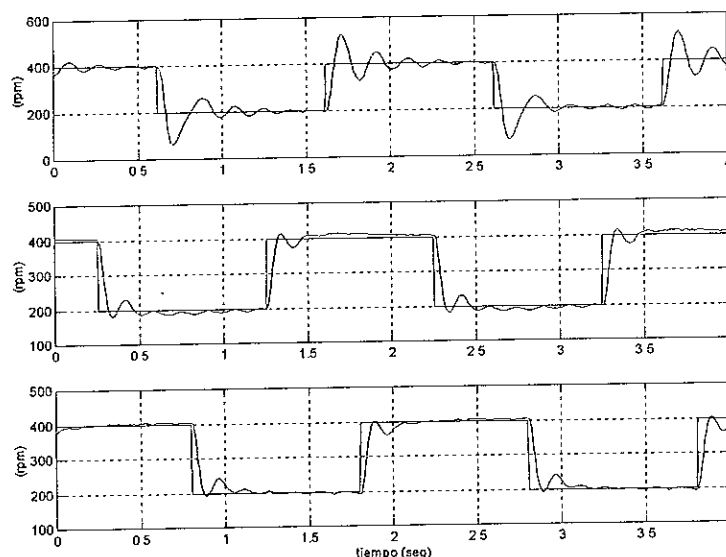
**Figura 3.2:** Inestabilidad Experimental

En dicha figura se presentan dos gráficas. La superior muestra tanto la referencia de velocidad, que es a 300 rpm, como la velocidad real, en rpms, versus tiempo, en segundos. Se observa que esta última no está estabilizada a la referencia (se puede decir que no hace un buen seguimiento de la referencia) pero que el motor en realidad no está inestable sino que solo oscila, entre 100 y 500 rpm, alrededor de la velocidad de referencia. En la gráfica inferior se tienen dos fases de las corrientes del motor, en amp. Se observa que éstas no son de una forma senoidal uniforme y su amplitud es variante y llega, en su máximo, casi a  $\pm 5$  amp.

De esto, podemos indicar que el algoritmo para la sintonización de las ganancias PI en sí es muy conservador y que el controlador (FOC) es más robusto de lo que indican los intervalos donde se asegura la estabilidad global. Podemos decir que dichos intervalos más que asegurarnos la estabilidad global del lazo cerrado del motor de inducción y el FOC, nos indican la región en que son mejor sintonizadas las ganancias del controlador.

Para cuestiones más prácticas fijamos el valor de resistencia de rotor estimada en  $\hat{R}_r = 2.5$  y evaluamos el intervalo de desempeño para  $K_P = 0.2$  y varios valores de  $K_I$ . Para el caso en que  $K_I = 5$  tenemos que el intervalo para la resistencia de rotor se ubica en  $[R_r^{min}, R_r^{max}] = [0.3010, 3.586]$ . Decrementado el valor de  $K_I$  a 0.5 tenemos el intervalo en  $[0.124, 5.4720]$  y por último poniendo a  $K_I$  en 0.1, obtenemos el intervalo de  $[0.039, 5.4720]$ .

Al realizar los experimentos con los valores de  $\hat{R}_r$ ,  $K_P$  y los tres de  $K_I$  obtenemos los resultados que observan en la Fig. 3.3. Es necesario mencionar que los resultados presentados son con un valor en la norma del flujo deseado de  $\beta_* = 0.4$ . Como se dijo anteriormente los intervalos de desempeño son independientes de  $\beta_*$  por lo que al sintonizar el controlador con los valores mencionados en el párrafo anterior, a distintos valores de la norma de flujo deseado, se observaban distintos comportamientos.

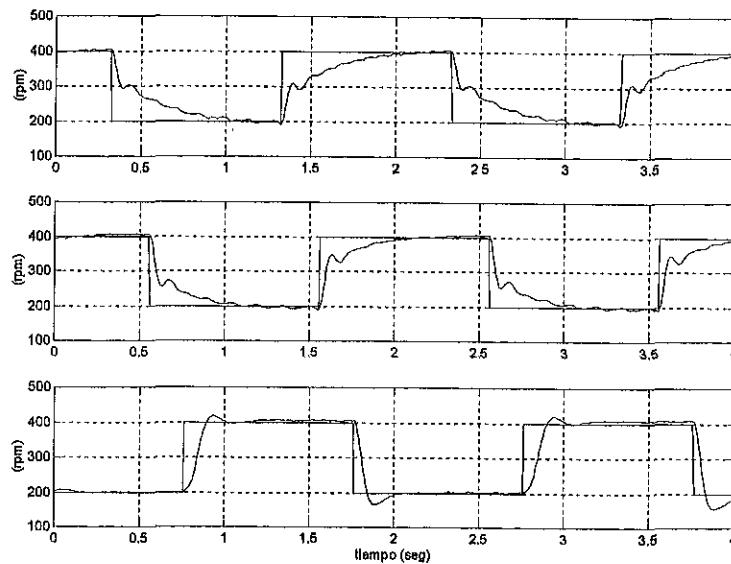


**Figura 3.3:** Resultado experimental de la respuesta de la velocidad angular del motor a diferentes sintonizaciones

Para la Fig. 3.3 tenemos que, para las tres gráficas, la resistencia de rotor estimada se fijó en  $\hat{R}_r = 2.5$ , la constante de proporción a  $K_P = 0.2$  y la misma señal de velocidad de referencia (una onda cuadrada desde los 200 a 400 rpm) sin olvidar que  $\beta_* = 0.4$ . En la gráfica superior de la Fig. 3.3 sintonizamos la ganancia integral a  $K_I = 5$  con un sobrepaso relativamente alto ya que para una referencia de 400 rpm llega a hacer de aproximadamente 500 rpm, mientras que la referencia de 200 rpm es alrededor de 100 rpm con un tiempo de asentamiento en ambas referencias de velocidad casi a 0.5 seg. Para la gráfica del centro se sintoniza a una ganancia integral de  $K_I = 0.5$  con un sobrepaso pequeño, casi 10 rpm más que las referencias de velocidad, con un tiempo de asentamiento de 0.2 seg pero tiene una respuesta

en estado estacionario de 5 rpm arriba de las referencias. En la gráfica inferior la ganancia de integración se sintoniza a  $K_I = 0.1$ , de la cual se puede ver que esta no tiene sobrepaso con un tiempo de asentamiento de 0.2 seg y un error en estado estacionario muy pequeño. Por lo tanto, se puede observar de la figura que conforme vamos disminuyendo la ganancia integral, se mejora el desempeño del transitorio de la velocidad angular del motor de inducción.

De una forma alterna y tomando en cuenta la Fig. 3.3, de que la mejor sintonización es con las ganancias  $K_P = 0.2$ ,  $K_I = 0.1$  y el mismo valor fijo de la resistencia de rotor, se realizó el experimento considerando estos valores y se pusieron distintos valores a  $\beta_*$ .



**Figura 3.4:** Resultado experimental de la respuesta de la velocidad angular del motor a diferentes valores del flujo

Para la gráfica superior de la Fig. 3.4 el valor de la norma del flujo de rotor es  $\beta_* = 0.8$ , mientras que para la del centro es  $\beta_* = 0.6$  y la inferior  $\beta_* = 0.2$ . Se puede ver que la respuesta en el transitorio de la velocidad angular, es distinta para cada valor de esta variable. Hay un mejor comportamiento en la última.

En este Capítulo, según lo reportado en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998], se obtienen unas reglas simples para la sintonización de las ganancias del FOC indirecto para el motor de inducción con lo que se mejorara el desempeño transitorio, con la observación muy importante de que todos los cálculos para encontrar los intervalos de desempeño se realizan fuera de línea y posteriormente se implantan en el experimento físico.

## Capítulo 4

# Optimización de Par en Motores de Inducción

El Capítulo 3 nos proporciona un algoritmo en donde, fuera de línea, podemos encontrar los intervalos en la resistencia de rotor para la sintonización de las ganancias del lazo PI del Control de campo Orientado Indirecto cuyas ecuaciones son (3.10). Pero como se menciona también en el desarrollo del capítulo anterior, estos intervalos no dependen de la norma del flujo del rotor deseada  $\beta_*$  y éste es un grado de libertad extra que tenemos en nuestro controlador que puede ser usado para optimizar el desempeño del sistema

Si bien los intervalos para la sintonización de las ganancias del lazo PI son independientes del valor de  $\beta_*$ , al momento de implantar la ley de control es necesario tener en cuenta dicha variable. Observamos que si de acuerdo a nuestro criterio proporcionamos de alguna forma arbitraria distintos valores para  $\beta_*$ , obtenemos distintas respuestas para las mismas sintonizaciones de ganancias del lazo PI. Hay distintas formas para encontrar algún valor de  $\beta_*$  y en la implantación para nuestro controlador, primero en simulación y después en forma física, utilizamos lo reportado en [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] para obtener la norma del flujo deseada óptima bajo las consideraciones hechas en dicho trabajo.

En su artículo [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] consideran el problema de calcular los valores de flujo de una forma óptima, más que un procedimiento *ad hoc*, cuya ventaja es el proveer una base sistemática para la elección de los flujos de referencia. Los valores del flujo óptimo se obtienen por la resolución de ecuaciones algebraicas de cuarto orden, y demuestra que se puede lograr de una manera rápida y eficiente tal que los cálculos en aplicaciones en tiempo real son posibles. Además, como los flujos son calculados en función de los parámetros de la máquina, los cálculos pueden ajustarse en línea autosintonizándose o por un método adaptivo para identificar

dichos parámetros en tiempo real.

## 4.1 Modelo Matemático del Motor de Inducción en Coordenadas de Flujo

El modelo del motor de inducción en el marco de referencia fijo al estator es dado por (2.36) y (2.37)

Si definimos un nuevo sistema de coordenada que sea giratorio, tenemos que

$$\rho \triangleq \arctan\left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a}\right) \quad (4.1)$$

$$\beta = \|\lambda_r\| \triangleq \sqrt{\lambda_a^2 + \lambda_b^2} \quad (4.2)$$

Las corrientes y voltajes son entonces transformado en este nuevo sistema de coordenadas como

$$u_{dq} \triangleq e^{-\mathcal{J}\rho} u_{ab} \quad i_{dq} \triangleq e^{-\mathcal{J}\rho} i_{ab} \quad (4.3)$$

con

$$e^{-\mathcal{J}\rho} = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & \sin(\rho) \\ -\sin(\rho) & \cos(\rho) \end{bmatrix}, \quad (e^{-\mathcal{J}\rho})^{-1} = (e^{-\mathcal{J}\rho})^T = e^{\mathcal{J}\rho}$$

$$\text{y } u_{dq} = [u_d, u_q]^T, \quad i_{dq} = [i_d, i_q]^T$$

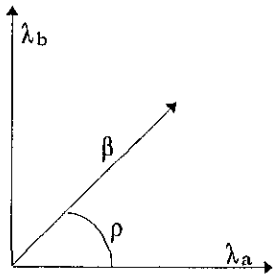


Figura 4.1: Flujo de rotor

Esto es, en lugar de trabajar con los flujos  $(\lambda_a, \lambda_b)$  usamos la representación de coordenadas polares donde  $\rho$  es el ángulo del flujo mientras que  $\beta$  es la magnitud del flujo ambas cantidades son referidas del rotor. De la Fig 4.1 se puede observar que  $\cos(\rho) = \lambda_a/\beta$  y  $\sin(\rho) = \lambda_b/\beta$ . Además, si tomamos en cuenta que los flujos también se pueden representar como  $\lambda_{dq} = e^{-\mathcal{J}\rho} \lambda_{ab}$ , donde  $\lambda_d = \beta$ , tenemos que  $\beta = \lambda_a \cos(\rho) + \lambda_b \sin(\rho)$  y que  $\lambda_q = 0$ .

Con todas estas consideraciones se obtiene el modelo matemático del motor de inducción en estas nuevas coordenadas, es decir, las variables  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $i_d$ ,  $i_q$  y  $\omega$ , y como entradas  $u_d$  y  $u_q$ . Para la obtención de dicho modelo, hay que derivar y luego hacer las sustituciones necesarias para este nuevo marco de referencia excepto para la ecuación (2.37) donde solo se realizan las sustituciones y que repercute en la ecuación de la aceleración angular. El nuevo modelo resultante es



$$\dot{\omega} = \mu\beta i_q - \frac{1}{D_m}\tau_L \quad (4.4)$$

$$\dot{\beta} = -\eta\beta + \eta L_{sr} i_d \quad (4.5)$$

$$\dot{\rho} = n_p\omega + \eta L_{sr} \frac{i_q}{\beta} \quad (4.6)$$

$$\dot{i}_d = -\gamma i_d + \eta\vartheta\beta + n_p\omega i_q + \eta L_{sr} \frac{i_q^2}{\beta} + \frac{u_d}{\sigma L_s} \quad (4.7)$$

$$\dot{i}_q = -\gamma i_q - n_p\omega\vartheta\beta - n_p\omega i_d - \eta L_{sr} \frac{i_d i_q}{\beta} + \frac{u_q}{\sigma L_s} \quad (4.8)$$

con

$$\eta = \frac{1}{T_r} \triangleq \frac{R_r}{L_r} \quad \vartheta \triangleq \frac{L_{sr}}{\sigma L_r L_s} \quad \mu \triangleq \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r}$$

$$\sigma = 1 - \frac{L_{sr}^2}{L_s L_r} > 0 \quad \gamma = \frac{R_s}{L_s \sigma} + \frac{L_{sr}^2}{L_s \sigma L_r T_r}$$

donde  $\omega = \dot{q}_m$  la velocidad angular

El modelo anterior está basado en un motor de inducción de dos fases, por lo que si tenemos más de dos fases, que es nuestro caso, la constante  $\mu$  toma la forma

$$\mu \triangleq 2 \frac{n_p}{n_{ph}} \frac{L_{sr}}{D_m L_r}$$

donde  $n_{ph}$  es el número de fases.

## 4.2 Trayectorias del Flujo de Referencia

Una optimización depende no solo de los objetivos que uno busca, sino también del tipo de solución deseada, como por ejemplo simplicidad de implantación. En otras palabras, la formulación juega un papel muy importante para resolver el problema y obtener una solución útil. Considere:

- El sistema (4.4)-(4.8) en estado estable (a velocidad constante) para permitirnos una solución aceptable.
- Encontrar los flujos de referencia  $\beta_{ref}$  para el flujo  $\beta$ , tal que optimice (máximo para motor o mínimo para generación) el par, satisfaciendo la restricción  $u_d^2 + u_q^2 \leq V_{max}^2$  e  $i_d^2 + i_q^2 \leq I_{max}^2$  donde  $V_{max}$  y  $I_{max}$  son límites de voltaje y corriente fijos, respectivamente.

Las verdaderas restricciones físicas son de la forma  $|u_a| \leq V_{max}$ ,  $|u_b| \leq V_{max}$ ,  $|i_{sa}| \leq I_{max}$ ,  $|i_{sb}| \leq I_{max}$ . Si las restricciones son alcanzadas a velocidad constante los voltajes de fase  $u_a$ ,  $u_b$  serán de la forma  $V_{max} \cos(n_p \omega + \phi)$  y  $V_{max} \sin(n_p \omega + \phi)$ , respectivamente, con expresiones similares para las corrientes. Además,  $u_{sa}^2 + u_{sb}^2 = V_{max}^2 = u_d^2 + u_q^2$  y  $i_{sa}^2 + i_{sb}^2 = I_{max}^2 = i_d^2 + i_q^2$ , que en realidad son las cotas que se dan en la segunda condición de la formulación.

Para proceder con la formulación anterior, el sistema (4.4)-(4.8) está en estado estable cuando las derivadas son cero, es decir

$$0 = \mu \beta i_q - \frac{\tau_L}{D_m} \quad (4.9)$$

$$0 = -\beta + L_{sr} i_d \quad (4.10)$$

$$0 = u_d - \left( \frac{L_{sr}^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_d + \frac{\beta R_r L_{sr}}{L_r^2} + \sigma L_s n_p \omega i_q + \frac{\sigma L_s R_r L_{sr} i_q^2}{L_r \beta} \quad (4.11)$$

$$0 = u_q - \left( \frac{L_{sr}^2 R_r}{L_r^2} + R_s \right) i_q - \frac{n_p \omega \beta L_{sr}}{L_r} - \sigma L_s n_p \omega i_d - \frac{\sigma L_s R_r L_{sr} i_q i_d}{L_r \beta} \quad (4.12)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = n_p \omega + \frac{L_{sr} i_q}{T_r \beta} = cte. \quad (4.13)$$

donde  $T_r = L_r/R_r$ . De (4.10) sabemos que  $\beta = L_{sr} i_d$ . Además de usar  $T_s = L_s/R_s$  y haciendo la sustitución de  $\sigma$  en (4.12), nos resulta que (4.11) y (4.12) se simplifican a

$$\frac{u_d}{R_s} = i_d - \sigma T_s i_q \left( n_p \omega + \frac{i_q}{T_r i_d} \right) \quad (4.14)$$

$$\frac{u_q}{R_s} = i_q + T_s i_d \left( n_p \omega + \frac{i_q}{T_r i_d} \right) \quad (4.15)$$

las cuales son las corrientes del devanado de estator del motor en estado estacionario.

### 4.2.1 Optimización de Par con Corriente Acotada

Considerando el flujo de referencia obtenido por maximización/minimización, teniendo en cuenta el segundo punto de la formulación y usando (4.10), tenemos que el par es

$$\tau = k i_d i_q \quad \text{donde} \quad k \triangleq 2 \left( \frac{n_p}{n_{ph}} \right) \left( \frac{L_{sr}^2}{L_r} \right)$$

sujeta a la restricción  $i_d^2 + i_q^2 = I^2 \leq I_{max}^2$ .

Definiendo  $\delta \triangleq i_q/i_d$ , reescribimos el par como

$$\tau = k i_d i_q = \frac{k I^2 \delta}{1 + \delta^2}$$

Derivando esta última ecuación respecto a  $\delta$ , se observa que los puntos mínimo/máximo corresponde a  $\delta = \pm 1$  con la corriente  $I = I_{max}$ . La corriente directa es positiva,  $i_d > 0$ , por lo que se pone el signo más (+) si  $\tau > 0$ , es decir, ( $\delta \equiv 1$ ), mientras que el signo menos (-) se pone cuando  $\tau < 0$ , ( $\delta \equiv -1$ ). Checando el signo de la segunda derivada  $d^2\tau(\delta)/d\delta^2$ , podemos ver que el signo mas (+) corresponde a un máximo único, mientras que el signo menos (-) corresponde a un mínimo único.

Con lo anterior, sabemos que con la restricción de corriente solamente tenemos dos posibilidades en nuestra formulación. Para el caso modo motor necesitamos que  $\delta = 1$  con lo que el par se reduce a

$$\tau = \frac{kI_{max}^2}{2}$$

para que éste sea máximo.

## 4.2.2 Optimización de Par con Voltaje Acotado

Si consideramos el flujo de referencia que es obtenido por la maximización del par y como en la formulación de la restricción de corriente, teniendo presente (4.10)

$$\tau = 2 \frac{n_p}{n_{ph}} \frac{L_{sr}\beta i_q}{L_r} = k i_d i_q, \quad \text{donde } k \triangleq 2 \frac{n_p}{n_{ph}} \frac{L_{sr}^2}{L_r}$$

con la restricción en voltaje  $u_d^2 + u_q^2 = V^2 \leq V_{max}^2$ .

Una vez mas, con  $\delta = i_q/i_d$ , y considerando (4.14) y (4.15) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{R_s^2} &= \frac{(u_d^2 + u_q^2)}{R_s^2} \\ &= i_d^2 \left[ \left( 1 - \sigma T_s \delta (n_p \omega + \frac{\delta}{T_r}) \right)^2 + \left( \delta + T_s (n_p \omega + \frac{\delta}{T_r}) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por otro lado, el par se puede expresar como

$$\tau = k i_d i_q = k \delta i_d^2 \quad (4.17)$$

y usando la expresión previa para eliminar  $i_d^2$ , resulta en

$$\tau(\delta) = \frac{(kV^2/R_s^2)\delta}{[(1 - \sigma T_s \delta (n_p \omega + \delta/T_r))^2 + (\delta + T_s (n_p \omega + \delta/T_r))^2]} \quad (4.18)$$

El denominador de (4.18) es siempre positivo, de manera que el par es positivo, ( $\tau > 0$ ), para  $\delta > 0$  mientras que el par es negativo, ( $\tau < 0$ ), para  $\delta < 0$ . Además,

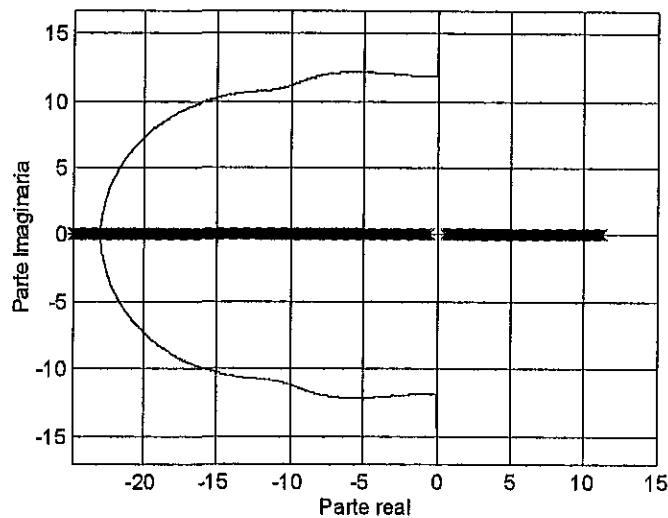
como el par es proporcional a  $V^2$ , el par óptimo alcanzable es obtenido por la elección de  $\delta$  para optimizar (4.18) con  $V = V_{max}$ . Para localizar los máximos y mínimos de  $\tau$  derivamos (4.18), lo que nos resulta

$$\frac{\partial \tau}{\partial \delta} = \frac{(kV^2/R_s^2)p(\delta)}{[(1 - \sigma T_s \delta (n_p \omega + \delta/T_r))^2 + (\delta + T_s (n_p \omega + \delta/T_r))^2]^2} = 0 \quad (4.19)$$

donde

$$p(\delta) = -3\sigma^2 \left(\frac{T_s}{T_r}\right)^2 \delta^4 - 4\sigma^2 \left(\frac{T_s}{T_r}\right) (T_s n_p \omega) \delta^3 + \left(2\sigma \left(\frac{T_s}{T_r}\right) - \sigma^2 (T_s n_p \omega)^2 - \left(1 + \left(\frac{T_s}{T_r}\right)\right)^2\right) \delta^2 + (1 + (T_s n_p \omega)) \quad (4.20)$$

Las soluciones de  $p(\delta) = 0$ , que es un polinomio de cuarto orden en  $\delta$ , dan los valores de  $\delta$  correspondientes a los mínimos y máximos del par. La fig 4.2 es una gráfica de las cuatro raíces de (4.20) con los parámetros del motor utilizado en los experimentos variando la velocidad desde 0 a 8000 rpm.



**Figura 4.2:** Las cuatro raíces de la ecuación de  $\delta$  para una velocidad de 0 a 8000 rpm

Consideremos que la velocidad es positiva  $\omega > 0$  y que el par es positivo,  $\tau > 0$ , tal que la máquina de inducción esté funcionando como motor. En este caso  $\delta$  será positiva cuando las corrientes  $i_d$  e  $i_q$  sean ambas positivas. Una aplicación directa de la prueba de Routh muestra que hay una única raíz de  $p(\delta)$  en el semiplano derecho para  $\omega > 0$ , por lo tanto la raíz será positiva real. Además,  $\partial^2 \tau / \partial \delta^2 < 0$ , nos asegura que esta única raíz positiva corresponde a un máximo global. El valor asintótico de esta raíz se encuentra dividiendo (4.20) por  $\sigma^2 (T_s/T_r)^2 (T_s n_p \omega)^2$  y haciendo que

$\omega \rightarrow \infty$ , de donde se observa que la raíz positiva de  $\delta$  nos lleva a  $1/\sigma$  y por lo tanto que  $\tau(1/\sigma) \rightarrow (kV^2/R_s^2)/2\sigma(T_s n_p \omega)^2$

Si  $\omega = 0$  en (4.20) obtenemos

$$3\sigma^2 \left(\frac{T_s}{T_r}\right)^2 \delta^4 + \left[ \left(\frac{T_s}{T_r}\right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{T_s}{T_r}\right) + 1 \right] \delta^2 - 1 = 0$$

con

$$a = 3\sigma^2 \left(\frac{T_s}{T_r}\right)^2 \quad b = \left(\frac{T_s}{T_r}\right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{T_s}{T_r}\right) + 1 \quad y \quad c = -1$$

tenemos que

$$\delta^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De esta última ecuación sabemos que  $-4ac > 0$  y  $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$ , por lo que si tomamos en cuenta el signo (-) de  $\delta^2$  obtenemos dos raíces imaginarias puras. Si consideramos el signo (+) tenemos dos raíces reales, una positiva y la otra negativa, tal que si la raíz positiva es  $\delta_{pos}$ , la raíz negativa es  $\delta_{neg} = -\delta_{pos}$ . Para nuestro caso en particular, con los parámetros del motor utilizado (Tabla 5.1), tenemos que las raíces imaginarias son  $\pm 16.0539i$  y las raíces reales son  $\pm 0.5709$ . En el caso de las raíces imaginarias puras, éstas hacen un recorrido desde que son un par de números complejos conjugados hasta llegar al eje negativo de los reales, mientras que la raíz positiva llega hasta 11.1817 y la raíz negativa a  $-197.5301$ . Esto se puede observar en la Fig 4.2, excepto el valor final de la raíz negativa que solo se presenta hasta -25 unidades de la parte real.

### Solución numérica de la ecuación de cuarto orden acotada por voltaje

Una solución aproximada en forma cerrada para  $\delta$  se puede encontrar si el deslizamiento no normalizado  $s \triangleq i_q/(T_r i_d)$  es pequeño comparado con la frecuencia de estator. Esto es, supongamos que

$$n_p \omega + \frac{i_q}{T_r i_d} \cong n_p \omega$$

tal que (4.14) y (4.15) se simplifican a

$$\frac{u_d}{R_s} = i_d - \sigma T_s i_q n_p \omega \quad (4.21)$$

$$\frac{u_q}{R_s} = i_q + T_s i_d n_p \omega \quad (4.22)$$

para obtener que (4.18) sea de la forma

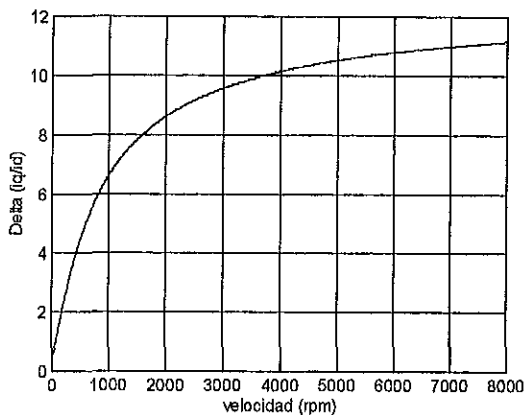
$$\tau(\delta) = \frac{(kV^2/R_s^2)\delta}{\left[(1 - \sigma T_s \delta n_p \omega)^2 + (\delta + T_s n_p \omega)^2\right]} \quad (4.23)$$

Derivando (4.23) e igualando a cero,  $\partial\tau/\partial\delta = 0$ , llegamos a

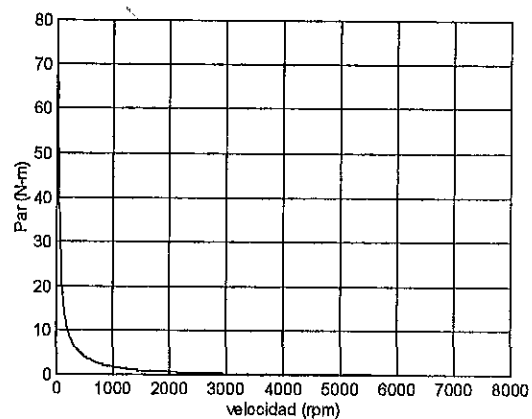
$$\delta^2 = \frac{1 + (T_s n_p \omega)^2}{1 + (\sigma T_s n_p \omega)^2} \quad (4.24)$$

A altas velocidades en donde la expresión  $(\sigma T_s n_p \omega)^2 \gg 1$ , la ecuación (4.24) se reduce a  $\delta \cong \pm 1/\sigma$ . Ahora bien, la solución  $\delta = 1/\sigma$  corresponde a un máximo global para el par positivo.

Las soluciones de (4.20) se pueden encontrar con un algoritmo Newton-Raphson usando aproximaciones superiores para inicializar el algoritmo. Usando una inicialización con la raíz positiva de (4.24) en un programa en MATLAB se observa que en seis iteraciones se llega a una solución  $\delta > 0$  para un rango de velocidad de 0 a 8000 rpm.



**Figura 4.3:** velocidad vs. delta considerando restricción de voltaje



**Figura 4.4:** velocidad vs. par considerando restricción de voltaje

En las Fig. 4.3 y 4.4 se muestran las simulaciones realizadas con los parámetros del motor de inducción que se proporcionan en la Tabla 5.1 y que son los que corresponden al motor usado en el Laboratorio de Automatización del Instituto de Ingeniería de la UNAM. En dichas simulaciones se utilizó el modo motor con una velocidad de referencia que varía desde 0 a 8000 rpm, obteniendo las gráficas presentadas en las Figuras 4.3 y 4.4. El valor de  $\delta$  a 8000 rpm con los parámetros del motor es de 11.1451 que está muy cerca de  $1/\sigma$  y de igual forma, el valor obtenido a la misma velocidad para el par es de  $0.0018398\text{N}\cdot\text{m}$ , también relativamente muy cerca de  $(kV^2/R_s^2)/2\sigma(T_s n_p \omega)^2$ . En las gráficas de las Fig. 4.3 y 4.4 se puede visualizar lo antes dicho.

### 4.3 Optimización de Par con Voltaje y Corriente Acotados

Típicamente, el motor de inducción es usado de tal forma que tanto la restricción de voltaje como la de corriente sean limitantes. Por ejemplo, cuando el motor empieza girar a velocidades pequeñas, hay una pequeña fuerza contraelectromotriz y como consecuencia un aumento de corriente, resultando que alcanzamos los límites de corriente, mientras que a altas velocidades, dominará la fuerza contraelectromotriz y estaremos en los límites del voltaje. Los resultados encontrados en las secciones anteriores podemos combinarlos para tomar en cuenta cualquier combinación de límites de voltaje y corriente. Si de (4.18) definimos

$$Q(\delta, \omega) \triangleq \frac{\delta/R_s^2}{\left[ \left( 1 - \sigma T_s \delta \left( n_p \omega + \frac{\delta}{T_r} \right) \right)^2 + \left( \delta + T_s \left( n_p \omega + \frac{\delta}{T_r} \right) \right)^2 \right]}$$

entonces (4.18) se reescribe como<sup>1</sup>

$$\tau(\delta) = kV^2 Q(\delta, \omega) \quad (4.25)$$

y en la sección 4.2.2 se mostró que  $\tau(\delta) = kI^2 \delta / (1 + \delta^2)$ . Con esto, podemos formular el problema como sigue.

Dado

$$\tau(\delta) = kV^2 Q(\delta, \omega) = \frac{kI^2 \delta}{(1 + \delta^2)}$$

encontrar  $\delta$  de tal forma que el par  $\tau$  sea optimizado (máximo para modo motor o mínimo para modo generador) con  $V^2 \leq V_{max}^2$  e  $I^2 \leq I_{max}^2$ .

Como  $V^2$  e  $I^2$  aparecen linealmente en estas expresiones de par, el par óptimo para cualquier  $\delta$  resultará en  $V^2 = V_{max}^2$  o  $I^2 = I_{max}^2$ , o ambos. Conocemos que para un  $V$  fijo,  $\tau$  es optimizado para algún  $\delta$  satisfaciendo  $Q'(\delta, \omega) \equiv dQ(\delta, \omega)/d\delta = 0$ , mientras que para un  $I$  fijo,  $\tau$  es optimizado para  $\delta = \pm 1$ . Considere  $\delta_{opt}$ , el valor de  $\delta$  que optimice  $\tau$  bajo límites de corriente y voltaje. Entonces, a cada velocidad  $\omega$ , uno de los siguientes tres casos deberá mantenerse:

Caso I). La corriente fija

$$I^2 = I_{max}^2 \quad V^2 < V_{max}^2 \quad \Rightarrow \delta_{opt} = \pm 1$$

<sup>1</sup> Aquí  $Q(\delta, \omega)$  es independiente de las coordenadas generalizadas definidas en el Capítulo 2

Caso II). El voltaje fijo

$$V^2 = V_{max}^2 \quad I^2 < I_{max}^2 \quad \Rightarrow Q'(\delta_{opt}, \omega) = 0$$

Caso III). Voltaje y corriente fijo

$$I^2 = I_{max}^2 \quad V^2 = V_{max}^2$$

$$\Rightarrow kV_{max}^2 Q(\delta_{opt}, \omega) = \frac{kI_{max}^2 \delta_{opt}}{(1 + \delta_{opt}^2)}$$

El siguiente algoritmo nos proporciona el par óptimo  $\tau_{opt}$  con su correspondiente  $\delta_{opt}$  para el modo motor:

1. Ponga  $\delta = 1$  y calcule  $\tau_1 = kI_{max}^2 \delta_1 / (1 + \delta_1^2)$  y  $V_1^2 = \tau_1 / kQ(\delta_1, \omega)$ . Si  $V_1^2 \geq V_{max}^2$ , entonces  $\tau_1$  no puede ser el par óptimo y procedase con el paso 2. En caso contrario, almacenar el par  $(\delta_1, \tau_1)$  como un posible candidato para  $(\delta_{opt}, \tau_{opt})$  y procedase al paso 2.
2. Resuelva  $Q'(\delta, \omega) = 0$  para encontrar sus raíces. Tome la única raíz positiva, la cual será el máximo global, y denotelo como  $\delta_2$ . Calcule  $\tau_2 = kV_{max}^2 Q(\delta_2, \omega)$  y  $I_2^2 = \tau_2(1 + \delta_2^2) / k\delta_2$ . Si  $I_2^2 \geq I_{max}^2$ , entonces proceda al paso 3. En caso contrario, almacenar el par  $(\delta_2, \tau_2)$  como un posible candidato para  $(\delta_{opt}, \tau_{opt})$  y procedase al paso 3.
3. Resuelva  $V_{max}^2 Q(\delta, \omega) = I_{max}^2 \delta / (1 + \delta^2) = \tau_3 / k$  y extraiga el valor de  $\delta_3$  proporcionando el máximo valor de  $\tau_3$  y almacenar  $(\tau_3, \delta_3)$  como un posible candidato para el par máximo.
4. Elija  $\tau_{opt}$  como el par máximo de los candidatos de los pasos (1)-(3) y  $\delta_{opt}$  como el valor correspondiente de  $\delta$

Para considerar las restricciones tanto para voltaje como corriente se procedió de la siguiente manera. Físicamente estamos sujetos al inversor de corrientes, el cual nos proporciona las señales de control hacia el motor, por lo que los límites están de acuerdo a lo proporcionado en el manual de operación del inversor. La tensión nominal a la entrada del inversor es de una alimentación trifásica de 208 volts fase-fase, que si consideramos una sola fase (dividiendo entre  $\sqrt{3}$ ) es de 120.0889 volts, por lo que es razonable considerar por cuestiones de seguridad el voltaje máximo a 80 volts. De igual forma, la corriente de entrada al inversor es de 5 amp. rms/12 amp. pico por fase, lo que tendremos una amplitud de  $\pm 6$  amp., por lo que de igual forma por seguridad tomamos una amplitud de 5 amp. para la restricción de corriente.



### Solución numérica de la ecuación de cuarto orden acotado en voltaje y corriente

En el paso 3 del algoritmo antes descrito, se utilizó un algoritmo Newton-Raphson, como en el caso de la sección 4.2.2 para resolver el ángulo  $\delta$  óptimo, es decir, el valor de  $\delta$  cuando se toman en cuenta las restricciones de voltaje y de corriente simultáneamente. Para determinar este  $\delta$  se requiere resolver

$$\begin{aligned} \frac{V_{max}^2}{R_s^2 I_{max}^2} (1 + \delta^2) &= \sigma^2 \left( \frac{T_s}{T_r} \right)^2 \delta^4 + 2\sigma^2 \left( \frac{T_s}{T_r} \right) T_s n_p \omega \delta^3 \\ &+ \left[ \left( 1 + \left( \frac{T_s}{T_r} \right) \right)^2 + (\sigma T_s n_p \omega)^2 - 2\sigma \left( \frac{T_s}{T_r} \right) \right] \delta^2 \\ &+ 2T_s n_p \omega \left( 1 + \left( \frac{T_s}{T_r} \right) - \sigma \right) \delta + \left( 1 + (T_s n_p \omega)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Desafortunadamente, no se puede hacer un análisis completo como (4.20) debido a que el coeficiente de  $\delta$  en grado 1 no es cero como en el caso de la ecuación (4.20). Para lograr el par máximo se utiliza una inicialización de  $\delta = 1$  (condición reportada en [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995])

### Resultados numéricos del algoritmo

Como resultado de la simulación del algoritmo completo, podemos observar lo siguiente: Con la restricción de corriente se obtiene un ángulo  $\delta$  positivo que se refleja solo en el intervalo de velocidad de 0 a 372 rpm. En la restricción de voltaje se tiene un  $\delta$  positivo a partir de 1620 hasta 8000 rpm. Para ambas restricciones se observa que desde 0 a aproximadamente 310 rpm tiene un ángulo  $\delta$  que se vuelve tanto negativa como positiva, después de los 310 rpm hasta 2464.3 rpm solamente es positiva y de ahí hasta los 8000 rpm se vuelve negativa. En la Fig. 4.5 están los tres deltas obtenidos y en la Fig. 4.6 los tres pares, ambas figuras muestran los resultados obtenidos de los tres primeros pasos del algoritmo.

Los valores óptimos, tanto para el par como para el delta, se pueden observar de las Figuras 4.7 y 4.8. Ambas gráficas están en un rango de velocidad desde 0 a 8000 rpm vs par óptimo  $\tau_{opt}$  y delta óptimo  $\delta_{opt}$  respectivamente. Se visualiza para cualquiera de las figuras que para el rango en la velocidad de 0 a 372 rpm, predomina la restricción de corriente el cuál es el paso 1 del algoritmo. De 372 a 2468 rpm es dominado por el paso tres del algoritmo, es decir, predominan las restricciones tanto de voltaje como de corriente. Desde 2468 a 8000 rpm está presente solo la restricción de voltaje.

Nuestro interés es el obtener la norma del flujo de rotor deseada óptima y de acuerdo

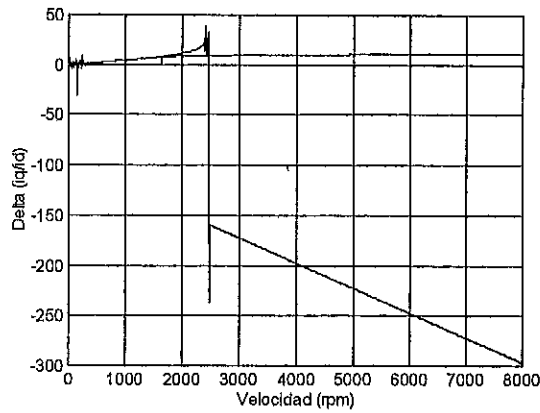


Figura 4.5: Velocidad (rpm) vs. Delta ( $\frac{i_q}{i_d}$ )

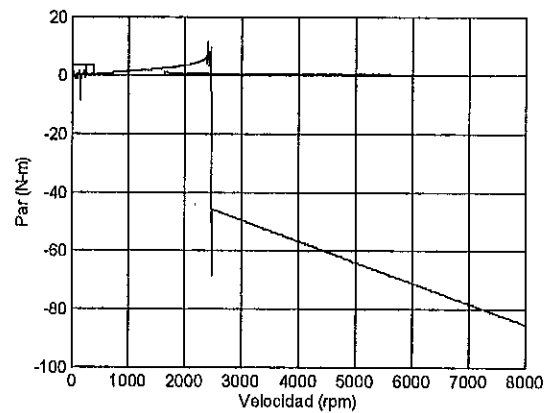


Figura 4.6: Velocidad (rpm) vs. Par (N-m)

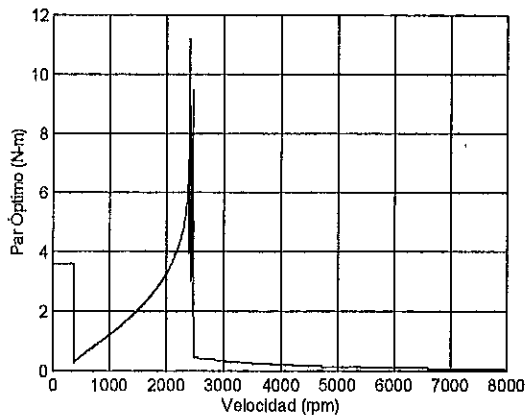


Figura 4.7: Velocidad (rpm) vs. Par Máximo Óptimo (N-m)

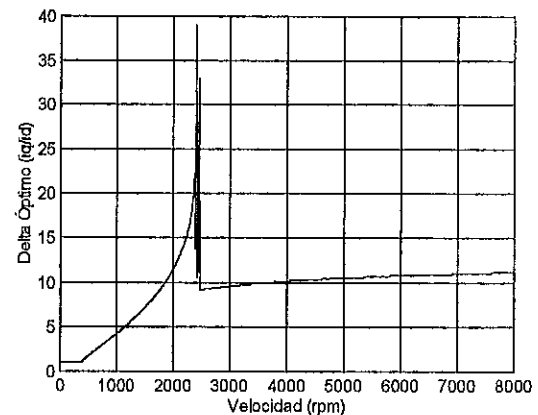


Figura 4.8: Velocidad (rpm) vs. Delta Óptimo

a lo establecido en este capítulo sabemos de (4.17) que la corriente de directa es

$$i_d^2 = \frac{\tau_{opt}}{k\delta_{opt}} \quad (4.27)$$

y de (4.10) tenemos que la norma del flujo de rotor deseada óptima será de la forma

$$\beta_{opt} = L_{sr}i_d \quad (4.28)$$

En la Fig. 4.9 se tiene el flujo obtenido de acuerdo al algoritmo y las ecuaciones anteriores. De 0 a 368 rpm tenemos que el flujo se mantiene constante a 0.787 Wb. De 368 a 372 rpm cae el flujo a 0.2226 Wb para mantenerse también constante hasta 2468 rpm. A partir de ahí el flujo cae paulatinamente hasta los 8000 rpm para tener un valor de 0.031 Wb.

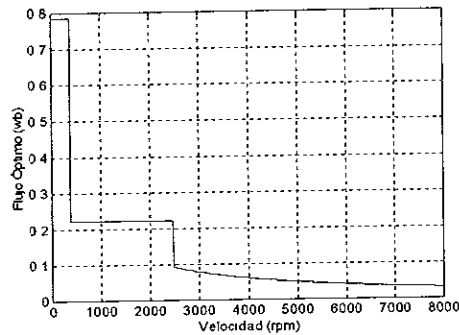


Figura 4.9: Velocidad (rpm) vs. Flujo Óptimo (Wb)

## 4.4 Resultados Experimentales para Sintonizar el FOC con el $\beta_*$ Óptimo

En el capítulo anterior obtuvimos unos intervalos de sintonización para las ganancias del lazo interno PI del error de velocidad en el Control por Campo Orientado (FOC) independiente de la norma del flujo de rotor. De acuerdo a lo desarrollado en este capítulo se puede obtener una norma de flujo de rotor deseada óptima considerando que se obtiene el par máximo al considerar restricciones de voltaje y corriente.

En el banco de experimentos para el motor de inducción, expuesto en el Capítulo 5, se implantó en forma física la norma del flujo de rotor deseada óptima, obtenida al aplicar el algoritmo que se propone en [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] (revisado en este capítulo) junto a la sintonización de las ganancias del lazo interno PI al error de velocidad del FOC, visto en el capítulo previo.

Según los resultados obtenidos en el Capítulo anterior y observando la Fig. 3.3, se fijó la resistencia de rotor estimada a  $\hat{R}_r = 2.5$ , la ganancia de proporción a  $K_P = 0.2$  y la ganancia de integración  $K_I = 0.1$ , esto por el hecho de que con estos valores se observa que hay un mejor desempeño en el transitorio de la velocidad del motor de inducción. Como se mencionó en la sección anterior, la restricción de voltaje se fijó en  $V_{max} = 80$  volts y la de corriente a  $I_{max} = 5$  amps.

Considerando lo que se plantea en el párrafo anterior respecto a la sintonización de las ganancias del lazo PI del controlador, el algoritmo propuesto en el artículo de [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] para la optimización de par, junto con los parámetros puestos en la Tabla 5.1, se implantó primero en simulación en un modelo de Simulink. Posteriormente, también en simulación, se acopló al Controlador por Campo Orientado para proporcionar a este el valor del flujo óptimo de acuerdo a la velocidad de referencia. Una vez que se tuvieron resultados satisfactorios de esto último, se implantó de una manera física al banco de experimentos.

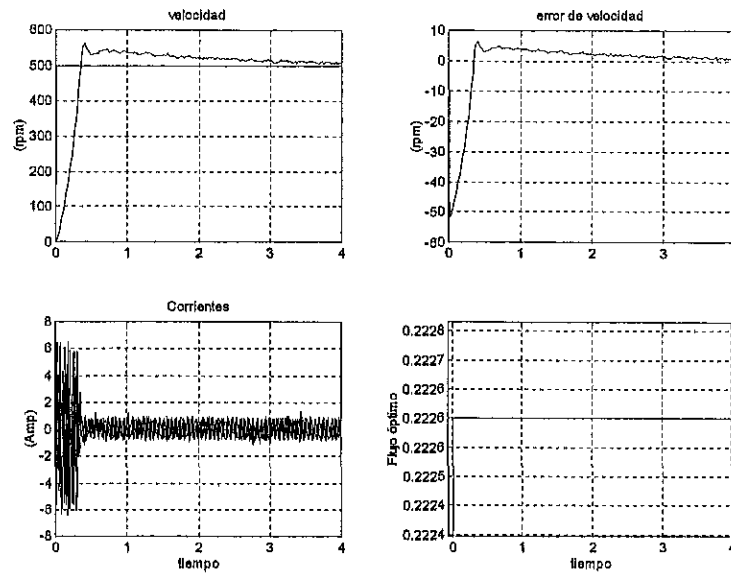


Figura 4.10: Resultado experimental de la respuesta en el arranque a 500 rpm

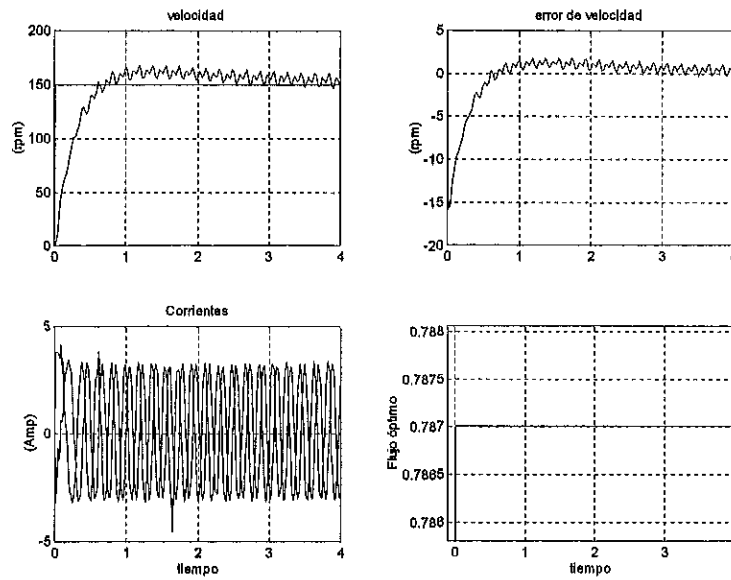


Figura 4.11: Resultado experimental de la respuesta en el arranque a 150 rpm

En las Fig. 4.10 y 4.11 se muestran los resultados experimentales del FOC junto con el valor óptimo de la norma del flujo de rotor. Para ambas figuras los experimentos fueron realizados desde arranque (velocidad cero) hasta, en una, a 150 rpm (Fig. 4.11) y la otra a 500 rpm (Fig. 4.10) que de acuerdo a las simulaciones los valores de la norma del flujo de rotor óptimo deben de ser distintos en estas dos velocidades (véase la Fig 4.9, en la sección anterior).

En ambas figuras se muestran 4 gráficas. En la gráfica superior de la izquierda se muestra la velocidad de referencia y la velocidad real. En la parte superior de la derecha el error de ambas velocidades. En la gráfica inferior de la izquierda la respuesta de las corrientes reales de dos de las fases del motor. En la parte inferior de la derecha la norma de el flujo de rotor óptima.

Bajo las restricciones impuestas, vemos que el desempeño es distinto (los valores de la norma del flujo de rotor no son iguales) para las dos velocidades. Se observa que hay un mejor desempeño transitorio en la respuesta de la referencia de 500 rpm que en la de 150. A esto le podemos agregar que la respuesta en la corriente también es distinta, mientras que la de referencia de 500 rpm la corriente en los primeros instantes (aproximadamente 0.5 segundos) necesita una amplitud de cerca de 6 amp. pico-pico de la corriente y luego disminuye a casi 1 apm. pico-pico. En la otra figura de referencia de 150 rpm se observa que la respuesta de la corriente es simétrica en todo tiempo (3 apm. pico-pico)

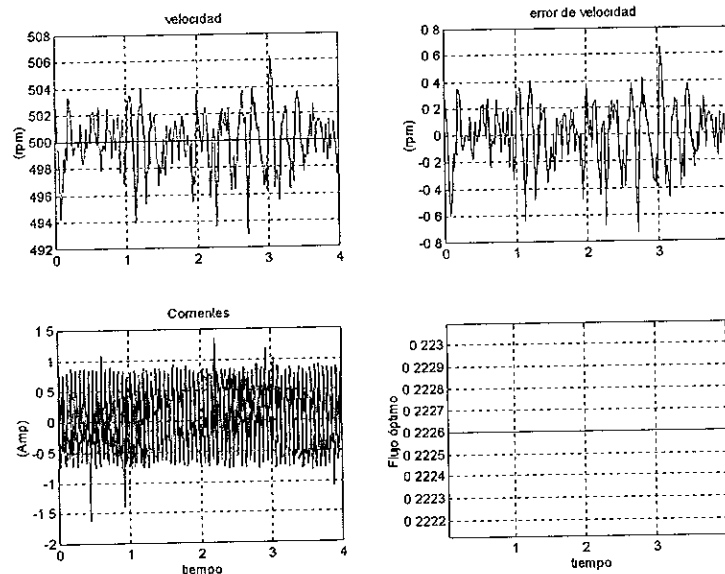
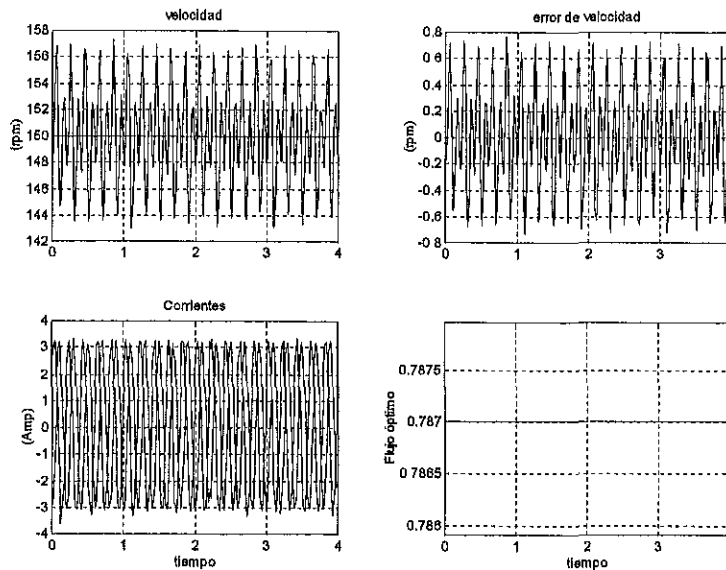


Figura 4.12: Resultado experimental de la respuesta en estado estacionario a 500 rpm

En las Fig. 4.12 y 4.13 se observa el comportamiento de la misma sintonización y las mismas velocidades respectivamente, pero la respuesta es en estado estacionario.



**Figura 4.13:** Resultado experimental de la respuesta en estado estacionario a 150 rpm

Para la Fig. 4.12 se observa que tiene un seguimiento aceptable respecto a la velocidad de referencia ya que el error es muy pequeño, menos de 0.6 rpm pico-pico, esto de las dos gráficas de la parte superior de la figura. También en la parte inferior derecha vemos que el valor del flujo es como se predice en la simulación. En lo que respecta de las corrientes, la gráfica inferior izquierda, estas están alrededor de 1 amp. pico-pico.

En cuanto a la Fig. 4.13, cuya referencia es de 150 rpm, se ve que el comportamiento es diferente con respecto al de referencia de 500 rpm. El error de velocidad es un poco menos de 1 rpm pico-pico, mientras que la corriente se mantiene en alrededor de los 3 amp. pico-pico. El flujo también es diferente, igual como se predice en la simulación.

Si de nueva cuenta se observa la Fig. 4.9, el valor óptimo del flujo cambia en los 372 rpm de un valor constante de 0.787 Wb a 0.2226 Wb. El otro cambio es a la velocidad de 2468 rpm. Por lo que es deseable visualizar este hecho en forma física y de alguna forma sería el realizar un cambio de velocidad de referencia de nuestro controlador en dichas velocidades críticas. Por restricciones propias de nuestro banco de experimento solo se pudo realizar la primera de las velocidades en cuestión.

En la gráfica superior izquierda de la fig. 4.14 está la respuesta de la velocidad real a una señal de referencia de velocidad que va desde los 350 rpm hasta los 450 rpm. Se observa que el comportamiento del transitorio es distinto para cada referencia. Hay mejor comportamiento a la velocidad de referencia de 450 rpm cuyo valor de  $\beta_*$  es de 0.2226 Wb. Hay mucho sobrepaso en el instante del levantamiento, menos de 0.1 seg,

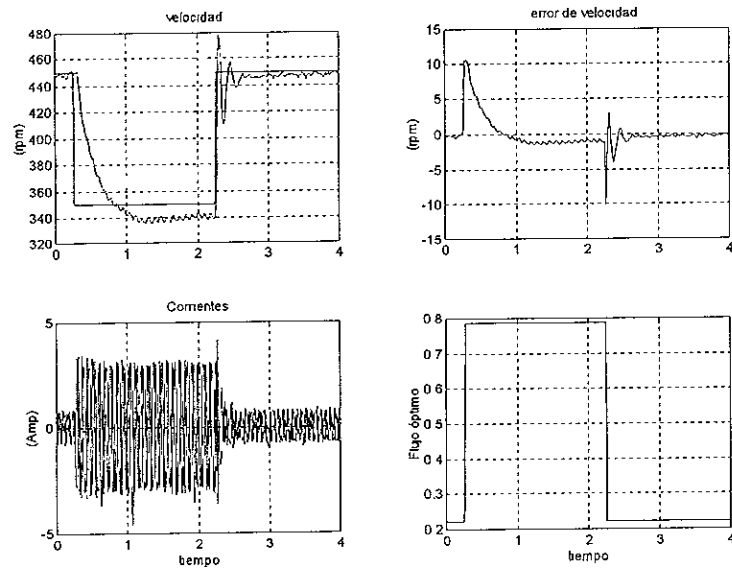


Figura 4.14: Resultado experimental de la respuesta a una referencia de velocidad cuadrada

pero tiene una respuesta de asentamiento bastante aceptable y muy rápida, mientras que en la otra referencia, que tiene un valor del flujo a 0.787 Wb, su comportamiento no tiene sobrepaso y llega a su estado estacionario más allá de dicha referencia y por lo tanto el error de velocidad es mayor que en la otra velocidad de referencia.

En la gráfica inferior de la izquierda están las corrientes para ambas velocidades de referencia, y otro "criterio" para decir que se tiene mejor comportamiento en la referencia de 450 rpm que en 350 es que mientras que para la primera es de alrededor de 1 amp. pico-pico en la otra exige más corriente y es de aproximadamente de 3 amp. pico-pico.





# Capítulo 5

## Banco de Experimentos

Se realizaron físicamente distintas pruebas con los resultados teóricos obtenidos en las secciones anteriores de este escrito en el banco de experimentos para el motor de inducción el cuál se encuentra en la sección de Automatización del Instituto de Ingeniería (II) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Dicho Banco de experimentos consta de un motor de inducción, un inversor trifásico controlado en corriente, una computadora personal, una tarjeta de adquisición de datos (DSP) y sensores de corrientes.

En el presente capítulo se dan las características de los distintos componentes que conforman el banco de experimentos.

### 5.1 El Motor de Inducción

Este es el componente principal del banco de experimentos. El motor de inducción es trifásico, tipo jaula de ardilla en configuración estrella, de 1 HP, velocidad nominal de 1725 rpm a 60 Hz, 4 polos (lo que significa que hay dos pares de polos), clase H, diseño NEMA B y código NEMA L. El motor es de la marca BALDOR, modelo ZDNM3581T. Tiene una capacidad de operación de 0-200 Hz y un voltaje de línea de 230/460 y una corriente nominal de 1.8/0.9 ampere.

En cuanto a parámetros mecánicos, en datos del manual del motor se proporciona un momento de inercia de  $0.142 \text{ lb-ft}^2$  por lo que si realizamos la conversión al sistema internacional nos resulta de  $0.005983 \text{ Kg-m}^2$  y en cuanto al coeficiente de fricción [Torres, 1998] reporta un valor de 0.01 (este mismo autor también reporta un valor para el momento de inercia de 0.03)

Existe un trabajo para la estimación de los parámetros eléctricos del motor de inducción (véase [Torres, 1998]). Para corroborar los resultados de dicho trabajo se realizaron pruebas sencillas al motor (prueba de CD, de rotor libre y de rotor bloqueado) para estimar los parámetros. Lo que se obtiene de esto último son valores muy parecidos al trabajo previamente mencionado.

En el Apéndice B se desarrolla el procedimiento para obtener los parámetros eléctricos del motor. De acuerdo a esto definimos que la resistencia de rotor reflejada al estator es simplemente “resistencia de rotor”, la inductancia de dispersión de estator es “inductancia de estator”, la inductancia de dispersión del rotor reflejada al estator es “inductancia de rotor”. Con esta definiciones tenemos la siguiente tabla

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Potencia Nominal	$P$	1	HP
Número de par de polos	$n_p$	2	—
Momento de Inercia	$D_m$	0.005983	$kg\cdot m^2$
Coefficiente de Fricción	$B$	0.01	$Nm\cdot seg/rad$
Resistencia de Estator	$R_s$	2.516	$\Omega$
Resistencia de Rotor	$R_r$	1.9461	$\Omega$
Inductancia de Estator	$L_s$	0.0114	H
Inductancia de Rotor	$L_r$	0.0076	H
Inductancia Mutua	$L_{sr}$	0.2225	H

**Tabla 5.1:** Parámetros del motor de inducción

Este tipo de motor tiene aplicaciones donde se requiere operación de velocidad ajustable con un par completo desde velocidad 0 hasta la velocidad base ya sea en bandas transportadoras, bombas, ventiladores, enrolladoras, elevadores, etc.

Algunas de las características y beneficios que presentan este tipo de motores son<sup>1</sup>

Características	Beneficios
Un molde de Hierro	Vigoroso, Industrialmente aceptado para colocarse sobre superficies para disipación de calor incrementando la vida del motor
Diseño al pie del motor de doble agujero	Incrementa las oportunidades de remplazo. Los motores tienen dos conjuntos de agujeros

<sup>1</sup>Estas vienen proporcionadas en el manual del motor de inducción

Aislamiento clase H	El motor es capaz de operar a temperaturas ( $180^{\circ}C$ ) que exceda su temperatura de operación de diseño ( $155^{\circ}C$ ). Incrementa la vida del motor y extiende el número de arranques y paros del motor
Completo aislamiento de fases	Protección de picos de voltaje comúnmente vistos en varias aplicaciones de inversores causando fallas de fase a fase
Dos protectores térmicos, normalmente cerrados, de $155^{\circ}C$ entre fases	Provee protección para sobrecalentamiento reduciendo las oportunidades para que el motor falle, agregando seguridad
Provee un Encoder en un molde protegido y eléctricamente aislado	proporciona protección de medios ambientes ásperos y desarrolla una señal limpia para control
Precisión de entrehierro	Reduce calentamiento, niveles de sonido y vibración
Dimensiones NEMA	Facilidad de remplazo con montajes aceptados universalmente
Diseño NEMA B	Características de operación más convenientes para vector drives

### 5.1.1 Codificador Óptico Incremental

A un extremo del motor se encuentra un Codificador Óptico Incremental, aislado eléctricamente, modelo H25 de la línea de producción de la compañía BEI Motion Systems, división Codificadores Industriales. Las salidas del Codificador son: dos trenes de pulsos (señal digital) de 1024 pulsos por vuelta, en este caso por cada giro del rotor, identificadas como canal A y B, desfasadas  $90^{\circ}$  entre ellos; una señal de índice (index), etiquetada como canal Z, utilizada normalmente como referencia para inicializar una cuenta en cada vuelta; tres señales más y que son los negados de las tres señales antes mencionadas, identificadas como canales  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{Z}$ . Por lo tanto, con estas señales del codificador óptico a través de la entrada para codificador que la tarjeta de adquisición de datos (DSP), donde solo se utiliza los canales A, B y Z, tenemos la medición de la posición angular del rotor.

## 5.2 Inversor Trifásico de 1 kVA Controlado en Corriente

La estructura del convertidor consta de dos etapas: un convertidor CA/CD como primer módulo, y un convertidor CD/CA como inversor de salida. El control está basado en un Modulador de Anchura de Pulso (PWM por sus siglas en inglés), con una frecuencia de conmutación fija.

Los inversores PWM controlados en corriente consisten de un inversor PWM de fuente de voltaje acondicionado con lazos reguladores de corriente para proveer una salida de corriente controlada. Si el inversor tiene una frecuencia alta de conmutación (switching), las corrientes de estator del motor de inducción o síncrono pueden rápidamente ajustarse en magnitud y fase.

El controlador en corriente puede tomar diferentes formas. Usualmente, se genera una forma de onda de corriente sinusoidal de referencia y se proporciona a un comparador junto con las mediciones actuales de las corrientes del motor.

La Fig. 5.1 muestra el control para un inversor tipo rama. Si la corriente de fase del motor es más positiva que el valor de la corriente de referencia, el dispositivo superior no funcionará y el inferior es el que trabajará, causando que la corriente del motor disminuya y viceversa.

El comparador tiene una histéresis, que determina la desviación permitida de la corriente de fase real del valor de referencia antes de que se realice la conmutación. Así, la corriente real sigue a su corriente de referencia sin una amplitud de error significativa o retardo de fase. En un sistema trifásico usualmente hay un controlador de corriente independiente para cada fase.

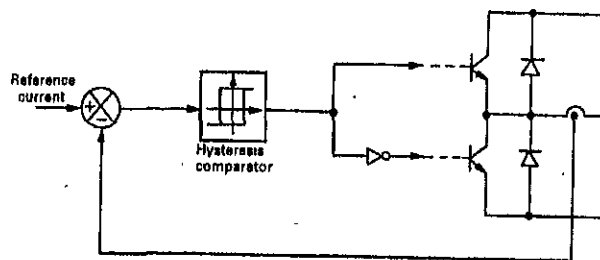


Figura 5.1: Control de histéresis para un inversor leg

En la fig. 5.2 se ilustra el tipo de salida de forma de onda de corriente obtenida con un controlador de corriente de histéresis on/off. Una pequeña histéresis da una corriente de motor casi sinusoidal con una onda pequeña de corriente, pero requiere de una alta frecuencia de conmutación en el inversor. Sin embargo, la frecuencia

de conmutación no es constante para la histéresis dada, pero es modulada por las variaciones en la inductancia del motor y la fuerza contra-electromotriz. Cuando ésta última es baja, la frecuencia de conmutación puede tener rizados excesivos. También no pueden lograr bajos niveles de corrientes debido a que la modulación desaparece cuando la referencia de la corriente permanece en la banda de histéresis. Además, la frecuencia de conmutación variable produce ruido acústico desagradable, y a pesar de su simplicidad, esta técnica on/off es pocas veces puesta en práctica.

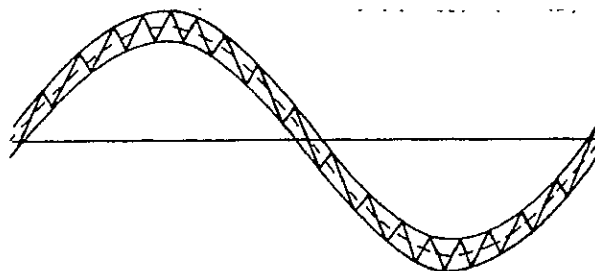


Figura 5.2: Forma de onda de corriente sinusoidal generada por el control por histéresis

En aplicaciones comerciales, se prefiere una frecuencia de conmutación fija debido a que el ruido acústico es menos molesto y las pérdidas en la conmutación del inversor son más predecibles. En la Fig. 5.3 se muestra la técnica más común de control de corriente en la cual el error de corriente es comparado con una portadora de onda triangular de frecuencia fija.

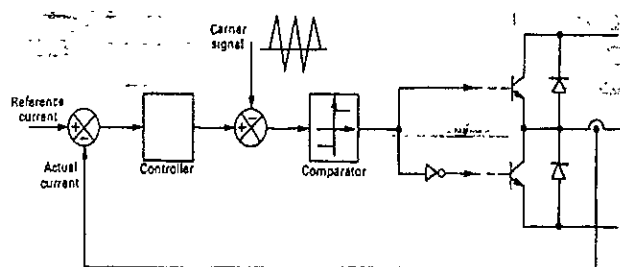


Figura 5.3: Control PWM de frecuencia fija para un inversor leg

Así, el error de corriente es esencialmente la referencia o señal de modulación en un modulador de ancho de banda convencional, asíncrono. La señal de PWM resultante, cuyo ciclo es proporcional al error de corriente, controla la conmutación del inversor. Si la corriente de referencia es más positiva que la corriente real, el error resultante es positivo, y el período de encendido del dispositivo superior excede al inferior. Consecuentemente, el inversor tipo rama es dominante en la dirección positiva de la conmutación al incrementar la corriente de línea de AC. Conversamente, si el error de corriente es negativo, dicho inversor es dominante en la dirección negativa.

Una vez más, un sistema trifásico tiene tres controladores de corriente, pero la señal portadora triangular de alta frecuencia es común para las tres fases, y cada inversor rama conmuta a la frecuencia portadora. Con una referencia de onda-seno y una razón de portadora alta, se produce una forma de onda de corriente de motor casi sinusoidal, conteniendo solamente armónicas de orden superior.

La comparación de corriente de la Fig. 5.3 es desempeñada en el controlador de corriente por un amplificador operacional lineal con compensación proporcional o proporcional-integral. La compensación es ajustable para minimizar la magnitud y fase del error en las líneas de corriente de AC.

### 5.2.1 Especificaciones Técnicas

Las características técnicas del inversor son las siguientes:

#### Entrada de Alimentación

Tensión nominal	Alimentación trifásica, 208 V fase-fase, $\pm 10\%$
Frecuencia	60 Hz
Potencia de entrada	1500 VA, F.P.= 0.7 (bajo condiciones de carga máxima)
Corriente de entrada	A rms /12 A pico por fase
Chasis aterrizado	Conexión de tierra y neutro

#### Salida de Potencia

Corriente de salida máxima	4 A rms/ 5.8 A pico por fase
Tensión máxima	200 V rms fase-fase (sin trabajar en sobremodulación)
Frecuencia	Variable, desde 0.1 Hz hasta 120 Hz (depende de la referencia)
Forma de tensión de salida	PWM bipolar
Forma de corriente de salida	Senoidal (depende de la referencia y la carga)

#### Referencias de Control

Número de entradas	Dos, fase Ia y fase Ib. La fase Ic se genera internamente
Rango de operación	Señal de CA sin componente en CD, con un rango de 11 V pico-pico. Aplica a las dos fases de entrada
Frecuencia máxima	El sistema admite una referencia hasta de 1.2 kHz, independientemente de que la carga sea capaz de ser llevada a la condición de operación deseada

Frecuencia de conmutación      5.5 kHz en el inversor de potencia empleando modulación por ancho de pulso con portadora triangular

Como se menciona en las entrada de referencias de control, la conexión de la señal  $I_c$  no es necesaria, pues el sistema calcula directamente dicha referencia, de manera que se garantice el empleo de referencias balanceadas, es decir, la suma instantánea de las referencias es cero. Como referencia para la magnitud de las señales de control, se cumple la siguiente relación

$$1\text{Volt} = 1\text{Ampere}$$

en otras palabras, una referencia de 5 volts pico-pico equivale a generar una corriente de 5 amperes pico-pico. Se debe de respetar el rango máximo de trabajo que soportan las señales de referencia.

La impedancia de entrada para cada referencia es de  $1\text{ k}\Omega$ .

En las señales de referencia existe una terminal de tierra marcada como "GND". Esta señal es una tierra analógica que no tiene relación alguna con la tierra física. Dicha señal sirve como nivel de 0 volts para el circuito de control y las referencias del sistema.

### 5.3 Tarjeta de Adquisición de Datos (DSP)

El modelo de la Tarjeta de Adquisición de Datos (DSP por sus siglas en inglés) es el DS1102 de la compañía dSPACE<sup>2</sup> digital signal processing and control engineering GmbH de Alemania. Esta tarjeta DSP es un miembro de la familia del hardware DSP-CITeco específicamente diseñadas para desarrollar controladores digitales multivariable de alta velocidad y simulaciones en tiempo real en distintos campos.

La tarjeta DS1102 está basada en la tercera generación del procesador de Señal Digital de Punto Flotante de la Texas Instruments TMS320C31, el cual constituye la unidad de procesamiento principal proporcionando ciclos de tiempo de instrucciones rápidas para algoritmos numéricos intensivos.

La DSP se ha construido con un conjunto de periféricos, sobre la tarjeta, que frecuentemente se utilizan para sistemas de control digital. Convertidores Análogo a Digital y Digital a Análogo, un subsistema microcontrolador DSP basado en entradas-salidas (I/O) digitales e interfases de sensor incremental.

---

<sup>2</sup>Para mayor referencia véase [dSPACE, 1993]

### 5.3.1 Vista de la Arquitectura

La tarjeta DS1102 contiene una memoria de palabra de 128K suficientemente rápida para permitir una operación de estado de espera cero. Varios subsistemas son implementados para soportar un amplio rango de aplicaciones de procesamiento de señal. En la Fig. 5.4 se presenta un diagrama de bloque de la DS1102.

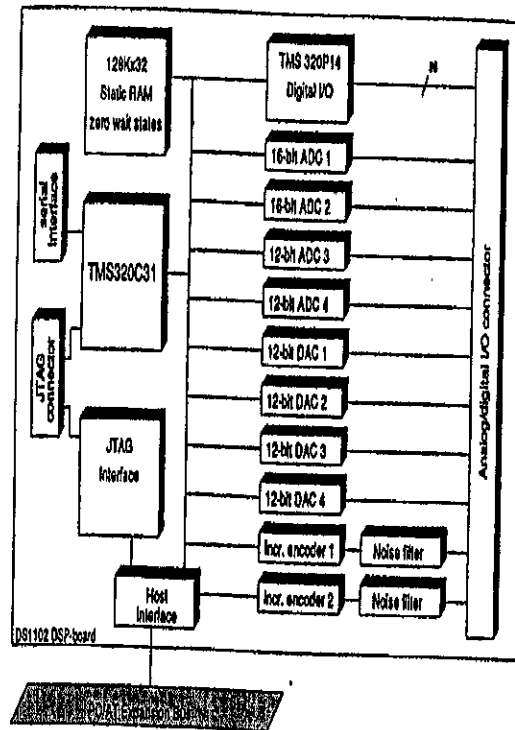


Figura 5.4: Diagrama a Bloque de la DS1102

El TMS320C31 soporta un total de espacio de memoria de 16 M, palabras de 32 bit incluyendo programa, datos y espacio de entrada-salida I/O.

### 5.3.2 Requerimientos del Host

La tarjeta del procesador de punto flotante DS1102 puede usarse para cualquier computadora personal basada en IBM-PC/AT 80286/386/486 o compatible que contengan ranuras (slots) ISA con conectores de 16 bits. Para la operación propia de la DS1102 necesita de las siguientes condiciones:

- El suministro de potencia del host de la computadora deberá desarrollar una corriente adicional de 2 amp. en la línea de 5 volts y 100 ma en las líneas de



$\pm 12$  volts.

- 10 puertos consecutivos libres de 8 bit entrada-salida (I/O) disponibles para el espacio del host de 64K
- La frecuencia de reloj del host no deberá exceder 8.33 MHz durante la expansión de acceso del bus. Muchas computadoras rápidas de PC/AT o compatibles tienen el reloj del bus diferente de la velocidad actual del CPU.

## 5.4 Implantación de los Experimentos

La tarjeta de adquisición de datos (DSP) DS1102 se tiene trabajando en una computadora personal microprocesador Intel 80486 a 66 MHz con 24 MBytes de memoria RAM.

El fabricante de la tarjeta DSP (la compañía dSPACE) proporciona el software para trabajar ésta en tiempo real. Dicho software se configura bajo el ambiente MS-DOS, una vez que se instala la tarjeta en la computadora. Después de que el software se configura correctamente, se puede realizar que los programas que utilizan la tarjeta se den alta en memoria, corra dicho programa o se pueda reiniciar.

También esta compañía proporciona el software para trabajar en el ambiente de Windows 3.x de Microsoft. Uno para diseñar mascarar, denominado "Copkpit", en donde se pueden desde ahí proporcionar valores a distintas variables dentro de una aplicación así como ver su comportamiento tipo tacómetros digitales. El otro es para visualizar, llamado "Trace", en el mismo instante el comportamiento en tiempo real de la aplicación en forma gráfica. Este último software, una de las característica que tiene es que puede salvar como archivo ASCII o binario Matlab las variables que se ven en forma gráfica.

Ambos software necesitan de dos archivos de entrada, uno de memoria de mapa (.TRC) y el otro de enlace (linker) de mapa (.MAP). Los archivos .TRC son generados automáticamente por el código-C de los módulos de generación de dSPACE. Los archivos .MAP son creados por el enlazador contenido en las herramientas de desarrollo DSP punto flotante de Texas Instruments par el TMS320C3x.

El mismo fabricante también proporciona el software para trabajar la tarjeta DSP con Simulink. Estas son una serie de librerías para utilizar los convertidores ADCs y DACs, así como las señales digitales y el uso de señales de encoder. Este software genera los archivos necesarios para utilizar tanto Trace como Copkpit.

En la Fig. 5.5 se encuentra una plantilla en Simulink del Modelo del controlador junto con el algoritmo de Bodson. Dicha plantilla fué la que se utilizó para generar

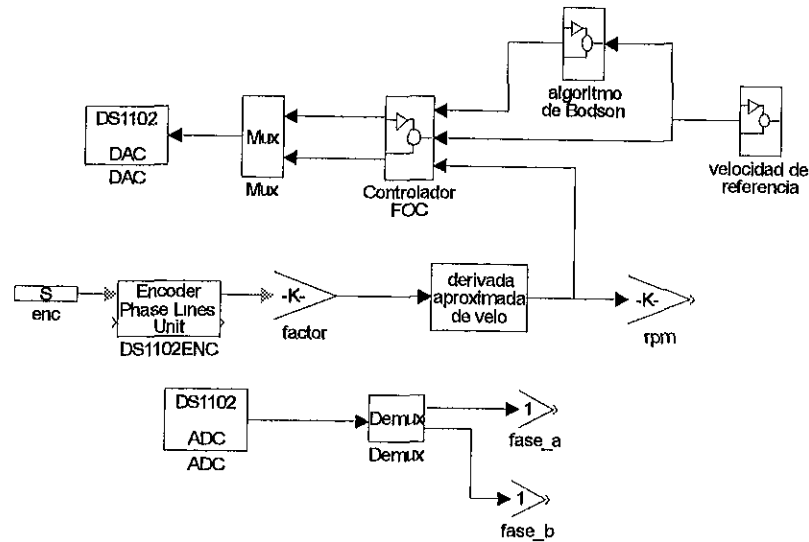


Figura 5.5: Modelo en Simulink del controlador con el algoritmo de Bodson

los archivos que se necesitan para trabajar en la DSP.

Las señales que proporciona el Codificador que está acoplado en el motor son utilizados a través de la entrada que la DSP tiene para este propósito. Con estas señales obtenemos de una forma directa y limpia la posición angular del motor de inducción. Para obtener la velocidad angular se implantó una derivada aproximada. En las figuras de los experimentos de los capítulos anteriores se ve el tipo de respuesta para la velocidad real del motor.

Para realizar la implantación física de los distintos experimentos, es necesario primero tenerlo bien definido en una plantilla de Simulink. Una vez que se tiene lo anterior, la generación de los archivos necesarios para utilizar la tarjeta DSP, hay que tomar en cuenta el tiempo de muestreo para la generación de dichos archivos. Esto se ve directamente reflejado al momento de funcionar la aplicación en la DSP. Si el tiempo de muestreo que se asignó es igual o menor que el tiempo de ejecución cuando corre una aplicación en la DSP, lo que ocurre que la computadora manda solo las primeras señales pero después se inhibe. Por lo tanto, siempre hay que poner el tiempo de muestreo cuando menos 0.1 ms más arriba del tiempo de ejecución.

Para aplicaciones simples, por ejemplo solo utilizando las señales del encoder y la derivada aproximada, nos permitía un tiempo de muestreo de 0.2 ms, mientras que para aplicaciones con más dinámica, por ejemplo el controlador FOC, permitió un tiempo de 0.7 ms. y para el experimento donde se utiliza el FOC junto con el algoritmo de optimización un tiempo de muestreo de 2 ms.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Debido a la gran evolución en la electrónica de potencia como en los procesadores digitales, además de que la teoría de control ha experimentado grandes desarrollos, en las últimas dos décadas se ha tenido un mejoramiento de las estrategias de control para las máquinas eléctricas.

En la actualidad, la mayoría de las publicaciones en la comunidad ingenieril están enfocadas a estudiar de una forma teórica diversos problemas que existen. En forma específica, se puede decir que para los motores de inducción ya se han propuesto las distintas posibles estrategias de control, donde se han implantado de una forma física y estudiado el desempeño que estas tienen. Existen también trabajos donde comparan dichas estrategias considerando las distintas ventajas y desventajas de cada una. Se puede decir que la primera etapa en cuanto a las aplicaciones de los controladores para los motores de inducción ya está bien dominada.

La etapa en la cual todavía nos encontramos, ha consistido en estudiar diferentes situaciones de las estrategias de control, de las que se puede mencionar, para seleccionar niveles del flujo magnético, optimización de par, respuesta de desempeño en el transitorio, etc.

Con lo antes dicho, la contribución principal del presente trabajo consistió en implantar y analizar físicamente, de una manera conjunta, dos trabajos de investigación aplicados a los motores de inducción, que de alguna forma estricta tienen dos enfoques distintos, pero estos desde el punto de vista del cual se trabajó son complementarias. Es decir, obtener la respuesta transitoria óptima en un intervalo de ganancias del lazo PI en el error de velocidad del control por campo orientado en donde se tiene estabilidad global.

En el desarrollo del Capítulo 3 se tiene que los intervalos de las ganancias del lazo PI son independientes del valor que puede asignarse a la norma del flujo del rotor.

Al implantar solamente lo reportado en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998], en el banco de experimentos, se observa que efectivamente la sintonización de las ganancias del lazo interno PI en el error de velocidad del Controlador de Campo Orientado es independiente de la asignación del valor para la norma de flujo de rotor deseada  $\beta_*$ . Por un lado, en la Fig. 3.3 se observa la sintonización para distintas ganancias del PI y un valor fijo en  $\beta_*$  en donde se mejora el desempeño del transitorio cambiando los valores en las ganancias PI. Por otro lado, en la Fig. 3.4 se dejan fijas las ganancias del lazo PI que logran el mejor desempeño (de acuerdo a los valores presentados en la Fig. 3.3) cambiando los valores de la norma del flujo de rotor observando que se tiene un mejor desempeño cuando el valor de esta variable es más pequeña.

En conclusión, de acuerdo a las gráficas de las figuras antes mencionadas tanto el valor de la norma del flujo de rotor y los intervalos de ganancia del lazo PI no son independientes. Aunque  $\beta_*$  se fije a cierto valor y las ganancias PI se puedan variar y se tengan distintas respuestas en el desempeño, en realidad sí tienen relación porque si  $\beta_*$  se fija a otro valor y las ganancias varían, se obtienen otros desempeños distintos a los primeros. Esto también se puede observar de las ecuaciones del Control por Campo Orientado.

Por otro lado, en el mismo desarrollo del Capítulo 3, la sintonización se da para asegurar estabilidad global fijando el valor en el estimado de la resistencia de rotor  $\hat{R}_r$ . Por lo tanto, si se proporciona al controlador un valor en esta, muy por arriba de lo que considera para la obtención de los intervalos del PI, se debe tener una respuesta inestable en el funcionamiento del experimento. Pero de acuerdo a la Fig. 3.2 se ve que el motor no se estabiliza a la velocidad de referencia, sino que solo tiene una respuesta insatisfactoria. Con esto se puede concluir que en realidad los intervalos de las ganancias del lazo PI no solo garantizan estabilidad, sino que nos dicen en qué rango de valores están tanto las ganancias del lazo PI, así como, la resistencia de rotor estimada para que éstas den una mejor respuesta de desempeño del transitorio del sistema completo. Esto quiere decir que lo establecido en [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] es muy conservador y que el Controlador por Campo Orientado es más robusto de lo que se establece en dicho artículo.

Por otro lado, debido a que en las sintonizaciones de las ganancias PI no dependen de  $\beta_*$  y que hay distintas respuestas según el valor que se le asigne, se buscó la forma de obtener la norma del flujo de rotor óptima, usando el algoritmo que se presenta en [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995], el cual proporciona la referencia de flujo óptimo para optimizar el par en un motor de inducción.

En la Fig. 4.14 se ve cómo a un cambio de la velocidad de referencia hay distintos valores de la norma del flujo deseado  $\beta_*$  y como repercute en la respuesta de desempeño del transitorio. Se observa que tenemos mejor desempeño cuando el valor de la norma del flujo es menor, ya que tanto el error de velocidad como la amplitud

de corrientes son menores, mientras que, cuando el valor del flujo es más alto lo son el error de velocidad y la amplitud de las corrientes. Ya que la referencia de flujo óptimo es para asegurar que ciertas restricciones se cumplan en todo momento cuando el sistema esté funcionando, no necesariamente se tiene la mejor respuesta en el desempeño del transitorio.

Con la implantación en forma conjunta de las dos publicaciones, se tienen un intervalo de ganancias donde se asegura estabilidad global de la respuesta en el desempeño del transitorio de una manera óptima bajo restricciones tanto de voltaje como de corriente.



ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## Apéndice A

# Estructura Física de las Máquinas de Inducción

En una máquina trifásica, los devanados de las fases individuales se desplazan entre sí 120 grados eléctricos en el espacio alrededor de la circunferencia del entrehierro. Se puede considerar que las bobinas concentradas de paso completo, en este caso, representan devanados distribuidos que producen ondas senoidales de fuerza magnetomotriz centradas en los ejes magnéticos de las fases respectivas. Por lo tanto, las tres ondas espaciales fundamentales de fuerza magnetomotriz están 120 grados eléctricos en el espacio. Pero cada fase está excitada mediante una corriente alterna cuya magnitud varía senoidalmente con el tiempo. Bajo condiciones de tres fases balanceadas, las corrientes instantáneas son

$$\begin{aligned}i_a &= I_m \cos \omega t \\i_b &= I_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\i_c &= I_m \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

siendo  $I_m$  el máximo valor de la corriente, tomando en forma arbitraria el origen del tiempo, el instante cuando la corriente de la fase  $a$  es máxima y positiva.

Lo que obtenemos de desplazar los tres devanados 120 grados en el espacio y desfasar las corrientes de estos, también 120 grados, en el tiempo es una sola onda viajera en el sentido positivo

$$\mathcal{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} F_{\text{máx}} \cos(\theta - \omega t) \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathcal{F}(\theta, t)$  es la suma total de las contribuciones de cada de las fases y

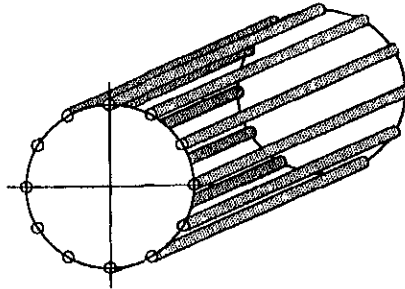
$$F_{\text{máx}} = \frac{4}{\pi} k_w \frac{N_{ph}}{P} I_m$$

$k_w$  es el factor de devanado,  $N_{ph}$  el número de vueltas en serie por fase y  $P$  los polos.

Cuando se suministra voltaje al estator, mediante una fuente trifásica balanceada, produce un campo magnético en el entrehierro que gira a la velocidad sincrónica determinada por el número de polos  $P$  y la frecuencia  $f$  aplicada al estator

$$v = \frac{120}{P} f \quad \text{r/min}$$

[Fitzgerald et al, 1990] Sección 4.5.



**Figura A.1:** Estructura básica de un rotor jaula de ardilla

La estructura del rotor jaula de ardilla consiste de barras de cobre o aluminio localizadas axialmente alrededor de la periferia de un cilindro de hierro laminado (vease fig A.1). La laminación del hierro es necesaria para forzar a que las corrientes del rotor fluyan en las barras conductoras. En las terminales del rotor cilíndrico, los anillos conductores son usados para conectar eléctricamente las terminales de las barras del rotor. Este rotor es muy rígido, un mecanismo duro y tiene muy poca oportunidad de fallar en lo eléctrico o lo mecánico.

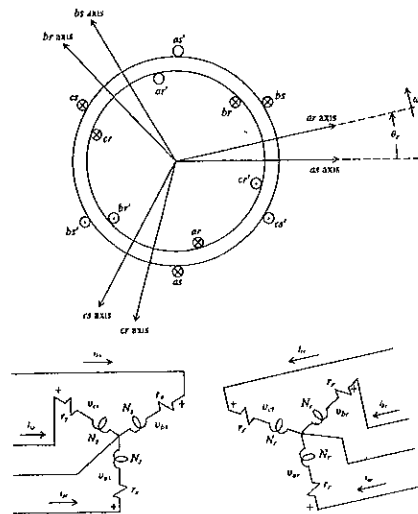


## Apéndice B

# Parámetros del Motor de Inducción

Los parámetros son muy necesarios para el desarrollo del trabajo hecho, por lo que es importante que sean lo más reales posible. Lo presentado en este apéndice está basado en el Capítulo 4 de [Krause, 1986]; las suposiciones, la figura y el procedimiento de los cálculos; con la diferencia de que se utilizan los valores medidos en las distintas pruebas realizadas al motor que se trabajó en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

El arreglo de los devanados para una máquina de inducción simétrica trifásica, de 2 polos y que es conectada en estrella, se muestra en la Fig. B.1. En cuanto a los devanados de estator, éstos son idénticos, distribuidos sinusoidalmente, desplazados  $120^\circ$  entre sí, con  $N_s$  vueltas iguales y resistencia  $R_s$ . Por otro lado, los devanados de rotor también se considerarán como tres devanados idénticos distribuidos sinusoidalmente, desplazados  $120^\circ$ , con  $N_r$  vueltas iguales y resistencia  $R_r$ . La dirección positiva del eje magnético de cada devanado se muestra en la fig. B.1.



**Figura B.1:** Máquina de inducción simétrica conectada en estrella, trifásica de dos polos

## B.1 Parámetros Eléctricos del Motor de Inducción

Las ecuaciones de voltaje en las variables de la máquina se pueden expresar como

$$v_{abcs} = R_s i_{abcs} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcs}$$

$$v_{abcr} = R_r i_{abcr} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcr}$$

donde

$$(f_{abcs})^T = [f_{as} \ f_{bs} \ f_{cs}]$$

$$(f_{abcr})^T = [f_{ar} \ f_{br} \ f_{cr}]$$

con  $f$  representando voltaje, corriente o flujo. Los subíndices  $s$  y  $r$  denotan las variables y parámetros asociadas con el estator y rotor respectivamente. Tanto  $R_s$  como  $R_r$  son matrices diagonales con elementos diferentes de cero. Para un sistema magnéticamente lineal, los enlaces de flujo pueden ser expresado como

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{sr}^T & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

En particular<sup>1</sup>

$$L_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$L_{sr} = L_{sr} \begin{bmatrix} \cos(q_m) & \cos(q_m + \gamma) & \cos(q_m - \gamma) \\ \cos(q_m - \gamma) & \cos(q_m) & \cos(q_m + \gamma) \\ \cos(q_m + \gamma) & \cos(q_m - \gamma) & \cos(q_m) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

con  $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ . Las inductancias  $L_{ls}$  y  $L_{ms}$  son de dispersión y magnetizante respectivamente en los devanados del estator,  $L_{lr}$  y  $L_{mr}$  lo son para los devanados del rotor. La inductancia  $L_{sr}$  es la amplitud de las inductancias mutuas entre los devanados de estator y rotor.

En la pagina 167 de su obra, [Krause, 1986] menciona algunas consideraciones de suma importancia para obtener los parámetros del motor de inducción de jaula de ardilla, para que estos sean lo más aproximado a la realidad.

<sup>1</sup>vease la sección 1.5 de [Krause, 1986] para la obtención de estas matrices

La mayoría de las máquinas de inducción no son equipadas con un rotor devanado, es decir, los flujos de corriente en las barras de aluminio o cobre son uniformemente distribuidos y están cubiertas de un material ferromagnético, con todas las terminales de las barras a un anillo común. Este tipo de configuración de rotor es conocido como rotor de jaula de ardilla. En primera instancia la inductancia mutua aparece entre los devanados de rotor distribuidos sinusoidalmente y los devanados de estator distribuidos sinusoidalmente no será de la misma forma dada por (B.4). Sin embargo, en muchos casos unos devanados distribuidos uniformemente son descritos en forma adecuada por sus componentes sinusoidales fundamentales y son representados por un devanado trifásico equivalente. Generalmente, esta representación consiste de un devanado equivalente por fase. Sin embargo, la construcción de algunas máquinas es tal que su desempeño es exactamente descrito por la representación de cada fase con dos devanados equivalentes conectados en paralelo. Este tipo de máquinas es comunmente conocida como máquina de rotor de doble jaula.

Otra consideración es que en una máquina práctica, los conductores de rotor están desalineados. Esto es, los conductores no están localizados en el plano de los ejes de rotación del rotor. En cambio, los conductores son ligeramente desalineados con los ejes de rotación. Este tipo de arreglo de conductores ayuda a reducir la magnitud del par armónico debido al contenido armónico de las ondas de fuerza magnetomotriz (MMF). Tales características de diseño no se consideran aquí, asumiendo que todos los efectos sobre la amplitud de la componente fundamental de la forma de onda MMF debido al desalineamiento y devanados de rotor distribuidos uniformemente son contados por el valor de  $N_r$ . La suposición que la máquina de inducción es un dispositivo lineal (sin saturación) y de armónicas libres MMF, es una simplificación con lo cual no puede describir la conducta de la máquina de inducción en todos su modos de operación. Sin embargo, en una gran mayoría de sus aplicaciones, su conducta puede ser predecida adecuadamente con esta representación simplificada.

Cuando expresamos las ecuaciones de voltaje en forma de variables de la máquina es conveniente referir todas las variabbbles del rotor a los devanados del estator por una razón de vueltas de forma apropiada.

$$i'_{abcr} = \frac{N_r}{N_s} i_{abcr}$$

$$v'_{abcr} = \frac{N_r}{N_s} v_{abcr}$$

$$\lambda'_{abcr} = \frac{N_r}{N_s} \lambda_{abcr}$$

Las inductancias magnetizante y mutua son asociadas con la misma ruta del flujo magnetizante. En particular

$$L_{ms} = \frac{N_s}{N_r} L_{sr} \quad (\text{B.5})$$

Así, definimos

$$L'_{sr} = \frac{N_s}{N_r} L_{sr}$$

$$L'_{sr} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \gamma) & \cos(\theta_r - \gamma) \\ \cos(\theta_r - \gamma) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \gamma) \\ \cos(\theta_r + \gamma) & \cos(\theta_r - \gamma) & \cos \theta_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$L_{mr}$  puede ser expresado

$$L_{mr} = \left( \frac{N_r}{N_s} \right)^2 L_{ms} \quad (\text{B.7})$$

y así queda

$$L'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_r \quad (\text{B.8})$$

Entonces de (B.3) tenemos

$$L'_r = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_{lr} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

donde

$$L'_{lr} = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 L_{ls}$$

Los flujos de enlace los podemos escribir

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L'_{sr} \\ (L'_{sr})^T & L'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Las ecuaciones de voltaje expresadas en términos de variables de la máquina referida a los devanados de estator pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} v_{abcs} \\ v'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + pL_s & pL'_{sr} \\ p(L'_{sr})^T & R'_r + pL'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

donde  $p = \frac{d}{dt}$  y

$$R'_r = \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 R_r \quad (\text{B.12})$$

Por lo que debemos calcular los siguientes parámetros eléctricos:  $R_s$ ,  $R'_r$ ,  $L_s$ ,  $L'_r$  y  $L'_{ms}$ .

## B.2 Ecuaciones de Voltaje con las Variables en un Marco de Referencia Arbitrario

Las ecuaciones de voltaje en marco de referencia arbitrario, son en particular<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} v_{qd0s} &= R_s i_{qd0s} + \omega \lambda_{dqs} + p \lambda_{qd0s} \\ v'_{qd0r} &= R'_r i'_{qd0r} + (\omega - \omega_r) \lambda'_{dqr} + p \lambda'_{qd0r} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\lambda_{dqs})^T &= [\lambda_{ds} - \lambda_{qs} 0] \\ (\lambda'_{dqr})^T &= [\lambda_{dr} - \lambda'_{qr} 0] \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones se completa una vez que las expresiones para los flujos de enlace se determinan. Sustituyendo las ecuaciones de transformación (ecuaciones (3.3-1) y (4.4-1) de [Krause, 1986]), en las ecuaciones de flujo de enlace expresadas en las variables *abc* ecuación (B.10), obtenemos las ecuaciones de flujo de enlace para un sistema magnéticamente lineal

$$\begin{bmatrix} \lambda_{qd0s} \\ \lambda'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s L_s (K_s)^{-1} & K_s L'_{sr} (K_r)^{-1} \\ K_r (L'_{sr})^T (K_s)^{-1} & K_r L'_r (K_r)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0s} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

donde  $L_s$  es definida por (B.2),  $L'_{sr}$  por (B.16) y  $L'_r$  por (B.9).

En el capítulo 3 de [Krause, 1986] se tiene que

$$K_s L_s (K_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

donde

$$M = \frac{2}{3} L_{ms}$$

de igual forma

$$K_r L'_r (K_r)^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + M & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + M & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

y que

$$K_s L'_{sr} (K_r)^{-1} = K_r (L'_{sr})^T (K_s)^{-1} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

<sup>2</sup>Basadas en lo desarrollado en el capítulo 3 y sección 4.5 de [Krause, 1986]

### B.3 Cálculo de los Parámetros

Los parámetros del motor de inducción que se muestran en la figura B.2, la cual es un circuito equivalente en una fase para operación en estado estable, se pueden calcular utilizando teoría de campo eléctrico o por medio de las pruebas de corriente directa, de rotor libre o vacío o sin carga mecánica acoplada y de rotor bloqueado.

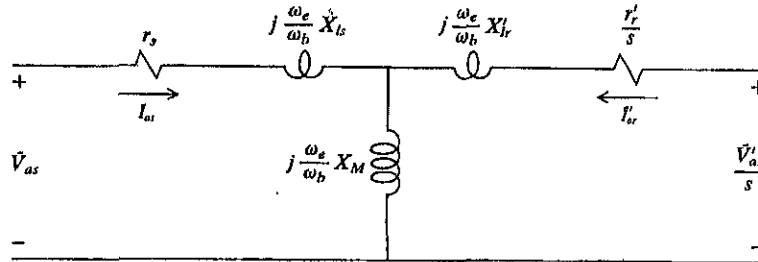


Figura B.2: Circuito equivalente para operación en estado estable de una máquina de inducción simétrica

En la prueba de DC se obtuvo una resistencia de estator de

$$R_s = 2.516 \, \Omega \quad (\text{B.17})$$

los valores promedios de las otras pruebas son

Prueba sin carga	Prueba de rotor bloqueado
$V_{nl} = 220 \text{ V}$	$V_{br} = 15.1 \text{ V}$
$I_{nl} = 1.44 \text{ A}$	$I_{br} = 1.813 \text{ A}$
$P_{nl} = 260 \text{ W}$	$P_{br} = 44 \text{ W}$
$f = 60 \text{ Hz}$	$f = 15 \text{ Hz}$

La prueba de rotor libre, el cual es análogo a la prueba de circuito abierto de un transformador, es hecho aplicando un voltaje trifásico balanceado, 60 Hz a los devanados de estator sin carga mecánica en la máquina. La potencia de entrada durante esta prueba es la suma de las pérdidas óhmica en el estator, de cobre debido a histéresis, corrientes de eddy, rotacionales debido a fricción. Las pérdidas óhmicas en el estator son

$$P_{I^2 R_s} = 3I_{nl}R_s = 3(1.44)^2(2.516) = 15.6515 \text{ W} \quad (\text{B.18})$$

Las pérdidas de potencia debido a las fricciones son

$$\begin{aligned} P_{fWC} &= P_{nl} - P_{I^2 R_s} \\ &= 260 - 15.6515 = 244.3485 \text{ W} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

En el circuito equivalente mostrado en la Fig. B.2 estas pérdidas son despreciadas. Generalmente, en muchos casos se introducen errores pequeños por no tomar en cuenta estas pérdidas. Puede tomarse en cuenta poniendo una resistencia en paralelo con la reactancia magnetizante  $X_M$  o aplicando una pequeña carga mecánica (par) a la máquina.

La potencia aparente es (con  $V_{nl}$  voltaje de línea a línea)

$$|S| = \sqrt{3}V_{nl}I_{nl} = (\sqrt{3})(220)(1.44) = 548.71 \text{ VA} \quad (\text{B.20})$$

La impedancia sin carga es altamente inductiva y su magnitud se asume que será la suma de las reactancias de dispersión y magnetizante donde la velocidad del rotor después de lo cual es especialmente sincrónica  $R'_r/s$  es mucho mayor que  $X_M$ . Así

$$\begin{aligned} X_{ls} + X_M &\approx \frac{V_{nl}}{\sqrt{3}I_{nl}} \\ &= \frac{220}{(\sqrt{3})(1.44)} = 88.2063\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Durante la prueba de rotor bloqueado, la cual es análoga a la prueba de corto circuito del transformador, es sujetado por medios externos y se le aplica un voltaje de estator trifásico balanceado. La frecuencia de los voltajes aplicados es a menudo menor, para obtener un valor representativo de  $R'_r$  durante la operación normal, la frecuencia de las corrientes de rotor son bajas y las resistencias de algunas máquinas de inducción varían considerablemente con la frecuencia. Durante esto, la impedancia  $R'_r + jX'_{lr}$  es mucho menor en magnitud que  $X_M$  aún cuando la corriente que fluye en la reactancia magnetizante puede ser despreciada. Por lo tanto

$$P_{br} = 3I_{br}^2(R_s + R'_r)$$

de lo cual

$$\begin{aligned} R'_r &= \frac{P_{br}}{3I_{br}^2} - R_s \\ &= \frac{44}{3(1.813)^2} - 2.516 = 1.9461\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

La magnitud de la impedancia de entrada de rotor bloqueado es

$$\begin{aligned} |Z_{br}| &= \frac{V_{br}}{\sqrt{3}I_{br}} \\ &= \frac{15.1}{(\sqrt{3})(1.813)} = 4.8086\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Ahora

$$|(R_s + R'_r)| + j\frac{15}{60}(X_{ls} + X'_{lr})| = 4.8086$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{15}{60}(X_{ls} + X'_{lr})\right]^2 &= (4.8086)^2 - (R_s + R'_r)^2 \\
&= (4.8086)^2 - (2.516 + 1.9461)^2 \\
&= 3.2123 \Omega
\end{aligned} \tag{B.24}$$

por lo que

$$X_{ls} + X'_{lr} = 7.1692 \Omega \tag{B.25}$$

Muchos autores en este sentido consideran la experiencia para relacionar  $X_{ls}$  y  $X'_{lr}$ , sobre todo por la clase del motor. Si consideramos la siguiente relación  $0.6 * X_{ls}$  y  $0.4 * X'_{lr}$  tenemos

$$\begin{aligned}
X_{ls} &= 4.3015 \Omega \\
X'_{lr} &= 2.8677 \Omega \\
X_M &= 83.9048 \Omega
\end{aligned}$$

Las inductancias serán, considerando a 60 Hz. ( $X = 2\pi fL$ )

$$\begin{aligned}
L_{ls} &= 0.0114 \text{ Hy} \\
L'_{lr} &= 0.0076 \text{ Hy} \\
M &= 0.2225 \text{ Hy}
\end{aligned}$$

por lo que el conjunto completo de los parámetros eléctricos es

$$\begin{aligned}
R_s &= 2.516 \Omega \\
R'_r &= 1.9461 \Omega \\
L_{ls} &= 0.0114 \text{ Hy} \\
L'_{lr} &= 0.0076 \text{ Hy} \\
M &= 0.2225 \text{ Hy}
\end{aligned}$$

Si consideramos que tanto  $X_{ls}$  y  $X'_{lr}$  valen lo mismo tenemos

$$\begin{aligned}
R_s &= 2.516 \Omega \\
R'_r &= 1.9461 \Omega \\
L_{ls} &= 0.0095 \text{ Hy} \\
L'_{lr} &= 0.0095 \text{ Hy} \\
L_{ms} &= 0.1509 \text{ Hy}
\end{aligned}$$



En [Torres, 1998] vienen reportado los siguientes valores para el mismo motor

$$\begin{aligned}R_s &= 2.5 \Omega \\R'_r &= 2.65 \Omega \\L_{ls} &= 0.01253 \text{ Hy} \\L'_{lr} &= 0.01017 \text{ Hy} \\L_{ms} &= 0.13958 \text{ Hy}\end{aligned}$$



# Apéndice C

## Estabilidad de Lyapunov

Un sistema dinámico no lineal puede ser representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

donde  $f$  es una función vectorial no lineal de  $n \times 1$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados de  $n \times 1$  y  $u(t)$  especifican un vector de entrada. Muchos análisis de sistemas físicos se realizan sin la presencia explícita de la entrada, es decir, la ecuación de estado no forzado

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{C.1}$$

denominado “no autónomo” o “variante en el tiempo”. Un caso especial de (C.1) es

$$\dot{x} = f(x) \tag{C.2}$$

conocido como “autónomo” o “invariante en el tiempo” y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa localmente Lipschitz en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición C.1** [Khalil, 1996, pag. 3] *Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estados se dice que es un punto de equilibrio de (C.1) si tiene la propiedad que cuando el estado del sistema empieza en  $x^*$  se mantendrá en  $x^*$  para todo tiempo futuro. Para un sistema autónomo (C.2), los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación  $f(x) = 0$ .*

Si el punto de equilibrio de interés es  $\bar{x}$ , podemos introducir una nueva variable

$$y = x - \bar{x}$$

y sustituir  $x = y + \bar{x}$  en  $\dot{x} = f(x)$ , para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones sobre la variable  $y$  de la forma

$$\dot{y} = f(y + \bar{x})$$

## C.1 Estabilidad

Hay distintos tipos de problemas de estabilidad que surgen en el estudio de sistemas dinámicos. La estabilidad de puntos de equilibrios normalmente es caracterizada en el sentido de Lyapunov. Se dice que un punto de equilibrio es **estable**, si para condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio, la solución se mantiene cerca del punto de equilibrio

**Definición C.2** [Khalil, 1996, pag. 98] El punto de equilibrio  $x = 0$  de (C.2) es

- estable, si para cada  $\epsilon > 0$ , hay  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- inestable si no es estable
- asintóticamente estable si es estable y puede elegirse  $\delta$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

**Teorema C.1** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (C.2) y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable, tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (\text{C.4})$$

entonces  $x = 0$  es estable. Mas aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (\text{C.5})$$

entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable.

El teorema anterior es conocido como teorema de Lyapunov y viene en ([Khalil, 1996], pag. 100), entre otros autores.

Una función  $V(x)$  continuamente diferenciable que satisface (C.3) y (C.4), es llamada “función de Lyapunov”. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (C.2), es dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

Si  $\phi(t; x)$  es la solución de (C.2) que empieza al estado inicial  $x$  a un tiempo  $t = 0$ , entonces

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t; x)) \right|_{t=0}$$

Por lo tanto, si  $\dot{V}(x)$  es negativa,  $V$  decrecerá a lo largo de la solución.

Si  $V(x)$  satisface (C.3) con  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$  y  $V(0) = 0$ , es conocida como “definida positiva”. Si se satisface pero con  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$  se dice “semidefinida positiva”. Con esto el teorema de Lyapunov se puede reescribir de la siguiente forma [Khalil, 1996], pag. 103

*El origen es estable si hay una función  $V(x)$  definida positiva diferenciable continuamente tal que  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa, y es asintóticamente estable si  $\dot{V}(x)$  es definida negativa.*

**Definición C.3** *Se dice que una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$*

**Definición C.4** *Se dice que una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si, para cada  $s$  fija, el mapeo  $\beta(r, s)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  con respecto a la variable  $r$ , el mapeo  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a la variable  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$*

El siguiente lema da definiciones equivalentes de estabilidad uniforme y estabilidad uniforme asintóticamente usando las definiciones anteriores.

**Lema C.1** *El punto de equilibrio  $x = 0$  de (C.1) es*

- *Estable uniformemente sí y solo si existe una función  $\alpha(\cdot)$  clase  $\mathcal{K}$  y una constante  $c$  positiva, independiente de  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (\text{C.6})$$

- *Estable uniforme asintóticamente sí y solo sí existe una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  clase  $\mathcal{KL}$  y una constante  $c$  positiva, independiente de  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (\text{C.7})$$

- *Estable uniforme asintótica globalmente sí y solo sí la desigualdad (C.7) es satisfecha para cualquier estado inicial  $x(t_0)$*

Un caso especial de la estabilidad uniforme asintótica surge cuando la función  $\beta$  clase  $\mathcal{KL}$  en (C.7) toma la forma  $\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}$ . Este caso es muy importante y se designará como una propiedad distinta de estabilidad de puntos de equilibrio

**Definición C.5** *El punto de equilibrio  $x = 0$  de (C.1) es exponencialmente estable si la desigualdad (C.7) es satisfecha con*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\text{C.8})$$

*y es global exponencialmente estable si esta condición es satisfecha para cualquier estado inicial.*

# Bibliografía

- [Arnold, 1995] V. Arnold *Mathematical Methodos of Classical Mechanics* Springer-Verlag, 1995
- [Bodson, Chiasson & Novotnak, 1995] Marc Bodson, John N. Chiasson & Robert T. Novotnak *A Systematic Approach to Selecting Flux References for Torque Maximization in Induction Motors* IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 3, no. 4, december 1995
- [Bose, 1986] B. K. Bose *Power Electronic and AC Drives* Prntice-Hall, Englewood Cliffs, 1986
- [Chapman, 1987] Stephen J. Chapman *Máquinas Eléctricas* McGraw-Hill, 1987
- [dSPACE, 1993] *DS1102 User's Guide* dSPACE digital signal processing and control engineering GmbH, 1993
- [Espinosa, 1993] Gerardo René Espinosa Pérez *Control No Lineal de Motores de Inducción*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería, UNAM, Diciembre 1993
- [Espinosa & Ortega, 1994] Gerardo Espinosa, Romeo Ortega *State Observers are unnecessary for Induction Motor Control* Systems & Control Letters 23 (1994) 315-323
- [Espinosa, Nicklasson & Ortega, 1995] Gerardo Espinosa Pérez, Per Johan Nicklasson and Romeo Ortega *Control of Induction Motors in the Field Weakening Region* Proceedings of the 34th Confence on Decision & Control, New Orleans, LA, December 1995
- [Espinosa, Ortega & Nicklasson, 1997] Gerardo Espinosa Pérez, Romeo Ortega and Per Johan Nicklasson *Torque and Flux Tracking of Induction Motors* International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 7, 1-9 (1997)
- [Espinosa, Chang, Ortega & Mendes, 1998] G. Espinosa Pérez, G. W. Chang, R. Ortega & E. Mendes *On Field-Oriented Control of Induction Motors: Tuning of the PI Gains for Performance Enhancement* Proceedings of the 37th IEEE Confence on Decision & Control, Tampa Florida USA, December 1998

- [Fitzgerald et al, 1971] A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley Jr. & Alexander Kusko *Electric Machinery* McGraw-Hill, third edition, 1971
- [Fitzgerald et al, 1990] A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley Jr. & Alexander Kusko *Máquinas Eléctricas* McGraw-Hill, quinta edición, 1997
- [Goldstein, 1950] Herbert Goldstein *Classical Mechanics* Adison Wesley, 1950
- [Khalil, 1996] Hassan K. Khalil *Nonlinear Systems* Prentice Hall, 1996
- [Kopka & Daly, 1993] Helmut Kopka & Patrick W. Daly *A Guide to L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X* Adison Wesley, 1993
- [Krause, 1986] Paul C. Krause *Analysis of Electric Machinery* McGraw-Hill, 1986
- [Kuo, 1995] Benjamin C. Kuo *Automatic Control Systems* Prentice Hall, 1995
- [Lamport, 1985] Leslie Lamport *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X* Adison Wesley, 1985
- [Leonhard, 1996] Werner Leonhard *Control of Electrical Drives*. Springer 2nd Edition, 1996
- [Meisel, 1966] Jerome Meisel *Principles of Electromechanical Energy Conversion*. McGraw-Hill, Inc., 1966
- [Murphy & Turnbull,] J. M. D. Murphy & F. G. Turnbull *Power Electronic Control of AC Motors* Pergamon Press
- [Nijmeijer & Sachft ,1990] Henk Nijmeijer, Arjan van der Sachft *Nonlinear Dynamical Control Systems*
- [Ortega, Nicklasson & Espinosa, 1996] Romeo Ortega, Per Johan Nicklasson and Gerardo Espinosa Pérez *On Speed Control of Induction Motors Automatica*, vol. 32, no. 3, pp. 455-460, 1996
- [Ortega, R. & Taoutaou, D., 1996] Ortega, Romeo and Taoutaou, D. *Indirect Field Oriented Speed Regulation of Induction Motor is Globally Stable* IEEE trans. on Ind. Elect., vol. 43, No. 2 1996
- [Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramírez, 1999] Romeo Ortega, Antonio Loría, Per J. Nicklasson & Hebertt Sira-Ramírez *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications* 1999
- [Sepulcre, Jankovic & kokotovic, 1997] R. Sepulchre, M. Jankovic & P. V. Kokotovic *Constructive Nonlinear Control* Springer, 1997
- [Slotine & Li, 1991] Jean-Jacques E. Slotine, Weipinng Li *Applied Nonlinear Control* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991



- [Spong & Vidyasagar, 1989] Mark W. Spong & M. Vidyasagar *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 1989
- [Torres, 1998] Marco Antonio Torres Bribiesca *Identificación de Parámetros del motor de Inducción utilizando el Filtro de Kalman Extendido* Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1998
- [Verl & Bodson, 1998] Alexander Verl & Marc Bodson *Torque Maximization for Permanent Magnet Synchronous Motors* IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 6, no. 6, november 1998
- [Wellstead, 1979] P. E. Wellstead *Introduction to Physical System Modelling*. Academic Press Inc., 1979
- [De Wit, P., Ortega, R. & Mareels, I., 1996] De Wit, K., Ortega, R. and Mareels, I. *Indirect Field Oriented Control of Induction Motor is Robustly Globally Stable* Automatica, vol. 32, No. 10, 1996