



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Frecuencial y Temporal del Oleaje

TESIS

Como Requisito para obtener el grado de

Ingeniero Civil

Presenta

ADRIÁN PEDROZO ACUÑA

Director de Tesis

Dr. RODOLFO SILVA CASARÍN



276674

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
FING/DCTG/SEAC/UTIT/204/99

Señor **ADRIAN PEDROZO ACUÑA**,  
Presente .

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. RODOLFO SILVA CASARIN**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

### “ANÁLISIS FRECUENCIAL Y TEMPORAL DEL OLEAJE”

#### Introducción

- I. El oleaje y la teoría lineal.
- II. Descripción estadística de un estado de mar.
- III. Distribuciones estadísticas del oleaje.
- IV. Análisis estadístico de datos extremos.  
Conclusiones y futuras líneas de trabajo

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”

México, D.F., a 6 de septiembre de 1999

EL DIRECTOR

M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

*A mis padres Adrián y Oralia,  
por la vida, su amor y valores.*

*A mis hermanos Úrsula y Diego,  
compañeros y amigos siempre,  
desde el primer día.*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Pocas tareas son tan gratas como la de mencionar a manera de tributo a todas aquellas personas e instituciones que han contribuido a la culminación de este trabajo, el cual no es más que fruto de un árbol.*

*Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad de Ingeniería y sus maestros por los conocimientos otorgados.*

*Expreso mi gratitud a la Comisión Federal de Electricidad y en especial a los ingenieros Jose A. Maza y Carlos Sánchez por haber proporcionado las mediciones de campo y los datos de satélite que fueron utilizados a lo largo del desarrollo de esta tarea.*

*Al Dr. Rodolfo Silva, un especial agradecimiento por la dirección de este trabajo, la atención recibida, los consejos y por compartir sus conocimientos y filosofía de trabajo.*

*Mi profundo agradecimiento a Hilda Mónica Romero por transmitirme su energía y disposición a lo largo de esta misión, además de ser siempre un motivo de superación.*

*Al Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, Adolfo, Bere, Gabo, Georges, Juan Carlos y Juan Manuel por su apoyo incondicional, atinados consejos y amistad a lo largo de esta labor.*

*A mis compañeros y amigos de la Facultad de Ingeniería, por todas las experiencias y batallas que libramos juntos.*

## ÍNDICE

Índice.....	1
Lista de símbolos.....	4
Lista de Figuras.....	8
INTRODUCCIÓN.....	11
Objetivos.....	12
Descripción y organización del estudio.....	13
<b>I OLEAJE.....</b>	<b>14</b>
1.1 Tipos de oleaje.....	14
1.1.1 Oleaje SEA.....	14
1.1.2 Oleaje SWELL.....	15
1.2 Teorías de onda.....	15
1.2.1 Función flujo.....	18
1.2.2 Función potencial.....	19
1.2.3 Ecuación de Bernoulli.....	20
1.3 Teoría lineal de Airy.....	20
1.3.1 Condiciones de contorno.....	21
1.3.2 Condiciones laterales de contorno.....	24
1.4 Solución lineal al problema de la onda.....	25
1.4.1 Solución analítica.....	26
1.5 Relaciones ingenieriles de las ondas progresivas.....	30
<b>II DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE UN ESTADO DE MAR.....</b>	<b>33</b>
II.1 Hipótesis Básicas.....	33
II.1.1 El oleaje como proceso estocástico.....	33
II.1.2 El oleaje como un proceso estacionario.....	36
II.1.3 El oleaje como proceso ergódico.....	36
II.2 Definición de estado de mar.....	38
II.3 Descripción estadística y espectral de un estado de mar.....	39
II.3.1 La muestra.....	39
II.4 Análisis temporal de la muestra.....	40
II.4.1 Corrección del nivel medio.....	40
II.4.2 Método de pasos ascendentes por el nivel medio, máximos y mínimos.....	41
II.5 Parámetros estadísticos.....	42
II.6 Análisis espectral.....	43
II.6.1 Intervalo de muestreo y longitud del registro.....	43
II.6.2 Corrección del nivel medio.....	44
II.6.3 Corrección de las discontinuidades.....	44
II.6.4 Evaluación de los coeficientes de Fourier.....	45
II.6.5 Suavizado espectral.....	46
II.6.6 Precisión.....	46
II.7 Parámetros espectrales.....	47
II.8 Factor de agrupamiento.....	48
II.9 Relaciones entre la descripción estadística y la espectral.....	50
II.10 Descripción estadística y espectral del oleaje en el puerto de Rosarito en B.C.N.....	51
II.11 Correlaciones entre la descripción estadística y la espectral.....	56

<b>III</b>	<b>DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DEL OLAJE .....</b>	<b>58</b>
III.1	<i>Distribución normal de la superficie libre.....</i>	58
III.2	<i>Distribuciones de alturas de ola.....</i>	58
III.2.1	<i>Distribución de Rayleigh para alturas de ola.....</i>	58
III.2.2	<i>Distribución de Longuet-Higgins (1983) de altura de ola.....</i>	59
III.2.3	<i>Distribución de alturas de ola de Tayfun.....</i>	60
III.2.4	<i>Distribución de alturas de ola de Carter.....</i>	61
III.3	<i>Distribuciones conjuntas de periodo y altura de ola.....</i>	61
III.3.1	<i>Distribución de Longuet-Higgins (1975).....</i>	62
III.3.2	<i>Distribución de Cavanié et.al (1976).....</i>	62
III.3.3	<i>Distribución Longuet-Higgins (1983).....</i>	64
III.4	<i>Distribuciones de periodos de ola.....</i>	65
III.4.1	<i>Distribución de Bretschneider(1959).....</i>	65
III.4.2	<i>Distribución de Longuet-Higgins (1975).....</i>	65
III.4.3	<i>Distribución Cavanié et al. (1976).....</i>	65
III.4.4	<i>Distribución Longuet-Higgins (1983).....</i>	65
III.5	<i>Modelos espectrales de un estado de mar.....</i>	65
III.5.1	<i>Estado de saturación.....</i>	66
III.5.2	<i>Modelo de Phillips.....</i>	67
III.5.3	<i>Espectro Zaslavavskii - Zakarov'.....</i>	67
III.5.4	<i>Espectro de Kolmogorov.....</i>	68
III.5.5	<i>Espectro de Toba.....</i>	69
III.5.6	<i>Espectro de Neumann.....</i>	69
III.5.7	<i>Espectro Pierson - Moskowitz.....</i>	69
III.5.8	<i>Espectro de Breitschneider.....</i>	70
III.5.9	<i>Espectro ISSC.....</i>	70
III.5.10	<i>Espectro ITTC.....</i>	70
III.5.11	<i>Espectro JONSWAP.....</i>	71
III.5.12	<i>Espectro TMA.....</i>	72
III.5.13	<i>Espectro de Krylov.....</i>	73
III.5.14	<i>Espectro de Davidiano et al.....</i>	73
III.5.15	<i>Espectro Wallops.....</i>	74
III.5.16	<i>Espectro de Ochi-Hubble.....</i>	74
III.5.17	<i>Espectro de Kitaigorodskii.....</i>	75
III.7	<i>Comparación numérica de resultados.....</i>	76
III.7.1	<i>Invierno.....</i>	76
III.7.2	<i>Primavera.....</i>	80
III.7.3	<i>Verano.....</i>	82
III.7.4	<i>Otoño.....</i>	85
III.7.5	<i>Correlaciones de alturas de ola medidas y las obtenidas de las distribuciones teóricas.....</i>	87
<b>IV</b>	<b>ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS EXTREMOS.....</b>	<b>92</b>
IV.1	<i>Importancia del análisis extremal en la ingeniería.....</i>	92
IV.2	<i>Excedencias.....</i>	94
IV.2.1	<i>Excedencias como un proceso Poisson.....</i>	94
IV.3	<i>Períodos de Retorno.....</i>	95
IV.4	<i>Valores característicos.....</i>	95
IV.4.1	<i>Estadísticos de orden.....</i>	95
IV.4.2	<i>Función Distribución de probabilidad.....</i>	96
IV.5	<i>Casos Particulares.....</i>	96
IV.5.1	<i>Distribución de un estadístico de orden.....</i>	96
IV.5.2	<i>Distribución del máximo.....</i>	97

IV.5.3	Distribución del mínimo .....	97
IV.5.4	Puntos límite de una distribución .....	97
IV.5.5	Distribuciones asintóticas del máximo y el mínimo.....	98
IV.6	Dominios de atracción.....	99
IV.6.1	Distribuciones límite y dominios de atracción .....	99
IV.6.2	Formas de Von Mises .....	100
IV.6.3	Dominios de atracción de las distribuciones más comunes.....	101
IV.7	<b>PAPELES PROBABILÍSTICOS</b> .....	101
IV.7.1	Bases Teóricas del papel probabilístico. ....	101
IV.7.2	El problema del punteo.....	102
IV.7.3	Papel probabilístico normal .....	103
IV.7.4	Papel probabilístico Log-normal.....	104
IV.7.5	Papel probabilístico de Gumbel .....	104
IV.7.6	Papel probabilístico de Weibull.....	107
IV.7.7	Papel probabilístico de Extremos.....	109
IV.7.8	Utilidad del papel de Gumbel en el caso de Máximos.....	110
IV.8	Métodos utilizados en el diseño de obras marítimas .....	111
IV.9	Elección de la distribución de la altura de ola .....	111
IV.9.1	La familia maximal de Gumbel.....	111
IV.9.2	La familia maximal de Weibull.....	112
IV.9.3	La familia maximal de Frechet.....	112
IV.10	Caso de aplicación .....	113
<b>CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO</b> .....		117
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....		119



**LISTA DE SÍMBOLOS.**

LISTA DE SÍMBOLOS

## CAPÍTULO I. EL OLEAJE Y LA TEORÍA LINEAL

$h$	Profundidad
$H$	Altura de ola
$T$	Período de ola
$L$	Longitud de onda
$C$	Celeridad
$u$	Componente de la velocidad en la dirección del eje $x$
$v$	Componente de la velocidad en la dirección del eje $y$
$w$	Componente de la velocidad en la dirección del eje $z$
$\partial$	Corresponde a la derivada parcial con respecto a argumento
$V$	Vector velocidad
$\nabla$	Operador nabla
$t$	Tiempo
$\psi(x,y,t)$	Función flujo
$\omega$	Vector rotacional
$\Phi$	Función potencial
$r$	Magnitud del vector, coordenadas polares
$\theta$	Ángulo del vector, coordenadas polares
$\rho$	Densidad de la masa de la ola
$\mu$	Viscosidad dinámica de la ola
$g$	Aceleración ligada a la gravedad
$y$	Coordenada vertical
$p$	Presión
$V$	Vector velocidad
$f(t)$	Función arbitraria del tiempo
$\bar{u}$	Vector velocidad
$n$	Vector unitario
$\eta$	Desplazamiento de la superficie libre
$\sigma$	Frecuencia
$p_D$	Presión dinámica
$k$	Número de onda
$\varepsilon$	Potencial de velocidades
$B, D, E$ y $G$	Constantes arbitrarias
$X(x)$	Función de $x$
$Z(z)$	Función de $z$
$T(t)$	Función de $t$
$A$	Amplitud de onda

## CAPÍTULO II. DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE UN ESTADO DE MAR

$\theta_i$	direcciones
$a_i$	amplitudes
$\omega_i$	frecuencias
$\varepsilon_i$	fases
$\tau$	tiempo
$\eta(t)$	variación de la superficie libre con respecto al tiempo.
$\Phi(\sigma)$	función de distribución espectral del proceso
$\phi(\sigma)$	función de densidad espectral del proceso
$R(\tau)$	es la transformada de Fourier de $\phi(\sigma)$ ,
$S(\sigma)$	es igual al valor medio de los desplazamientos verticales
$\infty$	infinito
$E$	operador esperanza matemática
$R(\tau)$	es la transformada de Fourier de $\phi(\sigma)$
$i$	número imaginario
$m_n$	momento de orden $n$
$\eta_{min}$	punto más bajo o más negativo de la elevación.
$\eta_{max}$	punto más alto o más positivo de la elevación.
$N$	número de eventos o muestras.
$\eta_{rms}^2$	variación de la media cuadrática (la varianza) de superficie del agua
$\bar{H}$	altura media de olas
$\bar{T}$	período medio
$N_0$	número de olas individuales de todo el registro.
$H_i$	altura de ola
$T_i$	período de ola
$H_{rms}$	altura cuadrática media
$Skw$	falta de oblicuidad o asimetría
$H_s$	altura significativa
$H_{1/10}$	altura de ola un décimo
$H_{max}$	altura de ola máxima
$\Delta t$	intervalo de tiempo
$f_c$	frecuencia de Nyquist
$b(t)$	profundidad de peso
$\beta$	factor de corrección
$W(f)$	función de peso
$n_s$	es el número de segmentos tomados
$B_e$	anchura de banda efectiva del filtro
$S(f)$	función densidad espectral
$f$	frecuencia
$\varepsilon$	anchura espectral de cuarto orden
$\nu$	anchura espectral de segundo orden
$Q_p$	agudeza de pico
$T_{01}$	período medio basado en el primer momento

$T_{02}$	período medio basado en el segundo momento
$GF$	factor de agrupamiento
$SIWEH$	función envolvente (Smoothed Instantaneous Wave Energy History)
$T_n$	es el tiempo total del registro
NMM	nivel medio del mar
$N_o^+$	número de cruces de la superficie libre del agua con el NMM con pendiente positiva.
$N_c$	número total de crestas del registro
$H_{m0}$	altura de ola significativa cuando estimada a partir del espectro.
$m_0$	momento de orden cero de la función de densidad espectral
$\sigma_{sup.libre}$	desviación estándar de la superficie libre
$T_s$	periodo de ola significativa
$T_{1/10}$	periodo de ola significativa

### CAPÍTULO III. DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DEL OLEAJE

$p(\eta)$	es su función de densidad
$e$	número de euler
$Erfc$	función error complementaria
$N$	parámetro de Tayfun
$J_0$	función de Bessel de orden cero.
$k_0$	número de onda asociado a la frecuencia media
$T_C$	período de ola entre cresta y cresta
$U$	velocidad del viento sobre la superficie libre
$\alpha$	parámetro que depende del fetch
$H_1$	función de Heaviside
$f_p$	frecuencia pico del espectro
$U_{10}$	velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar
$S_P(f)$	ecuación de Phillips para el espectro teórico
$\phi_{PM}(f/f_p)$	función de forma de Pierson-Moskowitz
$\phi_J$	factor de forma del espectro JONSWAP
$\gamma$	factor de forma pico del espectro
$\sigma$	ancho de la base del espectro
$\sigma_A$	ancho de la base del espectro antes de la frecuencia pico
$\sigma_B$	ancho de la base del espectro después de la frecuencia pico
$k$	número de onda
$\phi_k(\omega_H)$	factor de transformación del espectro TMA
$sl$	pendiente significativa del espectro Wallops
$H_{s1}$	representan la altura de ola significativa de baja frecuencia para el espectro Ochi-Hubble
$f_{01}$	frecuencia modal de baja frecuencia para el espectro Ochi-Hubble
$\lambda_1$	factor de forma de baja frecuencia para el espectro Ochi-Hubble
$H_{s2}$	representan la altura de ola significativa de alta frecuencia para el espectro Ochi-Hubble

$f_{02}$	frecuencia modal de alta frecuencia para el espectro Ochi-Hubble
$\lambda_2$	factor de forma de alta frecuencia para el espectro Ochi-Hubble
$\lambda_j$	parámetro de forma espectral del espectro Ochi-Hubble

#### CAPÍTULO IV. ANÁLISIS EXTREMAL DEL OLEAJE

$C_{actuales}$	condiciones actuales de operación
$Cap.Real$	representa la capacidad real
$FS_o$	factor de seguridad asociado a las condiciones de operación
$FS_c$	factor de seguridad asociado a las capacidades del elemento
$\{X_n\}$	sucesión de variables aleatorias independientes
$x(k)$	variable aleatoria de interés
$P(x)$	función distribución de probabilidad
$\alpha(F)$	límite inferior de la función de distribución
$\omega(F)$	límite superior de la función de distribución
$Z_n$	función de distribución del máximo de una muestra de tamaño $n$
$W_n$	función de distribución del mínimo de una muestra de tamaño $n$
$L(x)$	función de distribución del mínimo
$H(x)$	función de distribución del máximo
$Y = a_n + b_n x$	ecuación de la línea recta
$a_n, b_n$	constantes de la ecuación de la línea recta
$g(x)$	función de transformación invertible
$h(y)$	función de transformación invertible
$F(x; \theta)$	función de distribución acumulativa
$\theta$	parámetros de la función de distribución
$\mu$	media de la distribución normal
$\sigma$	desviación estándar de la distribución normal
$\Phi(x)$	función de distribución acumulativa de la población normal
$a$	pendiente de la ecuación de la recta
$b$	ordenada al origen
$\eta$	variable reducida
$X$	variable aleatoria
$\xi$	variable aleatoria en escala logarítmica
$\mu^*$	media de la distribución log-normal
$\sigma^*$	desviación estándar de la distribución log-normal
$\lambda$	parámetro de las distribuciones Gumbel, Weibull y Frechet
$\beta$	parámetro de las distribución Weibull
$\delta$	parámetro de las distribuciones Gumbel, Weibull y Frechet
$s_x^2$	desviación estándar
$\bar{x}$	media de los datos
$\Gamma(x)$	función Gamma
$\log(x)$	logaritmo natural

**LISTA DE FIGURAS.**

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Página</b>
<b>CAPÍTULO I.</b>		
1.1(a)	Oleaje tipo SWELL.	15
1.1(b)	Oleaje tipo SEA.	15
1.2	Características del oleaje.	16
1.3	Rango de validez de las diferentes teorías.	17
1.4(a)	Estructura general de las condiciones de frontera en dos dimensiones.	21
1.4(b)	Condiciones de frontera de una ola en dos dimensiones.	21
<b>CAPÍTULO II.</b>		
2.1	Estructura del oleaje aleatorio.	33
2.2	Señal aleatoria.	34
2.3	Señal de primavera.	51
2.4	Señal de verano.	51
2.5	Señal de otoño.	52
2.6	Señal de invierno.	52
2.7	Variación del SIWEH para la señal de primavera.	53
2.8	Variación del SIWEH para la señal de verano.	53
2.9	Correlación entre $H_{m0}$ y $H_{rms}$ .	54
2.10	Correlación entre $H_{rms}$ y $H_{1/10}$	54
2.11	Correlación entre $H_{m0}$ y $H_s$	55
2.12	Correlación entre $H_s$ y $H_{rms}$	56

**CAPÍTULO III.**

3.1	Esquema de la distribución de la energía del oleaje en frecuencias.	65
3.2	Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola (invierno).	75
3.3	Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de período de ola (invierno).	75
3.4	Espectro medido para la señal del 22.02.98 a las 21:00hrs	76
3.5	Promedio de los espectros medidos para el día 22 de febrero de 1998.	77
3.6(a)-(f)	Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio (invierno).	78
3.7	Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola (primavera).	79
3.8	Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de período de ola (primavera).	79
3.9(a)-(f)	Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio (primavera).	80-81
3.10	Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola (verano).	81
3.11	Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de período de ola (verano).	82
3.12(a)-(f)	Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio (verano).	82-83
3.13	Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola (otoño).	84
3.14	Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de período de ola (otoño).	84
3.15(a)-(f)	Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio (otoño).	85



3.16	Ubicación de las probabilidades de excedencia para $H_{\max}$ , $H_{1/10}$ y $H_s$ .	86
3.17	Correlación entre los valores de $H_{1/10}$ calculados y estimados con las distribuciones teóricas.	88
3.18	Correlación entre los valores de $H_{\max}$ calculados y estimados con las distribuciones teóricas.	89
3.19	Correlación entre los valores de $H_s$ calculados y los estimados con Rayleigh.	90

#### CAPÍTULO IV.

4.1	Papel probabilístico de Gumbel para máximos.	106
4.2	Dos distribuciones con la misma distribución límite para máximos	109
4.3	Distribución exponencial, uniforme, normal y Cauchy en papel probabilístico de Gumbel para máximos.	110
4.4	Regionalización de la República Mexicana y localización de los puntos de control analizados.	114
4.5 (a)-(h)	Resultados del ajuste de los valores extremos de altura de ola con Gumbel.	113 y 115

## **INTRODUCCIÓN.**

*"Para que pueda surgir lo posible,  
es preciso intentar una y otra vez lo imposible."*

*Herman Hesse*

## INTRODUCCIÓN

En la antigüedad, el hombre observó la conveniencia de establecer sus comunidades junto al mar por la cantidad de recursos y beneficios que se pueden obtener de él, así lo hicieron diferentes civilizaciones entre las que destacan la Cartaginesa, la Celta, la Vikinga, la Fenicia, la Minoica, la Egipcia, la Etrusca y la Romana. Es posible afirmar entonces, que la ingeniería de costas nace de manera simultánea con la necesidad del hombre de construir estructuras a lo largo de la costa y de estudiar los fenómenos que se producen en el océano.

Actualmente esta disciplina es una especialidad de la ingeniería civil, y los ingenieros que se dedican a su estudio y dominio son de gran importancia por la aportación de sus conocimientos para el diseño de obras a lo largo de una costa o mar adentro, según sea el caso.

En nuestro país el interés por el estudio de esta materia es reciente, surgió de las necesidades que tuvo el país por establecer un intercambio comercial con países de Europa y Asia, además del de explotar los yacimientos petroleros ubicados en el mar mexicano, así como de poseer los puertos capaces de manejar y recibir los volúmenes de carga necesarios para establecer un contacto económico con el resto del mundo.

México forma parte de una de las mayores zonas comerciales del mundo. Es el décimo país exportador y se encuentra entre los de mayor dinamismo en su comercio exterior. Por su excepcional ubicación geográfica, México es un vínculo natural con los mercados de América del Norte, Centro y Sudamérica, así como de las Cuencas del Pacífico y del Atlántico.

La República Mexicana abarca una superficie de casi 2 millones de kilómetros cuadrados y más de 11,500 kilómetros de litorales, repartidos en el Océano Pacífico, en el Golfo de México y el Mar Caribe, por lo que es necesario contar con la infraestructura necesaria para el aprovechamiento y la protección de dichos recursos potenciales.

Es claro que las obras marítimas se presentan como impulsoras del crecimiento económico del país, ya que éstas aprovechan la enorme cantidad de recursos del litoral y además impulsan la actividad económica de la región. Consecuentemente la ingeniería de costas posee una gran importancia no sólo por lo que al diseño de las obras se refiere, sino por la caracterización del clima marítimo que se presenta a lo largo de las costas mexicanas.

El oleaje es el fenómeno más importante que debe ser considerado en estudios y diseños de ingeniería marítima. Por ejemplo, la estructura de un puerto o una plataforma, están sujetas a la acción del oleaje, el cual ejerce de manera constante la fuerza más importante a considerar en su diseño.

Es conveniente entonces, poseer información completa relacionada al oleaje a lo largo del litoral mexicano. Para estructuras construidas en aguas profundas, se ha demostrado que, normalmente basta conocer el parámetro  $H_s$ , los periodos medio y pico para realizar un buen diseño, sin embargo, para el caso de estructuras construidas en aguas someras o

intermedias es necesario conocer estadísticos de orden y algunos  $H_{1/n}$  (la media de los  $N$  valores máximos de un estado de mar), parámetros desconocidos en principio pero que se pueden obtener a través de una extrapolación.

## **Objetivos.**

Los principales objetivos del presente trabajo son los siguientes:

- Estudiar el oleaje su definición y clasificación, así como la revisión de las teorías de onda empleadas para su representación analítica.
- Estudiar la descripción estadística de un estado de mar, las hipótesis fundamentales para su tratamiento estadístico y la definición de los parámetros estadístico temporales y espectrales. Aplicar la teoría estudiada a las mediciones de oleaje realizadas por la Comisión Federal de Electricidad (C.F.E.) en el puerto de Rosarito, Baja California Norte.
- Estudiar las diferentes metodologías planteadas para la representación teórica de un estado de mar, bajo los dominios del tiempo y la frecuencia. (distribución de altura y período de ola y distribuciones espectrales).
- Determinar las mejores distribuciones teóricas, espectrales y temporales, para representar el oleaje en las costas del Baja California Norte por medio de su comparación con las distribuciones obtenidas de las mediciones de oleaje en el puerto de Rosarito.
- Estudiar las distribuciones estadísticas aplicables al análisis extremal de valores de altura de ola máxima.

## **Descripción y organización del estudio.**

Con la finalidad de exponer el presente trabajo, los temas de este estudio se dividieron en los siguientes capítulos:

### **CAPÍTULO I. EL OLEAJE Y LA TEORÍA LINEAL**

Se presentan la definición y clasificación del oleaje. Se revisan las diferentes teorías de onda empleadas para su descripción analítica, además de que se establecen las condiciones de frontera de las ecuaciones utilizadas.

### **CAPÍTULO II. DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE UN ESTADO DE MAR**

Se analizan las hipótesis fundamentales para el estudio estadístico del oleaje, así como un resumen de las principales formulaciones que se utilizan para estudiar el oleaje, bajo los dominios del tiempo y la frecuencia.

Se estudia el espectro SIWEH, función que sirve para evaluar el factor de agrupamiento de las series de oleaje. Se muestran las relaciones entre las descripciones estadística y espectral.

Se aplica la teoría revisada en el capítulo a las mediciones realizadas en Rosarito, Baja California Norte, y se comparan los resultados obtenidos con esperados por la teoría expuesta.

### **CAPÍTULO III. DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DEL OLEAJE**

Se estudian las distribuciones estadísticas teóricas para describir el oleaje, bajo el dominio del tiempo a través de las distribuciones de altura y periodo de ola, y bajo el dominio de la frecuencia por medio de los diferentes espectros, como son, TMA, JONSWAP, Bretschneider, ITTC, ISSC, Pierson-Moskowitz y Neumann.

Se presenta una comparación entre las distribuciones revisadas en el capítulo, con las distribuciones obtenidas de las señales de oleaje seleccionadas. Aplica la teoría revisada en el capítulo a las mediciones realizadas en Rosarito, Baja California Norte, y se comparan los resultados obtenidos con esperados por la teoría expuesta.

Se muestra el resultado de las correlaciones realizadas entre los valores de  $H_{1/10}$ ,  $H_s$  y  $H_{max}$  estimados con las distribuciones teóricas y los evaluados a partir de las mediciones en Rosarito, B.C.N.

### **CAPÍTULO IV. ANÁLISIS EXTREMAL DEL OLEAJE**

Se estudian los diferentes papeles probabilísticos y los conceptos básicos estadísticos necesarios para realizar el análisis de valores extremos.

Se presentan los métodos utilizados en el diseño de obras marítimas y las distribuciones maximales de altura de ola que se emplean en este tipo de análisis.

Se realiza el análisis extremal por medio de la distribución de Gumbel de 10 puntos seleccionados a lo largo del litoral mexicano, con el fin de encontrar la línea de tendencia en cada caso.

**CAPITULO I.**  
**EL OLEAJE Y LA TEORÍA LINEAL**

*“Everything is simpler than you think  
and at the same time  
more complex than you imagine.”*

*Goethe*

## **I OLEAJE**

El oleaje es un fenómeno que está determinado por la acción de las fuerzas de la naturaleza en cualquier superficie libre de agua, las cuales disponen el tipo de ola que será inducida. La más obvia de estas fuerzas es la acción del viento sobre la superficie del mar. Los antiguos griegos estaban conscientes de la interacción entre el mar y la atmósfera. El famoso filósofo Aristóteles (384-322 AC) señaló la importancia que juega el viento en el desarrollo del oleaje.

Así pues, desde el tiempo de la antigua Grecia hasta la etapa de oro del renacimiento en el siglo XV no hubo gran progreso en el estudio de la generación y transformación del oleaje. Durante el período definido entre los siglos XVI-XIX, las contribuciones más importantes se dieron en el plano teórico del estudio del oleaje, ya que en este tiempo se desarrollaron la mayor parte de las teorías que se emplean para el estudio del oleaje, como son la de Stokes de primer orden y la teoría lineal o de la onda solitaria. El primer estudio de predicción de oleaje fue desarrollado por Svedrup y Munk durante la Segunda Guerra Mundial y sus resultados estuvieron disponibles hasta 1947.

El fenómeno del oleaje real, no puede representarse por un modelo tan sencillo como la onda ya que este modelo no se acerca a la realidad, este fenómeno no se repite en el espacio ni en el tiempo.

Presentada una altura de ola en un punto del mar no se puede decir cual será la altura de ola siguiente en ese punto y si se toman en cuenta la variedad de direcciones y periodos que se pueden presentar, esta irregularidad se complica aún más. La gran variabilidad constituye la característica fundamental del oleaje real. La única forma razonable de estudiar este fenómeno parecen ser los métodos estadísticos, considerando al oleaje como un fenómeno aleatorio.

### **I.1 Tipos de oleaje**

Se llama área de generación aquella región donde existe transferencia de energía del viento hacia la superficie del mar. Allí el fenómeno es completamente aleatorio. El oleaje se propaga en diferentes direcciones aunque la dirección dominante es la del viento. Las olas pueden tener diversas características dependiendo de las fuerzas que influyen en su generación.

Dentro del oleaje, se suelen distinguir dos tipos extremos, entre los cuales existen un sinnúmero de estados intermedios. Se denominan por las palabras inglesas universalmente aceptadas: SEA y SWELL

### 1.1.1 Oleaje SEA

Este tipo de oleaje se produce en la zona de generación en alta mar donde raramente se aprecian crestas de cierta longitud y es difícil observar un periodo bien definido. Las características que definen este tipo de oleaje son:

- Gran irregularidad ya que la altura de la superficie líquida es impredecible, carece de periodicidad.
- Asimetría.
- Gran peralte de las olas.

### 1.1.2 Oleaje SWELL

Cuando la ola se propaga y abandona el área de generación ocurren tres fenómenos en las olas.

- Pierden energía, las olas viajan a expensas de su propia energía. (Decaimiento)
- El oleaje sufre una doble dispersión. Una dispersión angular, en la que las olas se dispersan en todas direcciones y otra radial, debida a que la velocidad es función directa del periodo por lo que las olas más largas viajan más rápido que las cortas. Se produce un filtrado de olas.
- Fenómeno de soldadura, según el cual las ondas de periodos cercanos se soldan en largas crestas de onda lo que hace que la superficie caótica se simplifique. Al envejecer el oleaje y especialmente cuando abandona el área de generación va tendiendo a un oleaje de tipo SWELL.

Este tipo de oleaje se puede observar muy acentuado sobre la plataforma costera, especialmente en profundidades reducidas, donde a los fenómenos descritos anteriormente se añade el de refracción que hace que las tiendan a progresar en forma paralela a las líneas batimétricas.

Así pues el oleaje que se acerca a la costa es más regular, se forman frentes de cresta muy grandes y las diferencias entre periodos y longitudes de onda son mínimas, surge una periodicidad, las direcciones no son tan dispersas, surgen ciertas direcciones predominantes. Todo esto proporciona un cierto orden al fenómeno.



Figura 1.1(a) Oleaje tipo SWELL



Figura 1.1(b) Oleaje tipo SEA



## 1.2 Teorías de onda

Numerosas teorías de onda han sido desarrolladas, para su aplicación a diferentes condiciones del medio ambiente, las cuales dependen de parámetros específicos, siendo los más importantes la profundidad ( $h$ ), la altura de ola ( $H$ ) y el periodo ( $T$ ). Los parámetros restantes como las velocidades y las aceleraciones inducidas, pueden ser determinadas teóricamente a través de sus formulaciones.

Diferente a lo que sucede en el océano, todas las teorías de onda asumen que las olas son periódicas y uniformes, por tener un periodo de ola  $T$  y una altura de ola  $H$ . Nótese que el periodo de la ola está definido como el tiempo necesario para que una cresta viaje la distancia definida por la longitud de onda,  $L$ , y la altura de ola se define como la distancia vertical entre cresta y valle de la ola. La longitud de ola es la distancia horizontal entre puntos similares de dos olas consecutivas medidas en la dirección de propagación de la ola. Para una ola periódica, la velocidad de una cresta dada es conocida como celeridad, la cual queda definida en términos del periodo de la siguiente forma:

$$c = \frac{L}{T} \quad (\text{ec.1})$$

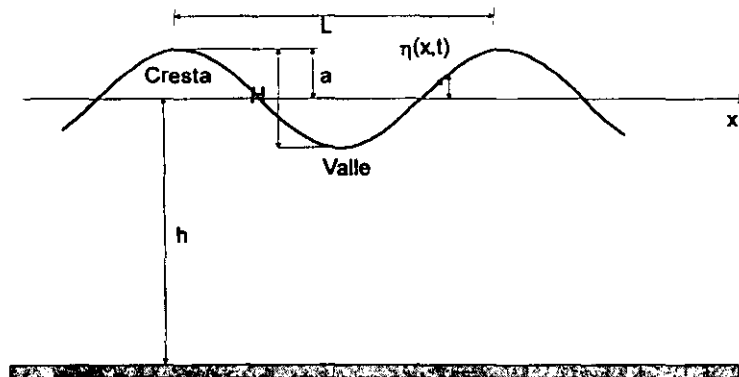


Figura 1.2 Características del oleaje

En el desarrollo de las teorías de onda, el problema de las condiciones de frontera queda expresado por medio de una ecuación diferencial y es resuelto por vía de aproximaciones. Existen dos tipos generales de teorías de aproximación, la primera aplicable a aguas profundas, toma en cuenta a la altura de ola como el parámetro de perturbación, mientras que la otra, desarrollada para aguas someras, utiliza como una función a la profundidad.

Con lo que se obtienen dos clases de soluciones, para el primer caso el parámetro de perturbación está limitado para un determinado orden de teorías de onda. La solución se obtiene de una forma cerrada y las expresiones de las presiones dinámicas y las de las variables cinemáticas del agua son calculadas mediante las ecuaciones conocidas. La teoría lineal de ondas y la teoría no lineal de Stokes son dos ejemplos de soluciones que caen

dentro de este campo. En otros casos como la teoría de la función gradiente flujo, las soluciones numéricas se hacen necesarias desde el planteamiento del problema.

Las teorías de onda más utilizadas para el diseño de obras fuera de costa, son las siguientes:

- Teoría lineal de Airy
- Teorías de Stokes (segundo y tercer orden)
- Teoría de Stokes de quinto orden
- Teoría cnoidal
- Teoría de la función flujo gradiente
- Teoría hiperbólica de ondas
- Teoría de la onda solitaria.

Le Mehaute (1969) presentó la figura 2 para mostrar aproximadamente los límites de validez de algunas teorías.

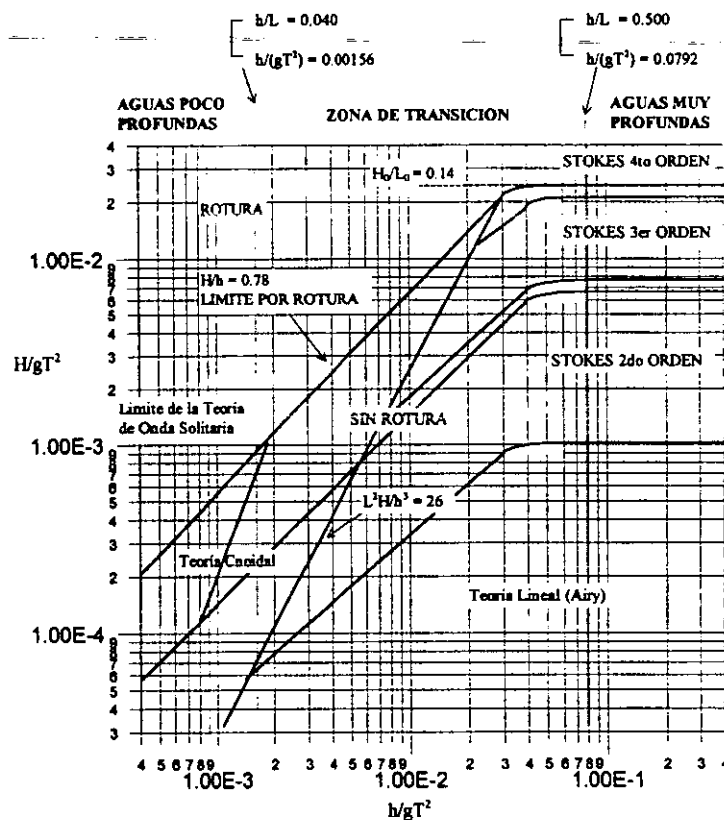


Figura 1.3 Rango de validez de las diferentes teorías

En el desarrollo de las teorías de onda, se asume al flujo del agua como incompresible y continuo. La ecuación de continuidad señala que la masa del fluido se conserva en todo momento. El hecho de asumir al agua como incompresible es equivalente a expresar que existe una conservación del volumen, que queda descrita en término de la velocidad del flujo como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{ec.2})$$

en donde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  son las tres componentes de la velocidad del flujo en un sistema cartesiano de tres ejes OXYZ y  $\partial$  's corresponden a las derivadas parciales con respecto a los argumentos. El sistema de ejes coordenados se ha elegido de tal que el origen es O, ubicado en la superficie de agua sin movimiento, el eje x es positivo en la dirección de propagación del oleaje, y es positivo en dirección ascendente y z forma un sistema de mano de derecha con x e y.

La ecuación de continuidad puede ser escrita de forma análoga en términos del vector velocidad como sigue

$$\mathbf{V} = ui + vj + wk \quad (\text{ec.3})$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{ec.4})$$

donde el operador,  $\nabla$ , queda definido como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{ec.5})$$

### 1.2.1 Función flujo

Las teorías de onda son desarrolladas tomando como base un sistema de coordenadas de dos dimensiones, la horizontal (en la dirección en que viajan las olas) y la vertical en el sistema de coordenadas OXY junto con el tiempo  $t$ . Tal que las crestas de las olas son asumidas como infinitamente largas y no hay variación en la dirección del eje Z. Se introduce entonces a la función flujo  $\psi(x,y,t)$  tal que

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (\text{ec.6})$$

y

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{ec.7})$$

se hace notar que si  $w = 0$ , entonces la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{ec.8})$$

De este modo la existencia de la función flujo que se satisface la relación de continuidad y viceversa. También se sabe que si  $\psi = \text{constante}$  se define entonces una línea de flujo.

### 1.2.2 Función potencial

El flujo irrotacional se presenta sólo si cada una de partículas que constituyen al fluido no sufre una rotación además de una traslación y tensión pura. Si el vector rotacional se introduce tal que

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times V \quad (\text{ec.9})$$

entonces las tres componentes del vector rotacional están dadas por

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{ec.10})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{ec.11})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{ec.12})$$

El movimiento es irrotacional si  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ . La ausencia de rotaciones no implica la no viscosidad del fluido, excepto en la región del flujo donde  $\omega = 0$ .

Se define entonces a la función potencial tal que

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{y} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{ec.13})$$

ó

$$V = -\nabla \Phi, \quad (\text{ec.14})$$

al sustituir los valores dados por las ecuaciones 10-12 se puede mostrar que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ . De tal modo que la existencia de un potencial,  $\Phi$  implica que el movimiento es irrotacional. Alternativamente, un flujo irrotacional puede ser descrito por una función potencial,  $\Phi$ .

Si se sustituyen las expresiones de la (ec.13) en la ecuación de continuidad es bien sabido que se obtiene la ecuación de Laplace tal que

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{ec.15})$$

Una ecuación similar para flujo irrotacional puede ser obtenida para la función flujo

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (\text{ec.16})$$

Algunas veces es más fácil manejar el problema en coordenadas polares cilíndricas  $r$ ,  $\theta$  e  $y$ . Como en la solución de un cilindro vertical circular en el cual  $x = r \cos \theta$  y  $z = r \sin \theta$ . En este caso las velocidades en las respectivas direcciones están dadas por

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{ec.17})$$

Lo que transforma a la ecuación de Laplace en:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{ec.18})$$

### 1.2.3 Ecuación de Bernoulli

Uno de los conceptos básicos más importantes a ser definido antes de entrar a las teorías de onda, es el de la ecuación de Bernoulli, debido a que se emplea para resolver las condiciones cinemáticas del oleaje. La ecuación de Navier-Stokes puede ser escrita en su forma vectorial tal que

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} - \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \left( p + \rho g y + \rho \frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{ec.19})$$

donde  $\rho$  = densidad de la masa de la ola,  $\mu$  = viscosidad dinámica de la ola,  $g$  = aceleración ligada a la gravedad,  $y$  = coordenada vertical,  $p$  = presión y  $V$  = el vector velocidad. Además se añade como condiciones matemáticas que el flujo es irrotacional ( $\nabla \times V = 0$ ) y se tiene un fluido ideal ( $\mu = 0$ ). Al aplicar estas simplificaciones e insertar el valor de la velocidad  $V$ , en términos del potencial,  $\Phi$ , en el término local de la inercia,  $\rho \partial V / \partial t$ , e integrando con respecto a la coordenada espacial se obtiene como resultado la forma inestable de la ecuación de Bernoulli tal que

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = f(t) \quad (\text{ec.20})$$

donde  $f(t)$  es una función arbitraria del tiempo. Si además el flujo se considera estable ( $\partial \Phi / \partial t = 0$ ), se obtiene la forma más familiar de la ecuación de Bernoulli tal que:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) = \text{constante} \quad (\text{ec.21})$$

### I.3 Teoría lineal de Airy

La teoría más útil y simple de las teorías de onda, es la de ondas de pequeña amplitud, la cual es también conocida como, teoría lineal de Airy o de la onda sinusoidal o Stokes de primer orden, y tiene su fundamento en asumir que la altura de ola es pequeña comparada con la longitud de ola o con la profundidad. Se le llama teoría de pequeña amplitud por que las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero, esto implica que la elevación de la superficie libre puede ser en principio despreciada. De igual forma considera muy pequeños a los términos de inercia convectivos no lineales.

#### I.3.1 Condiciones de Contorno:

Antes de comenzar con el desarrollo de la teoría lineal, es útil hacer una revisión, en términos muy generales, de las condiciones de frontera del problema, ya que un gran número de problemas clásicos dentro de la física y la mayoría de los problemas analíticos en ingeniería requieren su determinación.

La formulación de estas condiciones consiste sólo en expresar en términos matemáticos la situación física, tal que exista solo una solución. Generalmente consiste en, primero establecer la región de interés y especificar la ecuación diferencial que deberá ser satisfecha dentro de la región. Frecuentemente existen un número infinito de soluciones a la ecuación diferencial y al principal labor es la adecuada selección de una o más soluciones relevantes para el problema físico en estudio. Las condiciones de frontera ayudan a desechar aquellas soluciones que no son adecuadas por no ser compatibles con ellas.

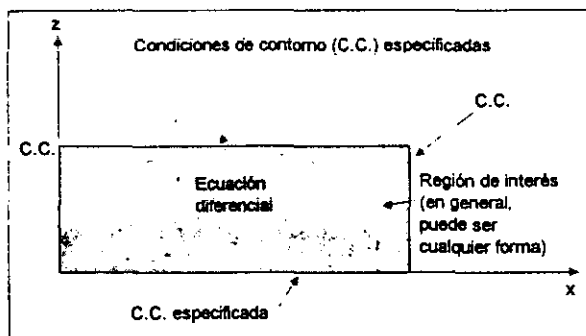


Figura 1.4(a) Estructura general de las condiciones de frontera en dos dimensiones.

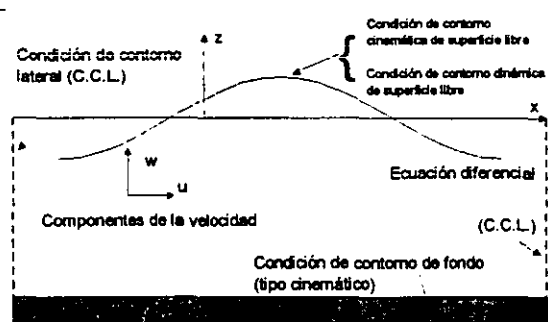


Figura 1.4(b) Condiciones de frontera para una ola en dos dimensiones.

La figura 1.4 indica de manera general las condiciones de frontera para el desarrollo de la teoría lineal de la onda, así como la región de interés y las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno.

### 1.3.1.1 Condiciones cinemática de contorno.

Dada la libertad de deformación de la superficie libre del agua se le considera a ésta como una de las condiciones de contorno cinemáticas, ya que algunas consideraciones físicas deben ser satisfechas por las velocidades de las partículas del fluido.

La ecuación que representa esta condición de contorno, es derivada de la ecuación que describe la superficie que constituye el contorno. Se sabe que cualquier superficie puede ser expresada por:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (\text{ec.22})$$

dado que la onda que se propaga en el agua, es una superficie que varía con el tiempo, entonces la derivada total de la superficie con respecto al tiempo, debería ser cero en la superficie. En otras palabras, si nos movemos con la superficie, entonces ésta no cambia, así entonces

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x, y, z, t) = 0} \quad (\text{ec.23})$$

ó

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{u} \cdot \nabla F = \bar{u} \cdot n |\nabla F| \quad (\text{ec.24})$$

donde el vector unitario a la superficie libre es  $n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$  (ec.25)

y  $\bar{u}$  = es el vector velocidad.

Reagrupando términos, la condición cinemática de contorno resulta ser

$$\bar{u} \cdot n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad \text{en} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{ec.26})$$

donde

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{ec.27})$$

Si la superficie no cambia con el tiempo, entonces  $u \cdot n = 0$ , esto significa que la componente normal a la superficie de la velocidad del flujo es cero.

### 1.3.1.1.1 Condición cinemática en el fondo:

En general, la condición de frontera inferior para el caso de dos dimensiones en la región de interés está descrita como  $z = -h(x)$ , donde el origen está localizado en el nivel del agua y  $h$  representa la profundidad. Si se considera que el fondo es impermeable entonces

$$\bar{u} \cdot n = 0 \quad (\text{ec.28})$$

y si sabemos que el fondo está descrito por la función de superficie:

$$F(x, y) = z + h(x) = 0 \quad (\text{ec.29})$$

al sustituir la ecuación (29) en la ecuación del vector unitario a la superficie libre (25), y realizar el producto punto de  $u$  por  $n$  y multiplicar por la raíz cuadrada del denominador, se obtiene

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + w = 0 \quad \text{en} \quad z = -h(x) \quad (\text{ec.30})$$

ó

$$w = -u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en} \quad z = -h(x) \quad (\text{ec.31})$$

para fondo horizontal,  $w = 0$ , la condición cinemática en el fondo queda definida como:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = u(0) = 0 \quad (\text{ec.32})$$

### 1.3.1.1.2 Condición cinemática de superficie libre:

La superficie libre puede ser descrita como:

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (\text{ec.33})$$

donde  $\eta$  define el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el plano horizontal definido por el eje  $z$ . Sustituyendo la (ec.33) en la condición cinemática de contorno (ec.26). Se obtiene:



$$u \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, t) \quad (\text{ec.34})$$

y de la ecuación del vector unitario se tiene

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{ec.35})$$

al realizar el producto punto se obtiene

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta(x,y,t)} \quad (\text{ec.36})$$

que representa la condición cinemática de la superficie libre en dos dimensiones.

### ***1.3.1.2 Condición dinámica de superficie libre.***

Se conoce que las superficies “libres”, como la interfase aire-agua, no aceptan variaciones en la presión (despreciando la tensión superficial) a lo largo de ella y por lo tanto debe responder de tal forma que la presión sea uniforme. Se hace necesario entonces, contar con una condición de contorno llamada condición dinámica de superficie libre, que describa la distribución de presiones en esta frontera, para su obtención se utiliza la ecuación de Bernoulli y queda expresada como

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{P}{\rho} + g\eta = C(t) \quad (\text{ec.37})$$

### ***1.3.2 Condiciones laterales de contorno:***

Para completar la condiciones de frontera de este problema, se deben definir las condiciones laterales de contorno. Si el oleaje es periódico en espacio y tiempo con período  $T$  y longitud de onda  $L$ , las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad. Para la propagación en el eje  $x$  estará definida por:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x + L, y, z, t) \quad (\text{ec.38})$$

y para la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema, de tal forma que:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t + T) \quad (\text{ec.39})$$

#### I.4 Solución lineal al problema de la onda

El problema se resume en determinar el potencial de velocidades, a partir del cual se obtienen los parámetros que caracterizan el oleaje. Se asume que este potencial toma la forma de una serie de tiempo en términos de un parámetro de perturbación adimensional, que está definido en función de la pendiente de la ola (altura de ola/longitud de ola) como sigue

$$\varepsilon = \frac{kH}{2} \quad (\text{ec.40})$$

en donde  $k$  es el número de onda  $k = \frac{2\pi}{L}$ , entonces:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n \quad (\text{ec.41})$$

donde  $\Phi_n$  es la solución de orden  $n$ -ésimo para  $\Phi$ . De igual forma el perfil del agua queda definido como

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n \quad (\text{ec.42})$$

En el caso de la teoría lineal se considera únicamente el primer término de la serie que representan las funciones  $\Phi$  y  $\eta$ .

Reduciéndose la ecuación de Laplace a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{ec.43})$$

y las condiciones de contorno quedan definidas por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (\text{ec.44})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (\text{ec.45})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad z = 0 \quad (\text{ec.46})$$

al combinar las condiciones cinemática y dinámica se obtiene una condición de contorno mixta en la superficie definida por

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (\text{ec.47})$$

#### 1.4.1 Solución analítica

Una vez establecidas la ecuación que gobierna el fenómeno y sus condiciones de frontera se puede plantear la solución del mismo, para esto se emplea el método analítico conocido como separación de variables tal como se indica a continuación.

##### 1.4.1.1 Separación de variables

Si se utiliza el método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace que describe el problema se tiene.

$$\Phi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t), \quad (\text{ec.48})$$

donde  $X$  es solamente función de  $x$ ,  $Z$  es solamente función de  $z$  y  $T$  es solamente función de  $t$ . Si se sustituye la (ec.48) en (ec.43) se obtiene

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (\text{ec.49})$$

donde  $k$  es la constante de separación, de donde resultan dos ecuaciones diferenciales que son:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (\text{ec.50})$$

$$Z'' - k^2 Z = 0 \quad (\text{ec.51})$$

las soluciones para las ecuaciones 50 y 51 son  $X = B \cos kx + D \sin kx$  y  $Z = Ee^{kz} + Ge^{-kz}$ , donde  $B$ ,  $D$ ,  $E$  y  $G$  son constantes arbitrarias, por lo que la solución puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\Phi(x, z, t) = (B \cos kx + D \sin kx)(Ee^{kz} + Ge^{-kz})T(t) \quad (\text{ec.52})$$

Desde el punto de vista físico las soluciones requeridas son simplemente las componentes armónicas en el tiempo. Es por lo tanto razonable expresar  $T(t)$  como  $\cos \sigma t$  o  $\sin \sigma t$  donde  $\sigma$  es la frecuencia y esta dada por  $\sigma = 2\pi / T$ .

Existen cuatro combinaciones de términos independientes, periódicas en  $x$  y  $t$ , que son soluciones a la ecuación de Laplace, estas son.

$$\Phi_1 = A_1 Z(z) \cos kx \cos \sigma t \quad (\text{ec.53})$$

$$\Phi_2 = A_2 Z(z) \sin kx \sin \sigma t \quad (\text{ec.54})$$

$$\Phi_3 = A_3 Z(z) \sin kx \cos \sigma t \quad (\text{ec.55})$$

$$\Phi_4 = A_4 Z(z) \cos kx \sin \sigma t \quad (\text{ec.56})$$

La descomposición de la solución de esta forma ayuda a la evaluación de las constantes desconocidas y una adecuada combinación de éstas satisficará la ecuación de Laplace así como sus condiciones de contorno.

Al sustituir las condiciones dadas por (ec.44) y (ec.46) en la solución dada por (ec.53) se tiene  $\partial \Phi_1 / \partial z = kA_1 (Ee^{kz} - Ge^{-kz}) \cos kx \cos \sigma t$  para  $z = -h$ .

Al aplicar la condición de frontera  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0$  para  $z = -h$  se tiene como resultado  $Ee^{-kh} = Ge^{kh}$ , por lo tanto

$$E = Ge^{2kh} \quad (\text{ec.57})$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2A_1 Ge^{kh} \left( \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right) \cos kx \cos \sigma t \\ &= 2A_1 Ge^{kh} \cosh k(z+h) \cos kx \cos \sigma t \end{aligned} \quad (\text{ec.58})$$

Aplicando la condición de superficie libre dada por  $\eta_1 = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}$  queda

$\eta_1 = \frac{-2A_1 Ge^{kh}}{g(\sigma)} \cos kh \cos kx \sin \sigma t$ . El valor máximo de  $\eta$  es la amplitud de onda  $A$  y este ocurre cuando  $\cos kx \sin \sigma t = 1$  así entonces

$$A_1 Ge^{kh} = -\frac{Ag}{2\sigma \cosh kh} \quad (\text{ec.59})$$

y subsecuentemente

$$\eta_1 = A \cos kx \sin \sigma t \quad (\text{ec.60})$$

Esto representa un sistema de olas estacionarias, con longitud de onda igual a  $\frac{2\pi}{k}$  y amplitud vertical  $A$ . El potencial de velocidad  $\Phi_1$  queda definido por:

$$\Phi_1 = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos kx \cos \sigma t \quad (\text{ec.61})$$

este potencial es periódico en la dirección de  $x$  con longitud de onda  $L$ .

De manera similar se evalúan las demás constantes, con lo que se tiene:

$$\Phi_1 = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos kx \cos \sigma t$$

$$\Phi_2 = \frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin kx \sin \sigma t$$

$$\Phi_3 = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin kx \cos \sigma t$$

$$\Phi_4 = \frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos kx \sin \sigma t$$

Debido a la condición lineal de la ecuación de Laplace, cualquier combinación lineal puede ser solución del problema, por lo que para una onda progresiva, periódica el tiempo y en la dirección del eje  $x$ , se tiene que el potencial de velocidades es

$$\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma t), \quad (\text{ec.62})$$

se desplazan los ejes de referencia de tal forma que durante todo el tiempo  $t$ , la posición relativa permanezca sin cambio, entonces  $kx - \sigma t = \text{constante}$  y la velocidad necesaria para llevar a cabo lo anterior es:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sigma}{k} = \frac{L}{T} = C \quad (\text{ec.63})$$

la cual es llamada celeridad o velocidad de propagación de la onda.

De la misma forma, el potencial de velocidad para una onda progresiva viajando en la dirección negativa del eje  $x$  queda determinada por la combinación  $(\Phi_1 + \Phi_2)$ , esto es:

$$\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2) = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx + \sigma), \quad (\text{ec.64})$$

y la elevación de la onda asociada es:

$$\eta = A \sin(kx + \sigma) \quad (\text{ec.65})$$

De manera similar se obtiene

$$\Phi = -(\Phi_4 - \Phi_3) = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin(kx + \sigma) \quad (\text{ec.66})$$

$$\eta = -A \cos(kx + \sigma) \quad (\text{ec.67})$$

y

$$\Phi = -(\Phi_3 + \Phi_4) = -\frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma) \quad (\text{ec.68})$$

$$\eta = -A \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.69})$$

Se observa que los potenciales de velocidad dados por (ec.66) y (ec.68) son idénticos a los expresados por (ec.62) y (ec.64), excepto por la substitución que origina un cambio de la fase de la onda con respecto al origen.

Ahora bien, considerando una onda progresiva viajando en dirección positiva del eje x, se tiene que el potencial de velocidad esta dado por:

$$\Phi = \frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.70})$$

y al desarrollar las dos partes de la condición de contorno mixta dada por (ec.47) se tiene

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -Ag\sigma \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.71})$$

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{Ag^2 k \sinh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.72})$$

al sustituir estos valores en la condición de contorno (ec.47) para  $z = 0$  se obtiene la ecuación

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (\text{ec.73})$$

que es conocida como relación de dispersión. El mismo resultado puede ser obtenido para un movimiento progresivo de ondas en la dirección negativa del eje x.

Para  $\sigma = kC$ , la ecuación anterior puede ser escrita como

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \quad (\text{ec.74})$$

Esta expresión determina la tasa de propagación de la superficie libre en función de la variable profundidad  $h$  y la longitud de onda  $L$ . Para encontrar la longitud de onda, la relación de dispersión (ec.73) puede ser ordenada de tal forma que

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (\text{ec.75})$$

## I.5 Relaciones ingenieriles de las ondas progresivas

El poseer una expresión analítica del potencial de velocidades permite el desarrollo de una serie de expresiones con aplicación dentro de la ingeniería civil, si se considera la expresión de una onda progresiva con desplazamiento de la superficie libre:

$$\eta = \frac{H}{2}(kx - \sigma) \quad (\text{ec.76})$$

asociada a un potencial de velocidades,

$$\Phi = \frac{Ag \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.77})$$

Si se utiliza la definición de los componentes de velocidad de una partícula de fluido se pueden obtener las componentes horizontal y vertical de la velocidad como sigue:

$$\frac{dx}{dt} = u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{Agk \cosh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma) \quad (\text{ec.78})$$

$$\frac{dz}{dt} = w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{Agk \sinh k(z+h)}{\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma) \quad (\text{ec.79})$$

Las aceleraciones locales son fácilmente obtenidas a partir de (ec.78) y (ec.79), estas son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Agk \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.80})$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -Agk \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma) \quad (\text{ec.81})$$

Los desplazamientos de las componentes  $(x,z)$  de las partículas de agua pueden ser encontradas integrando la velocidad con respecto al tiempo, tal que el desplazamiento horizontal será

$$\begin{aligned} x = \xi &= \int u dt = \frac{Agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \int \sin(kx - \sigma) dt \\ &= \frac{Agk}{\sigma^2} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma) \end{aligned} \quad (\text{ec.82})$$

y

$$\begin{aligned} z = \zeta &= \int w dt = -\frac{Agk}{\sigma} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \int \cos(kx - \sigma) dt \\ &= \frac{Agk}{\sigma^2} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma) \end{aligned} \quad (\text{ec.83})$$

Si se emplea la relación de dispersión las ecuaciones anteriores se simplifican de tal forma que

$$\xi = A \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.84})$$

y

$$\zeta = A \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma) \quad (\text{ec.85})$$

El campo de presiones asociado a una onda progresiva queda determinado por la siguiente expresión, tal que

$$p = -\rho g z + \rho g \left( \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right) \cos(kx - \sigma) \quad (\text{ec.86})$$



---

donde el primer término de la derecha representa la presión hidrostática, la cual existiría aún sin la presencia del movimiento oscilatorio, mientras que el segundo representa la presión dinámica( $p_D$ ) Esta última queda expresada de la siguiente forma

$$p_D = p + \rho g z = \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (\text{ec.87})$$

**CAPÍTULO II.**  
**DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA**  
**DE UN ESTADO DE MAR**

*"Cuando consideres que aquello que haz realizado  
está bien hecho, haz algo más: mejóralo"*

*Tomás Alva Edison*

## II DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE UN ESTADO DE MAR

### II.1 Hipótesis Básicas

#### II.1.1 El oleaje como proceso estocástico

En general, las olas en el mar no son regulares, es decir no tienen periodicidad con respecto al tiempo sino que por el contrario, el oleaje es un proceso esencialmente aleatorio. El oleaje puede ser considerado en términos prácticos como un conjunto de ondas viajando en diferentes direcciones  $\theta_i$ , y con diferentes amplitudes  $a_i$ , frecuencias  $\omega_i$  y fases  $\varepsilon_i$ , de tal forma que puede ser estudiado como una superposición lineal de ondas armónicas simples, tal que el perfil de la superficie libre puede ser descrito por:

$$\eta(x, y, t) = \sum_i a_i \cos \left[ \frac{\omega_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega_i t + \varepsilon_i \right] \quad (\text{ec.0})$$

Dicho concepto, puede ser entendido más claramente a través de la figura 1 tomada de Ochi (1982).

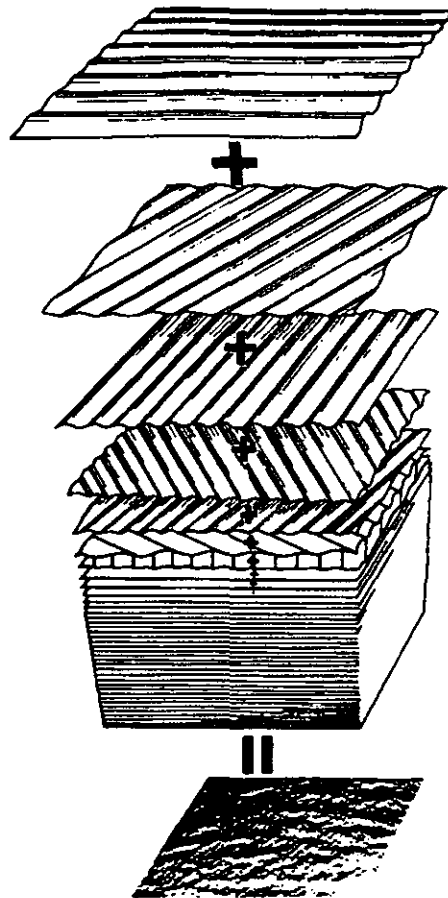


Figura 2.1 Estructura del oleaje aleatorio.

Bajo este punto de vista, el análisis del oleaje debe realizarse haciendo uso de estadísticas.

- El oleaje debe ser considerado como un proceso estocástico, es decir, un resultado del experimento no es un número sino una función.
- En el caso del oleaje una realización corresponde a una función muestra, la cual será determinada resultado de una observación o medición y será denotada por  $\eta_k(t)$ .

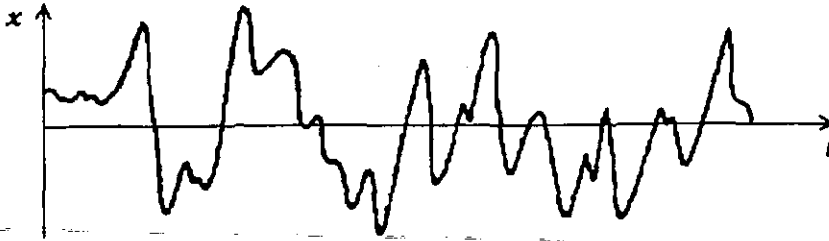


Figura 2.2 Señal aleatoria

Si se observa la superficie del mar en un instante determinado,  $t_i$ , es claro que  $\eta(t_i)$  es una variable aleatoria. Considerando ahora el conjunto de  $n$  instantes,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , se puede decir que  $\eta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  es una variable  $n$ -dimensional. De tal forma que el proceso  $\eta(t)$  puede considerarse definido si para cualquiera  $n$  instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , se conoce la función de distribución:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Prob}[\eta(t_1) \leq x_1, \eta(t_2) \leq x_2, \dots, \eta(t_n) \leq x_n] \quad (\text{ec.1})$$

de la variable aleatoria  $n$ -dimensional  $\eta(t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Estas distribuciones deben, por ende, satisfacer las siguientes condiciones:

### 1. Condición de simetría

$$F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{ec.2})$$

donde  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , es cualquier permutación de los índices  $1, 2, \dots, n$ .

### 2. Condición de compatibilidad

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, \infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (\text{ec.3})$$

para cualquier  $t_{m+1}, \dots, t_n$  si  $n > m$ .

Con dichas condiciones, se puede concluir que para tener definido el proceso  $\eta(t)$  sería necesario conocer todas las funciones de distribución dadas por (ec.1) para cualquier  $\eta$ .

Si se utiliza la teoría de la correlación, es posible simplificar el estudio de estos procesos, la cual toma en consideración exclusivamente los dos primeros momentos del proceso. De tal forma que

El valor medio queda definido como

$$m(t) = E\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x) \quad (\text{ec.4})$$

La función de correlación (o autocorrelación) se expresa por

$$B(t,s) = E\eta(t)\eta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF_{t,s}(x_1, x_2) \quad (\text{ec.5})$$

donde  $E$  define al operador “esperanza matemática”.

La media y la función de autocorrelación determinan completamente al proceso  $\eta(t)$ , si se considera que todas las distribuciones dadas por (ec.1) son normales (Gaussianas).

A pesar de restringir el proceso al uso de los dos primeros momentos, éste sigue siendo inabordable por lo que se hace necesario admitir dos importantes hipótesis estadísticas:

- Estacionariedad
- Ergodicidad

### II.1.2 El oleaje como un proceso estacionario

Un fenómeno físico puede decirse estacionario, si las características externas que influyen en él permanecen constantes durante un cierto período de tiempo, es decir, durante el cual y debido a la inercia del fenómeno, existe un cierto equilibrio entre las fuerzas generadoras y las fuerzas restauradoras que intervienen, lo que mantiene su manifestación aproximadamente estacionaria. Este período de tiempo es conocido como estado de mar.

Así entonces, el proceso  $\eta(t)$  es estacionario si todas las funciones de distribución que definen el proceso permanecen las mismas en un intervalo cualquiera de tiempo  $\tau$ . Es decir:

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{ec.3})$$

para cualesquiera  $n, \tau, t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Admitida la estacionariedad del oleaje, se deduce que el valor medio es una constante dada por:

$$m(t) = m \quad (\text{ec.4})$$

y la función de correlación depende sólo de la diferencia  $\tau = t - s$ .

$$B(t,s) = R(\tau) \quad (\text{ec.5})$$

### II.1.3 El oleaje como proceso ergódico.

El teorema de ergodicidad, aplicable a la mayor parte de los procesos estacionarios se enuncia como sigue:

Si  $\eta(t)$  es un proceso estocástico estacionario que satisface ciertas condiciones, entonces:

$$m = E\eta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad (\text{ec.6})$$

$$R(\tau) = E\eta(t)\eta(t+\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)\eta(t+\tau) dt$$

De esta forma, la hipótesis de ergodicidad permite sustituir los promedios espaciales de realizaciones por promedios temporales sobre una realización.

La descripción de un estado de mar a partir de un único registro, (realización temporal,  $\eta(t)$ ), se basa en admitir que se trata de un proceso ergódico y estacionario.

Se ha demostrado (Khintchine, 1934) que la función de correlación de cualquier proceso estocástico estacionario puede representarse por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\Phi(\sigma) \quad (\text{ec.7})$$

donde  $\Phi(\sigma)$ , llamada función de distribución espectral del proceso, la cual es una función acotada, real y no decreciente.

Puede demostrarse que si se cumple la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{ec.8})$$

$R(\tau)$  puede representarse por la integral de Fourier tal que:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma \quad (\text{ec.9})$$

entonces,

$$\Phi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma \quad (\text{ec.10})$$

$$\phi(\sigma) = \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} \quad (\text{ec.11})$$

La función  $\phi(\sigma)$  se conoce como función de densidad espectral del proceso  $\eta(t)$ , y tiene la propiedad de ser no negativa.

$$\phi(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \quad (\text{ec.12})$$

De acuerdo con (ec.9)  $R(\tau)$  es la transformada de Fourier de  $\phi(\sigma)$ , por tanto usando la fórmula para la inversión de una transformada de Fourier se tiene

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\sigma\tau} d\tau \quad (\text{ec.13})$$

En el caso de que el proceso  $\phi(\sigma)$  sea real, como lo es en el caso del oleaje, la función  $\Phi(\sigma)$  es una función par, entonces las expresiones dadas por (ec.9) y (ec.13) se pueden escribir como:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos \sigma\tau d\sigma \quad (\text{ec.14})$$

$$S(\sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \sigma\tau d\tau \quad (\text{ec.15})$$

donde  $S(\sigma)$ , función de densidad espectral que está definida solamente para  $\sigma \geq 0$ , y esta relacionada con  $\phi(\sigma)$  por

$$S(\sigma) = 2\phi(\sigma) \quad (\text{ec.16})$$

por tanto (ec.14), se puede escribir como

$$R(0) = E\eta^2(t) = \int_0^{\infty} S(\sigma) d\sigma \quad (\text{ec.17})$$

es decir, que el área bajo la curva  $S(\sigma)$  es igual al valor medio de los desplazamientos verticales, y admitiendo que  $m = E \eta(t) = 0$  resulta que dicha área es igual a la varianza de los desplazamientos verticales.

Se define como momento de orden  $n$  del espectro:

$$m_n = \int_0^{\infty} \sigma^n S(\sigma) d\sigma \quad (\text{ec.18})$$

## II.2 Definición de estado de mar

Estado de mar queda definido como aquella situación o período de tiempo en la cual y debido a la inercia del fenómeno, se considera que existe un cierto equilibrio entre las fuerzas generadoras y las fuerzas restauradoras que intervienen, lo cual produce que su manifestación permanezca aproximadamente en estado estacionario.

Otra definición es la que establece que estado de mar es cada una de las posiciones, de la dinámica del oleaje, admitiendo que éstas tienen una variación lo suficientemente lenta para considerar al proceso como estacionario.

Así pues, el oleaje puede considerarse formado por dos variaciones:

1. **Variación de período corto.** La variación es muy rápida, de segundos, durante la cual el proceso se considera estacionario.
2. **Variación de período largo.** La variación es de horas, y en la cual evoluciona el estado de mar: variación de estado.

Cuando se registran variaciones de la superficie libre, con objeto de obtener muestras estadísticas, se debe fijar un período de tiempo que sea, por un lado, lo suficientemente corto para poder admitir la hipótesis de estacionariedad, y por otro lo suficientemente largo como para que al tomar la muestra se tenga el número suficiente de olas para que sea posible su tratamiento, dicho período se suele fijar en el intervalo de 10 a 20 minutos por cada hora (o más). Los parámetros estadísticos obtenidos de la muestra se extienden a toda la hora del intervalo, con lo que se admite que la duración del estado de mar es de esa hora.

## II.3 Descripción estadística y espectral de un estado de mar

Siendo así, existen dos líneas a seguir en el tratamiento del oleaje, en otras palabras, un estado de mar puede estudiarse bajo dos perspectivas, estas son:

- **Descripción estadística temporal del estado de mar**, la cual considera las propiedades estadísticas, parámetros y distribuciones de  $\eta(t)$ .
- **Descripción estadística espectral del estado de mar**, que toma en cuenta el estudio del espectro y sus propiedades en el dominio de la frecuencia.



### II.3.1 La muestra

Es adecuado considerar como punto de partida que se tiene un registro temporal de la superficie del mar en un punto dado y primeramente en profundidades indefinidas con el objeto de eliminar el efecto de contorno, mismo que se ha registrado durante un tiempo determinado de forma continua. Se admite entonces, que dicha muestra de oleaje representa un estado de mar. De forma general se puede decir que el registro tomado tendrá un aspecto semejante al de la figura 1.

Para definir el período y la altura de ola, se hace uso del criterio de pasos ascendentes por el nivel medio “zero-up-crossing”, el cual consiste en identificar dos cortes sucesivos en forma ascendente de superficie libre con el nivel de referencia, con lo que el máximo desplazamiento entre cresta y valle determina la altura de ola  $H$ , el período de ola  $T$  esta definido como el tiempo que ocurre entre corte y corte con dicho nivel.

## II.4 Análisis temporal de la muestra

La duración estándar de un registro de oleaje es de alrededor de 20 minutos. Si el período medio es de 10 segundos, un registro de oleaje con dicha duración tendrá más o menos 120 olas, el cual se considera como un número suficiente de olas para conocer las características de altura de ola y período a un nivel aceptable.

La duración de 20 minutos es empleada como un compromiso entre los requisitos de tener un registro corto y a la vez un estado de mar estacionario. Algunos aparatos de medición utilizan una duración de 17 minutos 04 segundos, con lo que logran registrar 2048 datos con una frecuencia de dos datos por segundo. La razón de esto es economizar el tiempo de cálculo para el análisis espectral usando la transformada rápida de Fourier.

### II.4.1 Corrección del nivel medio

Casi siempre, los registros de oleaje contienen la influencia de la variación de la marea, por tanto, se hace necesario implementar una corrección del nivel medio, la cual es posible realizar por medio de tres formas fundamentales:

1. Media aritmética. Consiste en obtener la media aritmética de la superficie libre para todo el registro, para posteriormente restarla a cada dato.
2. Corrección lineal. La ecuación para realizar esta corrección se obtiene por medio del método de mínimos cuadrados, tal que:

$$\bar{\eta} = A_0 + A_1 n \Delta t \quad : \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (\text{ec.19})$$

donde,

$$A_0 = \frac{N_2 Y_0 - N_1 Y_1}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad A_1 = \frac{N_0 Y_1 - N_1 Y_0}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad (\text{ec.20})$$

$$N_r = \sum_{n=1}^N (n\Delta t)^r, \quad Y_r = \sum_{n=1}^N (n\Delta t)^r \eta_n \quad (\text{ec.21})$$

donde  $N$  denota el número de puntos en la muestra.

3. Corrección parabólica. La ecuación para realizar la corrección para un cambio parabólico se deduce también con el método de mínimos cuadrados y queda expresada como

$$\eta = B_0 + B_1(n\Delta t) + B_2(n\Delta t)^2 \quad : \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (\text{ec.22})$$

donde,

$$B_0 = \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0(N_2 N_4 - N_3^2) + Y_1(N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_2(N_1 N_3 - N_2^2) \right]$$

$$B_1 = \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0(N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_1(N_0 N_4 - N_2^2) + Y_2(N_1 N_2 - N_0 N_3) \right]$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta} \left[ Y_0(N_1 N_3 - N_2^2) + Y_1(N_1 N_2 - N_0 N_3) + Y_2(N_0 N_2 - N_1^2) \right]$$

(ec.23)

$$\Delta = N_0 N_2 N_4 + 2N_1 N_2 N_3 - N_2^3 - N_0 N_3^2 - N_1^2 N_4$$

Si un registro indica la presencia de variaciones de largo período, de orden de minutos, en el nivel medio, se deberá aplicar un filtro numérico.

#### II.4.2 Método de pasos ascendentes por el nivel medio, máximos y mínimos.

Este método se determina a través del siguiente criterio:

$$\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0 \quad \text{y} \quad \eta_{i+1} > 0 \quad (\text{ec.24})$$

donde  $\eta_i$  representa el  $i$ ésimo dato de la elevación de la superficie después de la corrección del nivel medio. El tiempo en el cual cruza el nivel medio se determinará por medio de una interpolación lineal entre el tiempo de muestreo de  $\eta_i$  y  $\eta_{i+1}$ . La diferencia temporal de este punto al siguiente paso ascendente define el período.

La condición para definir un máximo en el perfil es:

$$\eta_{i-1} < \eta_i \quad \text{y} \quad \eta_i > \eta_{i+1} \quad (\text{ec.25})$$

Con el fin de eliminar el problema de subestimación del máximo real entre dos puntos discretos deben ser estimados el tiempo y la elevación máxima después de ajustar la curva parabólica en función de los tres puntos  $\eta_{i-1}$ ,  $\eta_i$  y  $\eta_{i+1}$ .

La ecuación para el ajuste parabólico se puede expresar como,

$$\eta_{max} = C - \frac{B^2}{4A}, \quad \text{y} \quad t_{max} = t_i - \frac{\Delta t B}{2A} \quad (\text{ec.26})$$

donde,

$$A = \frac{1}{2}(\eta_{i-1} - 2\eta_i + \eta_{i+1}), \quad B = \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_{i-1}), \quad C = \eta_i \quad (\text{ec.27})$$

Para determinar la altura de ola, el punto más alto sobre la elevación de la superficie libre debe ser encontrado dentro del intervalo entre dos pasos ascendentes, ya que se identificó este punto, se denota como  $\eta_i$ , y entonces  $\eta_{max}$  es estimada por medio de las ecuaciones (26) y (27), haciendo uso de los puntos adyacentes,  $\eta_{i-1}$  y  $\eta_{i+1}$ . El punto más bajo o más negativo de la elevación  $\eta_{min}$  es calculado por medio de un proceso similar, y la altura de ola es calculada como la suma del valor absoluto,  $\eta_{min}$  y  $\eta_{max}$ .

## II.5 Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos más importantes para definir un estado de mar a partir de una serie de tiempo son:

La variación del nivel medio del mar, también conocido como set-up o set-down, se calcula con la siguiente expresión:

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (\text{ec.28})$$

donde,

$\eta_i$  es la elevación de la superficie libre del mar en el tiempo  $t_i$   
 $N$  es el número de eventos o muestras.

La variación de la media cuadrática (la varianza) de superficie del agua,  $\eta_{rms}^2$ , se evalúan por medio de la ecuación:

$$\eta_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \quad (\text{ec.29})$$

La altura media de olas y el período medio se evalúan con las expresiones siguientes:

$$H = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i \quad (\text{ec.30})$$

$$T = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} T_i \quad (\text{ec.31})$$

donde

$N_0$  es el número de olas individuales de todo el registro.

$H_i$  Altura de ola

$T_i$  Período de ola

La altura cuadrática media,  $H_{rms}$ , queda definida por:

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i^2} \quad (\text{ec.31})$$

La falta de oblicuidad o asimetría es evaluada a través de la siguiente expresión:

$$Skw = \frac{1}{N_0 \eta_{rms}^3} \sum_{i=1}^N \eta_i^3 \quad (\text{ec.32})$$

La altura significativa  $H_s$ , esta definida como la media aritmética de las alturas de ola más altas del registro. La altura de ola "un décimo"  $H_{1/10}$ , es el promedio del 10% de las olas más altas de un registro. De la misma forma están definidas las alturas de ola  $H_{1/100}$ ,  $H_{1/3}$ ,  $H_{1/1000}$ , etc.

Normalmente, también es conveniente identificar los valores máximos de la muestra, como la altura de ola máxima,  $H_{max}$ .

## II.6 Análisis espectral

La precisión en el cálculo de la función de distribución espectral es muy importante para la validación del estudio a través de este tipo de análisis. La elección del tratamiento al que va a ser sometida la serie es, en consecuencia, bastante subjetiva y en cada caso debe

estudiarse la resolución espectral y el nivel de confianza que se desea tener en la estimación de los parámetros.

El modo para el cálculo de los valores del espectro se realiza haciendo uso de las series de Fourier. Para simplificar este procedimiento se utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT), la cual reduce en gran medida el número de operaciones que son necesarias para su obtención, este algoritmo tiene como base la propiedad de la transformada discreta de Fourier (DFT) que permite calcular la FFT de una sucesión a través de la DFT de subsucesiones más cortas.

### ***II.6.1 Intervalo de muestreo y longitud del registro.***

Debido a que la longitud del registro determina la resolución del espectro, se debe procurar que esta sea tan grande como sea posible. El intervalo de muestreo recomendado para un análisis de oleaje es de una décima a una vigésima parte del período significativo. Ya seleccionado el intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , la máxima frecuencia, conocida como frecuencia de Nyquist, para la cual el espectro es estimado se determina por la expresión:

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{ec.33})$$

Como se observa de la ecuación anterior, el intervalo de muestreo determina la frecuencia de Nyquist, para la que deben calcularse los valores espectrales. Para un  $\Delta t$  fijo la duración del registro queda determinada por el número de puntos de la serie,  $N$ . Este número de puntos debe elegirse de tal forma que la muestra sea representativa de un estado de mar y por tanto, que la hipótesis de estacionariedad sea aceptable.

### ***II.6.2 Corrección del nivel medio***

De la misma forma, que con el análisis temporal se debe llevar a cabo una corrección del nivel medio, ya que si este no es corregido se introducirá en el espectro una distorsión que se denomina efecto de solapamiento o aliasing.

### ***II.6.3 Corrección de las discontinuidades.***

Debido a la dificultad que se tiene al calcular la función de densidad espectral para muestras de duración finita, es práctica común aplicar a la serie una ventana que elimine las discontinuidades al principio y final del registro. Esta operación consiste en multiplicar la muestra por una profundidad de peso,  $b(t)$ , de forma que se reduzcan las oscilaciones en los extremos de la serie.

Las ventanas más importantes son la trapezoidal y la cosenoidal, las cuales pueden ser expresadas de la siguiente forma:

a) Ventana tipo trapezoide.

$$b_1(t_*) = \begin{cases} \frac{t_*}{l} & : 0 \leq t_* \leq l \\ 1 & : l \leq t_* \leq N-l \\ \frac{N-t_*}{l} & : N-l < t_* \leq N \end{cases} \quad (\text{ec.34})$$

b) Ventanas tipo coseno.

$$b_2(t_*) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \cos \pi t_*}{l} \right] & : 0 < t_* < l \\ 1 & : l \leq t_* \leq N-l \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \cos(N-t_*)}{l} \right] & : N-l < t_* \leq N \end{cases} \quad (\text{ec.35})$$

donde normalmente se acepta que  $l = 0.1N$ .

Si se aplica una ventana al registro, la energía total decrece y los valores espectrales estimados son menores que los reales, por lo que deben multiplicarse por un factor de corrección  $\beta$ , al momento de evaluar la función de densidad espectral. Dicho factor esta dado por:

$$\beta = \frac{N}{\sum_{n=1}^N [b(t_n)]^2} \quad (\text{ec.36})$$

#### II.6.4 Evaluación de los coeficientes de Fourier

Como se mencionó anteriormente, la técnica de la transformada rápida de Fourier es ampliamente utilizada para este fin, sin embargo, el algoritmo presenta una limitación en cuanto a que la longitud del registro debe ser una potencia de 2, en otras palabras,  $N=2^m$ . Obviamente para el análisis se hace esta corrección por lo que el número de datos es posteriormente ajustado añadiendo un cierto número de ceros en los datos, lo cual es normalmente realizada en la parte final del registro.

El problema fundamental de esta medida es que el nivel de energía total se ve reducido. La corrección a este problema se puede solucionar de forma análoga al de la función ventana.

La transformada discreta de Fourier se puede expresar como:

$$S(f_n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \eta(t_k) e^{2\pi i k n} \quad (\text{ec.37})$$

mientras que la transformada inversa de Fourier:

$$\eta(t_k) = \frac{1}{\Delta f} \sum_{n=0}^{N-1} S(f_n) e^{-2\pi i k n} \quad (\text{ec.38})$$

El algoritmo de la transformada rápida de Fourier se puede consultar en el apéndice A de este trabajo.

### II.6.5 Suavizado espectral

Los valores espectrales estimados fluctúan entorno a los valores del espectro real. Para atenuar estas oscilaciones es posible suavizar el espectro con una función de peso  $W(f)$  de forma tal que:

$$S(f) = \int_0^{\infty} S(f_*) W(f_* - f) df_* \quad (\text{ec.39})$$

$W(f)$  debe ser una función normalizada, esto es:

$$\int_0^{\infty} W(f) df = 1 \quad (\text{ec.40})$$

En la práctica el espectro alisado se calcula como un promedio ponderado de los valores espectrales de las frecuencias próximas a ella:

$$\hat{S}(f) = \sum_{j=k-m}^{j=k+m} W(f_k - f_j) S(f_j) \quad (\text{ec.41})$$

Cuando el registro es suficientemente largo algunos tramos del mismo pueden considerarse representativos del estado de mar que está estudiando. Es posible elegir varios segmentos de la misma longitud y promediar las estimaciones obtenidas para cada uno de ellos:

$$S(f) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n_s} S_n(f_j) \quad (\text{ec.42})$$

sonde  $n_s$  es el número de segmentos tomados.

### II.6.6 Precisión

La precisión de los cálculos está dada por el número de grados de libertad y la resolución espectral. Los cuales dependen, aunque de diferente forma, de los siguientes parámetros:

- Longitud de la muestra,  $N$ .
- Número de segmentos,  $n_s$ .
- Número de puntos de cada segmento,  $n_p$ .
- Intervalo de muestreo  $\Delta t$ .
- Anchura de banda efectiva del filtro  $B_e$ , la cual está dada por:

$$B_e = \frac{1}{\int_0^{\infty} W(f)^2 df} \quad (\text{ec.43})$$

y se debe cumplir que  $l = INT[B_e N \Delta t]$ ,  $INT[ ]$  denota la parte entera de un número real.

### II.7 Parámetros espectrales

Todos los parámetros espectrales se calculan a partir de sus diferentes momentos. El momento de orden " $n$ " respecto al origen se define mediante la siguiente expresión:

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \quad (\text{ec.44})$$

donde  $S(f)$  es la función densidad espectral y  $f$  es la frecuencia.

Cartwright y Longuet-Higgins en 1956 proponen un parámetro para describir la anchura espectral

$$\varepsilon = \left[ 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right]^{1/2} \quad (\text{ec.45})$$

Si el espectro es de banda angosta  $\varepsilon$  tiende a 0; si por el contrario, el espectro es de banda ancha  $\varepsilon$  tiende a 1.



Debido a que la estimación del momento de cuarto orden es muy susceptible a los valores que se tienen en las altas frecuencias, para espectros que definen un estado de mar este parámetro no es representativo ya que puede inducir a fuertes errores. Para hacer más claro este problema, Longuet-Higgins propuso otro parámetro de anchura espectral, el cual depende de los momentos de orden inferior.

$$v = \left[ \frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (\text{ec.46})$$

Otro parámetro que define la forma del espectro es el de agudeza de pico  $Q_p$ , propuesto por Goda en 1970.

$$Q_p = \frac{2}{m_0} \int_0^{\infty} f(S(f))^2 df \quad (\text{ec.47})$$

Goda (1985) señala que  $Q_p$  es cercano a 2 para olas generadas por viento.

Es posible estimar el período medio de las olas a partir del espectro, de tal forma que se tienen dos ecuaciones para estimarlo y son:

$$T_{01} = \frac{m_0}{m_1} \quad (\text{ec.48})$$

$$T_{02} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (\text{ec.49})$$

## II.8 Factor de agrupamiento

Se ha notado que dentro de un espectro pueden quedar representados diferentes estados de mar, es decir, se puede presentar un oleaje “uniforme” o pueden existir diferentes tipos de oleaje de manera simultánea.

En 1987, Johnson et al. mostraron que dicho fenómeno posee una gran relevancia, ya que la magnitud del daño a las estructuras puede variar dependiendo de la agrupación de las olas en un registro dado.

Para tomar en cuenta dicho agrupamiento del oleaje se debe utilizar un parámetro adicional que es conocido como factor de agrupamiento: GF (por sus siglas en inglés, grouping factor).

Funke y Masnard (1982) proponen un método que permite detectar la presencia de grupos de olas, basándose en la historia de la energía del oleaje a lo largo de un registro.

Ellos proponen una función envolvente conocida como SIWEH (Smoothed Instantaneous Wave Energy History). La selección de dicho nombre se determinó para evitar confusiones con respecto a otras energías del oleaje ya que cada palabra del mismo, "Historia de energía de ondas instantánea suavizada", describe una característica en particular, así entonces "Historia" hace referencia a que se trata de una función del tiempo, "instantánea" describe que la energía está dada para un instante determinado y "suavizado" implica una operación de suavizado.

Cuando se procesan registros de oleaje de longitud finita el SIWEH queda definido como:

$$E(t) = \frac{1}{T} \int_{\tau=T_p}^{T_p} \eta^2(t+\tau) Q_1(\tau) \partial\tau \quad \text{para } T_p \leq t \leq T_n - T_p \quad (\text{ec.50})$$

donde  $T_n$  es el tiempo total del registro. Para el inicio y el final se tiene:

$$E(t) = \frac{2}{T_p + t} \int_{\tau=-t}^{T_p} \eta^2(t+\tau) Q_1(\tau) \partial\tau \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_p \quad (\text{ec.51})$$

$$E(t) = \frac{2}{T_p + t} \int_{\tau=-T_p}^{T_n-1-t} \eta^2(t+\tau) Q_1(\tau) \partial\tau \quad \text{para } T_n - T_p \leq t \leq T_n \quad (\text{ec.52})$$

Utilizando para estos casos:

$$Q_1(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_p} \quad \text{para } -T_p \leq \tau < T_p \quad (\text{ec.53})$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{para los demás valores.}$$

El factor de agrupamiento se obtiene a partir del SIWEH por medio de la siguiente expresión:

$$GF = \frac{\sqrt{m_{\epsilon 0}}}{m_0} \quad (\text{ec.54})$$

$$GF = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (E(t) - \bar{E})^2 \partial t}}{\bar{E}} \quad (\text{ec.55})$$

donde  $m_{\epsilon 0}$  y  $m_0$  son los momentos de orden cero de la función de densidad espectral del SIWEH y dentro del oleaje original respectivamente.

## II.9 Relaciones entre la descripción estadística y la espectral.

Existen varias relaciones que permiten relacionar los parámetros obtenidos por medio del espectro con los obtenidos con las series del tiempo.

El parámetro de ancho espectral dado por Cartwright y Longuet-Higgins en 1956,  $\varepsilon$ , puede ser estimado de forma directa si se tiene un registro de oleaje, a través de la siguiente ecuación:

$$\varepsilon^2 = 4r(1-r) \quad (\text{ec.56})$$

donde

$$r = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{N_o^+}{N_c} \right) \quad (\text{ec.57})$$

$N_o^+$  = Número de cruces de la superficie libre del agua con el NMM con pendiente positiva.

$N_c$  = Número total de crestas del registro.

Para espectros de banda estrecha se tiene que:  $\nu = \varepsilon/2$ .

Ahora bien, si se asume que la distribución de olas se aproxima a la de Rayleigh, es posible estimar  $H_{rms}$  y  $H_s$  directamente a partir del espectro ( $H_s = H_{m0}$  cuando este parámetro es estimado a partir del espectro).

$$H_{m_0} = 4.004 \sqrt{m_0} = \sqrt{2} H_{rms} \quad (\text{ec.58})$$

$$H_{rms} = \sqrt{8m_0} \quad (\text{ec.59})$$

Si se mantiene la suposición de tener una aproximación a la distribución Rayleigh, otras alturas de ola características del oleaje pueden ser estimadas a partir del  $H_{rms}$ .

$$H_{1/10} = 1.8 H_{rms} \quad (\text{ec.60})$$

$$H_{1/100} = 2.359 H_{rms} \quad (\text{ec.61})$$

## II.10 Descripción estadística y espectral del oleaje en el puerto de Rosarito, B.C.N.

Con el propósito de comparar las características estadísticas del oleaje espectrales y temporales, se ha hecho uso de los datos medidos en Rosarito en Baja California Norte.

Los datos de oleaje que se emplean en este trabajo, fueron obtenidos por medio de un olómetro para el Departamento de oceanografía de la Comisión Federal de Electricidad, y corresponden a un período de dos años del 1 de marzo de 1997 al 8 de marzo de 1999, cabe resaltar que esto implica una gran cantidad de información (3933 registros de oleaje), por lo que se hace necesaria la selección de los registros más representativos del oleaje para la presentación de los resultados.

Con el fin de obtener una mejor caracterización del oleaje, se escogieron cuatro registros correspondientes a las cuatro estaciones del año, primavera, verano, otoño e invierno, encontrándose los parámetros estadísticos para cada estación.

Las señales seleccionadas se presentan en la siguiente tabla:

<i>Estación</i>	<i>Día seleccionado</i>	<i>Hora</i>
Primavera	16 de mayo de 1997	12:00 hrs
Verano	17 de agosto de 1998	15:00 hrs
Otoño	14 de noviembre de 1997	20:00 hrs
Invierno	22 de febrero de 1998	22:00 hrs

Tabla 2.1 Señales seleccionadas para la obtención de los parámetros estadísticos

Después de corregir el nivel medio del mar de la señal se evalúan los diferentes parámetros temporales y espectrales, los cuales se presentan en las siguientes tablas

<i>Estación</i>	<i>Número de olas</i>	<i>H</i>	<i>Hrms</i>	<i>Hs</i>	<i>H<sub>1/10</sub></i>	<i>Hmax</i>	<i>T</i>	<i>Ts</i>	<i>T<sub>1/10</sub></i>	<i>GF</i>
<i>Primavera</i>	77	0.665	0.733	1.024	1.332	1.531	5.769	7.142	7.810	0.749
<i>Verano</i>	75	0.509	0.564	0.786	1.021	1.214	5.871	7.911	9.022	0.737
<i>Otoño</i>	64	1.284	1.475	2.128	2.723	3.534	6.893	8.960	9.953	0.815
<i>Invierno</i>	67	0.978	1.085	1.538	1.825	1.935	6.618	8.777	10.33	0.545

Tabla 2.2 Parámetros estadístico temporales para las cuatro estaciones del año.

<i>Estación</i>	$\epsilon$	$\nu$	<i>Skw</i>	$\sigma_{sup.libre}$	<i>Hrms</i>	<i>H<sub>m0</sub></i>	<i>T<sub>01</sub></i>	<i>T<sub>02</sub></i>	<i>Q<sub>p</sub></i>
<i>Primavera</i>	0.499	0.234	6.477	0.254	0.718	1.016	5.801	5.652	6.737
<i>Verano</i>	0.614	0.335	3.688	0.199	0.562	0.795	6.015	5.703	7.877
<i>Otoño</i>	0.694	0.364	7.23	0.528	1.494	2.115	7.346	6.903	8.983
<i>Invierno</i>	0.710	0.386	5.229	0.379	1.073	1.519	7.095	6.618	8.678

Tabla 2.3 Parámetros estadístico espectrales para las cuatro estaciones del año.

En las siguientes figuras se presentan las señales analizadas:

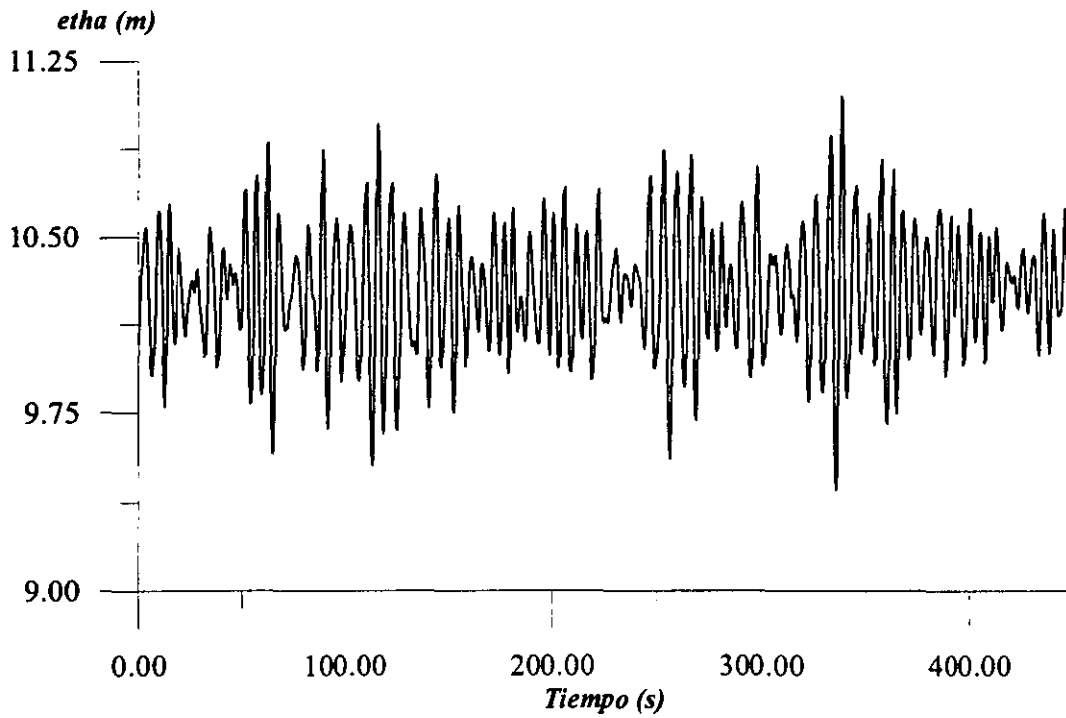


Figura 2.3 Señal de primavera.

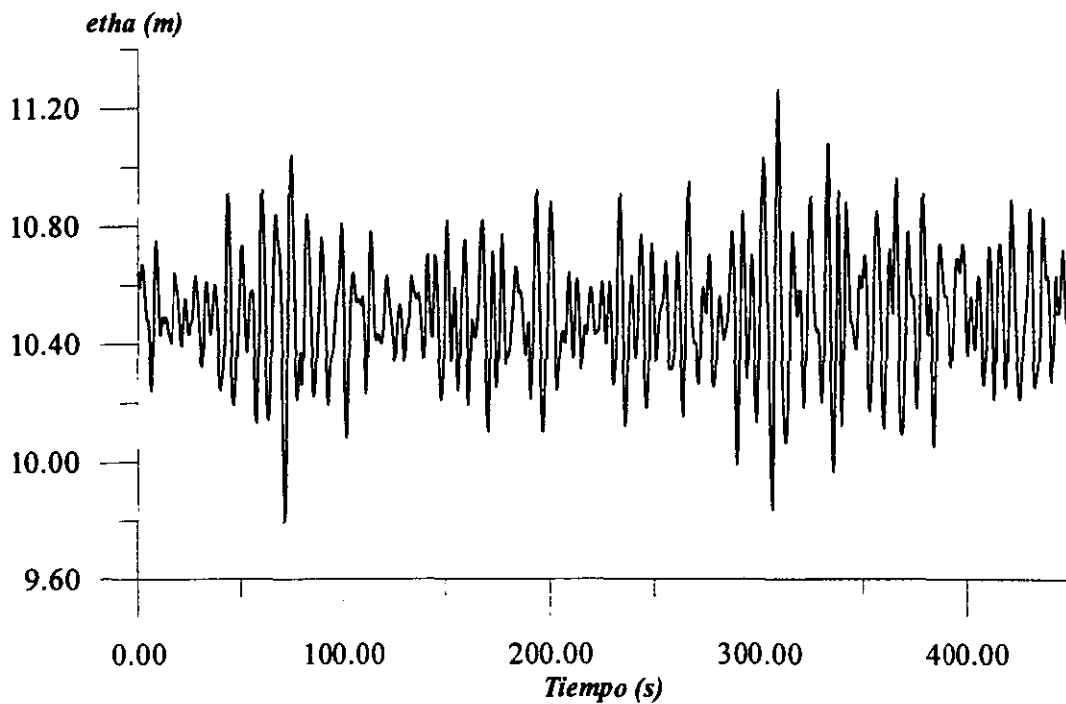


Figura 2.4 Señal de verano.

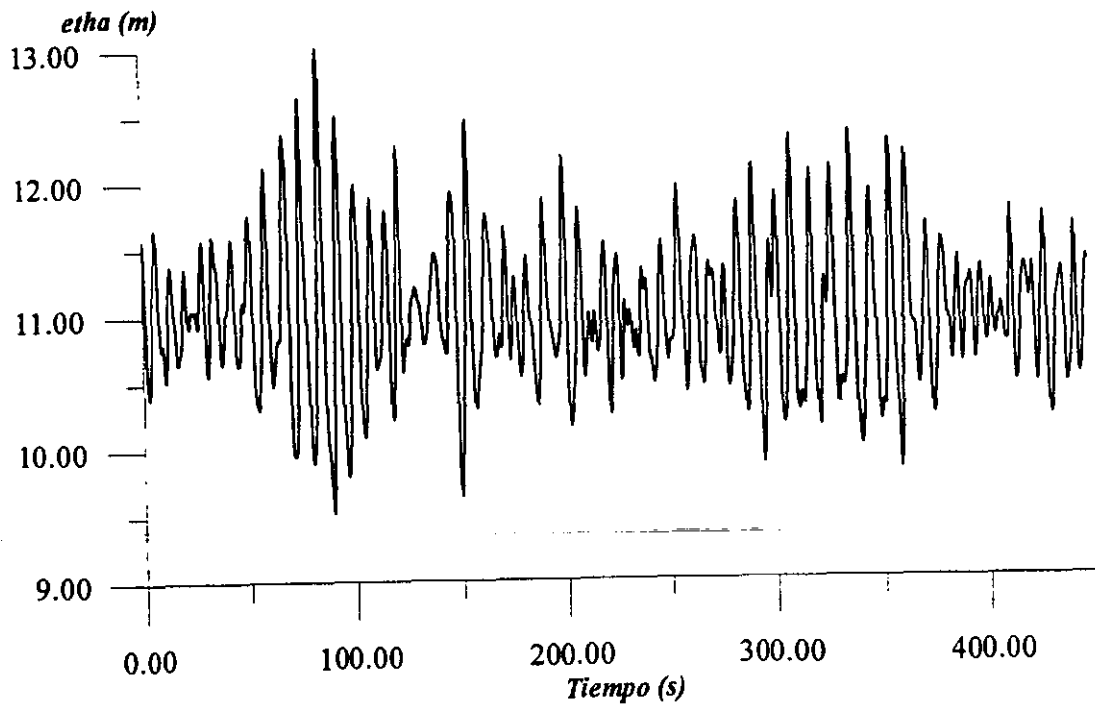


Figura 2.5 Señal de otoño.

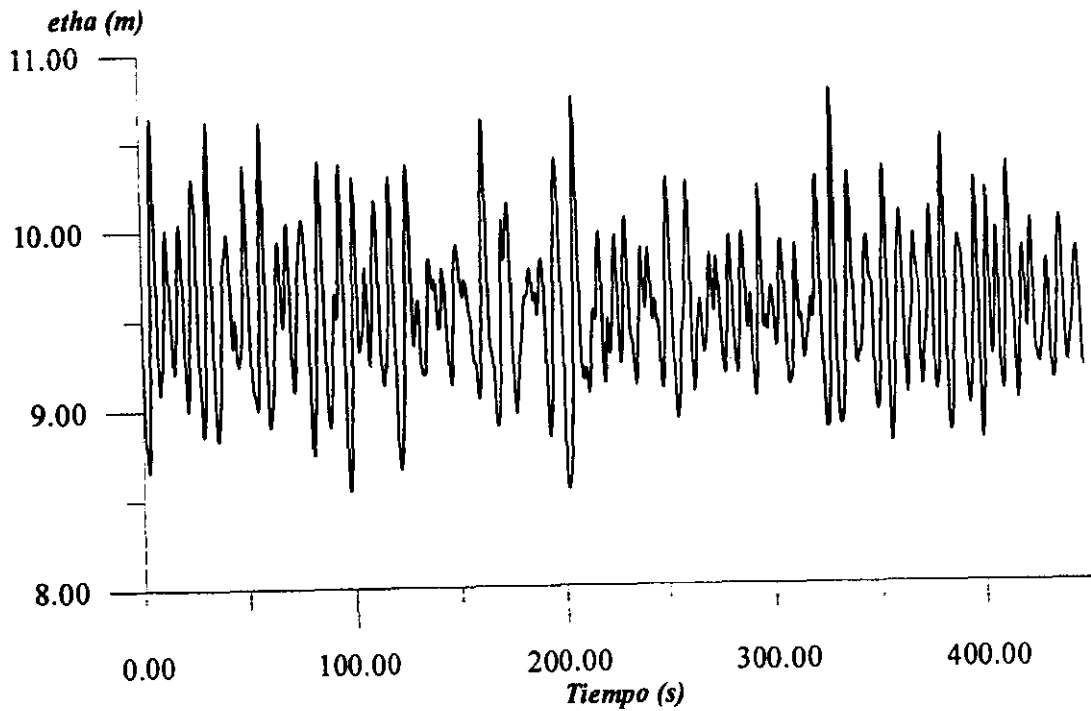
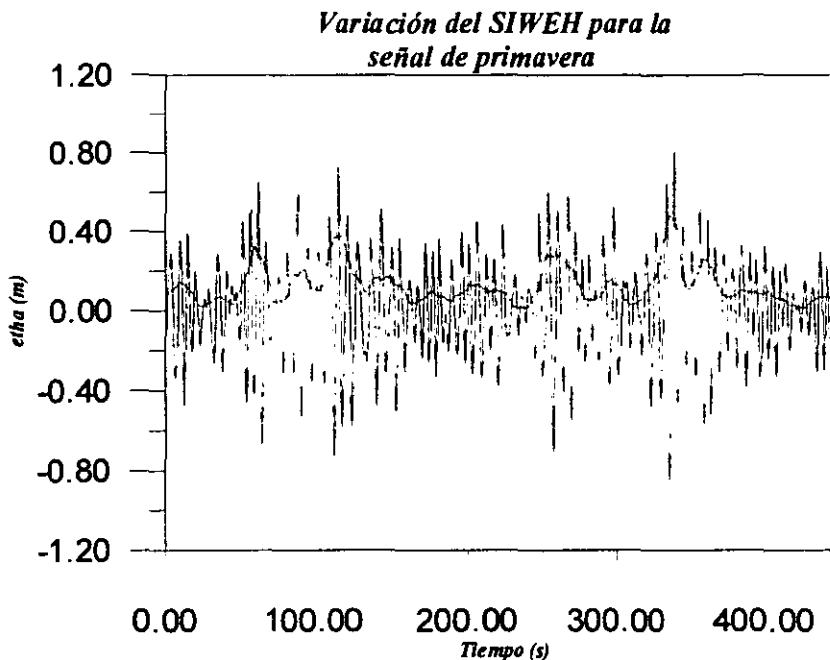
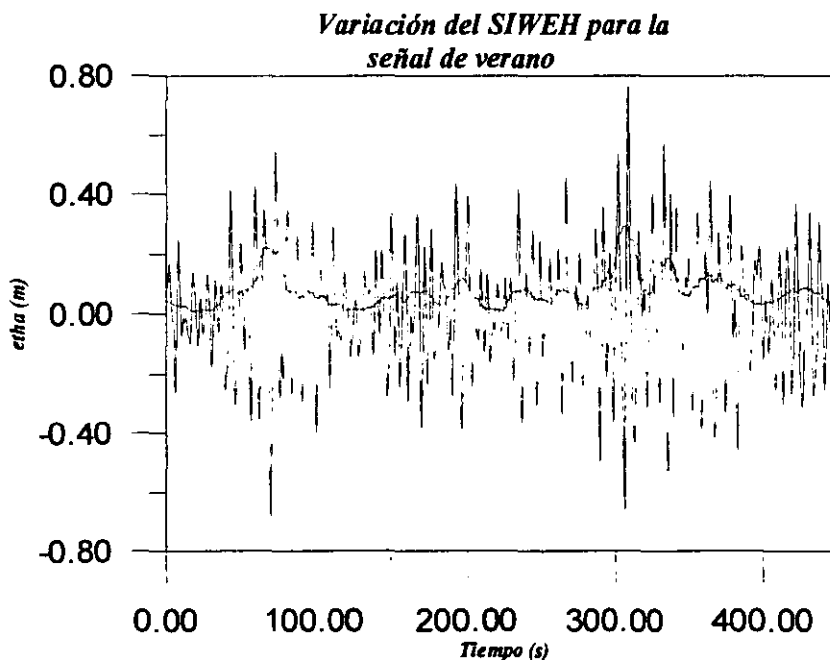


Figura 2.6 Señal de invierno.

En las figuras 2.7 y 2.8 se presentan dos ejemplos de la variación de la función SIWEH a lo largo del tiempo, con el propósito de observar la variación de la energía a lo largo del registro. En ambas figuras es posible observar la agrupación de la energía en las partes del registro donde se presentan las olas de mayor magnitud por periodos de tiempo cortos, comparadas con las olas inmediatas anteriores.



**Figura 2.7** Variación del SIWEH para la señal de primavera



**Figura 2.8** Variación del SIWEH para la señal de verano.

### II.11 Correlaciones entre la descripción estadística y la espectral.

En la figura 2.9 se muestra la correlación entre la altura de ola significativa estimada a partir del espectro,  $H_{m0}$ , y la estimada a través del análisis temporal,  $H_{rms}$ . Como se definió en el apartado II.8, ambos parámetros se relacionan a través de la (ec.58) que define un factor de 1.4142, para conocer  $H_{m0}$  a partir del  $H_{rms}$ .

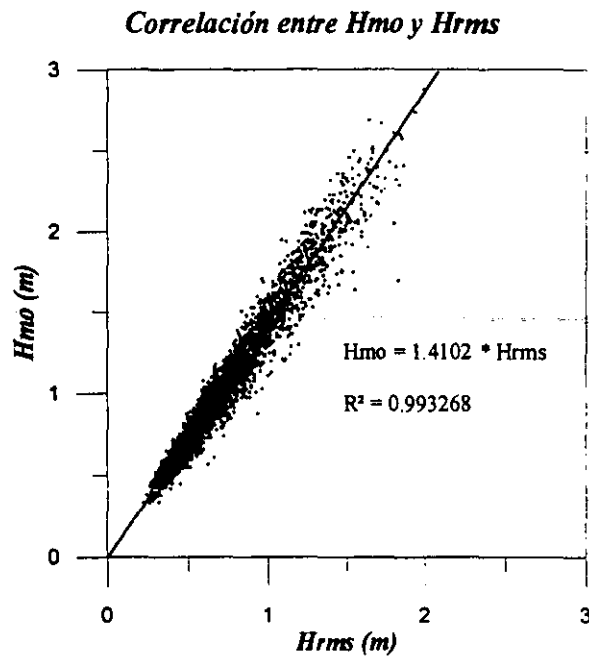


Figura 2.9 Correlación entre  $H_{m0}$  y  $H_{rms}$ .

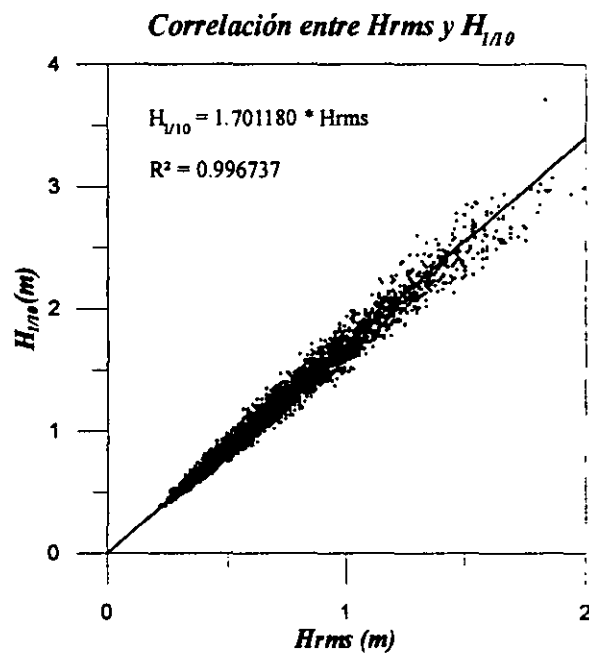
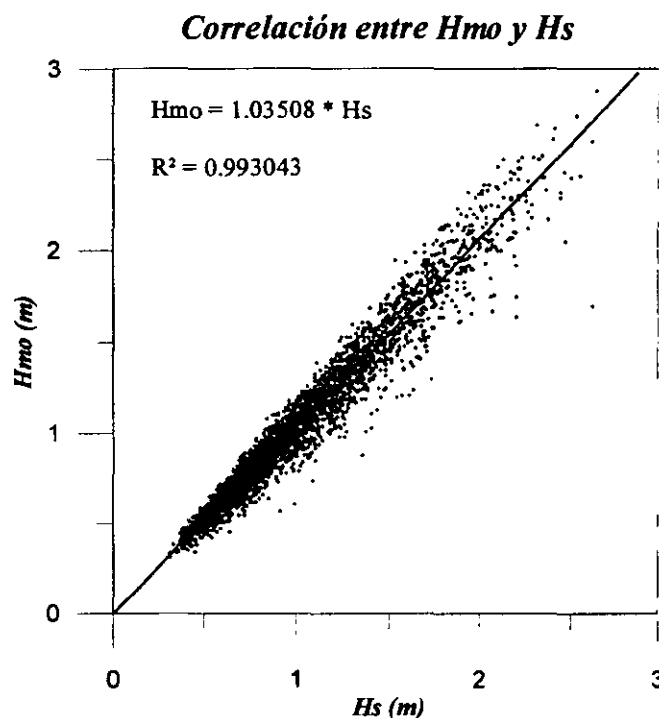


Figura 2.10 Correlación entre  $H_{rms}$  y  $H_{1/10}$



Como se mencionó anteriormente, es posible estimar  $H_{1/10}$  si se conoce el valor de  $H_{rms}$ , por medio de un factor de 1.8 definido por la (ec.60).

A través de la correlación que se presenta en la figura 2.10, se determina ese factor de ajuste para el caso de los parámetros calculados de las señales del puerto de Rosarito, resultando ser igual a 1.70118, lo que da como resultado un error mínimo del 5.4% con respecto al valor teórico, además de que la dispersión obtenida fue mínima,  $R^2 = 0.9967$ .



**Figura 2.11** Correlación entre  $H_{m0}$  y  $H_s$

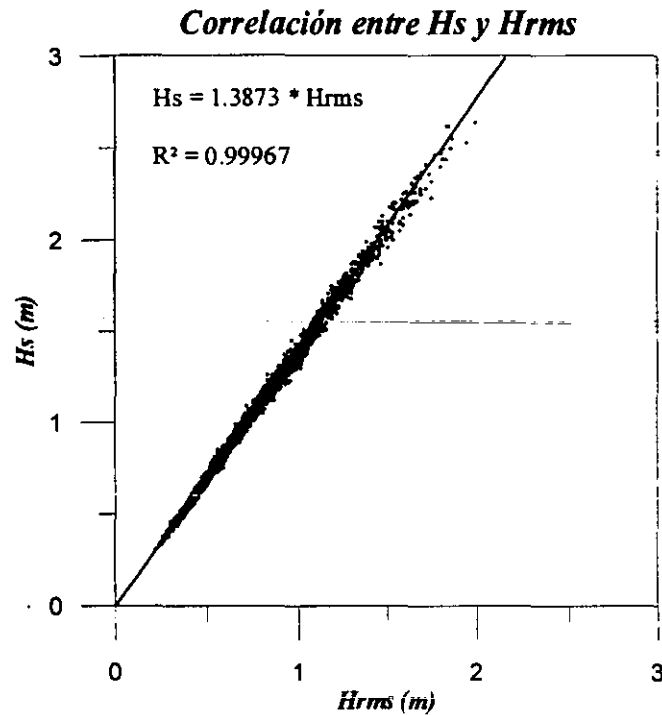
Como se mencionó en este capítulo, los parámetros  $H_{m0}$  y  $H_s$  corresponden al valor de la altura de ola significativa, el primero calculado por métodos espectrales y el segundo a través de un análisis temporal. En la figura 2.11 se presenta la correlación de dichos valores con el objeto de determinar la diferencia entre los cálculos temporal y espectral de este parámetro.

Se puede observar además, que la pendiente obtenida de esta correlación fue de 1.03508, con lo que se tiene un pequeño error del 3.3% respecto al valor teórico de la pendiente que define la igualdad, 1.

En la figura 2.12 se muestra la correlación entre  $H_s$  y  $H_{rms}$ , con el objeto de obtener la ecuación de la recta que asocia ambos parámetros, la pendiente obtenida fue de 1.3873, la cual difiere de la que se obtuvo para el caso de  $H_{m0}$  y  $H_{rms}$ , 1.4102.

Para el caso de esta correlación se obtuvo una pendiente de 1.3873 que tiene una diferencia mínima del 1.9% con respecto al valor teórico definido por (ec.58), y una diferencia del 1.6% con respecto a la correlación de  $H_{rms}$  con  $H_{m0}$ .

La dispersión obtenida para este caso es muy pequeña,  $R^2 = 0.99967$ , ya que los datos se ven muy bien agrupados alrededor de la línea de tendencia obtenida.



**Figura 2.12** Correlación entre  $H_s$  y  $H_{rms}$

**CAPITULO III.**  
**DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS**  
**DEL OLEAJE**

*“Todo lo que una persona puede imaginar,  
otras podrán hacerlo realidad”*

*Julio Verne*

### III DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DEL OLEAJE

Normalmente cuando se reportan datos sólo son de los parámetros más representativos. Sin embargo, cuando se diseñan estructuras es necesario conocer los valores más altos.

Aquí lo que se intenta es encontrar que distribuciones analíticas mejor se apegan a los casos reales.

#### III.1 Distribución normal de la superficie libre.

Por lo general, se considera que la variación del nivel de la superficie libre del agua en el mar sigue una distribución de probabilidad gaussiana, dicho modelo considera implícitamente que existe una simetría alrededor del nivel medio del agua, en otras palabras, asume que la media es igual a cero y, por tanto, su función de densidad será:

$$p(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms} \cdot 2\pi} e^{\left(-\frac{1}{2\eta_{rms}^2} \eta^2\right)} \quad (\text{ec.1})$$

donde  $p(\eta)$ , es su función de densidad.

La función densidad de probabilidad de la elevación de la superficie del mar es simétrica, alrededor de la elevación media donde la función es máxima. De tal forma que la probabilidad de tener una elevación positiva en particular es la misma que para la elevación negativa.

#### III.2 Distribuciones de alturas de ola.

La altura de ola es uno de los parámetros de mayor importancia para el diseño de estructuras y para evaluar el grado de seguridad que presentan estructuras fijas y móviles.

En un registro de oleaje irregular, las alturas de ola se determinan separando el registro en olas individuales a través del método de pasos ascendentes por cero. Las distribuciones de altura de ola más utilizadas son:

##### III.2.1 Distribución de Rayleigh para alturas de ola

Si se considera un estado de mar tipo SWELL puro, con un ancho de espectro  $\epsilon = 0$ , la descripción de la altura de olas dada por Rayleigh es exacta. Como consecuencia de lo anterior esta distribución supone que hay una correlación perfecta entre una cresta y el siguiente valle. Es decir si se tiene una cresta grande, el siguiente valle será grande también. La distribución adimensional de alturas de ola,  $p(\xi)$ , queda definida como:

$$p(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \quad (\text{ec.2})$$

donde

$$\xi = \frac{H}{H_{rms}} \quad (\text{ec.3})$$

En forma dimensional se puede expresar como:

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}} e^{-\frac{H^2}{H_{rms}^2}} = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}} \quad (\text{ec.4})$$

### III.2.2 Distribución de Longuet-Higgins (1983) de altura de ola

En 1983 Longuet-Higgins propone una distribución de crestas que es posible aplicar cuando la anchura espectral,  $\nu$ , es diferente de cero. Para el caso en el que  $\nu = 0$  se tiene una distribución Rayleigh mientras que para un espectro de banda ancha se tiene una distribución normal truncada en cero.

$$p(H) = \frac{L(\nu)H \operatorname{Erfc}\left[-\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right]}{8m_0\nu \cdot e^{\frac{H^2}{8m_0}}} \quad (\text{ec.5})$$

donde

$m_0$  es el momento de orden cero.

$\operatorname{Erfc}$  es la función error complementaria, definida por:

$$\operatorname{Erfc}\left(-\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right)^2} dH \quad (\text{ec.6})$$

$$\frac{1}{L(\nu)} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{ec.7})$$

### III.2.3 Distribución de alturas de ola de Tayfun

Tayfun (1981) propone una ecuación de alturas de olas que esta limitada por la rotura de la misma y un parámetro N que combina el estado de mar con la profundidad.

Esta distribución supone que existe una mediana correlación entre la cresta y el siguiente valle, en este caso si la cresta es grande, la probabilidad de que el próximo valle sea grande es alta sin embargo, existe una cierta probabilidad de que el valle pueda ser mediano o pequeño.

El parámetro N está relacionado, como se dijo anteriormente, con el estado de mar y es función del período de onda y de la profundidad. Si el parámetro N tiende a infinito, entonces se tiene un estado de mar SWELL y la distribución de Tayfun se iguala a la de Rayleigh.

La distribución propuesta por Tayfun esta expresada de la siguiente forma:

$$p(\xi, N) = \xi \int_0^{\infty} \left[ u J_0^N \left( \frac{u}{N^{1/2}} \right) J_0(\xi u) \right] du \quad 0 \leq \xi \leq N^{1/2} \quad (\text{ec.8})$$

$$p(\xi, N) = \xi \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{N^{1/2}}{\xi} \right) \right] \int_0^{\infty} \left[ u J_0^N \left( \frac{u}{N^{1/2}} \right) J_0(\xi u) \right] du \quad N^{1/2} \leq \xi \leq (2N)^{1/2} \quad (\text{ec.9})$$

donde N es el parámetro de Tayfun que se define como:

$$N = \left( \frac{\pi \tanh(k_0 h)}{7.2 k_0 \sqrt{2m_0}} \right) \quad (\text{ec.10})$$

donde

$$\xi = \frac{H}{H_{ms}} \quad (\text{ec.11})$$

$J_0$  es la función de Bessel de orden cero.

$k_0$  es el número de onda asociado a la frecuencia media el cual se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = k_0 h \cdot \tanh(k_0 h) \quad (\text{ec.12})$$

### III.2.4 Distribución de alturas de ola de Carter.

La distribución propuesta por Carter en 1981 asume que no existe ninguna correlación entre crestas y valles consecutivos. Es decir, dada una cresta grande el siguiente valle tiene la misma probabilidad de ser grande pequeño o mediano. La probabilidad de excedencia es la siguiente:

$$P(H \geq H_0) = 1 - \left( e^{-8\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} + 2 \cdot \frac{H_0}{H_s} e^{-4\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} \operatorname{Erf}\left[\frac{2H_0}{H_s}\right] \right) \quad (\text{ec.13})$$

en este caso la función error queda determinada por:

$$\operatorname{Erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} du \quad (\text{ec.14})$$

La ecuación que puede expresar la distribución en forma dimensional es la siguiente:

$$P(H \geq H_0) = 1 - \left( e^{-8\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} + 2 \frac{H_0}{H_s} e^{-4\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} \int_0^{\frac{H_0}{H_s}} e^{-\frac{u^2}{4}} du \right) \quad (\text{ec.15})$$

Diversos estudios han sido realizados con el fin de encontrar aquellas distribuciones que describen de mejor manera el fenómeno del oleaje para sus diversos tipos, Green en 1994 llegó a la conclusión de que para estados de mar muy desordenados (tipo SEA) la ecuación de Carter es la que mejor representa el fenómeno.

Si se tiene un estado de mar más ordenado (al salir del área de generación y propagarse el oleaje) la distribución de Tayfun es la que mejor se ajusta.

Por último, en un estado de mar muy ordenado (tipo SWELL) la distribución de Rayleigh puede utilizarse de manera adecuada.

### III.3 Distribuciones conjuntas de período y altura de ola.

En estudios recientes se ha demostrado la importancia del período de las olas para el diseño de estructuras marinas, en fenómenos tales como el run-up o la estabilidad de piezas en un rompeolas, de ahí la importancia de las distribuciones de probabilidad conjuntas de período y altura de ola.

A continuación se presentan las distribuciones más utilizadas, cabe señalar que es importante considerarlas en su forma dimensional y adimensional, la primera por su utilidad para los cálculos prácticos y la segunda para una comparación entre ellas.

### III.3.1 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

En 1975 Longuet-Higgins propuso una ecuación para la distribución conjunta que se basa en un modelo de oleaje estacionario y gaussiano con espectro de banda estrecha.

Dicha expresión presenta el inconveniente de que está basada en un espectro de banda estrecha (oleaje SWELL), y no toma en cuenta la asimetría en la distribución de los períodos de ola que se presenta cuando el espectro es de banda ancha.

En forma adimensional esta ecuación queda expresada por:

$$p(\theta, \eta) = \frac{\theta^2}{2\pi} e^{-\frac{\theta^2(1+\eta^2)}{2}} \quad (\text{ec.16})$$

donde

$$\theta = \frac{H}{2\sqrt{m_0}} \quad (\text{ec.17})$$

$$\eta = \frac{T - T_{01}}{\sqrt{T_{01}}} \quad (\text{ec.18})$$

donde  $T_{01}$  es el período medio.

En forma dimensional se tiene:

$$p(H, T) = \left( \frac{H^2}{8\nu \cdot \sqrt{2\pi} \nu T_{01} m_0^{3/2}} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left( 1 + \left( \frac{T - T_{01}}{\sqrt{T_{01}}} \right)^2 \right)} \quad (\text{ec.19})$$

### III.3.2 Distribución de Cavanié et.al (1976)

En 1976 Cavanié, Arhan y Ezraty propusieron una distribución teórica que al igual que la de Longuet-Higgins está basada en un modelo gaussiano de banda estrecha, solo que ésta sí toma en cuenta la asimetría en la distribución de los períodos.

Dicha ecuación presenta una buena concordancia con los datos observados, pero tiene el defecto de utilizar el parámetro de anchura espectral  $\varepsilon$  que depende del cuarto momento de



la función de densidad espectral. Este momento tiene el inconveniente de estar asociado a la cuarta potencia de la función de densidad espectral, por lo que cualquier error en la distribución resulta muy amplificado, sobre todo para altas frecuencias.

Su forma adimensional esta representada por:

$$p(h, \tau) = \frac{\alpha^3 h^2}{4 \cdot 2\pi \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \tau^4 \tau^5} e^{-\frac{h^2 (\tau \tau)^{-4} ((\tau^2 \tau^2 - a^2)^2 + \beta^2 a^4)}{8\varepsilon^2}} \quad (\text{ec.20})$$

donde

$$h = \frac{H}{m_0} \quad (\text{ec.21})$$

$$\tau = \frac{T}{\tau T_C} \quad (\text{ec.22})$$

$$T_C = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad (\text{ec.23})$$

$$\tau = \left( \frac{T}{T_C} \right) \quad \text{Si } \varepsilon \leq 0.95 \rightarrow \tau = 1 \quad (\text{ec.24})$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) \quad (\text{ec.25})$$

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad (\text{ec.26})$$

Esta ecuación fue obtenida midiendo el periodo de ola entre cresta y cresta,  $T_C$ , por lo que no sería correcto aplicarla a olas definidas por el método de pasos ascendentes por cero, sin embargo, Goda (1978) señala que aún para este caso la distribución da buenos resultados.

En su forma dimensional utilizando

$$T_C = T \quad , \quad \tau = \frac{T}{T} \quad \text{y} \quad h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad (\text{ec.27})$$

la expresión queda determinada por:

$$p(H, T) = \frac{1}{4} \frac{\alpha^3 T^4}{2\pi m_0^{3/2} \varepsilon (1-\varepsilon) \tau^4} \frac{H^2}{T_z^5} e^{-\frac{T_z^4}{8m_0 \varepsilon^2 \tau^4} \frac{H^2}{T_z^4} \left[ \left( \tau^2 \frac{T_z^4}{T_z^4} - \alpha^2 \right)^2 + \alpha^4 \beta^2 \right]} \quad (\text{ec.28})$$

### III.3.3 Distribución Longuet-Higgins (1983)

En 1983 Longuet-Higgins propone otra ecuación que tiene los mismos méritos que la de Cavanié et al.(1976) al tomar en cuenta la asimetría en los períodos, además de que posee la gran ventaja de utilizar un parámetro de ancho espectral de orden menor:  $\nu$  (dependiente del segundo y no del cuarto momento).

Su forma adimensional es:

$$p(R, \tau) = \left( \frac{2}{\nu \pi^{1/2}} \right) \left( \frac{R^2}{\tau^2} \right) e^{-R^2 \left[ 1 + \frac{1}{\nu^2} \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \right]} L(\nu) \quad (\text{ec.29})$$

donde

$$\tau = \frac{T}{T} \quad (\text{ec.30})$$

$$R = \frac{H}{2m_0} \quad (\text{ec.31})$$

$$\frac{1}{L(\nu)} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \nu^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{ec.32})$$

$$T = \frac{m_0}{m_1} = T_{01} \quad (\text{ec.33})$$

y su forma dimensional es

$$p(H, T) = \left( \frac{H^2 T}{8\nu \cdot 2\pi m_0^{2/3} T^2} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left[ 1 + \frac{1}{\nu^2} \left( 1 - \frac{T}{T} \right)^2 \right]} L(\nu) \quad (\text{ec.34})$$

### III.4 Distribuciones de períodos de ola.

Estas distribuciones se derivan de las distribuciones conjuntas de período y altura de ola, por lo que lo descrito anteriormente para cada una de ellas es igualmente válido para las siguientes expresiones.

#### III.4.1 Distribución de Bretschneider(1959)

Esta distribución fue encontrada por Bretschneider a partir de la ecuación de Rayleigh, aplicando ésta al cuadrado de los períodos, queda expresada en su forma matemática por medio de la siguiente ecuación:

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} e^{-0.675 \left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4} \quad (\text{ec.35})$$

#### III.4.2 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

$$p(T) = \frac{v^2 T_{01}^2}{2[v^2 T_{01}^2 + (T - T_{01})^2]^{3/2}} \quad (\text{ec.36})$$

#### III.4.3 Distribución Cavanié et al. (1976)

$$p(T) = \frac{\alpha^3 \beta^2 \bar{\delta}^2 T}{\bar{T}^2 \left[ \left( \frac{\bar{\delta}^2 T^2}{\bar{T}^2} - \alpha^4 \beta^2 \right) \right]^{3/2}} \quad (\text{ec.37})$$

#### III.4.4 Distribución Longuet-Higgins (1983)

$$p(T) = \frac{L(v)\bar{T}}{2vT^2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\bar{T}}{T} \right)^2 \frac{1}{v^2} \right]^{-3/2} \quad (\text{ec.38})$$

### III.5 Modelos espectrales de un estado de mar

A través del análisis de una numerosa cantidad de espectros de oleaje, se ha encontrado que presentan características similares que pueden ser relacionadas mediante el empleo de parámetros físicos, como son la velocidad e intensidad del viento así como el fetch.

Las formas de un espectro de un estado de mar varían considerablemente dependiendo, como ya se ha dicho, de muchos factores, sin embargo, la forma del mismo no es arbitraria ya que existen muchas propiedades físicas del oleaje que están representadas en él. Como se puede observar en la figura propuesta por Le Mehauté (1976), a través de un análisis en el dominio de la frecuencia pueden ser identificados todos los tipos de olas que se generan en el océano, debido a que el rango de la frecuencia está íntimamente relacionado con las fuerzas generadoras exteriores. En dicha figura se puede identificar un enorme rango de longitudes y períodos de ola asociados a distintos tipos de oleaje, desde olas capilares con períodos menores a un segundo, hasta variaciones de marea con períodos del orden de horas e incluso días.

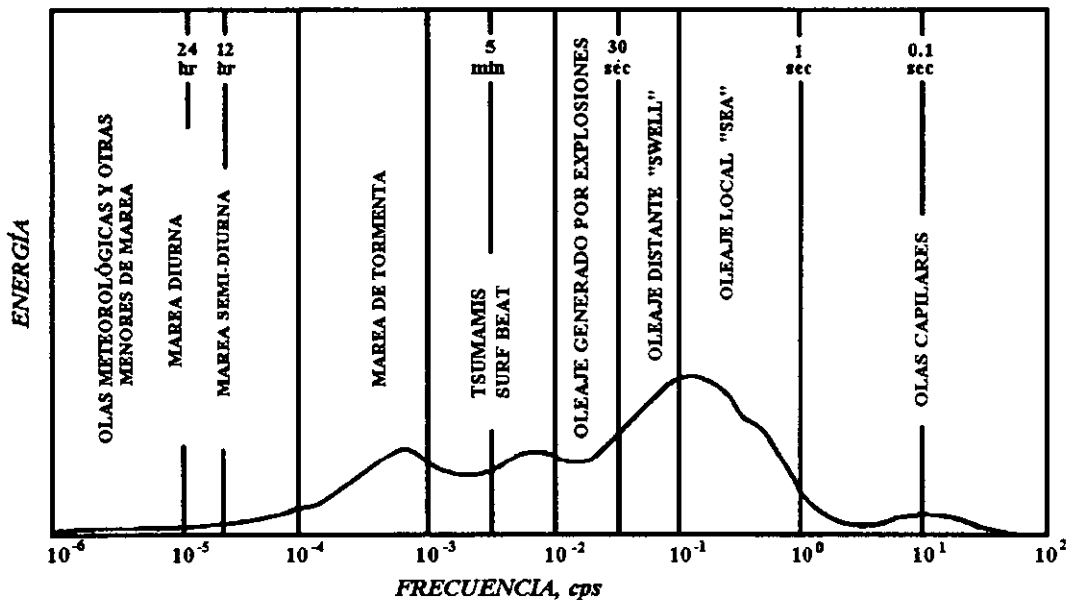


Figura 3.1 Esquema de la distribución de la energía del oleaje en frecuencias

Un espectro de oleaje puede ser generado sintéticamente, por medio de los parámetros que caracterizan su generación. Los modelos espectrales están basados generalmente en uno o más parámetros. A continuación se describen los modelos más comunes para este propósito.

### III.5.1 Estado de saturación

La superficie del océano se encuentra siempre sometida a la acción del viento, por tanto sería posible pensar, que el oleaje debe aprovechar la energía de manera infinita. Si se acepta lo anterior, parecería evidente que el fenómeno crecería de manera indefinida. Sin embargo, se sabe que el crecimiento de las olas bajo la influencia del viento no es infinito. La energía proporcionada por el viento está balanceada por la disipación de energía y por las interacciones del oleaje, el cual transfiere energía de una frecuencia dada a otras. En aguas profundas, la disipación toma la forma de "white caps" de menor escala que la

longitud de onda. Dicho fenómeno sucede cuando dos crestas son superpuestas o cuando ondas más cortas pasan sobre ondas más largas.

El crecimiento del oleaje es también limitado por la formación de olas capilares, las cuales obtienen energía de las crestas de ondas primarias de cortante con gran curvatura (Phillips, 1977). Se hace notar que la capa superficial de corriente producida por el esfuerzo del viento incrementa la rotura de las olas produciendo una gran reducción de su amplitud.

El acontecer de cualquiera de los mecanismos anteriormente descritos es un indicador de que se ha llegado al estado de saturación de los componentes del oleaje, donde se produce un balance entre la energía suministrada por el viento y las pérdidas debidas a la disipación, dicho estado, se caracteriza porque existe un límite superior para la densidad de energía espectral.

Debido a esto, el estado de saturación debe ser exclusivamente descrito por los parámetros físicos locales que gobiernan la configuración extrema de las olas, por ejemplo, la aceleración de la gravedad ( $g$ ), la velocidad del viento sobre la superficie libre ( $U$ ), y la frecuencia local ( $f$ ).

### *III.5.2 Modelo de Phillips*

Phillips, en 1959 observó dicho estado de saturación en el espectro y al estudiar la variación de la velocidad del viento según la altura sobre la superficie del mar, determinó que el espectro puede ser definido a partir de los siguientes parámetros: la frecuencia, la gravedad, la velocidad del viento y el fetch.

Sin embargo para tomar en consideración el efecto de saturación en el espectro hizo depender a su modelo de dos parámetros:

- La velocidad al cortante del viento.
- Fetch.

El cual es expresado por:

$$S(f) = \alpha g^2 f^{-5} (2\pi)^{-4} \quad (\text{ec.39})$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\alpha$  depende del fetch y del viento.

### *III.5.3 Espectro Zaslavavskii - Zakarov'*

En 1982 Zaslavavskii y Zakharov propusieron una forma para calcular el espectro en la que el coeficiente  $\alpha$  es constante y no depende del crecimiento del oleaje, ya que cambian la potencia de la frecuencia dada por la ecuación de Phillips (-5) a (-11/3), lo que compensa la

dependencia del parámetro  $\alpha$  de un fetch no dimensional. Dicha expresión se basa en el espectro de Kolmogorov, en el cual juega un papel fundamental el vector normal  $N$  que tiene en cuenta el cambio máximo de la dirección de propagación del oleaje.

$$\bar{S}(\bar{f}) = \alpha_0 \bar{f}^{-11/3} \quad (\text{ec.40})$$

donde  $\alpha_0 = 3.4 \times 10^{-3}$ ,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $U$  es la velocidad de fricción del viento sobre la superficie del mar (cortante).

$$\bar{f} = \frac{fU}{g} \quad (\text{ec.41})$$

$$\bar{S} = \frac{Sg^3}{U^5} \quad (\text{ec.42})$$

### III.5.4 Espectro de Kolmogorov

La expresión propuesta por Kolmogorov para definir al espectro en su forma dimensional, esta dada por:

$$S(f) = g^2 f^{-5} \phi(f, p, g) \quad (\text{ec.43})$$

donde  $p = \frac{dN}{dt}$  y esta definida como flujo de la acción del oleaje y

$$\phi(f, p, g) = 2\beta_z p^{1/3} g^{-2/3} f^{4/3} H_1\left(\frac{f}{f_p}\right) \quad (\text{ec.44})$$

donde  $H_1$  es conocida como función de Heaviside tal que  $H_1\left(\frac{f}{f_p}\right) \rightarrow 0$  para  $\frac{f}{f_p} \ll 1$  y

$H_1\left(\frac{f}{f_p}\right) \rightarrow 1$  para  $\frac{f}{f_p} \gg 1$ . Lo que trae como consecuencia una acumulación de energía en la vecindad del máximo espectral.

La forma adimensional del espectro de Kolmogorov esta dada por:

$$\bar{S}(\bar{f}) = 2\beta_z \bar{p}^{-1/3} \bar{f}^{-11/3} \quad (\text{ec.45})$$

donde  $\bar{f} = \frac{fU}{g}$ ,  $\bar{S} = \frac{Sg^3}{U^5}$ ,  $\bar{p} = \frac{pg^2}{U^4}$  y  $\beta_z \approx 0.83$

### III.5.5 Espectro de Toba

En 1973 Toba encontró de forma empírica que la mejor aproximación a los datos de su túnel de viento, eran proporcionados por la función espectral dada por:

$$S(f) = \beta u_* g f^{-4} \quad (\text{ec.46})$$

donde a partir de los datos de laboratorio se sabe que  $\beta = 0.02$

### III.5.6 Espectro de Neumann

En 1953 Neumann desarrollo un modelo espectral analítico que fue el primero en ser usado para el diseño ingenieril, éste es función de la velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar,  $U_{10}$ , y queda expresado como:

$$S(f) = 1.466 H_{m_0}^2 \frac{f_p^5}{f^6} \exp \left[ -3 \left( \frac{f}{f_p} \right)^{-2} \right] \quad (\text{ec.47})$$

donde  $H_{m_0}$ , es la altura de ola del momento de orden cero, la cual es aproximadamente iguala ala altura de ola significativa,  $H_s \approx H_{m_0} = 4 \sqrt{m_0}$ .

$f_p$ , es la frecuencia pico que puede ser obtenida a través de la siguiente expresión:

$$f_p = \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{g}{\pi U_{10}} \quad (\text{ec.48})$$

### III.5.7 Espectro Pierson - Moskowitz

En 1964, Pierson y Moskowitz estudiaron los espectros de oleaje del Atlántico Norte y desarrollaron una expresión que representa estados de mar completamente desarrollados generados por el viento. Es decir, su modelo no depende del fetch, sino únicamente de la velocidad del viento.

La expresión propuesta para generar el espectro es la siguiente:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-0.24(2\pi U_{19.5} f / g)^4} \quad (\text{ec.49})$$

donde  $U_{19.5}$  es la velocidad del viento a 19.5 metros sobre la superficie del mar.

Si se emplea al frecuencia pico queda representada por:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left( \frac{f_p}{f} \right)^4} \quad (\text{ec.50})$$

### III.5.8 Espectro de Bretschneider

Si se supone que el espectro es de banda estrecha y las alturas de ola individuales y períodos siguen una distribución tipo Rayleigh, Bretschneider obtuvo la siguiente expresión para su modelo espectral:

$$S(f) = 0.128 H_s^2 \frac{f_s^4}{f^5} \exp \left[ -0.675 \left( \frac{f_s}{f} \right)^4 \right] \quad (\text{ec.51})$$

donde  $f_s = 1 / T_s$ .

De dicho modelo es posible deducir que:

$$T_s = 0.946 T_p \quad (\text{ec.52})$$

$$f_p = 0.00408 \frac{g}{H_s} \quad (\text{ec.53})$$

donde  $T_p$  es el período pico espectral. Esta expresión hace que este modelo sea igual al propuesto por Pierson y Moskowitz.

### III.5.9 Espectro ISSC

En el congreso "International Ship Structures Congress" de 1964 se sugirió una ligera modificación a la forma del espectro proporcionado por Bretschneider:

$$S(f) = 0.1107 H_s^2 \frac{\bar{f}^4}{f^5} \exp \left[ -0.4427 \left( \frac{f_s}{f} \right)^4 \right] \quad (\text{ec.54})$$

La relación entre la frecuencia de pico,  $f_p$ , y la frecuencia media  $\bar{f}$  para el espectro ISSC es:

$$\bar{f} = 1.296 f_p \quad (\text{ec.55})$$

### III.5.10 Espectro ITTC



En el congreso "International Towing Tank Conference", 1966, 1969 y 1972) se propusieron cambios al espectro de Pierson y Moskowitz en términos de la altura de ola significativa y al frecuencia media,  $f_z = 1 / T_{02}$ .

$$S(f) = 1.272 m_0 f_z^4 f^{-5} \exp \left[ -0.318 \left( \frac{f_z}{f} \right)^4 \right] \quad (\text{ec.56})$$

### III.5.11 Espectro JONSWAP

En 1973 Hasselman y otros proponen el espectro JONSWAP, el cual fue generado con datos tomados a finales de la década de los sesenta por un proyecto de medición de oleaje conocido como JONSWAP por sus siglas en inglés (Joint North Sea Wave Project).

Este espectro está generado para estados de mar generados por el viento, con fetch limitado y para una profundidad de agua indefinida, esta expresado por la siguiente fórmula:

$$S_J(f) = S_P(f) \phi_{PM} \left( \frac{f}{f_P} \right) \phi_J(f, f_P, \gamma, \sigma) \quad (\text{ec.57})$$

donde

$S_P(f)$  es la ecuación de Phillips dada por la (ec.39)

$\phi_{PM}(f/f_P)$  es la función de forma de Pierson-Moskowitz

$$\phi_{PM} \left( \frac{f}{f_P} \right) = e^{-\frac{5}{4} \left( \frac{f}{f_P} \right)^4} \quad (\text{ec.58})$$

$\phi_J$  es el factor de forma del espectro JONSWAP

$$\phi_J = \gamma e^{\left( \frac{-(f-f_P)^2}{2\sigma^2 f_P^2} \right)} \quad (\text{ec.59})$$

donde

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_A & f_P \leq f \\ \sigma_B & f_P > f \end{pmatrix} \quad (\text{ec.60})$$

Los valores medios de los parámetros que se utilizan para generar el espectro JONSWAP son los siguientes:

$\gamma$  conocido como el factor de forma pico del espectro es

$$\gamma = 3.30 \quad (\text{ec.61})$$

$\sigma$  representa el ancho de la base del espectro antes ( $\sigma_A$ ) y después ( $\sigma_B$ ) de la frecuencia pico.

$$\sigma_A = 0.07 \quad (\text{ec.62})$$

$$\sigma_B = 0.09$$

$\alpha$  se conoce como el factor de escala y esta asociado con la energía total del espectro. Es función directa del fetch y de la velocidad del viento, como se puede observar en las siguientes expresiones:

$$\alpha = 0.076(\bar{x})^{-0.22} \quad (\text{ec.63})$$

De igual forma se ha observado que la frecuencia pico del espectro esta relacionada también con el fetch y la velocidad del viento tal que:

$$f_p = 3.5 \left( \frac{g}{U_{10}} \right) (\bar{x})^{-0.33} \quad (\text{ec.64})$$

donde

$$\bar{x} = \frac{gx}{U_{10}^2} \quad (\text{ec.65})$$

( $x$  = Fetch)

$U_{10}$  = Velocidad del viento a 10 metros sobre la superficie.

### III.5.12 Espectro TMA

Para aguas poco profundas, Bows, Günther, Rosenthal y Vincent (1985) asumieron la validez del espectro tipo JONSWAP, expresado en función del número de onda  $k$ , e incluyeron el factor de transformación,  $\phi_k(\omega_H)$ , dado explícitamente por:

$$\phi(\omega_H) = \tanh^2(kh) \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right] \quad (\text{ec.66})$$

donde  $h$ , es la profundidad del agua y  $kh$  puede ser obtenido para  $\omega_H$  dado, por medio de

$$\omega_H = 2\pi f \left( \frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ec.67})$$

donde  $k$  y  $f$  se relacionan a partir de la relación de dispersión,

$$(2\pi f)^2 = gk \tanh kh \quad (\text{ec.68})$$

Se supone que dentro de  $\phi_k$  se encuentran implícitos varios efectos de aguas someras como la fricción de fondo, rompiente y refracción.

Adaptando el factor de transformación inicialmente introducido para aguas poco profundas, el espectro queda definido por:

$$S_{TMA} = S_J \phi(\omega_H) \quad (\text{ec.69})$$

Goda advierte que este tipo de espectro debe utilizarse con reservas, ya que esta formulado para oleaje en crecimiento en el área de generación.

### III.5.13 *Espectro de Krylov*

Krylov (1966) propuso un modelo espectral que tiene como base la frecuencia promedio, el cual queda definido por la siguiente expresión:

$$S(f) = \frac{\pi m_0}{f_0} \left( \frac{f}{f_0} \right)^{-7} e^{\left( -\frac{\pi}{4} \left( \frac{f}{f_0} \right)^4 \right)} \quad (\text{ec.70})$$

### III.5.14 *Espectro de Davidian et al.*

En 1985 Davidian et al. utilizando un procedimiento similar al de Krylov, pero utilizando la frecuencia pico llegaron al modelo dado por la siguiente expresión:

$$S(f) = \frac{6.5 m_0}{f_p} \left( \frac{f}{f_p} \right)^{-6.5} e^{-1.18 \left( \frac{f}{f_p} \right)^{3.5}} \quad (\text{ec.71})$$

### III.5.15 Espectro Wallops

En 1985 Huang et al. propusieron un modelo espectral de dos parámetros basándose en los datos del laboratorio de la NASA en Wallops Center. Queda expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$S(f) = \beta g^2 f_p^{-5} \left( \frac{f}{f_p} \right)^{-m} e^{-\frac{m}{4} \left( \frac{f}{f_p} \right)} \quad (\text{ec.72})$$

en donde  $\beta$  y  $m$  son función de la pendiente significativa  $sl$ :

$$sl = \frac{\sigma}{L} \quad (\text{ec.73})$$

### III.5.16 Espectro de Ochi-Hubble

En 1976 Ochi y Hubble desarrollaron un modelo espectral de seis parámetros que consiste de dos partes, una para componentes de energía de baja frecuencia y la otra que cubre componentes de alta frecuencia. El espectro total es expresado como la combinación lineal de ambas componentes, las cuales se expresan en términos de tres parámetros cada una, dicha combinación lineal hace posible modelar, aparentemente, casi todos los estados de mar que se presentan durante una tormenta y hace posible la representación de un doble pico espectral, por ejemplo oleaje distante (baja frecuencia), swell, y oleaje local (alta frecuencia), sea.

$$S(f) = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\left( \frac{4\lambda_j + 1}{4} (2\pi f_{0j})^4 \right)^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)} \frac{H_{sj}^2}{(2\pi f)^{4\lambda_j + 1}} \exp \left[ - \left( \frac{4\lambda_j + 1}{4} \right) \left( \frac{f_{0j}}{f} \right)^4 \right] \quad (\text{ec.74})$$

donde  $H_{s1}$ ,  $f_{01}$  y  $\lambda_1$  representan la altura de ola significativa, la frecuencia modal y el factor de forma para las componentes de baja frecuencia, mientras que  $H_{s2}$ ,  $f_{02}$  y  $\lambda_2$  corresponden a las componentes de alta frecuencia. Por tanto,  $\lambda_j$ , es el llamado parámetro de forma espectral ya que si  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 0$ , se obtiene un espectro de tipo Pierson-Moskowitz. En (ec.74) la altura de ola significativa  $H_s$  se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$H_s = \sqrt{H_{s1}^2 + H_{s2}^2} \quad (\text{ec.75})$$

Si se supone un espectro de banda estrecha, generalmente el valor de  $\lambda_1$ , es mucho mayor que el de  $\lambda_2$ . Los valores más comunes para estos parámetros son:

$$\lambda_1 = 2.72 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1.82 e^{-H_s/121.5}$$

donde  $H_s$  esta dada en metros.

### **III.5.17      *Espectro de Kitaigorodskii***

En 1961 Kitaigorodskii, presentó un modelo espectral que depende de la frecuencia y el fetch, dado por:

$$S(f) = \left( \frac{g^2}{f^5} \right) F(\bar{f}, \bar{x}) \quad (\text{ec.76})$$

donde  $\bar{f} = \frac{fu_*}{g}$ ,  $\bar{x} = \frac{gx}{u_*^2}$ ,  $u_*$  = velocidad de fricción del viento (cortante) y  $x$  = fetch.

### III.6 Comparación numérica de resultados

En esta sección se presenta una comparación entre las distribuciones teóricas presentadas anteriormente con la distribución de probabilidad de los datos medidos en campo, con el objeto de determinar cual de ellas es la que mejor los ajusta. De igual forma que en el capítulo anterior se presentan los resultados obtenidos para las señales seleccionadas que son representativas de las cuatro estaciones del año.

#### III.6.1 Invierno

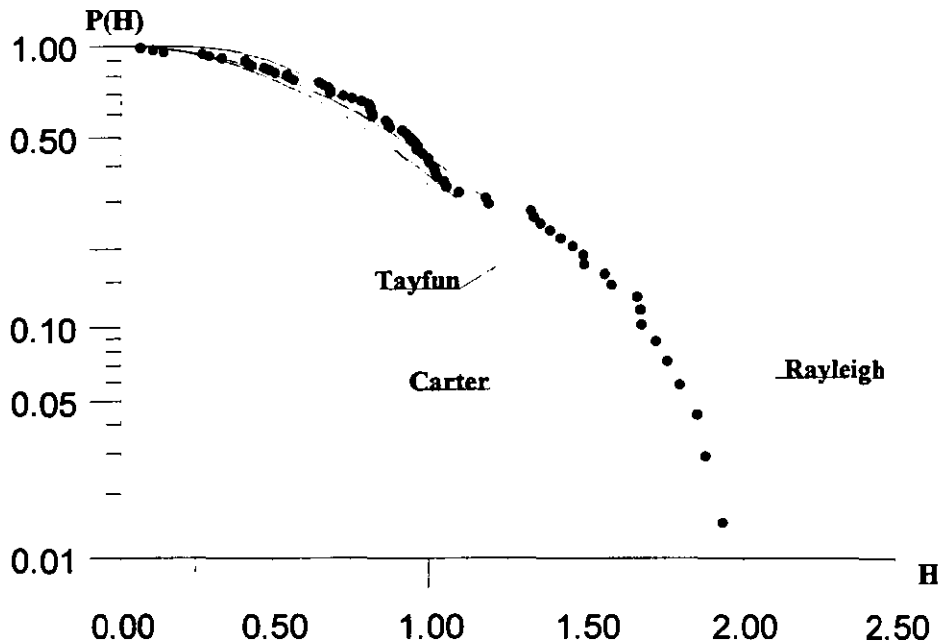


Figura 3.2 Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola

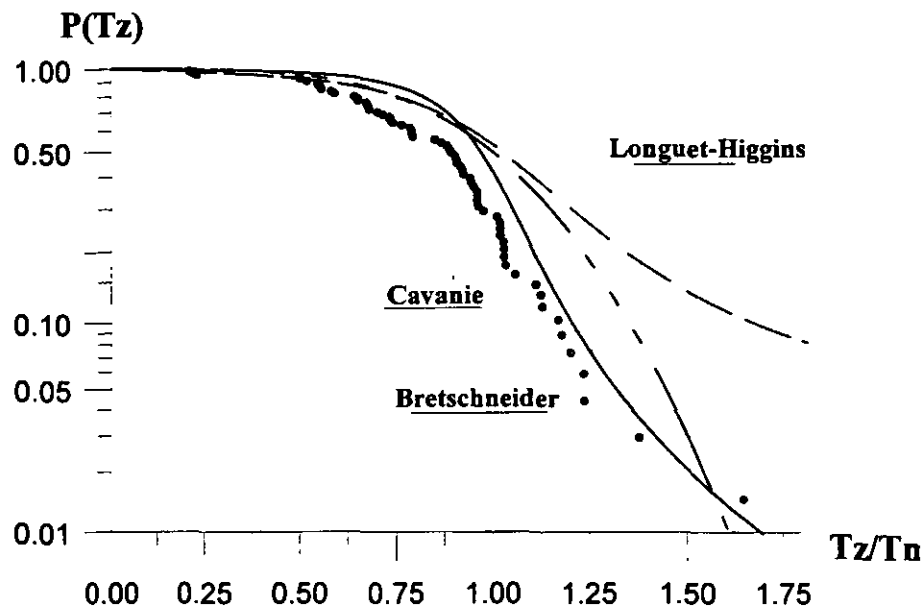


Figura 3.3 Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de período de ola.

En la figura 3.2 se presenta una comparación entre las diferentes distribuciones estadísticas teóricas de altura de ola y la probabilidad calculada para los valores de la señal. Como se puede observar la distribución de Rayleigh es la que mejor ajusta los valores y para el caso de los valores de la cola (los más altos) se tiene que incluso la distribución de Tayfun realiza un buen ajuste.

En la figura 3.3 se encuentra la comparación de distribuciones para el caso de período de ola, donde se observa que la curva descrita por la distribución de Cavanie es la que mejor ajusta los datos.

### III.6.1.1 Comparación de espectros teóricos con el espectro promedio de invierno.

Con el fin de realizar una caracterización más representativa a través de los espectros teóricos, se realizó un promedio entre todos los espectros suavizados correspondientes al análisis de las señales de oleaje del día seleccionado, ya que si se toma obtiene el espectro de sólo una señal de oleaje se corre el riesgo de cometer serios errores en la determinación del espectro teórico que mejor representa al espectro real, las señales que se utilizaron para realizar este análisis se muestran en la siguiente tabla:

Día	Hora
22.02.1998	3:00
22.02.1998	6:00
22.02.1998	9:00
22.02.1998	12:00
22.02.1998	15:00
22.02.1998	18:00
22.02.1998	21:00

Tabla 3.1 Día y hora correspondientes a los espectros promediados para el invierno.

Con el propósito de mostrar de forma gráfica este procedimiento, en la siguiente figura se presenta el espectro medido exclusivamente para la señal seleccionada que corresponde al 22 de febrero de 1998 a las 21:00 hrs.

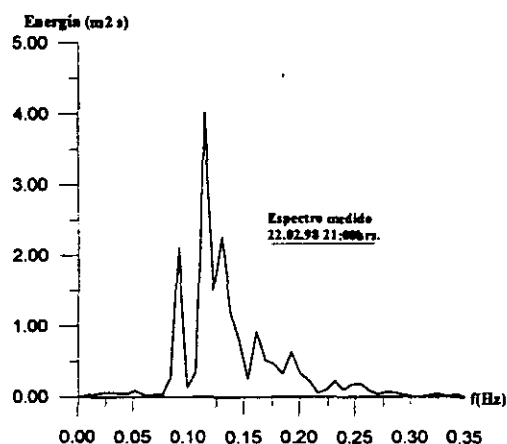


Figura 3.4 Espectro medido para la señal del 22.02.98 a las 21:00hrs.

En la siguiente figura se muestra al espectro promedio así como cada uno de los espectros correspondientes a las señales del día seleccionado.

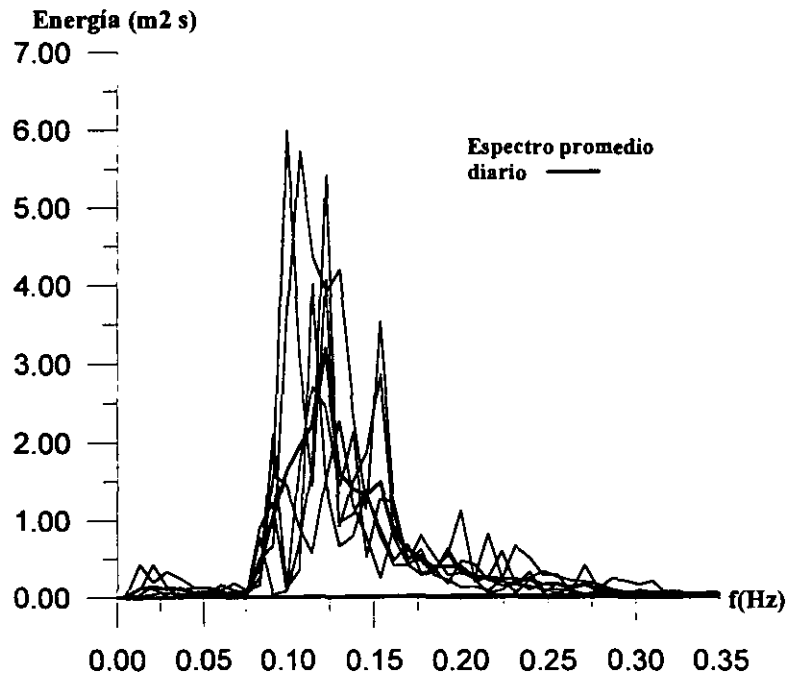


Figura 3.5 Promedio de los espectros medidos para el día 22 de febrero de 1998

Este espectro promedio se empleó para realizar la comparación con las distribuciones espectrales teóricas que dependen de la altura de ola significativa y la frecuencia pico como son:

- JONSWAP
- TMA
- Bretschneider
- ITTC
- ISSC
- Neumann
- Pierson Moskowitz



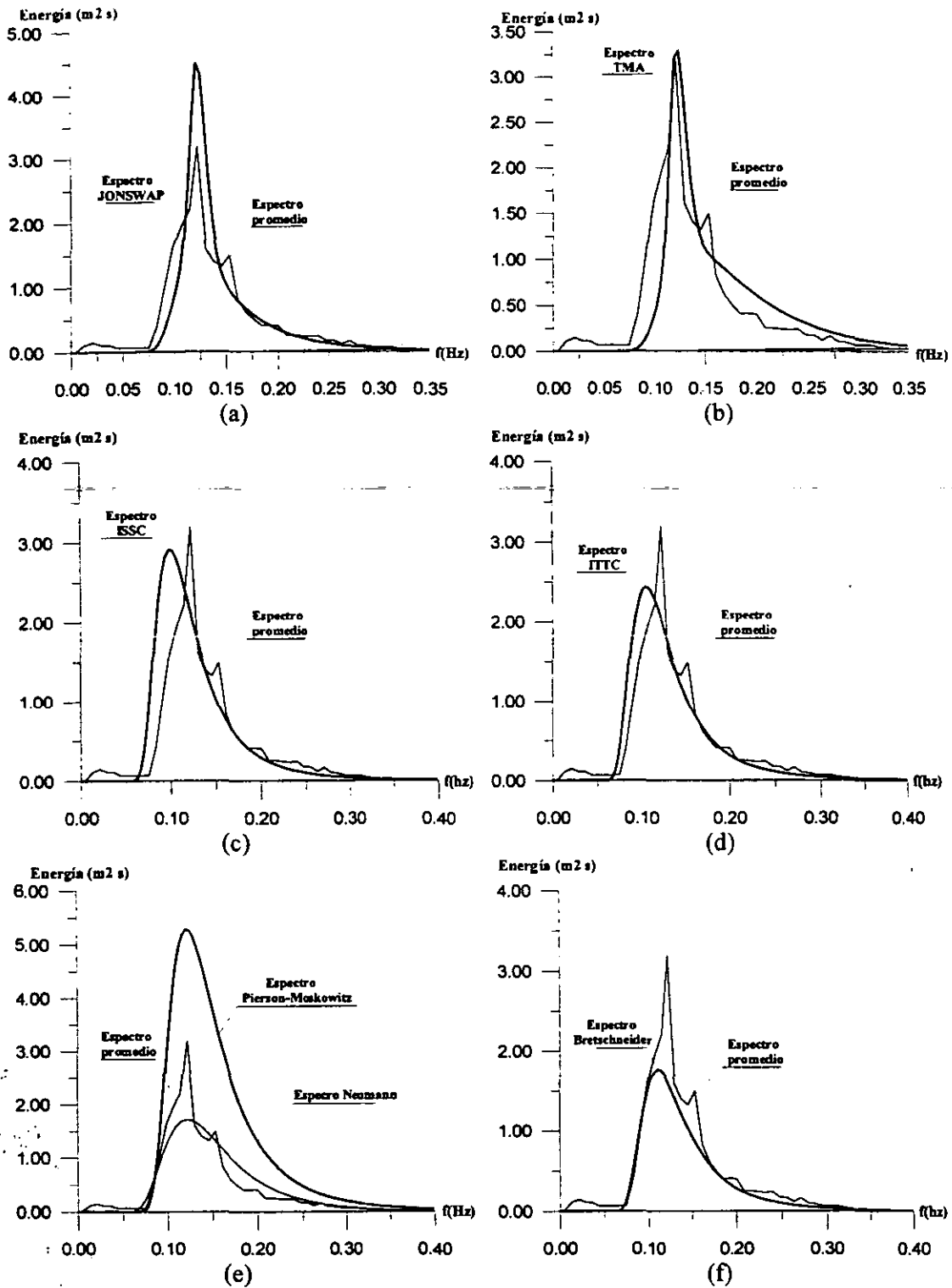


Figura 3.6(a)-(f) Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio

En la figura 3.6(a)-(f) se muestra la comparación entre diferentes espectros teóricos y el espectro promedio para la señal de invierno. El caso de los espectros que menos ajustan la

señal se muestra en la figura 3.6(e) donde se encuentra la comparación entre los espectros de Pierson-Moskowitz y Neumman con el espectro promedio, la diferencia más grande se observa en las amplitudes de los espectros, por otro lado, la frecuencia pico se encuentra bien ajustada.

En las figuras 3.6(a)-(b) se presentan los espectros que mejor representan al espectro real, en el caso del espectro JONSWAP se observa un muy buen ajuste de acuerdo a la distribución de la energía, aunque por otro lado existe una sobrestimación en su amplitud. Para el caso del espectro TMA se observa un ajuste casi perfecto a la amplitud del espectro y a la frecuencia pico, sin embargo la curva que lo define no ajusta muy bien la distribución del espectro real.

### III.6.2 Primavera

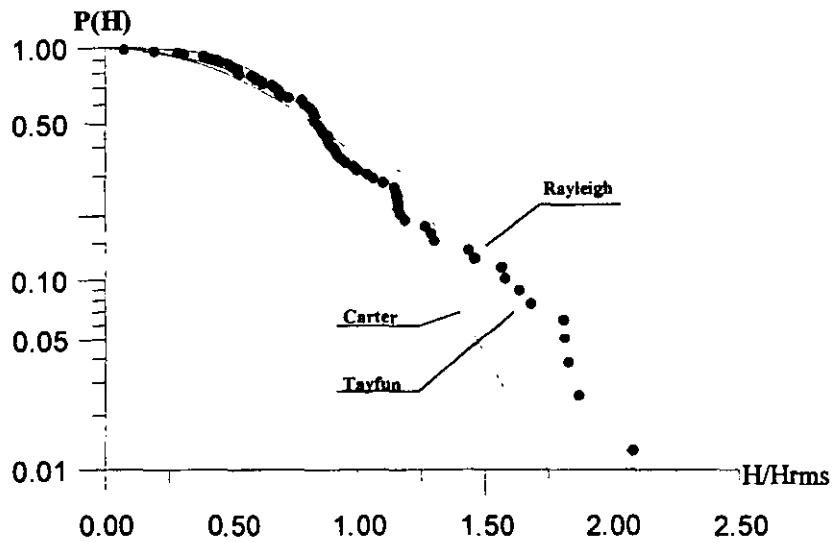


Figura 3.7 Comparación entre diferentes distribuciones teóricas de altura de ola

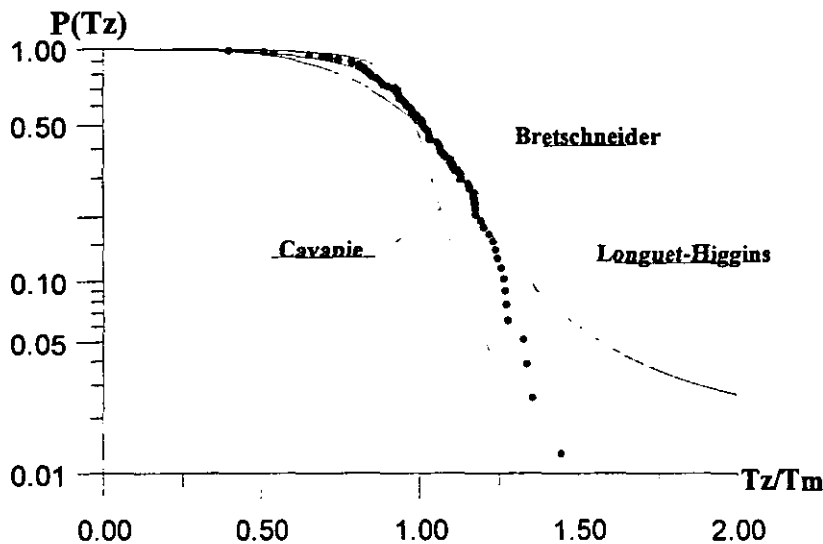


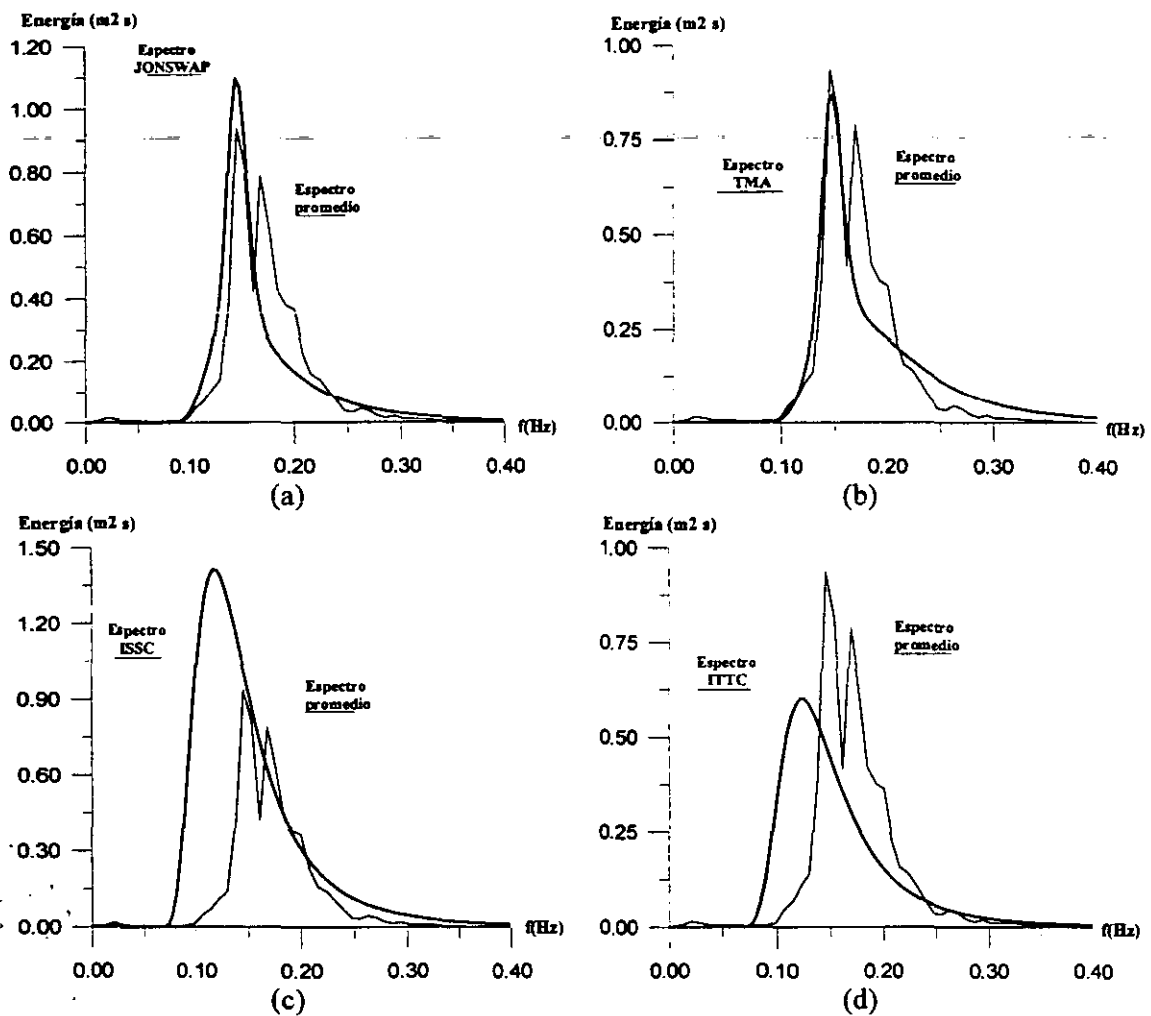
Figura 3.8 Comparación entre distribuciones teóricas y numérica de periodo de ola.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

En la figura 3.7 se muestra la comparación entre las distribuciones de altura de ola para el caso de la señal de primavera. En este caso, al igual que en el de invierno, la distribución Rayleigh presenta un buen ajuste, sin embargo además de que la distribución de Tayfun tiene una mejor aproximación para casi toda la muestra, con excepción de nueve datos antes de la cola.

En la figura 3.8 se presenta la comparación entre distribuciones de período de ola, se puede observar que la distribución que mejor ajusta los datos para el caso de primavera es la de Bretschneider.

### III.6.2.1 Comparación de espectros teóricos con el espectro promedio de primavera



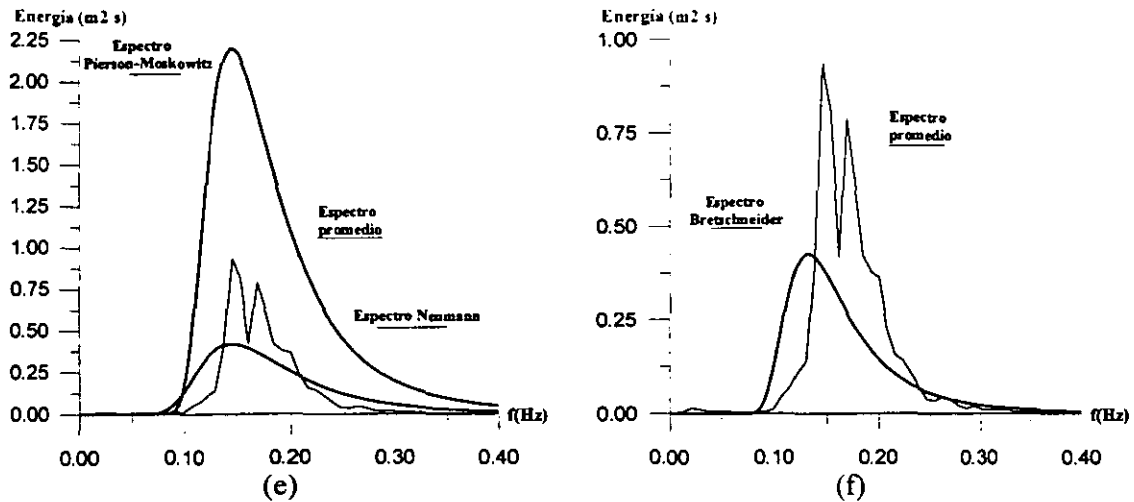


Figura 3.9(a)-(f) Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio

En las figuras 3.9(a)-(f) se muestra para el caso de primavera la comparación entre el espectro promedio y los espectros teóricos propuestos. Para este caso el espectro promedio presenta un doble pico espectral, producto de oleaje distante SWELL que se generó antes que el oleaje que produce el primer pico, esta característica hace difícil su ajuste con los modelos teóricos ya que éstos sólo toman en cuenta un pico espectral.

De igual forma que en caso de invierno los espectros TMA y JONSWAP son los que mejor ajustan amplitud y frecuencia pico.

### III.6.3 Verano

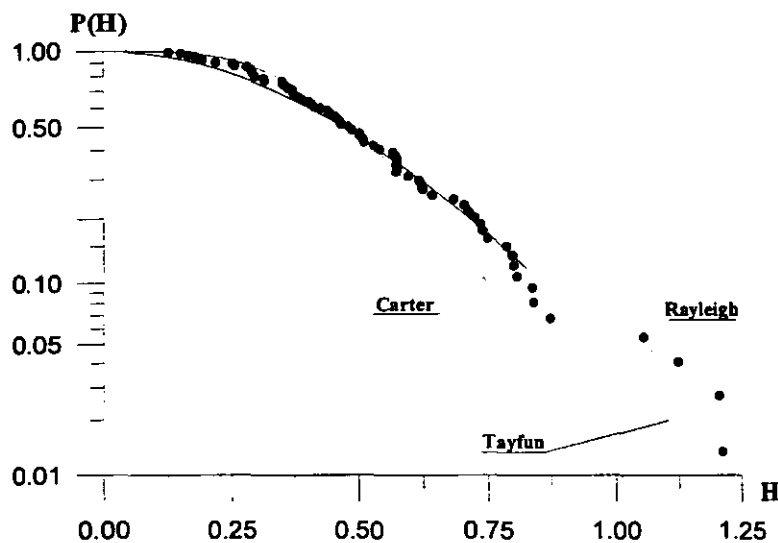


Figura 3.10 Comparación entre distribuciones teóricas de altura de ola

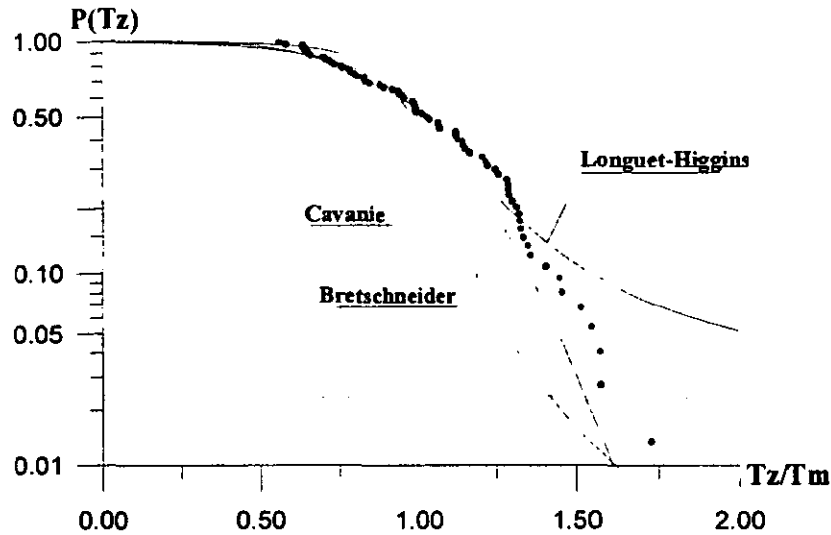
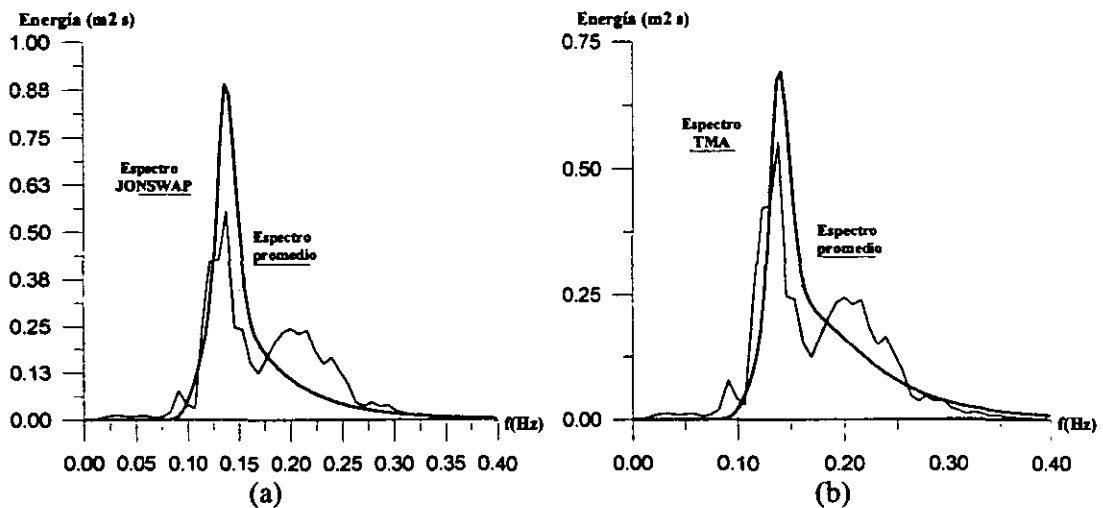


Figura 3.11 Comparación entre distribuciones teóricas y numéricas de períodos de ola

En la figura 3.10 y 3.11 se presenta la comparación entre las distribuciones teóricas de altura y períodos de ola para el caso del verano. En el caso de alturas de ola se observa que las distribuciones de Tayfun y Rayleigh ajustan bien los datos con excepción de los cuatro valores extremos en la cola.

Para el caso de períodos, la distribución de Bretschneider ajusta bien en la primera parte de los datos, sin embargo para valores de la cola final parece mejor la distribución de Longuet-Higgins.

### III.6.3.1 Comparación de espectros teóricos con el espectro promedio de verano.



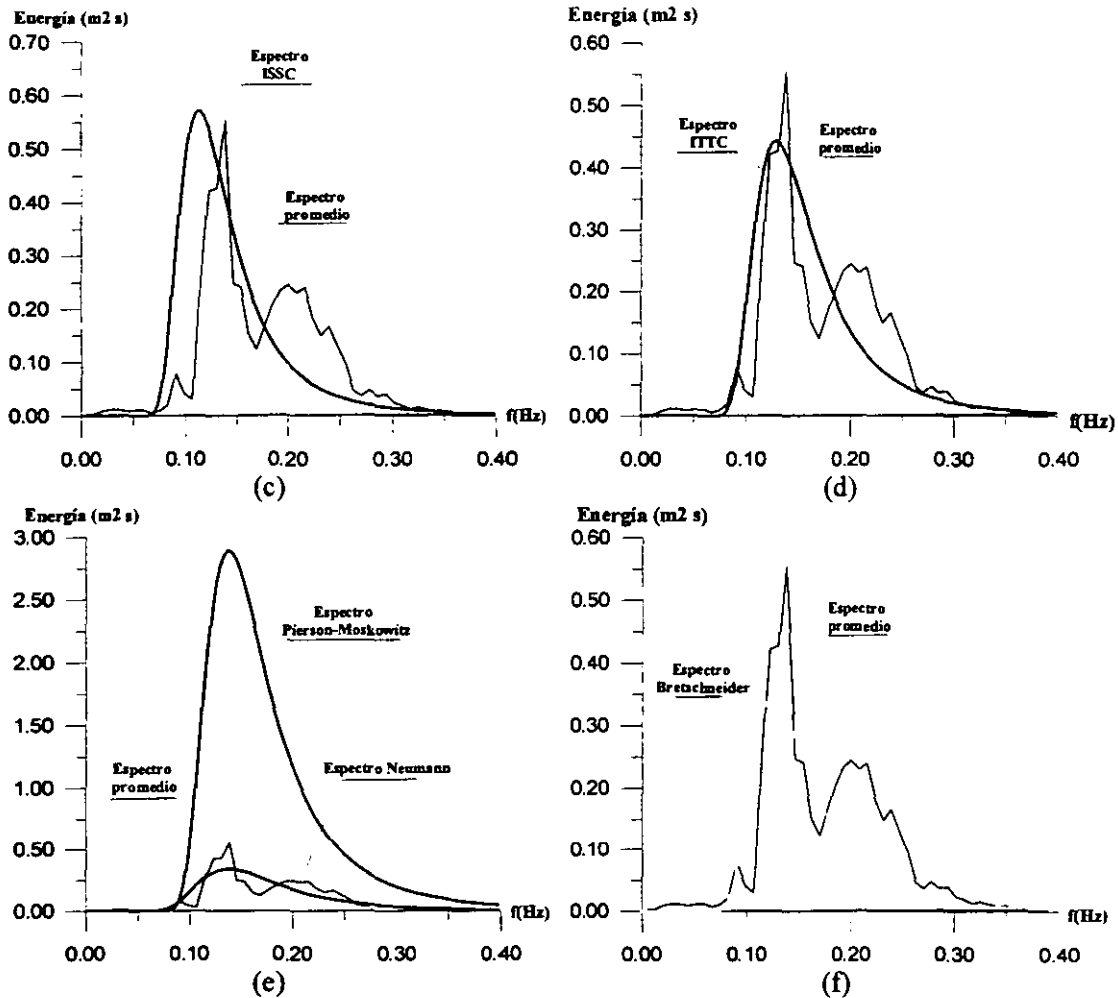


Figura 3.12(a)-(f) Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio

En las figuras 3.12(a)-(f) se presenta la comparación de espectros teóricos con el espectro promedio obtenido para el verano. Se puede observar que el espectro promedio posee características similares a las que presentó el espectro de primavera, con la diferencia de que en este caso se tiene una mayor cantidad de energía después del pico principal del espectro, para este caso se observa que no sólo los espectros TMA y JONSWAP, hacen buen ajuste sino también los espectros ITTC e ISSC.

En la figura 3.12(c) se encuentra el espectro ISSC y en ella se puede observar que éste reparte muy bien la energía además de la amplitud es muy parecida a la del espectro promedio, en la figura 3.12(d) se muestra al espectro ITTC el cual ajusta mejor la frecuencia pico que el anterior pero su amplitud difiere un poco con respecto a la del espectro promedio.

## III.6.4 Otoño

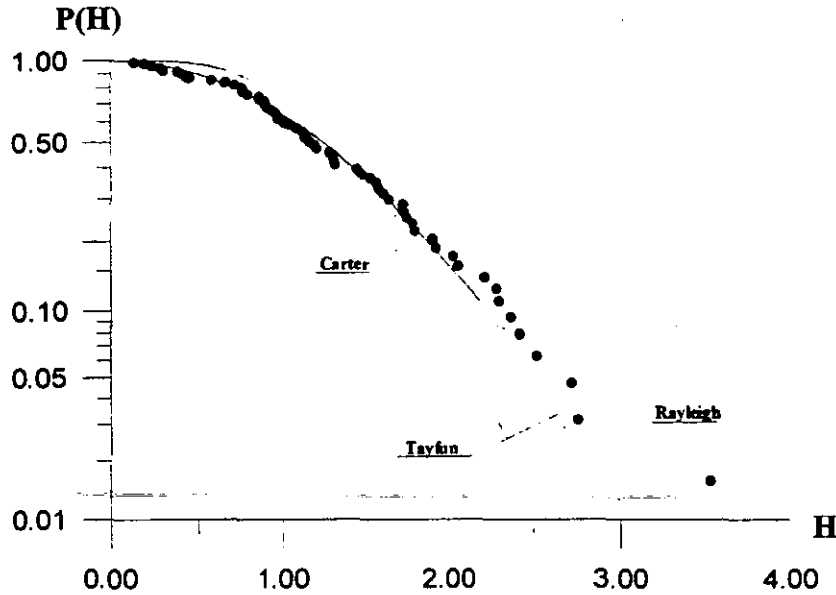


Figura 3.13 Comparación entre distribuciones teóricas y numéricas de altura de ola

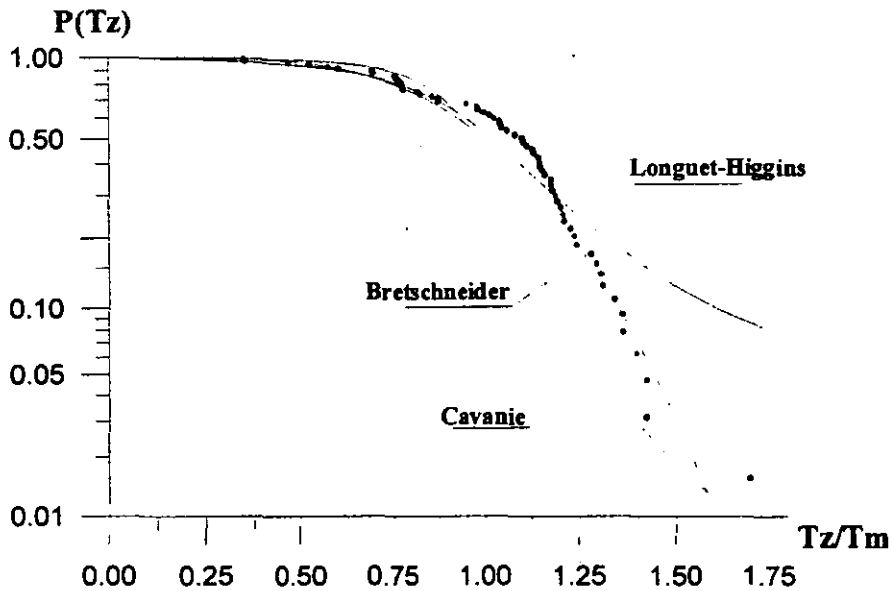


Figura 3.14 Comparación entre distribuciones teóricas y numéricas de períodos de ola

En las figuras 3.13 y 3.14 se muestran las comparaciones entre las distribuciones de altura y período de ola. En el caso de las alturas de ola se observa que las distribuciones de Tayfun y Rayleigh ajustan bien, sin embargo, para los valores de la cola superior ambas distribuciones presentan subestimación de los datos. Para los períodos de ola la distribución que mejor describe la curva que siguen los datos es la de Bretschneider.

III.6.4.1 Comparación de espectros teóricos con el espectro promedio de otoño.

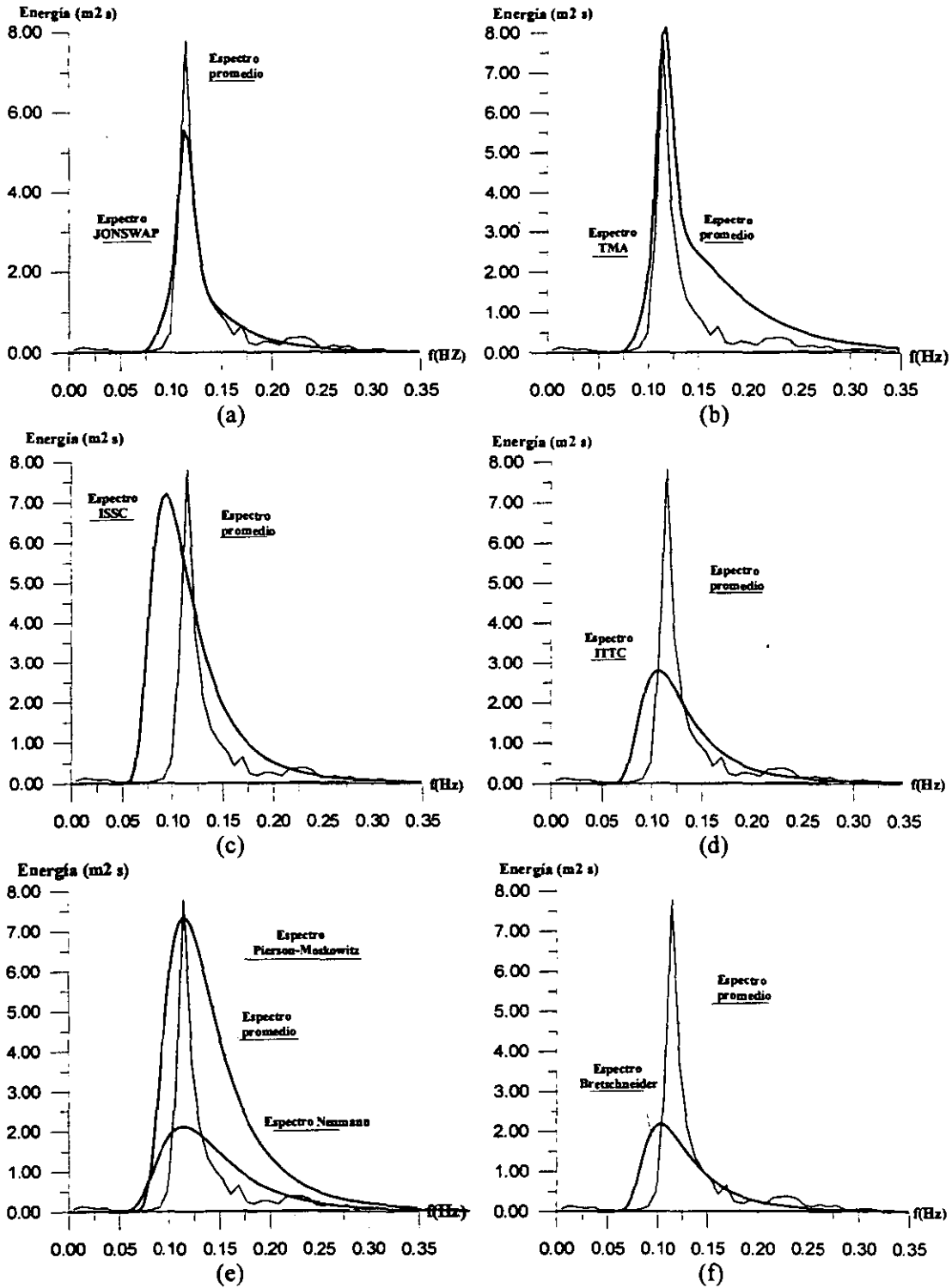


Figura 3.15(a)-(f) Comparación entre los espectros teóricos propuestos y el espectro promedio



En la figura 3.15(a)-(f) se presenta la comparación de espectros teóricos con el espectro promedio obtenido para el otoño. Para dicha estación se observa que el espectro es más uniforme con respecto al de las estaciones anteriores, para este caso los espectros teóricos que demuestran tener un buen comportamiento son una vez más, el TMA y el JONSWAP, de los cuales éste último es el que mejor ajusta la distribución de la energía en la curva.

### III.6.5 Correlaciones de alturas de ola medidas y obtenidas a partir de las diferentes distribuciones de altura de ola

Con el fin de conocer que distribución de alturas de ola representa mejor el estado de mar en las costas de Rosarito, Baja California Norte, se realizaron correlaciones entre los datos obtenidos de altura de ola máxima, altura de ola un décimo y altura de ola significativa con los proporcionados, para los mismos parámetros, por las distribuciones de altura de ola Rayleigh, Tayfun y Carter.

Este procedimiento se llevó a cabo mediante del empleo de las probabilidades de excedencia para los tres parámetros propuestos ( $H_{\max}$ ,  $H_{1/10}$  y  $H_s$ ), es decir, se obtuvieron los rangos de probabilidad que interesaban para el cálculo de la altura de ola correspondiente.

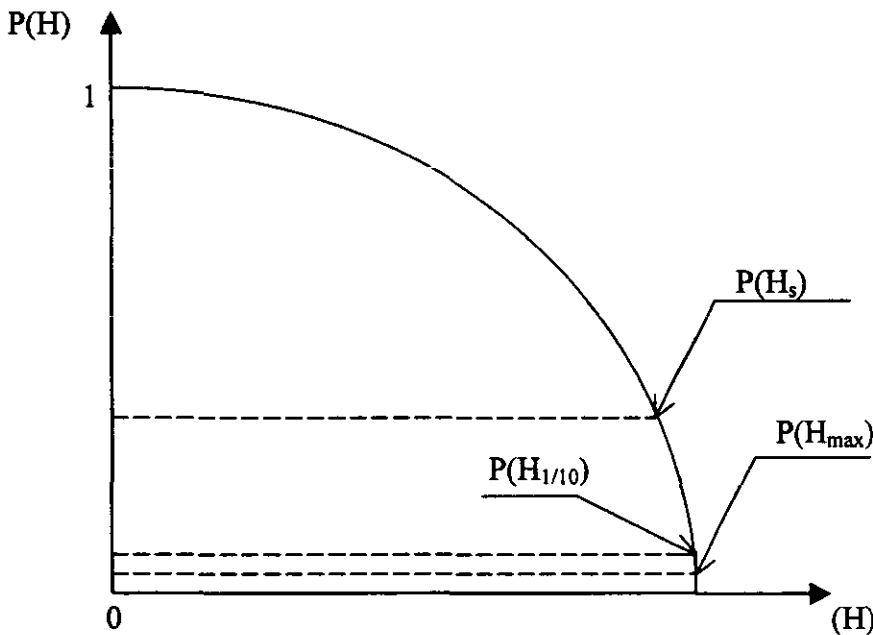


Figura 3.16 Ubicación de las probabilidades de excedencia para  $H_{\max}$ ,  $H_{1/10}$  y  $H_s$

Dichos valores de probabilidad definen intervalos que a su vez determinan un área bajo la curva de probabilidad, el procedimiento propuesto realiza una integración de dicha área mediante el empleo de diferenciales de probabilidad. A partir de que la probabilidad cae dentro del intervalo esta se va sumando para obtener la probabilidad acumulada hasta el límite superior.

Los límites superior e inferior se definen para cada caso de la siguiente forma:

- Para  $H_{max}$  el procedimiento matemático se simplifica debido a que se tiene un solo un valor que es el que corresponde a la probabilidad de excedencia dada por la siguiente ecuación:

$$P(H_{max}) = 1 - \frac{1}{N_z + 1} \quad (\text{ec.77})$$

El valor de H asociado a esta probabilidad de excedencia es el de la  $H_{max}$ .

- En el caso de  $H_{1/10}$ , se tienen los siguientes límites de probabilidad:

$$\begin{aligned} \text{Límite Superior : } P(H_{1/10}) &= 1 - \frac{N_z \cdot 10}{N_z + 1} \\ \text{Límite Inferior : } P(H_{max}) &= 1 - \frac{1}{N_z + 1} \end{aligned} \quad (\text{ec.78})$$

- Para  $H_s = H_{1/3}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Límite Superior : } P(H_{1/3}) &= 1 - \frac{N_z \cdot 3}{N_z + 1} \\ \text{Límite Inferior : } P(H_{max}) &= 1 - \frac{1}{N_z + 1} \end{aligned} \quad (\text{ec.79})$$

Así entonces para las probabilidades de  $H_{1/10}$  y  $H_s$ , el procedimiento matemático para obtener la H estimada es similar y esta en función de los límites dados por (ec.78) y (ec.79).

Dicho proceso consiste en integrar la región de la curva delimitada por estos valores, a través del uso de diferenciales. El valor estimado se define como la suma de las áreas definidas por cada diferencial entre el intervalo de probabilidad determinado por los límites de (ec.77)-(ec.79).

La comparación se realizó entre los valores estimados por las distribuciones estadísticas teóricas y todos los valores calculados del análisis estadístico temporal de las señales de oleaje correspondientes a dos años de medición.

Para mostrar de forma gráfica los resultados obtenidos se presentan a continuación las correlaciones entre éstos valores, con el propósito de observar y determinar cual de las funciones de distribución de altura de ola hace la mejor estimación.

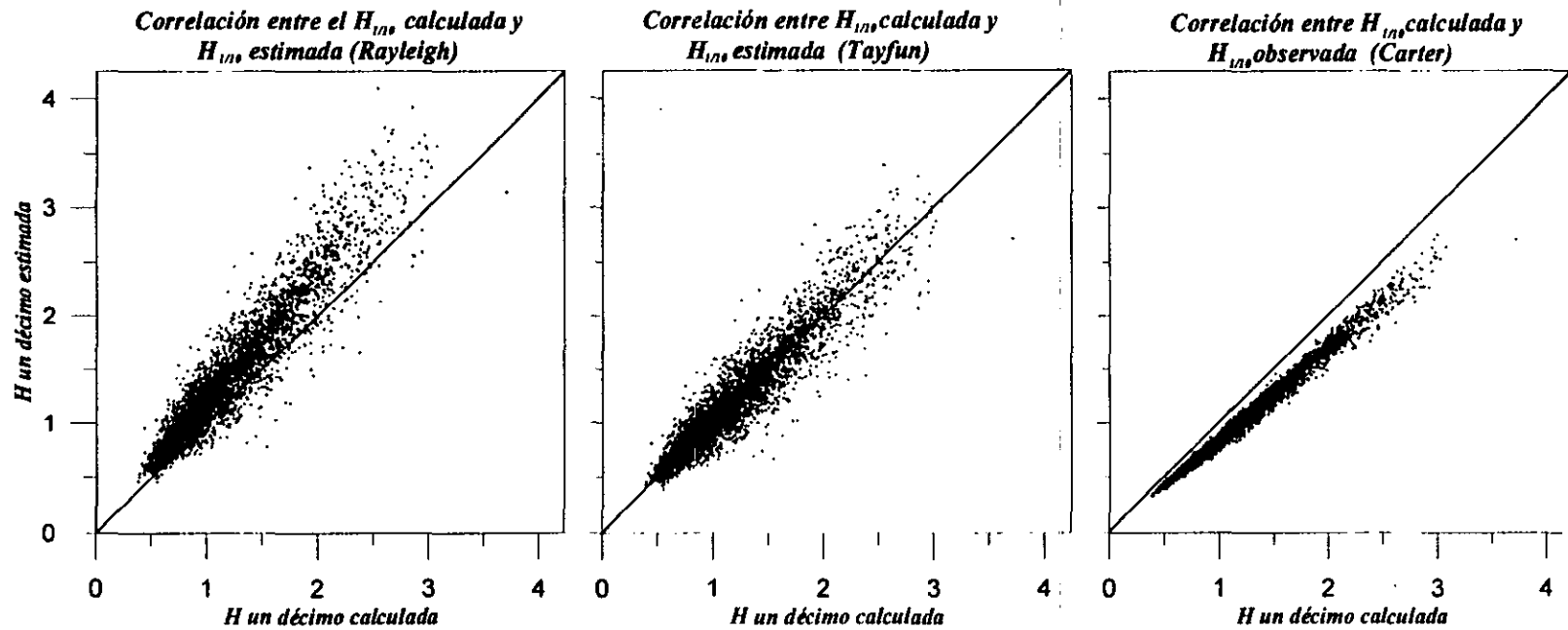


Figura 3.17 Correlación entre los valores de  $H_{1/10}$  calculados y estimados con las distribuciones teóricas.

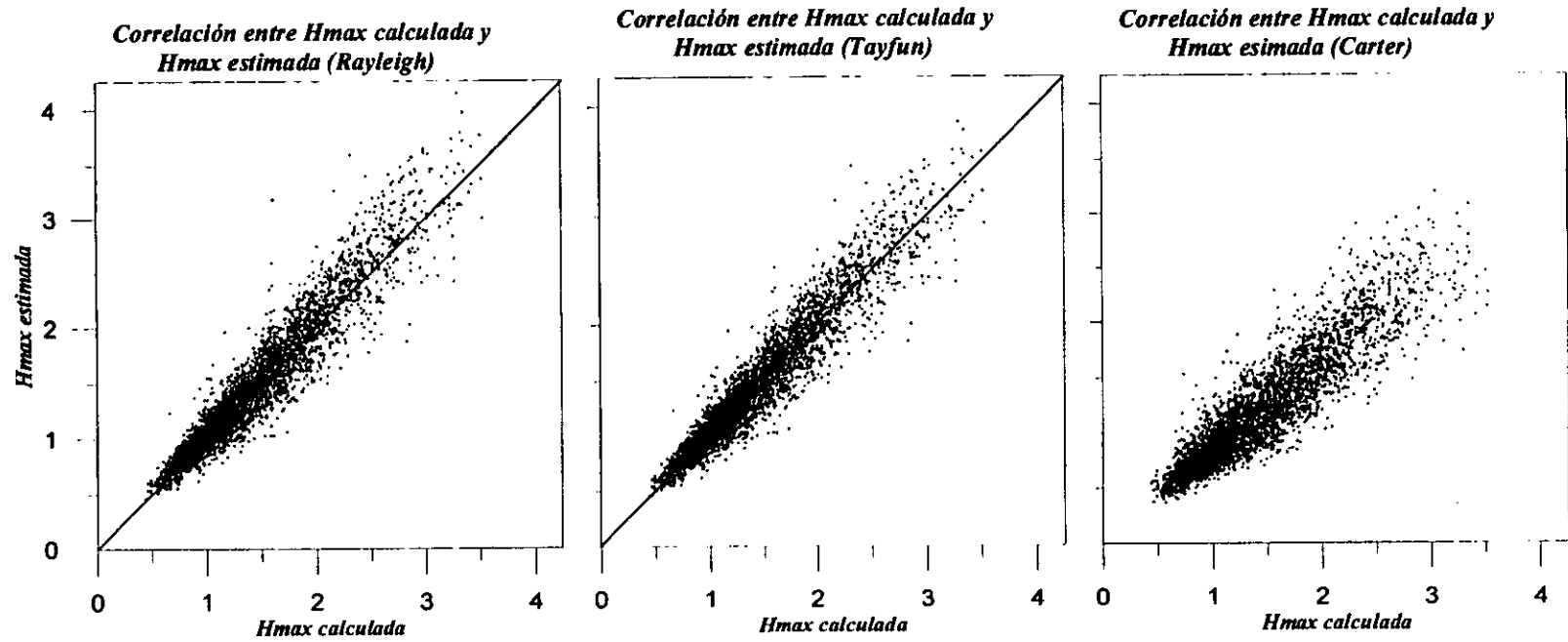


Figura 3.18 Correlación entre los valores de  $H_{\max}$  calculados y estimados con las distribuciones teóricas.

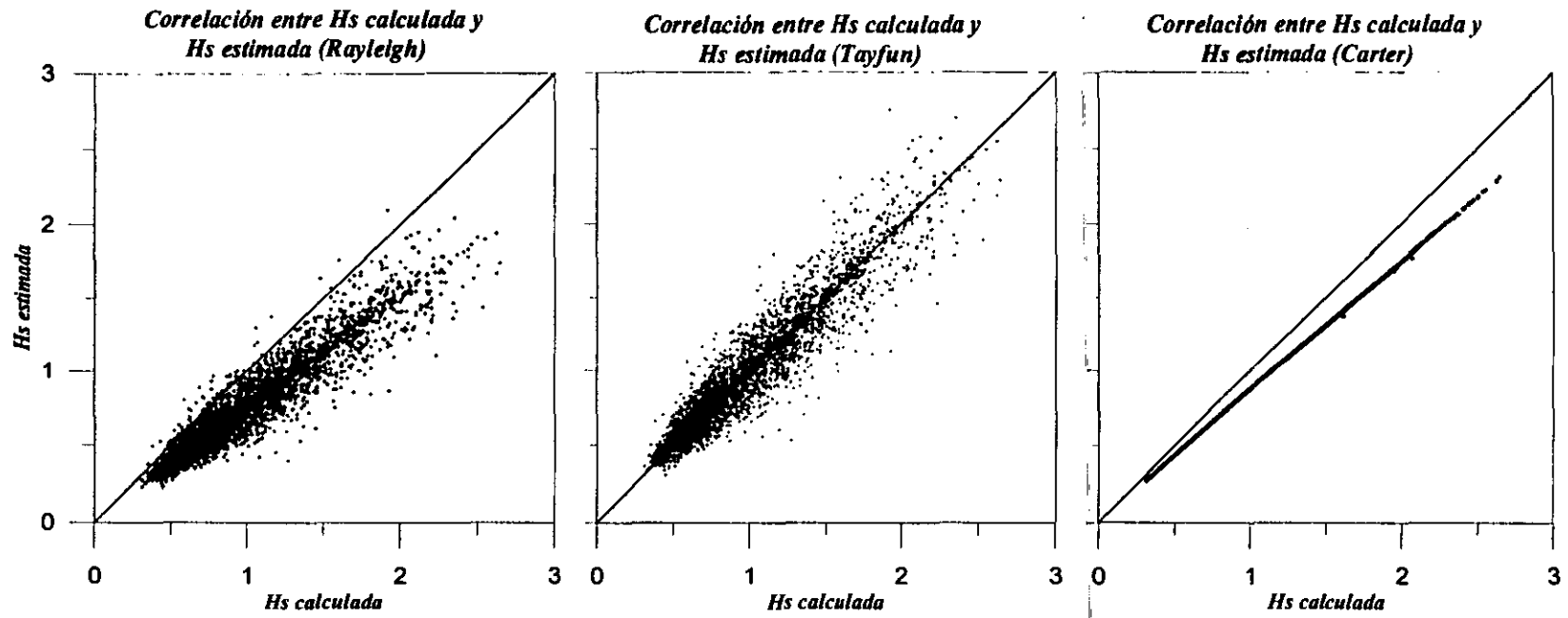


Figura 3.19 Correlación entre los valores de  $H_s$  calculados y los estimados con Rayleigh.

En la figura 3.17 se presenta la comparación entre la estimación de  $H_{1/10}$  con las diferentes distribuciones estadísticas de altura de ola y los valores obtenidos del análisis de todas las señales de oleaje, con el propósito de determinar cual de ellas es la que mejor representa el fenómeno.

Como se puede observar, para los casos de la estimación a través de las distribuciones de Rayleigh y Carter se encontró que la primera sobrestima y la segunda subestima los valores calculados, siendo la distribución de Tayfun la que mejor ajusta los datos calculados.

En la figura 3.18 se muestra la comparación entre los valores estimados por las distribuciones mencionadas anteriormente con el valor calculado de  $H_{max}$ . En este caso se puede hacer notar que las distribuciones Tayfun y Rayleigh realizaron una buena estimación, sin embargo, la distribución de Carter además de presentar una dispersión considerable subestimó el valor calculado.

En la figura 3.19 se observa que la distribución de Tayfun fue la que realizó la mejor estimación del  $H_s$  calculado.

Las hipótesis que dan fundamento a cada una de las distribuciones empleadas tienen gran influencia en la correcta estimación del valor calculado. Si se revisa la distribución de Rayleigh se encontrará que esta supone que existe una correlación perfecta entre una cresta y el siguiente valle y que la de Carter supone que no existe ninguna correlación entre crestas y valles consecutivos. Ambas hipótesis representan los límites de una gran variedad de tipos de oleaje que se pueden presentar en un estado de mar, la de Carter representa muy bien estados de mar con oleaje SEA y para el caso de oleaje SWELL la distribución de Rayleigh es la que representa mejor el fenómeno. Es posible explicar la buena estimación realizada por la distribución Tayfun a través de sus hipótesis, ya que esta considera que hay una mediana correlación entre la cresta y el siguiente valle, consecuentemente para casos intermedios en los que no se tiene un oleaje tipo SEA ni tampoco uno tipo SWELL completamente desarrollados esta distribución es la que mejor representa el estado de mar existente.

**CAPITULO IV.  
ANÁLISIS ESTADÍSTICO  
DE DATOS EXTREMOS**

*“Du vin, de poésie ou de vertu,  
mais enivrez vous”*

*Baudelaire*

## IV ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS EXTREMOS.

### IV.1 Importancia del análisis extremal en la ingeniería

Dentro de la profesión de la ingeniería civil, el éxito de un diseño depende de principalmente de la selección del método de análisis. El modelado o idealización del problema en consideración debe ser lo suficientemente simple, con una lógica irrefutable, que admita una solución matemática y al mismo tiempo, que reproduzca suficientemente bien el problema actual. Como en cualquier otra rama del conocimiento, la selección del modelo idealizado puede ser obtenida por medio de la detección y reproducción de los factores de primer orden más esenciales y descartando o rechazando lo no esencial, los factores de segundo orden. Los nuevos elementos bajo el diseño son representados por los elementos geométricos, estructurales y sociales más simples y las relaciones entre ellos son idealizadas.

En muchas situaciones, el diseño final es un compromiso entre la capacidad del elemento (resistencia, servicio, producción, etc.) y las condiciones actuales de operación (cargas actuales, tráfico, demanda, etc.). Los métodos clásicos de análisis mienten un poco acerca de las condiciones de operación de los elementos presentes. La razón más importante que sustenta lo anterior se debe a que las propiedades de los elementos y las condiciones externas son asumidas como conocidas con gran certeza. Sin embargo, todas estas propiedades están bajo la influencia de muchos factores externos que se encuentran fuera de control y que se transforman en variables aleatorias. En el diseño clásico los resultados se obtienen a partir de llevar a la falla el elemento de diseño o a partir de desperdicio de los recursos.

El objetivo de la ingeniería en el diseño de un elemento es garantizar que dicho elemento no llegara a los estados límites de falla a lo largo de su vida útil. Para ser más específicos, el elemento debe satisfacer en todo tiempo la siguiente desigualdad:

$$C_{actuales} \leq Cap.Real \quad (ec.1)$$

Donde  $C_{actuales}$  representa las condiciones actuales de operación (cargas, demandas, tráfico, etc.) y  $Cap.Real$  representa la capacidad real del elemento para ese mismo tiempo.

Se observa claramente que ambas componentes son variables aleatorias cuyas funciones de distribución pueden ser establecidas únicamente por un análisis sistemático de la historia disponible y las condiciones a las que han estado sometidos elementos similares. Afortunadamente no existe dependencia estadística de dichas variables aleatorias y sus funciones de distribución pueden ser examinadas por separado. La naturaleza aleatoria de los parámetros fundamentales de diseño es tomada en cuenta por el famoso factor de seguridad, el cual resume, de una forma simple, el carácter aleatorio de dichos parámetros. Consecuentemente las capacidades se ven disminuidas y las condiciones de operación se ven aumentadas, esto significa que bajo las técnicas clásicas de diseño la (ec.1) se ve reemplazada por:



$$C_{op} FS_o \leq \frac{Cap}{FS_c} \quad (\text{ec.2})$$

donde  $C_{op}$  representa las condiciones de operación,  $FS_o$  representa el factor de seguridad asociado a las condiciones de operación,  $Cap$  las capacidades del elemento y  $FS_c$  es el factor de seguridad asociado a las capacidades del elemento.

Sin embargo, la seguridad proporcionada por la técnica de los factores de seguridad es tan simple que se vuelve completamente insuficiente para aquellos problemas cuya solución es posible únicamente mediante el empleo de las bases de la teoría probabilística y los métodos matemáticos estadísticos.

Para lograr un comportamiento satisfactorio del elemento se debe satisfacer a lo largo de la vida útil del elemento la condición descrita por la (ec.1), debido a que muchos valores de condiciones de operación y capacidad pueden ocurrir en un tiempo dado, se propone que la condición sea:

$$\text{Max}(C_{op} - \text{Cap}) \leq 0 \quad (\text{ec.3})$$

Como se dijo anteriormente, en algunas ocasiones, esta condición se sustituye por:

$$\text{Max}(C_{op}) < \text{Min}(\text{Cap}) \quad (\text{ec.4})$$

donde  $\text{Max}(C_{op}-\text{Cap})$ ,  $\text{Max}(C_{op})$  y  $\text{Min}(\text{Cap})$  representan también variables aleatorias.

Este es el por que de la importancia del problema de la distribución de los valores extremos, de hecho, el ingeniero de diseño no esta interesado en la función de distribución de las variables aleatorias, pero si en la distribución de los valores extremos de dichas variables. Además de que estos valores son los únicos que afectan directamente la falla de cualquier sistema dado.

En muchas situaciones, el ingeniero está interesado en valores altos de la variable aleatoria que estudia. En otras palabras le preocupan sólo los valores que exceden un cierto umbral.

En el caso de la hidráulica marítima se conoce que la altura de ola es el factor principal a tomar en consideración para propósitos de diseño. De esta manera, el diseño de plataformas marítimas, rompeolas, diques y otras obras portuarias depende del conocimiento de la distribución de probabilidad de las olas más grandes. Otro problema de interés crucial en esta área es el encontrar la distribución conjunta de periodos y altura de olas, específicamente el ingeniero esta interesado en aquellos periodos que están asociados a las olas más grandes. Este es claramente un problema que entra dentro del campo de los valores extremos. El cual debe ser abordado mediante un análisis extremal.

## IV.2 Excedencias

En muchas situaciones, el ingeniero está interesado en los eventos asociados con las excedencias de ciertos valores de la variable en estudio. Por ejemplo, si una ola destruye un rompeolas, no importa si mide 10 o 12m, ya que los daños causados no están en función de su magnitud sino del hecho en sí de exceder el estado límite de falla. El ingeniero conoce cuáles son los valores críticos de una altura de ola o de la velocidad del viento y su único interés está centrado en la frecuencia con la que ocurren las excedencias de dichos límites.

Al concepto de excedencia va siempre asociado el de umbral, ya que la primera nunca se presentará si el valor de la variable en estudio no rebasa umbral definido, es decir un límite de falla.

### IV.2.1 Excedencias como un proceso Poisson

Supóngase ahora que se hace depender a la variable en estudio  $x$  del número de observaciones independientes  $n$ , de tal forma que se tenga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[1 - F(x_n)] = \tau \quad ; \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (\text{ec.5})$$

entonces, las probabilidades de las excedencias pueden ser aproximadas por un proceso Poisson y se tiene el siguiente teorema

**TEOREMA 1.**(Excedencias como un proceso Poisson).- Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función distribución de probabilidad  $F(x)$ . Supóngase que la sucesión  $\{x_n\}$  de números reales satisface la condición dada por (ec.5), entonces se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[m_n(x_n) = r] = \frac{\exp(-\tau)\tau^r}{r!} \quad ; \quad r \geq 0 \quad (\text{ec.6})$$

donde  $m_n(x_n)$  es el número de  $X_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) que excede  $x_n$  y el término de la derecha de (ec.6) debe ser tomado como 1 ó 0 para  $\tau=0$  o  $\tau=\infty$  respectivamente.

La importancia práctica de este teorema radica en el hecho de que las excedencias de sucesos raros siguen una ley de Poisson

### IV.3 Períodos de Retorno

Supóngase ahora que un determinado suceso (avenida, fallo de una presa, excedencia de una altura de ola, etc.) es tal que su probabilidad de ocurrencia en un período de tiempo (normalmente un año) es  $p$ . Supóngase también que las ocurrencias de dicho suceso en períodos diferentes no superpuestos son independientes. Entonces, al paso del tiempo se tiene una sucesión de experimentos Bernoulli idénticos (solo dos resultados: ocurrencia o no ocurrencia del suceso). Por ello, el tiempo que transcurre hasta la primera ocurrencia es una variable geométrica  $Ge(p)$ , con media  $1/p$ . Esto motiva la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 1. (Período de Retorno).**- Sea  $A$  un suceso, y  $T$  el tiempo aleatorio que transcurre entre ocurrencias sucesivas de ese suceso. Al valor medio,  $\tau$ , de la variable  $T$  se llama período de retorno  $A$  (nótese que es el tiempo medio que tarda en retornar ese suceso).

Nótese también que una obra ingenieril falla si y sólo si sucede el suceso  $A$ , entonces su vida media coincide con el período de retorno  $A$ .

La importancia del período de retorno en ingeniería está en que muchos criterios de diseño están basados en períodos de retorno, es decir, se debe diseñar una obra para resistir una media de  $N$  años (normalmente 50, 100 ó 500 años)

### IV.4 Valores característicos

#### IV.4.1 Estadísticos de orden

Las distribuciones de valores extremos no pueden ser completamente entendidas si no se establece una completa comprensión del concepto "estadístico de orden" ya que este concepto es la base sobre la cual se sustenta la teoría de dichas funciones.

**DEFINICIÓN (Estadístico de orden).**- Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  una muestra procedente de una población. Si los valores de la secuencia  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se ordenan en orden creciente de magnitud,  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ , entonces el miembro  $r$ -ésimo de esta nueva secuencia se denomina estadístico de orden  $r$  de la muestra dada.

Nótese que el tamaño de la muestra,  $n$ , se incluye en la notación  $X_{r:n}$ , y que cualquier estadístico de orden debe tener asociado un tamaño de muestra. El estadístico de orden proporciona, como su nombre lo indica, un orden a la muestra, el cual para casos de valores extremos debe ser ascendente, donde el último valor es el máximo y el primero el mínimo.

Los cuales quedan expresados respectivamente de la siguiente forma, el máximo  $X_{n:n} = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , y el mínimo  $X_{1:n} = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , que son los que pertenecen a los extremos, y juegan un papel preponderante en las aplicaciones.

#### IV.4.2 Función Distribución de probabilidad.

Sea  $x(k)$  nuestra variable de interés, entonces para cualquier valor de  $x$ , el evento aleatorio  $x(k) \leq x$  esta definido como el conjunto de posibles resultados  $k$  tal que  $x(k) \leq x$ . En términos de la probabilidad fundamental medida en el espacio muestral, se puede definir la función distribución de probabilidad  $P(x)$ , como la probabilidad que satisface la desigualdad deseada,  $x(k) \leq x$  y que es asignada al conjunto de puntos  $k$ . Así entonces:

$$P(x) = \text{Prob}[x(k) \leq x] \quad (\text{ec.7})$$

claramente

$$\begin{aligned} P(a) &\leq P(b) && \text{si } a \leq b \\ P(-\infty) &= 0 && P(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (\text{ec.8})$$

### IV.5 Casos Particulares

#### IV.5.1 Distribución de un estadístico de orden

Sea  $m_n(x)$  el número de elementos en la muestra con valores  $X_j \leq x$  y siendo éste una variable aleatoria de tipo binomial,  $B(n, F(x))$ , debido a que coincide con el número de éxitos cuando  $n$  experimentos Bernoulli independientes son repetidos. Un experimento Bernoulli consiste en dibujar un valor de la población de manera aleatoria, el cual puede ser menor o igual a  $x$  (éxito), con probabilidad  $p = F(x)$ , o mayor que  $x$  (fracaso), con probabilidad  $1-p$ . Consecuentemente la función de distribución acumulativa de  $m_n(x)$  coincide con la binomial.

Por lo tanto, el evento  $\{X_{r:n} \leq x\}$ , que representa que el  $r$ -ésimo estadístico de orden toma un valor menor o igual a  $x$ , coincide con el evento  $\{m_n(x) \geq r\}$  que corresponde a los  $r$  o más elementos con valores menores o iguales a  $x$  en la muestra.

Entonces la función de distribución,  $F_{X_{r:n}}(x)$ , del estadístico de orden  $k$  es:

$$\begin{aligned} F_{X_{r:n}}(x) &= \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} F^k(x) [1 - F(x)]^{n-k} \\ &= r \binom{n}{r} \int_0^{F(x)} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du = I_{F(x)}(r, n-r+1) \end{aligned} \quad (\text{ec.9})$$

donde  $F_{X_{r:n}}(x)$ , es la función de distribución de  $X_{r:n}$  e  $I_p(a, b)$  es la función beta incompleta (cuya definición es precisamente la expresión a su izquierda en (ec.9)).

Si la población es continua, la función de densidad de  $X_{r:n}$  es:

$$f_{X_{r:n}}(x) = r \binom{n}{r} F^{r-1}(x) [1 - F(x)]^{n-r} f(x) = \frac{F^{r-1}(x) [1 - F(x)]^{n-r} f(x)}{B(r, n-r+1)} \quad (\text{ec.10})$$

donde  $B(a,b)$  es la función beta.

#### IV.5.2 Distribución del máximo

Si se hace  $r = n$  en (ec.9) y (ec.10) se obtienen las funciones de distribución y de densidad del máximo, que son:

$$F_{X_{n:n}}(x) = F(x)^n \quad (\text{ec.11})$$

$$f_{X_{n:n}}(x) = nF^{n-1}(x)f(x) \quad (\text{ec.12})$$

#### IV.5.3 Distribución del mínimo

Si se hace  $r = 1$  en (ec.9) y (ec.10) se obtienen las funciones de distribución del mínimo que son:

$$F_{X_{1:n}}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} F^k(x) [1 - F(x)]^{n-k} = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (\text{ec.13})$$

$$f_{X_{1:n}}(x) = n[1 - F^{n-1}(x)]f(x) \quad (\text{ec.14})$$

#### IV.5.4 Puntos límite de una distribución

DEFINICIÓN .1(Límites superior e inferior de una distribución). El límite inferior,  $\alpha(F)$ , de una función de distribución acumulativa está definido por:

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \quad (\text{ec.15})$$

Similarmente, el límite superior,  $\omega(F)$ , queda definido por:

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} \quad (\text{ec.16})$$

### IV.5.5 Distribuciones asintóticas del máximo y el mínimo

Desde un punto de vista práctico, los puntos límite de una función de distribución acumulativa son los valores mínimos y máximos que están asociados a la variable aleatoria en estudio. Si la variable aleatoria no está delimitada en alguna o ambas de sus colas éstas se transforman en  $-\infty$  y  $+\infty$  respectivamente.

La función de distribución del máximo,  $Z_n$ , y del mínimo,  $W_n$ , de una muestra de tamaño  $n$  procedente de una población con función de distribución  $F(x)$  son:

$$H_n(x) = P[Z_n \leq x] = F^n(x) \quad (\text{ec.17})$$

y

$$L_n(x) = P[W_n \leq x] = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (\text{ec.18})$$

La estructura de estas dos funciones muestra que los percentiles de máximos y mínimos se mueven hacia la derecha y la izquierda, respectivamente, si se incrementa  $n$ , aproximando los límites superior e inferior a infinito se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(x) = 1 \\ 0 & \text{si } F(x) < 1 \end{cases} \quad (\text{ec.19})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - [1 - F_n(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) = 0 \\ 1 & \text{si } F(x) \leq 1 \end{cases} \quad (\text{ec.10})$$

Esto significa que las distribuciones límite toman exclusivamente valores de 0 y 1, son degeneradas.

Con objeto de evitar la degeneración se buscan transformaciones lineales  $Y = a_n + b_n x$  donde  $a_n$  y  $b_n$  son constantes, que dependen de  $n$ , y tales que las distribuciones límite no degeneren

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(a_n + b_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n + b_n x) = H(x) \quad ; \quad \forall x \quad (\text{ec.11})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n + d_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - [1 - F_n(c_n + d_n x)]^n = L(x) \quad ; \quad \forall x \quad (\text{ec.12})$$

## IV.6 Dominios de atracción

**DEFINICIÓN .2**(Dominio de atracción de una distribución). De una distribución,  $F(x)$ , se dice que pertenece al dominio de atracción para máximos de una distribución dada,  $H(x)$ , cuando satisface (ec.11) para algunas sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n > 0\}$ . De la misma forma cuando  $F(x)$  satisface (ec.12) se dice que pertenece al dominio de atracción para mínimos de  $L(x)$ .

El problema de las distribuciones asintóticas de extremos puede plantearse así:

1. Encontrar condiciones bajo las cuales se verifican (ec.11) y (ec.12)
2. Dar reglas para construir las sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  y  $\{d_n\}$
3. Encontrar que distribuciones pueden ocurrir como  $H(x)$  y  $L(x)$ .

### IV.6.1 Distribuciones límite y dominios de atracción

La respuesta al tercer problema planteado en la sección anterior la dan los teoremas siguientes:

**TEOREMA .2**(Distribuciones límites admisibles para máximos). Los únicos tres tipos de distribuciones no degeneradas,  $H(x)$ , que satisfacen (ec.11) son:

$$\text{FRECHET: } H_{1,c}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-c}) & \text{si } x > 0; c > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{ec.13})$$

$$\text{WEIBULL: } H_{2,c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; c < 0 \\ \exp[-(-x^{-c})] & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{ec.14})$$

$$\text{GUMBEL: } H_{3,0}(x) = \exp[\exp(-x)] \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ec.15})$$

**TEOREMA .3**(Distribuciones límites admisibles para mínimos). Los únicos tres tipos de distribuciones límites no degeneradas,  $L(x)$ , que satisfacen (ec.12) son:

$$\text{FRECHET: } L_{1,c}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{-c}) & \text{si } x < 0; c > 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{ec.16})$$

$$\text{WEIBULL: } L_{2,c}(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(-x^{-c})] & \text{si } x < 0; c < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{ec.17})$$

$$\text{GUMBEL: } L_{3,0}(x) = 1 - \exp[\exp(-x)] \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ec.18})$$

### IV.6.2 Formas de Von Mises

Las tres distribuciones límites (ec.13) a (ec.18) cuando los parámetros  $a_n$  y  $b_n$ , se pasan al miembro de la derecha pueden incluirse simultáneamente en la siguiente expresión analítica.

$$H_c(x; \lambda, \delta) = \exp \left\{ - \left[ 1 + c \left( \frac{x - \lambda}{\delta} \right) \right]^{-1/c} \right\} ; \quad 1 + c \left( \frac{x - \lambda}{\delta} \right) \geq 0 \quad (\text{ec.19})$$

que se denomina forma de Von Mises.

Para  $c > 0$ ,  $c < 0$  ó  $c = 0$  se obtienen las familias de Frechet, Weibull y Gumbel, respectivamente.

Nótese que para  $c = 0$  (ec.19) debe interpretarse en un sentido límite, es decir, para  $c = 0$  resulta

$$H_0(x; \lambda, \delta) = \exp \left[ - \exp \left( \frac{-(x - \lambda)}{\delta} \right) \right] ; \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ec.20})$$

Similarmente, las tres distribuciones límites (ec.16) a (ec.18) pueden ser incluidas en la forma de Von Mises.

$$L_c(x; \lambda, \delta) = 1 - \exp \left\{ - \left[ 1 + c \left( \frac{x - \lambda}{\delta} \right) \right]^{-1/c} \right\} ; \quad 1 + c \left( \frac{x - \lambda}{\delta} \right) \geq 0 \quad (\text{ec.21})$$

donde para  $c > 0$ ,  $c < 0$  y  $c = 0$  se obtienen las familias de Frechet, Weibull y Gumbel, respectivamente.

Para  $c = 0$  se tiene:

$$L_0(x; \lambda, \delta) = 1 - \exp \left[ - \exp \left( \frac{-(x - \lambda)}{\delta} \right) \right] ; \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ec.22})$$



### IV.6.3 Dominios de atracción de las distribuciones más comunes

DISTRIBUCIÓN	DOMINIO DE ATRACCIÓN	
	MÁXIMOS	MÍNIMOS
Normal	Gumbel	Gumbel
Exponencial	Gumbel	Weibull
Log-normal	Gumbel	Gumbel
Gamma	Gumbel	Weibull
Gumbel <sub>M</sub>	Gumbel	Gumbel
Gumbel <sub>m</sub>	Gumbel	Gumbel
Rayleigh	Gumbel	Weibull
Uniforme	Weibull	Weibull
Weibull <sub>M</sub>	Weibull	Gumbel
Weibull <sub>m</sub>	Gumbel	Weibull
Cauchy	Frechet	Frechet
Pareto	Frechet	Weibull

M = máximos

m = mínimos

Tabla 4.1 Dominios de atracción de las distribuciones más comunes

## IV.7 PAPELES PROBABILÍSTICOS

### IV.7.1 Bases Teóricas del papel probabilístico.

La idea básica del papel probabilístico asociado a una familia paramétrica de funciones de distribución, es modificar las escalas de la variable aleatoria  $X$ , y la probabilidad  $P$ , de tal manera que al graficar  $X$  contra cualquier función de distribución acumulativa (fda),  $F(x)$ , perteneciente a esa familia, aparezca como una línea recta, de tal manera que ninguna otra fda satisface esta propiedad.

Esto implica que el dibujo de cualquier fda en este papel permite decidir de todos modos si pertenece o no a esa familia y si la respuesta es afirmativa, estimar sus parámetros.

$F(x; \theta)$  es una familia paramétrica de funciones de distribución acumulativa, donde  $\theta$  es el vector parámetro. De la siguiente transformación se observa,

$$\left. \begin{array}{l} \xi = g(x) \\ \eta = h(y) \end{array} \right\} \quad (\text{ec.23})$$

semejanza con la familia de curvas dada por la ecuación

$$F(x; \theta) \tag{ec.24}$$

la cual al ser transformada por (ec.23) se convierte en una familia de líneas rectas. En particular, si  $F(x; \theta)$  se puede escribir como:

$$y = F(x; \theta) = h^{-1}(ag(x) + b) \leftrightarrow h(y) = ag(x) + b \tag{ec.25}$$

donde  $g(x)$  y  $h(y)$  son funciones y  $h(y)$  es invertible, entonces la transformación dada por la (ec.23) convierte  $y = F(x; \theta)$  en una familia de líneas rectas.

$$\eta = a\xi + b \tag{ec.26}$$

la variable  $\eta$  es la llamada variable reducida.

En la práctica no se dispone de la función de distribución empírica, como una aproximación de ella. Ahora bien debido al carácter aleatorio de las muestras, incluso en el caso de que la muestra proceda de una distribución de la familia asociada al papel probabilístico, su gráfica no será una línea recta sino una aproximación.

**IV.7.2 El problema del punteo**

Por tanto, en el papel probabilístico se representa la función de distribución empírica, que es una función que toma valores entre  $0, 1/n, \dots, 1$ . Los dos extremos 0 y 1, cuando se les aplica la transformación de escala se transforman en el caso de muchas familias en  $-\infty$  y  $\infty$ , respectivamente por lo que se hace imposible dibujarlos.

FORMULA DE PUNTEO	AUTOR
$\left( x_{(i)}, \frac{i}{n+1} \right)$	-
$\left( x_{(i)}, \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \right)$	BLOM
$\left( x_{(i)}, \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)$	HAZEN
$\left( x_{(i)}, \frac{i - 0.44}{n + 0.12} \right)$	GRINGORTEN

Tabla 4.2 Diferentes formas de punteo.

La importancia del problema de punteo fue señalada por Kimball (1960) al indicar que radicaba en el hecho de tener en mente el objetivo del papel probabilístico, el cual se encuentra generalmente incluido en alguno de los que se presentan a continuación:

1. Probar si la muestra proviene o no de una familia de distribuciones dada.
2. Para estimar los parámetros de la familia.
3. Para extrapolar de manera gráfica hacia uno de los extremos.

Este último es el objetivo más utilizado en el caso de problemas de punteo de valores extremos.

Se puede decir que la selección de la ecuación óptima para el punteo de datos depende del objetivo de la técnica con que se van a dibujar los mismos y del tipo de papel probabilístico que será utilizado.

Por otro lado, se hace interesante hacer notar que los papeles probabilísticos fueron pensados para un ajuste visual de los valores dados por la función de distribución acumulada, a una línea recta; por lo que se puede asumir que un "ajuste a ojo" de la ecuación de punteo a estos datos, es un método adecuado para la selección de la fórmula de punteo a emplear.

#### *IV.7.3 Papel probabilístico normal*

Si  $F(x; \theta)$  es la función de distribución acumulativa de una población normal, se sabe que puede ser escrita como sigue,

$$F(x; \theta) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{ec.27})$$

donde  $\theta = (\mu, \sigma)$   $\mu$  y  $\sigma$  son la media y la desviación estándar respectivamente y  $\Phi(x)$  es la función de distribución acumulativa de la población normal estándar,  $N(0,1)$ . Entonces, de acuerdo con la (ec.25) la expresión dada por la (ec.27) queda

$$\left. \begin{array}{l} \xi = g(x) = x \\ \eta = h(y) = \Phi^{-1}(y) \end{array} \right\} \quad (\text{ec.28})$$

y

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sigma} \\ b = \frac{-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} \quad (\text{ec.29})$$

La familia de líneas rectas se transforma en

$$\eta = a\xi + b = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \quad (\text{ec.30})$$

La estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  puede ser realizada después de ajustar los datos a una línea recta, se hace notar que al igualar  $\eta=0$  y  $\eta=1$  se obtiene

$$0 = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \rightarrow \xi = \mu \quad (\text{ec.31})$$

$$1 = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \rightarrow \xi = \mu + \sigma \quad (\text{ec.32})$$

Consecuentemente el valor de  $\zeta$  (o  $X$ ) correspondiente al valor de la variable reducida  $\eta=0$  es la media estimada y la diferencia entre el valor de  $\zeta$  asociado con  $\eta=1$ . En suma la media es el estimador de la desviación estándar  $\sigma$ .

#### IV.7.4 Papel probabilístico Log-normal

Este papel puede ser deducido del caso normal si tomamos en cuenta que la variable aleatoria  $X$ , siga un modelo log-normal, si  $Y=\log(X)$  sigue un modelo normal.

Consecuentemente, si la variable  $X$  es transformada a  $\log(X)$  tenemos un papel probabilístico normal. Entonces, el único cambio consiste en que la escala del eje de las abscisas se transforma a logarítmica. Si la media,  $\mu^*$ , y la desviación estándar,  $\sigma^*$ , de la distribución log-normal son requeridas se deberán emplear las siguientes ecuaciones:

$$\mu^* = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (\text{ec.33})$$

$$\sigma^2 = \exp(2\mu)\left[\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)\right] \quad (\text{ec.34})$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son los valores obtenidos y explicados para el papel probabilístico normal

#### IV.7.5 Papel probabilístico de Gumbel

La curva de la función de distribución acumulativa de la familia de Gumbel para máximos esta dada por

$$y = F(x; \lambda, \delta) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x - \lambda}{\delta}\right)\right]; \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ec.35})$$

Al tomar logaritmos dos veces de  $1/y$  se obtiene:

$$-\log \left[ \log \left( \frac{1}{y} \right) \right] = \frac{x - \lambda}{\delta}; \quad (\text{ec.36})$$

y en comparación con (ec.23) y (ec.25) se tiene

$$\begin{aligned} \xi &= g(x) = x \\ \eta &= h(y) = -\log \left[ \log \left( \frac{1}{y} \right) \right] = -\log[-\log(y)] \end{aligned} \quad (\text{ec.37})$$

y

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ b &= -\frac{\lambda}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{ec.38})$$

lo cual muestra que la transformación dada por (ec.37) convierte (ec.36) en una familia de líneas rectas, dadas por

$$\eta = a\xi + b = \frac{\xi - \lambda}{\delta} \quad (\text{ec.39})$$

La estimación de los parámetros  $\lambda$  y  $\delta$  puede ser realizada notando que para  $\eta=0$  y  $\eta=1$ , se tiene

$$0 = \xi - \lambda \rightarrow \xi = \lambda \quad (\text{ec.40})$$

$$1 = \frac{\xi - \lambda}{\delta} \rightarrow \xi = \lambda + \delta \quad (\text{ec.41})$$

La estimación de los parámetros de la distribución de Gumbel se realiza a partir de la media y la desviación estándar de la muestra, por medio del *método de momentos*, el cual propone las siguientes ecuaciones para su estimación:

$$\lambda = \bar{x} + 0.5772\delta \quad (\text{ec.42})$$

$$\delta = \frac{s_x \cdot 6}{\pi} \tag{ec.43}$$

Una vez obtenidos los valores de dichos parámetros y debido a que son producto de una muestra finita, se dibuja la función de distribución empírica que será una aproximación de la función de distribución exacta.

A continuación se presenta un ejemplo del ajuste por medio de la distribución de Gumbel a una muestra de avenidas máximas anuales en metros cúbicos por segundo medidas en una cierta sección de un río.

AVENIDAS (en m <sup>3</sup> /s)				
24.21	26.46	29.48	30.32	31.60
32.88	33.03	33.63	35.14	35.23
35.59	35.89	35.95	36.07	36.49
36.50	37.13	37.48	38.01	38.21
38.53	38.91	39.26	39.45	40.32
40.36	40.49	40.69	41.03	41.05
41.54	42.62	42.82	42.91	43.87
44.71	45.04	45.58	46.00	48.29
48.76	49.28	29.43	50.17	50.45
50.73	51.90	52.54	52.94	54.01
57.84	60.10	60.95	67.76	75.70

Tabla 4.3 Máximas avenidas anuales en una sección de río.

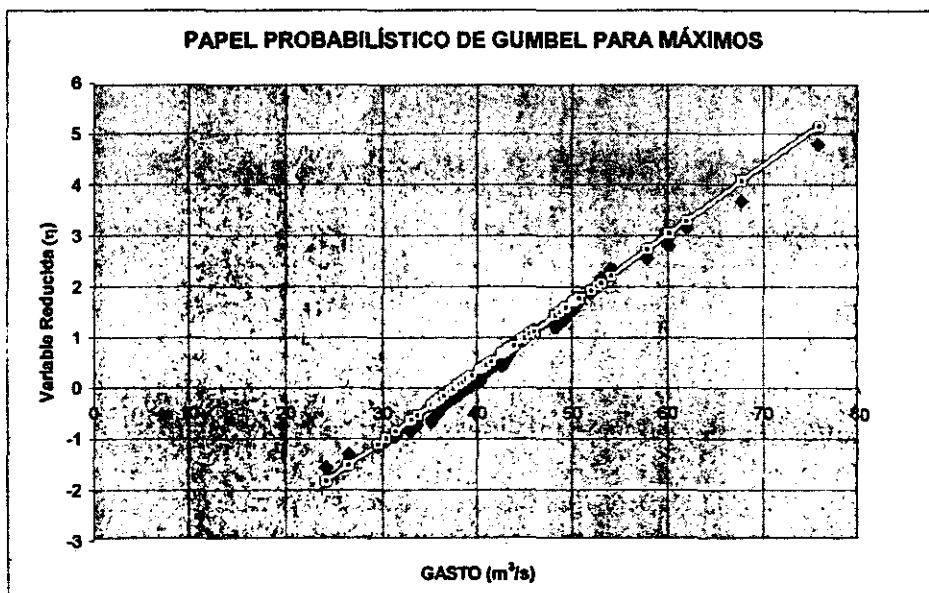


Figura 4.1 Papel probabilístico de Gumbel para máximos y datos de máximas avenidas anuales.

Al emplear el método de los momentos para la estimación de los parámetros de la distribución se obtienen los siguientes valores de los parámetros:  $\lambda=38.5 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $\delta=7.8 \text{ m}^3/\text{s}$ .

La línea recta corresponde a la (ec.39), la probabilidad de las avenidas se obtiene por medio de una ecuación de punteo y la transformación de la escala de dicha probabilidad a la de la variable reducida se realiza por medio de la (ec.37)

#### IV.7.6 Papel probabilístico de Weibull

Las curvas de distribución acumulativa de la familia de Weibull para máximos esta dada por:

$$y = F(x; \lambda, \beta, \delta) = \exp\left[-\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)^\beta\right]; \quad -\infty < x \leq \lambda \quad (\text{ec.44})$$

Al aplicar logaritmos dos veces se obtiene:

$$-\log[-\log(y)] = -\beta \log\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right) = -\beta \log(\lambda - x) + \beta \log \delta \quad (\text{ec.45})$$

y al comparar con (ec.23) y (ec.25) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \xi = g(x) &= -\log(\lambda - x) \\ \eta = h(y) &= -\log[-\log(y)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{ec.46})$$

y

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta \\ b &= \beta \log \delta \end{aligned} \right\} \quad (\text{ec.47})$$

y la familia de líneas rectas se convierte en

$$\eta = a\xi + b = \beta(\xi + \log \delta) \quad (\text{ec.48})$$

Se hace notar que la escala ( $\eta$ ) coincide con la del papel probabilístico de Gumbel pero la escala ( $\xi$ ) se encuentra en este caso en escala logarítmica en lugar de aritmética.

Se puede observar que la distribución de Weibull depende de tres parámetros, uno más que la distribución de Gumbel, éste es el parámetro umbral  $\lambda$ , que es desconocido y el cual no se puede inferir a través de fenómenos físicos, para su estimación, se recomienda graficar los datos con un parámetro umbral supuesto y observar que el ajuste de la recta a los valores de probabilidad

dados, este procedimiento se repite iterativamente hasta que el analista queda conforme con el ajuste realizado por la recta descrita por la (ec.48). Dicho punteo de datos debe ser realizado para distintos valores del parámetro umbral, hasta que la tendencia lineal que se busca es obtenida para el rango de interés.

Con el valor del parámetro umbral propuesto se procede a la estimación de los parámetros restantes  $\beta$  y  $\delta$ , se puede realizar notando que para  $\eta=0$  y  $\eta=1$ , se tiene

$$0 = \beta(\xi + \log \delta) \rightarrow \xi = -\log \delta \quad (\text{ec.49})$$

$$1 = \beta(\xi + \log \delta) \rightarrow \xi = \frac{1}{\beta} - \log \delta \quad (\text{ec.50})$$

En el desarrollo del presente trabajo se sigue el procedimiento descrito anteriormente, es decir, se propone un valor inicial del parámetro umbral y se obtienen los valores asociados de  $\beta$  y  $\delta$ , una vez obtenidos los parámetros se procede a ver que tan bueno es el ajuste de la recta con los valores de probabilidad calculados con la ecuación de punteo.

Las ecuaciones que se utilizan para la estimación de los parámetros son las correspondientes al *método de los momentos*, el cual propone que para obtener el valor de beta se utilice:

$$1 + \frac{s_x^2}{(\bar{x} - \lambda)^2} = \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \right] \quad (\text{ec.51})$$

La ecuación anterior se resuelve por aproximaciones sucesivas, posteriormente  $\delta$  se obtiene a partir de la ecuación:

$$\delta = \frac{\bar{x} - \lambda}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (\text{ec.52})$$

donde  $s_x^2$  representa la desviación estándar,  $\bar{x}$  la media de los datos y  $\Gamma(x)$  corresponde al valor de la función Gamma la cual esta dada por la ecuación:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\text{ec.53})$$

dicha integral se resuelve por medio del empleo de métodos numéricos.

El procedimiento de obtención de parámetros de la distribución de Weibull es el siguiente:



Primero se propone un valor de lambda, el cual debe de satisfacer la condición dada por la (ec.44), con dicho valor propuesto se resuelve la (ec.51) y se obtiene un valor de beta asociado, delta se obtiene en función de lambda y delta a partir de la (ec.52).

Una vez que se tienen los valores de los parámetros de la distribución se procede a dibujar la recta de la distribución por medio de la (ec.48) y se observa que tan bien se ajusta ésta a los datos asociados con su probabilidad.

#### IV.7.7 Papel probabilístico de Extremos

En el caso de valores extremos, sucede que la muestra procede de una población con función de distribución asociada a un papel probabilístico o que esta condición se satisfaga sólo asintóticamente son condiciones muy diferentes y condicionan mucho la forma de utilizar el papel probabilístico.

En el caso de problemas de valores extremos, se conoce que la muestra sigue la distribución prescrita, (la distribución con la cual el papel ha sido dibujado) sólo de manera asintótica.

Debido a que la única parte de la función de distribución que gobierna el comportamiento de los extremos (máximo o mínimo), o los estadísticos de orden alto o bajo, son las colas de distribución (derecha o izquierda, respectivamente) el resto de la información no es necesaria. Esto debe ser muy bien entendido si se quieren evitar serios errores. A este respecto debe indicarse que dos funciones de distribución acumulativa con la misma cola derecha, por ejemplo los valores en el intervalo de probabilidad (0.9,1) tienen exactamente la misma distribución extrema (máxima) y la utilización de los datos pertenecientes a la cola izquierda no hace más que distorsionar el proceso de estimación. En otras palabras, algunos puntos deben ser excluidos del procedimiento de ajuste y se deben utilizar los pesos adecuados para la estimación.

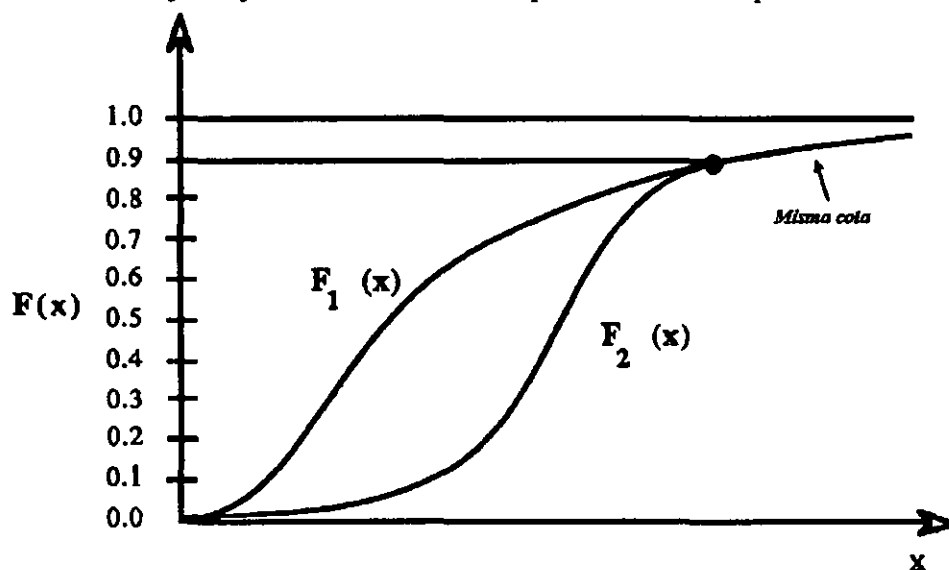


Figura 4.2 Dos distribuciones con la misma distribución límite para máximos.

**IV.7.8 Utilidad del papel de Gumbel en el caso de Máximos**

En consecuencia, el papel de Gumbel para máximos es de mucha utilidad debido a que sirve como referencia del tipo de distribución que se debe utilizar, las distribuciones tipo Weibull aparecen como curvas cóncavas, las de tipo Frechet como convexas y las de tipo Gumbel como líneas rectas.

Con objeto de ilustrar gráficamente dicha utilidad así como el papel de las colas en el comportamiento de los valores extremos de una distribución, se han dibujado en la figura 4.3 las funciones de distribución más conocidas en papel de Gumbel maximal. Nótese que por no ser ninguna de ellas una distribución de Gumbel de máximos todas exhiben no linealidad. La figura 4.3 muestra la linealidad de la cola derecha de la distribución exponencial. Esto confirma que esta distribución pertenece al dominio de atracción de Gumbel para máximos. Nótese también horizontal de éstas, respectivamente, cuando se aproximan a sus límites superiores. Esto sugiere dominios de atracción Weibull y Frechet respectivamente.

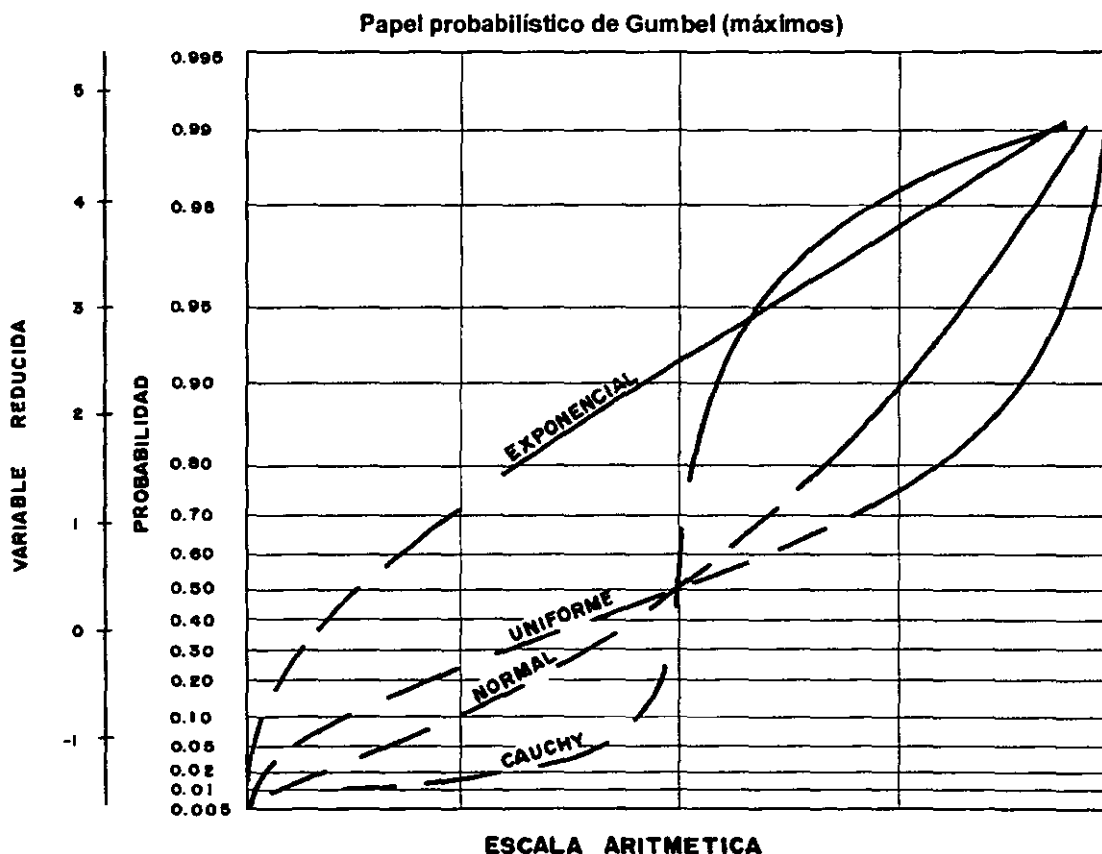


Figura 4.3 Distribución exponencial, uniforme, normal y Cauchy en papel probabilístico de Gumbel para máximos

## IV.8 Métodos utilizados en el diseño de obras marítimas

Como se mencionó al inicio de este capítulo el diseño de estructuras marítimas está gobernado por los valores extremos. En el pasado se han utilizado muchos métodos para determinar el valor de la altura de ola de diseño, sin embargo, no existe un método universal que sea aceptado por todos.

El diseño se basa en la estimación de la altura de ola asociada a un cierto período de retorno, en general la altura de ola se obtiene tras el análisis de los datos disponibles con la ayuda de estadísticos.

Algunos de los métodos utilizados son los siguientes:

- *El Método basado en los máximos de las series anuales*, que utiliza las alturas de ola máximas de cada año.
- *El método basado en los picos*, que utiliza los picos de los temporales.
- *El método basado en las series completas*, que emplea todas las olas registradas durante el período de observación,
- *El método basado en las excedencias*, que emplea todas las excedencias que excedan un cierto umbral.

## IV.9 Elección de la distribución de la altura de ola.

Las distribuciones maximales más utilizadas en el análisis de las alturas de ola son las siguientes:

### IV.9.1 La familia maximal de Gumbel

$$F(x; \lambda, \delta) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]; \quad -\infty < x < \infty$$

El fundamento teórico de esta familia se basa en el hecho de que es una de las tres distribuciones asintóticas para máximos. La familia normal tiene como distribución asintótica la de Gumbel. Por ello, los datos que deben utilizarse para ajustar esta distribución deberán de ser alturas de ola máximas. Alternativamente, podrían utilizarse los datos de la cola derecha, es decir aquellos que excedan un cierto valor umbral.

### ***IV.9.2 La familia maximal de Weibull***

$$F(x; \lambda, \beta, \delta) = \exp\left[-\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)^\beta\right]; \quad -\infty < x \leq \lambda$$

De igual forma que con la distribución de Gumbel su fundamento teórico se basa en el hecho de que es una de las tres distribuciones asintóticas para máximos. Los datos que deben ser utilizados para ajustar esta distribución son alturas de ola máximas debido a que cualquier distribución de Gumbel puede ser aproximada tanto como se desee por una distribución de Weibull.

### ***IV.9.3 La familia maximal de Frechet***

$$F(x; \lambda, \beta, \delta) = \exp\left[-\left(\frac{x - \lambda}{\delta}\right)^\beta\right]; \quad \delta, \beta > 0 \quad ; \quad x > \lambda$$

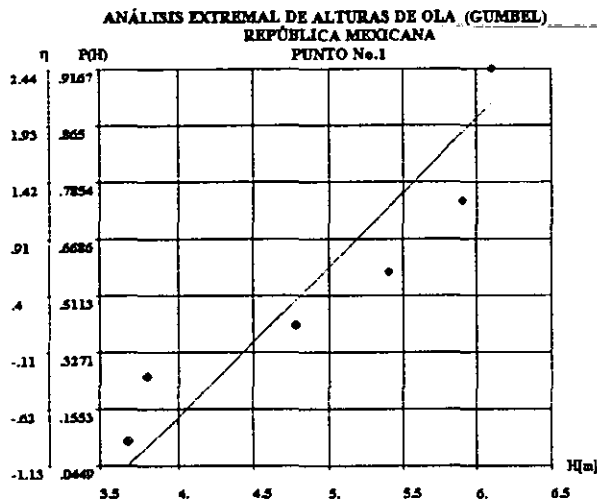
Esta distribución tiene el inconveniente de que la altura de ola no puede exceder un determinado valor, además de que no está justificada por la teoría de extremos. De hecho Goda (1988) muestra que no es adecuada por sobrestimar alturas de ola para períodos de retorno altos.

**IV.10 Caso de aplicación**

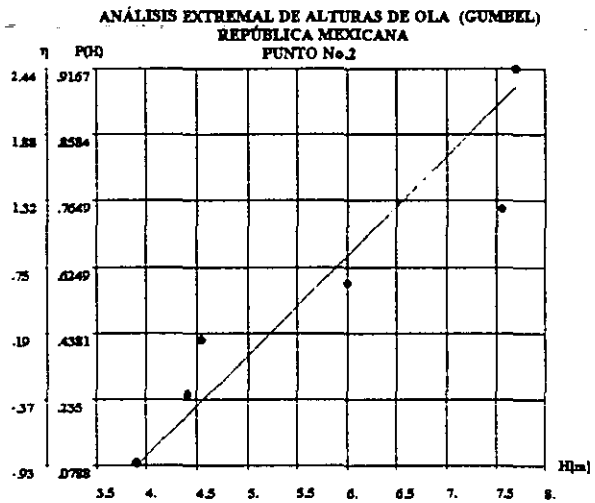
En esta sección se presenta el análisis extremal a través de la distribución de Gumbel, para valores máximos de altura de ola a lo largo del litoral mexicano, tanto en el Golfo de México como en el Océano Pacífico, pertenecientes a registros anuales del World Wave Atlas. Dicho análisis se realizó con el objeto de determinar si se puede recomendar esta distribución para su empleo en posteriores análisis de valores extremos del litoral mexicano.

En la figura 4.4 se muestra la zonificación del litoral mexicano, además de la localización de los diez puntos de control de donde se obtuvieron los valores máximos analizados.

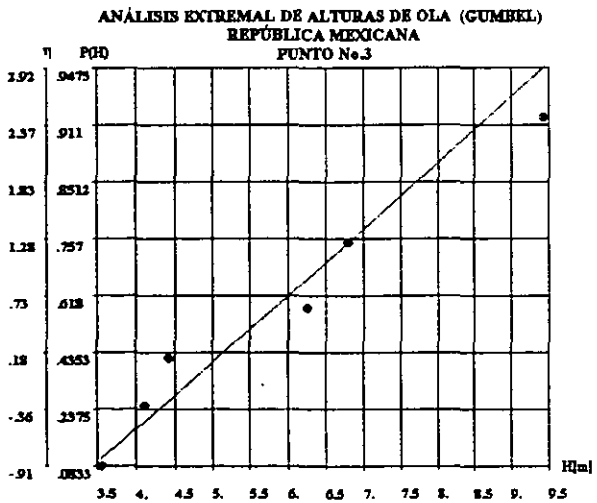
Los resultados se presentan de forma gráfica en las siguientes figuras de tal forma que se tiene:



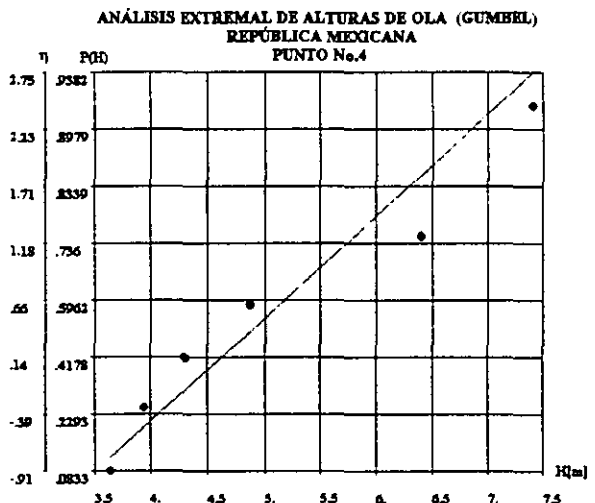
(a)



(b)



(c)



(d)

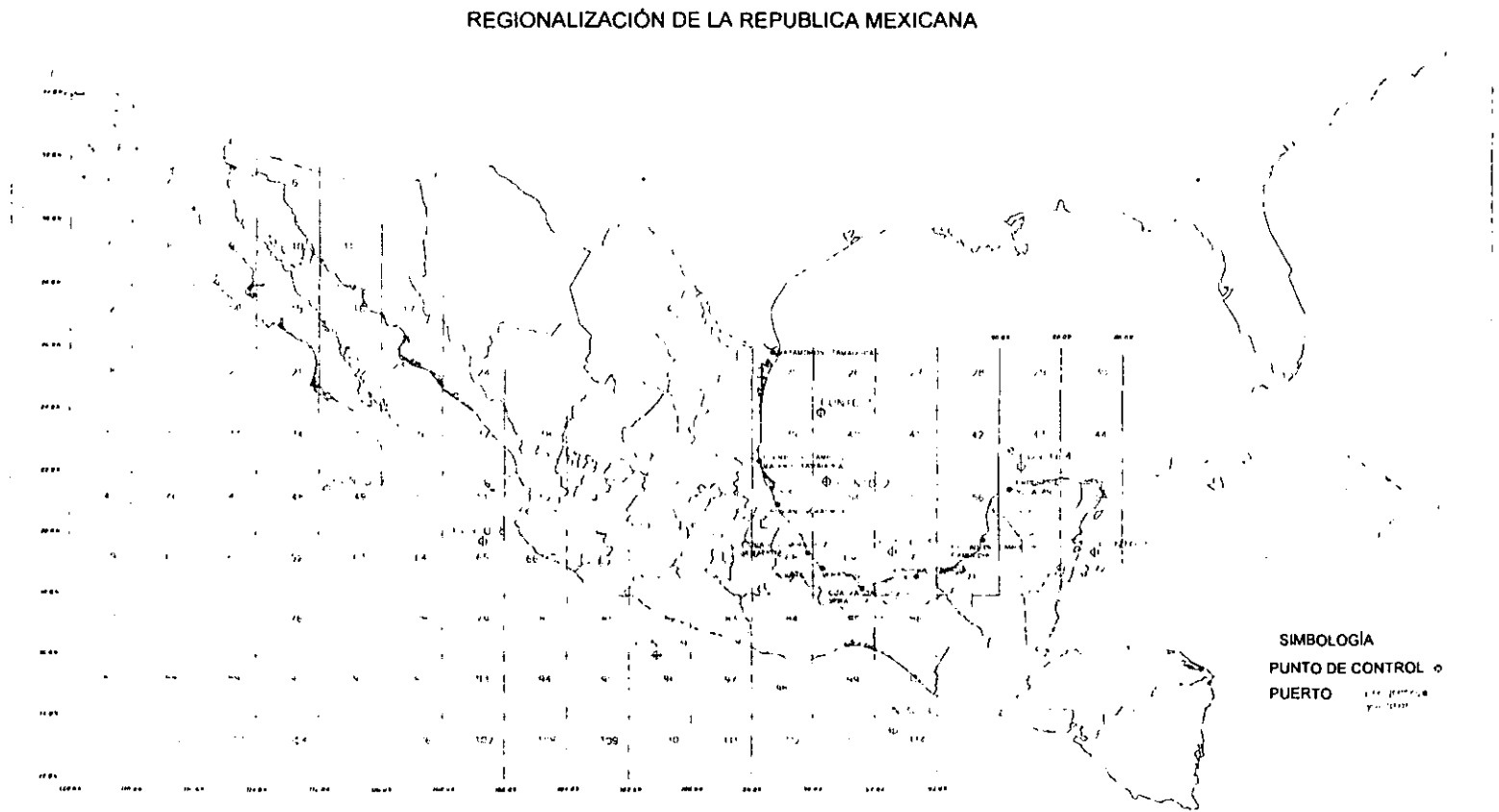
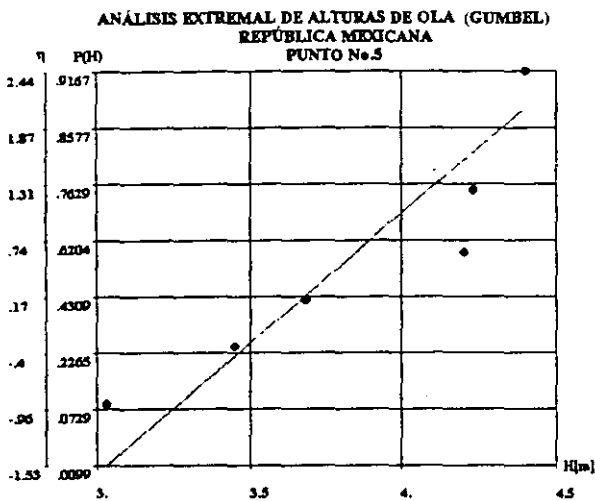
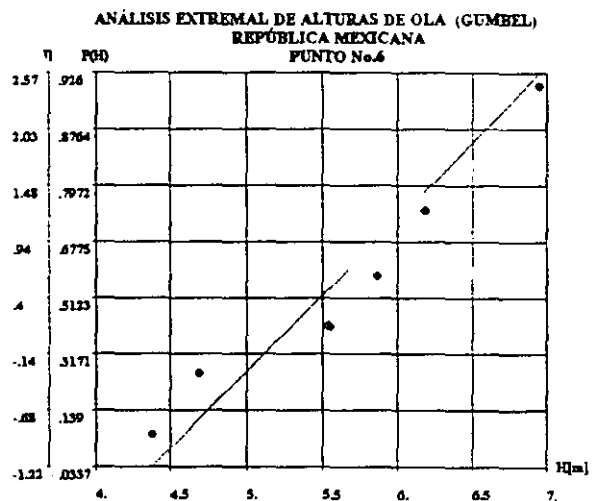


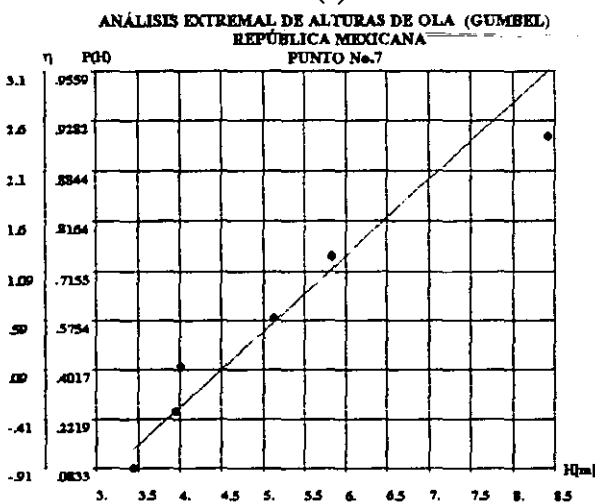
Figura 4.4 Regionalización de la República Mexicana y localización de los puntos de control analizados.



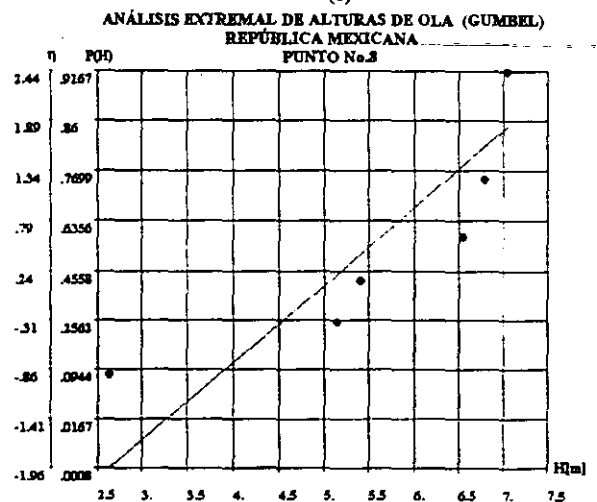
(e)



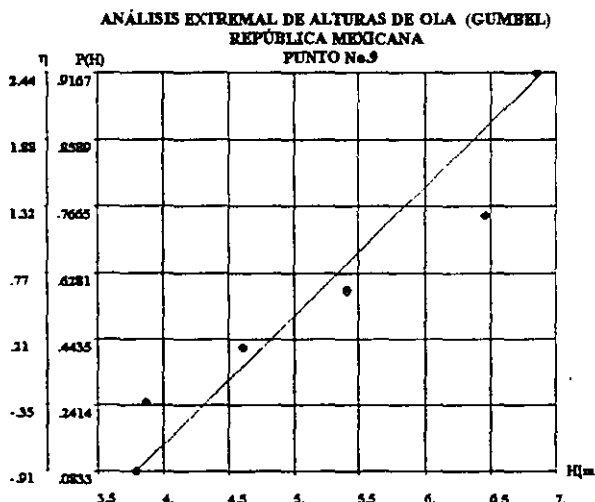
(f)



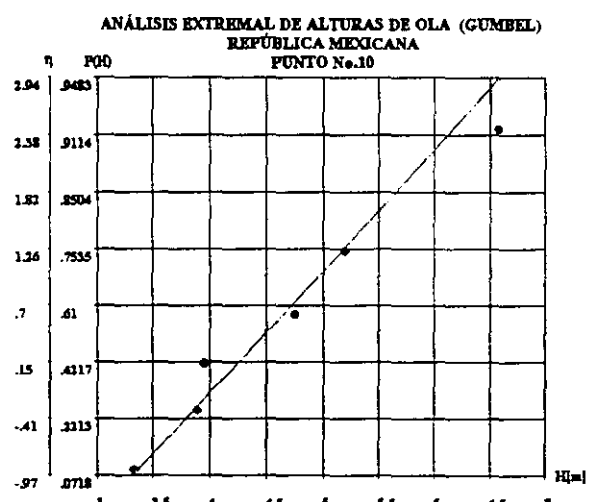
(g)



(h)



(i)



(j)

Figura 4.5(a)-(h) Resultados del ajuste de los valores extremos de altura de ola con Gumbel

Como se muestra en la figura 4.5(a)-(j) la distribución de Gumbel ajusta bastante bien los valores máximos de altura de ola que se presentan a lo largo del litoral mexicano. Sin embargo, de los casos presentados, los mejores ajustes se presentan en las figuras 4.5(c), 4.5(g), 4.5(f) y 4.5(j), siendo este último en el que la recta de la distribución mejor aproxima los valores reales.

Los resultados presentados para el punto de control no.6 se pueden asociar al oleaje que se presenta en las costas de Rosarito por lo que se puede afirmar, que para esa zona se puede utilizar la distribución de Gumbel para obtener e inferir los valores máximos en caso de que no haya suficiente información para proyectar el diseño de alguna estructura que se pretenda construir en la zona.



**CONCLUSIONES Y  
FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO.**

*" Si viéramos realmente el Universo,  
tal vez lo entenderíamos. "*

*Jorge Luis Borges*

## CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

Este trabajo abordó como tema principal al oleaje, se estudiaron las diferentes teorías que se emplean para su modelado matemático así como los diferentes criterios estadísticos que se emplean para su análisis, bajo el dominio del tiempo y el de la frecuencia. Además de las distribuciones estadísticas más conocidas para su predicción.

Las principales conclusiones organizadas por capítulo, son las siguientes:

### CAPÍTULO II.

A partir de los resultados obtenidos para cada estación y de acuerdo con la descripción estadística a través de los parámetros espectrales y temporales, se puede concluir que el oleaje más severo en las costas de Rosarito, con alturas y períodos de ola mayores, se presenta durante la temporada de Otoño, período durante el cual se tienen los valores máximos de dichos parámetros ( $H_{\max}$ ,  $H_s$  y  $H_{1/10}$ ).

De la observación de la variación de la función SIWEH a lo largo del tiempo, se puede deducir que el agrupamiento de la energía a lo largo del registro se presenta cuando existe un cambio brusco en la magnitud de la altura de ola.

De la comparación entre los resultados obtenidos de las correlaciones realizadas y los coeficientes definidos por la teoría a lo largo del capítulo, se puede concluir que la descripción estadística del oleaje, realizada a través del cálculo de los diferentes parámetros de cada señal fue muy buena.

### CAPÍTULO III.

De los resultados obtenidos en este capítulo, se puede concluir que la distribución Tayfun es la que mejor estima los valores de altura de ola, además de que las distribuciones de Rayleigh y Carter sobrestiman y subestiman al valor real, respectivamente.

La distribución de Tayfun es la que mejor representa el estado de mar existente en las costas de Rosarito Baja California Norte.

Para el caso de períodos de ola, la distribución que mejor ajustó los datos obtenidos en tres estaciones, fue la de Bretschneider con excepción del caso de la señal de Invierno en la cual sobrestimó los valores reales, siendo la distribución de Cavanié la que mejor los ajustó.

Con respecto al análisis espectral, se puede concluir, que en la mayoría de los casos el espectro teórico que mejor ajustó a los espectros medidos fue el TMA, sin embargo, en otros se encontró que los espectros JONSWAP, ISSC, ITTC y Bretschneider pueden ajustar bastante bien al espectro real.

Se concluye además, que el procedimiento de obtener el promedio de los espectros medidos para la señal de un día es bastante bueno, ya que con ello se logra definir una tendencia más definida de la energía, para un período de tiempo definido.

#### **CAPÍTULO IV.**

Con respecto a los resultados obtenidos para este capítulo se puede afirmar que la distribución de Gumbel para máximos es adecuada para llevar a cabo una buena estimación de los valores extremos de altura de ola para todo el litoral mexicano, ya que en casi todos los casos presentados el ajuste fue muy aproximado, llegando a ser incluso en algunos bastante bueno.

#### **FUTURAS LINEAS DE TRABAJO.**

- Estudio del fenómeno a través de las teorías que desarrollan el oleaje no gaussiano.
- Caracterización del clima marítimo a través del biespectro, que considera de manera simultánea la presentación de oleajes tipo SEA y SWELL.
- Caracterización del clima marítimo en otras zonas del litoral mexicano.
- Comprobación del análisis con datos meteorológicos, especialmente para casos de huracanes y "nortes". Efecto del oleaje sobre estructuras de protección y playas.

## **BIBLIOGRAFÍA**

**BIBLIOGRAFÍA**

1. Benjamin J, Cornell A, (1992) "Probability Statistics and Decision for civil engineers", McGraw Hill
2. Bendat J, Piersol A, (1986) "Random data, analysis and measurement procedures", John Wiley & Sons.
3. Bouws, E., Günther, H., Rosenthal, W. y Vincent, C. L. 1985. "Similarity of the Wind Wave Spectrum in Finite Depth Water 1. Spectral Form." Jour. Geoph. Res., Vol. 90, no C1, pp. 975-986.
4. Bretschneider, C.L., 1964. "Investigation of the statistics of wave heights-discussion" J. Wat Harb. And Coast. Eng. Div. No.WW1.
5. Carter, D.J.T., Challenor, P.G., et. al. 1986 "Estimating wave parameters for engineering applications." Offshore Technology Report No. OTH 86-228, Dept. of Energy, London, England, pp.92.
6. Cartwright, D.E. y Longuet-Higgins, M.S. 1956. "The statistical Distribution of the Maxima of a Random Function." Proc. Roy. Soc., Ser. A., pp. 212-232.
7. Castillo Enrique, (1987) "Extreme value theory in engineering", Academic Press
8. Castillo Enrique, (1995) "Análisis estadístico de datos extremos" Universidad de Santander.
9. Cavanié, A., Arhan, M. y Ezraty 1976. "A statistical relationship between individual height and periods of storm waves." Int. Conf. On Behaviour of offshore structures, BOSS, Trondheim. pp 54.
10. Chakrabarti S.K., (1987) "Hydrodynamics of offshore structures" Computational mechanics publications & Springer-Verlag.
11. Dean R, Dalrymple R, (1984) "Water wave mechanics for engineers and scientists" World scientific.
12. Goda, Y. 1991 "Distribution of sea state parameters and data fitting" Gulf Publishing. Handbook on Ocean Eng., Cap. 7 pp. 372-408.
13. Govaere Georges, 1996 "Acción del oleaje sobre estructuras marítimas no rebasables", Tesis de maestría, DEPFI, UNAM.

14. Hasselman, K., et al. 1973. "Measurements of Wind-Wave Growth and Swell Decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)." *Dtsch. Hydrogr. Int.*, A12, pp. 95.
15. IAHR Working Group 1989. "List of Sea-State Parameters." *Jour. Wat., Port, Coast., and Oce. Eng.*, Vol. 115, no. 6, pp. 793-808.
16. Kraus Nicholas, (1996) "History and heritage of Coastal Engineering", American Society of Civil Engineers.
17. Le Méahuté B, (1976) "An introduction to hydrodynamics and water waves" Springer-Verlag.
18. Longuet-Higgins, M.S. 1952. "On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves." *Jour. Mar. Res.* 11(3), pp. 245-266.
19. Longuet-Higgins, M.S. 1983. "On the Join Distribution of Wave Periods and Amplitudes in a Random Wave Field." *Proc. Roy. Soc.*, N 389, pp. 241-258.
20. Losada, M.A. y Giménez-Curto, L. 1979. "Oleaje: descripción estadística y espectral." Curso de Puertos, Universidad de Santander.
21. Mase, H. e Iwagaki, Y. 1987. "Evolution of wave groups in shallow water and wave group properties of random waves." *Coastal Engineering in Japan*, Vol. 30.
22. Massel Stainslaw, (1996) "Ocean Surface Waves: Their physics and prediction", World scientific, Vol.11
23. Newland, E.D. 1984. "An introduction to Random vibrations and spectral analysis." John Wiley and Sons, Inc, New York, pp. 377.
24. Ochi. M.K. 1982. "Stochastic Analysis and Probabilistics Prediction of Random Seas." *Advances in Hydroscience*, Academic Pres, Inc, vol 13, pp. 217-387.
25. Ochi Michael, (1990) "Applied probability and stochastic processes in engineering and physical sciences", Wiley-Interscience publication.
26. Rahman M, (1994) "Water waves, relating modern theory to advanced engineering practice", Departament of applied mathematics, Technical University of Nova Scotia.
27. Silva R, (1998) "Apuntes del curso: Hidráulica marítima", División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería UNAM.
28. Silva R, (1998) "Apuntes del curso: Análisis y predicción de oleaje", División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería UNAM.

29. Silva R., Martin F. and Govaere G. 1997a, "An approach for the forces on crown walls due to irregular waves" WAVES'97, ASCE, Virginia, USA.
30. Tayfun, M.A. 1990. "Distribution of Large Wave Heights." Jour. Wat., Port., Coast, and Oce. Eng., Vol. 116, no 6, pp. 686-707.
31. Tayfun, M.A. 1990. "Distribution of Large Wave Heights." Jour. Wat., Port., Coast, and Oce. Eng., Vol. 107, no WW2.
32. Van der Meer, J.W., 1988, "Rock slopes and gravel beaches under wave attack", Doctoral Thesis, Delf Thecnical University.
33. Ven te chow, (1982) "Advances in Hydrosience", Vol. 13, Academic Press, 218-333pp.
34. Vidal C. Losada, M.A. and Masnard, E.P.D. 1995 "Suitable wave height parameters for characterising breakwater stability". J. Wat., Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.107, No.2.
35. World Wave Atlas, Versión 2, copyright 1996, OCEANOR, Thondheim, Norway.
36. Wurjanto, A. & Kobayashi, N. 1991. "Numerical Model for Random Waves on Impermaeble Coastal Structures and Beaches." Research Report no. CARC-91-05, Cennter for App. Res., Dept. of Civil Eng., University of Delawere.