



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VIBRACIONES EN UNA COLUMNA GRANULAR

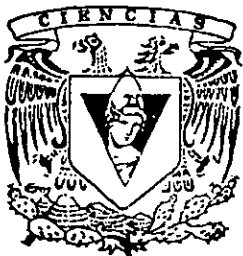
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

JUAN VALENTIN ESCOBAR SOTOMAYOR



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAMON PERALTA-FABI

MEXICO, D.F.

FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARIA

28/1/28

2000



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias, UNAM.

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias.
PRESENTE

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de tesis que lleva el título:
"Vibraciones en una columna granular"

realizado por: ESCOBAR SOTOMAYOR JUAN VALENTIN

con número de cuenta 9550447-2 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. RAMON PERALTA FABI
Propietario

DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN
Propietario

DRA. CATALINA ELIZABETH STERN FORGACH
Suplente

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

Suplente
DR. RAUL MAURICIO RECHTMAN SCHRENZEL

Ramon Peralta Fabi

[Signature]

Catalina Stern

Pablo Padilla

[Signature]

Consejo Departamental de Física.

[Signature]
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura.



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

A mis padres, que me han dado siempre su amor y apoyo incondicional, que creen en mí aún en mis momentos más bajos.

A mi hermana, quien asegura que esta tesis no es más que un somnífero paginado.

A mi familia.

A los físicos y a Tuchick. A las biólogas (benditas) y a Luis. A Eréndira y a Mildred. A Gabriel y a Rodrigo.

A Martín Romaña, a Alejandra Vidal Olmos.

Al pastito de la facultad, testigo de innumerables miradas furtivas.

Agradezco a Ramón por su invaluable asesoría y amistad.

A César por la parte de electrónica.

A Nano por su ayuda en la parte computacional.

A Jimena por la figura 4.1.

A Gabo por tantas y provechosas discusiones.

A mis maestros, en particular a Marta Sánchez, Laura Fronjosá, César Rincón, Julieta Fierro, Eugenio Leykoo, M.E. Brandan, David Koo y Hèrve Lemánsec.

A la Facultad de Ciencias.

A la UNAM.

*"It would have been more impressive if it
flowed the other way"*

-Oscar Wild, acerca de las cataratas del Niágara.

*"Imagination is more important than knowledge (but
thanks for the Nobel Prize, anyway)"*

-Albert Einstein, 1921.

Resumen

Se estudian las propiedades de una columna granular unidimensional de N partículas sujetas a la fuerza de gravedad, que colisionan entre si con coeficiente de restitución ϵ . La energía que saca a las partículas de su equilibrio proviene de una base que transfiere energía a la partícula más cercana a ella.

El presente trabajo consiste de tres partes, siendo las primeras dos teóricas y la última experimental. En el primer capítulo se analizan las colisiones de una partícula con una base móvil, donde se construye un parámetro adimensional que caracteriza el perfil de velocidad de la partícula tras su colisión con la base. En la segunda sección del capítulo se estudia la colisión de dos partículas puntuales usando como base una pared térmica.

A continuación se estudian las características para $N > 2$, donde ni las condiciones iniciales, ni la velocidad característica de la base influyen en el estado que alcanza asintóticamente el sistema. La columna de partículas puede adquirir una de dos configuraciones específicas dependiendo únicamente del parámetro $N(1 - \epsilon)$, y una última que además depende de N . A estas configuraciones se les llama estado "levitado", estado "levitado oscilante" y estado "no levitado". La formación de cúmulos cuya posición oscila con el tiempo es una característica importante del estado "levitado oscilante". El periodo de oscilación de estos cúmulos es medido. Cuando el sistema está

en un estado "levitado", se muestra que el sistema de N partículas puede verse como el de una sola en un medio viscoso.

Otros factores que se estudian y que son determinantes en la caracterización del sistema son : el número de colisiones que se llevan a cabo en la columna, la energía de la última partícula como función del tiempo, la altura del centro de masa con respecto a la de la columna y la energía disipada, por partícula, por unidad de tiempo.

En la tercera parte del trabajo se analiza el problema experimentalmente. Se coloca un número determinado de balines de acero en una columna vertical a los que se inyecta energía por medio de una base que se mueve sinusoidalmente. Utilizando pares de emisores-detectores, se cuenta el número de balines que pasan a ciertas alturas como función del tiempo. Al comparar estos resultados con los obtenidos teóricamente, se encuentra que el comportamiento de la columna de balines corresponde al de un estado "levitado oscilante".

Indice

Resumen

I Introducción

i) ¿Qué es un medio granular?	1
ii) Marco Histórico	2
iii) Principales áreas de estudio	3
iv) Motivación y antecedentes	5

II Una y dos Partículas

I) Una partícula con una base sinusoidal	9
i) Descripción del problema	10
ii) Parámetros relevantes y construcción de las distribuciones	13
II) Dos partículas con una base térmica	26

III N partículas

i) Estados estacionarios	35
ii) Colapso inelástico	48
iii) Cúmulos	51
iv) Una sola partícula en un medio viscoso	54
v) Fases	62

IV Experimento	
i) Diseño experimental ideal	73
ii) Descripción del experimento	75
Conclusiones	80
Bibliografía	85
Apéndice	86

Capítulo I

Introducción

i) ¿Qué es un medio granular?

La física de medios granulares se avoca al estudio del comportamiento colectivo de agrupaciones de objetos sólidos. Estos objetos pueden ser desde granos de sal hasta polvo que forma anillos planetarios [1].

Las propiedades de los medios granulares dependen, entre otras cosas, de la naturaleza de las interacciones entre las mismas partículas, además de su interacción con el medio que las rodea. Generalmente las interacciones que hay que tomar en cuenta son disipativas, a causa de la fricción y de la inelasticidad de las colisiones. Típicamente, la energía de un grano es varias órdenes de magnitud superior a $k_b T$ (donde T es la temperatura y k_b la constante de Boltzmann), por lo que la temperatura no juega un papel importante en la dinámica de los medios granulares. Por este motivo, los argumentos termodinámicos clásicos no se pueden aplicar. Además, en muchos fenómenos se encuentra histéresis, por lo que posiblemente las configuraciones metaestables las que gobiernen su comportamiento [2].

Otro fenómeno interesante en el estudio de los medios granulares es el de granos confinados en silos. La presión que ejercen los granos sobre la base tiene el mismo comportamiento que el de un líquido confinado si el medio tiene una altura de unos cuantos diámetros de granos, pero este comportamiento cambia a partir de una altura crítica.

Los medios granulares se comportan de maneras distintas a como lo hace un sólido, un líquido o un gas, por lo que se les podría considerar como un estado adicional de la materia [3]. Si bien en ciertos regímenes pueden exhibir características muy similares a cada uno de estos estados.

ii) Marco Histórico [4]

El primer hombre en incursionar en este terreno fue Leonardo de Vinci, quién llevó a cabo una demostración experimental simple y clara de las leyes del frotamiento en seco, que están relacionadas con pilas de arena.

En el siglo XVIII, Charles Coulomb escribió un artículo decisivo y todavía frecuentemente citado, titulado "Ensayo sobre una aplicación de reglas de máximos y mínimos a algunos problemas de estática, relativos a la Arquitectura". En él, Coulomb describe observaciones experimentales sobre el equilibrio de los taludes, la estabilidad de edificios de piedra y otras construcciones. Este trabajo es la base de las leyes de Coulomb sobre el frotamiento seco de sólidos con sólidos y sobre su extensión al dominio de los medios granulares, y puede considerarse que se trata del artículo fundador de esta disciplina.

En 1780, Ernst Chladni hizo observaciones suficientemente curiosas sobre las diferencias de comportamiento entre materiales granulares ligeros y otros más pesados y

gruesos. Sus experimentos fueron retomados y confirmados tiempo después por Oersted (1777-1851).

Alrededor de 1831, Michael Faraday se interesó, en relación con sus investigaciones sobre la inestabilidad hidrodinámica, en los problemas de pilas de granos sujetos a vibración. Planteó el efecto del aire en los procesos de la forma de una pila de material granular.

Partiendo de algunas de las ideas de Coulomb, Rankine analizó en 1857 de manera teórica aspectos de la fricción en medios granulares, a partir de los cuales estableció los ahora llamados estados activos y pasivos de Rankine.

Los problemas sobre el equilibrio de fuerzas en medios granulares en silos fueron estudiados tanto por Roberts en 1884, como por Janssen algunos años después y por Rayleigh en 1906.

A finales del siglo XIX, Reynolds hizo importantes contribuciones en el campo, en particular relacionadas con la dilatancia y con los ángulos que forman las pilas constituidas por materiales granulares.

En el siglo pasado aumentó el interés por el estudio de los medios granulares, especialmente a partir de los años 90's.

iii) Principales áreas de estudio

Las áreas que más atención han recibido en los últimos años y sobre las que se han escrito numerosos reportes científicos son :

- 1) Segregación .- Cuando un material granular es agitado de manera apropiada, las partículas de distintos tamaños tienden a separarse, yéndose las de mayor tamaño

hacia la superficie sin importar su densidad [5]. Este fenómeno también se encuentra en largos cilindros o tambores que giran muy lentamente en torno a un eje horizontal. Aquí las partículas van cambiando de posición por medio de sucesiones de avalanchas y los distintos materiales se agrupan en franjas a lo largo del eje [6,7]. En oposición a este fenómeno, es común en la industria la necesidad de mezclar dos materiales granulares en iguales proporciones.

- 2) Avalanchas .- Dependiendo del número de partículas que lo compongan, los medios granulares pueden apilarse hasta alcanzar ángulos críticos con la horizontal, después del cuál se forman avalanchas que reducen este ángulo[8,9].
- 3) Confinamiento en silos.- Dentro de la industria alimenticia, el confinamiento de granos y semillas juega un papel muy importante. Uno de los fenómenos más curiosos es el de arqueo. La presión que ejerce una columna de granos sigue la recta hidrostática hasta que a una altura crítica la recta cambia su forma y tiende a un valor constante. En otras palabras, para alturas suficientemente grandes de la columna, la presión que ejerce la columna ya no depende de su altura [10,11]. Este efecto es debido a que el peso de los granos se distribuye de modo tal que se forman arcos de fuerza que depositan parte de su peso en las paredes del contenedor. Otro fenómeno importante y no trivial que aparece como consecuencia del arqueo, es el vaciado de los silos.
- 4) Materiales sujetos a vibración.- Los materiales granulares sujetos a vibración presentan comportamientos peculiares [12,13,14]. Si se tiene una capa formada por entre 3 y 30 partículas y la base se somete a vibración, se forman patrones superficiales en dos dimensiones que pueden ser cuadros, hexágonos, o espirales, dependiendo del valor del parámetro adimensional $\Gamma=4\pi^2A^2g^{-1}$, donde g es la

aceleración de la gravedad, y A y f son la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones. También es posible encontrar los llamados oscilones que son excitaciones circulares de frecuencia $f/2$. Ver figura 1.

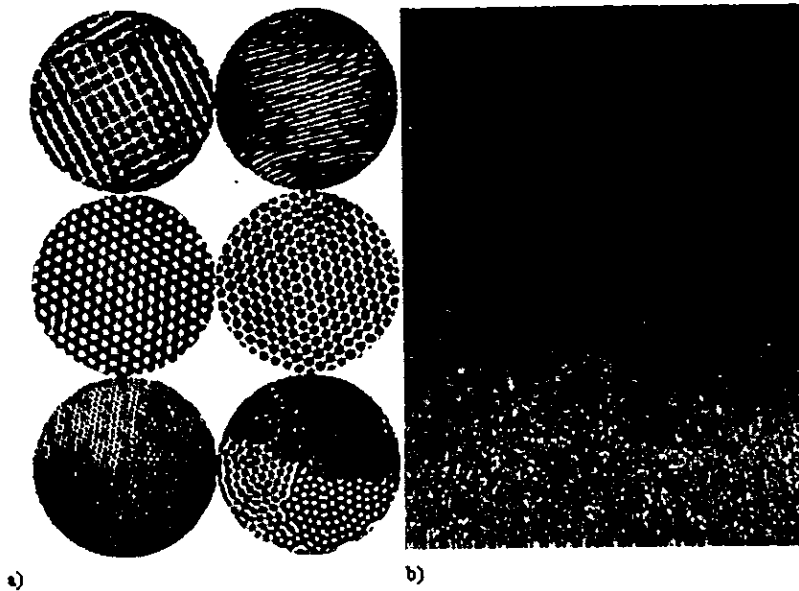


Figura 1

a) Patrones formados por arena vibrada. B) Oscilones
(fuente: <http://chaos.ph.utexas.edu/research/granular/sandpic.html>)

iv) Motivación y antecedentes

Dentro del mismo campo de la industria alimenticia se presenta el problema del transporte de granos y semillas. Si los granos son sometidos a vibración, pueden alcanzar un nuevo estado mecánico llamado de fluidización que hace más fácil su transporte [15]. Tal sistema se utiliza también en la industria farmacéutica.

Este fenómeno de fluidización se da también en una y dos dimensiones. En cualquiera de los casos, la característica común es que se inyecta energía a un sistema que la disipa a través de colisiones inelásticas y fricción. Lo interesante es conocer las configuraciones específicas que adquiere el sistema sometido a estas condiciones.

El objetivo de este trabajo es caracterizar un sistema unidimensional de partículas esféricas idénticas (que tienen el mismo diámetro y el mismo coeficiente de restitución) sujetas al campo gravitacional y a las que se les transfiere energía por medio de una base vibrante.

Los antecedentes pueden encontrarse principalmente en dos trabajos [16,17]. En el primero se estudia, por medio de una simulación computacional, un sistema de partículas cuasielásticas en una dimensión. La inyección de energía se da a través de las colisiones de la partícula inferior con la base, que es para este caso una "pared térmica" inmóvil. Cada vez que la partícula colisiona con la base, adquiere una velocidad tomada de la función de distribución

$$W(v) = (2v/\alpha^2) e^{-(v/\alpha)^2}, \quad (1.1)$$

donde α caracteriza a la base y v es la velocidad. De este modo la velocidad que adquiere la partícula estará descorrelacionada de aquella con la que colisionó con la base. En este artículo trabajan con doscientas partículas y coeficientes de restitución que varían desde 0.9999 hasta 0.998. Para cada altura obtienen los perfiles de densidad y velocidad y comparan estos resultados con otros obtenidos teóricamente usando la ecuación de Boltzmann. Para ello desarrollan las soluciones de la función de distribución $f(x,v)$ en potencias de qN , donde $q = (1-\epsilon)/2$, ϵ es el coeficiente de

restitución y N el número de partículas. Una vez hecha la expansión encuentran las soluciones aproximadas a primer y segundo orden y a partir de ellas obtienen los perfiles de velocidad y densidad. De acuerdo con sus resultados, la densidad disminuye exponencialmente conforme la altura aumenta.

En el segundo artículo también se analiza el problema usando una simulación computacional, pero con la diferencia de que usan una base móvil, cuya posición está dada por una función de diente de sierra. Obtienen tres diferentes estados como función del parámetro $\gamma = 2qN$. Si este parámetro es mucho menor que uno, entonces encuentran una fase a la que llaman gaseosa, en donde la densidad también disminuye conforme la altura aumenta. Para valores de γ entre 1.5 y 3, encuentran la aparición de un cúmulo cerca de la base. A este estado le llaman parcialmente condensado. Si $\gamma > 3$ las partículas se colapsan en la base, por lo que esta fase lleva el nombre de condensada. La aparición de estas fases es consecuencia de considerar colisiones inelásticas.

El presente trabajo consiste de tres partes, siendo las primeras dos teóricas y la última experimental. En la primera se analizan las colisiones de una partícula con una base móvil y la colisión de dos partículas puntuales usando como base una pared térmica.

A continuación se estudian las características para $N > 2$, donde ni las condiciones iniciales, ni la velocidad característica de la base influyen en el estado que alcanza asintóticamente el sistema. La columna de partículas adquiere una configuración específica dependiendo únicamente del parámetro $N(1 - \epsilon)$. A estas configuraciones se les llama "levitada", "levitada oscilante" y "no levitada".

En la tercera parte se analiza el problema experimentalmente. Se colocan un número determinado de balines de acero en una columna vertical a los que se inyecta energía por medio de una base que se mueve sinusoidalmente. Utilizando pares de emisores-detectores, se cuenta el número de balines que pasan a ciertas alturas como función del tiempo. Al comparar estos resultados con los obtenidos teóricamente, se encuentra que el comportamiento de la columna de balines corresponde al de una fase semicondensada. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se presentan en el último capítulo.

Capítulo II

II.1

Una partícula

En esta sección del capítulo II, describimos el comportamiento de una partícula puntual sujeta a la gravedad, que colisiona con una base que se mueve sinusoidalmente. La descripción se hace construyendo una función de distribución que nos da la probabilidad de que la partícula adquiera cierta velocidad (v_p') después de su choque con la base .

A partir de los casos analizados se puede concluir que el comportamiento es ciertamente complejo. Sin embargo, es posible construir un parámetro adimensional K que depende de los parámetros del sistema, y que da información sobre la función de distribución. Si $K < 1$, v_p' es continua como función de la fase (s) de la base, y en este caso la función tiene dos máximos locales. Si por el contrario $K \geq 1$, $v_p'(s)$ es discontinua y la función tiene un sólo máximo.

i) Descripción del problema

Nos interesa caracterizar el comportamiento de una columna vertical unidimensional de partículas inelásticas, puntuales e idénticas, sujetas a la fuerza de gravedad y a las cuales se les suministra energía. Esta energía es transferida a la partícula inferior, la que a su vez la transfiere al resto de las partículas por medio de colisiones. En este proceso existe también una pérdida de energía mecánica por la deformación plástica de las partículas al momento de colisionar. Por tratarse de un sistema disipativo, las partículas se mantendrán en movimiento siempre que no se les deje de suministrar energía. Experimentalmente es práctico suministrar la energía por medio de colisiones entre una base móvil y la partícula más próxima a ella, que por tratarse de una columna unidimensional, es la única con la que puede colisionar.

Una parte fundamental del problema consiste en entender cómo se da la transferencia de energía entre la base y una partícula. Además no es práctico simular a la base como un cuerpo extra dentro del problema. Sería conveniente sustituirla por una pared térmica inmóvil que imprima a la partícula una velocidad obtenida de una función de distribución. El objetivo de esta sección es analizar cómo se da la transferencia de energía e intentar construir dicha función de distribución a partir de los parámetros del problema.

Para ello analizamos el problema de una sola partícula puntual que se mueve verticalmente y sobre la cual sólo actúa la fuerza de gravedad. Sea $x(t)$ su posición como función del tiempo. Esta partícula colisiona contra una base que se mueve periódicamente. Supondremos que la posición de la base está dada por la función del tiempo $h(t) = A \text{ sen } (\omega t + s)$, donde ω es la frecuencia angular, A es la amplitud y s es la fase. A

pesar de tratarse de un sistema aparentemente simple, la complejidad de su comportamiento ya ha sido remarcada en trabajos previos [18,19].

Para obtener dicha función deben considerarse en primera instancia las ecuaciones que expresan las relaciones entre las variables en juego. Sean v_p la velocidad de la partícula al momento de chocar contra la base y v_p' la velocidad después del choque. Análogamente v_b y v_b' para la base, y finalmente, m_b y m_p las masas respectivas.

La conservación de momento lineal antes y después de la colisión está representada por

$$v_p m_p + v_b m_b = v_p' m_p + v_b' m_b, \quad (2.1.1)$$

y la definición de coeficiente de restitución ϵ está dada por

$$\epsilon |v_p - v_b| = |v_p' - v_b'|, \quad (2.1.2)$$

donde $\epsilon \leq 1$.

Si $m = (m_p / m_b)$, de las dos ecuaciones anteriores despejamos la velocidad de la partícula después del choque :

$$v_p' = \frac{m v_p + v_b + \epsilon (v_b - v_p)}{(1 + m)} ; \quad (2.1.3)$$

si la masa de la base es mucho mayor que la de la partícula se reduce a

$$v_p' = -v_p \epsilon + v_b (1 + \epsilon). \quad (2.1.4)$$

Sólo analizamos este caso.

Como estamos restringiendo el análisis al de una sola partícula, para conocer la velocidad con la que esta colisionará con la base es necesario, en primera instancia, suponer que se deja caer desde una altura x_1 , o lo que es equivalente, atribuirle una velocidad inicial (v_0) al momento de encontrarse en la posición $x = A$ (ver Fig. 2.1.1). La velocidad de la partícula

al momento del choque se encuentra al resolver la ecuación cinemática $v_p = v_o + g t$, y la de la base, $v_b = Aw \cos (wt + s)$, donde t es el tiempo que transcurre desde que se suelta la partícula desde la altura A hasta su encuentro con la base. En otras palabras, t se encuentra al resolver la ecuación trascendente :

$$A + v_o t + \frac{1}{2} g t^2 = A \sin (wt + s). \quad (2.1.5)$$

El método utilizado consistió en cambiar las posiciones de la base y de la partícula tras pequeños intervalos constantes dt iguales a T/n , siendo n algún entero y $T=2\pi/w$. Cuando la altura de la base era mayor que la de la partícula, se tomó el múltiplo de dt transcurrido como t . Con esto se aseguró que la raíz encontrada fuera la primera; es posible, y relativamente sencillo, calcular y controlar el error que el método induce en v_b' , esto último haciendo n tan pequeño como se desee.

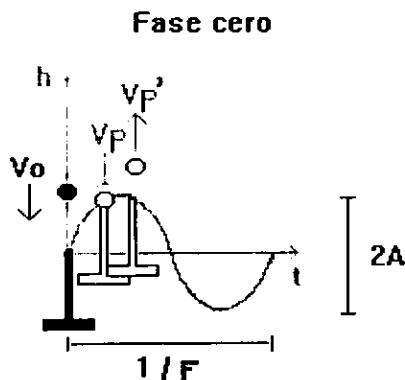


Fig 2.1.1

Para obtener la distribución deseada se hace la siguiente suposición : la probabilidad de que al momento de soltar a la partícula desde una cierta altura x_1 (o desde A con velocidad v_o) la base se encuentre en cualquier altura del plano entre A y $-A$, es la misma. Es decir, no

hay relación entre el momento en que se suelta la partícula y la fase de la base. Para fines prácticos, esto es equivalente a suponer que la fase s con la que inicia su movimiento la base cuando la partícula se encuentra en A es aleatoria. De modo que interesa saber cómo cambia v_p' como función de s para así construir un histograma que conduzca a una función de distribución $f(v_p, v_0)$.

ii) Parámetros relevantes y construcción de las distribuciones.

Recordemos que lo que buscamos a través de este análisis es obtener la velocidad de la partícula justo después de su choque con la base (que comenzó su movimiento con una fase s). Una vez que se obtiene esta velocidad, colocamos a la partícula de nuevo en su posición inicial, $x=A$, y se le asigna la misma velocidad v_0 , cambiando esta vez la fase de la base. Se obtiene así la velocidad de la partícula v_p' como función de la fase.

Sea $t^*(s, A, w, v_0)$ el tiempo que tarda en producirse la colisión. Si A, w y v_0 son constantes, entonces t^* es función únicamente de la fase s , donde s está en el intervalo $(0, 2\pi)$. Dado que v_p' es función tanto de v_b como de v_p y a su vez estas son funciones continuas de t^* , la continuidad de t^* como función de s implicará necesariamente la continuidad de v_p' como función de s . Por lo mismo, una discontinuidad de v_p' será consecuencia de una discontinuidad de $t^*(s)$.

Es claro que si la velocidad de la partícula v_0 es muy baja comparada con la velocidad máxima que puede alcanzar la base (wA) y la aceleración de la base (Aw^2) es mucho mayor que la aceleración de la gravedad, la colisión entre ambas ocurrirá muy cerca de la

posición A para todas las fases iniciales (ver Fig. 2.1.2). En términos de la fase de la base y de acuerdo con la ecuación 2.1.5, el tiempo en el que esto ocurrirá es:

$$t^* = (-s + \pi/2)/w \quad \text{si } s \leq \pi/2, \quad (2.1.6)$$

$$t^* = (-s + 3\pi/2)/w \quad \text{si } s > \pi/2. \quad (2.1.7)$$

Nótese que t es una función continua de s en los intervalos $0 < s < \pi/2$ y $\pi/2 < s < 2\pi$, pero discontinua en $s = \pi/2$, pues justo para esta fase $t^*=0$ y para otra fase infinitesimalmente mayor que esta, tendremos que $t^* = 3\pi/2w$ de acuerdo con la ecuación (2.1.7). Esta discontinuidad de $t^*(s)$ implica, a su vez, la discontinuidad de $v_p'(s)$. Nótese que en $s = \pi/2$ las trayectorias son tangentes. Como veremos más adelante, la condición de tangencia de las curvas en el punto de intersección es crucial para determinar la continuidad de $v_p'(s)$.

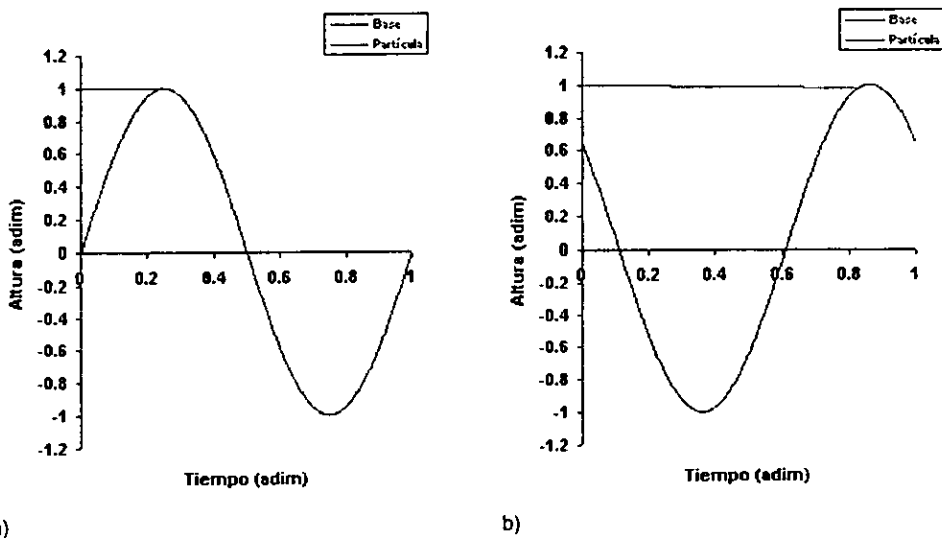


Figura 2.1.2
 Trayectorias de la partícula y de la base dado $V_0 \gg Aw$ y $g \ll Aw^2$.
 El tiempo se adimensionalizó con el periodo de la oscilación y
 la altura con la amplitud de la misma.
 a) Fase = 0 b) Fase = 140°

En el caso opuesto ($v_0 \gg \omega A$ y $A\omega^2 \ll g$), sin importar la fase inicial, la base siempre será alcanzada por la partícula antes de desplazarse apreciablemente (ver Fig. 2.1.3). En este caso, la trayectoria de la partícula es prácticamente una recta vertical al ser comparada con la trayectoria de la base durante un ciclo. Dado que la base no se mueve durante la caída de la partícula, es posible despreciar el factor temporal del movimiento de la base y encontrar a t^* como función de la fase al resolver la siguiente ecuación:

$$Asen(s) = A + v_0 t^* + \frac{1}{2} g t^{*2}, \quad (2.1.8)$$

cuya solución es :

$$t^* = \frac{-v_0/g + [(v_0/g)^2 - 2A(1-\text{sen}(s))/g]^{1/2}}{g} \quad (2.1.9)$$

De aquí observamos que t^* es una función continua de s , y por lo tanto v_p' también lo es.

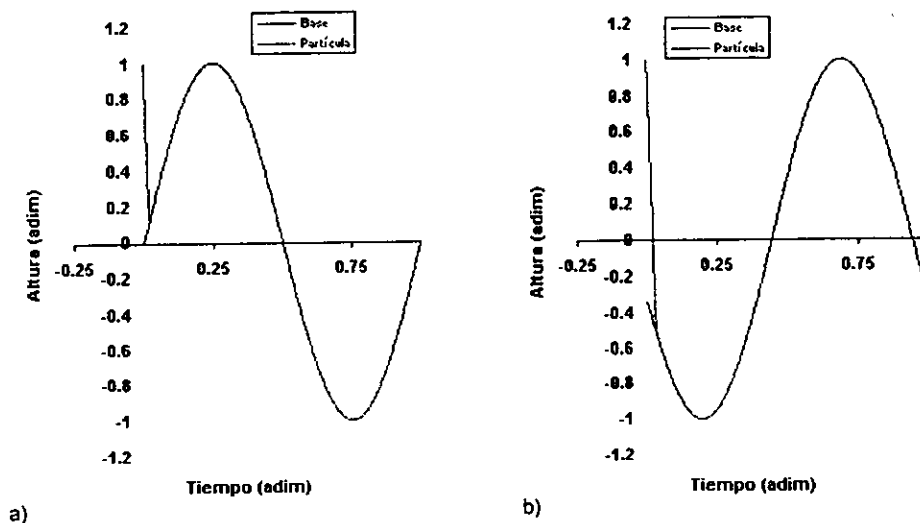


Figura 2.1.3
 Trayectorias de la partícula y de la base dado $v_0 \ll \omega A$ y $g \gg \omega^2 A$.
 Las gráficas fueron recorridas para evitar confusión entre el eje vertical y la trayectoria de la partícula.
 a) Fase = 0 b) Fase = 200°

Hemos visto que v_p' es una función continua de la fase si se cumple que $v_0 \gg \omega A$ y $A\omega^2 \ll g$. En el caso opuesto, $v_0 \ll \omega A$ y $A\omega^2 \gg g$, $v_p'(s)$ es una función discontinua. En ambos casos determinamos la continuidad de $v_p'(s)$ a partir del análisis de la continuidad de $t^*(s)$. Es importante reconocer que la discontinuidad en t^* se debe a que para una fase mayor que $\pi/2$, y aunque la base está muy cerca de la partícula, la base ya está descendiendo y necesita terminar el ciclo para regresar a $h=A$.

A continuación analizamos lo que ocurre para casos intermedios y cuáles son los valores de los parámetros que marcan la transición entre una distribución $v_p'(s)$ continua y una discontinua.

Independientemente de los parámetros del problema, si la fase pertenece al intervalo $(0, \pi/2)$ la base y la partícula colisionarán en algún punto entre $h=0$ y $h=A$ porque las velocidades tienen sentidos opuestos. En este intervalo es imposible que exista una discontinuidad en t^* . Sólo existirá una discontinuidad cuando las velocidades de la partícula y de la base tengan el mismo sentido.

Vemos que en $s=\pi/2$ la colisión se da justo en $h=A$ donde la base tiene velocidad cero.

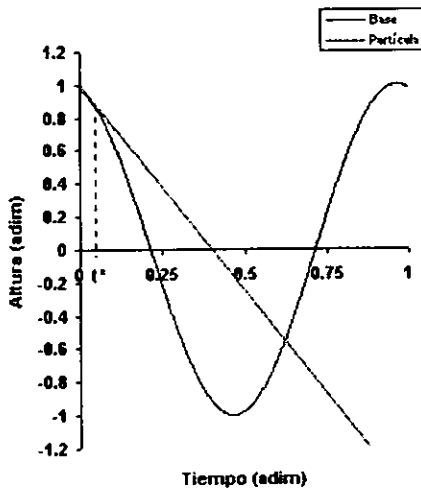
A partir de $s=\pi/2$ existen dos posibilidades : la primera es que la partícula siempre alcance a la base en su movimiento descendente, es decir que para toda altura entre $-A$ y A la velocidad de la partícula sea siempre mayor que la velocidad máxima que puede alcanzar la base (esto es en $h=0$, donde $v_b = \omega A$). Si la velocidad de la base no es mayor a la de la partícula en $h=0$ entonces no lo será para ninguna altura. Visto geoméricamente, la parábola que describe la trayectoria de la partícula intersecta la curva del Seno en todos sus puntos, y $t^*(s) \approx t^*(s+\Delta s)$, siempre que Δs sea suficientemente pequeño.

Pero es posible que después del choque en $h=A$ ($s' = \pi/2$, $v_b = 0$, $v_p = v_0$), exista un valor para la fase s'' ($\pi > s'' > \pi/2$) para el cual la velocidad la base sea igual que la de la partícula en alguna posición entre A y 0 . Entonces para cualquier fase mayor que s'' (digamos s''') la partícula no alcanzará a la base en su movimiento descendente. De este modo, el choque se producirá cuando la base ya haya cruzado el punto $h=0$ pero todavía esté descendiendo, o más aún, cuando la base ya vaya de nuevo hacia arriba. En cualquiera de estos casos, $t^*(s'') \neq t^*(s''')$ por más pequeño que sea Δs , definido como $\Delta s = s''' - s''$. De hecho, $t^*(s'') \approx t^*(s''') + Q$, donde Q es el tiempo en que tarda la base en ir desde la altura de tangencia hasta alcanzar la altura $h=-A$ y regresar hasta colisionar con la partícula. Este problema puede verse como uno geométrico, en el que se busca aquel punto del dominio en el que una parábola es tangente a un Seno. Si este punto existe entonces la distribución será discontinua. De lo contrario será continua.

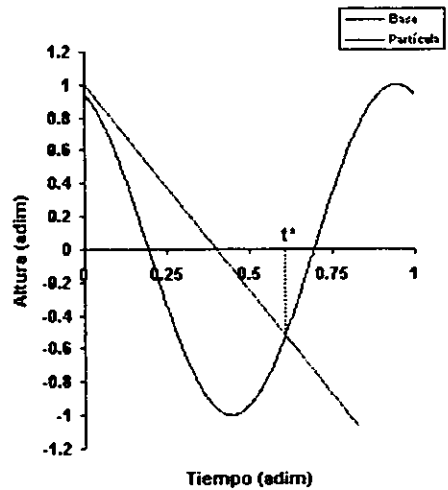
Para hacer este análisis dejamos fija la parábola y movemos la gráfica del seno desde su fase cero hasta la fase en que sean tangentes.

En la figura 2.1.4a se muestra una fase s'' de tangencia a una altura entre 0 y A , y cómo para cualquier fase subsiguiente (figura 2.1.4b), la intersección se producirá después del punto $h=0$.

Por lo anterior, $t^*(s)$ no será continuo y por ende tampoco lo será la velocidad v_p' .



a)



b)

Figura 2.1.4

Trayectorias de la base y la partícula. Se marca t^* al tiempo en el que se intersecan por primera vez.

a) Las trayectorias son tangentes. B) Para una fase ligeramente mayor, t^* es mucho mayor que en la fig. a).

En ambos casos, la trayectoria de la partícula se trazó después de su colisión con la base para favorecer la visualización.

Por el análisis anterior, resulta claro que si la partícula y la base son tangentes para alguna fase, entonces la distribución será discontinua. Si pedimos que, para alguna fase, la partícula y la base tengan la misma posición y velocidad, llegamos a una ecuación de cuarto grado en t^* (ver apéndice) que, para tener solución real, impone restricciones sobre los parámetros del problema. La restricción es: $wA / [v_0 + (g/w)] \geq 0$. Llamamos K a este parámetro. y a partir del valor que tenga podemos afirmar si la distribución será continua o discontinua.

$$K = wA / [v_0 + (g/w)]; \quad K \geq 1 \text{ distribución discontinua,}$$

$$K < 1 \text{ distribución continua.}$$

Si comenzamos con una K pequeña, digamos $K=0.048$, vemos en la figura 2.1.5b una distribución continua y con una forma cercana a la de un coseno, pues las trayectorias nunca son tangentes (figura 2.1.5a)

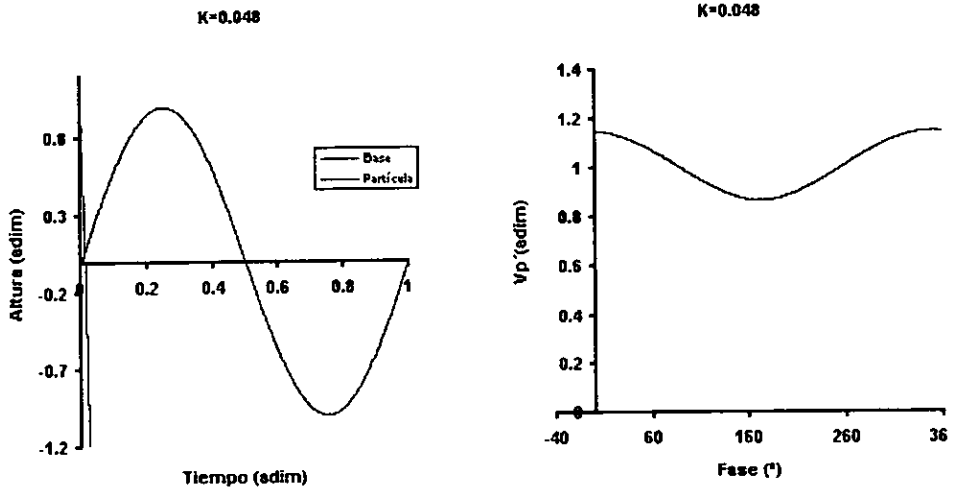


Figura 1.2.5

- a) Trayectoria de la base y de la partícula. Nótese que en el intervalo de altura $(-1,1)$ las derivadas de las curvas nunca son iguales
 b) V_p' como función de la fase. Nótese que la curva es continua. V_p' se adimensionalizó dividiendo entre V_0 .

En la figura 2.1.5a vemos que la velocidad de la partícula (entendida como la pendiente de la curva) es mucho mayor a la de la base (consecuencia de esto es que v_p' es siempre positivo, de acuerdo con la ecuación 2.1.4) para cualquier punto entre A y $-A$.

Al aumentar hasta $K=0.29$, v_p' llega a ser menor (cerca de $s = \pi$, figura 2.1.6b) que la velocidad que alcanza en el valle de la figura 1.2.5b, pues pasados los 90° la velocidad de la base y la de la partícula tienen el mismo sentido y sus magnitudes son del mismo orden.

En la figura 2.1.6a se aprecia cómo la velocidad de la partícula se aproxima más a la de la base pero sigue siendo mayor para todo punto.

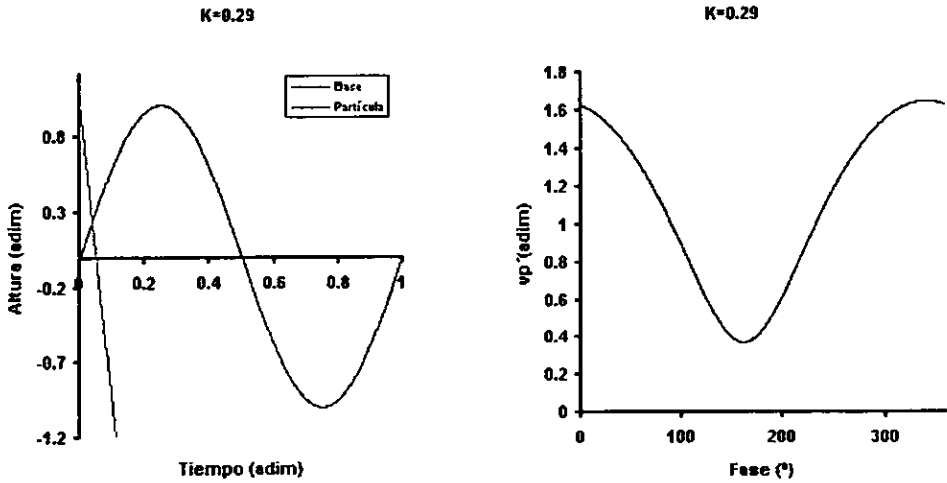
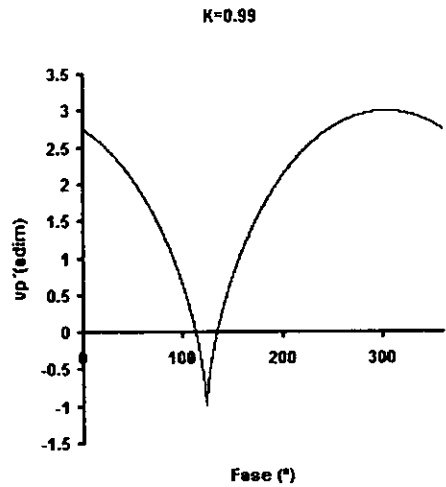
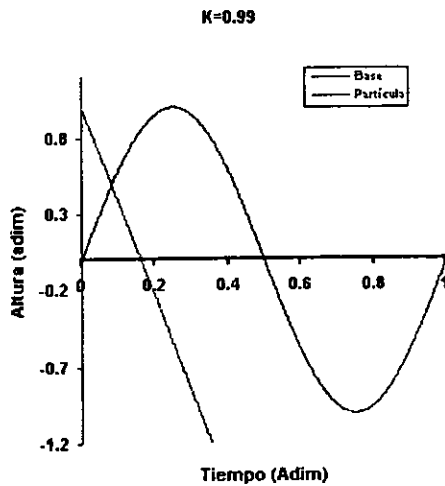


Figura 2.1.6
 a) Trayectorias de la base y de la partícula. Aún no son tangentes.
 b) v_p' como función de la fase.

En $K=0.99$ (Fig. 2.1.7b) el valle que se había formado en la distribución de velocidades se vuelve más agudo todavía, porque la altura a la cual las curvas son tangentes es prácticamente cero (Fig. 2.1.7a).

Así, para $K=2.52$ y como se muestra en la figura 2.1.8b la distribución es discontinua, pues el punto en el cual las curvas son tangentes y se intersectan está por arriba del cero (Fig. 2.1.8a). Es interesante notar que $v_p'(s)$ llega a tomar valores negativos para este valor de K , cosa que ocurre cuando $|v_p \varepsilon| < |v_b (1+\varepsilon)|$ de acuerdo con la ecuación 2.1.4.



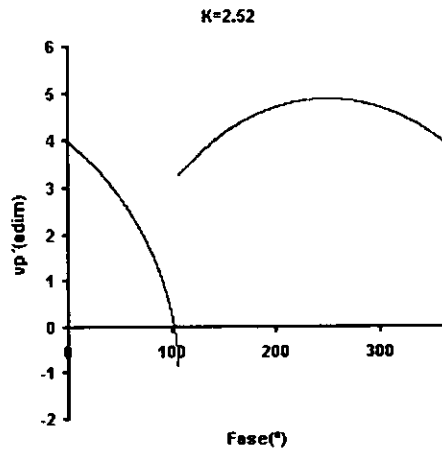
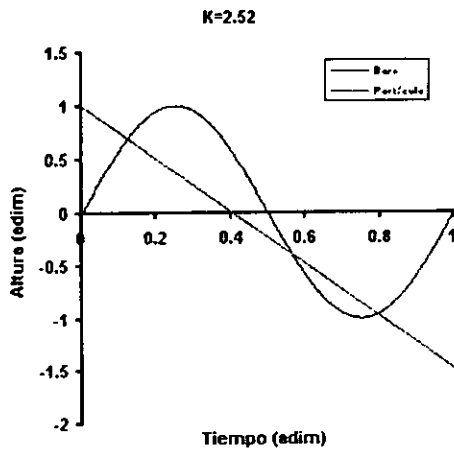
a)

b)

Figura 2.1.7

a) Las trayectorias son prácticamente paralelas en $h=0$.

b) $vp'(s)$ todavía es discontinua.



a)

b)

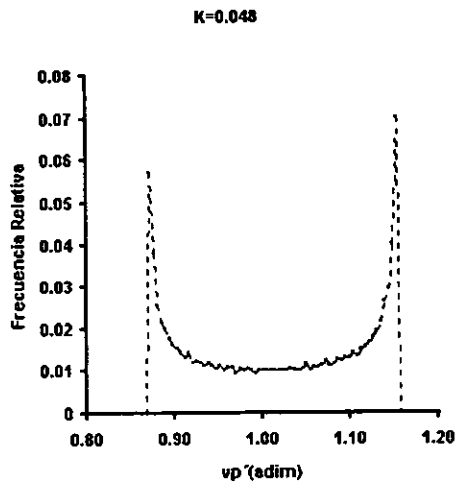
Figura 2.1.8

a) La altura a la cual las curvas son tangentes está por arriba de $h=0$. b) La distribución es discontinua después de $s=90^\circ$.

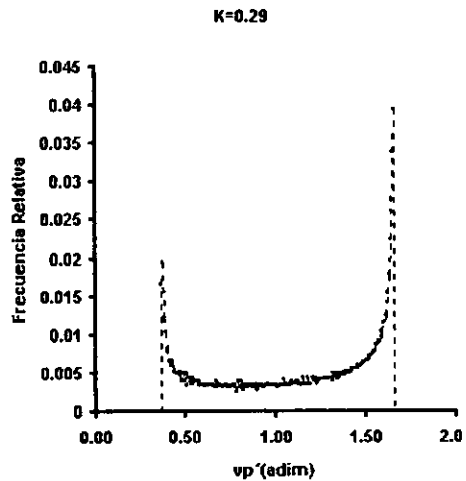
Una vez que tenemos las distribuciones, podemos elaborar los histogramas correspondientes a través de ellas. Para esto construimos intervalos de velocidad y contamos el número de valores que pertenecen en cada intervalo. A pesar de que las gráficas de las distribuciones parecen estar formadas por líneas sólidas, en realidad están compuestas de puntos, pues la simulación se corrió cada décima de grado de modo que cada una de estas gráficas está formada por 3600 puntos. Por lo anterior, es posible contabilizar el número de puntos que pertenecen a cada intervalo. En las siguientes gráficas utilizamos la frecuencia relativa, que es el número de puntos por intervalo, dividido entre el número total de puntos.

Nótese que conforme aumenta K (Fig. 2.1.9), también lo hace el intervalo de velocidades que puede adquirir la partícula. Por como se construye un histograma, aquellos valores de $v_p'(s)$ donde el valor absoluto de la derivada sea pequeño comparado con todos los posibles valores de la derivada, corresponderá a un máximo en el histograma de v_p' . Un caso extremo es que $v_p'(s)$ sea constante, entonces el histograma constará de un solo punto.

En la figura 2.1.9a encontramos dos picos, que corresponden a la cresta y el valle de la figura 2.1.5b. Conforme $v_p'(s)$ pierde simetría y el valle se torna más agudo, el segundo pico del histograma tiende a desaparecer (Fig. 2.1.9b). A partir de que $v_p'(s)$ se hace discontinua, el segundo pico desaparece del todo y el pico que prevalece alcanza mayor altura mientras más grande sea K (Fig 2.1.9d).



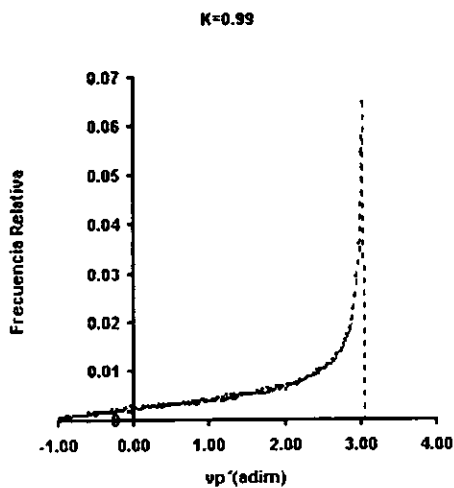
a)



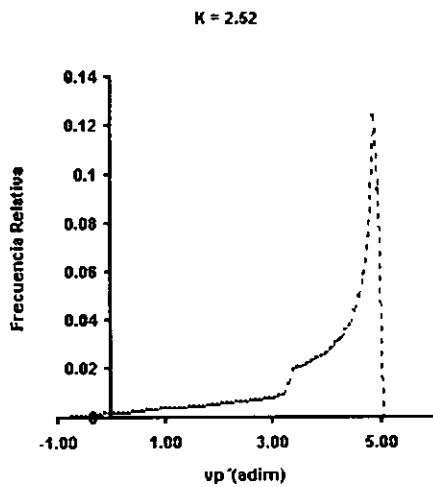
b)

Figura 2.1.9

Histogramas para distintos valores de K. En ambos casos hay dos máximos.



c)



b)

Figura 2.1.9

Histogramas correspondientes a las distribuciones cuya derivada se hace cero en un solo punto.

Es importante aclarar que esta característica del pico se cumple para estos casos aislados, pero no podemos asegurar que la altura del pico sea una función monótonamente creciente de K . De hecho para $K=6.38$ obtenemos un pico cuya densidad relativa es 0.04 (Fig. 2.1.10).

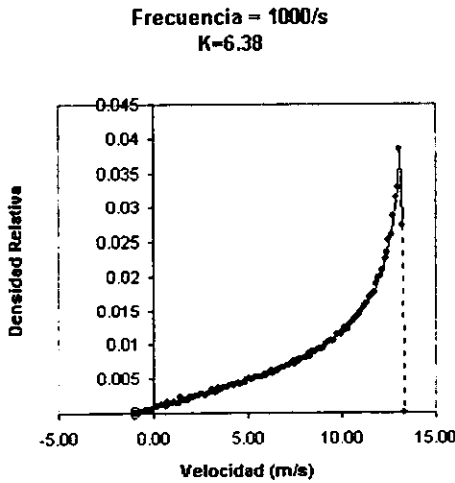


Figura 2.1.10
Histograma de la velocidad de la partícula después de la colisión con la base.

La función de distribución planteada al principio de este capítulo puede derivarse precisamente de estos histogramas, siendo la densidad relativa igual a la probabilidad. Por ejemplo, podemos decir, basándonos en la figura 2.1.9d, que de todas las velocidades v_p' posibles la más probable es la que corresponde al pico. Pero esto no quiere decir que lo más probable sea que la partícula salga rebotada con esa velocidad. Para asegurar eso, se necesitaría además que la altura del pico estuviera por encima de 0.5. Si la altura del pico creciera monótonamente con K , podríamos buscar un valor crítico para K a partir del cual fuera posible hablar de una velocidad más probable, comparada con todo el resto visto como un sólo conjunto.

Es importante recordar que el objetivo de este análisis es entender cómo se lleva a cabo la transferencia de energía de la base a la primera partícula, para después aplicar este resultado, en la medida de lo posible, al problema de N partículas.

En esta sección del capítulo II, analizamos las colisiones de una partícula puntual que colisiona con una base que se oscila armónicamente como función del tiempo. El análisis se centra en la velocidad que adquiere la partícula después de su colisión con la base. Mostramos que la forma de la función de distribución de dicha velocidad puede determinarse a partir de un parámetro adimensional K , construido a partir de la condición de tangencia entre las trayectorias de la base y la partícula.

La obtención de la función de distribución resulta complicada, pues a pesar de que el parámetro construido nos da información sobre la función, K no es una constante del problema. Esto ocurre porque en $h=0$, la velocidad de la partícula cercana a la base no es siempre la misma. Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (2.1.4) la velocidad que adquiere la partícula al colisionar es del orden de la velocidad de la base, de modo que es imposible dar por hecho que $v_0 \gg \omega A$, o que $v_0 \ll \omega A$, que son casos simplificados.

II.2

Dos partículas

En la sección anterior analizamos la velocidad que se le imprime a una partícula por medio de una base que oscila armónicamente en el tiempo. El comportamiento de este sistema resulta complejo, por lo que es necesario introducir una simplificación para analizar sistemas con más partículas. Whelan et al [20] analizan el problema de dos partículas y una base inmóvil, encontrando caos y demostrando que incluso este caso aparentemente trivial es bastante complejo.

Cordero y Ramírez [17] introducen una pared térmica inmóvil que imprime a la partícula una velocidad obtenida de una distribución que no depende de la velocidad con que la partícula colisione contra la base. La función es :

$$W(v) = (2v/\alpha^2) e^{-(v/\alpha)^2}, \quad (2.2.0)$$

donde α es un parámetro que caracteriza a la base. Un caso extremo es tomar como función de distribución a $W(v) = \delta(v-V_0)$. Es decir que independientemente de la velocidad con la que colisione la partícula contra la base, siempre adquirirá velocidad V_0 . La pared no funciona únicamente como fuente de energía, sino también como posible sumidero, pues siempre que la partícula inferior colisione contra ella con una velocidad mayor a V_0 , la pared absorberá el exceso de energía, de modo que la energía de la partícula sea $\frac{1}{2} mV_0^2$.

Bernu et al [16] muestran que el comportamiento general del sistema no depende de la forma específica de la función de la base. A partir de este punto, utilizaremos una base inmóvil que imprime a la partícula inferior una única velocidad.

Los estados de las partículas ahora están dados por (x_1, v_1) y (x_2, v_2) respectivamente, con la partícula 1 más cerca de la base, de modo que $0 \neq x_1 \neq x_2$. Sea h_{col} la altura a la cual colisionan las dos partículas.

De la ecuación (2.1.3) pueden deducirse las siguientes ecuaciones si sustituimos los subíndices (b) de la base y (p) de la partícula por 1 y 2, y si las partículas son idénticas ($m=1$):

$$v_1' = v_1 - \frac{(1 + \epsilon)v_{12}}{2}, \quad (2.2.1)$$

$$v_2' = v_2 + \frac{(1 + \epsilon)v_{12}}{2}, \quad \text{donde } v_{12} = v_1 - v_2. \quad (2.2.2)$$

Para resolver el problema completo analíticamente es necesario plantear las ecuaciones de movimiento y de pérdida de energía durante la colisión de las partículas, además de la de pérdida o ganancia de energía al chocar la partícula inferior contra la base.

Sin pérdida de generalidad elegimos las siguientes condiciones iniciales: la partícula inferior se encuentra en contacto con la base y tiene una velocidad inicial V_0 que caracteriza a la base y la partícula superior se encuentra a la altura s_2 y tiene velocidad $-v_2$ (va hacia abajo).

Sea E_i la energía de una de las partículas. A continuación definimos los siguientes parámetros adimensionales.

$$\tau = g t / V_0, \quad v_i = v_i / V_0, \quad (2.2.3, 2.2.4)$$

(Tiempo) (Velocidad)

$$s_i = 2gh_i / V_0^2, \quad E_i = 2 \cdot E_i / V_0^2 m \quad (i = 1, 2). \quad (2.2.5, 2.2.6)$$

(Posición) (Energía)

Los nuevos parámetros de posición (s_i) no deben confundirse con la fase (s) utilizada al principio del capítulo.

Las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) quedan exactamente igual, substituyendo v_i por v_i .

Transcurrido un tiempo τ , las nuevas posiciones de las partículas serán:

$$s_2'(\tau) = s_2 + 2v_2\tau - \tau^2 \quad , \quad s_1'(\tau) = 2\tau - \tau^2 . \quad (2.2.7, 2.2.8)$$

Y sus velocidades:

$$v_1'(\tau) = 1 - \tau \quad , \quad v_2'(\tau) = v_2 - \tau . \quad (2.2.9, 2.2.10)$$

Estamos suponiendo que V_0 es suficientemente grande como para que las dos partículas colisionen antes de que la partícula 1 tome velocidad negativa. En ese caso, igualando la ecuación (2.2.7) a la ecuación (2.2.8), las partículas colisionarán al tiempo :

$$\tau = s_2/2 (1 + v_2) . \quad (2.2.11)$$

El procedimiento parece sencillo: substituímos la Ec. (2.2.11) en las Ecs. (2.2.7 - 2.2.10) para encontrar las posiciones y velocidades al momento de la colisión. Después substituímos las Ecs. (2.2.9) y (2.2.10) en las Ecs. (2.2.1) y (2.2.2) respectivamente para encontrar las velocidades después de la colisión (v_1'' y v_2''). Ahora encontramos el tiempo que le llevará a la partícula inferior chocar contra el piso mediante la ecuación :

$$\tau' = -v_1''(\tau) + (v_1''(\tau)^2 + s_1'(\tau))^{1/2} . \quad (2.2.12)$$

Para obtener la velocidad (v_2''') de la partícula superior cuando la inferior ya ha alcanzado la base, substituímos τ por τ' y v_2 por v_2'' en la Ec. (2.2.9). Nótese que la variable de velocidad tiene una "prima" más que la posición por el cambio de velocidad que se efectúa en la colisión. Para obtener la posición s_2''' utilizamos la Ec. (2.2.7), de modo que

$$s_2''' = s_1' + 2v_2''\tau' - \tau'^2 . \quad (2.2.13)$$

La partícula inferior ha regresado a su estado inicial de posición igual a cero y velocidad igual a 1, pero tenemos nuevos valores para la posición y velocidad de la partícula superior. Hemos completado un ciclo, la primera iteración. Para obtener el estado de la segunda partícula tras la segunda iteración, sustituimos a s_2 y a v_2 por s_2'' y v_2'' respectivamente y repetimos todo el proceso. Rigurosamente, podemos afirmar que el estado de la segunda partícula tras la n -ésima iteración depende de las condiciones iniciales s_2 y v_2 . Resolver el problema analíticamente no es trivial (ni siquiera para la primera iteración), y no parece arrojar información sobre algún estado que se alcance asintóticamente. Por estado asintótico entendemos a aquel que se alcanza a tiempos largos.

A pesar de los impedimentos para resolver el problema analíticamente, las iteraciones se pueden realizar usando una computadora, de modo que se pueda llevar un registro del estado de la segunda partícula como función del número de iteraciones realizadas.

Lo que resulta muy curioso es que en la simulación computacional aparecen estos estados asintóticos para cualquier valor de ϵ . Además, estos estados no dependen de las condiciones iniciales, es decir que sólo dependen de ϵ . Piasecki [21] llama a estos estados asintóticos, estados estacionarios y propone un método para describirlos.

La clave consiste en suponer de antemano que el sistema se encuentra en un estado estacionario. Esto implica que aunque la suma de las energías de las partículas decrece en cada colisión, la energía de la partícula superior se mantiene constante. Además, los periodos de ambas partículas son iguales.

Sean $E_{1\uparrow}$ y $E_{2\downarrow}$ las energías de las partículas 1 y 2, respectivamente, al momento de la colisión, y $E_{1\downarrow}$ y $E_{2\uparrow}$ después de ella. Recordemos que por definición de estado estacionario, $E_{2\downarrow} = E_{2\uparrow}$. De la definición de coeficiente de restitución y de la ecuación de

conservación de cantidad de movimiento, podemos obtener la energía perdida en cada colisión como función de las velocidades con las que las partículas colisionan. Haciendo los mismos cambios de variable, obtenemos la pérdida de energía en cada colisión :

$$\Delta E = (E_{1\uparrow} + E_{2\downarrow}) - (E_{2\uparrow} + E_{1\downarrow}) = v_{12}^2 (1 - \epsilon^2) / 2. \quad (2.2.14)$$

Por las características de la base, $E_{1\uparrow} = 1$, y de la suposición de que $E_{2\downarrow} = E_{2\uparrow} = E_2$ obtenemos

$$-v_2 = v_2 + (1 + \epsilon) v_{12} / 2, \quad (2.2.15)$$

$$E_{1\downarrow} = 1 - v_{12}^2 (1 - \epsilon^2) / 2. \quad (2.2.16)$$

El tiempo que le lleva a la partícula inferior alcanzar la velocidad precolisional v_1 , partiendo de la base es $\tau_{\uparrow} = (1 - v_1)$. Para regresar a la base, la partícula tarda un tiempo τ_{\downarrow} , en el cual su velocidad postcolisional dada por la Ec. (2.2.2) alcanza el valor $-(E_{1\downarrow})^{1/2}$. De modo que

$$-(E_{1\downarrow})^{1/2} = (v_1 - (1 + \epsilon) v_{12} / 2) - \tau_{\downarrow}. \quad (2.2.17)$$

Por otro lado, el periodo de la partícula 2 es el tiempo necesario para realizar un movimiento de tiro vertical desde la altura de la colisión con velocidad inicial $-v_2$ y de regreso hasta el punto de partida. Este tiempo es $\tau = -2v_2$.

Por consistencia debe cumplirse que,

$$\tau = -2v_2 = (\tau_{\uparrow} + \tau_{\downarrow}) = 1 - (1 + \epsilon) v_{12} / 2 + (E_{1\downarrow})^{1/2}. \quad (2.2.18)$$

Las ecuaciones (2.2.15, 2.2.16) y (2.2.18) bastan para caracterizar el estado estacionario, pues a partir de ellas obtenemos las siguientes relaciones:

$$v_{12} = 4 / (3 + \epsilon) = (v_1 - v_2), \quad E_{1\downarrow} = (1 + 3\epsilon)^2 / (3 + \epsilon)^2. \quad (2.2.19, 2.2.20)$$

Para obtener la energía de la partícula 2 como función de ϵ y $E_{1\uparrow}$ notamos que

$$E_2 = v_2^2 + E_p, \quad (2.2.21)$$

donde E_p es la energía potencial por encontrarse a la altura h_{col} . Podemos encontrar esta energía como función de las variables conocidas pues

$$E_p = 1 - v_1^2. \quad (2.2.22)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2.15), (2.2.19), (2.2.21) (2.2.22) obtenemos

$$E_2 = (1 + 14\epsilon + \epsilon^2) / (3 + \epsilon)^2. \quad (2.2.23)$$

Las partículas colisionan arriba y abajo de h_{col} alternadamente hasta que pasado cierto número de colisiones (mismo que depende de ϵ) alcanzan el estado estacionario. En la figura 2.2.1 se grafica h_{col} como función del número de iteraciones para distintos valores de ϵ . Podemos ver cómo, mientras más cercano a 1 sea ϵ , más colisiones les llevará alcanzar el estado estacionario. El caso elástico es una excepción, pues se alcanzan alternadamente dos h_{col} . Si ϵ es cercano a uno, tanto los puntos que marcan las alturas de colisión superiores a h_{col} como las inferiores, forman rectas cuya intersección es precisamente h_{col} .

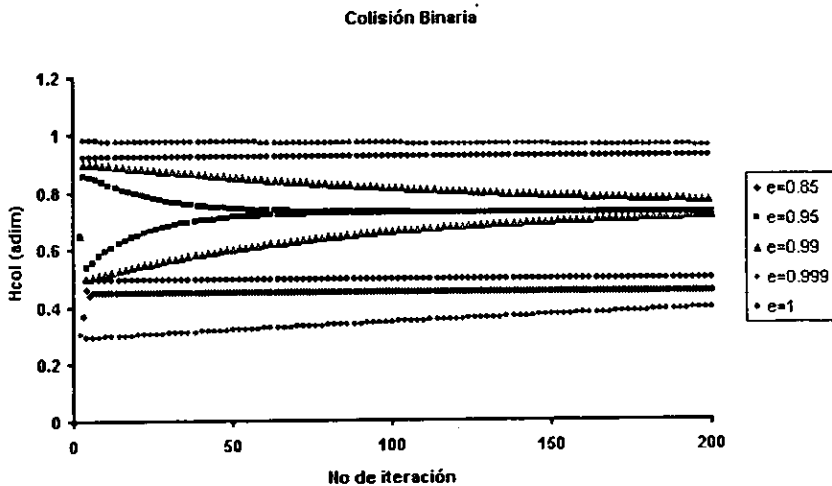


Figura 2.2.1

Altura a la que colisionan las partículas como función del número de iteración para distintos valores del coeficiente de restitución.

Conforme nos acercamos a $\epsilon=1$ las pendientes de estas rectas van disminuyendo hasta que en $\epsilon=1$ se hacen paralelas y con pendiente cero. Dado que en el desarrollo analítico estamos suponiendo que se alcanza un estado estacionario con un único h_{col} , no es extraño que las ecuaciones (2.2.19, 2.2.20) y (2.2.21) no describan este estado singular.

Por otro lado, la energía que se pierde por efecto de las colisiones toma valores en torno a un ΔE_{col} de manera similar a la que la altura de colisión converge a h_{col} . La figura 2.2.2 muestra a h_{col} como función de ϵ .

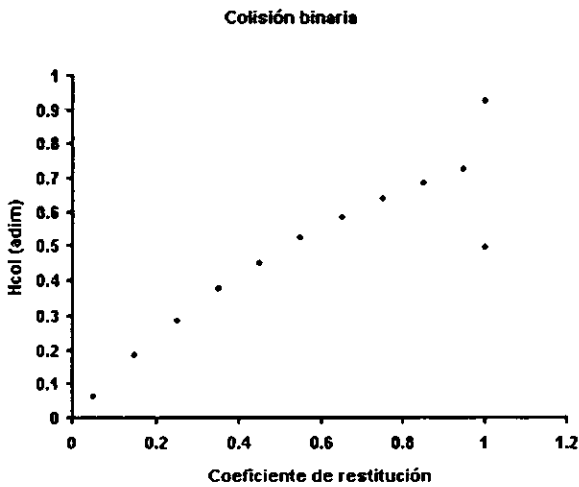


Figura 2.2.2
Altura de colisión asintótica.

Una vez que se alcanza el estado estacionario podemos comprobar la validez de las ecuaciones 2.2.19, 2.2.20 y 2.2.21. Como ejemplo de esto, veamos el caso $\epsilon=0.8$ para el que calculamos $E_{1\downarrow} / E_{1\uparrow} = 0.80055402 = \gamma$; comprobamos que este es justo el valor que alcanza y tras correr la simulación, como se muestra en la gráfica de la figura 2.2.3.

La motivación para este análisis fue la excepcional sincronización que se observa en las simulaciones, de modo que podemos asegurar que si el sistema alcanza un estado estacionario, entonces las relaciones obtenidas deben sostenerse. Sin embargo no nos proporciona un criterio para determinar cuándo o cómo va a llegar el sistema a dicho estado.

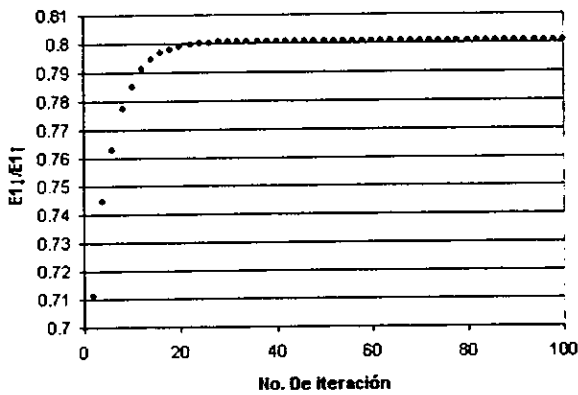


Figura 2.2.3

$E1j/E1i$ como función del número de iteración. El valor asintótico es igual a 0.80, como es previsible en el análisis de Piasecki.

Capítulo III

N partículas

En este capítulo analizamos un sistema con $N > 2$ partículas con la misma pared térmica utilizada en el capítulo anterior. Encuentran estados estacionarios que no dependen de las condiciones iniciales del sistema, más que para el caso elástico. En cualquiera de estos estados estacionarios, el número de colisiones por ciclo es igual a N . Dado N , aparecen cúmulos de partículas a partir de cierto valor de ϵ , cuya posición oscila con el tiempo. A estos estados se les llama "levitados oscilantes". Cuando se tiene un sistema en el que no aparecen cúmulos, se puede ver al conjunto de partículas como una sola partícula inmersa en un medio viscoso. A estos estados se les llama "levitados". Encontramos que a diferencia de ϵ , la velocidad que la base imprime a la partícula inferior no provoca ningún cambio de estado. Introducimos el problema del colapso inelástico, mismo que se resuelve utilizando un coeficiente de restitución que es función de la velocidad relativa de las partículas que colisionan. Analizamos la altura promedio del centro de masa con respecto a la altura promedio de la columna, así como la energía disipada, por partícula, por unidad de tiempo. Estas variables son calculadas como funciones de N y ϵ , y encontramos que a partir de ellas es posible determinar el estado particular que alcanza el sistema, siendo $N(1-\epsilon)$ el parámetro relevante.

i) Estados Estacionarios

De acuerdo con Biben y Piasecki [22] es posible deducir una condición necesaria, más no suficiente, para obtener estados estacionarios como función de ϵ y del número de partículas (N). La condición es

$$(1-\epsilon)^2 < 6\gamma - 2\gamma^2, \quad (3.1)$$

donde $\gamma = (1-\epsilon)N$.

Este parámetro (γ) fue utilizado en varios estudios previos [16,17]. Para $N=2$, esta ecuación no impone ninguna restricción.

Sin embargo, esta condición no es válida para todos los casos. Basta un contra ejemplo para mostrarlo: si $N = 5$ y $\epsilon = 0.41$, entonces la primera parte de la desigualdad da 0.3481, mientras que la segunda, 0.295, de modo que no debería haber ningún estado estacionario. Sin embargo, dicho estado sí se encuentra al correr la simulación.

A pesar de esto, el criterio resulta útil para determinar los valores de ϵ para los cuales tendremos un sistema estacionario dado un número fijo de partículas. Por ejemplo, si $N=100$, necesitamos estar en un régimen cuasielástico ($\epsilon = 0.98$) para lograr uno de estos estados. Si $N=15$ entonces basta con que ϵ sea mayor a 0.81. Podemos asegurar que si seguimos con $N=15$ y fijamos $\epsilon=0.9$, tras un suficiente número de colisiones, la energía de la última partícula será constante. Resulta ilustrativo ver esta situación en el espacio fase.

El estado del sistema en el espacio fase está conformado por cada una de las configuraciones $(s_1, v_1, s_2, v_2, \dots, s_N, v_N)$ que adopta el sistema. Dadas las características del sistema de ecuaciones que representan el problema, cada punto del espacio fase evolucionará a otro punto único. Por ello si el sistema regresá a alguna configuración

previamente alcanzada, podemos decir que se trata de un sistema cíclico. Para analizar el espacio fase de todo el sistema, sería necesaria una gráfica de $2N$ dimensiones. Durante el resto del trabajo analizaremos únicamente el espacio fase de la partícula superior. En las gráficas del espacio fase que se presentan, graficamos únicamente las posiciones y velocidades que tiene esta partícula cada vez que un par de partículas colisionan (o la inferior con la base). De modo que cada punto debe ser unido con la curva que describe un tiro vertical, excepto para el caso en el que sea la misma partícula la que está colisionando, donde habrá un cambio discreto por efecto del cambio en la velocidad y la pérdida de energía. A estas representaciones les llamaremos "espacios fase de colisión", o EFC.

En todas las simulaciones realizadas, observamos que siempre que se alcanza un estado estacionario el sistema regresa a la misma configuración cada vez que la partícula inferior colisiona con la base. Por ello, el número de colisiones que se lleva a cabo en el sistema desde que la partícula inferior colisiona contra la base hasta que vuelve a hacerlo (colisiones intermedias) . será el número de puntos que conformarán el espacio fase (de cada partícula) menos uno. Incluso en los casos en los que no se alcanza un estado estacionario, los sistemas tienden a una configuración cerrada en el espacio fase.

El único caso en el que la partícula inferior colisiona contra la base más de una vez antes de cerrar el ciclo es el caso elástico.

Si hacemos los cambios de variable del capítulo II, encontramos que los espacios fase de las partículas son idénticos ante un cambio de V_0 . Esto siempre y cuando estemos considerando partículas puntuales, o bien, que tengan el mismo diámetro adimensional. Como ejemplo de esto vemos en la figura 3.1 el espacio fase de la última partícula cuando $N=4$ y $\varepsilon=0.8$, con un diámetro igual a 0.1 cm para distintos valores de V_0 dado en cm/seg.

En la figura 3.1b se puede ver que el espacio fase es el mismo por tratarse de partículas con diámetro cero (que es un caso particular del reescalamiento de los diámetros).

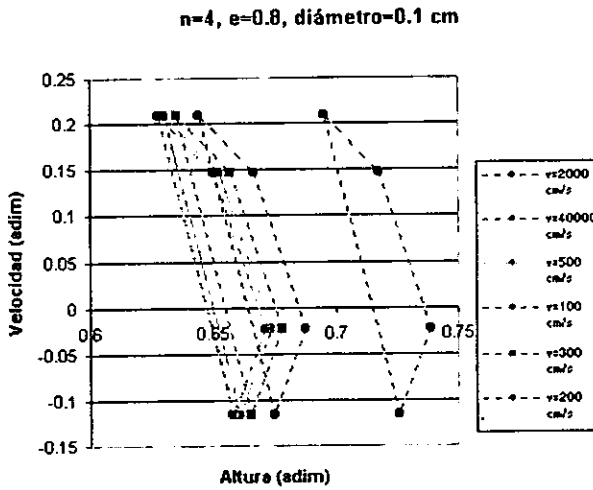
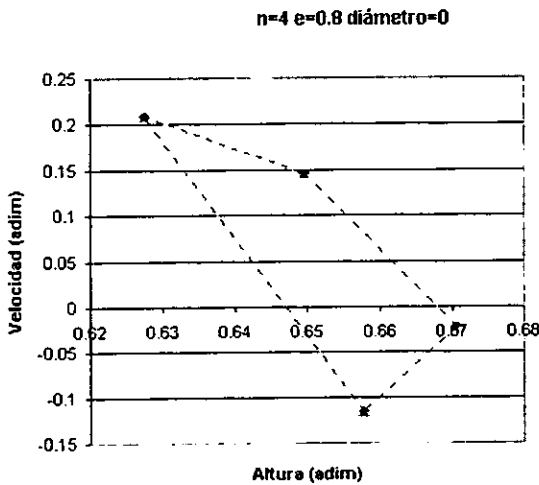


Figura 3.1
Espacio Fase (estacionario) de la partícula superior para un Sistema con cuatro partículas para distintas velocidades de la base.

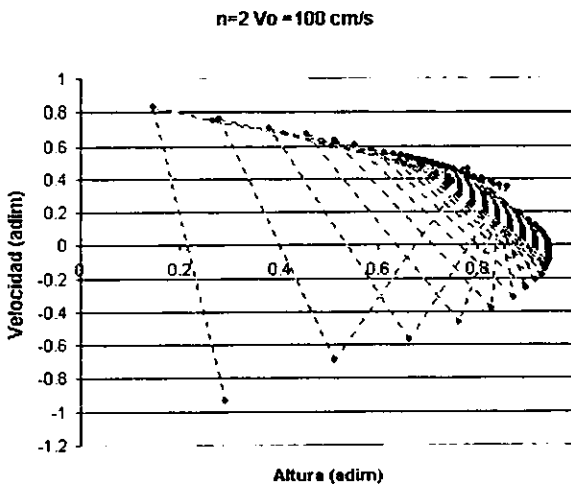
a) Mismo diámetro dimensional.



b) Diámetro cero (caso particular de la adimensionalización). El sistema es reescalable.

Encontramos otro resultado interesante: en todos los casos que los se tenga un sistema estacionario (menos para $\epsilon=1$), el espacio fase de las partículas no dependerá de las condiciones iniciales. De hecho, tampoco dependen de las condiciones iniciales los espacios fase de los sistemas con $\epsilon < 1$ que resulten cíclicos, aunque no estacionarios. Es posible ver entonces que el sistema tiene una configuración determinada por los parámetros (g , N y ϵ) que queda ejemplificado en la figura 3.2a donde se muestra la evolución de los puntos que conforman el espacio fase hacia una zona, terminando en la configuración que se aprecia en el detalle (Fig 3.2b).

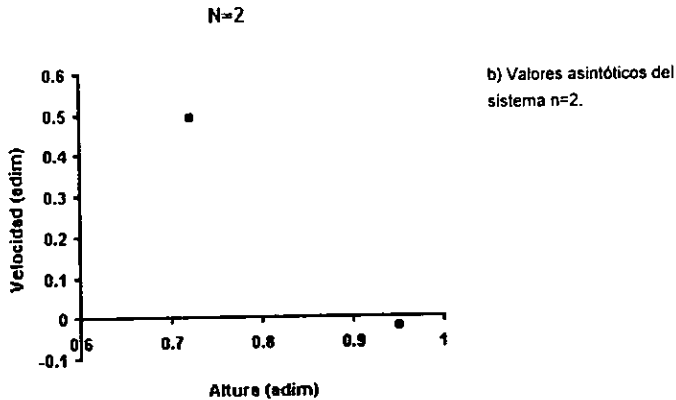
El equilibrio natural de un sistema de partículas inelásticas sujetas únicamente a la fuerza de gravedad se alcanza cuando la columna descansa sobre la base. Al perturbar al sistema imprimiendo energía a través de la base, el sistema dinámico presenta un atractor [23,24].



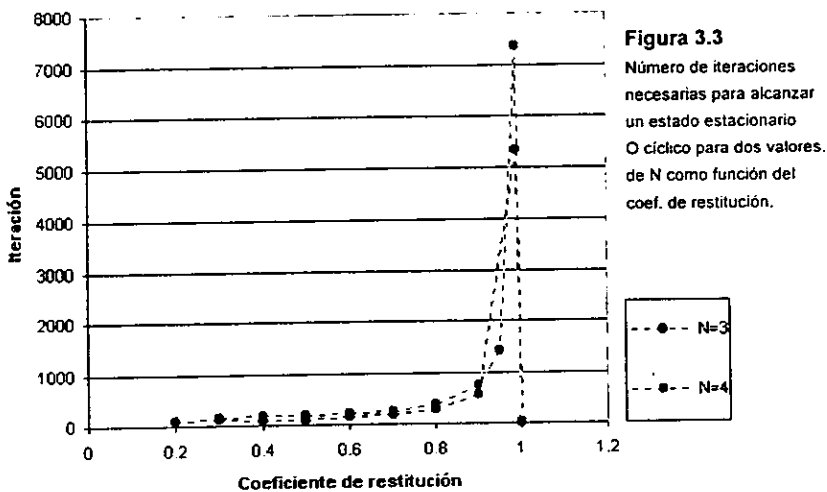
a)

Figura 3.2
Evolución del espacio fase de la partícula superior.

a) Desde una condición inicial arbitraria.



Una característica notable es que el número de colisiones que le lleva al sistema llegar a estado estacionario es mayor conforme ϵ se acerca a uno, de manera análoga a como ocurre para dos partículas.



Sin embargo, justo en el caso elástico, el sistema llega a un estado estacionario después de muy pocas colisiones en comparación con los casos cuasielásticos. Es cierto que este número de colisiones depende de las condiciones iniciales (el caso extremo es que la

condición inicial fuera una de las configuraciones estacionarias). Pero las fluctuaciones relativas no son grandes de modo que la figura 3.3 da una idea de la relación que existe entre ϵ y el número de iteraciones y la diferencia drástica entre el caso elástico y el cuasielástico.

El único caso en donde las condiciones iniciales determinan el espacio fase final, es el del caso elástico.

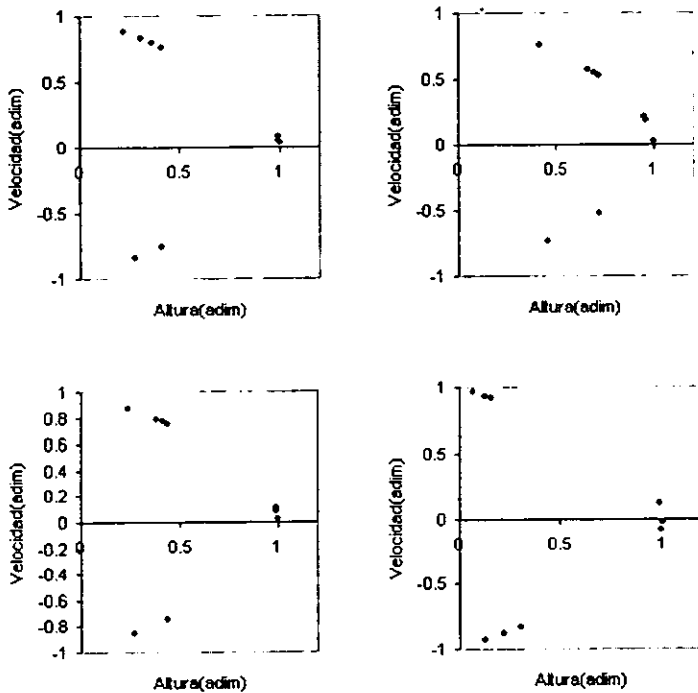


Figura 3.4

Espacios fase de colisión asintóticos para el caso elástico con $N=3$. Cada gráfica corresponde a una simulación, utilizando velocidades iniciales diferentes en cada una.

En la figura 3.4 se muestran cuatro distintas configuraciones finales del espacio fase de la partícula superior para $N=3$ y $\epsilon=1$ que comienzan siempre con separación entre ellas de 3 cm, pero cuyas velocidades iniciales son aleatorias, como se explica en el apéndice. A pesar de esto, una vez que se alcanza el estado estacionario todas las partículas terminan con la misma energía, que tampoco depende de las condiciones iniciales. Este hecho se explica de la siguiente manera: por tratarse de colisiones elásticas, las partículas únicamente intercambian velocidades como si se atravesaran, dando un salto igual al diámetro de las partículas (esta aparente ganancia de energía se compensa cuando las partículas bajan). Podemos pensar que cada vez que la partícula inferior colisiona con la base deposita la energía que le había sido transferida por la partícula 2, y adquiere energía $\frac{1}{2}mV_0^2$ que a su vez le pasará a la partícula 2. El caso es análogo para la partícula 2, tomando como base la partícula 1, y así sucesivamente para el resto de las partículas hasta que eventualmente todas tendrán la energía de la base. Por lo tanto, todos los puntos caen sobre la curva de caída libre (ver Fig. 3.5) dada por:

$$(1-s)^{\frac{1}{2}} = v. \tag{3.2}$$

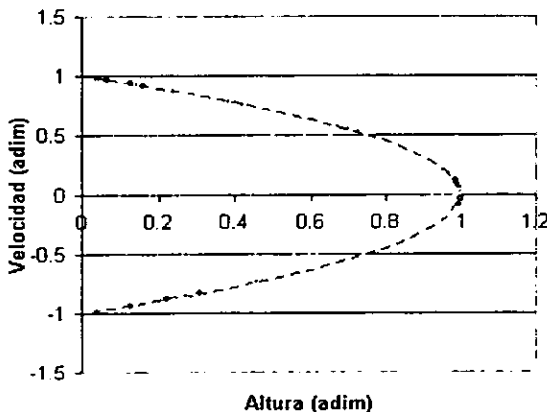
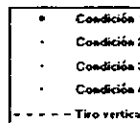


Figura 3.5

Espacio Fase en el caso elástico para $N=3$ (partícula superior).

Los puntos estacionarios de cualquier condición inicial caen en la curva de tiro vertical.

Se utilizaron los puntos de la gráfica 3.4.



La situación es equivalente a tener una sola partícula; el espacio fase sólo señala distintos puntos de la trayectoria, mismos que dependen de las condiciones iniciales.

Otro resultado (que se ve en las simulaciones y que no parece variar) está relacionado con el número de puntos que conforman el EFC como función de N . Para $N=2$ y siendo que siempre colisionan a la misma altura, el EFC de cualquiera de las dos partículas está formada por sólo dos puntos, uno correspondiente al momento de la colisión entre ellas, y otro al de la colisión de la partícula inferior con la base. Observamos también que en el caso elástico hay dos puntos de colisión en lugar de uno, por lo que tendremos en el EFC dos puntos correspondientes a la colisión de la partícula inferior con la base estando la partícula superior a distintas alturas, y los dos correspondientes a los momentos de las colisiones.

Para tres partículas ya existe una restricción en ϵ para obtener un estado estacionario. Recordemos que se le llama estado estacionario, a aquel en el que pasado el tiempo suficiente, la energía de la partícula se mantiene constante. Todo estado estacionario es cíclico, pero es posible tener un estado cíclico no estacionario.

Para $\epsilon=0.1$ no se encuentra ningún estado estacionario, ni siquiera uno cíclico. Para $\epsilon=0.2$ hay tres puntos de colisión entre partículas y dos del inferior con la base (estado cíclico), dando como resultado cinco puntos. A partir de $\epsilon=0.3$ y hasta $\epsilon=0.99$ sólo hay estados estacionarios con dos puntos de colisión, que sumado al del inferior con la base nos dan 3 puntos en el espacio fase. Como ejemplo véase la figura 3.6 en donde además se aprecia cómo el sistema tiende al equilibrio estacionario.

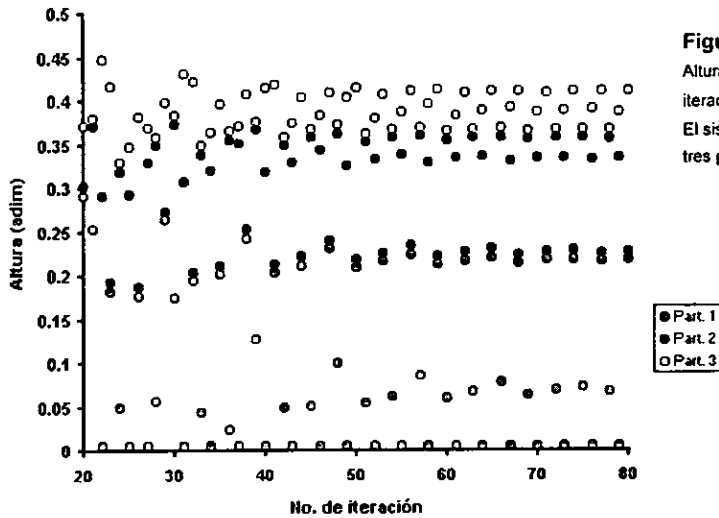


Figura 3.6
 Altura de las partículas en cada iteración para $N=3$ y $\epsilon=0.8$.
 El sistema tiende a tener tres puntos en el espacio fase.

Pero cuando $\epsilon=1$, el número de puntos en el EFC es nueve como se puede ver en la figura 3.7, a partir de la colisión 5. En estas dos gráficas se ve también la diferencia en el número de iteraciones necesario para alcanzar el equilibrio en cada caso.

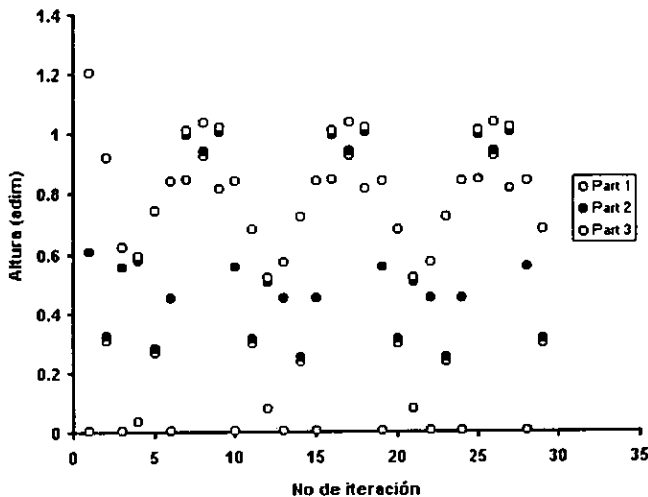


Figura 3.7
 Altura de las partículas en cada iteración para $N=3$ $V_0=100$ cm/s y $c=1$. El sistema tiende a tener nueve puntos en el espacio fase.

Si $N=4$, tenemos también restricciones para ε . En el intervalo $\varepsilon = [0.99, 0.45]$ existen estados estacionarios y cuatro puntos en el espacio fase. Si $\varepsilon=1$ entonces hay 16 puntos. Si fijamos ε por debajo de 0.45, encontramos la siguiente relación:

ε	Puntos en el EF	Estado
0.4	5	Estacionario
0.35	6	Estacionario
0.3	7	Estacionario
0.26	9	Cíclico
0.25	10	Cíclico
0.2	13	Cíclico

Una muestra de cómo se ven los puntos en el EFC de la última partícula se muestra en la figura 3.8.

Nótese cómo conforme nos acercamos al caso elástico la figura que forman los puntos se va haciendo cada vez más estrecha, hasta que al llegar a $\varepsilon=1$ la figura se abre con dieciséis puntos en lugar de cuatro.

Para N mayores se sigue encontrando este tipo de comportamientos.

Observamos que para los casos elásticos, el número de puntos en el EFC es igual a N^2 . (ver Fig. 3.9). También parece ser que si $\varepsilon < 1$, pero lejos todavía del límite que deduce Piasecki (Ec. 3.1), entonces el número de puntos en el EFC es igual a N (comprobado sólo para $N=2,3,4,5,6,7,10,15,20$ y 50).

De acuerdo con Piasecki, la condición para la existencia de estados estacionarios no depende ni de g , ni de V_0 , sino únicamente de ε y de N .

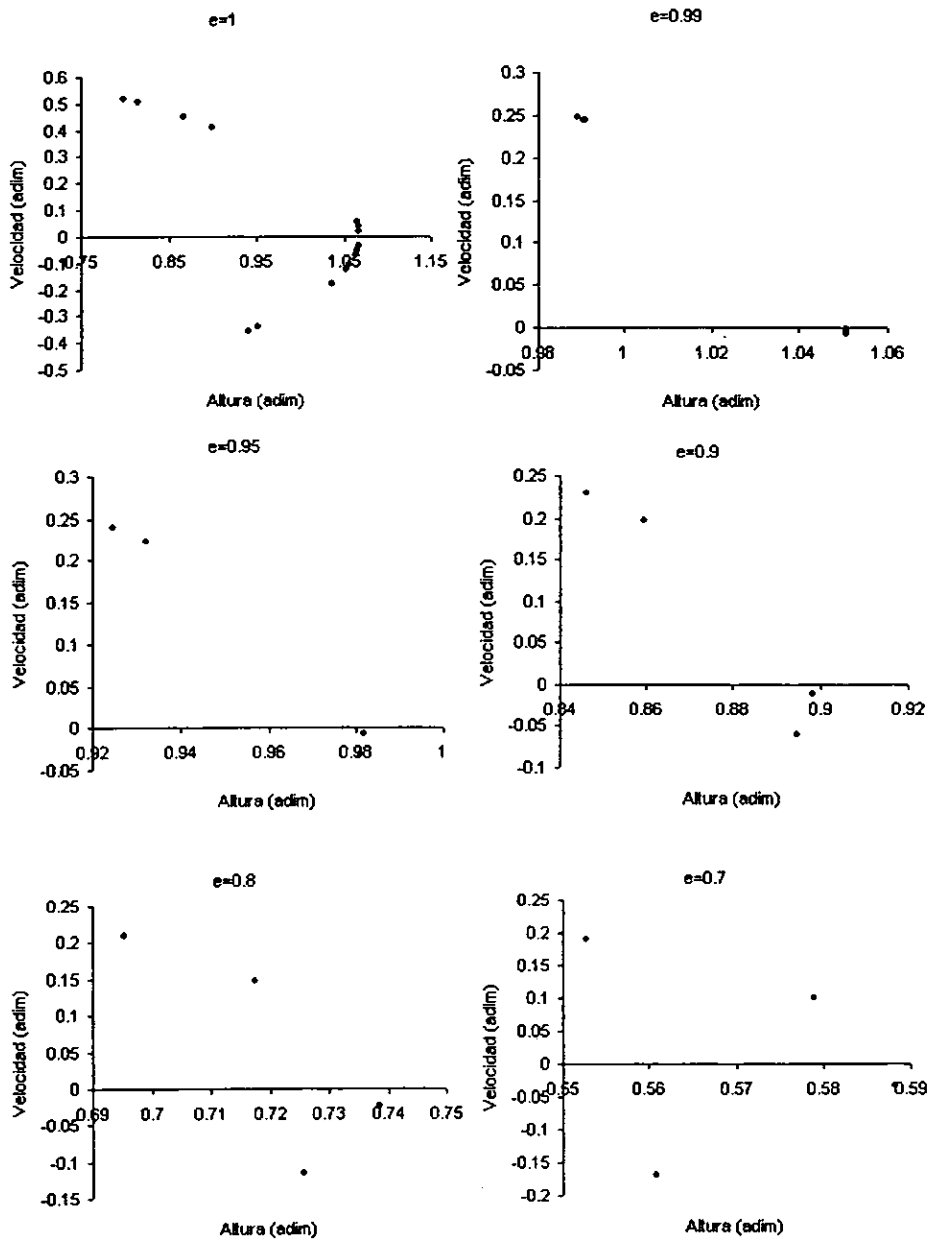


Figura 3.8a Espacio fase de colisión con $N=4$, para distintos valores del coeficiente de restitución.

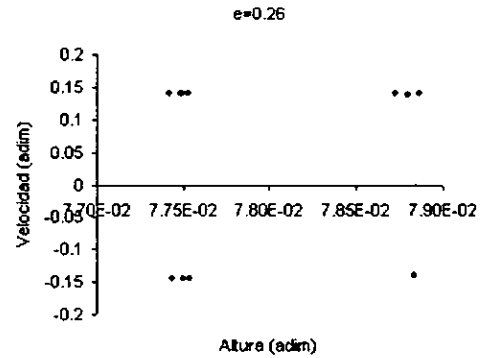
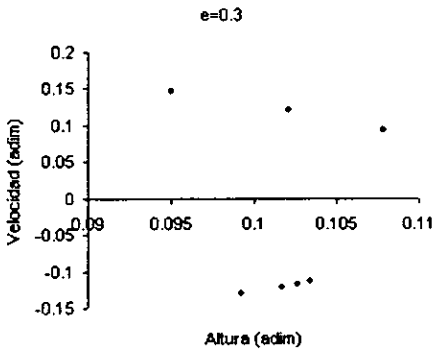
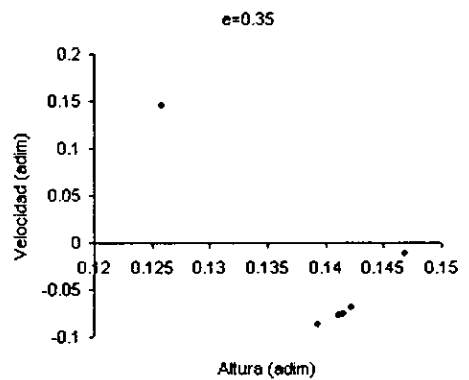
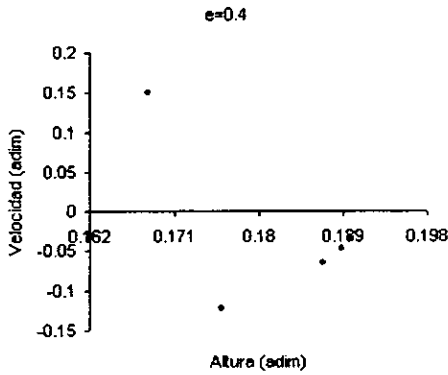
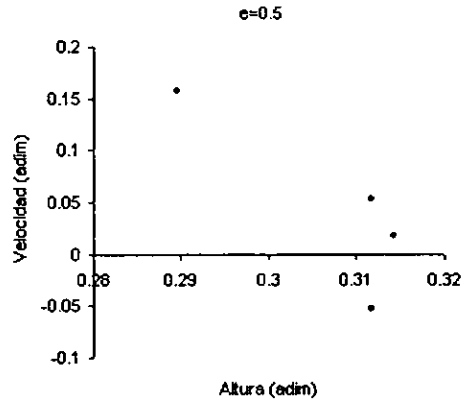
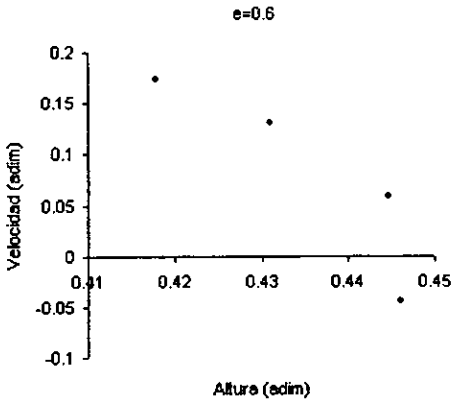


Figura 3.8b Espacio fase de colisión con $N=4$, para distintos valores del coeficiente de restitución.

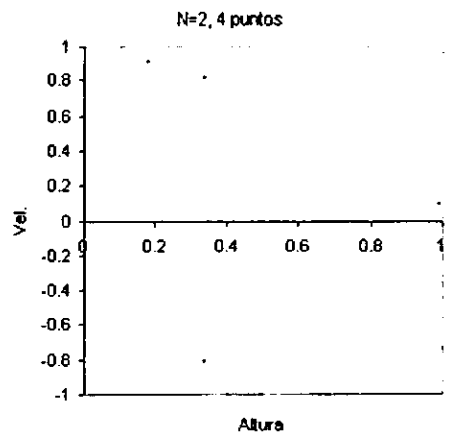
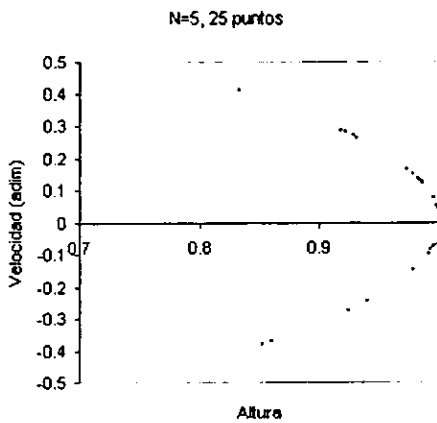
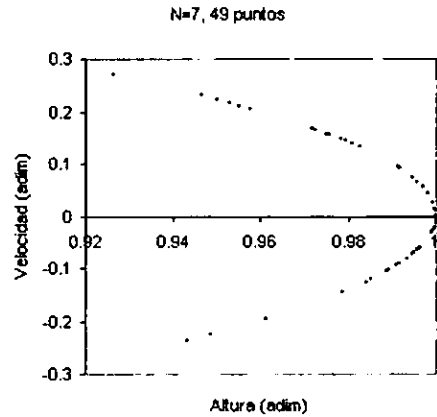
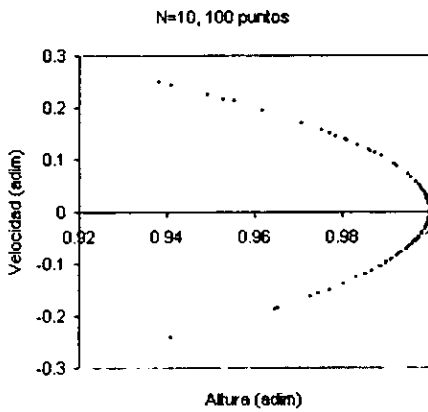
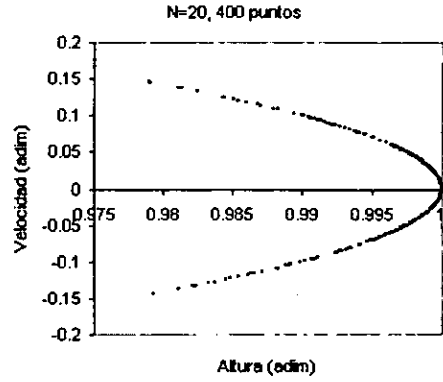
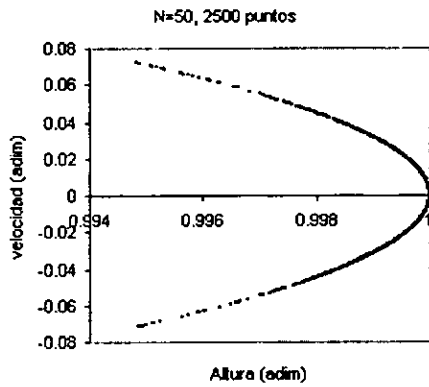


Figura 3.9. EFC de la última partícula con $d=0$ y $e=1$, para distintos valores de N .

ii) Colapso inelástico

El colapso inelástico es un fenómeno que se da en las colisiones de un grupo de partículas inelásticas, las que disipan su energía mediante un número infinito de colisiones en un tiempo finito. Puede mostrarse mediante la simulación que, para algunos casos determinados por N , V_0 y g y las condiciones iniciales, existe un valor crítico del coeficiente de restitución ϵ_c para el cual se da este fenómeno. Tanto las velocidades relativas como las posiciones relativas tienden a cero [25].

Esto ocurre porque estamos suponiendo que el coeficiente de restitución es constante, cuando para materiales reales, ϵ es función de la velocidad relativa de las partículas que colisionan. De acuerdo con algunos autores[26], aumenta monótonamente conforme dicha velocidad tiende a cero, hasta alcanzar la unidad. Swinney et al [27] señalan este punto y demuestran analíticamente que si se tienen tres partículas confinadas en un anillo o una línea, y se toma un coeficiente de restitución real, el colapso inelástico no ocurre. Su argumento es que si ocurre colapso inelástico entonces la velocidad relativa de las partículas tiende a cero. Pero entonces $\epsilon \rightarrow 1$, lo que eventualmente provocará que $\epsilon > \epsilon_c$. También critican el hecho de suponer que las colisiones son instantáneas, condición necesaria para que exista el colapso. La combinación de tener un coeficiente de restitución función de la velocidad y una duración de colisión finita, hacen que desaparezca este comportamiento espúreo.

Kuwara y Kono [26] hacen un análisis de ϵ como función de la velocidad relativa en la colisión de dos esferas. Plantean tres mecanismos de pérdida de energía en una colisión:

- 1) La vibración de las esferas causada por el impacto y que permanece en cada esfera después de la colisión. La vibración de los alrededores también puede contribuir a la pérdida.
- 2) Pérdida de energía por la deformación plástica o fractura de las esferas.
- 3) Disipación de energía por efecto de la viscosidad en la esfera sin deformación plástica, llamada disipación por la propiedad visco elástica.

Tratan únicamente el tercer caso, suponiendo que la presión total normal en la región de compresión consiste de una parte elástica y otra friccional, de modo que $P_{tot} = P_{el} + P_f$. Utilizando esto y un tratamiento derivado por Landau de la ecuación dinámica de la colisión entre dos esferas elásticas, obtienen que $(1-\epsilon)$ es proporcional a $|v_1 - v_2|^{1/5}$, siempre y cuando se trate de materiales con ϵ cercano a uno, tales como metales duros o plásticos, donde el comportamiento visco-elástico predomina para pequeñas deformaciones. La constante depende de los coeficientes de elasticidad del material.

En la simulación encontramos colapso inelástico, fenómeno que se ilustra en la figura 3.10a, donde se muestra el número de colisiones contra el tiempo real. Si se incorpora el resultado de Kuwara en la simulación computacional, se aprecia cómo el fenómeno desaparece (Fig. 3.10b). La componente de proporcionalidad ($\epsilon = 1 - C |v_1 - v_2|^{1/5}$) se escogió de modo que, cuando la velocidad relativa sea lo máximo que permite el sistema (V_0), ϵ sea igual al coeficiente fijo que se usó en el ejemplo de la Fig. 3.10. La ventaja de

usar este criterio es que cuando nos encontramos en un sistema donde $\epsilon > \epsilon_c$, la suavidad de la función provoca que los comportamientos del sistema con ϵ fijo sea el mismo que el de ϵ variable (en términos del perfil de densidades y velocidades) y muy similar en el tratamiento de espacio fase.(ver figura 3.11)

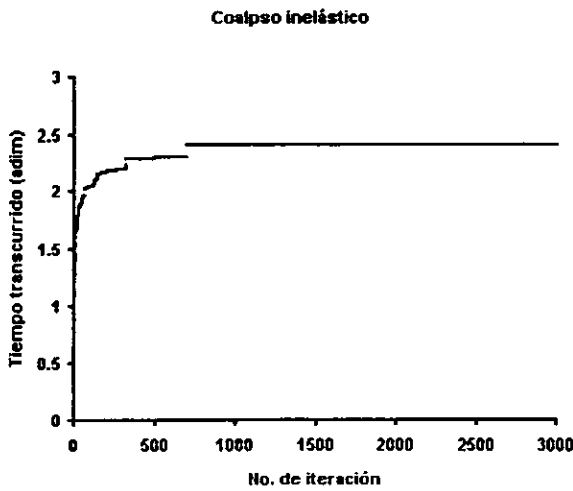
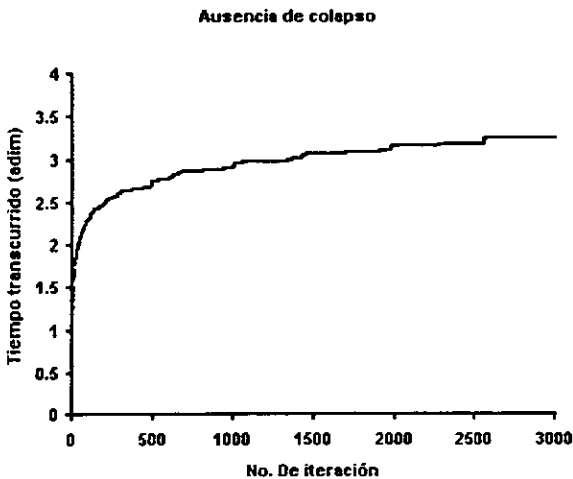


Figura 3.10

Tiempo real transcurrido como función del número de iteraciones para $N=30$.

a) Coeficiente de restitución constante, $e=0.6$. Se presenta colapso inelástico.



b) Coeficiente de restitución dependiente de la velocidad. El colapso inelástico no se presenta.

Existe otro modo de tratar el colapso inelástico utilizado por Clément et al [28] que consiste en imponer una velocidad de corte. Si dos objetos que acaban de colisionar tienen una velocidad relativa $|v_1 - v_2| < v_c$, entonces consideran a ambos objetos dentro de un sólo cúmulo ("cluster"). De esta manera pasan de objetos independientes a objetos con una posición relativa y velocidad relativa igual a cero, teniendo cuidado en conservar el momento del centro de masa del cúmulo. La velocidad de corte v_c es fijada varios órdenes de magnitud menor a la máxima velocidad de la base (por tratarse de un pistón móvil, esta velocidad es Aw). Este método es práctico, pero aunque computacionalmente resuelve el problema, preferimos usar un coeficiente de restitución dependiente de la velocidad por ser un mejor modelo de la realidad. Otro modo de evitar el problema es seguir los pasos de Cordero y Ramírez [17], donde usan $\gamma = (1-\epsilon) N$ bastante menor que uno. Como utilizan 200 partículas, están forzados a fijar $\epsilon=0.999$, que es un caso cuasielástico muy alejado de la realidad.

iii) Cúmulos

Por cúmulo se entiende un conjunto de partículas que se agrupan en un espacio pequeño comparado con el ocupado por resto de las partículas. En otras palabras, nos referimos a partículas que forman zonas de alta densidad relativa, definida como número de partículas por unidad de longitud, dividida entre el número total de partículas.

Estos cúmulos no sólo aparecen en sistemas unidimensionales, sino también en más dimensiones. A este respecto, Kudrolli [29] muestra resultados experimentales en donde se forman cúmulos para un sistema bidimensional de esferas rodantes con una pared móvil. En otro trabajo, Grossman [30] explica la formación de cúmulos suponiendo un balance de energía y un equilibrio "térmico".

En las simulaciones observamos la aparición de cúmulos. Un caso particular es el de tener uno "levitando" en lo más alto de la columna, gracias a la energía que le proveen el resto de las partículas. Esto se encuentra para casos cuasielásticos y el perfil de densidad relativo encontrado es el que se muestra en la figura 3.11.

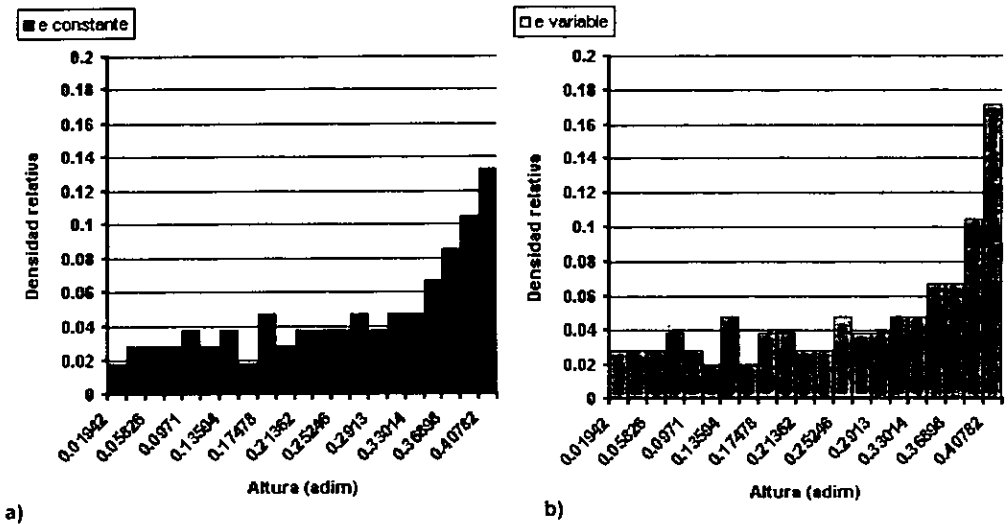


Figura 3.11
 Comparación de los perfiles de densidad, para a) $e=0.95$ constante, b) e dependiente de la velocidad.
 $N=15$, $V_0=1000\text{cm/s}$.

Para estos casos, la posición del cúmulo se mantiene constante. Sin embargo, también se encuentran casos donde el cúmulo oscila. Dado que la única combinación de parámetros

que nos dan unidades de tiempo es V_0/g , el periodo de oscilación de estos cúmulos debe ser proporcional a este parámetro. La constante de proporcionalidad debe ser una función del número de partículas y del coeficiente de restitución. Buscando este comportamiento fijamos $\varepsilon=0.9$ (donde se encuentra dicho efecto). A continuación se muestra cómo varía el periodo como función de V_0 ($V_0 = 1000, 2000, \dots, 13000$ cm/s) para varios números de partículas ($N=30, 35, 36, 37, 38, 40$), ver Fig. 13.12.

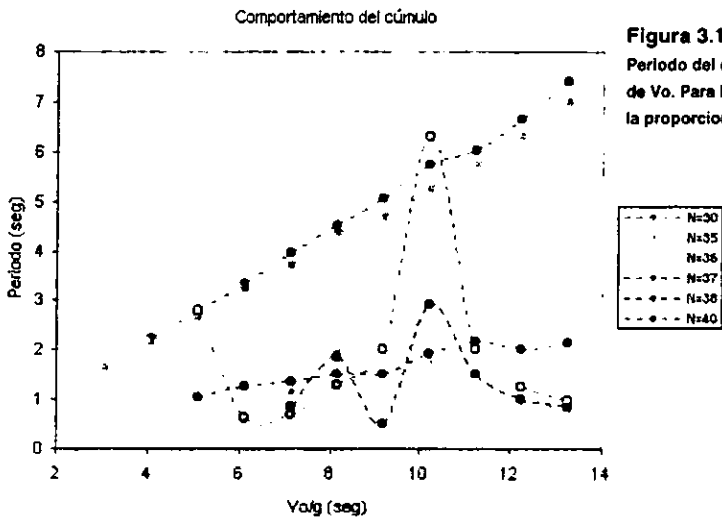


Figura 3.12
Periodo del cúmulo como función de V_0 . Para $N=30, 35$ y 37 se encuentra la proporcionalidad que se esperaba.

El análisis se hizo de dos maneras distintas que resultaron equivalentes. En la primera se siguió la posición del cúmulo como función del tiempo. En la segunda, se calculó la densidad a una altura fija, también como función del tiempo. Definimos a $P(f)$ ya sea como la posición del cúmulo o como la densidad de partículas a una altura fija, pero esta vez como función de la frecuencia (f). Encontramos esta función a través de la transformada de Fourier en forma discreta [31] como se muestra en el apéndice.

En las figuras 3.13a y 3.13b vemos una comparación de $P(f)$ en cada uno de estos casos. Se encuentran subarmónicos de la frecuencia principal que coincide para ambos casos. Hasta donde sabemos, la medición del periodo de oscilación de los cúmulos no se ha reportado en ningún artículo de investigación.

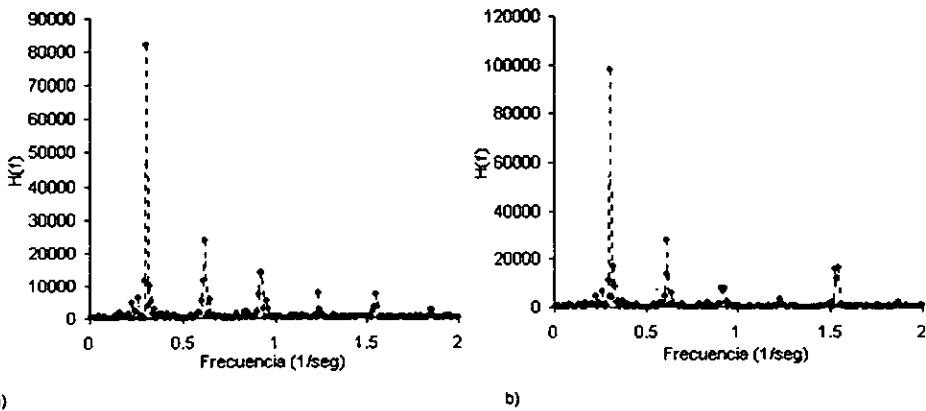


Figura 3.13
Espectro de frecuencias para $N=35$ $V_0=6000$ y $\epsilon=0.9$. a) de la posición del cúmulo formado por entre 11 y 19 partículas. b) de la densidad en la región entre 40 y 50 cm. La frecuencia de máxima contribución coincide en ambos casos.

iv) Una sola partícula en un medio viscoso

Si $\epsilon=1$, entonces las partículas se "atravesan" sin interactuar, salvo por el brinco espacial que realizan por efecto del diámetro. Cordero y Ramírez [17] señalan que las partículas se atraviesan unas a otras perdiendo energía, como si se tratara de una sola en un medio viscoso, siempre que las colisiones sean instantáneas. Si se analiza la posición de cada partícula como función del tiempo, se encuentran parábolas para $\epsilon=1$ (Fig. 3.14a) y

pseudoparábolas (usando la terminología de Bernu y Mazighi [16]) para otros valores del coeficiente de restitución (Fig. 3.14b).

Para investigar la posibilidad de analizar el sistema como si se tratara de una sola partícula en un medio viscoso, analizamos el caso de $N=15$, y $\epsilon = (1, 0.99, 0.95, 0.925, 0.9, 0.875, 0.85, 0.8)$. Para todos los casos excepto para $\epsilon = 0.8$, se encuentra un cúmulo en la parte

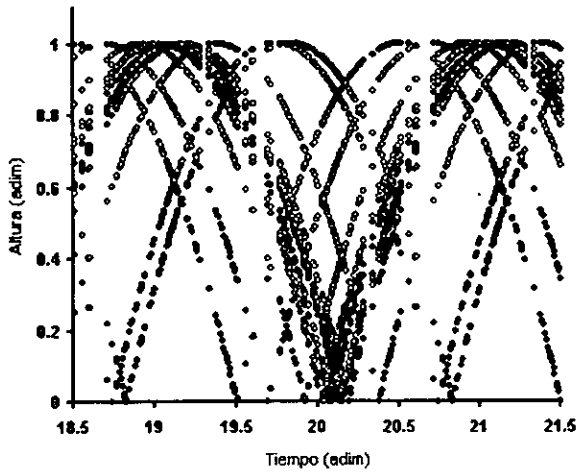
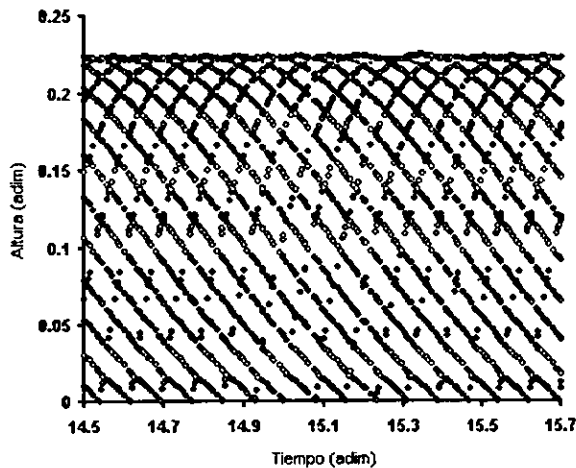


Figura 3.14
Trayectorias de las partículas como función del tiempo.
 $N=15$

a) Caso elástico. Se forman parábolas.
Parábolas



b) $\epsilon=0.85$.
Pseudoparábolas

superior de la columna, como se muestra en la figuras 3.15a y 3.15b, y se alcanza un estado estacionario. Sin embargo si $\epsilon=0.8$ el cúmulo baja de posición como se muestra en la figura 3.15 y en lugar de un estado estacionario se tiene uno cíclico. Es decir que la energía de la partícula superior no se vuelve constante, pero su EFC sí es cerrado.

Este cúmulo es de naturaleza distinta a los que se forman en la parte superior. En primer lugar, las partículas del sistema colisionan más veces por ciclo que en un caso estacionario. Además, la posición de estos cúmulos oscila con el tiempo, mientras que los cúmulos superiores se mantienen a la misma altura.

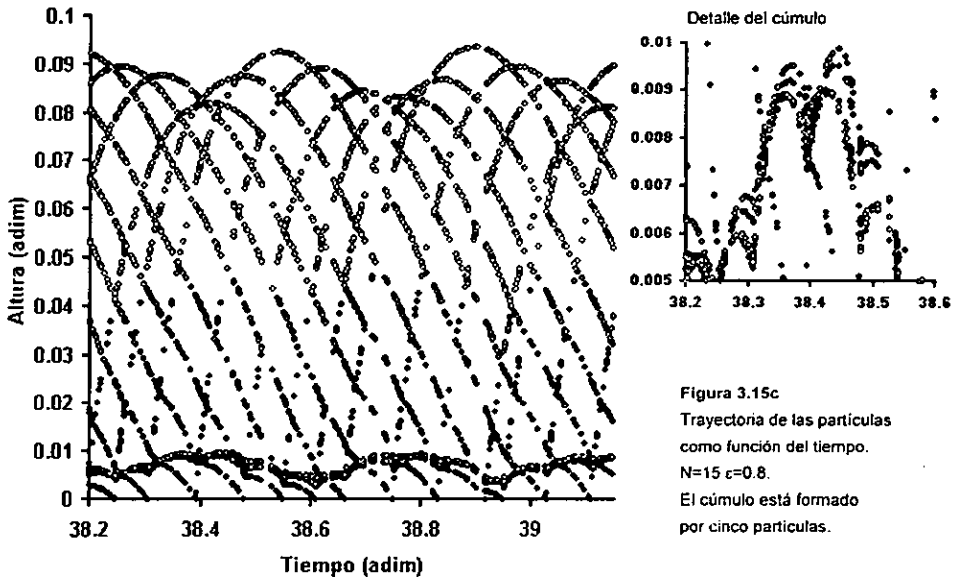


Figura 3.15c
 Trayectoria de las partículas
 como función del tiempo.
 $N=15$ $\epsilon=0.8$.
 El cúmulo está formado
 por cinco partículas.

Como se mencionó al principio de esta sección, es posible seguir la trayectoria de una sola partícula como si "atravesara" al resto. El método utilizado es el siguiente: una vez que el sistema ha alcanzado un equilibrio, ya sea un estado estacionario o periódico, se sigue la trayectoria de la primera partícula hasta su colisión con la segunda. En ese momento nos

quedamos con la segunda partícula y registramos su posición hasta que colisiona con la tercera. Continuamos de esta manera hasta llegar a la partícula superior y de regreso hasta seguir a la partícula inferior hasta su contacto con la base. Las posiciones son tomadas como función del tiempo. Con este procedimiento obtenemos un recorrido como si fuera de una sola partícula desde que parte de la base con velocidad V_0 hasta su regreso. A esta partícula le llamaremos partícula virtual (P.V.).

Mientras más cercano a 1 sea ϵ , la trayectoria de la P.V. se asemejará más a la de un tiro parabólico. Pero si ϵ decrece, la trayectoria de la P.V. pierde simetría con respecto al tiempo de altura máxima, y en su trayectoria posterior a este punto su velocidad tiende a decrecer en lugar de aumentar. De hecho en la figura 3.14b, se aprecia cómo las velocidades de las P.V. tienden a un valor terminal. Es por esto que siguiendo la propuesta de Cordero y Ramírez, a continuación se describe al sistema como el de una sola partícula virtual en un medio viscoso. Introducimos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad, de modo que la ecuación diferencial por resolver es:

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -mg - a \frac{dx}{dt}, \quad (3.3)$$

donde a es una constante. Las condiciones iniciales son: $x(0)=0$ y $dx/dt(0) = 0$.

Haciendo los cambios de variable:

$$\beta = mg/aV_0, \quad \sigma = at/m \quad \text{y} \quad u = \frac{dx}{dt} / V_0, \quad (3.4)$$

la ecuación queda

$$v' = -\beta - v, \quad (3.5)$$

donde la prima significa derivada con respecto a σ . La solución de esta ecuación es:

$$v(\sigma) = -\beta + (\beta + 1) e^{-\sigma}, \quad (3.6)$$

tomando en cuenta que $v(0) = 1$.

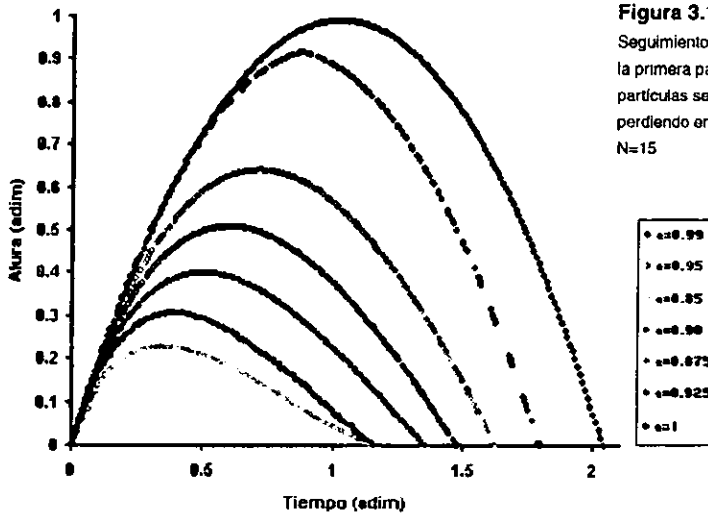
Sea $S' = v$, $S(0) = 0$. Entonces

$$S = (1 + \beta) (1 - e^{-\tau}) - \beta \sigma. \quad (3.7)$$

En términos de las variables adimensionales τ y s planteadas en el capítulo II, la ecuación queda

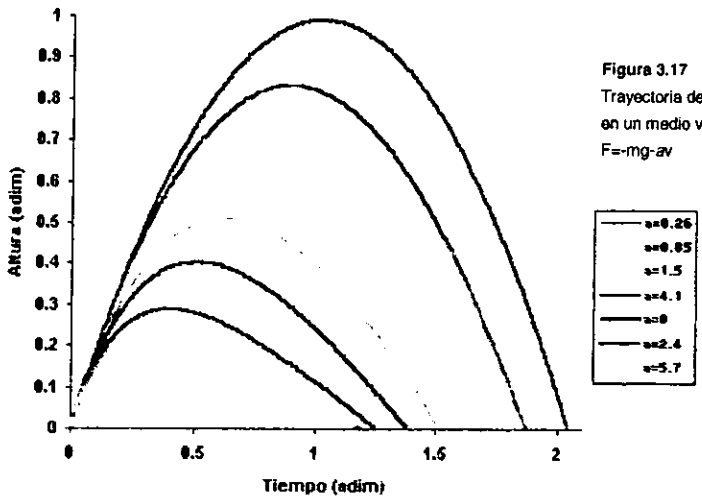
$$s(\tau) = 2\beta (1 + \beta) (1 - e^{-\tau/\beta}) - \tau\beta. \quad (3.8)$$

En la figura 3.16 se grafican las trayectorias de las P.V. obtenidas de las pseudoparábolas para distintos valores de ϵ . En todos los casos exhibidos se obtiene un cúmulo superior.



Se tiene entonces un conjunto de pares de valores de posición y tiempo para cada pseudoparábola. Substituimos los valores temporales en la Ec. (3.8) y así obtenemos las posiciones dada u . Entonces podemos encontrar el valor de u que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos obtenidos de la simulación y los de la ecuación.

El coeficiente de correlación es superior a 0.99 excepto para $\epsilon = 0.9$, lo que nos habla de un muy buen ajuste. En la siguiente figura (3.17) se muestra la trayectoria de la partículas en un medio viscoso, para cada valor de a . La similitud con la figura 3.16 es notable.



Los resultados son graficados en la figura 3.18.

Al graficar log-log, no encontramos una recta, lo que nos indica que a no puede expresarse como una potencia de ϵ . Aunque no se puede encontrar a a como función de ϵ es notable lo bien que ajustan las curvas. Esto significa que es equivalente tener una partícula sujeta a una fuerza proporcional a la velocidad, a tener esta pérdida de energía en cada colisión, en términos de la trayectoria de la partícula. Esto siempre que se trate de un estado estacionario.

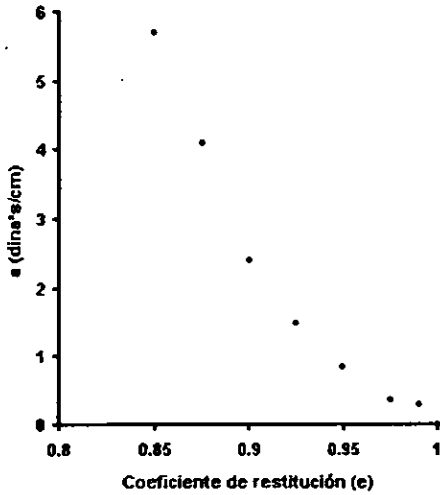


Figura 3.18

Coeficiente de viscosidad (ϵ) contra coeficiente de restitución.
 $F = -mg - \epsilon v$.

En las figuras 3.16 y 3.17, se graficaron los resultados para valores de ϵ en los que no aparece un cúmulo intermedio. El hecho de que el cúmulo oscile hace imposible tener una única trayectoria de la P.V, además de que la mejor aproximación para la pseudoparábola del caso $\epsilon=0.8$ está muy lejos de los valores obtenidos en la simulación, como se muestra en la figura 3.19b.

Nótese la diferencia con la figura 3.18a, donde el ajuste es mucho mejor.

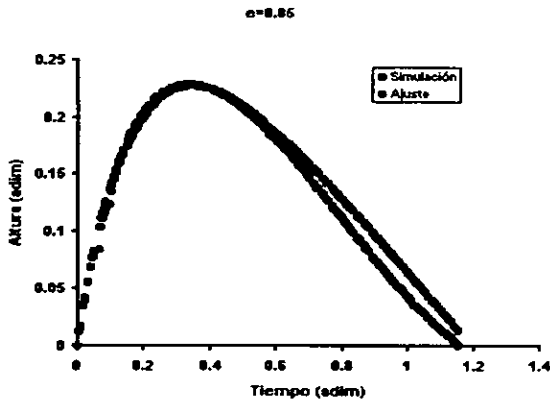
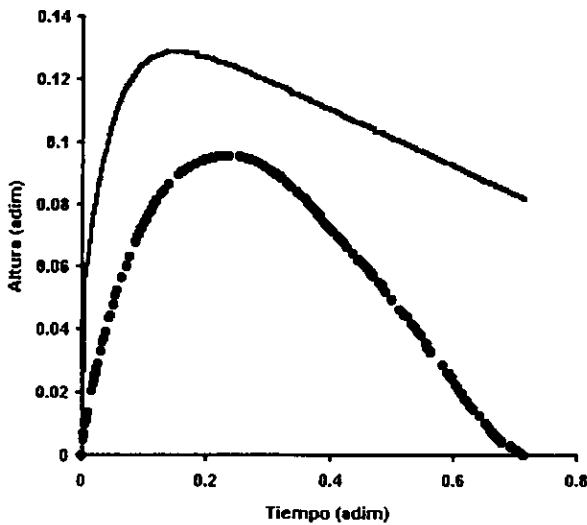


Figura 3.19

Comparación de la trayectoria de una partícula virtual en un medio viscoso, y 15 partículas.

a) Hasta $\varepsilon=0.85$ el ajuste es muy bueno.



b) $\varepsilon=0.8$. La aparición de un cúmulo intermedio coincide con el mal ajuste de las curvas.

Es por eso que se limita la analogía del modelo viscoso a los valores de ε y N que no presentan cúmulos intermedios. De hecho, de acuerdo con la ecuación deducida por

Piasecki, si $N=15$, $\varepsilon=0.8$ invalida la posibilidad de obtener un estado estacionario (aunque ya se vio previamente, que no necesariamente invalida el tener un estado periódico).

v) Fases

En sistemas de muchas partículas, el ordenamiento de dichos sistemas puede cambiar radicalmente, como ocurre en el caso del agua en sus tres estados. Es posible hacer una analogía, incluso para N pequeña, y dar el nombre de fases a las configuraciones particulares encontradas para medios granulados.

En diversos artículos [16,17] se habla de fases condensadas ("condensed") y gaseosas ("gas-like") para la columna que examinamos. A continuación introducimos una clasificación para los estados que se encontraron.

Cuando se forma un cúmulo que "levita", decimos que se trata de una fase "levitada". Cuando se forma un cúmulo de alta densidad relativa que oscila decimos que el sistema está en una fase "levitada oscilante". Tal es el caso del caso $N=15$ y $\varepsilon=0.8$ mencionado en el apartado anterior. Si el total de las partículas se encuentra en el cúmulo y éste descansa sobre la base, entonces decimos que tenemos una fase "no levitada". Si tuviéramos una base móvil, este estado se encontraría siempre que $.Aw^2 < g$, donde A es la amplitud de la oscilación de la base, y w su frecuencia angular.

Es importante investigar cuáles son las variables en juego para cambiar de una fase a otra. Ya hemos visto que el sistema es reescalable con V_0 , si se hacen los cambios de variable del capítulo 2. Queda por investigar la dependencia de ε y N .

Aprovechando el análisis hecho en el apartado anterior, seguimos con $N=15$, pero ahora comenzamos con $\varepsilon=0.85$, cerca del valor donde aparece la fase levitada oscilante.

En la siguiente figura se presenta una grafica del número de partículas en el cúmulo (n) como función de ε .

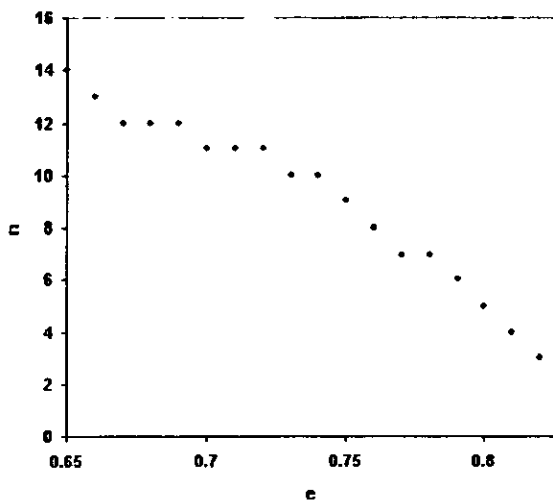


Figura 3.20

Número de partículas dentro del cúmulo (n) como función del coeficiente de restitución. $N=15$.

Lo que ocurre desde que $\varepsilon = 0.82$ hasta $\varepsilon = 0.66$ es que se forma un cúmulo partiendo de la segunda partícula. Es decir que siendo n el número de partículas pertenecientes al cúmulo, en caso de $n=3$ las partículas que lo forman son las (2,3,4), para $n=4$, lo forman las

(2,3,4,5), etc. La posición de estos cúmulos oscila con el tiempo. Cuando llegamos a $\epsilon=0.66$ sólo las partículas 1 y 15 están "libres", hasta que en $\epsilon=0.65$ las partículas quedan casi apiladas unas sobre la otras y la primera sobre la base. La energía que se inyecta no se disipa por completo en las colisiones, sino que periódicamente se libera en un brinco que efectúa todo el cúmulo regresando rápidamente a su posición sobre la base. Estas pruebas se hicieron utilizando un coeficiente de restitución dependiente de la velocidad.

En este ejemplo encontramos las tres fases para distintos valores de ϵ .

$8.3 \leq \epsilon \leq 1$	Fase levitada
$8.2 \leq \epsilon \leq 6.6$	Fase levidada oscilante
$0 \leq \epsilon \leq 6.5$	Fase no levitada.

En este caso en particular se investigó el comportamiento de la columna con $N=15$, para distintos valores del coeficiente de restitución. La pregunta que surge es cómo cambia este comportamiento para distintas N . Para responder esta pregunta, se llevaron a cabo las simulaciones correspondientes a $N=(10,15,20,25,30,35$ y $40)$. Para todos estos casos se encuentran las tres fases, pero para distintos intervalos de ϵ . Por otro lado se calculó la pérdida de energía por unidad de tiempo para cada uno de los valores de N y ϵ . En la figura 3.21 se grafican estos valores utilizando un coeficiente de restitución fijo (no dependiente de la velocidad) en cada corrida.

Nótese como a pesar de que cerca de $\epsilon=1$ la energía que se disipa aumenta conforme ϵ decrece, a partir de cierto valor de ϵ la energía disipada deja de aumentar. A primera vista este resultado es extraño, pues intuitivamente uno esperaría que la energía disipada fuera una función monótonamente decreciente de ϵ .

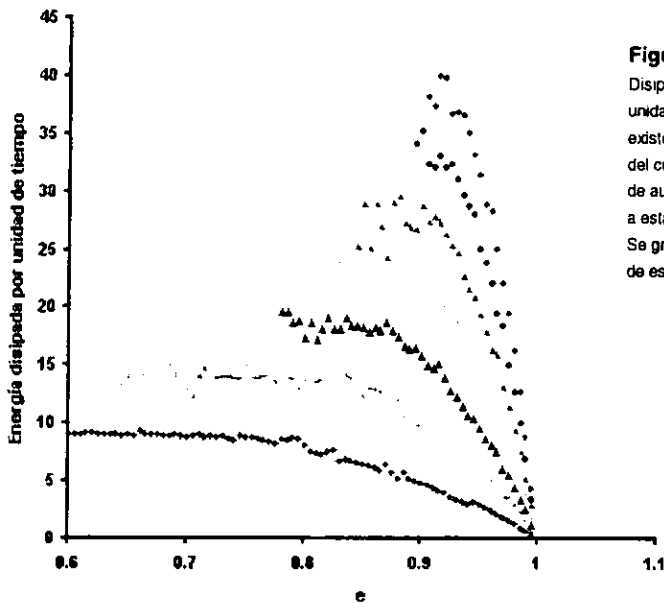


Figura 3.21

Disipación de energía por unidad de tiempo. En cada caso existe un valor de ϵ a partir del cual la disipación deja de aumentar. Esto corresponde a estados semicondensados. Se graficó hasta la aparición de estados condensados.

- $N=10$
- $N=15$
- ▲ $N=20$
- $N=25$
- $N=30$
- $N=35$
- $N=40$

La energía graficada se adimensionalizó utilizando las relaciones del capítulo 2.

Lo interesante es que es justo a partir de este valor, los estados que se encuentran son levitados oscilantes (los estados no levitados no fueron graficados en la figura anterior, porque en algunos casos se encuentra colapso inelástico). Es decir que el sistema disipa cada vez más energía conforme ϵ decrece, hasta que al llegar a un valor crítico del coeficiente de restitución, la disipación es independiente de ϵ y aparece un cúmulo levitando en la parte inferior de la columna. En estos términos podemos decir que el sistema cambia de fase dependiendo de N y ϵ , pues hay dos comportamientos fundamentalmente distintos.

El hecho de que la energía disipada por partícula por unidad de tiempo no siga aumentando conforme ϵ decrece, se explica por la naturaleza misma de los cúmulos, pues la velocidad relativa de las partículas que conforman el cúmulo es cercana a cero, y la energía que se disipa por colisión es proporcional a la velocidad relativa de las partículas que colisionan. Sin embargo esto no explica el porqué el sistema forma cúmulos para ciertos valores de N y ϵ .

Debido a la continua referencia a la importancia del parámetro $N(1-\epsilon)$, se analizó la gráfica anteriormente presentada utilizando este parámetro y la energía disipada por partícula por unidad de tiempo en la siguiente figura (3.22).

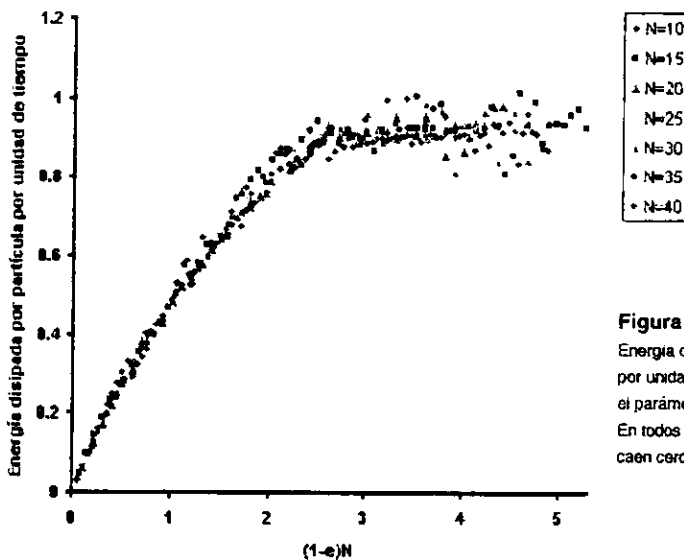


Figura 3.22
Energía disipada por partícula por unidad de tiempo contra el parámetro $N(1-\epsilon)$. En todos los casos los puntos caen cerca de una sola curva.

Es sorprendente lo cercano que quedan todos los puntos de una única curva. Lo importante de este resultado es que hace posible determinar la aparición de un estado de levitación oscilante a partir de N y ϵ . Es necesario analizar este comportamiento con más detalle para comprenderlo a fondo. Sin embargo a partir de estos resultados se puede concluir que siempre que $N(1-\epsilon) > 2.5$, se tendrá un estado levitado, y a partir de este valor y hasta $N(1-\epsilon) = 4.5$ habrá un estado levitado oscilante.

Otro análisis que resulta útil e ilustrativo es el de la posición del centro de masa (h_{CM}) relativa a la altura de la partícula superior (h_{sup}). Para ello definimos la variable $H = h_{CM}/h_{sup}$. En la figura 3.23 se grafica esta variable como función del coeficiente de restitución.

H decrece conforme ϵ decrece, partiendo del caso cuasielástico. Pero llega un punto a partir del cual H decrece más rápidamente hasta que se alcanza un valor crítico de ϵ . Después de este valor, para $N=10$ y $N=15$ H crece como función de ϵ . Por como fue construida H es de esperarse que la aparición de los cúmulos intermedios implique un decremento particular de dicha función. De hecho, los puntos los que marcan la aparición de los cúmulo intermedios son precisamente aquellos donde la pendiente de H se hace más negativa. Este cambio en H es el equivalente al que se presenta en la gráfica 3.21, donde, al aparecer un cúmulo intermedio, la energía disipada por unidad de tiempo es casi constante ante un cambio en ϵ .

En la figura 3.24 se utilizó nuevamente el parámetro $N(1-\epsilon)$ en lugar de ϵ , e igual que para la energía disipada, los puntos se aproximan a una curva única. El valor de este parámetro a partir del cual la curva comienza su descenso pronunciado, corresponde a la aparición de un cúmulo intermedio. Los puntos que quedan fuera de la curva son los correspondientes a los casos peculiares de $N=10$ y $N=15$.

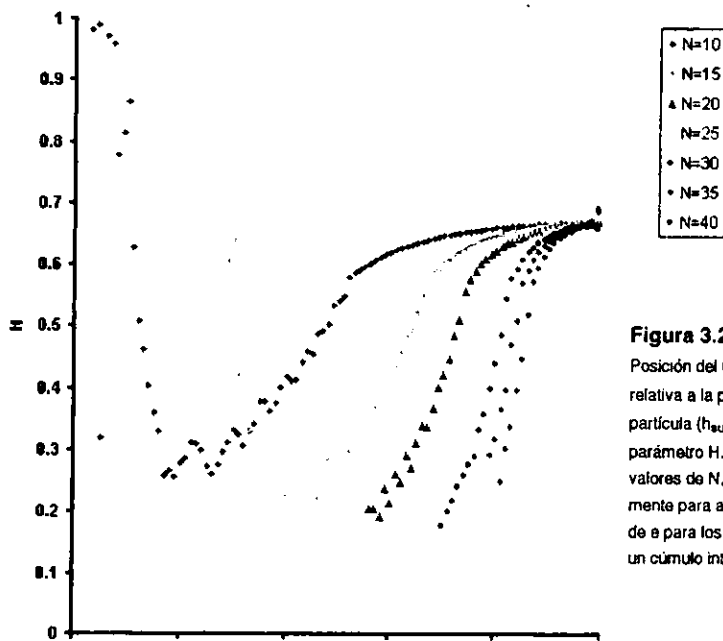


Figura 3.23

Posición del Centro de masa (h_{CM}) relativa a la posición de la última partícula (h_{sup}), mediante el parámetro H . Para todos los valores de N , H decrece abruptamente para aquellos valores de e para los que aparece un cúmulo intermedio.

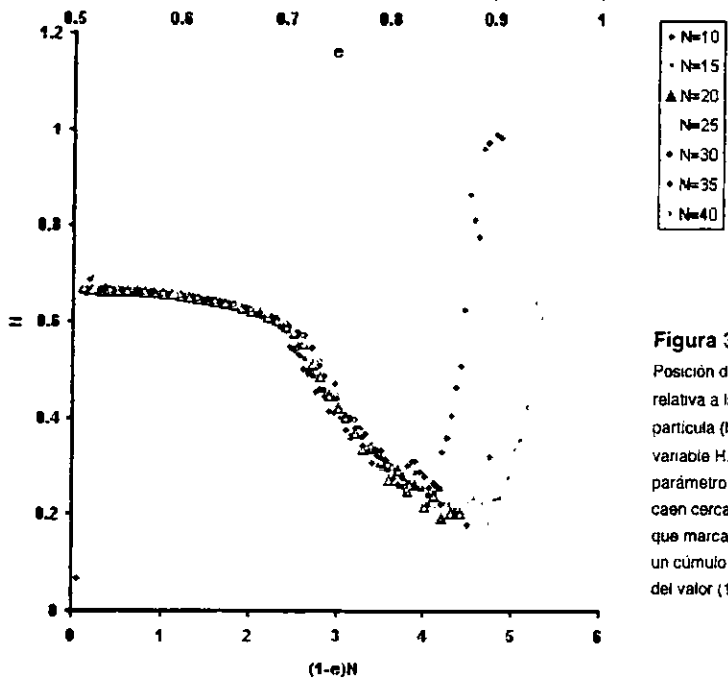


Figura 3.24

Posición del Centro de masa (h_{CM}) relativa a la posición de la última partícula (h_{sup}), mediante la variable H . Al utilizar el parámetro $(1-e)N$, los puntos caen cerca de una única curva que marca la aparición de un cúmulo intermedio cerca del valor $(1-e)N = 2.5$.

Una vez más, $N(1-\epsilon)$ demuestra ser el parámetro determinante en estas "fases" del sistema. Nótese que los valores de $N(1-\epsilon)$ dentro de los que aparece una fase levitada, una levitada oscilante y una no levitada (no se grafican por tratarse de colapso inelástico), son aproximadamente los mismos, tanto en el análisis de H , como en el de la energía disipada.

La descripción anterior se hizo utilizando un coeficiente de restitución no dependiente de la velocidad, y por ello se encontró colapso inelástico. Varios autores consideran que la formación de los cúmulos es la antesala del colapso inelástico (fenómeno físicamente inexistente) y por ello es tentador pensar que la formación de dichos cúmulos es consecuencia de utilizar una ϵ constante. Aunque no resulta evidente que estos cúmulos se formen al utilizar una ϵ dependiente de la velocidad de cada colisión, sí se puede mostrar que la dependencia de ϵ con la velocidad no afecta cualitativamente al sistema. Dentro del cúmulo la velocidad de las partículas es prácticamente cero, por lo que la energía que se disipa en él es muy poca comparada con la que se disipa en el resto de la columna. En este sentido, no es relevante el valor particular de ϵ dentro del cúmulo.

Como se explicó en la sección de colapso inelástico, cuando utilizamos un coeficiente de restitución dependiente de la velocidad, fijamos, la constante C de modo tal, que si $|v_1 - v_2| = V_0$, entonces el coeficiente de restitución dado por $\epsilon = 1 - C |v_1 - v_2|^{1/5}$ toma el valor del ϵ_f fijo con el que queremos comparar.

Utilizando esta función para ϵ , corremos las simulaciones para $N=10, 15, 20, 25, 30, 35$ y 40 . En las figuras 3.25 y 3.26 se muestra la energía disipada por partícula por unidad de tiempo y H respectivamente, contra el parámetro $N(1-\epsilon)$, donde ϵ es precisamente ϵ_f .

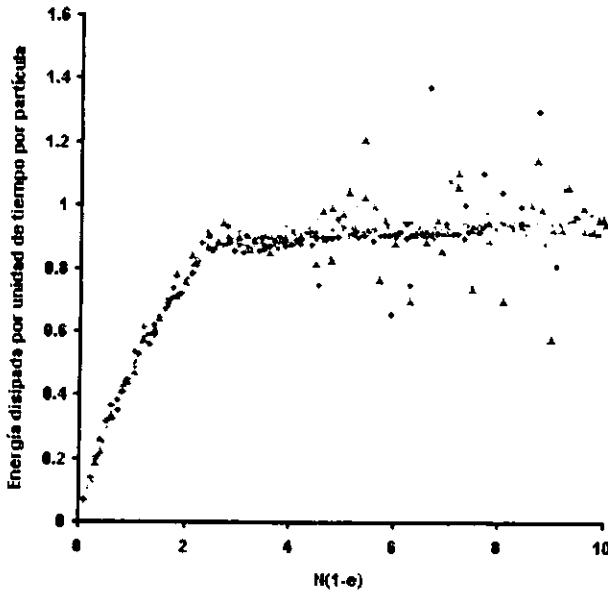
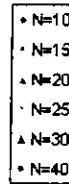


Figura 3.25

Energía disipada por partícula por unidad de tiempo, usando una e dependiente de la velocidad relativa de la colisión.

El valor de $N(1-e)$ para el que la energía se vuelve constante es cercano al de e y constante.



$V=1000$ cm/s

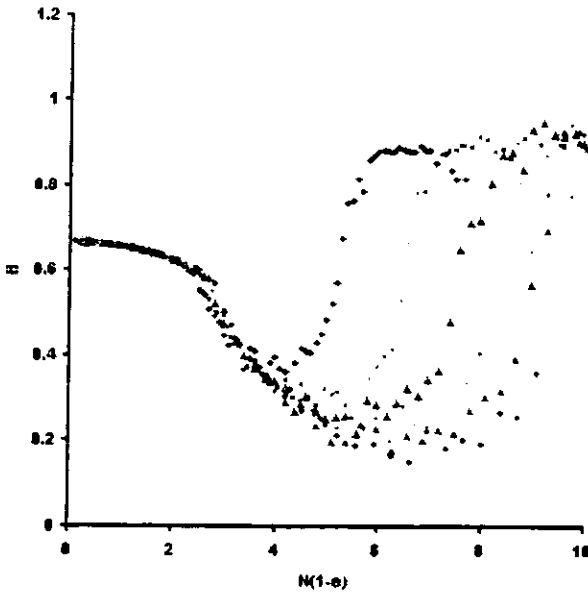
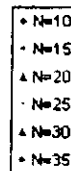


Figura 3.26

Altura del centro de masa en comparación a la altura total de la columna para un e dependiente de la velocidad relativa de la colisión.

Pueden observarse las tres fases.



El utilizar un ϵ realista permite bajar más el coeficiente de restitución sin que aparezca colapso inelástico. En la figura 3.26 se aprecia la aparición del cúmulo intermedio nuevamente alrededor de $N(1-\epsilon) = 2.5$. Como se ha explicado anteriormente, este cúmulo oscila. Sin embargo, si se sigue disminuyendo ϵ , el cúmulo oscila cada vez con menor amplitud relativa con respecto a la altura total de la columna, lo que provoca que H tienda a 1 si se trata de partículas puntuales, y a $1/2$ si las partículas tienen un diámetro finito. En este régimen, las partículas se apilan y disipan gran parte de la energía que adquieren de la base en las colisiones dentro del cúmulo. Pero la columna logra despegarse de la base moviéndose como un único cúmulo como se muestra en la figura 3.27.

Después de $t=14.288$ las velocidades relativas son muy similares, y por ello las partículas no colisionan mas que en los tiempos correspondientes a las dos columnas que se observan en la figura.

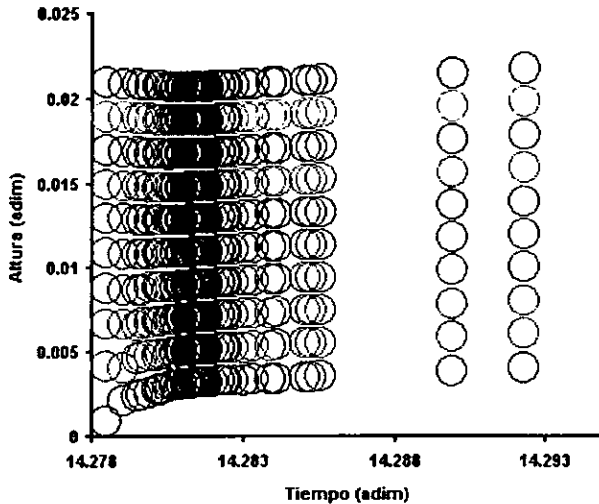


Figura 3.27

Estado "no levitado". La mayor parte de la energía se disipa entre $t=14.2788$ y $t=14.283$. Después de esto, la columna se comporta prácticamente como un solo cúmulo. Se utilizan partículas con diámetro $d=0.002$ para una mejor visualización. Las partículas parecen traslaparse por efectos de la escala. $N=10$ $e=0.36$ (variable)

Es posible establecer tres estados como función de ϵ y N .

Si $N(1-\epsilon) < 2.5$ se tendrá un estado estacionario y por lo tanto un estado "levitado".

Si $N(1-\epsilon) > 2.5$ se formará un cúmulo intermedio que corresponde al estado "levitado oscilante". Definimos un estado "no levitado" como aquel en el que H tiende a 1 para partículas puntuales y a $1/2$ para partículas con diámetro distinto de cero. Contrario al caso del estado de levitación oscilante, la aparición de esta fase condensada ya no sólo depende del parámetro $N(1-\epsilon)$. Nótese que la aparición de cúmulos implica que la energía de la partícula superior no alcanza asintóticamente un valor constante.

Es importante remarcar que los tres estados se encuentran también al utilizar un coeficiente de restitución dependiente de la velocidad relativa de colisión.

Capítulo IV

Experimento

En esta sección se describe el experimento diseñado y construido para estudiar las propiedades de un sistema unidimensional de partículas que son vibradas por medio de una base móvil. Se presentan resultados preliminares para una columna de quince balines y se compara con los resultados encontrados en las simulaciones.

i) Diseño experimental ideal

Para lograr que las partículas se mantengan formando una columna, es necesario usar una estructura que restrinja su movimiento. Para ello se puede utilizar un tubo capilar de vidrio cuyo diámetro interno sea ligeramente mayor que el diámetro de las partículas. Las partículas utilizadas son balines de acero. La inyección de energía se da a través de una bocina que recibe los pulsos amplificados de un generador de señales, de modo que su movimiento está dado por $h(t) = A \sin(\omega t)$, donde h es la posición, A la amplitud y ω la frecuencia angular. Al centro de la bocina se fija un pistón, que a su vez se coloca dentro

del tubo capilar por su parte inferior. Para poder determinar tanto la posición como velocidad de los balines se utilizan pares emisor-detector de luz infrarroja, cuya información es almacenada y procesada por una computadora. El tamaño de los balines debe ser tal, que la bocina tenga la energía suficiente como para levantar el peso de la columna. En la siguiente figura se muestra el dispositivo experimental ideal.

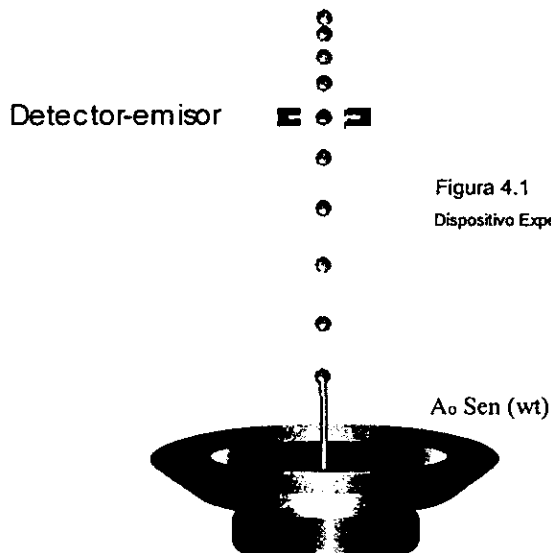


Figura 4.1
Dispositivo Experimental

ii) Descripción del experimento

A continuación se describe el material y el diseño del dispositivo utilizado.

Los balines utilizados fueron balines de acero cromado de 0.75 ± 0.05 mm de diámetro, lo que corresponde a aproximadamente $1/32$ de pulgada, y con masa de 2 ± 0.16 miligramos c/u. Como estructura para mantener a los balines formados en una columna se utilizó un tubo capilar de vidrio cuyo diámetro interno es 1.2 mm. Es importante notar que lejos del caso ideal, cabe aproximadamente un balín y medio dentro del tubo. Esto provoca que las colisiones entre un par de balines adyacentes no siempre sean frontales.

A modo de pistón se utilizó una broca de acero para taladro de $3/64$ de pulgada de diámetro, fijada con plastilina epóxica al centro del cono de la bocina. El cono fue recortado lo más posible para minimizar el sonido producido. La bocina utilizada fue de 8 watts.

El sistema de detección se construyó con pares comerciales de detector-emisor de luz infrarroja. La cantidad de luz que llega al detector se traduce en un voltaje entre dos puntos del detector, de modo que cuando toda la luz emitida es recibida, esta medida será de 5 volts. Por el contrario, si no llega luz infrarroja al detector, el voltaje entre estos dos puntos será de 0 volts. Estas medidas son analógicas, lo que resulta inconveniente para su procesamiento en una computadora. Para resolver este problema, los detectores se conectan a una tarjeta de lectura que digitaliza la información, traduciendo el voltaje a sistema binario. Así, los 5 volts se traducen al número 255 y los cero volts al número 0. Se tiene entonces 256 posibles valores dependiendo de la cantidad de luz que reciba el detector.

La tarjeta almacena 1 dato cada $83 \mu\text{s}$. Una vez transcurrido el tiempo de muestreo, los datos son transmitidos a una computadora. El paso de un balín a través de dos de estos

detectores se ve como un mínimo en la gráfica de voltaje contra tiempo como se muestra en la siguiente figura.

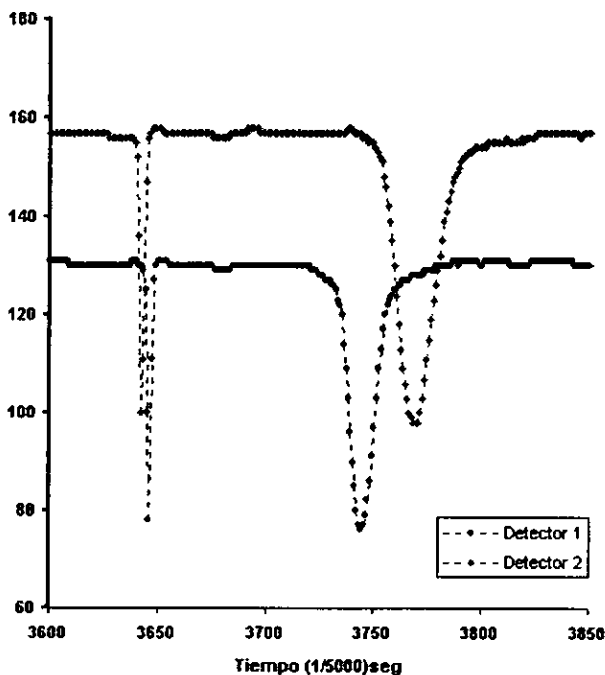


Figura 4.2

Datos digitales obtenidos en la computadora, a partir del voltaje de dos detectores. Un balón pasa frente a los detectores, colisiona con la base y pasa de nuevo frente a ellos. El orden en el que aparecen los mínimos indica la dirección de la velocidad, y la distancia entre dos mínimos adyacentes, su magnitud. Los detectores están colocados en cruz, y la distancia entre ellos es 1mm.

El hecho de tener un mínimo y no un sólo punto, obedece a que conforme un balón pasa a la altura del par emisor detector, obstruye primero una pequeña parte del haz, luego lo obstruye completamente, y a medida que se aleja va obstruyendo cada vez menos hasta que pasa por completo. Además puede observarse que el punto mínimo del mínimo no es cero, a pesar de que por un momento el balón obstruye completamente el haz. Esto pasa porque la respuesta del par no es inmediata, tanto al momento de la carga (paso de luz) como de la descarga (bloqueo de luz). Si se colocan dos detectores con una separación menor al

diámetro de un balón, es posible determinar su velocidad al comparar los datos de ambos detectores. La velocidad se puede obtener al dividir la distancia que separa a los detectores, entre la diferencia de tiempo entre los mínimos. Adicionalmente, dado que se conoce la posición de cada detector, el orden de los mínimos determina la dirección de la velocidad.

En el dispositivo del que se tomaron los datos de la figura 4.2 se utilizó un sólo balón y se colocaron dos detectores en cruz muy cerca de la base inmóvil, siendo el detector 1 el más cercano a ella. Se puede inferir a partir de estos datos, que el balón pasó descendiendo frente a los detectores, colisionó con la base, y pasó luego ascendiendo. También puede deducirse que la velocidad descendiente fue mayor que la ascendente. Estos datos son útiles para calcular el coeficiente de restitución entre la base y el balón.

A continuación se presentan resultados experimentales preeliminares con $N=15$ $A = 0.4 \pm 0.5$ mm y $f = 43.37 \pm 2.01$ Hz.

El dispositivo utilizado para analizar el comportamiento de la columna de balines constó de ocho pares detector-emisor paralelos, siendo la separación entre ellos de un 1 cm. Se colocó el sistema de modo que el primer detector se encontraba a la altura de la base, y por lo tanto, el octavo se encontraba a 8 cm de esta.

La tarjeta registra un dato por detector comenzando por el más cercano a la base y una vez que ha registrado el dato del octavo, regresa al primero. Esto constituye un ciclo. Se tomaron 48 series de 2700 ciclos, donde el tiempo de toma de datos de cada serie es 2.16 segundos. Con este sistema se determinó el número de detecciones (mínimos) de cada detector por ciclo. Esto es, el número de balines que atravesaron cierta altura en un tiempo de 2.16 segundos, que es una medida de la densidad promedio. Para obtener una densidad relativa de detecciones, se divide el número de detecciones de cada detector, entre el

número total de detecciones por ciclo. Se observa que los balines forman un cúmulo compacto que oscila cerca de la base, y que periódicamente se expande para luego regresar de nuevo a su formación de cúmulo. En la figura 4.3 se muestran los resultados experimentales, donde las pocas detecciones relativas de los últimos detectores corresponden a dicha expansión. Se simuló un sistema de detección igual al experimental en la misma simulación computacional del capítulo anterior y se obtuvieron los resultados correspondientes para $\epsilon = 0.671$ y $V_0 = 1000$ cm/s. El coeficiente de restitución es dependiente de la velocidad relativa de la colisión, y el valor que se indica arriba se determinó con el criterio explicado en el capítulo anterior con $C = 0.0825$ (cm /s)⁵.

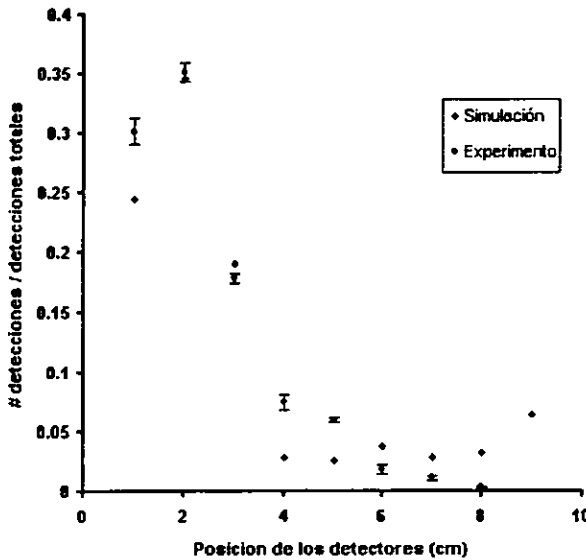


Figura 4.3
 Número de detecciones relativas registradas por cada detector, $N=15$ $f=50$ Hz $A=0.5$ cm. En la simulación se usó $\epsilon = 0.671$ (variable) y $V_0=1000$ cm/s.

Nótese que, tanto en el experimento como en la simulación, el mayor número de detecciones se da en el segundo detector y no en el primero, lo que indica la presencia de un cúmulo intermedio y por lo tanto un estado "levitado oscilante". Los valores de ϵ y V_0

escogidos en la simulación fueron aquellos que dieron como resultado un perfil de detecciones similar al experimental. Si experimentalmente se midiera el coeficiente de restitución, sería posible determinar la velocidad de la base térmica de la simulación que equivaliera al pistón móvil del experimento.

El objetivo del experimento reportado fue probar el dispositivo y detectar los posibles problemas relacionados con este. Es necesario hacer más experimentos para distintos valores de A y w e investigar si dado ε es posible encontrar en la simulación un valor de V_0 del que se obtenga un perfil de detecciones similar. También habrá que medir las oscilaciones del cúmulo intermedio y comparar con los resultados teóricos. Para hacer estas mediciones, es probable que el mejor sistema de medición sea una cámara de video de alta velocidad.

Después de realizar una corrida de datos, los balines quedan magnetizados por efecto del imán de la bocina. Para evitar que esto ocurra sería necesario utilizar balines de un material paramagnético, o bien cambiar el sistema de inyección por uno que no utilice ningún imán. Otra manera de resolver el problema es utilizando una placa de duralium a modo de jaula de Faraday como hacen Falcón et al [32] en un experimento con una configuración similar. Otro punto importante es el de cambiar el tubo por uno cuyo diámetro interno sea ligeramente mayor que el de los balines, para que las colisiones sean frontales y de esta manera se reduzca la pérdida de energía por las colisiones con las paredes. Esta modificación haría necesario hacer vacío en el interior del tubo para reducir los posibles efectos neumáticos.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Resumen, conclusiones y perspectivas.

Se estudian las propiedades de una columna granular unidimensional de N partículas sujetas a la fuerza de gravedad, que colisionan entre si con coeficiente de restitución ϵ . La energía que saca a las partículas de su equilibrio proviene de una base que transfiere energía a la partícula más cercana a ella.

Primeramente analizamos las colisiones entre una sola partícula y una base que se mueve armónicamente. Este problema resulta ser no trivial. Sin embargo es posible obtener información sobre la función de distribución mediante el parámetro adimensional $K = wA / (v_o + g/w)$. Si $K \geq 1$, entonces se obtendrá una gráfica discontinua de la velocidad que adquirirá la partícula después de la colisión como función de la fase. Si $K < 1$, entonces la gráfica será continua. En este caso el histograma (que es la función de distribución que se busca) tendrá dos máximos, mientras que en otro caso tendrá sólo uno.

Para simplificar el problema se propuso una base que imprime siempre la misma velocidad a la partícula inferior, sin importar la velocidad que dicha partícula tenga al momento de la colisión. Este es un caso extremo de una base "térmica". Utilizando esta base se analizaron sistemas que tuvieran desde dos partículas hasta 40.

Se define como estado estacionario a aquel en el que, pasado un suficiente número de iteraciones, la partícula superior alcanza una energía constante. El espacio fase de colisión

(EFC) se define como el espacio formado por las coordenadas de velocidad y posición de cada partícula cada vez que se produce una colisión. Este espacio es discreto.

Se encuentran estados estacionarios y periódicos que no dependen de las condiciones iniciales. El número de puntos del EFC en uno de estos estados es igual a N , y si $\varepsilon=1$, es igual a N^2 . Este número de puntos es el número de colisiones que se llevan a cabo en la columna por ciclo. Para los casos estacionarios se puede ver al conjunto de partículas como el de una sola partícula virtual en un medio viscoso, donde la fuerza que actúa sobre la partícula es $F = mg - av$, siendo v su velocidad, m su masa, g la aceleración de la gravedad y a una constante que depende de N y ε . Es interesante que el comportamiento colectivo de N partículas sea equivalente al de una sola partícula virtual, cuya ecuación de movimiento puede obtenerse. Por otro lado, algunas de las propiedades del sistema de N partículas (como son el perfil de densidad, o de velocidad) podrían obtenerse más fácilmente a partir de dicha ecuación.

Si visto en el EFC el sistema es cíclico, mas no estacionario, entonces el número de colisiones por ciclo es mayor que N y aparecen cúmulos intermedios cuya posición oscila con el tiempo. Los periodos de estos cúmulos no son lineales con respecto a V_0/g , sino que presentan un comportamiento peculiar. Hasta donde sabemos, este resultado no ha sido publicado en trabajos previos.

Si el coeficiente de restitución es constante, entonces puede aparecer el fenómeno llamado "colapso inelástico". Este fenómeno espúreo puede evitarse introduciendo un coeficiente de restitución más realista que tienda a 1 conforme la velocidad relativa tiende a cero.

Se analiza la energía disipada, por partícula, por unidad de tiempo (Fig. 3.24) . Por otro lado, se construye la variable H definida como la altura del centro de masa entre la altura

total de la columna (Fig. 3.25). Con la ayuda de estas dos funciones clasificamos en tres estados el comportamiento asintótico de la columna de partículas, donde el parámetro $N(1-\epsilon)$ resulta ser de gran relevancia.

1) Estado levitado. Corresponde a estados estacionarios. La partícula superior alcanza una energía constante, y el número de colisiones que se llevan a cabo en la columna es igual a N . En este estado $6.3 > H > 5.8$ y la energía disipada, por partícula, por unidad de tiempo, es una función creciente de $N(1-\epsilon)$. El sistema se encuentra en este estado si $N(1-\epsilon) < 2.5$.

2) Estado "levitado oscilante". Aparecen cúmulos. La energía de la partícula superior toma varios valores y el número de colisiones por ciclo es mayor que N . $H < 5.8$ y la energía disipada, por partícula, por unidad de tiempo, no depende de ϵ .

Este estado se presenta si $N(1-\epsilon) > 2.5$.

3) Estado "no levitado". Las partículas se conglomeran en un solo cúmulo en la parte inferior. H tiende a 1 para partículas puntuales y a $1/2$ para partículas con diámetro distinto de cero. Contrario al caso del estado de levitación oscilante, la aparición de este estado ya no sólo depende del parámetro $N(1-\epsilon)$, aunque se presenta si $N(1-\epsilon) > 2.5$.

Los cúmulos ya habían sido identificados por Bernu, Delyon y Mazighi [16] pero utilizando bases cuya posición como función del tiempo es un diente de sierra o una función sinusoidal. De hecho los encuentran también a partir de $N(1-\epsilon) > 2.5$. Lo interesante es que en el presente trabajo la base permanece inmóvil y sin embargo el valor de $N(1-\epsilon)$ en que se encuentra el estado "levitado oscilante" es el mismo. Esto sugiere que la formación

de cúmulos es una propiedad intrínseca de un sistema de partículas inelásticas al que se le inyecta energía por medio de una base, sin importar los detalles de la inyección de la energía. También es importante notar que estos estados se encuentran al utilizar tanto un coeficiente de restitución constante, como uno dependiente de la velocidad relativa de colisión.

Como parte de las perspectivas está el análisis de la partícula virtual en un medio viscoso para distintos valores de N y ϵ , y ver la dependencia de a con $N(1-\epsilon)$. También está el explicar la oscilación de los cúmulos utilizando la ecuación de Boltzmann.

En resultados experimentales preliminares los balines presentaron un comportamiento muy similar al de un estado de "levitación oscilante" obtenido en la simulación computacional (Fig. 4.3). Es necesario llevar a cabo más experimentos que permitan estudiar el comportamiento de los cúmulos y si, en efecto, el estado "levitado oscilante" aparece siempre que $N(1-\epsilon) > 2.5$. En estos experimentos se medirá el periodo de oscilación de los cúmulos.

Para que el experimento reproduzca lo mejor posible las suposiciones teóricas, es importante que el diámetro de los balines sea apenas menor al diámetro del tubo que los contenga para que las colisiones sean frontales. También que sean de un material paramagnético si es que el sistema de vibración sigue siendo una bocina conectada a un pistón, y evitar así que se magneticen. Para evitar efectos neumáticos será necesario hacer vacío dentro del tubo.

El sistema de detección podría mejorarse utilizando una cámara de alta velocidad de modo que pueda seguirse con mayor precisión la posición de cada una de las partículas.

En un futuro sería interesante analizar un sistema con un número mayor de partículas.

Es posible que el estudio de los medios granulares unidimensionales vibrados ayude al entendimiento de sistemas granulares en dos y tres dimensiones. Por mencionar un ejemplo, el relajamiento que presentan los cúmulos experimentalmente podría verse como el equivalente unidimensional de un oscilón. Con un estudio más profundo podría determinarse si estas estructuras son una propiedad general de los sistemas granulares vibrados. Por otro lado, aunque en la literatura [17] se le llama "disipación efectiva" al parámetro $N(1-\epsilon)$, el problema de encontrar una interpretación física más rigurosa para dicho parámetro sigue abierto.

Las interesantes y complejas características presentadas en los sistemas granulares vibrados estudiados, ameritan seguir con la investigación.

Bibliografía

- (1) Spahn, F., Schwarz, U., Kurths, J., 1997, *Physical Review Letters*, 78 (8), 1596-1599.
- (2) Baker, G., Mehta, A., *Physical Review A*, 1992, 45 (6), 3435-3446.
- (3) Jaeger, H., Nagel, S., 1996, *Reviews of Modern Physics*, 68 (4) 1259-1273.
- (4) Duran, J., Sables, poudres et grains, 1997, Editorial Eyrolles Sciences, Francia.
- (5) Duran, J., Rajchenbach, J., Clement, E., 1993, *Physical Review Letters*, 70, 2431.
- (6) Jaeger, H., Liu, C., Nagel, S., 1989, *Physical Review Letters* 62, (40), 1259-1273.
- (7) Chicharro, R., Peralta-Fabi, R., Velasco, R.M., 1997, en Powders et Grains 97, Behringer, R., Jenkins, J., editores, editorial Balkema.
- (8) Evesque, P., Rajchenbach, J., 1989, *Physical Review Letters*, 62 (1). 44-46.
- (9) Peralta-Fabi, R., Morales, E., Romero-Rochín, V., 1997, en Powders et Grains 97, Behringer, R., Jenkins, J., editores, editorial Balkema.
- (10) Janssen, H., *Verein Deutsch Ing.*, 1895, 39 (35).
- (11) Peralta-Fabi, R., Málaga, C., Rechtman, R., 1999, *Europhysics Letters*, 45 (1), 76-82.
- (12) Umbanhowar, P., Melo, F., Swinney, H., 1996, *Nature*, 382 (29), 793-796.
- (13) Umbanhowar, P., Melo, F., Swinney, H., 1998, *Physica A*, 249, 1-9.
- (14) Tsimring, L., Aranson S., 1997, *Physical Review Letters*, 79 (2), 213-216.
- (15) Clement, E., Rajchenbach, J., 1991, *Europhysics Letters*, 16 (2), 133-138.
- (16) Bernu, B., Delyon, F., Mazighi, R., 1994, *Physical Review E*, 50 (6) , 4551-4559.
- (17) Ramírez, R., Cordero, R., *Physical Review E*, 1999, 59, 656 - 664.
- (18) Metha, A., Luck, J., 1990, *Physical Review Letters*, 65 (4) , 393-396.

- (19) Metha, A., Luck, J.M., 1993, *Physical Review A*, 48 (5), 3988-3997.
- (20) Whelan, N.D., Goodings, D.A., Cannizzo, J.K., 1990, *Physical Review A*, 42 (2), 742-754.
- (21) Piasecki, J., *American Journal of Physics*, Preimpresión.
- (22) Biben T., Piasecki J., 1998, *Physical Review E*, 59 (2), 2192-2202.
- (23) Holden, A., Chaos, 1986, Manchester University Press, UK.
- (24) Jordan, D., Smith P., Nonlinear Ordinary Differential Equations, 1988, Clarendon Press, UK.
- (25) McNamara, S., Young, W.R., 1992, *Physics of Fluids A*, 4 (496).
- (26) Kuwabara G., Kono K., 1987, *Japanese Journal of Applied Physics*, 16 (8), 1230-1233.
- (27) Goldman, D., Shattuck, D., McCormick, W., Swift, J., Swinney, H., 1998, *Physical Review E*, 57 (4), 4831-4833.
- (28) Clement, E., Duran, J., 1993, *International Journal of Modern Physics B*, 7 (9 & 10), 1807-1827.
- (29) Kudrolli, J., Wolpert, M., Gollub, 1997, *Physical Review Letters* 78, (7). 2312-2319.
- (30) Grossman, D., Zhou T., Ben-Naim E., *Physical Review E*. (por publicarse).
- (31) Press, H., Flannery, B., Vetterling, W., Teukolsky S., 1992, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, Segunda Edición, U.K.
- (32) Falcon, E., Laroche, C., Fauve, S., Coste, C., 1998, *The European Physical Journal B*, 5, 111-131.
- (33) Clement, E., Rajchenbach, J., 1991, *Europhysics Letters*, Vol. 16 (2).133-138.
- (34) Warr, S., Cooke, W., Ball, R.C., Huntley, J., 1996, *Physica A*, 231, 551-574.

Apéndice

I) Simulación

La simulación fue elaborada en el lenguaje de programación "Visual Basic". Las partículas son numeradas en orden ascendente comenzando por la partícula más cercana a la base. A cada una se le asocia una velocidad v_i , una posición con respecto a la base h_i , una masa m_i y un diámetro d_i . Así, h_i representa el centro de la partícula i . Para todos los casos examinados, estamos suponiendo que las partículas son idénticas, de modo que $m_i=m$, $d_i=d$, para toda i ($i=1,2, \dots,N$). Tomamos la aceleración de la gravedad como 971 cm/seg^2 de modo que todas las cantidades son calculadas en el sistema CGS y luego adimensionalizadas.

Estamos suponiendo que la pérdida de energía se da únicamente durante cada una de las colisiones, es decir que no hay fricción ni con el aire ni con las paredes del tubo que las contiene. También suponemos que la fuerza de gravedad es constante ($-mg$). De esta manera, el programa resuelve las ecuaciones de Newton para cada pareja adyacente de partículas y calcula el tiempo en el que colisionaría cada pareja si el resto no existiera, por medio de la ecuación:

$$t_{i,i-1} = - (h_i - h_{i-1} - d) / (v_i - v_{i-1}), \quad (\text{a.1})$$

para el conjunto determinado de valores h_i, v_i , ($i=1,2,\dots,n$).

El tiempo de colisión de la partícula inferior con la base se obtiene mediante la solución de la ecuación :

$$0 = h_1 + v_1 t_{1,b} + \frac{1}{2} g t_{1,b}^2. \quad (\text{a.2})$$

Una vez que se tienen todos los tiempos, el programa escoge el menor de ellos ($t_{i,i-1}$), y hace evolucionar el sistema justo ese periodo, es decir que cambia las posiciones y velocidades de cada una de las partículas de acuerdo con las ecuaciones de caída libre,

$$h_i' = h_i + v_i \Delta T + \frac{1}{2} g \Delta T^2 \quad \text{y} \quad v_i' = v_i + g \Delta T, \quad (\text{a.3, a.4})$$

donde $\Delta T = t_{i,i-1}$.

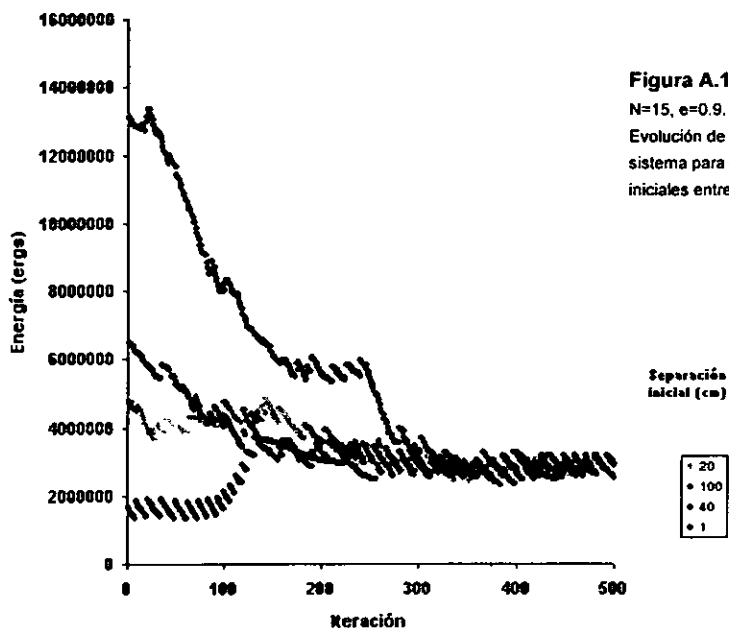
El siguiente paso consiste en cambiar las velocidades de las partículas que colisionan, de acuerdo con las ecuaciones del capítulo II. Si $\Delta T = t_{1,base}$ entonces simplemente v_1' adquiere el valor V_0 . Con esto se completa el ciclo, y se regresa a la evaluación de los nuevos tiempos de colisión.

i) Condiciones iniciales

El programa ofrece la posibilidad de asignar a cada una de las partículas velocidades iniciales aleatorias, que varían desde $-V_0$ hasta V_0 . Para esto se usa como "semilla" el reloj interno de la computadora. Así mismo, se asignan las posiciones iniciales mediante otro

parámetro ajustable de modo que el centro de cada partícula esta separada del las adyacentes una distancia d (incluyendo la partícula uno con la base).

Cabe recalcar que las condiciones iniciales no afectan el comportamiento de la columna para tiempos suficientemente grandes. Como ejemplo está la gráfica A.1, donde se ve cómo la energía de varios sistemas, con condiciones iniciales distintas, termina teniendo el mismo comportamiento alrededor de un valor asintótico. Los histogramas de altura y velocidad son exactamente iguales a partir de este punto.



ii) Coeficiente de restitución

Es posible usar un coeficiente de restitución constante, o bien, utilizar una función de la velocidad relativa de las partículas como proponen Kuwabara y Kono [26] y por las razones que fueron expuestas en el capítulo III. En este caso se asigna también un coeficiente para cada par de partículas que estén por colisionar,

$$e_{(i,i-1)} = 1 - C (v_i - v_{i-1})^{1/5}, \quad (\text{a.5})$$

donde C es una constante que depende del material.

iii) Toma de datos

El programa no registra las posiciones y velocidades que tienen las partículas durante el lapso de tiempo t_i a t_f , sino únicamente al momento de producirse cada colisión. Si corriéramos la simulación con una sola partícula, no obtendríamos como resultado las posiciones correspondientes a una parábola. Por el contrario obtendríamos un sólo valor repetido para la posición, que sería la del contacto con la base. Cabe mencionar que el sistema encuentra el equilibrio a la primera iteración, pues una vez que la partícula colisiona con la base, adquiere una energía $\frac{1}{2}mV_0^2$, que ya no tiene posibilidades de variar. La toma de datos puede hacerse cada determinado número de colisiones, o cada intervalo de tiempo real, según convenga.

Con estos datos, el programa calcula la energía de cada partícula, la velocidad del centro de masa y su posición.

El programa cuenta con una sección para la elaboración de histogramas de posición y velocidad. Dado que tenemos un sistema disipativo, podemos asegurar que la velocidad

máxima que podrá llegar a tener una de las partículas es V_0 y por la misma razón, en sentido contrario $-V_0$. Para el histograma de velocidades, el intervalo es $-V_0$ y V_0 , subdividido en un número arbitrario de subintervalos. En el caso del histograma de posición el intervalo puede elegirse.

II) Transformada de Fourier discretizada [31]

Una cantidad física p puede ser descrito ya sea en términos de un dominio temporal t o por medio de un dominio de frecuencias f . El proceso puede entonces ser especificado por medio de la amplitud de P como función de f , $P(f)$ con $-\infty < f < \infty$. Para muchos procesos se puede pensar en P y p como dos representaciones distintas de la misma función. Uno puede pasar de una a otra por medio de las ecuaciones de la transformada de Fourier.

$$P(f) = \int p(t) e^{-2i\pi ft} dt, \quad p(t) = \int P(f) e^{2i\pi ft} df. \quad (\text{a.6, a.7})$$

Si tenemos una muestra de datos para $h(t)$ tomada cada intervalo de t constante denotado por Δ , entonces $p_n = p(n\Delta)$, $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Habiendo N muestras, $p_k = p(t_k)$, $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$.

Como tenemos un número finito (N) de entradas, tendremos también N salidas. Así que en lugar de intentar estimar la transformada de Fourier para todos los valores de f , busquemos estimaciones sólo para valores discretos $f_n = n/\Delta N$, $n = -N/2, \dots, N/2$.

Los valores extremos de n corresponden exactamente a los límites superior e inferior del llamado intervalo crítico de frecuencias de Nyquist, definido como $f_c = 1/2\Delta$.

El siguiente paso es aproximar la integral por una suma discreta:

$$P(f_n) = \int p(t) e^{2i\pi(f_n)t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{2i\pi(f_n)(tk)} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{2i\pi kn/N} \quad (\text{a.8})$$

En la simulación, las cantidades físicas que se midieron fueron, por un lado, la posición del cúmulo como función del tiempo, y por otro, el número de partículas en un intervalo de posición también como función del tiempo. Con las relaciones antes descritas se transformaron estas cantidades en funciones de la frecuencia. De este modo fue posible encontrar la frecuencia principal de oscilación de los cúmulos.

III) Obtención del parámetro K

La posición de la partícula y de la base están dadas por :

$$\text{Asen}(wt+s) \quad \text{y} \quad A + v_o + \frac{1}{2} gt^2, \quad (\text{a.9, a.10})$$

respectivamente, y sus velocidades :

$$wA\cos(wt+s) \quad \text{y} \quad v_o + gt. \quad (\text{a.11, a.12})$$

En esta notación, tanto g como v_o son negativos. Igualando (a.9) y (a.10), multiplicando por w y elevandos al cuadrado obtenemos :

$$w^2 A^2 \text{sen}^2 (wt+s) = [A + v_o + \frac{1}{2} gt^2]^2. \quad (\text{a.13})$$

De igualar (a.11) con (a.12) y elevar al cuadrado obtenemos:

$$w^2 A^2 \cos^2 (wt+s) = [v_o + gt]^2. \quad (\text{a.14})$$

Ahora sumamos (a.13) y (a.14) y escribimos la ecuación en términos de los parámetros dimensionales $\alpha = Aw^2/g$, $\beta = Aw/v_o$ y $\tau = tw$.

$$[1 + \beta \tau + \frac{1}{2} \alpha \tau]^2 + [\beta + \alpha \tau]^2 - 1 = 0 \quad (\text{a.15})$$

Esta es una ecuación de cuarto grado que sólo tiene solución si

$$(4+4 \alpha)^2 - 16 \beta^2 > 0. \quad (\text{a.16})$$

Esta condición implica que

$$K = wA / [v_o + (g/w)] \geq 0. \quad (\text{a.17})$$