

01190



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS DE
DOBLE POROSIDAD CON TAMAÑO MÚLTIPLE
DE BLOQUES DE MATRIZ”**

TESIS QUE PRESENTA
RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO
PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA
(PETROLERA)**

TUTOR: DR. HÉBER CINCO LEY
TUTOR: DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO



CD. UNIVERSITARIA, FEBRERO DEL 2000

273907



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS DE DOBLE POROSIDAD CON TAMAÑO MÚLTIPLE DE BLOQUES DE MATRIZ

	Página
AGRADECIMIENTOS	<i>i</i>
RESUMEN	<i>iii</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>v</i>
LISTA DE TABLAS	<i>vi</i>
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2 REVISIÓN DE LA LITERATURA Y ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA	4
2.1 Discusión de los trabajos sobre el tema.	4
2.2 Estado actual de la tecnología.	23
CAPÍTULO 3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN	25
CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL MODELO PARA YACIMIENTOS CON TAMAÑO MÚLTIPLE DE BLOQUES DE MATRIZ	30
4.1 Establecimiento del modelo.	30
4.2 Validación del modelo.	37
CAPÍTULO 5 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SOLUCIONES	47
5.1 Parámetros básicos.	47
5.2 Período de transición.	52
5.3 Resultados para distribuciones discretas.	56
5.4 Resultados para distribuciones continuas.	56
5.5 Soluciones aproximadas.	70

	Página
CAPÍTULO 6	72
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE YACIMIENTOS DE DOBLE POROSIDAD CON TAMAÑO MÚLTIPLE DE BLOQUES DE MATRIZ	
6.1 Problema inverso.	72
6.2 Acoplamiento del modelo desarrollado a una técnica de optimización para la estimación de los parámetros.	73
6.3 Descripción del programa de cómputo.	74
6.4 Estimación de parámetros.	76
6.4.1 Procedimiento.	76
6.4.2 Casos teóricos.	77
CAPÍTULO 7	84
APLICACIONES PRÁCTICAS	
7.1 Procedimiento de análisis.	84
7.2 Confiabilidad de resultados.	93
7.3 Ejemplos.	98
7.3.1 Gasto de imbibición.	98
7.3.2 Comportamiento de la recuperación de aceite.	102
CAPÍTULO 8	112
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
NOMENCLATURA	120
REFERENCIAS	125
APÉNDICE A: DESARROLLO DEL MODELO DEL PROBLEMA DIRECTO	137
APÉNDICE B: PROGRAMA DE CÓMPUTO DEL PROBLEMA DIRECTO	144
APÉNDICE C: TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN	149
APÉNDICE D: PROGRAMA DE CÓMPUTO DEL PROBLEMA INVERSO	154
APÉNDICE E: DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO MÁXIMO DE LOS BLOQUES	164
APÉNDICE F: LÍMITES DE CONFIANZA EN LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	167

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme permitido terminar mi doctorado.

A mi familia por su apoyo incondicional y constante a lo largo de toda esta etapa de mi vida, sin el cual no hubiera podido culminar.

A mi hija Adri y mi nieta Michelle por ser una fuente de alegría en mi existencia.

A mis directores del trabajo de investigación por la propuesta del tema, así como el tiempo y esfuerzo dedicados en su desarrollo.

Al resto de los miembros del jurado, quienes me hicieron observaciones que fueron tomadas en cuenta en la impresión final de esta tesis.

Finalmente, a todas las personas que me apoyaron de diversas maneras para concluir mis estudios.

Far better an approximate answer to the right question which is often vague, than an exact answer to the wrong question, which can always be made precise.

*John W. Tukey
1962*

RESUMEN

Se desarrollan un modelo y su programa de cómputo correspondiente, para estudiar el comportamiento de la presión de los pozos y de su primera y segunda derivadas, de un yacimiento naturalmente fracturado compuesto de bloques horizontales de espesor variable, siendo la variación continua, de forma lineal, exponencial o normal. Se considera flujo transitorio matriz-fracturas y se incluyen los casos en los que se tenga daño y almacenamiento en los pozos; lo anterior constituye lo que se llama un problema directo.

Se presenta un procedimiento para estimar parámetros de yacimientos naturalmente fracturados, con tamaño múltiple de bloques de matriz, a partir de datos de pruebas de decremento de presión. Éstos parámetros son los correspondientes a las funciones de densidad de probabilidad que definen el rango y la forma de variación del tamaño de los bloques, como la pendiente y la ordenada al origen de las funciones lineales, la constante exponencial y el cociente h_{min}/h_{max} de las funciones exponenciales y el valor medio y la desviación estándar de las funciones normales o de Gauss. A la estimación de parámetros se le conoce como la solución del problema inverso, para la cual se acopla el modelo desarrollado a una técnica de optimización.

Se aplica la teoría de los límites de confianza para establecer la confiabilidad de los resultados del procedimiento de análisis, puesto que se introducen errores en la estimación de los parámetros de un yacimiento, como los que están implícitos en el modelo que se utilice, en las mediciones que se realicen y en el proceso de optimización que se aplique.

Empleando datos hipotéticos de una prueba de decremento de presión, se desarrolla un ejemplo de aplicación del procedimiento de estimación de parámetros y del cálculo de límites de confianza. Además de calcular la confiabilidad de los parámetros estimados en términos estadísticos, se usaron estos valores estimados en el modelo para calcular los resultados de la función

derivada, obteniendo muy buena concordancia con los datos hipotéticos. En este caso, los límites de confianza corresponden sólo al proceso de optimización; los resultados no involucran errores de medición ni del modelo.

Como ejemplos de aplicación de los resultados que se obtienen con el procedimiento para estimar la variabilidad y su rango del tamaño de los bloques, se incluye el desarrollo de la teoría para determinar el gasto de imbibición de yacimientos naturalmente fracturados, de matriz mojable por agua, en procesos de recuperación de aceite por inyección de agua, así como el desarrollo de las bases para predecir su comportamiento.

De ambos ejemplos se presentan los procedimientos de cálculo y los resultados para los casos planteados: Caso A, distribución lineal decreciente y Caso B, distribución lineal creciente. El resto de la información de los dos casos es la misma, por lo cual las diferencias observadas se deben exclusivamente a la diferencia en la distribución del tamaño múltiple de los bloques de matriz.

Se considera que la información que se obtiene por medio del procedimiento desarrollado en esta tesis es aplicable directamente en la simulación numérica de yacimientos, que requiere de una gran cantidad de información de calidad, para que sus resultados sean más confiables, particularmente en los procesos más complejos de explotación, como son lo de recuperación mejorada de aceite de yacimientos carbonatados, naturalmente fracturados.

ABSTRACT

A variable block size model is presented to study naturally fractured reservoirs, taking into account continuous uniform, exponential and normal distributions of matrix block sizes and unsteady state matrix-fractures flow. A procedure is developed to estimate the variability of the block size, from pressure drawdown data, applying an optimization technique; in other words, the inverse problem is solved.

The confidence of the estimated results is evaluated by applying the confidence limits theory and the procedure is illustrated using data from a simulated pressure drawdown test. On the other hand, the estimated parameters of the variability of the block size were used to obtain results for the pressure derivative function; the agreement with the simulated pressure drawdown data was very good.

Finally, a theory was developed and applied to obtain the imbibition flow rate in water wet naturally fractured reservoirs, using the estimated parameters of the variability of the block size, in an oil recovery process by water injection.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	Página
1.1 Función densidad de probabilidad.	31
1.2 Comportamiento de $d[\log(t_D p'_{wD})]/d[\log t_D]$ contra t_D para 2 distribuciones lineales de tamaños de bloques	38
4.3 Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos con el programa de cómputo desarrollado en esta tesis y los publicados para un yacimiento homogéneo (Tabla 3) ⁴⁹	40
4.4 Densidad de probabilidad exponencial para $F_h=0.1$ y valores de $\alpha=20,5,0,-5,-20$ (con $\alpha=0$ es la distribución uniforme).	45
5.1. Función de densidad de probabilidad de Gauss.	53
5.2. Función de densidad de probabilidad de Gauss "normalizada" para $F_h=0.1$, $\mu^*=0.55$ y $\sigma=3/20$.	54
5.3 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la función densidad de probabilidad lineal.	58
5.4 Comportamiento de $t_D p'_{wD}$ contra t_D para la función densidad de probabilidad lineal.	59
5.5 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la distribución lineal continua y la distribución discreta con cinco tamaños de bloques.	61
5.6 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la función densidad de probabilidad exponencial.	65
5.7 Comportamiento de $t_D p'_{wD}$ contra t_D para la función densidad de probabilidad exponencial.	66
5.8 Funciones densidad de probabilidad lineales y exponenciales, crecientes y decrecientes, para los valores dados de "m", "b", "a", F_h .	67
7.1 Datos de una prueba hipotética de decremento de presión.	88
A.1 Función densidad de probabilidad lineal creciente.	140

LISTA DE TABLAS

TABLA		Página
4.1	Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos con el programa de cómputo y los publicados para un yacimiento homogéneo (Agarwal y Cols ⁴⁹).	39
4.2	Comparación de resultados obtenidos en esta tesis con los correspondientes a la tesis de Jiménez ⁴⁷ , para la función de la segunda derivada.	41
4.3	Comparación de resultados de p_{wD} de esta tesis con los publicados por Cinco-Ley y Cols ³¹ , para el caso de un solo tamaño de bloques.	42
4.4	Comparación de resultados de $(t_D/C_D)p'_{wD}$ con los de Bourdet y Cols ³⁵ .	43
4.5	Comparación de resultados de p_{wD} para una distribución discreta de tamaños de bloques ($NB=5$), Fig. 15 de Cinco-Ley y Cols ³¹ .	44
4.6	Comparación de resultados de $t_{DP}'_{wD}$ para distribuciones exponenciales. Fig. 4 de Johns y Jalali-Yazdi ²⁰ .	44
5.1	Resultados de p_{wD} y $t_{DP}'_{wD}$ para 3 densidades de probabilidad lineales: A(uniforme), B(decreciente), C(creciente).	57
5.2	Resultados de p_{wD} y $t_{DP}'_{wD}$ para 3 densidades de probabilidad exponenciales: D(uniforme), E(decreciente), F(creciente).	63
5.3	Valores de los parámetros α , b , y m de las densidades de probabilidad uniforme, lineal y exponencial cuyos resultados se presentan en las Tablas 5.1 y 5.2 y en las Figs. 5.1 a 5.4.	64
6.1	Resultados del Ejemplo 1 de estimación de parámetros. Distribución lineal creciente, con $m_{obs}=1$ y $b_{obs}=0.5005$.	80
6.2	Resultados del Ejemplo 2 de estimación de parámetros. Distribución exponencial decreciente, con $\alpha_{obs}=5$ y $F_{hcs}=0.1$.	82
7.1	Datos de una prueba hipotética de decremento de presión. Ejemplo del procedimiento de análisis.	87
7.2	Resultados de estimación de parámetros de una prueba hipotética de decremento de presión.	90

	Página
7.3 Resultados "reales" de $t_{DP'_{wD}}$ contra resultados calculados $(t_{DP'_{wD}})_{est}$ empleando los valores estimados de los parámetros α y F_h . Prueba hipotética de decremento de presión.	92
7.4 Prueba simulada de decremento de presión. Ejemplo de cálculo de límites de confianza.	96
7.5 Valores de h_{ma} contra f .	105
7.6 Ejemplo del comportamiento de la recuperación de aceite debido a la distribución del tamaño de los bloques. Número de bloques de cada tamaño y valores ajustados de f . Caso A.	107
7.7 Comportamiento de la recuperación de aceite. Resultados para cada tamaño de bloques y para el total del yacimiento. Caso A.	108
7.8 Información de valores ajustados de f , volumen de roca, etc., para cada uno de los tamaños de los bloques. Caso B.	109
7.9 Comportamiento de la recuperación de aceite. Resultados para cada tamaño de bloques y para el total del yacimiento. Caso B.	110

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Una parte muy importante de la producción y de las reservas mundiales de hidrocarburos se encuentra en yacimientos naturalmente fracturados^{1,12,20,31,133 *}, conocidos también como yacimientos de doble porosidad. Por lo que respecta a nuestro país, más de la mitad de ambos conceptos se obtiene de este tipo de yacimientos¹⁻⁴.

En general, los yacimientos de doble porosidad están compuestos por bloques y fracturas, de tal manera que la alta conductividad característica de estos sistemas se debe a la presencia de las fracturas, las cuales tienen baja capacidad de almacenamiento. Por el contrario, los bloques de matriz tienen baja permeabilidad y generalmente mayor porcentaje de almacenamiento que las fracturas. Se considera que el flujo de fluidos hacia los pozos ocurre sólo a través de las fracturas, en tanto que los bloques de matriz actúan como fuentes que suministran fluidos a esas fracturas^{1,5-7,29,31,133,141,142}.

La gran mayoría de los modelos conceptuales que se han desarrollado para caracterizar estos yacimientos por medio del análisis de los resultados de las pruebas de variación de presión, ha considerado que los bloques de matriz son del mismo tamaño^{5-15,141,142}. Sin embargo, en la naturaleza, por variaciones en la litología, en los esfuerzos a que es sometida la roca, en el grado de diagénesis, etc., se presenta comúnmente un tamaño múltiple de los bloques de la

*Referencias al final.

matriz¹⁶⁻²⁰. Esta variación en el tamaño de los bloques incide fuertemente en la explotación de los hidrocarburos de los yacimientos carbonatados naturalmente fracturados, sobre todo en los procesos de recuperación por inyección de agua^{1,21-31}.

Con el fin de realizar una mejor caracterización de los yacimientos para extraer los hidrocarburos en una forma más racional, se han desarrollado varias investigaciones en las que ya se toma en cuenta la variación del tamaño de los bloques^{19,20,31}.

El propósito inicial de esta tesis es presentar el desarrollo de un modelo para obtener la respuesta de la presión, así como las de su primera y segunda derivadas, en el caso de un yacimiento con tamaño múltiple de bloques de matriz. Además de las soluciones para la presión y sus derivadas, se incluyen algunos grupos logarítmicos de esas funciones, que fueron desarrollados en la tesis, cuyas representaciones gráficas tienen mejores características desde el punto de vista de herramientas de diagnóstico que las propias derivadas^{12,14,32-47}.

Se obtienen soluciones de este problema para distribuciones discretas y continuas del tamaño de los bloques, así como para distribuciones lineales y exponenciales, crecientes y decrecientes, incluyendo los casos en los que se tenga daño y almacenamiento en los pozos. Estos efectos los han tratado otros autores en los casos de yacimientos homogéneos^{8,48-50,52}, o en yacimientos fracturados sin considerar tamaño múltiple de bloques de matriz^{12,50-52}.

Como validaciones al modelo se obtienen soluciones para los casos límite de yacimientos homogéneos⁴⁹ y yacimientos naturalmente fracturados con un solo tamaño de bloques^{10,33,35,37,53}; también se incluyen comparaciones con algunos resultados publicados en los que se han tomado en cuenta los diferentes tamaños de bloques^{20,31}. Todo lo anterior se refiere al problema directo y se trata en los Capítulos 4 y 5.

El objetivo central de este estudio es presentar el desarrollo de un procedimiento para resolver el problema inverso⁵⁴⁻⁷² correspondiente; es decir, un procedimiento para estimar parámetros de yacimientos de doble porosidad, con tamaño múltiple de bloques de matriz, a partir de los datos de pruebas de variación de presión, el cual contribuye a realizar mejores caracterizaciones de este tipo de yacimientos. Este procedimiento se presenta en los Capítulos 6 y 7 de la tesis.

El conocimiento del rango y la forma de variación del tamaño múltiple de los bloques tiene aplicaciones directas en la simulación numérica de yacimientos, la cual requiere de una gran cantidad de información de calidad^{128,132} para que sus resultados sean más confiables. Finalmente, en esta tesis se presenta un análisis de la confiabilidad en la estimación de la variabilidad del tamaño de los bloques, así como ejemplos de aplicación de esta información al calcular el gasto de imbibición y el comportamiento de la recuperación de aceite en procesos de inyección de agua.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA Y ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA

Se han desarrollado varios cientos de investigaciones en relación con los yacimientos naturalmente fracturados por la importancia que tienen a nivel mundial. Sin embargo, en este capítulo solamente se comentan los trabajos en los que se toma en cuenta la variación del tamaño de los bloques^{19,20,31}, así como otros que pueden considerarse básicos o relacionados con el tema^{5-7,15,42,73,138}.

2.1 DISCUSIÓN DE LOS TRABAJOS SOBRE EL TEMA

Warren y Root⁵ utilizaron el concepto introducido por Barenblatt y Cols^{139,140} de sistema de doble porosidad, para designar un yacimiento naturalmente fracturado; éste fue representado por bloques de caras rectangulares limitados por una red ortogonal de fracturas uniformes y continuas. Los bloques representan a su vez la matriz de la roca del yacimiento.

Una de las características del modelo de Warren y Root considera que el flujo de la matriz a las fracturas ocurre bajo régimen pseudo-estacionario (flujo PSS, de las palabras "Pseudo Steady State"); relaciona el gasto con la diferencia entre la presión de la matriz y la presión de las fracturas. El flujo hacia los pozos es solamente a través de la red de fracturas, actuando la matriz como una fuente que suministra el fluido.

Los autores definieron los parámetros λ , coeficiente del flujo entre la matriz y las fracturas y ω , almacenamiento fraccional de las fracturas, mediante los cuales describieron los resultados de pruebas de decremento e incremento de presión. Demostraron que existen dos rectas paralelas en una gráfica semilog de presión contra tiempo y una curva de transición que conecta las dos rectas.

Kazemi⁶ y De Swaan⁷ consideran que el flujo matriz-fracturas se presenta en régimen transitorio (flujo USS, de las palabras "Unsteady State"). Kazemi tomó en cuenta la posibilidad de que parte de la producción en los pozos proviniera directamente de los bloques y no sólo a través de las fracturas, pero encontró que este efecto es insignificante si la matriz es de baja permeabilidad, lo cual ocurre generalmente en este tipo de sistemas. También encontró que en el caso de flujo USS el período de transición tiene mayor duración que en el flujo PSS.

De Swaan⁷ caracterizó el comportamiento de presión del yacimiento naturalmente fracturado utilizando los parámetros ω (el mismo de Warren y Root), η_{maD} (difusividad hidráulica de la matriz, en forma adimensional) y A_{fb} (área de las fracturas por volumen total de roca). Tanto en el modelo de De Swaan, como en los anteriores, no se establece explícitamente la variación del tamaño de los bloques.

La mejor manera de identificar en la práctica al régimen de flujo matriz-fracturas (PSS o USS), que existe en un sistema considerado, es observando los valores de la función derivada en el período de transición. Si estos valores son significa-

tivamente menores de 0.25, entonces ocurre el flujo PSS; si sus valores mínimos son aproximadamente 0.25 (en este trabajo los resultados se obtienen con un procedimiento numérico), el flujo es USS. Los regímenes de flujo y los valores de la función derivada en el período de transición se analizan en varios trabajos previos, entre otros los correspondientes a las Refs. 14, 35 y 37.

Braester¹⁵ analizó la influencia del tamaño de los bloques en la curva de transición, para una prueba de decremento de presión, considerando dos modelos para conceptualizar los yacimientos naturalmente fracturados. El primer modelo está constituido por una serie de estratos horizontales, cada uno de espesor " h " y separados por fracturas, cada una de " B_2 " de ancho. Se supuso que la ley de Darcy es aplicable tanto para el flujo en la matriz como en las fracturas, en el caso de flujo bifásico agua-aceite, tomando en cuenta las compresibilidades de estos fluidos, así como la de la formación. Se obtuvieron soluciones numéricas para gasto constante en el pozo y potencial inicial uniforme.

El segundo modelo consistió de bloques verticales de altura " h " y " B_1 " de ancho, rodeados por una red de fracturas ortogonales de ancho " B_2 "; el resto de las características es igual a las del modelo uno.

Se calcularon las respuestas de una prueba de decremento de presión con el modelo dos para $h=5.4$ m y $B_1=1.1, 2.2, 3.3, 4.4$ y 5.5 m (anchura de bloque; se

usó uno de estos valores en cada una de las corridas del programa); se supone $B_2 = 15.24$ mm.

Con base en el rango limitado de parámetros que utilizó Braester concluyó del análisis de sus resultados que no se puede obtener información confiable sobre el tamaño de los bloques a partir de una prueba de decremento de presión; es decir, la respuesta de presión no es lo suficientemente sensible a los diferentes tamaños de bloques; por otra parte, cabe establecer que ella no aplicó en su estudio el concepto de la función derivada.

Se puede observar que ambos modelos, así como los resultados y conclusiones obtenidas, son para un tamaño constante de bloques de matriz; los diferentes tamaños de bloques que se mencionan en el párrafo anterior corresponden a diferentes corridas del programa de cómputo. Entonces, se considera que una hipótesis que se presenta en cuanto a la distribución al azar del tamaño de los bloques¹⁵ no está suficientemente sustentada; además, la sensibilidad de la respuesta de presión a los diferentes tamaños de bloques se refiere a que se estudia esa respuesta con un tamaño de bloques constante; se repite el proceso para un tamaño diferente y así en forma sucesiva en otras corridas del programa.

Jalali-Yazdi y Ershaghi⁷³ desarrollaron un modelo para estudiar las características de la zona de transición observada en gráficas semi-log de los

datos de presión en función del tiempo, con el objeto de proporcionar las bases teóricas del análisis del comportamiento de esa zona.

El modelo está formado por dos estratos horizontales separados por una fractura y cada estrato tiene su porosidad, permeabilidad, compresibilidad total y espesor; se consideran dos regímenes de flujo de la matriz a las fracturas (flujo m-f), pseudo-estacionario y transitorio, (PSS y USS, respectivamente) y se estudió el gasto constante de un fluido ligeramente compresible, en un yacimiento infinito, con flujo radial en la fractura y vertical en los estratos. En particular, cualquier combinación de regímenes de flujo puede ser tratada: los dos estratos con el mismo régimen (PSS o USS) o cada estrato con un régimen diferente. No se toma en cuenta el efecto de almacenamiento del pozo.

Las soluciones del problema se obtienen en el espacio de Laplace y se aplica el algoritmo de Stehfest⁷⁴ para transformarlas al espacio real; también se desarrollan soluciones aproximadas y se establece una correlación general que involucra una diversidad de comportamientos de la zona de transición, para las combinaciones estudiadas de regímenes de flujo, permeabilidades, etc.

Jalali-Yazdi y Ershaghi⁴² hacen una aplicación del modelo general desarrollado por los mismos autores en la Ref. 73 y descrito en párrafos anteriores; en esta aplicación un estrato produce un régimen estacionario PSS y el otro en régimen transitorio USS, teniendo ambos estratos las mismas propiedades (en este caso

se le conoce como medio fracturado de doble porosidad). El espesor total del modelo es constante, pero el espesor de cada estrato puede variar desde cero hasta el espesor total, con lo que se incluye el caso límite de yacimiento homogéneo, bajo el régimen de flujo USS o bien el PSS.

El desarrollo de las soluciones se basa en la teoría presentada por Najurieta^{9,75} para la respuesta de presión en el pozo. Los resultados se compararon con otros obtenidos por diversos medios^{10,76-79}, siendo la concordancia satisfactoria.

Se hace una estimación de los parámetros de almacenamiento adimensional de la matriz ω_{ma} , coeficiente de flujo entre los dos medios (matriz y fractura) λ , daño en el pozo S y almacenamiento adimensional del pozo C_D ; ω_{ma} se define como el almacenamiento de la matriz entre el almacenamiento total del sistema fracturado y $\lambda = k_{ma} r_w^2 / k_f h^2$, donde k_{ma} y k_f son las permeabilidades de la matriz y de la fractura, en tanto que h representa el espesor total del sistema. S y C_D son de uso relativamente común y se define en la literatura⁵².

La estimación de ω_{ma} , S y C_D se basa en el reconocimiento de los patrones de comportamiento de la respuesta de presión y su primera derivada, en gráficas semi-log, así como en ajuste por curvas tipo y en correlaciones auxiliares. Se establecen las condiciones bajo las cuales se desarrolla cada patrón de comportamiento y se especifica el procedimiento y se especifica el procedimiento de análisis aplicable.

Se desarrolla una curva tipo que incorpora la respuesta del flujo entre matriz y fractura (flujo "interporoso"), que puede ser USS o bien PSS, con la que es posible determinar cuál régimen gobierna el flujo interporoso. Las correlaciones auxiliares se basan en un análisis de la curva de transición entre el predominio de los efectos de la fractura y el predominio de los efectos del flujo ya estabilizado en el sistema total matriz-fractura (ma-f); a esta parte se le conoce como período de transición^{12-14, 33-35}.

Se presentan dos ejemplos de aplicación para ilustrar el procedimiento de análisis. El primero es una prueba "sintética" de decremento de presión en tanto que el segundo corresponde a una prueba de campo de incremento de presión, de una trabajo publicado con anterioridad¹⁰.

Cinco-L., Samaniego y Kuchuk³¹ presentaron el primero de los trabajos en los que realmente ya se tomó en cuenta el tamaño múltiple de los bloques de matriz; aun cuando Braester¹⁵ analizó la influencia del tamaño de los bloques en la curva de transición para una prueba de decremento de presión, los modelos que desarrolló esta investigadora fueron para bloques de tamaño constante, como ya se explicó al principio de este capítulo; por otra parte, los trabajos de Jalali y Ershaghi^{42,73} se realizaron posteriormente, para el caso de dos tamaños de los bloques de yacimientos naturalmente fracturados.

El modelo del yacimiento se compone de bloques de matriz de tamaño múltiple uniformemente distribuidos en el medio poroso, donde la red de fracturas tiene una permeabilidad k_{fb} , una compresibilidad total c_{fj} y una porosidad ϕ_{fb} ; el subíndice b significa que el parámetro correspondiente se define usando el volumen total de matriz y fracturas. Además k_{ma} es la permeabilidad de la matriz, ϕ_{ma} su porosidad y, c_{ima} , su compresibilidad total.

En particular, un parámetro muy importante que se relaciona directamente en estudios de rapidez de imbibición^{13,21-28}, es el área de fracturas por unidad de volumen de roca A_{fb} (o por unidad de volumen de matriz A_{fma}); A_{fb} es el área de interacción entre las fracturas y la matriz por unidad de volumen de roca. El modelo además considera que el flujo ocurre hacia el pozo únicamente a través de las fracturas, obedeciendo la ley de Darcy y no se toman en cuenta los efectos gravitacionales.

Para el caso que desarrollan principalmente los autores, que es el de bloques de matriz en forma de estratos horizontales de espesor variable h_{ma} separados por fracturas de anchura h_f , se tiene

$$A_{fb} = 2l(h_{ma} + h_f) = 2V_{mat}/h_{ma} V_b \quad \text{y} \quad A_{fma} = 2/h_{ma},$$

donde V_b y V_{ma} son los volúmenes total y de la matriz, respectivamente.

Si se define $f(h_{ma})$, que es la función frecuencia para los bloques de matriz de tamaño h_{ma} , en tal forma que

$$\int_{h_{min}}^{h_{max}} f(h_{ma}) dh_{ma} = 1, \quad (2.1)$$

o en forma discreta (o discontinua)

$$\sum_{i=1}^{NB} f_i(h_{mai}) = 1, \quad (2.2)$$

donde NB es el número de tamaños de bloques que se tienen en el medio poroso fracturado, entonces

$$A_{fb} = \int_{h_{mín}}^{h_{máx}} f(h_{ma}) A_{fb}(h_{ma}, h_f) dh_{ma}, \quad (2.3)$$

$$A_{fma} = \int_{h_{mín}}^{h_{máx}} f(h_{ma}) A_{fma}(h_{ma}) dh_{ma}, \quad (2.4)$$

o en forma discreta:

$$A_{fb} = \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fb_i}, \quad (2.5)$$

$$A_{fma} = \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fma_i}. \quad (2.6)$$

La función f_i representa el volumen de los bloques de matriz de tamaño h_{mai} , expresado como fracción del volumen total de la matriz del medio poroso fracturado.

Además se definen el cociente de almacenamiento de las fracturas ω y la difusividad hidráulica de la matriz en forma adimensional η_{maDi} , respectivamente como

$$\omega = \phi_{fb} c_{if} / (\phi c_i)_t \quad (2.7)$$

$$\eta_{maDi} = k_{ma}(\phi c_i)_t \Gamma^2 \omega / k_{fb}(\phi c_i)_{ma} h^2_{mai} \quad (2.8)$$

Nótese que el tamaño de cada bloque queda involucrado en η_{maDi} .

En el trabajo se presenta del desarrollo de la ecuación diferencial de flujo para el problema planteado que incorpora término $\mu q_{ma-f,b}^* / k_f b$, donde $q_{ma-f,b}^*$ es el gasto matriz-fractura por unidad de volumen de roca y está dado por

$$q_{ma-f,b}^* = \sum_{i=1}^{NB} f_i \left[-\frac{k_{ma}}{\mu} (\nabla p(h_{mai}))_{sup} \right] A_{fbi}. \quad (2.9)$$

En esta ecuación $(\nabla p(h_{mai}))_{sup}$ es el gradiente de presión en la cara de los bloques de tamaño h_{mai} .

Se desarrolla la solución del problema, la cual en forma adimensional, para el caso de distribución discreta de los bloques es:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{K_0(x)}{sxK_1(x)}, \quad (2.10)$$

donde K_0 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de segunda clase de orden cero y uno^{55,80,81}, \bar{p}_{wD} es la transformada de Laplace de p_{wD} ,

$$x = s^{1/2} [\omega + (1-\omega)g]^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$g(f_i, \eta_{maD}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{maD} / \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{s / \eta_{maD}}\right)}, \quad (2.12)$$

siendo "s" la variable en el espacio de Laplace, que corresponde a t_D en el espacio real.

La transformación inversa de la función de Laplace $K_0(x)/sxK_1(x)$ dada en la Ec. (2.10) se realizó por medio del algoritmo de Stehfest⁷⁴, encontrándose que con 10 términos ($N=10$) de la serie del inversor numérico se obtuvieron resultados excelentes. Adicionalmente, se desarrollaron soluciones aproximadas para tiempos adimensionales pequeños, medianos y grandes, siendo ellas respectivamente para la presión en el pozo:

$$p_{wD}(\omega, t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{\omega} \right) + 0.80907 \right] \quad (2.13)$$

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{4} \ln t_D - \frac{1}{2} \ln \left(2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{mD_i}} \right) + 0.2602 \quad (2.14)$$

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907), \quad (2.15)$$

donde

$$t_D = \beta k_{fb} t / (\phi C_i) \mu r_w^2 \quad (2.16)$$

$$p_{wD} = k_{fb} h \Delta p_f / \alpha q \mu B. \quad (2.17)$$

La Ec. (2.14) es aplicable para valores muy pequeños de ω (almacenamiento de las fracturas), para los cuales en tiempos intermedios, el comportamiento de la presión es dominado por el flujo lineal en los bloques de matriz. Los valores de las constantes α y β dependen del sistema de unidades que se utilice en las ecuaciones.

La Ec. (2.13) representa una recta semi-log y con ella se puede calcular la presión en el pozo durante el llamado período de flujo dominado por la red de fracturas; esta ecuación tiene la misma forma que la Ec. (2.15), la cual representa el comportamiento de presión de un sistema homogéneo, que es lo que ocurre en este caso de tiempos grandes, cuando el flujo de la matriz hacia las fracturas ya se ha estabilizado.

De las Ecs. (2.13) a (2.15) se deduce que la variación en el tamaño de los bloques de matriz, incluida en la sumatoria de la Ec. (2.14), solamente afecta el comportamiento de la presión en los tiempos intermedios de la prueba. En estas

ecuaciones no se toman en cuenta los efectos de almacenamiento y daño en el pozo.

Por otra parte, la Ec. (2.10) puede aproximarse para valores pequeños de x ; si x es pequeña $K_0(x)$ y $K_1(x)$ se aproximan^{31,80,81} por:

$$K_0(x) = -\left[\ln \frac{x}{2} + 0.5772 \right] \quad (2.18)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} \quad (2.19)$$

con lo cual, la Ec. (2.10)

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\frac{1}{s} \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + 0.5772 \right] \quad (2.20)$$

El cálculo p_{wD} de con esta ecuación no requiere de la evaluación de las funciones de Bessel K_0 y K_1 en tanto que, la Ec. (2.10) sí necesita de esta evaluación. Las soluciones en las que se involucran las Ecs. (2.18) y (2.19) se presentan en la Sección 5.5 de esta tesis.

La depositación de minerales en la cara de las fracturas puede reducir la interacción entre la matriz y las fracturas, lo cual retarda el flujo hacia estas últimas; Cinco-L. y Cols³¹ y Moench¹⁴³ propusieron un factor de daño para explicar o justificar la aplicación del modelo de flujo pseudo-estacionario de Warren y Root⁵ de la matriz a las fracturas. Este factor de daño s_{maD} se define como

$$s_{maD} = k_{ma} x_d / k_d h_{maD} \quad (2.21)$$

donde x_d y k_d son el espesor de la zona dañada y su permeabilidad, respectivamente, en tanto que k_{ma} y h_{ma} son la permeabilidad y el espesor de la matriz.

Con esta conceptualización los autores extienden su modelo para aplicarlo también al caso de flujo pseudo-estacionario.

Se obtuvieron resultados para uno, dos, tres y cinco tamaños de bloques, los cuales se incluyeron en el coeficiente adimensional de difusividad hidráulica de la matriz η_{maD} , definido por la Ec. (2.8); del análisis ampliamente documentado de los resultados de p_{wD} y de su primera derivada se presentan las siguientes conclusiones.

La característica de tamaño múltiple de bloques de un yacimiento naturalmente fracturado no se puede determinar analizando solamente el comportamiento de la presión; sin embargo, ésto sí es posible mediante la aplicación de una herramienta de análisis poderosa, como lo es la función derivada.

El uso del modelo de Warren y Root para sistemas de doble porosidad puede justificarse considerando una zona dañada entre los bloques de matriz y las fracturas.

Por otro lado, el comportamiento de la presión en el pozo puede exhibir las características típicas del sistema de doble porosidad de un solo tamaño de bloques. Si además se tiene un amplio rango de tamaños de bloques que

incluya tamaños muy pequeños, entonces no existe el comportamiento del pozo correspondiente a la primera recta semilog.

Los parámetros ω y A_{fb} calculados del modelo de un solo tamaño de bloques son los mismos también para un yacimiento de tamaño múltiple de bloques. En cambio, los parámetros λ y h_{ma} de un solo tamaño de bloques corresponden al promedio aritmético ponderado y al promedio armónico ponderado de un yacimiento con variación del tamaño de los bloques, respectivamente. A λ se le conoce como el parámetro de flujo entre la matriz y el sistema de fracturas.

Belani y Jalali-Yazdi¹⁹ desarrollaron un modelo que incorpora la distribución del tamaño de los bloques; se considera el flujo radial en las fracturas hacia el pozo, de un fluido ligeramente compresible y se desprecian los efectos gravitacionales. Se supone que es aplicable la ley de Darcy y las propiedades de la roca son constantes. En la ecuación diferencial de flujo se incluye el término Q_{ma} que representa la contribución de la matriz y que se define por

$$Q_{ma} = \int_{h_{min}}^{h_{max}} Q(h_{ma}) f(h_{ma}) dh_{ma}, \quad (2.22)$$

donde $Q(h_{ma})$ es la contribución al flujo de los bloques de tamaño h_{ma} y $f(h_{ma})$ es la probabilidad de que existan bloques de ese tamaño. Para yacimientos con fracturamiento intenso, $f(h_{ma})$ es una distribución sesgada positivamente en la que predominan los bloques pequeños, mientras que si el fracturamiento es escaso, entonces la distribución es sesgada negativamente y predominan los bloques grandes.

Los autores presentan la solución del problema en el plano de Laplace:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_o(x) + SxK_1(x)}{s\{C_{DS}[K_o(x) + SxK_1(x)] + xK_1(x)\}} \quad (2.23)$$

(Se puede observar que si el factor de daño S y el almacenamiento C_D son nulos, entonces la Ec. (2.23) se reduce a la (2.10)),

donde $x = \sqrt{sg(s)}$, siendo:

$$\text{Para flujo m-f PSS: } g(s) = \omega_f + \omega_{ma} \int_{h_{máx}}^1 \frac{3\lambda}{\omega_{ma}s + 3\lambda} f(h_D) dh_D \quad (2.24)$$

$$\text{Para flujo m-f USS: } g(s) = \omega_f + \int_{h_{máx}}^1 \sqrt{\frac{\omega_{ma}\lambda}{s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_{ma}s}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D \quad (2.25)$$

h_D , ω_{ma} , ω_f y λ se definen como sigue:

$$h_D = h_{ma} / h_{Dmáx} \quad (2.26)$$

$$\omega_{ma} = \phi_{ma} c_{1ma} / (\phi_{ma} c_{1ma} + \phi_f c_{1f}) \quad (2.27)$$

$$\omega_f = 1 - \omega_{ma} \quad (2.28)$$

$$\lambda_{ma} = k_{ma} r_w^2 / k_f h_{ma}^2 \quad (2.29)$$

Belani y Jalali¹⁹ no muestran el desarrollo de las Ecs. (2.23) a (2.25), pero sí presentan las ecuaciones de $g(s)$ para los regímenes de flujo matriz-fractura PSS y USS y las distribuciones uniforme y bimodal del tamaño de los bloques. En la distribución uniforme o también llamada rectangular todos los tamaños de los bloques tienen la misma probabilidad de existir en el medio fracturado; la distribución bimodal se presenta cuando existen dos conjuntos predominantes de tamaños de bloques, uno uniforme de un rango de valores h_{ma1} a h_{ma2} y el otro también uniforme, pero de un rango de h_{ma3} a h_{ma4} .

Los autores presentan resultados para la presión y su primera derivada en el flujo matriz-fractura PSS, considerando distribución uniforme del tamaño de los bloques, para un amplio rango del cociente $\lambda_{min} / \lambda_{máx}$ en un caso y en otro se fijó este cociente y se varió ω_{ma} . Lo anterior también se obtuvo para flujo matriz-fractura USS y en forma similar se calcularon resultados para la distribución bimodal.

Entre otras, las conclusiones del trabajo indican que los resultados se pueden usar para estimar ω_{ma} , λ_{min} , $\lambda_{máx}$ y que, como una forma alternativa, usando las soluciones que ellos proponen en una regresión no lineal de los datos de la presión, proporcionan parámetros del yacimiento como ω_{ma} , λ_{min} y $\lambda_{máx}$. Sin embargo, no se presenta el procedimiento correspondiente.

Se considera que el trabajo presentado por Johns y Jalali-Yazdi²⁰ es una extensión y/o complemento de la investigación de Belani y Jalali-Yazdi¹⁹, discutida en párrafos anteriores. El punto de partida es el mismo problema de flujo y por supuesto la misma solución representada por la Ec. (2.23), para pruebas de decremento de presión. Donde sea conveniente y para mayor claridad se hará referencia a los cambios de nomenclatura que se introducen; por otra parte, ahora el trabajo sólo trata del régimen de flujo USS.

En la Ec. (2.22) se utilizó $f(h_{ma})$ que es la probabilidad de que existan bloques de tamaño h_{ma} en el medio poroso naturalmente fracturado; ahora se usa el mismo

concepto pero con el nombre función de densidad de probabilidad (con abreviatura PDF en inglés) y con la nomenclatura $p(h_{ma})$; en la literatura⁵⁵ se le llama también función de probabilidad. La nomenclatura para $g(s)$ de las Ecs. (2.24) y (2.25) cambia a $f(s)$.

Para flujo matriz-fractura USS y en presencia de daño en la cara de los bloques:

$$f(s) = \omega_f + \omega_{ma} \int_{F_h}^1 \frac{\sqrt{\lambda / \omega_{ma}} \tanh(\sqrt{\omega_{ma} s / \lambda}) p(h_D)}{1 + S_{ID} \sqrt{\omega_{ma} s / \lambda} \tanh(\omega_{ma} s / \lambda)} dh_D \quad (2.30)$$

Además de introducir el efecto del factor de daño en la cara de los bloques S_{ID} , se define

$$F_h = h_{\min} / h_{\max} \quad (2.31)$$

y se hacen dos correcciones a la Ec. (2.25) publicada con anterioridad: se agrega ω_{ma} como factor de la integral y el cociente $\omega_{ma} \lambda s$ se cambia a $\lambda \omega_{ma} s$; no se presenta el desarrollo de la Ec. (2.30). Por otro lado, S_{ID} es el mismo concepto que S_{maD} (Ec. (2.21)) presentado por Cinco-L. y Cols³¹.

Mediante la selección de una función de probabilidad, se puede inferir la intensidad de fracturamiento de un medio de doble porosidad a partir de los datos de una prueba de presión; los autores utilizan dos funciones de probabilidad para representar la variabilidad del tamaño de los bloques, que son la lineal y la exponencial. A medida que aumenta la intensidad de fracturamiento, $p(h_D)$ se hace sesgada hacia bloques pequeños y viceversa. Las funciones de probabilidad lineal y exponencial son respectivamente:

$$p(h_D) = mh_D + b \quad (2.32)$$

$$p(h_D) = \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-aF_h} - e^{-a}} \quad (2.33)$$

donde m y b son la pendiente y la ordenada al origen de la recta y " a " es una constante positiva, negativa o nula que define las características de la curva exponencial; para valores positivos de a cada vez mayores corresponden a mayores intensidades de fracturamiento, aumentando la probabilidad de existencia de bloques pequeños y disminuyendo la de los bloques grandes; si aumenta negativamente, disminuye la intensidad de fracturamiento y se incrementa la probabilidad de que se tengan bloques grandes. Si $a = 0$ (o $m = 0$ en la Ec. (2.32)) la función de probabilidad se reduce al caso de función uniforme o rectangular.

Los autores realmente presentan la función lineal como

$$p(h_D) = \frac{mh_D + b}{0.5m(1 - F_h^2) + b(1 - F_h)} \quad (2.34)$$

pero se puede demostrar que las Ecs. (2.32) y (2.34) son equivalentes; por otra parte se debe cumplir para toda función de probabilidad que el área bajo la curva de $p(h_D)$ vs h_D es unitaria, con h_D variando desde F_h hasta 1; matemáticamente se tiene

$$\int_{F_h}^1 p(h_D) dh_D = 1 \quad (2.35)$$

Por ejemplo, para la función rectangular

$$p(h_D) = 1/(1-F_h) \quad (2.36)$$

con lo cual

$$\int_{F_h}^1 p(h_D) dh_D = \frac{1}{1 - F_h} \int_{F_h}^1 dh_D = 1 .$$

Para pruebas de decremento de presión en ausencia de efectos de almacenamiento y daño, la solución del problema de flujo está dada por la Ec. (2.10) y se evalúa numéricamente con el algoritmo de Stehfest⁷⁴ para diferentes funciones de probabilidad; las respuestas de la presión y el grupo de la primera derivada se presentan gráficamente para la función exponencial con $F_h = 0.1$ y diferentes valores de "a", variando $-\infty$ hasta $+\infty$, la información complementaria es $\lambda_{min} = 10^{-7}$ y $\omega_{ma} = 0.9$; de las características de las curvas de la primera derivada se obtiene cualitativamente el grado de variabilidad del tamaño de los bloques.

Para el caso particular de una función de probabilidad rectangular se desarrollaron curvas tipo para pruebas de decremento y de interferencia de presión con las cuales se puede determinar ω_{ma} , λ_{min} y F_h .

De todo lo anterior se observa que la solución del problema inverso se realiza en este trabajo obteniendo cualitativamente el grado de variabilidad del tamaño de los bloques a partir de las características de las curvas de la primera derivada de la respuesta de presión y ω_{ma} , λ_{min} , F_h se estiman mediante ajuste con curvas tipo suponiendo que existe una función de probabilidad continua rectangular del tamaño múltiple de los bloques de matriz.

2.2 ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA.

Como se puede inferir de la revisión de la literatura presentada en la Sección 2.1 de este capítulo, sólo tres trabajos han sido publicados^{19,20,31} en los que se toma en cuenta el tamaño múltiple de bloques de matriz, al estudiar el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados mediante pruebas de variación de presión.

Del problema directo, o sea el estudio del comportamiento de la presión conociendo los parámetros del yacimiento, se dispone³¹ de un modelo analítico que considera una distribución discreta de tamaños de bloques; de un análisis completo de resultados para uno, dos, tres y cinco tamaños de bloques, se concluye que es posible determinar la característica de tamaño múltiple mediante la aplicación de la función derivada y se obtienen las relaciones correspondientes de los parámetros ω , A_{fb} , λ y h_{ma} entre el caso de un solo tamaño y la situación de tamaño múltiple de bloques de matriz. Por otra parte, se presenta^{19,20} una solución para distribuciones continuas de tamaños de bloques con funciones de probabilidad lineales y exponenciales, pero se considera que el análisis de resultados puede ser enriquecido, además de que es posible desarrollar otras soluciones.

2.2 ESTADO ACTUAL DE LA TECNOLOGÍA.

Como se puede inferir de la revisión de la literatura presentada en la Sección 2.1 de este capítulo, sólo tres trabajos han sido publicados^{19,20,31} en los que se toma en cuenta el tamaño múltiple de bloques de matriz, al estudiar el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados mediante pruebas de variación de presión.

Del problema directo, o sea el estudio del comportamiento de la presión conociendo los parámetros del yacimiento, se dispone³¹ de un modelo analítico que considera una distribución discreta de tamaños de bloques; de un análisis completo de resultados para uno, dos, tres y cinco tamaños de bloques, se concluye que es posible determinar la característica de tamaño múltiple mediante la aplicación de la función derivada y se obtienen las relaciones correspondientes de los parámetros ω , A_{fb} , λ y h_{ma} entre el caso de un solo tamaño y la situación de tamaño múltiple de bloques de matriz. Por otra parte, se presenta^{19,20} una solución para distribuciones continuas de tamaños de bloques con funciones de probabilidad lineales y exponenciales, pero se considera que el análisis de resultados puede ser enriquecido, además de que es posible desarrollar otras soluciones.

En cuanto al problema inverso, que en este caso consiste principalmente en la determinación de las características de variabilidad del tamaño de los bloques a partir del análisis de las respuestas de pruebas de presión, sólo se menciona¹⁹ el concepto de que usando las soluciones propuestas en una regresión no lineal se obtienen los parámetros del yacimiento y que además con el análisis de resultados se pueden estimar ω_{ma} , λ_{min} , $\lambda_{máx}$; asimismo, mediante la selección de una función de probabilidad es posible inferir la intensidad de fracturamiento y a partir de las características de las curvas de la primera derivada se obtiene cualitativamente el grado de variabilidad del tamaño de los bloques²⁰. Sin embargo, no se dispone de algún procedimiento para hacer estas determinaciones.

CAPÍTULO 3

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

Se ha establecido que en la naturaleza, debido a variaciones de la litología, grado de diagénesis, esfuerzos a que es sometida la roca, etc. se presenta comúnmente un tamaño múltiple de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado¹⁶⁻²⁰. Por otra parte, un gran porcentaje de los trabajos publicados sobre la caracterización de este tipo de yacimientos, mediante el análisis de resultados de pruebas de variación de presión, supone que los bloques de matriz son de tamaño constante^{5-15,75-78,82-87}.

Solamente se encontraron tres investigaciones que tratan expresamente la variabilidad del tamaño de los bloques de matriz^{19,20,31} y se considera, para el problema directo del análisis del comportamiento de la presión conociendo los parámetros del yacimiento, que únicamente se dispone del desarrollo completo de la solución de este problema para el caso de distribución discreta de NB tamaños de bloques³¹, con análisis de resultados para $NB=1,2,3$ y 5 , por lo que hace falta, en términos generales, extender la teoría anterior para cualquier distribución continua del tamaño de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado.

En relación al problema inverso que consiste en obtener características de la variabilidad del tamaño de los bloques, a partir de las respuestas de presión, no se dispone de procedimientos al respecto; lo más que se encontró fue la

mención de que usando la solución propuesta al problema directo en una regresión no lineal se obtienen los parámetros del yacimiento¹⁹.

Por todo lo anterior, se considera que un problema pendiente de resolver es el desarrollo de soluciones y mejores herramientas de diagnóstico para el caso de yacimientos naturalmente fracturados, tomando en cuenta la variación continua de tamaño de los bloques de matriz; este problema y su solución es el primer objetivo que se plantea y se cumple en la tesis. Adicionalmente y como objetivo central, se desarrolla un procedimiento para resolver el problema inverso correspondiente.

En cuanto a los alcances específicos de esta investigación, primeramente se desarrollan y resuelven las ecuaciones correspondientes al caso de tamaño múltiple de bloques de matriz, considerando funciones continuas de probabilidad, como las lineales y exponenciales, incluyendo ambas los casos en los que prevalecen bloques de matriz pequeños (funciones decrecientes) o bloques de matriz grandes (funciones crecientes). Como situaciones límite de las anteriores se trata el caso en el que todos los tamaños de los bloques, desde h_{min} hasta $h_{máx}$, tienen la misma probabilidad de existencia en el medio poroso naturalmente fracturado (distribución uniforme o rectangular) y la circunstancia en la que sólo se tiene un tamaño de bloques de matriz.

Las soluciones de las ecuaciones de flujo, que incluyen los efectos de daño y almacenamiento, comprenden la respuesta de presión en el pozo, su primera y segunda derivadas, así como funciones logarítmicas de las mismas, con las cuales se obtiene una mayor capacidad de diagnóstico debido a las mejores características de sus representaciones gráficas en papel semi-log o log-log; lo anterior permite una mayor confianza en la identificación del tipo de distribución del tamaño de los bloques. Con las herramientas citadas y el análisis de toda la información disponible del yacimiento, como la de geología, sismología, registros geofísicos, núcleos, etc. se puede determinar con mayor certidumbre la función de probabilidad del tamaño múltiple de bloques de matriz.

El alcance principal de esta tesis es el desarrollo y presentación de un procedimiento para estimar las características de variabilidad del tamaño de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado, a partir del análisis de la información de pruebas de presión. Específicamente, se determinan los parámetros de funciones de probabilidad lineales, exponenciales o de Gauss, que representen mejor la distribución del tamaño de los bloques de matriz. Para ello se acopla el modelo desarrollado de variación continua del tamaño de los bloques a una técnica de optimización⁵⁷ que fue modificada y aplicada en pruebas de interferencia^{60,128}; el programa de cómputo correspondiente se escribió en lenguaje Visual Basic.

El procedimiento de estimación de los parámetros se ilustra mediante un ejemplo de aplicación y la confiabilidad de los resultados se analiza aplicando los conceptos de Dogru y Cols⁵⁸. Estos resultados de las características de variabilidad del tamaño de los bloques se pueden aplicar en el cálculo del gasto de imbibición y del comportamiento de la recuperación de aceite, como se muestra en los ejemplos correspondientes que se desarrollan en esta tesis. Además tienen aplicaciones directamente en la simulación numérica de yacimientos, que requiere de una gran cantidad de información de calidad^{128,132} para que sus resultados sean más confiables, contribuyendo a explotar más racionalmente los yacimientos naturalmente fracturados.

En particular, la información anterior es aplicable cuando se desarrollan operaciones de recuperación secundaria por inyección de agua en rocas mojables por agua, principalmente porque los efectos gravitacionales y el ritmo de imbibición influyen de una manera importante en la explotación de este tipo de yacimientos^{1,21-31}. Asimismo, la información se puede aplicar en procesos de recuperación mejorada, siendo los trabajos de Elsayed y Cols¹³² y de Beliveau¹³³ ejemplos claros de la necesidad de una mejor caracterización de estos yacimientos.

Como complemento a los alcances de esta investigación, cabe establecer que el resto de la información que se requiere en la aplicación del procedimiento que se presenta, así como en las aplicaciones prácticas del mismo (en particular las

características de fracturamiento de la roca y la forma de transmisión de fluidos de la matriz a las fracturas, ϕ_{ma} , k_{ma} , c_{tma} , etc.), se obtiene de diferentes fuentes, como geología^{3,16-18,56,132,141}, análisis de núcleos^{3,16,56,132,141}, registros de pozos^{3,16,98,132,141}, sísmica de pozos^{3,16,131,141}, pruebas de laboratorio^{21-28,30}, flujo de trazadores⁶⁵ y pruebas de variación de presión^{5-14,31-53,60,64,132,142}.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO DEL MODELO PARA YACIMIENTOS CON TAMAÑO MÚLTIPLE DE BLOQUES DE MATRIZ

4.1 ESTABLECIMIENTO DEL MODELO

El yacimiento naturalmente fracturado se considera compuesto por bloques horizontales de espesor variable h_{ma} , que puede tener un número finito NB de tamaños de bloques de matriz $h_{ma1}, h_{ma2}, \dots, h_{maNB}$, o bien la variación de h_{ma} puede ser continua; los bloques están separados por fracturas de espesor h_f .

En el caso de un número finito NB de tamaños de bloques se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{NB} f_i(h_{mai}) = 1, \quad (4.1)$$

donde la función f_i representa el volumen de los bloques de tamaño h_{mai} expresado en fracción del volumen total de la matriz del medio poroso fracturado. Si la variación de h_{ma} es continua, se tiene⁵⁵

$$\int_{h_{Dmin}}^{h_{Dmax}} f_D(h_D) dh_D = 1, \quad (4.2)$$

donde $h_D = h_{ma}/h_{máx}$ es el espesor variable de los bloques en forma adimensional; varía desde $h_{Dmin} = h_{min}/h_{máx}$ hasta $h_{Dmax} = 1$ y $f_D(h_D)$ es la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_D y describe la forma en la que presenta la variabilidad el tamaño de los bloques de matriz. Una representación gráfica de $f_D(h_D)$ se muestra en la Fig. 4.1; se cumple que $A=1$, donde A es el área bajo la curva en los límites indicados.

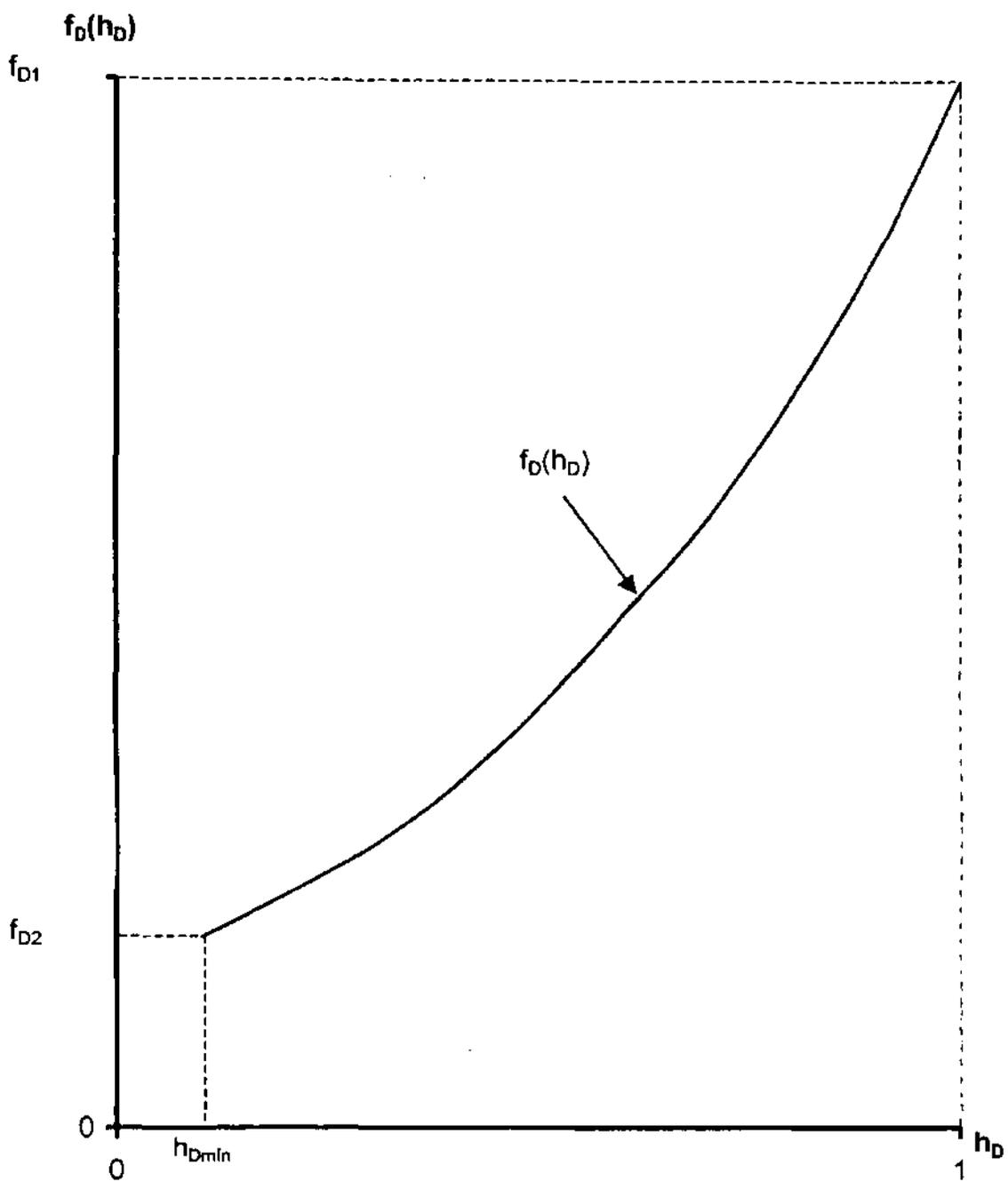


Fig. 4.1 Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_D .

Una curva como la de la Fig. 4.1 indica que la probabilidad de que existan bloques más grandes es mayor.

La red de fracturas tiene una permeabilidad equivalente k_{fb} , una compresibilidad total c_{cf} y una porosidad ϕ_{fb} , donde el subíndice b expresa que el parámetro correspondiente se define usando el volumen total (fracturas y matriz) del medio poroso fracturado. Por otra parte, los bloques tienen una permeabilidad k_{ma} , una porosidad ϕ_{ma} y una compresibilidad total c_{tma} . Dos parámetros, definidos en un trabajo anterior¹³, que están directamente relacionados en los cálculos de efectos gravitacionales y gasto de imbibición, son A_{fb} y A_{fma} por lo que son muy importantes en los diseños de los procesos de recuperación secundaria:

$$A_{fb} = 2/(h_{ma} + h_f) = 2V_{ma}/h_{ma}V_b \quad (4.3)$$

$$A_{fma} = 2/h_{ma} \quad , \quad (4.4)$$

donde V_b y V_{ma} son los volúmenes total y de la matriz; A_{fb} y A_{fma} son las áreas de fracturas por unidad de volumen de roca y por unidad de volumen de matriz, respectivamente; el 2 se origina porque corresponden 2 áreas a cada una de las fracturas.

Se suponen las características de flujo siguientes:

- El fluido se mueve hacia el pozo sólo a través de la red de fracturas.
- El flujo en las fracturas obedece a la ley de Darcy.
- Los gradientes de presión en los yacimientos son pequeños, excepto cerca de los pozos.
- Los efectos gravitacionales son despreciables.

- La red de fracturas se comporta como un medio poroso homogéneo e isótropo.
- El flujo hacia el pozo es radial.
- Una vez que se establece una diferencia de presiones en el sistema matriz-fracturas como consecuencia de la producción de los pozos, los bloques de matriz actúan como una fuente que provee de fluido a las fracturas. El flujo en este sistema ocurre en régimen transitorio y es afectado por el tamaño h_{ma} variable de los bloques.
- El yacimiento es infinito en la dirección radial, la presión inicial es uniforme y el gasto es constante en los pozos.

La ecuación de flujo correspondiente para el caso de un yacimiento naturalmente fracturado con un número finito de tamaños de bloques es³¹:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{FD}}{\partial r_D} \right) - \frac{k_{ma}}{k_{fb}} r_w^2 \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fb_i} \frac{2\pi k_{fb} h}{q\mu} (\nabla \Delta p_{ma}(h_{mai}))_{surf} = \frac{\phi_{fb} c_s}{(\phi_{ci})} \frac{\partial p_{FD}}{\partial t_D} \quad (4.5)$$

con la condición inicial:

$$p_{FD}(r_D, 0) = 0, \quad 1 < r_D < \infty \quad (4.6)$$

y las condiciones de frontera:

$$\left(r_D \frac{\partial p_{FD}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad t_D > 0 \quad (4.7)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{FD}(r_D, t_D) = 0, \quad t_D > 0 \quad (4.8)$$

donde $(\nabla \Delta p_{ma}(h_{mai}))_{surf}$ es el gradiente de la diferencia de presiones en la cara de un bloque de tamaño h_{mai} , y los grupos adimensionales se definen en la forma siguiente:

Radio adimensional, r_D :

$$r_D = r/r_w \quad (4.9)$$

Presión adimensional, p_{fD} :

$$p_{fD} = k_{fb} h \Delta p_f / (\alpha q \mu B) \quad (4.10)$$

Tiempo adimensional, t_D :

$$t_D = \beta k_{fb} t / (\phi c_i)_i \mu r_w^2 \quad (4.11)$$

Adicionalmente

$$(\phi c_i)_i = \phi_{fb} c_{fi} + \phi_{mab} c_{ima} \quad (4.12)$$

En el Apéndice A se presenta la solución a este problema en el espacio de Laplace, la cual es:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0(x)}{sx K_1(x)}, \quad (4.13)$$

donde \bar{p}_{wD} es la transformada de Laplace de la presión en el pozo en forma adimensional p_{wD} y K_0, K_1 son las funciones de Bessel modificadas de segunda clase, de orden cero y uno^{55,80,81},

$$x = s^{1/2} [\omega + (1 - \omega)g]^{1/2} \quad (4.14)$$

$$g(f_i, \eta_{maDi}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{maDi} / s} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{s / \eta_{maDi}}\right), \quad (4.15)$$

$$\omega = \phi_{fb} c_{fi} / (\phi c_i)_i \quad (4.16)$$

$$\eta_{maD1} = k_{ma}(\phi C_1)_i r_w^2 / k_{fb}(\phi C_1)_{ma} h_{ma}^2 \quad (4.17)$$

Si se incluyen los efectos de almacenamiento C_D y daño en el pozo S, la solución \bar{p}_{wD1} está dada por¹³:

$$\bar{p}_{wD1} = (\bar{p}_{wD} + S/s) / (1 + sSC_D + s^2 C_D \bar{p}_{wD}), \quad (4.18)$$

donde \bar{p}_{wD} se obtiene de la Ec. 4.13.

Para el caso de la distribución continua del tamaño de los bloques, la función "g" correspondiente se establece en el Apéndice A,

$$g(f_D, z) = \frac{2}{z_{máx}} \int_{z_{mín}}^{z_{máx}} \frac{f_D \tanh\left(\frac{1}{2} z\right)}{z} dz, \quad (4.19)$$

donde f_D es la probabilidad de que existan bloques de tamaño h_{ma} (se puede entender también como la forma al azar en la que están distribuidos los bloques)

y

$$z = \sqrt{s / \eta_{maD}}. \quad (4.20)$$

En este trabajo se estudian y aplican funciones f_D lineales, exponenciales y normales o de Gauss.

La obtención de la presión adimensional p_{wD} a partir de la Ec. 4.13 se realiza mediante el algoritmo de Stehfest⁷⁴ que se explica en el Apéndice A, donde el límite superior de la sumatoria en la Ec. A.22 es el valor menor entre $N/2$ e i ; N es un número par el cual, con el empleo de doble precisión, se encontró que los mejores valores son 6 y 10 para la función derivada $t_{DP} p_{wD}$ y para la presión

adimensional p_{wD} , respectivamente. p_{wDi} se calcula en forma similar usando la Ec. 4.18.

Las derivadas de $p_{wD}(t_D)$ se calculan mediante una propiedad de la transformada de Laplace (ver el Apéndice A), tomando en cuenta que $p_{wD}(0)=0$, siendo ésta una forma equivalente de expresar la condición inicial (4.6).

Se han desarrollado muchos trabajos de investigación para determinar parámetros del yacimiento, que facilitan el uso y mejoran la aproximación que se obtiene al aplicar curvas tipo en la interpretación de los resultados de pruebas de presión^{8-14,32-47,53,78,79,89,90}, en particular con el empleo de la función derivada^{14,32-38,40-47,53,78,79,90} con la cual es posible analizar al mismo tiempo las respuestas de la presión y sus derivadas.

En uno de estos trabajos⁴⁴ se utiliza el modelo teórico de Bourdet y Cols^{33,34}, donde las curvas tipo de la presión y de la primera derivada de esta variable se combinan en un solo conjunto de curvas tipo, graficando $p_{wD}/(p'_{wDt_D}/C_D)$ en el eje vertical contra t_D/C_D . De esta manera se logra que las escalas verticales tanto de las curvas tipo como de las gráficas de los datos de campo sean idénticas, con lo que el ajuste se restringe en el eje vertical (la gráfica de los datos de campo sólo se mueve horizontalmente para obtener el ajuste).

De manera similar, en esta tesis se desarrollan funciones de p'_{wD} cuyas representaciones gráficas en papel semi-log o log-log tienen buenas

características de diagnóstico, lo que proporciona confiabilidad en la identificación de las diferentes distribuciones de tamaños de los bloques (lineal, exponencial, normal). Por ejemplo, en la Fig. 4.2 se presenta el comportamiento de $d[\log(t_D p'_{wD})]/d[\log t_D]$ contra t_D para dos distribuciones lineales con amplia variación del tamaño de bloques ($h_{\min} = 3$ cm; $h_{\max} = 3000$ cm): Distribución lineal decreciente: $m = -2/(0.999)^2$, $b = 2/(0.999)^2$; distribución lineal creciente: $m = 2/(0.999)^2$, $b = -2000(999)^2$ (en ambos casos $\omega = 0.001$).

Se observa un comportamiento muy diferente de una distribución a otra, lo cual se considera una buena característica de diagnóstico, que puede ser la base (ver la recomendación para investigación futura No. 4) de un procedimiento para determinar el tipo de distribución del tamaño de los bloques.

En el Apéndice A se presenta el desarrollo de:

$$\frac{d(t_D p'_{wD})}{t_D} = t_D p''_{wD} + p'_{wD} \quad (4.21)$$

$$\frac{d[\log(t_D p'_{wD})]}{d[\log t_D]} = (t_D p''_{wD} + p'_{wD}) / p'_{wD}, \quad (4.22)$$

donde $p'_{wD} = \frac{dp_{wD}}{dt_D}$ y $p''_{wD} = \frac{d^2 p_{wD}}{dt_D^2}$.

4.2 VALIDACIÓN DEL MODELO

Como validaciones al modelo se obtuvieron soluciones para las situaciones límite en las que el yacimiento se considera homogéneo⁴⁹ o bien fracturado,

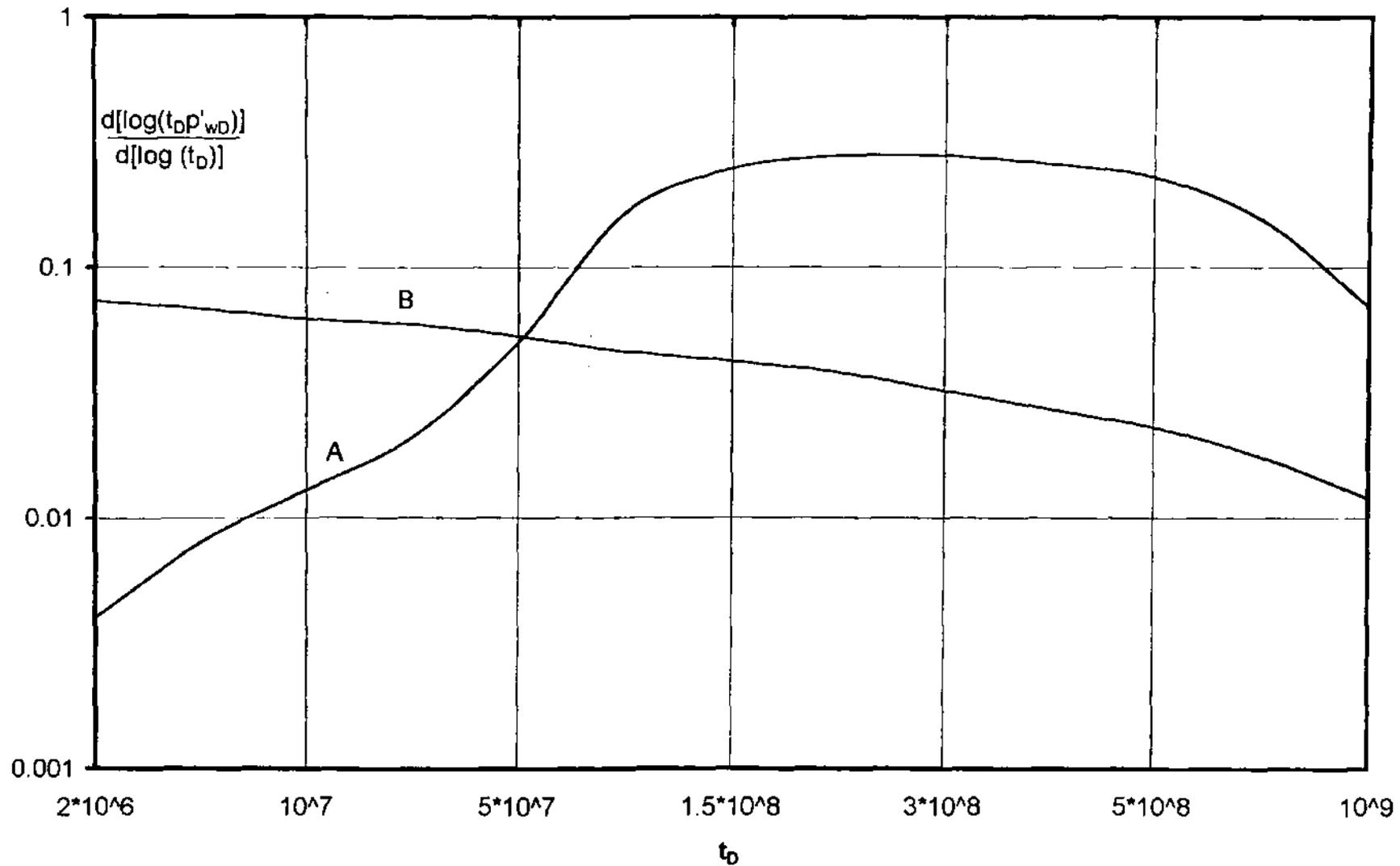


Fig. 4.2 Comportamiento de $d[\log(t_D p'_{wD})]/d(\log t_D)$ contra t_D para dos distribuciones lineales de tamaños de bloques: A: creciente; B: decreciente.

pero con un solo tamaño de los bloques^{10,31,33,35,37,47,53}, adicionalmente se hacen comparaciones con resultados publicados en los que se toma en cuenta la variabilidad del tamaño de los bloques^{19,20,31}.

4.2.1 Resultados para un yacimiento homogéneo

Para este caso $\omega=1$; por consiguiente de la Ec. 4.14, $x = s^{1/2}$ con lo cual el modelo se reduce a la ecuación desarrollada por Agarwal y Cols, para un yacimiento homogéneo⁴⁹ (Ec. 7 del Apéndice A), como se puede comprobar usando la información de un ejemplo presentado por Agarwal y Cols ($S=0$ y $C_D=10^2$; Tabla 3 de esa referencia), obteniéndose los resultados siguientes (Tabla 4.1 y Fig. 4.3):

Tabla 4.1 Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos con el programa de cómputo desarrollado en esta tesis (Programa) y los publicados para un yacimiento homogéneo (Tabla 3)⁴⁹.

t_D	p_{wD}	
	Tabla 3	Programa
10^2	0.7975	0.7998
10^3	3.2681	3.2637
10^4	4.9567	4.9578
10^5	6.1548	6.1554
10^6	7.3116	7.3121
10^7	8.4635	8.4640
10^8	9.6149	9.6154

Se considera que las pequeñas diferencias observadas se deben a que los procedimientos utilizados para obtener ambos resultados fueron diferentes.

Otra prueba del modelo para un yacimiento homogéneo consistió en la comparación de resultados de la segunda derivada. En la Tabla 4.2 se presenta la comparación con los resultados de Jiménez⁴⁷, que fueron leídos de su figura

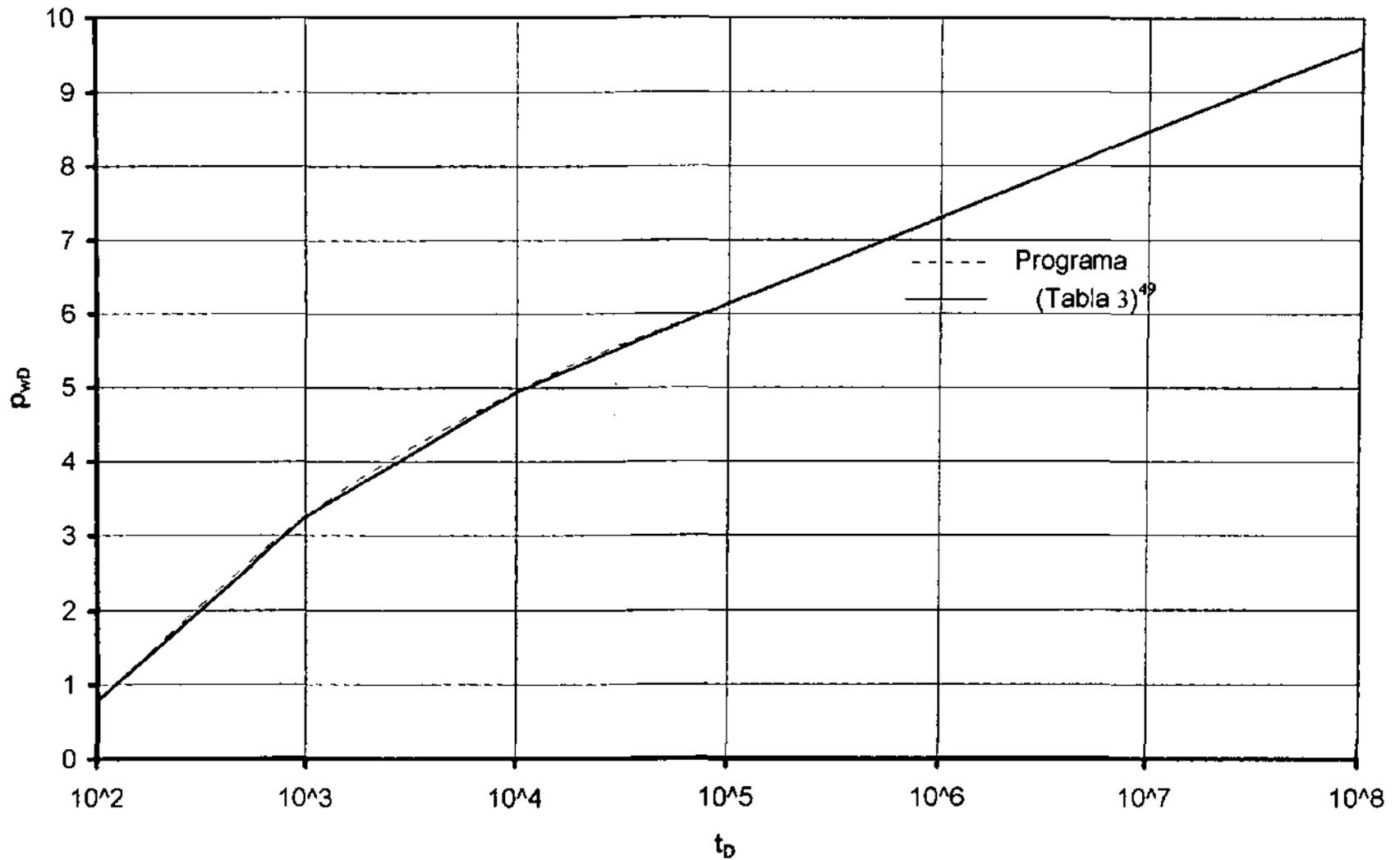


Fig. 4.5 Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos con el programa de cómputo desarrollado en esta tesis (Programa) y los publicados para un yacimiento homogéneo (Tabla 3).

de la pág. 21 , en los que se puede observar muy buena concordancia; éstos corresponden a $C_D e^{2S}=100$.

Tabla 4.2 Comparación de resultados obtenidos en esta tesis con los correspondientes a la tesis de Jiménez⁴⁷, para la función de la segunda

derivada, $p''_{wD} = \frac{d^2 p_{wD}}{d(t_D/C_D)^2}$.

t_D/C_D	$(t_D/C_D) p''_{wD} $	
	Jiménez	Tesis
1	0.21	0.209
5	1.25	1.246
10	1.50	1.502
50	0.72	0.725
10^2	0.60	0.594
5×10^2	0.53	0.529
10^3	0.50	0.511
5×10^3	0.50	0.498
10^4	0.50	0.499
5×10^4	0.50	0.502

4.2.2 Resultados para un yacimiento naturalmente fracturado, considerando un sólo tamaño de los bloques.

En primer lugar se hizo la comparación con resultados de p_{wD} de un trabajo en el que se toma en cuenta un número finito NB de tamaños de bloques³¹, pero

usando los correspondientes a $NB=1$ (Fig. 6 de esa referencia, $\omega=0.1$, flujo transitorio matriz-fractura). Ésto se presenta en la Tabla 4.3, donde se observa en general muy buena concordancia; los resultados del programa de cómputo se obtuvieron considerando un rango muy pequeño ($F_h=0.99$) de variación, con lo que se simula en la práctica un solo tamaño de bloques.

Tabla 4.3 Comparación de resultados de p_{wD} de esta tesis con los publicados por Cinco-Ley y Cols³¹, para el caso de un sólo tamaño de bloques ($NB=1$).

t_D	p_{wD}	
	Ref. 31	Tesis
10^2	4.95	4.957
10^3	5.95	6.005
10^4	6.80	6.916
10^5	7.45	7.658
10^6	8.10	8.294
10^7	8.75	8.880
10^8	9.65	9.630
10^9	10.80	10.767

Una prueba adicional al modelo para un sólo tamaño de bloques se realizó utilizando resultados de Bourdet y Cols³⁵, del inicio de la prueba de presión y del inicio del período de transición, para $C_D e^{2S}=4$, $\omega=10^{-3}$ (Ejemplo B), flujo transitorio matriz-fracturas; en la tesis se usó $F_h=0.999$ para simular un tamaño de bloques; la comparación se muestra para la función derivada $(t_D/C_D)p'_{wD}$ en la Tabla 4.4; los resultados en general son parecidos entre sí, puede notarse que hasta $(t_D/C_D)=2 \times 10^{-1}$ predomina el efecto de almacenamiento.

Tabla 4.4 Comparación de resultados de esta tesis con los de Bourdet y Cols³⁵.

$(t_D/C_D)p'_{wD}$		
t_D/C_D	Ref. 35	Tesis
10^{-1}	0.10	0.097
2×10^{-1}	0.20	0.188
5×10^{-1}	0.44	0.434
10^0	0.78	0.771
2×10^0	1.20	1.232
5×10^0	1.60	1.679
2×10	0.60	0.823
5×10	0.32	0.317
10^2	0.28	0.255
2×10^2	0.26	0.263
5×10^2	0.25	0.267
10^3	0.25	0.263

4.2.3 Resultados en los que se toma en cuenta la variabilidad del tamaño de los bloques.

En las Tablas 4.5 y 4.6 se presentan comparaciones de resultados para una variación discreta y una continua del tamaño de los bloques de matriz; en el caso de la variación discreta la comparación es con los resultados de la Fig. 15 de la Ref. 31, donde se tiene la información siguiente: $NB=5$; $f_1=f_2=\dots=f_5=0.2$ (los 5 tamaños de bloques ocupan el mismo volumen de poros); $\eta_1=10^{-8}$, $\eta_2=5 \times 10^{-8}$, $\eta_3=10^{-7}$, $\eta_4=5 \times 10^{-7}$, $\eta_5=10^{-6}$; $\omega=10^{-2}$. Para la variación continua, se comparan resultados con los de la Fig. 4 de la Ref. 20, donde se tiene una variación exponencial del tamaño de los bloques (ver la Ec. 2.33) y los datos $\omega=10^{-1}$; $F_h=10^{-1}$; la comparación es con los resultados correspondientes a las curvas con $\alpha=-20, -5, 0, 5, 20$, que representan desde un predominio de bloques

pequeños, ($\alpha=20$), hasta el predominio de bloques grandes, ($\alpha=-20$). En términos generales los resultados concuerdan muy bien.

Tabla 4.5 Comparación de resultados de p_{wD} para una distribución discreta de tamaños de bloques ($NB=5$), (Fig. 15 de la Ref. 31 y esta tesis).

p_{wD}		
t_D	Ref. 31	Tesis
10^4	6.03	6.02
10^5	6.60	6.46
10^6	7.45	7.40
10^7	8.50	8.55

Tabla 4.6 Comparación de resultados de $t_{DP} p_{wD}$ para distribuciones exponenciales de tamaños de bloques. (Fig. 4 de la Ref. 20 y esta tesis)

$t_{DP} p_{wD}$										
t_D	$\alpha = 20$		$\alpha = 5$		$\alpha = 0$		$\alpha = -5$		$\alpha = -20$	
	Ref.20	Tesis	Ref.20	Tesis	Ref.20	Tesis	Ref.20	Tesis	Ref.20	Tesis
10	0.45	0.468	0.46	0.475	0.47	.480	0.47	.483	0.47	.484
10^2	0.44	0.446	0.45	0.463	0.46	0.477	0.475	.487	0.48	.489
10^3	0.37	0.382	0.415	0.411	.43	.444	0.455	.467	0.46	.474
10^4	0.31	0.306	0.33	.334	.36	.375	0.41	.417	0.42	.431
10^5	0.40	0.389	.335	.342	.32	.328	.335	.342	0.35	.357
10^6	0.50	0.500	.45	.463	.375	.393	.31	.32	0.285	.288
10^7	0.50	0.50	.50	.499	.49	.493	.47	.489	0.47	.471
10^8	0.50	0.50	.50	.500	.50	.50	.50	.50	.50	.50

Por otra parte, en la Fig. 4.4 se muestran las funciones densidad de probabilidad, f_D , para los valores de " α " mencionados; por ejemplo, la curva para $\alpha=20$ representa una distribución con un fuerte predominio de los bloques pequeños y rápidamente disminuye la probabilidad de que existan bloques cada vez más grandes; comparativamente, la densidad de probabilidad de que existan los

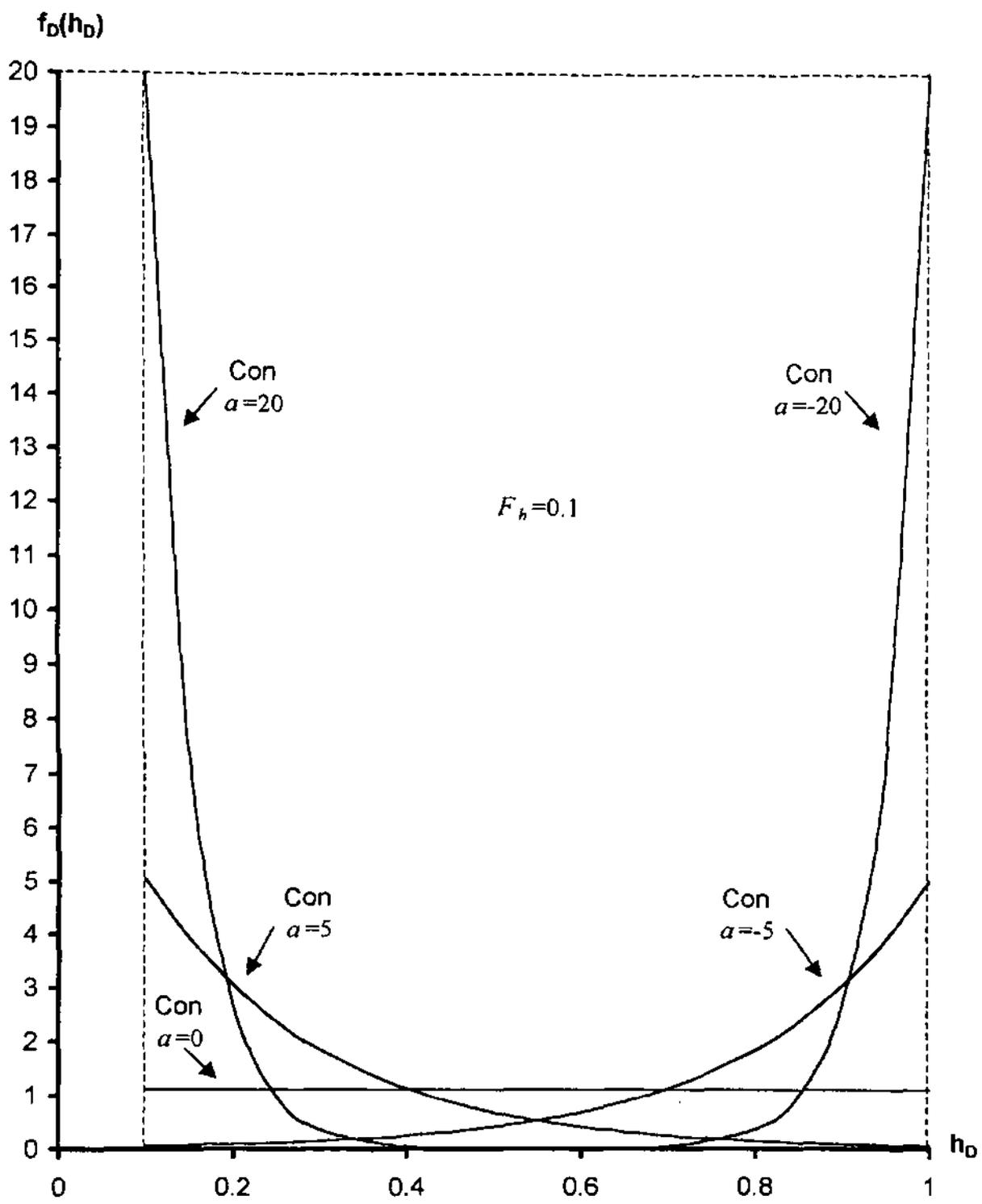


Fig. 4.4 Función de densidad de probabilidad exponencial para $F_h = 0.1$ y valores de $a = 20, 5, 0, -5, -20$.

bloques de tamaño mínimo, ($h_D=0.1$), es 20 contra 1 de que se tengan bloques con $h_D=0.25$ y prácticamente cero para los bloques desde $h_D=0.45$ y más grandes. La curva para $\alpha=0$ corresponde a la distribución uniforme o rectangular (todos los tamaños de bloques tienen la misma probabilidad de existir en el medio poroso); en este caso $f_D=10/9$ para todos los valores de h_D .

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SOLUCIONES

5.1 PARÁMETROS BÁSICOS.

Además de los parámetros que afectan el flujo de fluidos en yacimientos convencionales, como la permeabilidad, porosidad, compresibilidad, etc., en yacimientos naturalmente fracturados se deben considerar parámetros y aspectos propios de este tipo de medios porosos, como la conductividad y la extensión de las fracturas, su almacenamiento, la manera en la que ocurre la transferencia de fluidos de la matriz a la red de fracturas, y el tamaño, la forma y la distribución de los bloques.

Como en esta tesis el objetivo principal es tomar en cuenta el tamaño múltiple de los bloques de matriz, incluyendo la forma de distribución de los diferentes tamaños y su rango de variación, entonces para este fin los parámetros básicos involucrados son aquellos que intervienen en las funciones de densidad de probabilidad⁵⁵ de la variable aleatoria de tamaño de bloques h_{ma} . Es decir, la pendiente " m " y la ordenada al origen " b " para funciones lineales; la constante " α " que caracteriza la variación exponencial y una constante F_h que define el rango de variación del tamaño de bloques, para funciones exponenciales y, finalmente, el valor medio μ^* y la desviación estándar σ para funciones normales o de Gauss. Adicionalmente, en el comportamiento de las soluciones interviene el parámetro ω , como se puede observar en las Ecs. 4.13 y 4.14.

5.1.1 Funciones lineales.

Estas funciones de densidad de probabilidad son de la forma

$$f_D = mh_D + b, \quad (5.1)$$

donde h_D representa el tamaño variable de los bloques en forma adimensional. En la Fig. A.1 del Apéndice A se muestra una de estas funciones, para el caso de $m > 0$ (función lineal creciente), donde se incluye el rango de variación del tamaño de los bloques desde h_{min} hasta $h_{máx}$, que corresponde a un rango de h_D , $(h_{min}/h_{máx})$, de F_h a 1; $F_h = h_{min}/h_{máx}$. Esta función de distribución con $m > 0$ significa que bloques cada vez más grandes tienen cada vez mayor probabilidad de existir, siendo lineal la relación de aumento en frecuencia con aumento de tamaño; en otras palabras, para este caso en que $m > 0$, predominan los bloques grandes (baja intensidad de fracturamiento) y a mayores valores de "m" es mayor el predominio de esos bloques grandes (a mayor valor de "m" es menor el fracturamiento); realmente, el predominio de bloques grandes significa que el mayor volumen poroso se encuentra en esos bloques y no que el número de ellos sea mayor que el de bloques pequeños.

Lo anterior ocurre en general, pero en ciertos casos se presentan excepciones, como se puede observar en la Tabla 7.8 de uno de los ejemplos de aplicación práctica, de la determinación de la distribución del tamaño de los bloques.

Como se debe cumplir que $A_1 + A_2 = 1$ (propiedad de las funciones de densidad de probabilidad⁵⁵ y se obtiene a partir de la Ec. 4.2), que equivale a que la suma de los volúmenes de bloques de todos los tamaños es igual al volumen total, entonces de la Fig. A.1 se puede deducir que existe una relación entre F_h , m y b , por lo que no se debe considerar por separado la variación de cada uno de estos parámetros. Así, tomando en cuenta lo anterior:

$$(1 - F_h)(f_{D_1} + f_{D_2}) = 2, \text{ (se deduce de } A_1 + A_2 = 1 \text{)}.$$

Escribiendo la ecuación $f_D = mh_D + b$ para $h_D = F_h$ y $h_D = 1$ y sumando miembro a miembro las 2 ecuaciones que resultan se obtiene

$$f_{D_1} + f_{D_2} = m(1 + F_h) + 2b.$$

Eliminando $f_{D_1} + f_{D_2}$ y despejando b :

$$b = \frac{2 - m(1 - F_h^2)}{2(1 - F_h)}. \quad (5.2)$$

Esta misma relación se mantiene (la demostración es similar) si la distribución es lineal decreciente o uniforme; es decir, si $m \leq 0$.

Por ejemplo:

Si $F_h = 0$ (rango de variación del tamaño de los bloques desde cero hasta un tamaño máximo), entonces $b = (2 - m)/2$ y los rangos de variación de m y b para la distribución lineal creciente son $[0,2]$ y $[0,1]$, respectivamente.

De la Ec. 5.2 se puede deducir también que sólo a medida que F_h aumente se puede incrementar m , tal que $m > 2$. Considerando que $F_h = h_{\min}/h_{\max}$, se deduce que $F_h \rightarrow 1$ a medida que se reduce el rango de tamaños de los bloques; un solo tamaño de ellos se representa con $F_h = 1$. Con $m = 0$ (distribución rectangular o uniforme) significa que todos los tamaños tienen la misma probabilidad de existir en el medio poroso fracturado y esta probabilidad constante se obtiene de la Ec. 5.1 y de la Fig. A.1, la cual es

$$f_D = 1/(1-F_h). \quad (5.3)$$

5.1.2 Funciones exponenciales.

Se representan por medio de la ecuación

$$f_D = \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-aF_h} - e^{-a}}, \quad (5.4)$$

donde "a" es una constante real que define las características de la curva exponencial y F_h tiene el mismo significado que en las funciones lineales; esta ecuación no está definida para $a = 0$, pero corresponde a la función uniforme o rectangular. En la Fig. 4.4 se presentan estas funciones para valores de "a" de -20, -5, 0, 5 y 20.

Aplicando la Ec. 4.2:

$$\frac{a}{e^{-aF_h} - e^{-a}} \int_{F_h}^1 e^{-ah_D} dh_D = 1. \quad (5.5)$$

Esta ecuación se cumple independientemente de los valores que tengan "a" y F_h , por lo que, a diferencia de las distribuciones lineales, aquí se pueden variar por separado a o F_h o ambas; los rangos correspondientes de variación son $-\infty$ a $+\infty$ y 0 a 1. El aumento o disminución con h_D del predominio de los bloques grandes o de los pequeños ocurre con cambios más pronunciados que en las funciones de densidad de probabilidad lineales; el resto de lo que se discute en la Sección 5.1.1 sobre funciones lineales se aplica igual, o en forma similar, a las funciones exponenciales.

5.1.3 Funciones normales o de Gauss.

Su forma es ^{91,92}:

$$f(x^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) e^{-(1/2\sigma^2)(x^* - \mu^*)^2}, \quad (5.6)$$

donde σ es la desviación estándar, que significa la dispersión promedio de los valores posibles de la variable aleatoria x^* con respecto a su media μ^* ; matemáticamente, σ es la raíz cuadrada positiva de σ^2 , siendo

$$\sigma^2 = \int_a^b (x^* - \mu^*)^2 f(x^*) dx^*. \quad (5.7)$$

A σ^2 se le conoce como segundo momento con respecto a la media de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria y también como variancia o varianza.

En la Fig. 5.1 se muestra la gráfica de estas funciones, cuya curva tiene la forma típica de campana.

El rango de valores de x^* es de $-\infty$ a $+\infty$, pero tomando en cuenta que^{55,92} el 99.72% de todos los valores posibles de x^* queda entre $\mu^*-3\sigma$ y $\mu^*+3\sigma$, entonces para fines prácticos se considera que todos los valores de x^* quedan en este último rango; para el caso en estudio donde la variable aleatoria es h_D , tal que $F_h \leq h_D \leq 1$ y $\mu^* = (1 + F_h)/2$, se tiene

$$(1 + F_h)/2 - 3\sigma \leq h_D \leq (1 + F_h)/2 + 3\sigma, \quad (5.8)$$

de donde $\sigma = (1 - F_h)/6$. Así por ejemplo, para $F_h = 0.1$ se tienen $\mu^* = 0.55$ y $\sigma = 3/20$, con lo cual la función de densidad de probabilidad de Gauss normalizada es:

$$f_D(h_D) = \frac{20}{3\sqrt{2\pi}} e^{(-200/9)(h_D - 0.55)^2}. \quad (5.9)$$

La gráfica de esta función se presenta en la Fig. 5.2, donde el rango de variación de x^* de $\mu^*-3\sigma$ a $\mu^*+3\sigma$ corresponde al rango de variación de h_D de F_h a 1.

5.2 PERÍODO DE TRANSICIÓN.

Al inicio de una prueba de decremento de presión (valores muy pequeños de tiempo t_D), la contribución de los bloques de matriz es despreciable y la producción se debe a la expansión del fluido que se encuentra en las fracturas; el tamaño y la distribución del tamaño de los bloques no afectan en estas

$f(x')$: Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria x' .

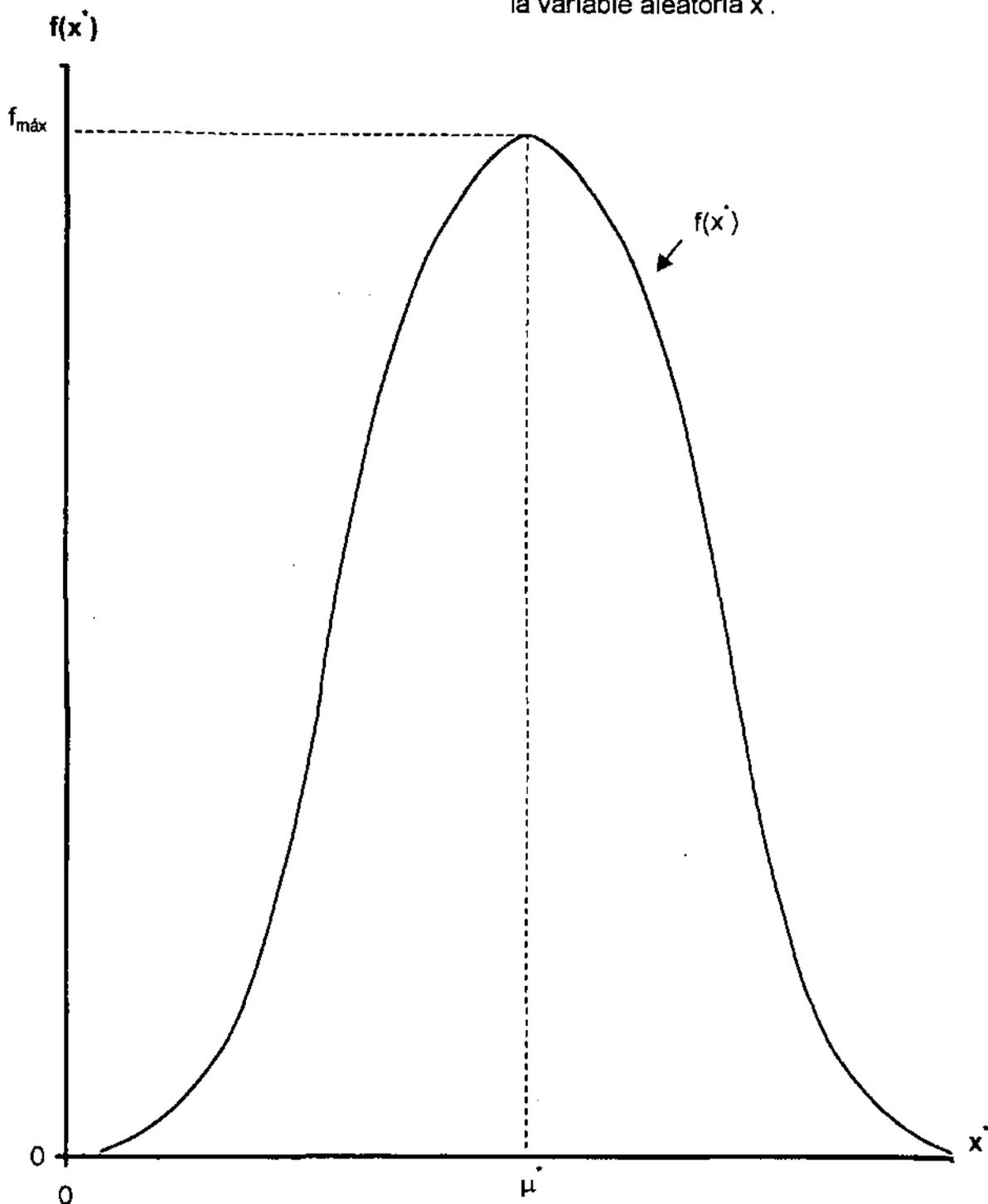


Fig. 5.1 Función de densidad de probabilidad de Gauss. Desde $\mu - 3\sigma$ hasta $\mu + 3\sigma$ se tiene el 99.72% del área bajo la curva^{55,92}.

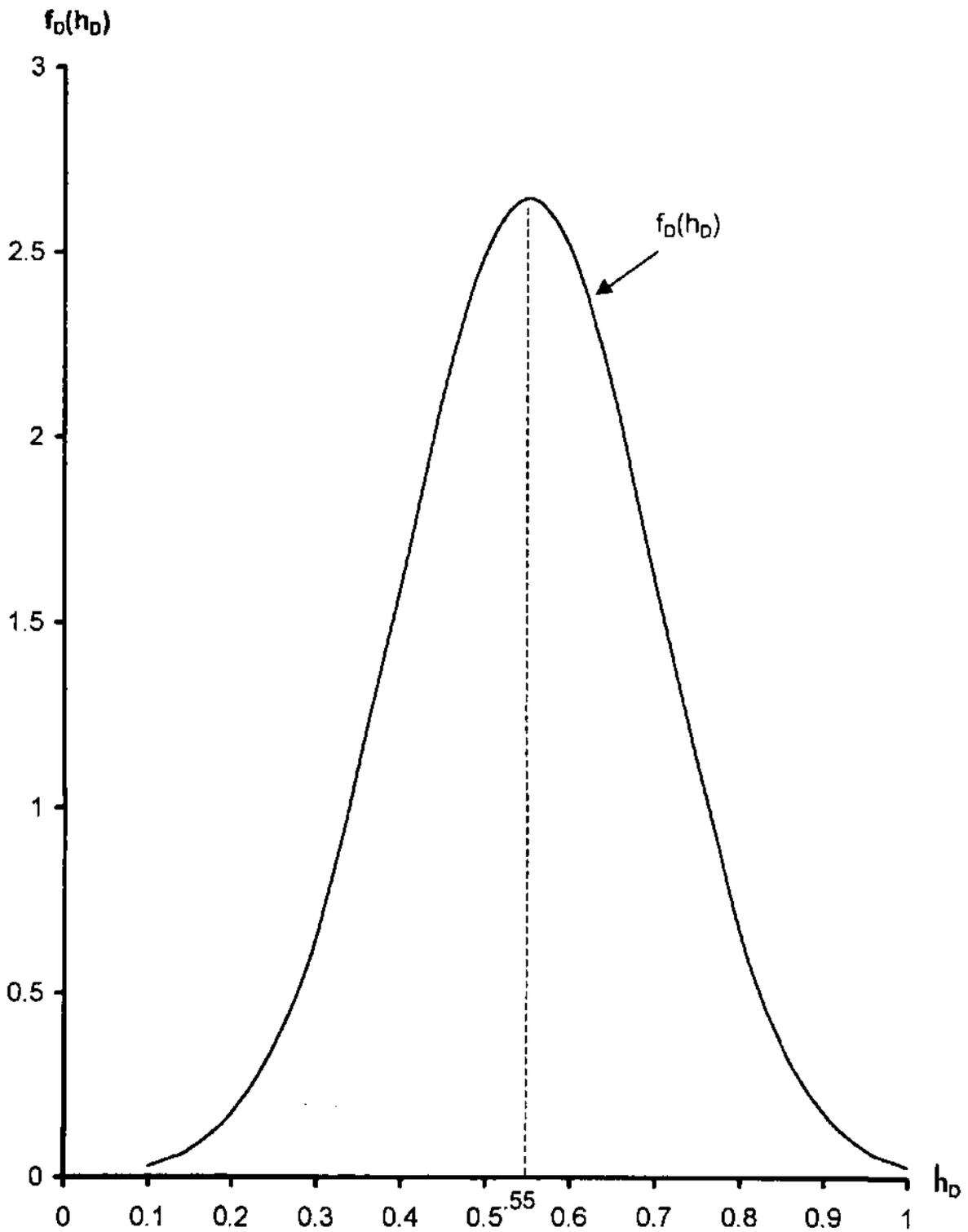


Fig. 5.2 Función de densidad de probabilidad de Gauss normalizada para $F_h=0.1$, $\mu^*=0.55$ y $\sigma=3/20$; desde $\mu^*-3\sigma$ hasta $\mu^*+3\sigma$ se tiene el 99.72 % del área bajo la curva^{55,92}.

condiciones al comportamiento de la presión en el pozo p_{wD} . Para valores prácticos de t_D , en los inicios de la producción, p_{wD} está dada por ³¹:

$$p_{wD}(\omega, t_D) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t_D}{\omega} + 0.80907 \right) \quad (5.10)$$

Se dice que este es el período de flujo dominado por la red de fracturas, en el cual el comportamiento de p_{wD} es afectado solamente por el almacenamiento ω de las mismas.

A tiempos grandes la expansión del sistema total matriz-fracturas contribuye a la producción y en la matriz se alcanza una condición de flujo tipo pseudo-estacionario³¹; en estas circunstancias p_{wD} se calcula con:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907), \quad (5.11)$$

que representa el comportamiento de la presión en el pozo para el flujo cilíndrico en un yacimiento homogéneo; es decir, en las condiciones mencionadas, el yacimiento naturalmente fracturado se comporta igual que un yacimiento homogéneo en cuanto a la respuesta de presión, por lo que mediante su análisis tampoco es posible obtener características de los bloques de matriz.

Entre los períodos de flujo descritos existe una transición, denominada precisamente período o zona de transición, donde la respuesta de presión es afectada por los tamaños de los bloques, su distribución en el medio poroso y la manera en la que se transfiere fluido de la matriz a la red de fracturas, ya sea en régimen transitorio USS (modelos de De Swaan⁷ y Kazemi⁶) o en régimen pseudo-estacionario PSS (modelo de Warren y Root⁵). El período de transición se inicia

una vez que se ha establecido un desequilibrio de presiones entre la matriz y las fracturas y aquélla empieza su aportación de fluido a la red de fracturas. La identificación del régimen de flujo (PSS o USS) se realiza como se establece en el Capítulo 2.

Para el caso de la distribución discreta de los tamaños de bloques de matriz, en la Ref. 31 se demuestra que los tamaños de los bloques y su distribución afectan la respuesta de p_{wD} a través de η_{maDi} y f_i , que son parámetros involucrados en la Ec. 4.15; en esta tesis se presenta el desarrollo correspondiente para la distribución continua de los tamaños de los bloques, donde los efectos citados se incluyen en z y f_D de la Ec. 4.19.

5.3 RESULTADOS PARA DISTRIBUCIONES DISCRETAS.

Sólo se obtuvieron resultados de distribución discreta para fines comparativos. En la Tabla 4.5 del Capítulo 4 se presentan resultados del modelo para la presión adimensional en el pozo p_{wD} , con $NB=5$ e información adicional que se presenta en el mismo capítulo.

5.4 RESULTADOS PARA DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

5.4.1 Distribuciones lineales:

Estas son distribuciones de tamaños de bloques que tienen densidades de probabilidad representadas por la Ec. 5.1.

En la Tabla 5.1 se presentan resultados de p_{wD} y $t_{DP'wD}$ para 3 casos:

A: $m=0$; $b=10/9$ (distribución uniforme o rectangular).

B : $m = -100/81$; $b = 145/81$ (distribución lineal decreciente).

C : $m = +100/81$; $b = 35/81$ (distribución lineal creciente).

Para los tres casos $\omega=10^{-2}$; $F_h=0.1$; $C_D=0$; $S=0$.

Tabla 5.1 Resultados de p_{wD} y $t_{DP'_{wD}}$ para 3 densidades de probabilidad lineales: A(uniforme), B(decreciente), C(creciente); $\omega = 10^{-2}$, $F_h=0.1$, $C_D=0$, $S=0$.

t_D	p_{wD}			$t_{DP'_{wD}}$		
	A	B	C	A	B	C
10	3.727	3.707	3.749	0.437	0.429	0.446
2x10	4.024	3.998	4.053	0.418	0.408	0.429
5x10	4.397	4.360	4.436	0.390	0.379	0.403
10 ²	4.660	4.615	4.708	0.368	0.357	0.381
2x10 ²	4.906	4.855	4.964	0.344	0.334	0.358
5x10 ²	5.209	5.148	5.278	0.317	0.308	0.328
10 ³	5.423	5.356	5.499	0.299	0.293	0.309
2x10 ³	5.626	5.555	5.707	0.286	0.281	0.293
5x10 ³	5.881	5.807	5.969	0.273	0.270	0.278
10 ⁴	6.068	5.992	6.158	0.267	0.265	0.270
2x10 ⁴	6.254	6.176	6.345	0.269	0.269	0.269
5x10 ⁴	6.498	6.421	6.589	0.280	0.286	0.272
10 ⁵	6.687	6.612	6.774	0.293	0.303	0.280
2x10 ⁵	6.899	6.832	6.975	0.318	0.332	0.298
5x10 ⁵	7.205	7.155	7.260	0.355	0.373	0.328
10 ⁶	7.459	7.423	7.495	0.382	0.404	0.357
2x10 ⁶	7.731	7.712	7.750	0.414	0.434	0.393
5x10 ⁶	8.134	8.129	8.138	0.462	0.472	0.45
10 ⁷	8.467	8.466	8.467	0.49	0.494	0.485
2x10 ⁷	8.811	8.811	8.811	0.500	0.500	0.500
5x10 ⁷	9.269	9.269	9.269	0.500	0.500	0.500
10 ⁸	9.615	9.615	9.615	0.500	0.500	0.500

Los resultados anteriores se muestran en forma gráfica en las Figs. 5.3 y 5.4, para

p_{wD} y $t_{DP'_{wD}}$, respectivamente.

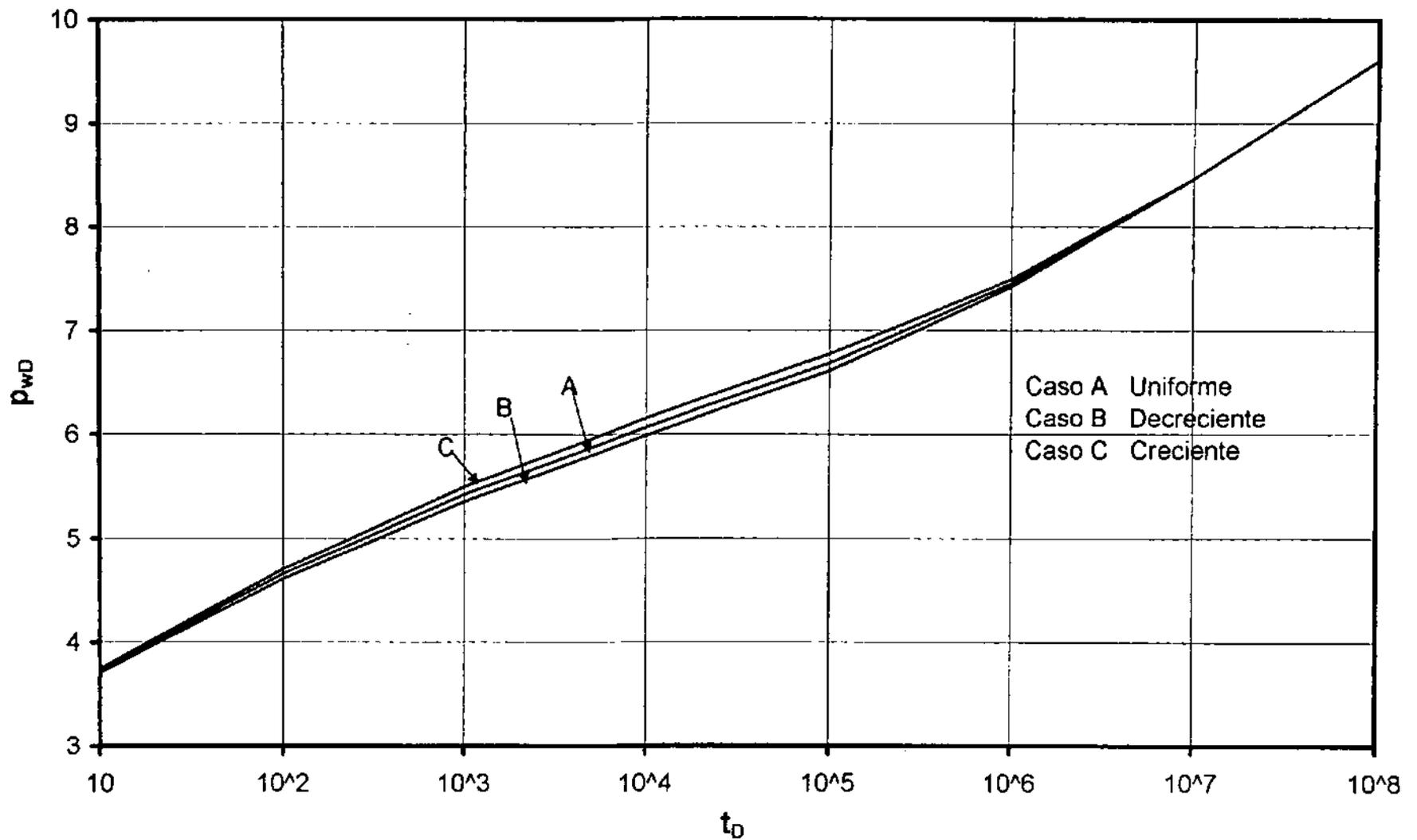


Fig. 5.3 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la función densidad de probabilidad lineal (uniforme, decreciente, creciente). $\omega=10^{-2}$, $F_h=0.1$, $C_D=0$, $S=0$.

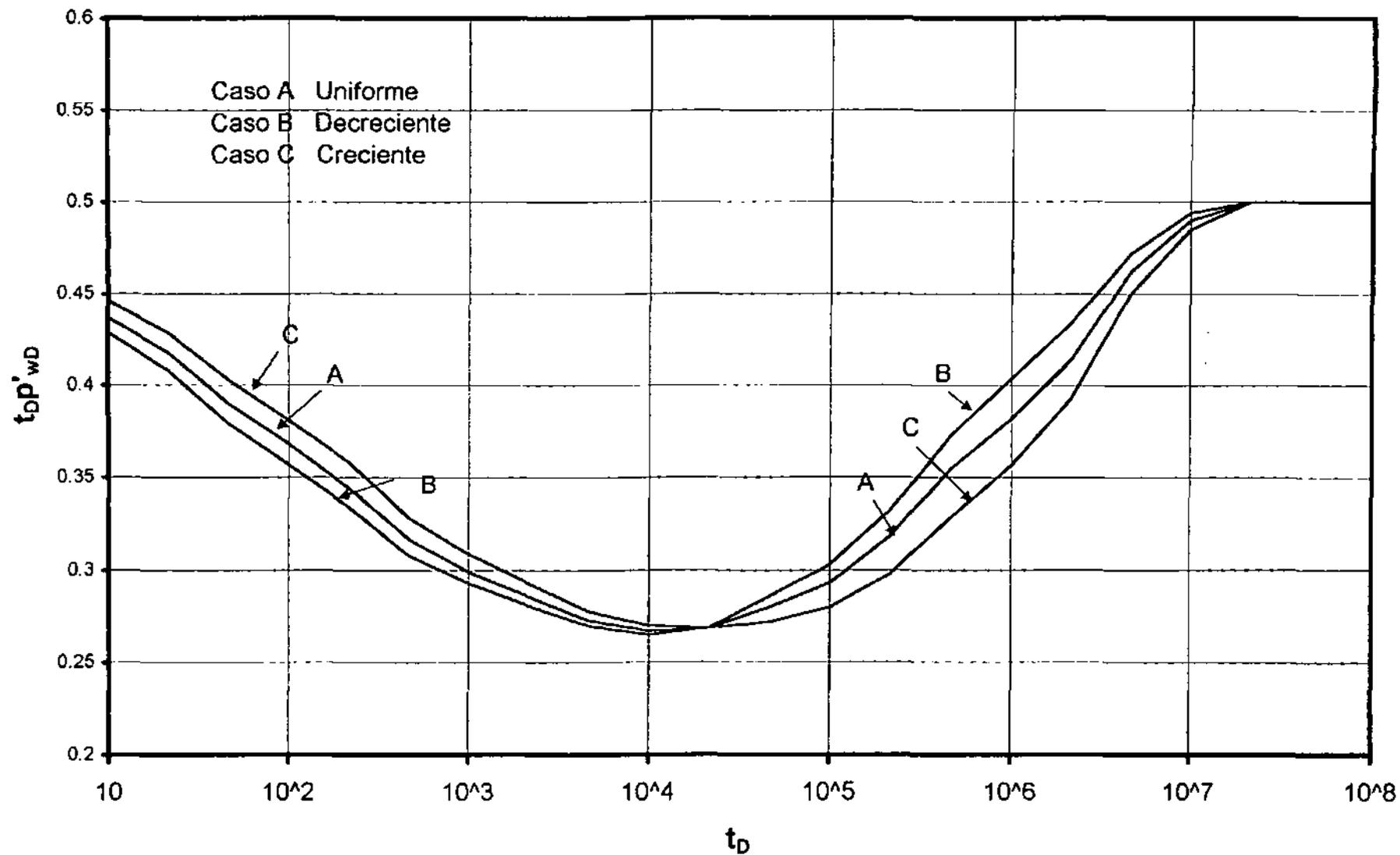


Fig. 5.4 Comportamiento de $t_{Dp'_{WD}}$ contra t_D para la función densidad de probabilidad lineal (uniforme, decreciente, creciente); $\omega=10^{-2}$, $F_h=0.1$, $S=0$.

Los casos A, B y C de esta distribución continua corresponden a las distribuciones discretas con $f_1=f_2=\dots=f_5=0.2$; $f_1=0.30$, $f_2=0.25$, $f_3=0.20$, $f_4=0.15$, $f_5=0.10$ y $f_1=0.10$, $f_2=0.15$, $f_3=0.20$, $f_4=0.25$, $f_5=0.30$, de las Figs. 15 y 16 de la Ref. 31. Se usaron en ambas distribuciones los mismos valores de ω y η_{maD} . Tanto la respuesta de presión p_{wD} (Fig. 5.3 y Fig. 15(Ref. 31)) como de la función derivada $t_D p'_{wD}$ (Fig. 5.4 y Fig. 16 (Ref.31)), muestran un comportamiento muy similar entre las distribuciones discretas y las continuas; esto se observa por ejemplo en la Fig. 5.5 para p_{wD} donde las curvas A, B y C en el caso de distribuciones lineales continuas corresponden a las distribuciones rectangular, decreciente y creciente, respectivamente, con $F_h = 0.1$; la información complementaria se presenta en el apartado 5.4.1 de esta tesis y en la Ref. 31.

Así, las curvas de p_{wD} exhiben entre sí una forma parecida para los diferentes casos y las 3 tienden a mostrar una porción recta semi-log hacia el final (a la derecha) de la gráfica; el período de transición (discutido en la Sección 5.2), finaliza aproximadamente en $t_D=2 \times 10^7$ (esto se observa mejor en la Fig 5.4, correspondiendo al tiempo a partir del cual la función derivada tiene un valor de 0.5); además la mayor caída de presión en el período ocurre en la distribución lineal creciente, esto último congruente con la realidad física puesto que predominan los bloques grandes que presentan una mayor resistencia al flujo en comparación con los bloques pequeños.

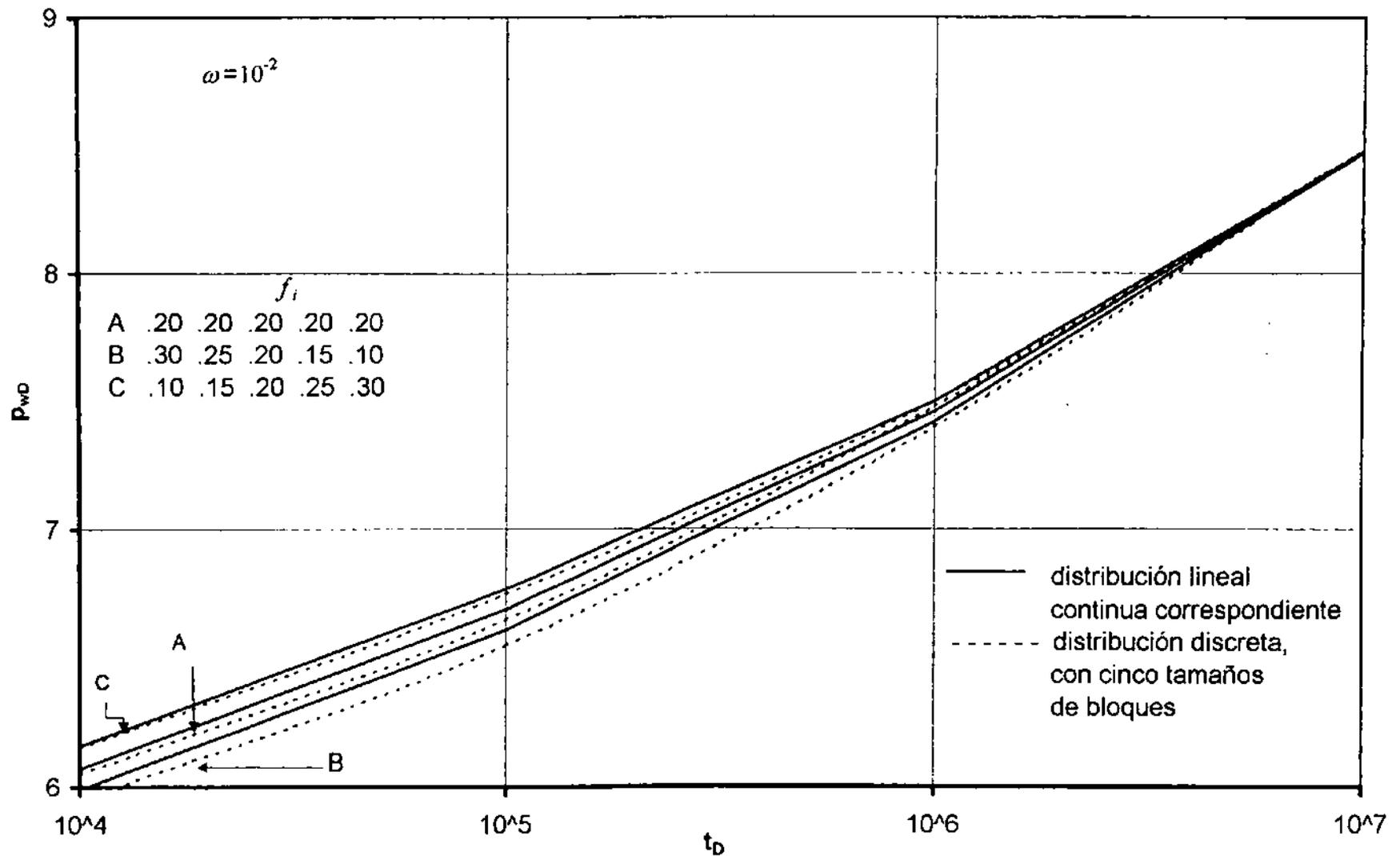


Fig. 5.5 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la distribución lineal continua y la distribución discreta con cinco tamaños de bloques.

Adicionalmente, las curvas de p_{wD} en el período de transición tienden a presentar (esto no se observa con claridad por el carácter numérico de la solución obtenida en esta tesis) la recta semi-log con una pendiente de $\frac{1}{2}$ de la correspondiente a las rectas paralelas, que fue demostrada³¹ en el caso de que no exista restricción al flujo entre matriz y la red de fracturas.

En las Figs. 5.3 y 5.4 se observa también que el período de transición es muy amplio, iniciándose desde antes de $t_D=10$ y terminando, como ya se estableció, alrededor de $t_D=2 \times 10^7$.

Las curvas de la función derivada (Fig. 5.4) presentan además otras características: (a) la que corresponde a la función de distribución lineal creciente tiene valores mayores que la correspondiente a la lineal decreciente en la primera parte del período y esta situación se invierte a partir de $t_D=2 \times 10^4$; (b) el fondo del valle está más a la derecha (ocurre a tiempos mayores) en la curva de la distribución creciente y (c) a partir de $t_D=2 \times 10^7$ sus valores son 0.5, lo que significa que aquí se inicia el llamado flujo radial homogéneo infinito^{12-14,33-37}, en el que ya no es posible identificar ninguna característica que proporcione información relacionada con el tamaño variable de los bloques del medio poroso naturalmente fracturado.

Los rasgos distintivos anteriores se refieren en general al efecto de la forma de la distribución lineal (creciente, uniforme, decreciente) del tamaño variable de los bloques de matriz, sobre la respuesta de presión y su primera función derivada.

5.4.1 Distribuciones exponenciales.

Sus funciones de densidad de probabilidad están dadas por la Ec. 5.4 y una gráfica de ellas para $\alpha = -20, 5, 0, +5, +20$ y $F_h = 0.1$ se presenta en la Fig. 4.4. Por otra parte, como se demuestra en la Sección 5.1.2, los valores de " α " son independientes a los de F_h ; es decir, la Ec. 4.2 se cumple independientemente de los valores de α y de F_h . En la Tabla 5.2 se muestran resultados de

Tabla 5.2 Resultados de p_{wD} y $t_{DP'wD}$ para 3 densidades de probabilidad exponenciales: D (uniforme), E (decreciente), F (creciente); $\omega = 10^{-2}$, $F_h = 0.1$

t_D	p_{wD}			$t_{DP'wD}$		
	D	E	F	D	E	F
10	3.804	3.675	3.877	0.474	0.421	0.494
2x10	4.129	3.960	4.210	0.464	0.398	0.492
5x10	4.540	4.312	4.637	0.447	0.368	0.487
10 ²	4.840	4.559	4.972	0.431	0.345	0.482
2x10 ²	5.130	4.790	5.295	0.410	0.323	0.475
5x10 ²	5.504	5.075	5.733	0.380	0.299	0.462
10 ³	5.759	5.278	6.049	0.356	0.286	0.449
2x10 ³	5.997	5.472	6.354	0.333	0.276	0.432
5x10 ³	6.310	5.720	6.738	0.307	0.266	0.405
10 ⁴	6.505	5.904	7.011	0.292	0.258	0.382
2x10 ⁴	6.705	6.095	7.267	0.283	0.255	0.358
5x10 ⁴	6.970	6.327	7.570	0.290	0.279	0.330
10 ⁵	7.167	6.542	7.790	0.298	0.304	0.313
2x10 ⁵	7.380	6.751	8.007	0.307	0.329	0.301
5x10 ⁵	7.657	7.084	8.285	0.321	0.362	0.289
10 ⁶	7.873	7.333	8.483	0.331	0.384	0.282
2x10 ⁶	8.104	7.604	8.676	0.342	0.405	0.278
5x10 ⁶	8.421	7.985	8.929	0.355	0.431	0.276
10 ⁷	8.673	8.290	9.121	0.372	0.451	0.275
2x10 ⁷	8.939	8.608	9.323	0.396	0.468	0.290
5x10 ⁷	9.325	9.045	9.621	0.432	0.486	0.351
10 ⁸	9.641	9.414	9.862	0.463	0.495	0.422
2x10 ⁸	9.996	9.805	10.091	0.489	0.499	0.475
5x10 ⁸	10.415	10.415	10.415	0.500	0.500	0.500

$t_{DP}'_{wD}$, pero incluyendo además los correspondientes a p_{wD} , para valores de "a" de -5 (distribución creciente), 0 (distribución uniforme) y +5 (distribución decreciente), con $F_h=0.1$, $\omega=10^{-2}$. Estos resultados de p_{wD} y $t_{DP}'_{wD}$ se presentan en gráficas semi-log en las Figs. 5.6 y 5.7, respectivamente.

Con el fin de facilitar una comparación entre los resultados anteriores (de la distribución exponencial, DE) y los correspondientes a las distribuciones lineales (DL) presentados en la Sección 5.4.1, en primer lugar se comparan los datos seleccionados que se utilizaron en los ejemplos involucrados; la selección se hizo considerando que las condiciones fueran equivalentes o lo más parecidas entre sí. Los datos comunes son $C_D=0$, $S=0$, $F_h=0.10$ y $\omega=0.01$. El resto de la información se presenta en la Tabla 5.3. En la Fig. 5.8 se muestran las funciones de probabilidad uniformes, lineales y las exponenciales para los valores de los parámetros incluidos en esta tabla; los valores de m y b satisfacen la Ec. 5.2.

Tabla 5.3 Valores de los parámetros a, b y m de las densidades de probabilidad uniforme, lineal y exponencial cuyos resultados se presentan en las Tablas 5.1 y 5.2 y en las Figs. 5.1 a 5.4.

		Creciente	Decreciente	Uniforme
DL	m	100/81	-100/81	0
	b	35/81	145/81	10/9
DE	a	-5	+5	0

Se observa que las curvas de las funciones crecientes son simétricas con respecto a las correspondientes a las funciones decrecientes, siendo el eje de simetría la recta vertical que pasa por el valor medio de h_D en el rango de 0.1 a 1, esto es

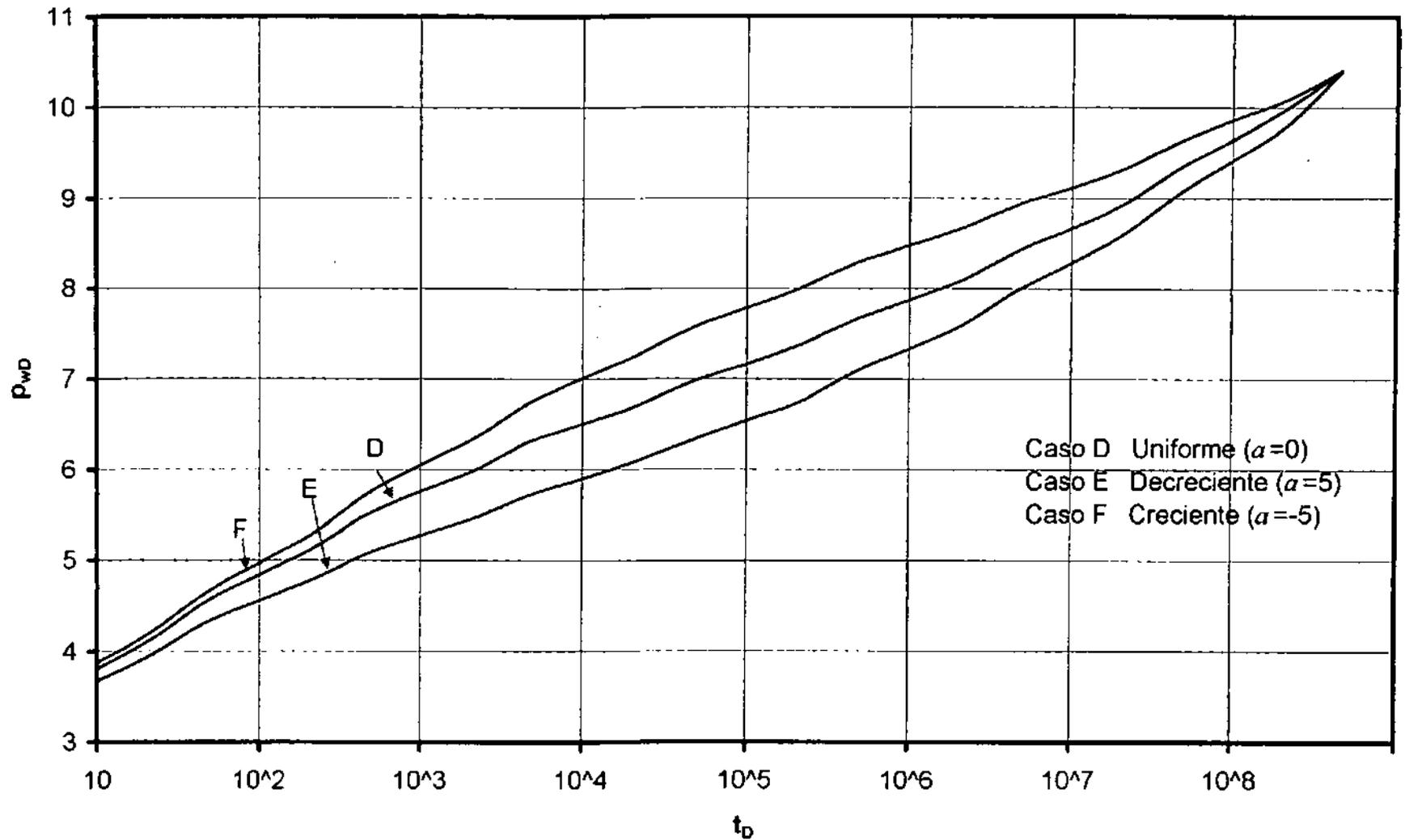


Fig. 5.6 Comportamiento de p_{wD} contra t_D para la función densidad de probabilidad exponencial (creciente, decreciente; con $\alpha=0$ se tiene la distribución uniforme). $F_h=0.1$, $\omega=0.01$

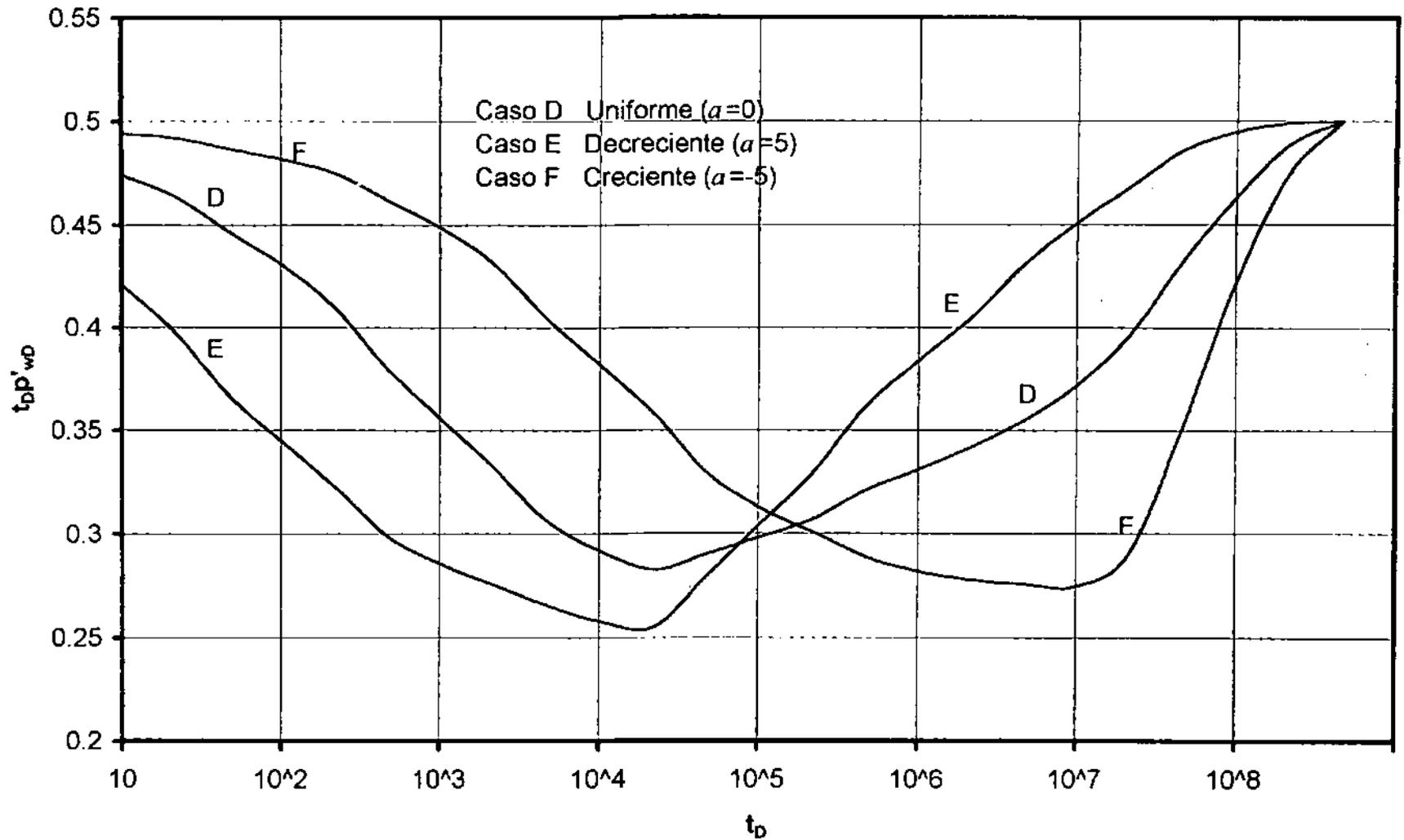


Fig. 5.7 Comportamiento de $t_D P'_wD$ contra t_D para la función densidad de probabilidad exponencial (creciente, decreciente; con $a=0$ se tiene la distribución uniforme). $F_h=0.1$, $\omega=10^{-2}$

$f_D(h_D)$

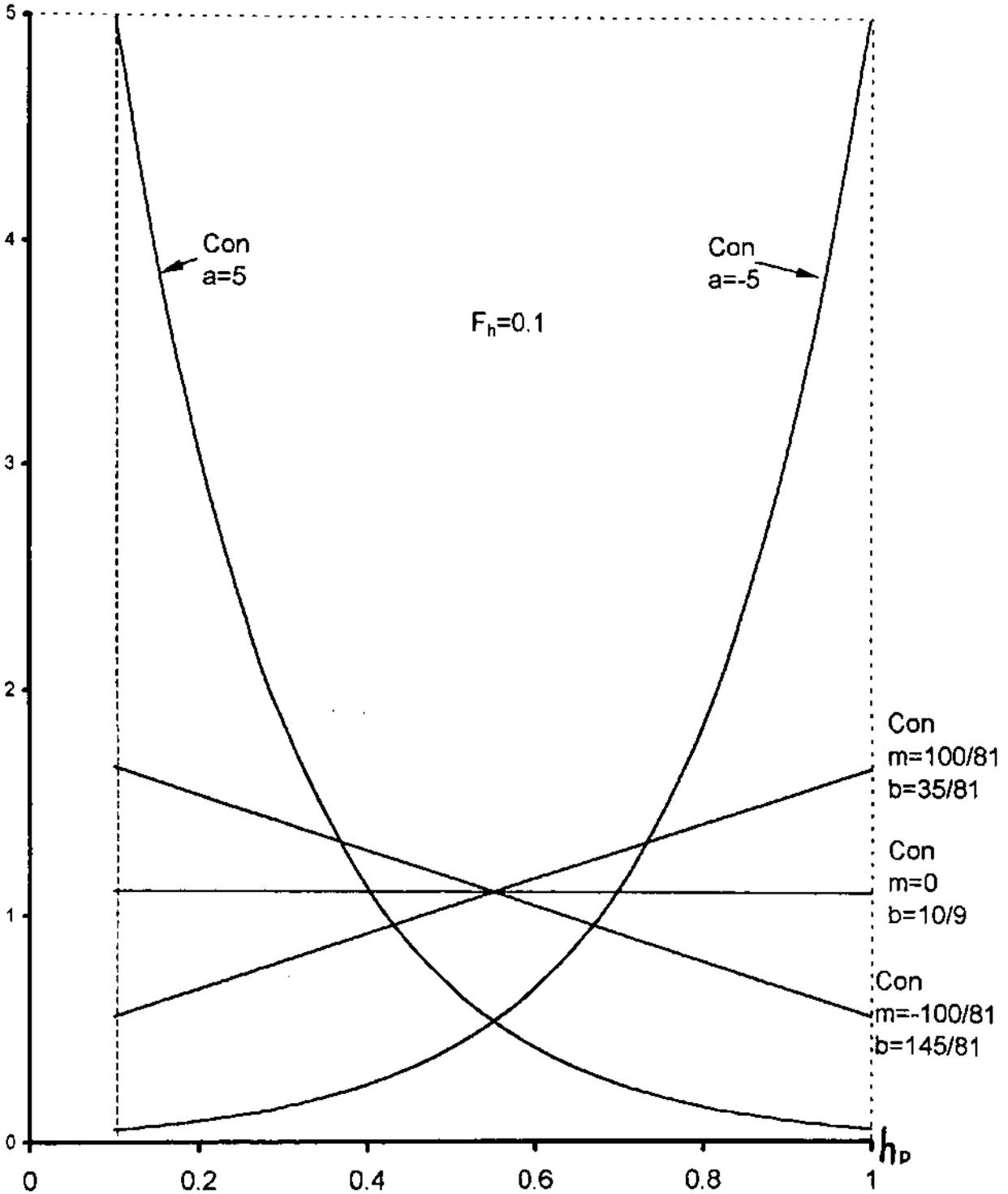


Fig. 5.8 Funciones de densidad de probabilidad lineales y exponenciales, crecientes y decrecientes.

en $h_D = 0.55$; además se puede ver que sobre todo en los extremos del mismo, la diferencia entre los valores de f_D exponencial creciente y decreciente es mucho mayor que la diferencia correspondiente a la f_D lineal. En $h_D = 0.1$, por ejemplo, el predominio de los bloques pequeños en la distribución exponencial decreciente es mucho mayor que el mismo predominio en la distribución lineal decreciente; específicamente, $f_{D_{up}}=5.06$ y $f_{D_{down}}=1.67$.

Por otro lado, se puede comprobar que en cualquier caso se cumple que el área bajo la curva, desde $h_D=0.1$ hasta $h_D=1$, es igual a la unidad. Todo lo anterior causa las diferencias o características siguientes con respecto al período de transición:

(a) En p_{wD} (Figs. 5.3 y 5.6):

- a.1. En la distribución exponencial el período de transición comienza mucho antes a $t_D=10$; en este tiempo prácticamente se inicia ese período en la distribución lineal, empezando a separarse las curvas (ver el punto b.1).
- a.2. Se tiene una mayor separación de las curvas en las distribuciones exponenciales.
- a.3. Las curvas de ambas figuras tienden a mostrar (esto no se muestra con claridad por el carácter numérico de la solución obtenida) la forma de una S y una porción recta de pendiente $\frac{1}{2}$ de la correspondiente a las rectas semi-log de los flujos dominados por la red de fracturas (período de flujo anterior a la transición) y por el sistema matriz-fracturas después del período de transición.
- a.4. Este último período termina antes de $t_D=10^7$ (ver el punto b.4).
- a.5. Con respecto a la caída de presión (que es proporcional a p_{wD}), es mayor en el caso de la distribución creciente ($a = -5$) porque predominan los bloques

grandes que ofrecen mayor resistencia al flujo, en relación con el caso de la distribución decreciente ($\alpha = 5$) en el que predominan los bloques pequeños.

(b) En $t_D p'_{wD}$ (Figs. 5.4 y 5.7):

Aquí se observan claras o mejor definidas algunas características citadas para p_{wD} , debido al mayor poder de diagnóstico de $t_D p'_{wD}$ mencionado en muchos trabajos^{12,14,32-47}.

b.1 En ninguna de las dos distribuciones a $t_D=10$, las curvas tienden a unirse, lo que significa que la transición empieza antes de ese tiempo.

b.2 La separación de las curvas en las distribuciones exponenciales también es mayor.

b.3 La separación horizontal de la parte baja de los valles de las funciones creciente y decreciente es mayor en las distribuciones exponenciales.

b.4 En las Figs. 5.4 y 5.7 se ve que el período de transición realmente termina después de $t_D=10^7$, por lo que la respuesta del punto a.4 puede considerarse como una aproximación.

b.5 En ambos casos $t_D p'_{wD}$ tiende a 0.5 a medida que se alcanza el flujo tipo pseudo-homogéneo matriz-fractura en un yacimiento infinito.

b.6 El final de la transición se inicia más tarde (alrededor de $t_D=6 \times 10^7$) en la distribución exponencial creciente con respecto a la distribución exponencial decreciente ($t_D=2 \times 10^4$ aproximadamente).

5.5 SOLUCIONES APROXIMADAS.

Para tiempos prácticos de t_D (excepto tiempos muy pequeños, dependiendo del valor de ω) correspondientes a valores pequeños de "x", las funciones de Bessel modificadas $K_0(x)$ y $K_1(x)$ se pueden aproximar como se indica en las Ecs. A.26 y A.27 del Apéndice A, con lo cual la solución del problema en el espacio de Laplace está dada por la Ec. A.28, evitando así la evaluación de las funciones de Bessel que involucran mayor trabajo numérico; las Ecs. A.26 hasta A.28 se reproducen a continuación como Ecs. 5.12 a 5.14, respectivamente:

$$K_0(x) = -[\ln(x/2) + 0.577216], \quad (5.12)$$

$$K_1(x) = 1/x, \quad (5.13)$$

$$\bar{p}_{wD} = -\frac{1}{s} \left\{ \ln[s^{1/2} [\omega + (1-\omega)g]^{1/2}] - 0.115934 \right\}, \quad (5.14)$$

De la Ec. 5.14, aplicando la propiedad de que el logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos de los factores, antitransformando $-\frac{1}{s} \ln s^{1/2}$, substituyendo g de la Ec. A.9 y derivando p_{wD} :

$$p'_{wD} = \frac{1}{2t_D} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \ln \left[\omega + \frac{2(1-\omega)}{z_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{f_D \tanh \frac{1}{2} z}{z} dz \right] \right\} \quad (5.15)$$

La antitransformada de Laplace de esta ecuación se realiza por medio del algoritmo de Stehfest⁷⁴ que se explica en el Apéndice A y la integral se evalúa aplicando la Regla de Simpson extendida⁸² (Ec. A.30 del Apéndice A).

La Ec. 5.15 se probó comparando sus resultados (programa INVLIN1) con los correspondientes a la ecuación donde no se utilizan las aproximaciones de K_0 y K_1 (programa INVLIN), con los datos $h_{min}=3$ cm, $h_{max}=3000$ cm, $m=0$, $b=1000/999$; $C_D=0$, $S=0$, $\omega=10^{-3}$. Se encontró que no hay diferencia en los resultados a partir de $t_D=1$; en otras palabras, la aproximación es aplicable de $t_D=1$ en adelante (estos son valores prácticos de t_D que significan valores cualesquiera del tiempo real t , excepto valores de t tan pequeños que no tienen sentido práctico). En cambio, con un valor mayor de ω aumenta el valor correspondiente de t_D : con $\omega=10^{-1}$, por ejemplo, la aproximación se puede aplicar sólo a partir de $t_D=10^3$ aproximadamente. La conclusión es que sólo hay que tener cuidado con la aplicación de la Ec. 5.15 en valores muy pequeños de t_D , para valores relativamente grandes de ω ; en general, para aplicar las aproximaciones de $K_0(x)$ y $K_1(x)$ se debe tener⁸¹ $x < 0.01$, recordando que en el cálculo de x se involucran las Ecs. A.2, A.5 y A.8.

CAPÍTULO 6

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE YACIMIENTOS DE DOBLE POROSIDAD CON TAMAÑO MÚLTIPLE DE BLOQUES DE MATRIZ.

6.1 PROBLEMA INVERSO.

En el flujo de fluidos a través de medios porosos, la solución del problema directo consiste en la determinación por ejemplo de la variación en espacio y tiempo de la presión, conociendo los parámetros del sistema roca-fluidos como la permeabilidad, porosidad, compresibilidad total, etc. y las leyes que gobiernan el flujo expresadas por ecuaciones diferenciales parciales. El problema inverso correspondiente consiste en obtener los parámetros del sistema conociendo la variación de la presión y las leyes de flujo.

El problema inverso en relación con diversos parámetros físicos ha sido tratado en muchos trabajos^{54-72, 93-127} y la confiabilidad en las estimaciones obtenidas se ha considerado en un subconjunto de ellos^{58,59,61,62,64,99,108,109,115,116,119,123,126,127}, lo que da una idea del esfuerzo dedicado tanto a la solución del problema inverso como a la interpretación o evaluación de las estimaciones realizadas. De los trabajos citados algunos pueden considerarse como estados actuales (en su momento) de la tecnología^{59,61,62,66,69-71,99,103,108,114-119,121,122,125,127}.

La solución del problema inverso es el objetivo central de esta tesis; en este caso específico el problema inverso consiste en estimar los parámetros que definen la forma y el rango de variación del tamaño de los bloques de matriz de

los yacimientos naturalmente fracturados, a partir del análisis de resultados de pruebas de variación de presión.

Los parámetros básicos involucrados se tratan en la Sección 5.1 y son los que corresponden a las funciones de densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_{ma} , que es el espesor de los bloques. Estos parámetros son la pendiente m y la ordenada al origen b , de la distribución lineal (Ec. 5.1), la constante exponencial a y el cociente $F_h = h_{min}/h_{max}$ de la distribución exponencial (Ec. 5.4) y el valor medio μ^* y la desviación estándar σ de la distribución normal o de Gauss (Ec. 5.6).

6.2 ACOPLAMIENTO DEL MODELO DESARROLLADO A UNA TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN PARA LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.

La técnica de optimización, que se describe en el Apéndice C para la función derivada, ha sido aplicada en pruebas de interferencia^{57,60,128}.

El acoplamiento del modelo, constituido por las Ecs. 4.5 a 4.20 y 5.1 a 5.9, se realizó desarrollando un programa de cómputo para este modelo, al cual se le nombró Sub Calc_ F_p y se integró con el programa que realiza la optimización; éste se llama Sub Calc_Regresión y está escrito en lenguaje Visual Basic. La descripción de los subprogramas Calc_ F_p y Calc_Regresión se presenta en la Sección 6.3, denominada "Descripción del programa de cómputo", en tanto que la codificación o instrucciones de los mismos se presenta en los Apéndices B (Programa de cómputo del problema directo) y D (Programa de cómputo del problema inverso), respectivamente.

6.3 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO.

Está constituido en primer lugar por una sección de declaraciones generales en la que se especifican el ámbito y las características de las variables; en cuanto al ámbito, el concepto variables globales significa que son válidas y tienen los valores actuales en todos los subprogramas que se encadenen. Las variables a su vez pueden ser de doble precisión, enteras, etc.

El subprograma Sub Calc_Regresión llama a su vez a una serie de subprogramas que ejecutan tareas específicas del proceso de optimización; estos subprogramas se describen en el orden en el que son requeridos por Sub Calc_Regresión.

Sub Error_Conver.

Si existe un error en la programación o si no se logra convergencia en el proceso de optimización, se ejecuta este subprograma enviando un mensaje al usuario y terminando el programa.

Sub Calc_F_p.

Este subprograma calcula la presión adimensional en el pozo p_{wD} o bien alguna de las funciones de la derivada, por ejemplo $t_D p'_{wD}$, dependiendo de la función que se decida utilizar en el proceso de optimización; a menos que se indique otra cosa se empleará la función derivada $f_p = t_D p'_{wD}$ porque tiene mejores características de diagnóstico que la presión adimensional p_{wD} y además porque de las funciones de la derivada, la derivada semilogarítmica es la que ha sido estudiada más ampliamente. En Sub Calc_F_p están programadas las

Ecs. 4.6 a 4.8, 4.13 con o sin las aproximaciones de K_0 y K_1 , 4.14 o su contraparte 4.19 para las distribuciones continuas, 5.1 ó 5.4 dependiendo de la función densidad de probabilidad que se utilice; las instrucciones correspondientes se explican en el Apéndice B. Sub Calc_ F_p se ejecuta todas las veces que lo requiera el programa de optimización Sub Calc_Regresión.

Sub Calc_Desv.

Se calcula una sumatoria de los valores absolutos de las diferencias de f_p observados (datos de campo) y f_p calculados en cada etapa del proceso de optimización, con el fin de utilizarla para corregir, de ser necesario, un factor de convergencia llamado Mlr y mejorar este proceso. Aplicando este procedimiento se lograron estimaciones para los parámetros de interés, iniciando con valores supuestos hasta 5 veces (ver detalles en la Sección 6.4) diferentes de los valores "reales" usados en las pruebas del procedimiento de estimación de los parámetros del yacimiento.

Sub Jacobiano.

Se calculan los elementos del Jacobiano (Ec. C.6) usando diferencias finitas para aproximar las derivadas parciales de f_p con respecto a cada uno de los parámetros C_j . Sub Matr_tran obtiene la matriz transpuesta J^T del Jacobiano J .

Sub Matr_Mult y Sub Matr_invr realizan multiplicaciones e inversiones de matrices; se aplican para calcular $\vec{\Delta C}$, vector corrección de los parámetros C_1 y C_2 , con la Ec. C.8. Las subrutinas Sub Decomp y Sub Solve son programas de

biblioteca que se utilizan en forma combinada para resolver sistemas de ecuaciones, en este caso las involucradas en las operaciones matriciales.

Function Calc_BA.

Esta función se aplica para calcular la bondad del ajuste en el proceso de optimización; en cada iteración se obtiene el cociente t_1/T , donde T es la sumatoria de los cuadrados de los parámetros por estimar obtenidos en cada iteración y t_1 es la sumatoria de los cuadrados de las correcciones de los mismos multiplicados por el factor de corrección Mlr , cuando el cociente anterior es menor que 0.0001 se da por terminado el proceso iterativo, deteniendo la ejecución del programa. El valor del cociente t_1/T es la tolerancia que se considera en este proceso iterativo de optimización; en varias pruebas realizadas se encontró que el criterio de que sea menor a 0.0001 es equivalente al criterio utilizado por Earlougher y Kersch⁵⁷, que consiste en que el cambio en todos los parámetros que se calculan en el proceso iterativo sea menor al 1% de su valor anterior.

6.4 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.

6.4.1 Procedimiento.

- (a) Se hace una estimación inicial de C_1 y C_2 tomando en cuenta toda la información disponible, incluyendo lo establecido en el Capítulo 7 de aplicaciones prácticas.

- (b) Con los valores conocidos de C_1 y C_2 se calculan f_p y J con las Ecs. C.1 y C.6; ante la dificultad de obtenerlas analíticamente por la complejidad de f_p , las derivadas del Jacobiano J se aproximan por diferencias finitas.
- (c) Por medio de la Ec. C.8 se calculan las correcciones ΔC_1 , ΔC_2 .
- (d) Se calculan $C_{1act}=C_{1ant}+\Delta C_1$ y $C_{2act}=C_{2ant}+\Delta C_2$, donde *act* y *ant* significan actual y anterior. C_{1act} y C_{2act} satisfacen mejor el requisito de mínimos cuadrados representado por la Ec. C.3. Con el fin de evitar valores oscilantes y eventualmente divergentes de C_1 y C_2 , en las primeras 2 ó 3 iteraciones se aplica sólo la mitad de las correcciones ΔC_1 , ΔC_2 .
- (e) Se repiten los cálculos comprendidos en los incisos (b) a (d) hasta que se llega a la tolerancia de 0.0001 que se discute al final de la Sección 6.3; los últimos valores obtenidos de C_1 y C_2 son los valores estimados de la distribución de probabilidad correspondiente.

6.4.2 Casos teóricos.

En esta parte se presentan las pruebas que se realizaron al procedimiento de estimación de parámetros. Consisten en utilizar como datos de campo a valores de $f_p=tDP'_{wD}$ sintéticos, obtenidos con el modelo desarrollado en esta tesis, que toma en cuenta la variabilidad y su rango correspondiente del tamaño de los bloques de matriz; a estos valores de f_p se les llama f_{pobs} . A los valores de f_p calculados con las estimaciones iniciales de C_1 y C_2 se les nombra f_{psup} y se les llama f_{pcai} a los valores de f_p obtenidos de las iteraciones del proceso de optimización; a los valores de C_1 y C_2 al final de las iteraciones se les denomina C_{1est} y C_{2est} .

En las primeras pruebas del programa se utilizaron C_1 y C_2 estimados inicialmente iguales a sus valores reales u observados; el programa finalizó en la primera iteración dando $C_{1est} = C_{1obs}$ y $C_{2est} = C_{2obs}$; es decir, funcionó bien.

6.4.2.1 Funciones de distribución lineales.

Es muy importante tomar en cuenta las propiedades de las funciones de distribución ($f_D > 0$ y área unitaria bajo la curva de f_D contra h_D), para no caer en relaciones no permisibles de m , b y F_h , que conducen a divergencias al tratar de estimar los parámetros del yacimiento.

Para las funciones lineales se debe de cumplir la Ec. 5.2; así por ejemplo, si se conoce que el tamaño de los bloques varía prácticamente desde cero, ($F_h=0$), hasta $h_{máx}$, entonces $b = (2-m)/2$ y el rango de m es desde -2 (corresponde $b=2$) hasta $+2$, ($b=0$); fuera de estos rangos no se satisfacen las propiedades de f_D . En forma similar, si $F_h=0.1$ se obtiene $b = (2-0.99 m)/1.8$, siendo el rango de m desde $-2/0.99$, ($b=2/0.99$) hasta $+2/0.99$, ($b=0$); se observa que aumentan los rangos de m y b al incrementarse el valor de F_h de 0 a 0.1. En forma generalizada, F_h varía de 0 a 1; para $F_h=0$ ya se establecieron los rangos de los valores de m y b . Si $F_h \rightarrow 1$, de la Ec. 5.2 se observa que los rangos de m y b aumentan indefinidamente; en el límite ($F_h=1$) m y b no quedan definidas. Esto corresponde a que se tiene un solo tamaño de bloques.

Para referencia en el ejemplo que se presenta se define

$$D_{if} m = [(m_{sup} - m_{obs}) / m_{obs}] \times 100 \quad (6.1)$$

donde $D_{if} m$ (en porciento) > 0 significa que la estimación inicial de m , m_{sup} , es mayor que el valor, m_{obs} . Si $m < 0$, distribución decreciente, lo anterior también

se cumple si $|m_{sup}| > |m_{obs}|$. No es necesario establecer lo equivalente para la ordenada "b", porque ésta depende de m, como se discutió anteriormente.

Ejemplo 1. Información empleada: $\omega = 0.001$; el tamaño máximo $h_{m\acute{a}x}$, de los bloques es 3000 cm y, de la Ec. 5.2:

$$F_h = \left(\frac{1}{m}\right) \left(-b \pm \sqrt{b^2 - m(2 - 2b - m)}\right). \quad (6.2)$$

Se considera que los valores "reales" de m y b son: $m_{obs} = 1$; $b_{obs} = 0.5005$.

Con esta información el programa del problema directo calcula el comportamiento "real" de la función derivada $f_p = t_D p'_{wD}$ para los tiempos $t_D = 10^5$, 10^6 , 10^7 , 10^8 , 10^9 .

Para realizar el proceso de optimización, se suponen valores iniciales de m, m_{sup} , y b, b_{sup} , con los cuales el programa de optimización calcula los valores de los parámetros, resolviendo así el problema inverso; finalmente con la Ec. 6.2 se obtiene el valor de F_h , que es 0.001 en este caso, con el que resulta $h_{m\acute{i}n} = 3$ cm.

En la Tabla 6.1 se presentan los resultados, m_{est} y b_{est} , de los parámetros de la distribución lineal del tamaño de bloques, para cada suposición inicial m_{sup} y b_{sup} ; en la segunda columna se incluye la diferencia, en por ciento, entre el valor inicial supuesto de m y su valor real; se observa que $Dif\ m = 50\%$ es 1.5 veces el valor supuesto con respecto al valor real y

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

$Dif\ m = -90\%$ significa que realmente m_{sup} es una décima parte del citado valor real (se enfatiza ésto porque es otra forma, tal vez más ilustrativa, de interpretar los porcentajes de la Col. 2). El número de iteraciones, No. iter, lo proporciona el programa y se muestra en la Col. 4.

Tabla 6.1 Resultados del Ejemplo 1 de estimación de parámetros. Distribución lineal creciente, con $m_{obs} = 1$ y $b_{obs} = 0.5005$.

(1) m_{sup}	(2) $Dif\ m$ [%]	(3) b_{sup}	(4) No. Iter.	(5) m_{est}	(6) b_{est}	
1.1	10	0.45045	5	0.99999	0.50049	Resultados para valores supuestos de m mayores que m_{obs} .
1.5	50	0.25025	5	1.00030	0.50095	
1.7	70	0.15015	6	1.00071	0.50048	
0.9	-10	0.55055	5	1.00000	0.50050	Resultados para valores supuestos de m menores que m_{obs} .
0.75	-25	0.62563	5	1.00000	0.50050	
0.50	-50	0.75075	5	1.00014	0.50050	
0.25	-75	0.87588	6	1.00001	0.50050	
0.10	-90	0.95095	6	1.00003	0.50049	

Los valores de los parámetros estimados en el proceso de optimización m_{est} y b_{est} se redondearon a cinco decimales.

En la Tabla 6.1 se observa que para valores de m supuestos menores que m_{obs} los valores estimados de m y b son mejores que los correspondientes a los valores de m supuestos mayores que m_{obs} ; para $m_{sup} = 0.9$ y 0.75 en 5 iteraciones se llega a un error de 0% en la estimación de los parámetros. Con un valor de m_{sup} de 1/10 del de m_{obs} se obtiene un error casi despreciable en 6 iteraciones, al determinar los parámetros de la distribución lineal; estos resultados

conducen a que si en una aplicación se observa que $m_{sup} > m_{obs}$, entonces deben repetirse los cálculos con $m_{sup} < m_{obs}$.

6.4.2.2 Funciones de distribución exponenciales.

Ejemplo 2. Información empleada:

$$\omega = 0.1$$

En el caso de distribución exponencial, los parámetros por estimar a y F_h son independientes entre sí.

Se considera que los valores reales de a y F_h son: $a_{obs}=5$ (distribución decreciente) y $F_{hobs}= 0.1$ (corresponden $h_{min}=300$ cm, $h_{máx}=3,000$ cm), con los cuales el programa del problema directo calcula el comportamiento "real" de la función derivada $f_p = t_D \rho' w_D$ para los tiempos $t_D=10, 10^2, \dots, 10^8$.

Con el propósito de hacer referencia a las diferencias, en porciento, que tienen los valores supuestos iniciales en relación con los valores reales, para este caso se definen:

$$Diff\ a = [(a_{sup} - a_{obs}) / a_{obs}] \times 100 \quad (6.3)$$

$$Diff\ F_h = [(F_{hsup} - F_{hobs}) / F_{hobs}] \times 100. \quad (6.4)$$

Otra forma que puede aclarar mejor el concepto anterior es, por ejemplo, que a_{sup} es 2,3, ... veces mayor que a_{obs} o bien a_{sup} es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... de a_{obs} ; en forma similar se puede tratar el parámetro F_h .

Con el fin de presentar cómo afectan las suposiciones iniciales de a_{sup} y F_{hnp} a los resultados del proceso de estimación de parámetros, se realizaron corridas del programa que resuelve el problema inverso con diferentes suposiciones iniciales de a_{sup} y F_{hnp} , manteniendo constante F_{hnp} y variando sólo a_{sup} y viceversa. Los resultados se muestran en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2 Resultados del Ejemplo 2 de estimación de parámetros. Distribución exponencial decreciente, con $a_{obs} = 5$ y $F_{hobs} = 0.1$.

(1) a_{sup}	(2) Dif a (%)	(3) F_{hnp}	(4) Dif F_h (%)	(5) No. Iter.	(6) a_{est}	(7) F_{her}	
5.555	11	.1111	11	3	5.344	.092	Resultados obtenidos variando a_{sup} y F_{hnp} hasta 3 veces los valores de a_{sup} y F_{hnp} .
10	100	.2	100	20	5.480	.083	
15	200	.3	200	20	5.243	.091	
4.8	-4	.095	-5	1	4.846	.100	Resultados obtenidos variando a_{sup} y F_{hnp} hasta 3/5 veces de los valores de a_{sup} y F_{hnp} .
4.555	-9	.091	-9	3	4.736	.108	
3.3	-34	.066	-34	9	4.354	.129	
3.0	-40	.06	-40	11	4.281	.133	Resultados obtenidos variando sólo a_{sup} hasta 5 veces el valor de a_{obs} .
10	100	.1	0	25	5.531	.082	
15	200	.1	0	25	5.678	.078	
20	300	.1	0	25	5.871	.072	
25	400	.1	0	25	6.011	.069	Resultados obtenidos variando sólo a_{sup} hasta 1/5 de a_{obs} .
2.5	-50	.1	0	20	4.505	.120	
1.0	-80	.1	0	20	4.508	.121	Resultados obtenidos variando sólo F_{hnp} hasta 5 veces el valor de F_{hobs} .
5	0	.2	100	4	4.670	.114	
5	0	.4	300	7	4.850	.106	
5	0	.5	400	25	5.182	.092	

En relación con los resultados obtenidos variando a_{sup} y F_{hnp} , se observa en la Tabla 6.2 que sólo se requieren 3 iteraciones para llegar a los valores estimados de a y F_h , cuando los valores iniciales supuestos difieren aproximadamente 10% por arriba o por abajo de los valores observados. Si los valores supuestos son el triple de los observados, entonces se necesitan 20

iteraciones para llegar a la tolerancia establecida obteniendo $a_{est}=5.243$ y $F_{hes}=0.091$. También se presentan resultados de a_{est} y F_{hes} con 20 iteraciones para valores supuestos de a y F_h del doble de sus valores reales.

Variando solamente a_{sup} por arriba de a_{obs} , para $a_{sup} = 5 a_{obs}$ con 25 iteraciones se llega a $a_{est} = 6.011$ y $F_{hes} = 0.069$ (aun cuando la F_{hes} fue igual a F_{hobs} , en el proceso iterativo sí cambia el valor de F_h en cada iteración). En este caso en el que a_{sup} es 5 veces a_{obs} , la ejecución del programa terminó con otra salida que éste tiene (No. máx de iteraciones; se fijó de 25), no con la tolerancia que se comentó con anterioridad; con un mayor número de iteraciones los valores estimados de a y F_h se aproximan más a a_{obs} y F_{hobs} .

Variando sólo F_{hes} , hasta 5 veces el valor de F_{hobs} , el proceso iterativo muestra un mejor comportamiento (con menos iteraciones se llega a la tolerancia) que el correspondiente al caso en el que se varía solamente a_{sup} . En todas las pruebas realizadas, cuyos resultados se presentan en la Tabla 6.2, los procesos iterativos son convergentes, conduciendo al valor estimado de a y F_h con la tolerancia fijada; con una tolerancia más estricta, que implica aumentar el número de iteraciones (el esfuerzo computacional adicional es mínimo), los valores estimados de a y F_h se aproximan más a a_{obs} y F_{hobs} .

CAPÍTULO 7

APLICACIONES PRÁCTICAS

7.1 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

En el Capítulo 6 se presenta el procedimiento para estimar los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad, de los bloques de matriz de un yacimiento naturalmente fracturado; estos parámetros definen la variabilidad y su rango del tamaño de los bloques y son la pendiente y la ordenada al origen de funciones lineales, la constante exponencial y el cociente h_{min}/h_{max} de funciones exponenciales (el valor medio y la desviación estándar de funciones de Gauss se tratarían de manera similar). En forma directa se puede hacer la extensión para incluir en el procedimiento otros parámetros, como ω .

El procedimiento de análisis que se presenta en esta sección (el diagrama de flujo correspondiente se incluye como Sección 7.4 de este capítulo) comprende todo el proceso que determina cuál es la función de densidad de probabilidad que ajusta mejor el comportamiento de la respuesta de presión observada. Si con la información disponible sólo se puede llegar a la conclusión de que el yacimiento es naturalmente fracturado con flujo transitorio matriz-sistema de fracturas, estando en duda la función de densidad de probabilidad, entonces queda el recurso de probar diferentes distribuciones de tamaños de bloques de matriz y la que ajuste mejor el comportamiento de la respuesta de presión es la mejor solución que se pueda obtener para el problema inverso.

El procedimiento se inicia analizando toda la información disponible (geológica, de núcleos, de registros de pozos, sísmica, de pruebas de variación de presión etc.) del yacimiento en estudio. Si se determina que es naturalmente fracturado, entonces existe una alta probabilidad de que esté constituido por bloques de tamaño variable, debido a diferencias en litología, en los esfuerzos a que es sometida la roca, en el grado de diagénesis, etc.¹⁶⁻²⁰.

Adicionalmente, si se considera que es común que en afloramientos existe un predominio de los bloques pequeños y éste disminuye exponencialmente hacia bloques grandes^{17,20}, por consiguiente, si no se tiene otra información del yacimiento sobre el tipo de distribución de los bloques, se aplica el procedimiento de estimación de parámetros descrito en el Capítulo 6, usando la función de densidad de probabilidad exponencial decreciente; en este caso se determinan la constante exponencial "a" y el cociente $F_h = h_{min}/h_{máx}$. El tamaño máximo de bloques, $h_{máx}$, se obtiene mediante el procedimiento que se presenta en el Apéndice E, quedando así definidos la variabilidad (frecuencia de cada tamaño) y el rango de variación del tamaño de los bloques.

Si existe duda hasta aquí o si se desea verificar o aumentar la confianza en los resultados, el paso siguiente en el procedimiento de análisis consiste en aplicar la metodología general para la interpretación de resultados de las pruebas de variación de presión presentada por Samaniego y Cinco-Ley⁵⁶, a partir del paso No. 2 (diagnóstico del régimen de flujo, normalmente realizado a través del uso

de la función de la primera o de la segunda derivada). En este paso el diagnóstico puede verificar^{12,14,41} la característica de yacimiento naturalmente fracturado determinada por medio de métodos geológicos, geofísicos, etc., como ya se mencionó. El paso No. 3 de la metodología general de análisis (aplicación de gráficas específicas), en nuestro caso se aplican gráficas de la función derivada $t_D p'_{wD}$, de la función $d[\log(t_D p'_{wD})] / d[\log(t_D)]$ o de otras funciones de la respuesta de presión, en yacimientos fracturados con tamaño múltiple de bloques de matriz, para determinar cuál es el tipo de función de densidad de probabilidad de los bloques (exponencial, lineal, de Gauss, etc.)

El paso No. 4 de la metodología presentada por Samaniego y Cinco-Ley (regresión no lineal de los datos de presión), corresponde al último paso del procedimiento de análisis presentado en esta tesis y consiste en el proceso descrito en el Capítulo 6 para estimar los parámetros de las distribuciones de probabilidad.

Ejemplo del procedimiento de análisis.

En la Tabla 7.1 y en la Fig. 7.1 se muestra la respuesta de una prueba hipotética de decremento de presión; en la Tabla 7.1 se incluyen los resultados del tiempo, la presión y la función derivada en forma adimensional, donde t_D y p_{wD} están definidas por:

$$t_D = 2.637 \times 10^{-4} k_{fb} \Delta t / (\phi c_i) \mu r_w^2 \quad (7.1)$$

$$p_{wD} = k_{fb} h \Delta p / 141.2 q \mu B \quad (7.2)$$

Tabla 7.1 Datos de una prueba hipotética de decremento de presión. Ejemplo del procedimiento de análisis.

Δt (hrs)	t_D	Δp (lb/pg ²)	p_{wD}	$t_{DP} p'_{wD}$
6.7×10^{-5}	10	12.5	3.675	0.421
1.3×10^{-4}	20	13.4	3.960	0.399
3.3×10^{-4}	50	14.6	4.312	0.368
6.7×10^{-4}	10^2	15.5	4.559	0.345
1.3×10^{-3}	2×10^2	16.2	4.790	0.323
3.3×10^{-3}	5×10^2	17.2	5.075	0.299
6.7×10^{-3}	10^3	17.9	5.278	0.286
1.3×10^{-2}	2×10^3	18.5	5.472	0.276
3.3×10^{-2}	5×10^3	19.7	5.720	0.267
6.7×10^{-2}	10^4	20.0	5.904	0.262
0.13	2×10^4	20.6	6.079	0.250
0.33	5×10^4	21.4	6.327	0.296
0.67	10^5	22.1	6.522	0.312
1.3	2×10^5	22.9	6.751	0.353
3.3	5×10^5	24.0	7.074	0.362
6.7	10^6	24.9	7.333	0.384
13.3	2×10^6	25.8	7.604	0.403
33.3	5×10^6	27.1	7.985	0.430
66.6	10^7	28.1	8.290	0.450
133.2	2×10^7	29.2	8.608	0.468
333.1	5×10^7	30.7	9.045	0.486
666.2	10^8	31.8	9.385	0.495
1332.4	2×10^8	33.0	9.730	0.499
3331.0	5×10^8	34.5	10.188	0.500

La información del yacimiento que relaciona las variable reales y las adimensionales es:

$$k_{fb} = 1000 \text{ md}, (\phi c)_i = 7.027 \times 10^{-6} \text{ pg}^2/\text{lb}, \mu = 1 \text{ cp}, r_w = 0.5 \text{ pies}, h = 250 \text{ pies},$$

$$q = 5000 \text{ B}_{ce}/\text{D}, B = 1.2$$

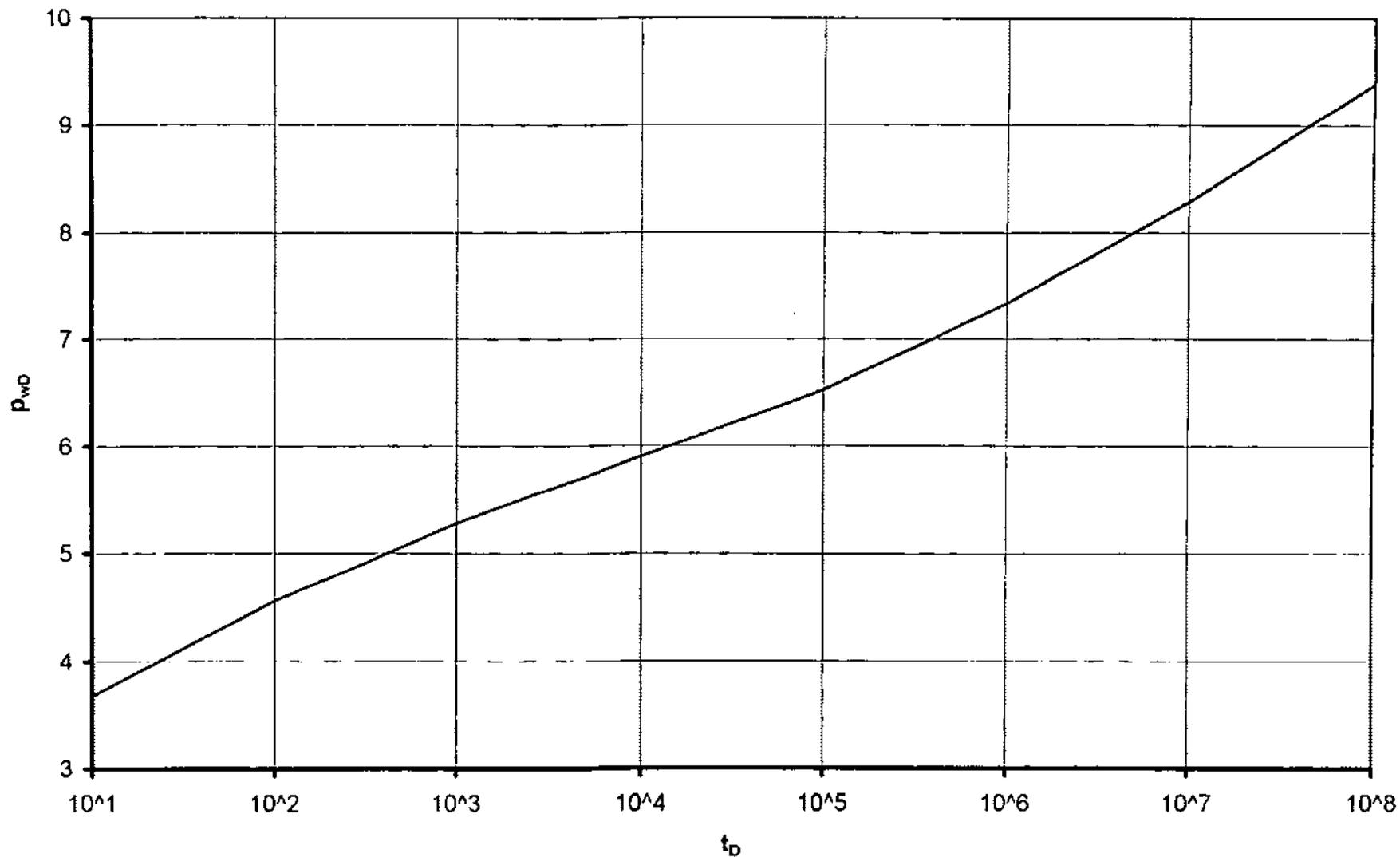


Fig. 7.1 Datos de p_{wD} contra t_D de una prueba hipotética de decremento de presión. Ejemplo del procedimiento de análisis. $\omega=0.01$, $F_h=0.1$, $\alpha=5.0$

De las demás fuentes (geología, geofísica,..., recordando que este es un ejemplo hipotético), se sabe que el yacimiento es naturalmente fracturado, con $\omega = 0.01$.

Continuando el procedimiento, se supone que la distribución de tamaños de los bloques de matriz es exponencial decreciente, de acuerdo a lo que es común en los afloramientos^{17,20}. Para este caso hipotético los valores para los parámetros que definen a una distribución exponencial, a y F_h (Ec. 5.4), son 5 y 0.10, respectivamente. Por otra parte, aplicando el procedimiento que se presenta en el Apéndice E se estima $h_{m\acute{a}x} = 3000$ cm.

Mediante el proceso de estimación de parámetros del Capítulo 6, con una suposición inicial de $a_{sup} = 4$ y $F_{h_{sup}} = 0.08$, se obtiene que los parámetros que ajustan el comportamiento de p_{wD} y $I_{DP'_{wD}}$ de la Tabla 7.1 son $a_{est} = 4.65$ y $F_{h_{est}} = 0.11$, con lo cual $h_{min} = 330$ cm, quedando el rango de variación de h_{ma} entre 330 y 3000 cm, en tanto que su variabilidad (forma de variación) se obtiene aplicando la Ec. 5.4:

$$f_D = \frac{4.65e^{-4.65h_D}}{e^{-4.65(11)} - e^{-4.6}} = 7.881e^{-4.65h_D} \quad (7.3)$$

En resumen, los valores reales, los iniciales y los estimados de la distribución exponencial, se presentan en la Tabla 7.2:

Tabla 7.2 Resultados de estimación de parámetros de una prueba hipotética de decremento de presión.

	Valores reales	Valores iniciales	Valores estimados
α	5	4.00	4.65
F_h	0.10	0.08	0.11

El proceso de optimización es convergente hacia los valores reales de los parámetros en estudio (parámetros de la distribución de probabilidad del tamaño múltiple de bloques de matriz, del yacimiento naturalmente fracturado). La concordancia entre los parámetros reales y los estimados se puede mejorar si se emplea una tolerancia más estricta entre los resultados de dos iteraciones sucesivas del proceso de optimización; aunque dicha tolerancia sólo implica un esfuerzo computacional adicional pequeño, no se consideró necesario realizarlo en esta prueba hipotética de decremento de presión, cuyo fin es ilustrar el procedimiento de análisis.

La tolerancia que se utiliza fue aplicada por Martínez^{60,128} y es la siguiente:

$t_1/T < 0.0001$, donde t_1 es la suma de los cuadrados de $(Mlt)(\Delta C_i)$ y T es la suma de los cuadrados de C_i , siendo C_i el valor de uno de los parámetros calculados en un paso del procedimiento iterativo, del proceso de optimización; ΔC_i , la corrección de C_i y Mlt , un factor para lograr y acelerar la convergencia, que tiene un rango de valores de 0.5 a 1.0 y se emplea directamente en el programa Sub Calc_Regresion.

La tolerancia anterior es equivalente a la que aplicaron Earlougher y Kersch⁵⁷, la cual consiste en que el cambio de todos los parámetros por estimar sea menor al uno por ciento de sus valores anteriores.

Sin embargo, se obtiene una mejor idea del resultado del procedimiento de análisis con el cálculo de $t_D p'_{wD}$ (que es mejor herramienta de diagnóstico que p_{wD}), empleando los valores estimados de los parámetros y comparando sus resultados con los correspondientes a los valores reales; una comparación similar fue sugerida con el mismo propósito por Ramey⁶⁴. Esto se presenta en la Tabla 7.3 en la cual se observa muy buena concordancia; todo lo anterior independientemente de que se calculen los límites de confianza (ver la Sección 7.2 de esta tesis).

Se considera que no es necesaria una comparación en forma gráfica de los resultados "reales" con los calculados, porque la diferencia máxima entre ellos es tan pequeña (8 milésimas), que aparecería solamente una curva a las escalas requeridas para abarcar todo el rango de esos resultados.

Por otra parte, se podría interpretar también que existe un problema de unicidad, en el sentido de que si se hubieran obtenido valores de a y F_h más cercanos a 5 y 0.1, respectivamente, también serían soluciones del problema de estimación de parámetros y los resultados correspondientes de $(t_D p'_{wD})_{est}$ se parecerían aún más a los de $t_D p'_{wD}$.

Tabla 7.3 Resultados "reales" de $t_{DP'wD}$ contra resultados calculados $(t_{DP'wD})_{est}$ empleando los valores estimados de los parámetros α y F_h . Prueba hipotética de decremento de presión.

t_D	$t_{DP'wD}$	$(t_{DP'wD})_{est}$
10	0.421	0.422
20	0.399	0.401
50	0.368	0.370
10^2	0.345	0.346
2×10^2	0.323	0.324
5×10^2	0.299	0.300
10^3	0.286	0.287
2×10^3	0.276	0.276
5×10^3	0.267	0.267
10^4	0.262	0.262
2×10^4	0.250	0.250
5×10^4	0.296	0.296
10^5	0.312	0.313
2×10^5	0.353	0.353
5×10^5	0.362	0.356
10^6	0.384	0.376
2×10^6	0.403	0.399
5×10^6	0.430	0.426
10^7	0.450	0.447
2×10^7	0.468	0.464
5×10^7	0.486	0.484
10^8	0.495	0.494
2×10^8	0.499	0.499
5×10^8	0.500	0.500

7.2 CONFIABILIDAD DE RESULTADOS

Entre las fuentes de error que afectan la estimación de los parámetros de un yacimiento se cuentan el modelo que se utilice, las mediciones efectuadas (errores de medición o ruido) y el procedimiento de optimización que se aplique. Ramey⁶⁴, quien ha sido considerado como el iniciador de la primera era del análisis moderno de pruebas de presión, presenta en forma muy amplia el caso del uso del modelo de Horner¹²⁹, típico en el análisis de pruebas de variación de presión durante varias décadas; él reconoció que con el avance de la tecnología en esta área, en particular con el desarrollo y aplicación de la regresión no lineal⁵⁷⁻⁶³, "no sabía donde trazar una recta semilog en una gráfica de Horner para determinar la mejor interpretación".

Ramey⁶⁴ muestra el ejemplo de una prueba simulada o hipotética de incremento de presión con el propósito de ilustrar cómo el análisis basado en el método de Horner origina con frecuencia estimaciones muy deficientes de la permeabilidad y el factor de daño. Preparó una simulación exacta de la prueba con los parámetros correctos de la formación, $k = 48$ md, $S = +10$; mediante el análisis de los resultados simulados, con el método de Horner obtuvo $k = 37.6$ y $S = + 6.2$; por otra parte, con el análisis por curvas tipo se dedujo que el modelo que incluye almacenamiento y daño era apropiado.

Con el empleo de los límites de confianza en la estimación de parámetros^{58,91-93,130}, cuya teoría se presenta en el Apéndice F, Ramey encontró que mediante el método de Horner la permeabilidad puede dar cualquier valor en el intervalo de 6.85 a 68.15 md (-82% a +82% con respecto al valor estimado de 37.6 md) y para el factor de daño el intervalo correspondiente es de -4.33 a 16.77 (-169.6% a +169.6% con respecto al valor estimado de 6.2). Nótese que los porcentajes de error son diferentes con referencia a los valores reales.

Por otro lado, por medio de la aplicación de la teoría de regresión no lineal⁵⁷⁻⁶³, que se presenta en el Apéndice C de esta tesis para el caso del modelo que toma en cuenta el tamaño múltiple de los bloques de matriz (Capítulos 4 y 5), así como del uso del modelo de almacenamiento y daño en el pozo, se obtuvieron los valores de 48 md y +10 para la permeabilidad y el daño, respectivamente; es decir, en este caso el modelo reproduce sin error los resultados "reales".

Se establece⁶⁴ que los resultados del ejemplo anterior son típicos de los que se obtienen en la interpretación de datos de campo y que los límites de confianza de los parámetros estimados con el método de Horner, tienen con frecuencia un rango de errores del 50 al 150%; asimismo, que este rango se reduce 10 veces aplicando la teoría de regresión no lineal. Finalmente, se enfatiza que esta teoría es necesaria para realizar un análisis moderno y adecuado de los resultados de

las pruebas de presión y que es "una terrible omisión" si se aplica pero no se calculan los límites de confianza.

Se aplica la teoría de los límites de confianza en la estimación de parámetros, que tiene como base la regresión no lineal, para establecer la confiabilidad de resultados del procedimiento de análisis que se presenta en esta tesis. Como ya se indicó, el desarrollo completo de la teoría se incluye en el Apéndice F.

Si \dot{C}_j es el valor real, desconocido, de un parámetro del yacimiento y C_j es su valor estimado mediante un modelo acoplado a la técnica de regresión no lineal, entonces un intervalo de confianza de \dot{C}_j es ⁵⁸:

$$C_j - \sigma_{C_j} t_{1-\alpha/2} \leq \dot{C}_j \leq C_j + \sigma_{C_j} t_{1-\alpha/2}, \quad (7.4)$$

donde σ_{C_j} expresada por la ecuación

$$\sigma_{C_j} = \sqrt{B_{jj} \sigma_p^2} \quad (7.5)$$

es la desviación estándar del parámetro C_j ; B_{jj} es el elemento de la diagonal de la matriz B dada por

$$B = (J^T J)^{-1}, \quad (7.6)$$

siendo J el Jacobiano expresado por la Ec. C.6. Además σ_p es la desviación estándar de las funciones f_{p_i} , que se puede aproximar por la ecuación

$$\sigma_p = \sqrt{f_{min} / (n - m)}, \quad (7.7)$$

donde

$$f_{min} = \sum_{i=1}^n (f_{pobs} - f_{pex})^2, \quad (7.8)$$

para n datos disponibles y m parámetros de ajuste. Por otra parte, t se obtiene de la distribución t de Student con un nivel de riesgo o significación $\alpha^{91,92,130}$.

Ejemplo de cálculo de los límites de confianza

$$C_j - \sigma_{C_j} t_{1-\alpha/2} \quad \text{y} \quad C_j + \sigma_{C_j} t_{1-\alpha/2}$$

En la Tabla 7.4 se presentan los resultados de una prueba simulada de decremento de presión, incluyendo valores de p_{wD} y $t_{DP'_{wD}}$; la relación con las variables reales está definida por las Ecs. 7.1 y 7.2.

Tabla 7.4 Prueba simulada de decremento de presión. Ejemplo de cálculo de límites de confianza.

Δt (hrs)	t_D	Δp (psi)	p_{wD}	$t_{DP'_{wD}}$	$(t_{DP'_{wD}})_{est}$
7×10^{-5}	10	28.8	2.689	0.4906	0.4908
7×10^{-4}	10^2	40.7	3.800	0.4720	0.4725
7×10^{-3}	10^3	51.8	4.841	0.4263	0.4272
7×10^{-2}	10^4	61.5	5.739	0.3511	0.3522
0.70	10^5	69.5	6.488	0.3341	0.3352
6.97	10^6	78.5	7.334	0.3936	0.3917
69.69	10^7	88.9	8.304	0.4528	0.4505
696.90	10^8	100.7	9.402	0.4953	0.4949

La información adicional del yacimiento y los fluidos es:

$$k_{fb} = 800 \text{ md}, (\phi c_i)_i = 9 \times 10^{-6} \text{ lb/pg}^2, \mu = 1.5 \text{ cp}, r_w = 0.33 \text{ pies}, h = 225 \text{ pies}, q = 7000$$

$$B_{ce}/D, B = 1.3, \omega = 0.1, h_{max} = 98.43 \text{ pies.}$$

Por medio del procedimiento de estimación de parámetros que se presenta en el Capítulo 6, se determina que la variación del tamaño de los bloques es exponencial decreciente. Con valores iniciales supuestos de $a_{sup} = 4.555$ y $F_{hsup} = 0.091$, se obtienen con 3 iteraciones del proceso de optimización los valores estimados a_{est} y F_{hest} de la función de densidad de probabilidad, los cuales son $a_{est} = 4.736$ y $F_{hest} = 0.108$.

Usando estos valores en el modelo para calcular los resultados de la función derivada, mediante la cual se define la función objetivo (Ec. C.3 del Apéndice C), se obtiene la respuesta estimada que se incluye en la Tabla 7.4 en la columna indicada como $(t_{DP'_{wD}})_{est}$. Se observa muy buena concordancia entre estos valores y los correspondientes a la respuesta observada $t_{DP'_{wD}}$.

En este ejemplo $n = 8$ (número de datos) y $m = 2$ (número de parámetros por estimar), por lo que aplicando las Ecs. 7.8 y 7.7 (en este orden), se obtiene: $f_{min} = 12.58 \times 10^{-6}$ y $\sigma_p^2 = 2.0967 \times 10^{-6}$. Por otro lado, los elementos B_{ij} se calculan por medio de la Ec. 7.6, resultando $B_{11} = 5,596.1991$ y $B_{22} = 14.0777$. Substituyendo los valores anteriores en la Ec. 7.5:

$$\sigma_{C_1} = 0.1083215 \quad \text{y} \quad \sigma_{C_2} = 0.0054329$$

Finalmente, para un nivel de confianza del 95% (riesgo de 5%) y 7 grados de libertad ($n-1$ observaciones en la muestra)¹³⁰, $t = 2.365$, con lo cual, aplicando la

desigualdad (7.4) para la constante exponencial a y el cociente $F_h = h_{min}/h_{máx}$, resulta:

$$4.480 \leq a \leq 4.992 \quad (7.9)$$

$$0.095 \leq F_h \leq 0.121 \quad (7.10)$$

Es decir $C_1 - \sigma_{C_1} t_{1-\alpha/2} = a_{est} - \sigma_{C_1} t_{1-\alpha/2} = 4.48$ y $C_1 + \sigma_{C_1} t_{1-\alpha/2} = a_{est} + \sigma_{C_1} t_{1-\alpha/2} = 4.992$, son los límites de confianza de "a" con un nivel de confiabilidad del 95%. En forma similar, $C_2 - \sigma_{C_2} t_{1-\alpha/2} = F_{her} - \sigma_{C_2} t_{1-\alpha/2} = 0.095$ y $C_2 + \sigma_{C_2} t_{1-\alpha/2} = F_{her} + \sigma_{C_2} t_{1-\alpha/2} = 0.121$ son los límites de confianza de F_h . Estos rangos en los que pueden acotarse los valores reales de la constante exponencial y el cociente $h_{min}/h_{máx}$, corresponden en general a las condiciones del modelo (tamaño múltiple de bloques, etc.) y del proceso de optimización (valores iniciales supuestos, número de iteraciones, etc.)

7.3 EJEMPLOS

7.3.1 Gasto de imbibición.

Como se ha establecido^{1,21-30}, la imbibición es el mecanismo que predomina, o al menos que participa en forma importante en la expulsión del aceite de la matriz mojable por agua de yacimientos naturalmente fracturados, sometidos al proceso de recuperación secundaria por inyección de agua o a la invasión natural de un acuífero asociado al yacimiento. El gasto de imbibición es proporcional¹³ al área de las fracturas por unidad de volumen de roca A_f (área

de interacción entre las fracturas y la matriz); para el caso de bloques de matriz en forma de estratos horizontales se demuestra que³¹

$$A_{fb} = 2/(h_{ma} + h_f) \quad , \quad (7.11)$$

con lo cual se deduce que el gasto de imbibición es función de la variabilidad del tamaño de los bloques; específicamente, el gasto de aceite que se produce por el mecanismo de imbibición en un bloque horizontal de tamaño h_{ma} , q_o , se puede expresar por

$$q_o = 2 F_d (h_{ma} + h_f), \quad (7.12)$$

donde F_d es una función que involucra a todos los demás parámetros de los cuales depende q_o (como S_w , k_{ma} , etc.; éstos serán constantes al considerar otros bloques con diferentes valores de h_{ma}) y h_f es el espesor de la fractura horizontal que limita al bloque.

El gasto total q_{ot} por imbibición de un yacimiento naturalmente fracturado constituido por NB tamaños de bloques horizontales separados por fracturas de espesor h_f es:

$$q_{ot} = \sum_{i=1}^{NB} q_{oi} f_i = 2 F_d \sum_{i=1}^{NB} \frac{f_i}{h_{mai} + h_f} \quad , \quad (7.13)$$

donde f_i es la frecuencia con la que existen los bloques de tamaño h_{mai} y “ d ” representa condiciones discretas del tamaño de los bloques; es decir, q_{ot} es función no sólo de los tamaños de los bloques sino también de la frecuencia con la que cada uno de ellos se encuentra en el medio poroso

fracturado (en todos los bloques se consideran los mismos valores de todos los demás parámetros de los que depende q_o y que están involucrados en F_d).

Ahora, para el caso de distribución continua, considerando h_f despreciable en comparación con h_{ma} y usando $h_{ma} = h_{máx}h_D$

$$q_{ot} = F_c \int_{h_{Dmin}}^{h_{Dmáx}} \frac{f_D}{h_D} dh_D, \quad (7.14)$$

donde F_c es otra función que involucra F_d (función en la Ec. 7.12), el volumen total del yacimiento y $h_{máx}$; "c" representa condiciones continuas del tamaño de los bloques.

Si f_D es la función densidad de probabilidad lineal:

$$q_{ot} = F_{cl} \int_{h_{Dmin}}^{h_{Dmáx}} \frac{mh_D + b}{h_D} dh_D, \quad (7.15)$$

que es la ecuación que se usa a continuación para ilustrar la diferencia que se obtiene en q_{ot} debido únicamente a 2 distribuciones diferentes de tamaños de bloques:

Caso A: distribución lineal decreciente (predominan los bloques pequeños), con $m = -100/81$ y $b = 145/81$.

Caso B: distribución lineal creciente (predominan los bloques grandes), con $m = 100/81$ y $b = 35/81$.

En ambos casos $h_{máx}$ es igual y $h_{Dmin} = 0.1$, $h_{Dmáx} = 1$. A priori, con apoyo en bases físicas, se sabe que el gasto del Caso A será mayor al del Caso B porque

al predominar los bloques pequeños, el área total de las fracturas es mayor en el primer caso, pero falta la parte cuantitativa.

Desarrollando la Ec. 7.15:

$$q_{ot} = F_{cl} \int_{0.1}^1 \left(m dh_D + b \frac{dh_D}{h_D} \right) = F_{cl} \left(m h_D + b \ln h_D \right) \Big|_{0.1}^1,$$

$$q_{ot} = F_{cl} [0.9 m + b (\ln 1 - \ln^1/10)] = F_{cl} (0.9 m + b \ln 10).$$

$$\text{Caso A: } q_{otb} = F_{cl} \left[0.9 \left(-\frac{100}{81} \right) + \frac{145}{81} \ln 10 \right]$$

$$\text{Caso B: } q_{otc} = F_{cl} \left[0.9 \left(\frac{100}{81} \right) + \frac{35}{81} \ln 10 \right],$$

donde q_{otb} y q_{otc} significan gastos totales de aceite por imbibición, para distribuciones lineales decreciente y creciente de tamaños de bloques, respectivamente.

De las ecuaciones anteriores:

$$q_{otb} = 1.43 q_{otc} ; \tag{7.16}$$

es decir, el gasto de imbibición para condiciones de distribución lineal decreciente es 1.43 veces el gasto obtenido para la distribución lineal creciente; esta es la diferencia que se obtiene en el gasto de imbibición solamente debida a la diferencia involucrada en la distribución del tamaño múltiple de bloques de matriz, considerando constante el resto de la información del yacimiento.

7.3.2 Comportamiento de la recuperación de aceite.

En la Sección 7.3.1 se presentan resultados de gasto de aceite por el mecanismo de imbibición para cierto tiempo t , en función de la distribución del tamaño de los bloques. Aquí se desarrolla una aplicación de esta distribución para estudiar el comportamiento de la recuperación de aceite por el mecanismo de imbibición.

Mattax y Kyte²¹ demostraron, incluyendo una verificación experimental, que el tiempo requerido para recuperar una fracción dada de aceite por el mecanismo mencionado, de un bloque de un yacimiento naturalmente fracturado, es proporcional al cuadrado de la distancia entre fracturas. Con base en este resultado presentaron un método para predecir el comportamiento de este tipo de yacimientos, en el que se supone que la imbibición es el mecanismo dominante, siendo despreciables los efectos gravitacionales. Esto lo justificaron considerando que en yacimientos naturalmente fracturados las permeabilidades de la matriz son frecuentemente muy bajas (10 md o menores). Lefebvre³⁰ también encontró la misma relación por medios teóricos y experimentales, pero aplicable para bloques pequeños. En resumen, la aplicación que se desarrolla a continuación es para las condiciones en las que predomina el mecanismo de imbibición bajo las cuales

$$t_{frac} = Ch^2_{ma}, \quad (7.17)$$

donde t_{frac} es el tiempo requerido para recuperar una fracción dada de aceite "frac" y C es una constante de proporcionalidad.

Aronofsky y Cols¹³⁶ propusieron la ecuación

$$q_o = \frac{N_r}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (7.18)$$

para calcular el gasto de aceite a un tiempo t que produce por imbibición un bloque de matriz rodeado totalmente por agua desde el principio del proceso; N_r es el volumen de aceite recuperable del bloque por ese mecanismo y τ es el tiempo al cual se produce $(1-1/e)$ veces el aceite recuperable. De Swaan²⁹ establece que aunque la Ec. 7.18 no describe exactamente el gasto real de imbibición, sí proporciona una representación mejor que otra ecuación que fue desarrollada por Bokserman y Cols¹³⁷ y analizada por Iffly y Cols²⁵.

A partir de la relación entre el gasto q_o y el volumen producido V_o , $q_o = dV_o/dt$ y de la Ec. 7.18 se obtiene

$$V_o = N_r(1 - e^{-t/\tau}), \quad (7.19)$$

que es la ecuación con la que se calcula el volumen acumulado de aceite producido por imbibición, desde el tiempo en el que se sumerge el bloque totalmente en agua hasta el tiempo t , si la matriz es mojable por agua. De esta ecuación se puede observar que si $t = \tau$ entonces $V_o = N_r(1 - 1/e)$; es decir, τ es el tiempo al que se produce un volumen de aceite igual a $N_r(1 - 1/e)$. Además se observa que si $t \rightarrow \infty$, $V_o \rightarrow N_r$.

Aplicando la Ec. 7.19 a un yacimiento naturalmente fracturado que tenga NB tamaños de bloques y a su vez se tengan n_{bl} bloques de cada tamaño, el volumen total de aceite producido a un tiempo t es:

$$\sum_{i=1}^{NB} V_{oi} n_{bi} = \sum_{i=1}^{NB} N_{ri} n_{bi} (1 - e^{-t/\tau_i}). \quad (7.20)$$

La expresión anterior considera que todos los bloques de un tamaño determinado tienen el mismo valor de τ .

Considerando a $N_{ri} n_{bi} = N_{rt}$ como el volumen de aceite recuperable de los n_{bi} bloques de un cierto tamaño, medido a condiciones estándar, de la Ec. 7.20:

$$N_p = \sum_{i=1}^{NB} N_{rti} (1 - e^{-t/\tau_i}), \quad (7.21)$$

que es la ecuación con la que se puede calcular el volumen de aceite producido de un yacimiento naturalmente fracturado de matriz mojable por agua, por el mecanismo de imbibición, tomando en cuenta la distribución y cualquier número NB de tamaños de bloques.

Ejemplo del comportamiento de la recuperación de aceite debido a la distribución del tamaño de los bloques para un yacimiento hipotético.

Se consideran los Casos A y B que se describen a continuación para ilustrar las diferencias en el comportamiento de la recuperación de aceite, debidas a la diferencia en la distribución del tamaño de los bloques, esta vez con

distribuciones discretas para facilitar la comprensión de los conceptos involucrados.

Caso A: Distribución lineal decreciente.

Caso B: Distribución lineal creciente.

La información específica de cada caso se presenta en la Tabla 7.5

Tabla 7.5 Valores de h_{mat} contra f .

h_{mat} (m)	Caso A Distribución decreciente f_i	Caso B Distribución creciente f_i
0.5	0.30	0.10
1.5	0.25	0.15
2.5	0.20	0.20
3.5	0.15	0.25
4.5	0.10	0.30

Información complementaria.

El resto de la información del yacimiento es:

$$N = \text{volumen original de aceite} = 646.154 \times 10^6 \text{ m}^3$$

$$A = \text{área del yacimiento} = 21 \times 10^6 \text{ m}^2$$

$$\phi = 0.10, S_{or} = 0.80, B_{or} = 1.3$$

Se considera que el yacimiento tiene las mismas características (permeabilidad, mojabilidad, etc.) que en el caso estudiado por Mattax y Kyte²¹, de tal manera que corresponde la misma constante de proporcionalidad C dada por la Ec. 7.17,

para la recuperación del aceite en función de cada uno de los cinco tamaños de bloques que se incluyen en este ejemplo.

Con el valor de C se calcula cada uno de los valores de τ , con los que se toma en cuenta la distribución del tamaño de esos bloques. El volumen de aceite recuperable se obtiene de la misma información de Mattax y Kyte, quienes en su Tabla 2 presentan los datos del yacimiento en estudio, los cuales son:

$$h_{ma} = 2.744 \text{ m}, \phi_{ma} = 0.091, k_{ma} = 1.9 \text{ md},$$

$$\mu_w = 0.6 \text{ cp}, \mu_o = 1.8 \text{ cp}, S_w = 0.243$$

Tensión interfacial=35 dinas/cm

Rapidez de avance del agua=1 pg/día

El medio poroso es fuertemente mojable por agua.

Por otra parte, en la Fig. 6 del artículo de referencia se observa que se obtiene una recuperación de $(1 - 1/e)$ veces el total del aceite recuperable, de un bloque con $h_{ma} = 2.744 \text{ m}$, en 116.8 días; por tanto $C = 15.511 \text{ días/m}^2$. Con esta información se calculan los valores de τ mostrados en las Tablas 7.6 y 7.8; los valores de f se ajustaron para dar valores enteros de n_{bl} .

Tabla 7.6 Ejemplo del comportamiento de la recuperación de aceite debido a la distribución del tamaño de los bloques. Número de bloques de cada tamaño n_{bi} y valores ajustados de f . Caso A.

i	h_{mai} (m)	f_i ajustada	n_{bi}	V_{rw} (10^6 m^3)	N_i (10^6 m^3)	N_{ri} (10^6 m^3)	τ_i (días)
1	0.5	0.305	305	3202.5	197.077	59.122	3.878
2	1.5	0.249	83	2614.5	160.892	48.268	34.900
3	2.5	0.200	40	2100.0	129.231	38.769	96.944
4	3.5	0.147	21	1543.5	94.985	28.496	190.010
5	4.5	0.099	11	1039.5	63.969	19.191	314.098
Totales	—	1.000	460	10500.0	646.154	193.846	—

En esta tabla se presentan también resultados, para cada tamaño de bloques, de volumen de roca V_r , volumen original de aceite N , volumen total de aceite recuperable N_r y del tiempo τ necesario para producir un volumen $(1 - 1/e) N_r$ de aceite.

Aplicando los valores de la Tabla 7.6 en la Ec. 7.21, para los valores mostrados de τ , se obtienen los resultados de la Tabla 7.7. En los tiempos se usan los valores de 3.878, 34.9, 96.944, 190.01 y 314.098 días porque corresponden a la recuperación de $(1 - 1/e)$ veces el aceite recuperable de cada tamaño de bloques; es decir, son los valores de τ_1, τ_2, \dots , como se puede observar en la última columna de la Tabla 7.6.

Tabla 7.7 Comportamiento de la recuperación de aceite. Resultados para cada tamaño de bloques y para el total del yacimiento. Caso A.

t (días)	N_{p1} (10^6 m^3)	N_{p2} (10^6 m^3)	N_{p3} (10^6 m^3)	N_{p4} (10^6 m^3)	N_{ps}	N_p (10^6 m^3)
1	13.438	1.363	0.398	0.150	0.061	15.410
3	31.846	3.976	1.181	0.446	0.182	37.631
3.878	37.365	5.076	1.520	0.576	0.235	44.772
10	54.634	12.025	3.800	1.461	0.601	72.521
25	59.028	24.687	8.813	3.513	1.462	97.503
34.9	59.115	30.505	11.721	4.781	2.018	108.140
60	59.122	39.618	17.891	7.716	3.337	127.684
96.944	59.122	45.267	24.502	11.388	5.096	145.375
150	59.122	47.612	30.518	15.556	7.287	160.095
190.01	59.122	48.059	33.308	18.009	8.711	167.209
250	59.122	48.231	35.828	20.851	10.533	174.565
314.098	59.122	48.262	37.251	23.040	12.129	179.804
500	59.122	48.268	38.546	26.445	15.285	187.666

Las columnas indicadas con N_{p1} , N_{p2} , ..., muestran los resultados de producción de cada tamaño de los bloques; por ejemplo, los de 0.5 m (encabezado N_{p1}) alcanzan dicha fracción recuperable a los 3.878 días y a los 60 días se obtiene el total recuperable que es de $59.122 \times 10^6 \text{ m}^3$. De los bloques cada vez mayores, la fracción recuperada a un tiempo dado es menor, o bien para recuperar una fracción dada el tiempo es mayor. En la última columna se presenta la producción total del yacimiento para cada tiempo indicado.

En forma análoga, para el Caso B (distribución lineal creciente) se presentan en la Tabla 7.8 los resultados por tamaño de bloques para la f ajustada, n_{bl} , V_{rbl} , N , N_n y τ , en tanto que el comportamiento de producción se muestra en la

Tabla 7.9. Se observa que este comportamiento es muy diferente al del Caso A (Tabla 7.7), estableciendo así un ejemplo del efecto cuantitativo de la distribución del tamaño de los bloques sobre la producción, cuando predomina el mecanismo de imbibición y el resto de las características del sistema roca-fluidos permanece constante.

Además, también se observa de los resultados anteriores que en el caso de distribución lineal creciente en general no se puede decir que predominan los bloques grandes (columna 4 de la Tabla 7.8, 33 contra 100 bloques pequeños), sino que la mayor cantidad de fluidos se aloja en los bloques grandes. También se muestra en la Tabla 7.9 que para los bloques con $h_{ma} = 0.5$ y 1.5 m, el total del aceite recuperable se obtiene a los 60 y 500 días, respectivamente.

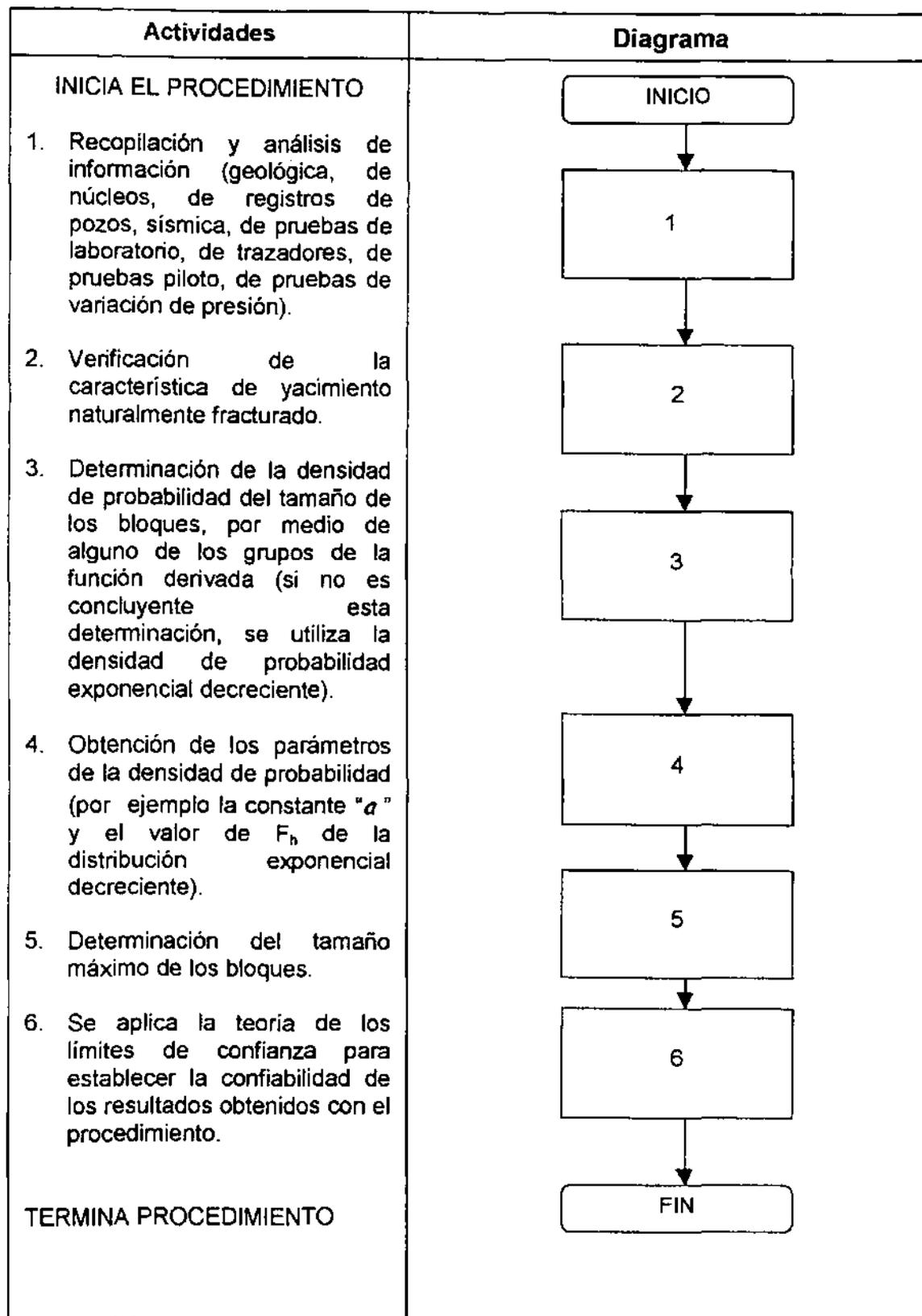
Tabla 7.8 Información de valores ajustados de f_i , volumen de roca, etc., para cada uno de los tamaños de los bloques. Caso B: distribución lineal creciente del tamaño de los bloques.

i	h_{ma} (m)	f_i ajustada	n_{bi}	V_{ro} (10^6 m ³)	N_i (10^6 m ³)	N_{rh} (10^6 m ³)	τ_i (días)
1	0.5	0.101	100	1060.5	65.262	19.579	3.878
2	1.5	0.150	50	1575.0	96.923	29.077	34.900
3	2.5	0.200	40	2100.0	129.231	38.769	96.944
4	3.5	0.252	36	2646.0	162.831	48.850	190.010
5	4.5	0.297	33	3118.5	191.907	57.571	314.098
Totales	—	1.000	259	10500.0	646.154	193.846	—

Tabla 7.9 Comportamiento de la recuperación de aceite. Resultados para cada tamaño de bloques y para el total del yacimiento. Caso B: distribución lineal creciente del tamaño de los bloques.

t (días)	N_{p1} (10^6 m^3)	N_{p2} (10^6 m^3)	N_{p3} (10^6 m^3)	N_{p4} (10^6 m^3)	N_{p5} (10^6 m^3)	N_p (10^6 m^3)
1	4.450	0.821	0.398	0.257	0.183	6.109
3	10.546	2.395	1.181	0.765	0.546	15.433
3.878	12.374	3.058	1.520	0.987	0.705	18.644
10	18.093	7.244	3.800	2.505	1.803	33.445
25	19.548	14.872	8.813	6.022	4.386	53.641
34.9	19.577	18.376	11.721	8.196	6.054	63.924
60	19.579	23.866	17.891	13.227	10.011	84.574
96.944	19.579	27.269	24.502	19.522	15.287	106.159
150	19.579	28.682	30.518	26.667	21.860	127.306
190.01	19.579	28.951	33.308	30.872	26.132	138.842
250	19.579	29.055	35.828	35.744	31.598	151.804
314.098	19.579	29.073	37.251	39.497	36.386	161.786
500	19.579	29.077	38.546	45.334	45.853	178.389

7.4 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS



CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El propósito esencial de esta tesis ha sido el desarrollo de un procedimiento para estimar los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad, del tamaño múltiple de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado; es decir, se resuelve el problema inverso. Además se plantea y resuelve el problema directo correspondiente, considerando la variación continua del tamaño de los bloques.

Con base en la teoría y los resultados que se presentan, se pueden establecer las conclusiones y recomendaciones siguientes:

1. Se desarrolla un procedimiento para estimar parámetros de yacimientos de doble porosidad, con tamaño múltiple de bloques de matriz, a partir de datos de pruebas de decremento de presión. Específicamente, se estiman los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad que definen la variabilidad y su rango del tamaño de los bloques; estos parámetros son la pendiente y la ordenada al origen de funciones lineales, la constante exponencial y el cociente h_{min}/h_{max} de funciones exponenciales (el valor medio y la desviación estándar de funciones normales o de Gauss podrían tratarse en forma similar).

Si no se dispone de información del yacimiento, obtenida por medio de otras fuentes como geología, registros, etc., sobre el tipo de distribución de los bloques, entonces se usa la función de densidad de probabilidad exponencial decreciente, puesto que en afloramientos de rocas naturalmente fracturadas

normalmente existe un predominio de los bloques pequeños y éste disminuye exponencialmente hacia los bloques grandes. Si no fuera este caso, entonces se prueban otras distribuciones de los bloques; la que ajuste mejor, particularmente el comportamiento de la función derivada $t_{DP}'_{wD}$, por tener mayor poder de diagnóstico que la respuesta de presión p_{wD} , correspondería a la mejor solución en la estimación de los parámetros (la mejor solución del problema inverso).

2. Considerando que se introducen errores al estimar los parámetros de un yacimiento, entre los que se cuentan los del modelo que se utilice, los de medición o ruido y los del procedimiento de optimización que se aplique, se usó la teoría de los límites de confianza, que tiene como base la regresión no lineal, para establecer la confiabilidad de los resultados obtenidos a través del procedimiento de análisis.

Se presenta un ejemplo de cálculo de estos límites, utilizando los resultados de una prueba simulada (hipotética) de decremento de presión; estos resultados no contienen errores de medición ("ruido") ni los correspondientes al modelo. Además de calcular la confiabilidad de los parámetros estimados en términos estadísticos, se usaron sus valores en el modelo para calcular los resultados de la función derivada, los cuales se compararon con los resultados "reales", obteniendo muy buena concordancia.

3. Se aplica la determinación de la variabilidad del tamaño de los bloques en el cálculo del gasto de imbibición a un tiempo dado y en la predicción del comportamiento de la producción de aceite.

En ambos ejemplos se presentan los procedimientos de cálculo y los resultados para los casos planteados: Caso A, distribución lineal decreciente y Caso B, distribución lineal creciente. El resto de la información de los dos casos es la misma, por lo cual las diferencias observadas se deben exclusivamente a la diferencia en la distribución del tamaño múltiple de los bloques de matriz.

4. Como situaciones límite del problema directo, se resuelve el caso en el que todos los tamaños de los bloques, desde h_{min} hasta $h_{máx}$, tienen la misma probabilidad de existir en el medio de doble porosidad (distribución uniforme o rectangular) y la circunstancia en la que todos los bloques de matriz tienen el mismo tamaño.
5. El predominio de bloques grandes significa realmente que el mayor porcentaje de aceite del medio naturalmente fracturado se encuentra en esos bloques y no necesariamente que el número de ellos sea mayor que el de los bloques pequeños.

6. Para la función de densidad de probabilidad lineal, existe una relación entre F_h , m y b , por lo que no se debe considerar por separado la variación de cada uno de estos parámetros. Por ejemplo, si $F_h=0$ (rango de variación del tamaño de los bloques desde cero hasta un valor máximo), entonces los rangos de variación de m y b para la distribución lineal creciente son $[0,2]$ y $[0,1]$, respectivamente.

7. Los parámetros de la función exponencial " a " y F_h son independientes. Los rangos de variación respectivos son $-\infty$ a $+\infty$ y 0 a 1; debido a las características de la función exponencial, el aumento o disminución del espesor adimensional h_D ocurre con cambios más pronunciados que en la función de densidad de probabilidad lineal.

8. Para fines prácticos, en la función de densidad de probabilidad normal o de Gauss, el rango de variación de h_D , en términos de la desviación estándar σ , es $(1+F_h)/2-3\sigma \leq h_D \leq (1+F_h)/2+3\sigma$.

9. Las curvas de $t_{DP} w_D$ de las distribuciones crecientes, presentan los fondos de los valles en el período de transición a tiempos mayores que en el caso de las distribuciones decrecientes; esto corresponde a que en las primeras distribuciones predominan los bloques grandes en tanto que en las distribuciones decrecientes predominan los bloques pequeños.

10. Para condiciones equivalentes (distribuciones decrecientes o crecientes), con las distribuciones exponenciales existe un mayor predominio de los bloques pequeños en relación con las distribuciones lineales, con lo cual el período de transición en las primeras se inicia antes que con las distribuciones lineales.
11. La separación horizontal de la parte baja de los valles con las funciones exponenciales crecientes y decrecientes de la función derivada $t_D p'_{wD}$, es mayor a la correspondiente con las funciones lineales; esto se explica considerando que en las funciones exponenciales la variación de la probabilidad con respecto a h_D ocurre con cambios más pronunciados que en las funciones lineales.
12. Con cualquier tipo de distribución, los valores de $t_D p'_{wD}$ tienden a 0.5 a medida que se alcanza el período de flujo tipo pseudo-estacionario matriz-fracturas en un yacimiento infinito.
13. El final de la transición se inicia más tarde con la distribución exponencial creciente que con la distribución exponencial decreciente.
14. El algoritmo de Stehfest para obtener la antitransformada de Laplace funcionó mejor con $N=6, 10$ y 12 , utilizando doble precisión, para $t_D p'_{wD}$, p_{wD} y $t_D^2 |p''_{wD}|$, respectivamente; con otros valores de N se presentaron

oscilaciones en los resultados. Estos valores están en función de la precisión de la computadora, por lo que en general no siempre son aplicables.

15. El proceso de optimización aplicado en la estimación de parámetros funcionó muy bien, obteniéndose convergencia en los resultados usando valores iniciales supuestos de los mismos hasta de 5 veces y de $1/5$ de los valores reales. Se emplea un factor para lograr y acelerar la convergencia, que tiene un rango de valores de 0.5 a 1.0 y se usa directamente en el programa Sub Calc_Regresión.
16. Se presenta un procedimiento para determinar el tamaño máximo de los bloques $h_{máx}$, con la estimación del parámetro F_h (procedimiento principal de esta tesis) y considerando que F_h es el cociente $h_{min}/h_{máx}$, se define el rango de variación del tamaño de los bloques.
17. Para las condiciones dadas en el ejemplo de aplicación, el incremento en el gasto de imbibición de la distribución lineal decreciente con respecto al de la distribución lineal creciente es de 43%. Este aumento en el gasto se debe únicamente a la diferencia involucrada en la distribución del tamaño múltiple de bloques de matriz, considerando constante el resto de la información del yacimiento.

18. En el ejemplo sobre el comportamiento de la recuperación de aceite se encontró que para los tamaños de 0.5, 1.5, 2.5, 3.5 y 4.5 m, los tiempos en los que se produce el $(1-1/e)$ veces el volumen de aceite recuperable son 3.878, 34.9, 96.944, 190.01 y 314.098 días, respectivamente. Se muestran también los resultados de producción para cada tamaño de los bloques, a diferentes tiempos desde 1 hasta 500 días. Así, para los bloques de 0.5 m el total de aceite recuperable se obtiene a los 60 días, en tanto que para los bloques de 1.5 m el tiempo correspondiente es de 500 días.

Las recomendaciones para investigación futura son:

1. Buscar información y complementarla en lo posible, con el fin de hacer una aplicación en un caso de campo, del procedimiento para estimar la distribución y sus parámetros del tamaño múltiple de bloques de matriz. Calcular los límites de confianza correspondientes.
2. Con los resultados del caso de campo, calcular el gasto de imbibición y el comportamiento de la producción de aceite.
3. Desarrollar extensiones del modelo para incluir el flujo matriz-fracturas en régimen pseudo estacionario y el análisis de pruebas de incremento y de interferencia de presiones.

4. Explorar la posibilidad de desarrollar curvas tipo utilizando la función derivada u otras funciones de la presión, para determinar el tipo de distribución del tamaño de los bloques.
5. Utilización de los resultados del procedimiento de estimación de parámetros en casos concretos de simulación numérica de yacimientos; se deben de tomar en cuenta los problemas de escalamiento que se pudieran presentar.
6. Desarrollar extensiones de las aplicaciones prácticas del cálculo de la distribución del tamaño de los bloques, que se presentan en las Secciones 7.3.1 y 7.3.2 de esta tesis; para ello tomar en cuenta los resultados publicados en los que se analizan las condiciones bajo las cuales predominan los efectos capilares o los gravitacionales, a la vez que ratificar o buscar otras formas de calcular el gasto de aceite que produce por imbibición un bloque de matriz rodeado totalmente por agua desde el principio del proceso.
7. Aplicar el algoritmo de Crump como una forma alternativa de hacer la inversión numérica de las soluciones. Comparar y evaluar los resultados obtenidos.

NOMENCLATURA

- a Constante en la función de densidad de probabilidad exponencial, Ec. 5.4.
- A_{fb} Área de las fracturas por volumen de matriz y fracturas, Ec. 4.3, 1/pies.
- A_{fD} Área adimensional de las fracturas, Ec. E.2.
- A_{fma} Área de las fracturas por volumen de matriz, Ec. 4.4, 1/pies.
- b Ordenada al origen de la función de densidad de probabilidad lineal, Ec. 5.1.
- B Factor de volumen. Además matriz expresada en la Ec. 7.6.
- B_{jj} Elementos de la diagonal de la matriz B. Ver la Ec. 7.6.
- c Compresibilidad, pg^2/lb .
- c_{ft} Compresibilidad total de la red de fracturas, Ecs. 4.5 y 4.12, pg^2/lb .
- c_{ma} Compresibilidad total de la matriz, Ec. 4.12, pg^2/lb .
- C Constante de proporcionalidad, Ec. 7.17.
- C_D Constante de almacenamiento en forma adimensional.
- C_j, C_i Valor estimado o calculado de un parámetro.
- \dot{C}_j Valor real de un parámetro.
- ΔC_i Corrección que se aplica a C_i , Ec. C.10.
- $f(h_{ma})$ Función frecuencia del tamaño de los bloques, Ec. 2.1, 1/pies.
- $f(z)$ Función a ser integrada mediante la Regla de Simpson extendida, Ec.A.30.
- $f_D(h_D)$ Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_D , en forma adimensional, Ecs. 5.1, 5.4 y A.10.
- $F_D(h_D)$ Función de distribución de $f_D(h_D)$, Ec. A.17.
- F_h Cociente h_{\min}/h_{\max} .

f_{min}	Valor mínimo de f_{obj} , Ec. F.3.
f_{obj}	Función objetivo definida en el proceso de optimización, Ec. F.1.
f_p	Función derivada, función de presión, Ec. C.1.
F	Función, ver la Ec. 7.12.
g	Función expresada en las Ecs. 2.12, 4.15, 4.19 y A.9.
h_D	Espesor del bloque en forma adimensional, Ec. 2.26.
h_f	Espesor de las fracturas, pies.
h_{ma}	Espesor de los bloques de matriz, pies.
$h_{máx}$	Espesor máximo de los bloques, pies.
h_{min}	Espesor mínimo de los bloques, pies.
J	Jacobiano, Ec. C.6.
J^T	Matriz transpuesta de J .
k_f	Permeabilidad de las fracturas, mD.
k_{ma}	Permeabilidad de la matriz, mD.
K_0	Función de Bessel modificada, de segunda clase, orden cero. Ver la Ec.A.26.
K_1	Función de Bessel modificada, de segunda clase, orden uno. Ver la Ec.A.27.
m	Pendiente de la función de densidad de probabilidad lineal, Ec. 5.1. Además, número de parámetros por estimar.
Mlt	Factor para lograr y acelerar la convergencia en el proceso de optimización. Ver la Sección 6.3, en la parte "Sub Calc_Desv".
n	Número de datos utilizados en el proceso de optimización.
N	Número de términos de la expresión de Stehfest; ver la Ec. A.19. Además, volumen original de aceite a condiciones estándar.
NB	Número de tamaños de bloques de una distribución discreta, Ec. 2.2.

- N_p Volumen producido de aceite a condiciones estándar, pies³.
- N_r Volumen de aceite recuperable de un bloque, a condiciones estándar, Ec. 7.19, pies³.
- $p(h_D)$ Función de densidad probabilidad, Ecs. 2.32 a 2.34.
- p_i Presión inicial del yacimiento, lb/pg² abs.
- p_{wD} Presión adimensional en el pozo, Ecs. 4.10 y 7.2.
- \dot{p}_{wD} Derivada de p_{wD} .
- \ddot{p}_{wD} Segunda derivada de p_{wD} .
- \bar{p}_{wD} Transformada de Laplace de p_{wD} , Ec. 4.13.
- $P(s_i)$ Función del algoritmo de Stehfest expresada en la Ec. A.20.
- PSS "Pseudo Steady State"; régimen pseudo estacionario.
- Δp Cambio de presión, lb/pg².
- ∇p Gradiente de presión, lb/pg³.
- q Gasto en el pozo, pies³/D.
- r_D Radio adimensional, Ec. 4.9.
- s Variable en el espacio de Laplace.
- S Factor de daño en el pozo. También saturación.
- t Valor obtenido de la distribución t de Student. Desigualdad 7.4. También tiempo real.
- t_j Suma de los cuadrados de $MIt_x \Delta C_i$, del criterio de tolerancia en el proceso de optimización. Ver la Sección 6.3, en la parte "Function Calc_BA".
- t_D Tiempo adimensional, Ecs. 4.11 y 7.1.
- t_{Dbpss} Tiempo adimensional en el que se inicia el período de flujo pseudo estacionario, Ec. E.1.
- T Suma de los cuadrados de C_i , del criterio de tolerancia en el proceso de optimización. Ver la Sección 6.3, en la parte "Function Calc_BA".

- USS "Unsteady State"; régimen transitorio.
- V Volumen, pies³.
- V_i Función del algoritmo de Stehfest expresada en la Ec. A.22.
- x Función expresada en la Ec. 2.11.
- x^* Variable aleatoria, Ecs. 5.6 y 5.7.
- y Valor de f_p correspondiente a los datos de campo. Ver la Ec. C.3.
- z Función expresada en la Ec. 4.20.
- γ' Constante de Euler, 0.577216.
- γ Exponencial de la constante de Euler, 1.781073.
- α Nivel de riesgo. También constante cuyo valor depende del sistema de unidades, Ecs. 2.17, 4.10 y 7.2.
- β Constante cuyo valor depende del sistema de unidades, Ecs. 2.16, 4.11 y 7.1.
- η_{maD} Difusividad hidráulica de la matriz, en forma adimensional, Ecs. 2.8 y 4.17.
- λ Coeficiente de flujo matriz-fracturas, Ec. 2.29.
- σ Desviación estándar, Ec. 5.7.
- μ Viscosidad del fluido, cp.
- μ^* Valor medio, Ecs. 5.6 y 5.7.
- τ Tiempo al cual se produce $(1-1/e)$ veces el aceite recuperable de un bloque de matriz, Ec. 7.19, días.
- ϕ Porosidad.
- ξ Función objetivo definida en el proceso de optimización, Ec. C.3.
- ω Almacenamiento de las fracturas, Ecs. 2.7 y 4.16.

ω_{ma} Almacenamiento de la matriz, Ec. 2.27.

Subíndices

<i>b</i>	Bruto, total; el parámetro correspondiente se define usando el volumen total de matriz y fracturas.
<i>bl</i>	Bloque.
<i>c</i>	Condiciones continuas.
<i>ce</i>	Condiciones estándar.
<i>d</i>	Condiciones discretas.
<i>D</i>	Adimensional.
<i>est</i>	Estimada.
<i>f</i>	Fractura.
<i>fb</i>	Fractura, con referencia al volumen total.
<i>i</i>	Número de los bloques.
<i>ma</i>	Matriz.
<i>máx</i>	Máximo.
<i>min</i>	Mínimo.
<i>ns</i>	Número de términos en la expresión de la Regla de Simpson extendida, Ec. A.30.
<i>obs</i>	Observada.
<i>r</i>	Recuperable.
<i>sup</i>	Supuesta.
<i>t</i>	Total.
<i>w</i>	Pozo.

REFERENCIAS

1. Rodríguez, N.R. y Rivera, R.J.: "Estado Actual de la Tecnología de Recuperación de Aceite por Medio de la Inyección de Agua en Yacimientos Naturalmente Fracturados", Rev. Ingria. Petrolera, (jun. de 1985) 17-35.
2. Palacios, C.R.: "La Producción de Petróleo y Gas en México. Situación Actual y Perspectiva", Rev. Ingria. Petrolera, (sept. de 1996) 27-35
3. Hernández, N.M. y Durán, A.R.: "Zona Regional Conectada por Acuífero Asociado a los Yacimientos de la Formación Brecha-Cretácico de la Región Marina", Rev. Ingria. Petrolera, (oct. de 1996) 50-57.
4. Cruz, H.J.: "Visualización del Desplazamiento Inmiscible de Fluidos en Medios Porosos Fracturados", Tesis Doctoral, Facultad de Química UNAM, (oct. de 1997).
5. Warren, J. E. y Root, P. J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (sep. de 1963) 245-55
6. Kazemi, H.: "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution", SPEJ (dic. de 1969) 451-62.
7. De Swaan, A.: "Analytic Solutions for the Determination of the Naturally Fractured Reservoirs Properties by Well Testing", SPEJ (jun. de 1976) 117-22.
8. Gringarten, A. C., Bourdet, D., Landel, P. A. y Kniazeff, V. J.: "A Comparison Between Different Skin and Wellbore Storage Type-Curves for Early-Time Transient Analysis", artículo SPE 8205, presentado en la "1979 SPE Annual Technical Conference and Exhibition" Las Vegas NV, sept. 23-26 de 1979.
9. Najurieta, L. H.: "A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs", JPT (jul. de 1980) 1241-250.
10. Bourdet, D. y Gringarten, A. C.: "Determination of Fissure Volume and Block Size in Fractured Reservoirs by Type-Curve Analysis", artículo SPE 9293, presentado en la "1980 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas TX, sept. 21-24 de 1980.
11. Cinco, L. H. y Samaniego, F. V.: "Transient Analysis for Fractured Wells", JPT (sep. de 1981) 1749-66 .

12. Gringarten, A. C.: "Interpretation of Tests in Fissured and Multilayered Reservoirs With Double-Porosity Behavior: Theory and Practice", JPT (abr. de 1984), 549-64. También artículo SPE 10044, presentado en el "SPE International Petroleum Exhibition and Technical Symposium", Beijing, China, mar. 18-26 de 1982.
13. Cinco-L. H. y Samaniego V. F.: "Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 11026 presentado en la "1982 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", N. Orleans, LA, sept. 26-29 de 1982.
14. Bourdet, D., Ayoub, J. A., Whittle, T. M., Pirard, Y. M. y Kniazzeff, V.: "Interpreting Well Tests in Fractured Reservoirs", World Oil (oct. de 1983) 77-87.
15. Braester, C.: "Influence of Block Size on the Transition Curve for Drowdown Tests in a Naturally Fractured Reservoir", SPEJ (oct. de 1984) 498-504.
16. Aguilera R.: Naturally Fractured Reservoirs, Pet. Publishing Co., Tulsa (1980).
17. Segall, P.: "The Development of Joints and Faults", Tesis Doctoral, U. de Stanford (jul. de 1981).
18. Isaacs, C. M.: "Geology and Physical Properties of the Monterey Formation, California", artículo SPE 12733, presentado en el "1984 SPE California Regional Meeting", Long Beach, CA., abr. 11-13 de 1984.
19. Belani, A. K. y Jalali-Yazdi, Y.: "Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 18171, presentado en la "1988 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, oct. 2-5 de 1988.
20. Johns, R. T. y Jalali-Yazdi, Y.: "Comparison of Pressure-Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs", SPEFE, (dic. de 1991) 513-18. También tesis de Maestría, U. de Stanford (1989).
21. Mattax, C. C., Kyte, J. R.: "Imbibition Oil Recovery From Fractured, Water-Drive Reservoir", SPEJ (jun. de 1962) 177-84.
22. Parsons, R. W. y Chaney, P. R.: "Imbibition Model Studies on Water-Wet Rocks", SPEJ (mar. de 1966) 26-34.

23. González, D. O., Teyssier, S. J., Rivas, S.: "Recuperación por Imbibición del Yacimiento Tamaulipas Inferior, Sección A. Campo Tamaulipas Constituciones", Rev. Ingria. Petrolera (ago. de 1967) 20-35.
24. Kyte, J. R.: "A Centrifuge Method To Predict Matrix-Block Recovery in Fractured Reservoirs", SPEJ (jun. de 1970) 164-70.
25. Iffly, R., Rousselet, D. C., Vermeulen, J. L.: "Fundamental Study of Imbibition in Fissured Oil Fields", artículo SPE 4102, presentado en el "1972 SPE Annual Fall Meeting", S. Antonio, TX., oct. 8-11 de 1972.
26. Treiber, L. E., Archer, D. L., Owens, W. W.: "A Laboratory Evaluation of the Wettability of Fifty Oil-Producing Reservoirs", SPEJ (dic. de 1972) 531-40.
27. El-Hadid, M.: "Measurement of Imbibition Rates at Elevated Temperatures", Tesis Doctoral, U. de Stanford (ago. de 1974).
28. Kleppe, J., Morse, A. R.: "Oil Production from Fractured Reservoirs by Water Displacement", artículo SPE 5084, presentado en el "1974 Annual Fall Meeting" Houston, TX, oct. 6-9 de 1974.
29. De Swaan, A.: "Theory of Waterflooding in Fractured Reservoirs", SPEJ (abr. de 1978) 117-122.
30. Lefebvre, D. P.: "Gravity and Capillarity Effects on Imbibition in Porous Media", SPEJ (jun. de 1978) 195-206.
31. Cinco-L. H., Samaniego, V. F. y Kuchuk, F.: "The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoirs With Multiple Block Size", artículo SPE 14168, presentado en la "1985 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Las Vegas, NV, sept. 22-25 de 1985.
32. Tiab, D. y Puthigai, S. K.: "Pressure-Derivative Type Curves for Vertically Fractured Wells", SPEFE, (mar. de 1988) 156-58. También artículo SPE 11028, presentado en la "1982 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", N. Orleans, La, sep. 26-29 de 1982.
33. Bourdet, D., Whittle, T. M., Douglas, A. A. y Pirard, Y. M.: "A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis", World Oil (mayo de 1983) 95-106.
34. Bourdet, D. Ayoub, J. A. y Pirard, Y. M.: "Use of Pressure Derivative in a Well Test Interpretation", artículo SPE 12777, presentado en el "1984 SPE California Regional Meeting", Long Beach, CA. abr. 11-13 de 1984; también SPEFE (jun. de 1989) 293-302.

35. Bourdet, D., Alagoa, A., Ayoub, J. A. y Pirard, Y. M.: "New Type Curves Aid Analysis of Fissured Zone Well Tests", *World Oil* (abr. de 1984) 111-24.
36. Wong, D. W., Harrington, A. G. y Cinco-L. H.: "Application of the Pressure-Derivative Function in the Pressure-Transient Testing of Fractured Wells", *SPEFE* (oct. de 1986). También artículo SPE 13056, presentado en la "1984 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, TX, sept. 16-19 de 1984.
37. Alagoa, A., Bourdet, D. y Ayoub, J. A.: "How to Simplify The Analysis of Fractured Well Tests", *World Oil* (oct. de 1985) 97-102.
38. Clark, D. G. y van Golf-Racht, T. D.: "Pressure-Derivative Approach to Transient Test Analysis: A High-Permeability North Sea Reservoir Example", *JPT* (nov. de 1985) 2023-39.
39. Cinco-L. H., Kuchuk, F., Ayoub, J. y Samaniego V. F.: "Analysis of Pressure Tests Through the Use of Instantaneous Source Response Concepts", artículo SPE 15476, presentado en la "1986 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", N. Orleans, LA, oct. 5-8 de 1986.
40. Wong, D. W., Mothersele, C. D., Harrington, A. G. y Cinco-L. H.: "Pressure Transient Analysis in Finite Linear Reservoirs Using Derivative and Conventional Techniques: Field Examples", artículo SPE 15421, presentado en la "1986 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", N. Orleans, LA, oct. 5-8 de 1986.
41. Gringarten, A. C.: "How to Recognize Double Porosity Systems from Well Tests", *JPT* (jun. de 1987) 631-33.
42. Jalali-Yazdi, Y. y Ershaghi, I.: "A Unified Type Curve Approach for Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 16778, presentado en la "1987 SPE Annual Conference and Exhibition", Dallas, TX, sept. 27-30 de 1987.
43. Onur, M. y Reynolds, A. C.: "A New Approach for Constructing Derivative Type Curves for Well Test Analysis", artículo SPE 16810, presentado en la "1987 SPE Annual Conference and Exhibition", Dallas, TX, sept. 27-30 de 1987. También *SPEFE* (mar. de 1988) 197-206.
44. Duong, A. N.: "A New Set of Type Curves for Well-Test Interpretation With the Pressure/Pressure-Derivative Ratio", *SPEFE* (jun. de 1989) 264-68. También artículo SPE 16812 presentado en la "1987 SPE Annual Conference and Exhibition", Dallas, TX, sept. 27-30 de 1987.

45. Sánchez, B. J. L. y Cinco-L. H.: "Análisis de Pruebas de Presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados", Rev. Ingria. Petrolera, (abr. de 1990) 7-18.
46. Bourgeois, M. J. y Cols.: "Use of Second Pressure Derivative for Automatic Model Identification in Well Test Analysis", artículo SPE 36659, presentado en la "1996 SPE Annual Conference and Exhibition, Denver CO, oct. 6-9 de 1996.
47. Jiménez, A. M. A.: "Aplicación de la Función de la Segunda Derivada en el Análisis de Pruebas de Presión", Tesis de Maestría, DEPEFI, UNAM (ago. de 1997).
48. Matthews C. S. y Russell, D. G.: Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, SPE Monograph, (1967).
49. Agarwal, R. G., Al-Hussainy, R. y Ramey, Jr. H. J.: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow. I. Analytical Treatment", Trans. AIME (1970) 84-95.
50. Raghavan, R.: Well Test Analysis, Prentice-Hall, 1993.
51. Cinco-L. H. y Samaniego, F. V.: "Effect of Wellbore Storage and Damage on The Transient Pressure Behaviour of Vertically Fractured Wells. Artículo SPE 6752, presentado en la "1977 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", Denver, CO, oct. 9-12 de 1977.
52. Earlougher Jr. R. C.: Advances in Well Test Analysis, SPE Monograph, 1977.
53. Gringarten, A. C. Burgess, T. M., Viturat, D., Pelissier, J. y Aubry, M.: "Evaluation of Fissured Formation Geometry from Well Test data: a Field Example", artículo SPE 10182 presentado en la "1981 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", S. Antonio, TX, oct. 5-7 de 1981.
54. Marquardt, D. W.: "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Non Linear Parameters ", J. Soc. of Appl. Math. (jun. de 1963) 431-41.
55. Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics, Ch. 4, John Wiley and Sons, (1962).
56. Samaniego-V. F. y Cinco-L. H.: Oil and Gas Reserve Estimation Methods, capítulo publicado en: Chilingarian, G.V., Mazzsullo, S. J. y Rieke, H. H.: Carbonate Reservoirs Characterization: A Geologic-Engineering Analysis, Part I, Amsterdam, Elsevier(1992) 505-42.

57. Earlougher R. C. y Kersch K. M.: "Field Examples of Automatic Transient Test Analysis", JPT (oct. de 1972) 1271-77.
58. Dogru A. H., Dixon, T. N. y Edgars, T. F.: "Confidence Limits on the Parameters and Predictions of Slightly , Compressible , Single-Phase Reservoirs", SPEJ (feb. de 1977) 42-56.
59. Yeh, W., W-G.: "Review of Parameter Identification Procedures in Ground-Water Hydrology: The Inverse Problem", Water Res. Research (feb. de 1986) 95-108.
60. Martínez, N. R.: " Desarrollo de una Técnica de Regresión, para el Análisis Automático de Pruebas de Presión. Aplicación al Campo Abkatún", Rev. Ingeniería. Petrolera (abr. de 1986).
61. Tarantola, A.: Inverse Problem Theory, Elsevier, 1987.
62. Carrera, J.: "State of the Art of the Inverse Problem Applied to the Flow and Solute Transport Equations"., D. Reidel Publishing Co. (1988) 549-82.
63. Rosenbrock, H. H.: "An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function", mar. de 1992. También: Computational Techniques for Chemical Engineers, Pergamon Press (1996).
64. Ramey, Jr., H. J.: "Advances in Practical Well-Test Analysis", JPT (jun. de 1992) 650-59.
65. Ramírez, S. J.: "Flujo de Trazadores en Yacimientos Naturalmente Fracturados", Tesis Doctoral, DEPEFI, UNAM (oct. de 1992).
66. Carvalho, R. S., Redner, R. A., Thompson, L. G. y Reynolds A. C.: "Robust Procedures for Parameter Estimation by Automated Type-Curve Matching", artículo SPE 24732 presentado en la "1992 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Washington, D. C., oct. 4-7 de 1992.
67. Fuentes, N. F.: "Optimization of Dry Gas Production Systems", Reporte para el Grado de Ingeniería, U. de Stanford (mayo de 1993).
68. Hansen, C.: "The Backus-Gilbert Method: SVD Analysis and Fast Implementation", IOP Publishing Ltd (feb. de 1994).
69. Savioli, G. y Bidner, S.: "Comparison of Optimization Techniques for Automatic History Matching", J. of Pet. Sc. and Eng, (jun. de 1994) 25-35.

70. Vieira, P. M. F. y Rosa A. J.: " A Comparison of Several Methods for Automated Well Test Analysis ", SPE Journal (mar. de 1996) 3-9. También artículo SPE 26428, presentado en la "1993 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, TX, oct. 3-6 de 1993.
71. Finsterle, S. y Persoff, P.: "Determining Permeability of Tight Rock Samples Using Inverse Modeling", propuesto a Water Resources Research (ago. de 1996).
72. San Miguel, González, L. A.: "Métodos Alternos para el Ajuste Automático de las Ecuaciones de Estado", Tesis de Maestría, DEPMI, UNAM (jun. de 1998).
73. Jalali-Yazdi, Y. y Ershaghi, I.: "Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 16341, presentado en el "1987 SPE California Regional Meeting", Ventura, CA, abr. 8-10.
74. Stehfest, H.: Numerical Inversion of Laplace Transforms; communications of ACM (ene. de 1970) 47-49.
75. Najurieta, L.H.: "Interference and Pulse Testing in Uniformly Fractured Reservoirs", artículo SPE 8283, presentado en la "1979 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", Las Vegas, NV sept. 23-26 de 1979.
76. Serra, K. V., Reynolds, A. C. y Raghavan, R.: "New Pressure Transient Analysis Methods for Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 10780 presentado en S. Francisco, CA, mar. 24-26 de 1982. También JPT (dic. de 1983).
77. Reynolds, A. C., Chang, W. L. Yeh, J. y Raghavan, R.: "Wellbore Pressure Response in Naturally Fractured Reservoirs", JPT (mayo de 1985) 908-20.
78. Petak, K. R. y Cols.: "Type Curves for Analyzing Naturally Fractured Reservoirs" artículo SPE 15638 presentado en la "SPE Annual Technical Conference and Exhibition", N. Orleans, LA, oct. 5-8 de 1986.
79. Jalali-Yazdi, Y.: "Pressure Transient Behavior of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs", Tesis Doctoral, U. del Sur de California (ago. de 1987).
80. Gray, W. y Matthews, T.: A Treatise on Bessel Functions, 1931.
81. Abramowitz, M. y Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions. Bessel Functions of Integer Order. Novena Impresión. Nov. de 1970.

82. Chez, F., Janot, P.: "Statistical Calculation of Elementary Matrix Blocks in Fractured Reservoirs", artículo SPE 4047 presentado en el "1972 SPE Annual Fall Meeting", S. Antonio TX, oct. 8-11 de 1972.
83. Janot, P.: "Determining the Elementary Matrix Block in a Fissured Reservoir-Eschau Field, France", JPT (mayo de 1973) 523-30.
84. Gringarten, A. C., Ramey Jr. H. y Raghavan, R.: "Applied Pressure Analysis for Fractured Wells", JPT (jul. de 1975) 887-92.
85. Mavor, M. J. y Cinco L. H.: "Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 7877 presentado en el "1979 SPE California Regional Meeting", Ventura CA, abr. 18-20 de 1979.
86. Evans, R. D.: "A Proposed Model for Multiphase Flow Through Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (oct. de 1982) 669-80.
87. Barker, J. A.: "Generalized Well Function Evaluation for Homogeneous and Fissured Aquifers", J. of Hydrology (1985) 143-54.
88. Press, W. H., Flannery, H., Teukoolshy M. y Vetterling, J.: Numerical Recipes in Fortran; the Art of Scientific Computing, 2ª Ed., (1992).
89. Ramey, H. J., Jr.: "Short-Time Well Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage", JPT (ene. de 1970) 97-103.
90. Onur, M., Satman, A. y Reynolds, A. C.: "New Type Curves for Analyzing the Transition Time Data from Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 25873 presentado en el "1993 SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs Symposium", Denver, CO, abr. 12-14 de 1993.
91. Olivera, S. A. y Zúñiga, B. S.: Elementos de Probabilidad. Serie de Probabilidad y Estadística. IMPOS S. A. (1979).
92. Olivera, S. A. y Zúñiga, B. S.: Distribuciones Teóricas de una Variable. Serie de Probabilidad y Estadística. IMPOS S. A. (1979).
93. Rosa, A. J. y Horne, R. N.: "Automated Type-Curve Matching in Well Test Analysis Using Laplace Space Determination of Parameter Gradients", artículo SPE 12131 presentado en la "1983 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", S. Francisco, CA, oct. 5-8 de 1983.
94. Kruger, W. D.: "Determining a Real Permeability Distribution by Calculations", JPT (jun. de 1961) 691-96.

95. Nelson, R. W.: "Conditions for Determining a Real Permeability Distribution by Calculations", SPEJ (jun. de 1962) 223-24.
96. Jacquard, P. y Jain, C.: "Permeability Distribution From Field Pressure Data", SPEJ (dic. de 1965) 281-94.
97. Jahns, H. O.: "A Rapid Method for Obtaining a Two-Dimensional Reservoir Description From Well Pressure Response Data", SPEJ (dic. de 1966) 315-27.
98. Coats, K. H., Dempsey, J. R. y Henderson, J. H.: "A New Technique for Determining Reservoir Description From Field Performance Data", SPEJ (mar. de 1970) 66-74.
99. Jackson, D. R. y Aron, G.: "Parameter Estimation in Hydrology: The State of the Art", Water Resour. Bull., 7(3), (1971) 457-71.
100. Lovel, R. E., Duckstein, L. y Kisiel, C. C.: "Use of Subjective Information in Estimation of Aquifer Parameters ", Water Resour. Res. 8(3), (1972) 680-90.
101. Thomas, L. K., Hellums, L. J. y Rcheis, G. M.: "A Nonlinear Automatic History Matching Technique for Reservoir Simulation Models", SPEJ (dic. de 1972) 508-14.
102. Carter, R. D., Kemp, L. F., Pearce, A. C. y Williams, D. L.: "Performance Matching With Constraints", SPEJ (abr. de 1974) 187-96.
103. Bard, Y.: Nonlinear Parameter Estimation, John Wiley, N. York (1974).
104. Chen, W. H., Gavalas, G. R., Seinfeld, J. H. y Wasserman, M. L.: "A New Algorithm for Automatic History Matching", SPEJ (dic. de 1974) 593-608.
105. Wasserman, M. L., Emanuel, A. S. y Seinfeld, J. H.: "Practical Applications of Optimal-Control Theory to History Matching Multiphase Simulation Models", SPEJ (sept. de 1975) 347-55.
106. Chavent, G., Dupup, M. y Lemonnier, P.: "History Matching by Use of Optimal Control Theory", SPEJ (feb. de 1975) 74-86.
107. Gavalas, G. R., Shah, P. C. y Seinfeld, J.H.: "Reservoir History Matching by Bayesian Estimation", SPEJ (sept. de 1976) 337-50.
108. Beck, A.: Parameter Estimation in Engineering Science, John Wiley, New York (1977).

109. Shah, P. C., Gavalas, G. R. y Seinfeld, J. H.: "Error Analysis in History Matching: The Optimum Level of Parameterization", SPEJ (abr. de 1978) 219-28.
110. Smith, P. J. y Piper, B. S.: "A Non-linear Optimization Method for the Estimation of Aquifer Parameters", J. Hydrol., 39, (1978) 255-71.
111. Tang, D. H. y Pinder, G. F.: "A Direct Solution to the Inverse Problem in Groundwater Flow", Adv. Water Resour., 2(2), (1979) 97-99.
112. Birtles, A. C. y Morel, E. H.: "Calculation of Aquifer Parameters from Sparse Data", Water Resour. Res., 15(4), (1979) 832-44.
113. Neuman, S. P., Fogg, G. E. y Jacobson, E. A.: "A Statistical Approach to the Inverse Problem of Aquifer Hydrology, 2, Case Study", Water Resour. Res., 16(1), (1980) 33-58.
114. Yakowitz, S. y Duckstein, L.: "Instability in Aquifer Identification: Theory and Studies", Water Resour. Res., 16(6), (1980) 1045-64.
115. Dogru, A. H. y Seinfeld, J. H.: "Comparison of Sensitivity Coefficient Calculation Methods in Automatic History Matching", SPEJ (dic. de 1981) 551-57.
116. Carter, R. D., Kemp, L. F. y Pierce, A. C.: "Discussion of Comparison of Sensitivity Coefficient Calculation Methods in Automatic History Matching", SPEJ (abr. de 1982) 205-8.
117. Cooley, R. L.: "Incorporation of Prior Information on Parameters into Nonlinear Regression Groundwater Flow Models, 1, Theory", Water Resour. Res., 18(4), (1982) 965-76.
118. Cooley, R. L.: "Incorporation of Prior Information on Parameters into Nonlinear Regression Groundwater Flow Models, 2, Applications", Water Resour. Res., 19(3), (1983) 662-76.
119. McElwee, C. D.: "Sensitivity Analysis and the Groundwater Inverse Problem", Groundwater, 20(6), (1982) 723-35.
120. Jacquard, P.: "Theory de l'Interpretation des Mesures de Pression", Rev. del Inst. Francés del Pet (marzo de 1964).
121. Draper, N. R. y Smith, H.: Applied Regression Analysis, John Wiley and Sons, Inc., N. York (1966).

122. Seinfeld, J. H.: "Identification of Parameters in Partial Differential Equations", Chem. Eng. Sci. (ene. de 1969) 65.
123. Slater, G. E.: "A Statistical Method of Judging the Adequacy of Numerical Reservoir Simulation", artículo SPE 3182 presentado en el "1971 SPE Annual Fall Meeting", N. Orleans, LA. oct. 3-6 de 1971.
124. Veatch, R. W. y Thomas, G. W.: "A Direct Approach for History Matching", artículo SPE 3515 presentado en el "1971 SPE Annual Fall Meeting", N. Orleans, LA. oct. 3-6 de 1971.
125. Himmelblau, D. M.: Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill Book Co., Inc., N. York (1971).
126. Dixon, T. N., Seinfeld, J. H. Startzman, R. A. y Chen, W. H.: "Reliability of Reservoir Parameters from History-Matched Drillstem Tests", artículo SPE 4282 presentado en el "SPE Third Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance", Houston, TX, ene. 10-12 de 1973.
127. Emig, G. y Hosten, L. H.: "On the Reability of Parameter Estimates in a Set of Simultaneous Nonlinear Differential Equations", Chem. Eng. Sci, (mayo de 1974) 475.
128. Martínez, R. N.: "Nuevo Procedimiento para la Caracterización Dinámica de Yacimientos Petroleros, a partir del Análisis de Pruebas de Interferencia", artículo presentado en el Congreso de la Asociación de Ingenieros Petroleros de México realizado en Mérida, Yuc., del 15 al 17 de abril de 1999.
129. Horner, D. R.: "Pressure Build-Up in Wells", Proc., Tercer Congreso Mundial del Petróleo, Leiden (1951) II, 503-22.
130. Ostle, B.: Estadística Aplicada, Limusa (1979).
131. Himmelblau, D. M.: Process Analysis by Statistical Methods, John Wiley and Sons, Inc., N. York (1970).
132. Elsayed, S. A., Baker, R., Churcher, P. L., y Edmunds, A. C.: "Multidisciplinary Reservoir Characterization and Simulation Study of the Weyburn Unit", JPT (oct. de 1993) 930-934, 973.
133. Beliveau, D.: "Pressure Transients Characterize Fractured Midale Unit", JPT (dic. de 1989) 1354; Trans. AIME, 287.

134. Beliveau, D., Payne, D. A. y Mundry, M.: "Analysis of the Waterflood Response of a Naturally Fractured Reservoir", artículo SPE 22946, presentado en la "1991 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas, TX, oct. 7-9 de 1991.
135. Streltsova, T. D.: "Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir", artículo SPE 10782, presentado en la "1982 SPE California Regional Meeting" S. Francisco, CA, mar. de 1982.
136. Aronofsky, J. S., Massé, L. y Natanson, S. G.: "A Model for the Mechanism of Oil Recovery from the Porous Matrix Due to Water Invasion in Fractured Reservoirs", Trans. AIME (1958) Vol. 213, 17.
137. Bokserman, A. A. Zheltov, Y. P. y Kocheshkov, A. A.: "Motion of Immiscible Liquids in a Cracked Porous Medium", Soviet Physics Doklady (oct. de 1964) Vol. 9, No. 4, 285.
138. Kazemi, H., Seth, M. S. y Thomas, G. W.: "The Interpretation of Interference Tests in Naturally Fractured Reservoirs With Uniform Fracture Distribution", SPEJ (dic. de 1969) 463-72.
139. Barenblatt, G. E. y Cols.: "Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks", JAMM (1960) Vol. 24, 1286-1303.
140. Barenblatt, G. E.: "On Certain Boundary-Value Problems for the Equations of Seepage of a Liquid in Fissured Rocks", JAMM (1963) Vol. 27, 513-18.
141. Van Golf-Ratch, T. D.: Fundamentals of Fractured Reservoirs Engineering. Developments in Petroleum Science 12. Elsevier Publishing Co. Inc., (1982).
142. Da Prat, G.: Well Test Analysis for Fractured Reservoirs Evaluation. Developments in Petroleum Science 27. Elsevier Publishing Co. Inc. (1990).
143. Moench, A. F.: "Double-Porosity Models for a Fissured Groundwater Reservoir With Fracture Skin", Water Resour. Res., Vol. 20, No. 7 (jul. de 1984) 831-46.
144. Rodríguez de la G. F.: Comunicación personal (oct. de 1999).

APÉNDICE "A"

DESARROLLO DEL MODELO DEL PROBLEMA DIRECTO

La solución en el plano de Laplace de la ecuación diferencial parcial que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible, a gasto constante en el pozo, en un yacimiento homogéneo infinito, sin tomar en cuenta los efectos de almacenamiento y daño es⁴⁹:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0(x)}{sxK_1(x)}, \quad (\text{A.1})$$

donde K_0 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de segunda clase, de orden cero y uno^{55,80,81} y \bar{p}_{wD} es la transformada de Laplace de p_{wD} ; "s" es la variable en el plano de Laplace y corresponde a t_D en el espacio real.

Cinco-Ley y Cols.³¹ obtuvieron la misma solución para el caso de un yacimiento naturalmente fracturado y desarrollaron lo que representa el argumento "x" en estas condiciones:

$$x = s^{1/2} [\omega + (1 - \omega)g]^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$g(f_i, \eta_{maD_i}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{maD_i} / s} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{s / \eta_{maD_i}}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\omega = \phi_{fb} c_{if} / (\phi c_i) \quad (\text{A.4})$$

$$\eta_{maD_i} = k_{ma}(\phi c_i) r_w^2 \mu / k_{fb}(\phi c_i) m a h^2 m a i \quad (\text{A.5})$$

NB es el número de tamaños de bloques de matriz de valor h_{ma} que queda involucrado en η_{maD} y f_i es la fracción, con respecto al total, del volumen de bloques de un cierto tamaño h_{mai} .

La ecuación que incluye los efectos de almacenamiento y daño¹³ es:

$$\bar{p}_{wD1} = (\bar{p}_{wD} + S/s) / (1 + sSCD + CDS^2 \bar{p}_{wD}). \quad (A.6)$$

Sustituyendo \bar{p}_{wD} por la expresión de la Ec. A.1:

$$\bar{p}_{wD1} = \frac{K_0(x) + SxK_1(x)}{s\{C_{DS}[K_0(x) + SxK_1(x)] + xK_1(x)\}}. \quad (A.7)$$

Esta ecuación la desarrollaron también Agarwal y Cols. para el caso de un yacimiento homogéneo⁴⁹.

Considerando ahora una distribución continua del tamaño de los bloques, de la Ec. A.3:

$$g(f, \eta_{maD}, s) = 2 \int_{h_{min}}^{h_{max}} f \sqrt{\eta_{maD}/s} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{s/\eta_{maD}}\right) dh_{ma}. \quad (A.8)$$

Haciendo $z = \sqrt{s/\eta_{maD}}$ y aplicando la expresión de η_{maD} dada por la Ec. A.5, de la Ec. A.8 se obtiene:

$$g(f_D, z) = \frac{2}{z_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{f_D \tanh\left(\frac{1}{2} z\right)}{z} dz, \quad (A.9)$$

donde

$$f_D = h_{max} f \quad (A.10)$$

es la función densidad de probabilidad⁵⁵ para este caso de la variable aleatoria h_D y tiene las siguientes propiedades:

$$f_D(h_D) \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{h_{D\min}}^{h_{D\max}} f_D(h_D) dh_D = 1. \quad (\text{A.12})$$

Para yacimientos naturalmente fracturados, definiendo

$$h_D = h_{ma} h_{m\acute{a}x} \quad (\text{A.13})$$

$$F_h = h_{min} h_{m\acute{a}x}, \quad (\text{A.14})$$

donde

h_{ma} es el tamaño variable de los bloques, desde h_{min} hasta $h_{m\acute{a}x}$, la Ec. A.12 se puede escribir:

$$\int_{F_h}^1 f_D(h_D) dh_D = 1. \quad (\text{A.15})$$

Como ejemplo y para ilustrar mejor los conceptos anteriores, en la Fig. A.1 se presenta el caso de la función densidad de probabilidad lineal creciente, donde

$$f_D(h_D) = mh_D + b \quad (\text{A.16})$$

es la ecuación de una recta con pendiente " m " y ordenada al origen " b ".

A la función $F_D(h_D)$ definida por

$$F_D(h_D) = \int_{h_{D\min}}^{h_D} f_D(h_D) dh_D, \quad (\text{A.17})$$

se le llama⁵⁵ función de distribución de la función densidad de probabilidad $f_D(h_D)$. Para que se cumplan las propiedades de $f_D(h_D)$, Fig. A.1, se debe satisfacer:

$$A_1 + A_2 = 1. \quad (\text{A.18})$$

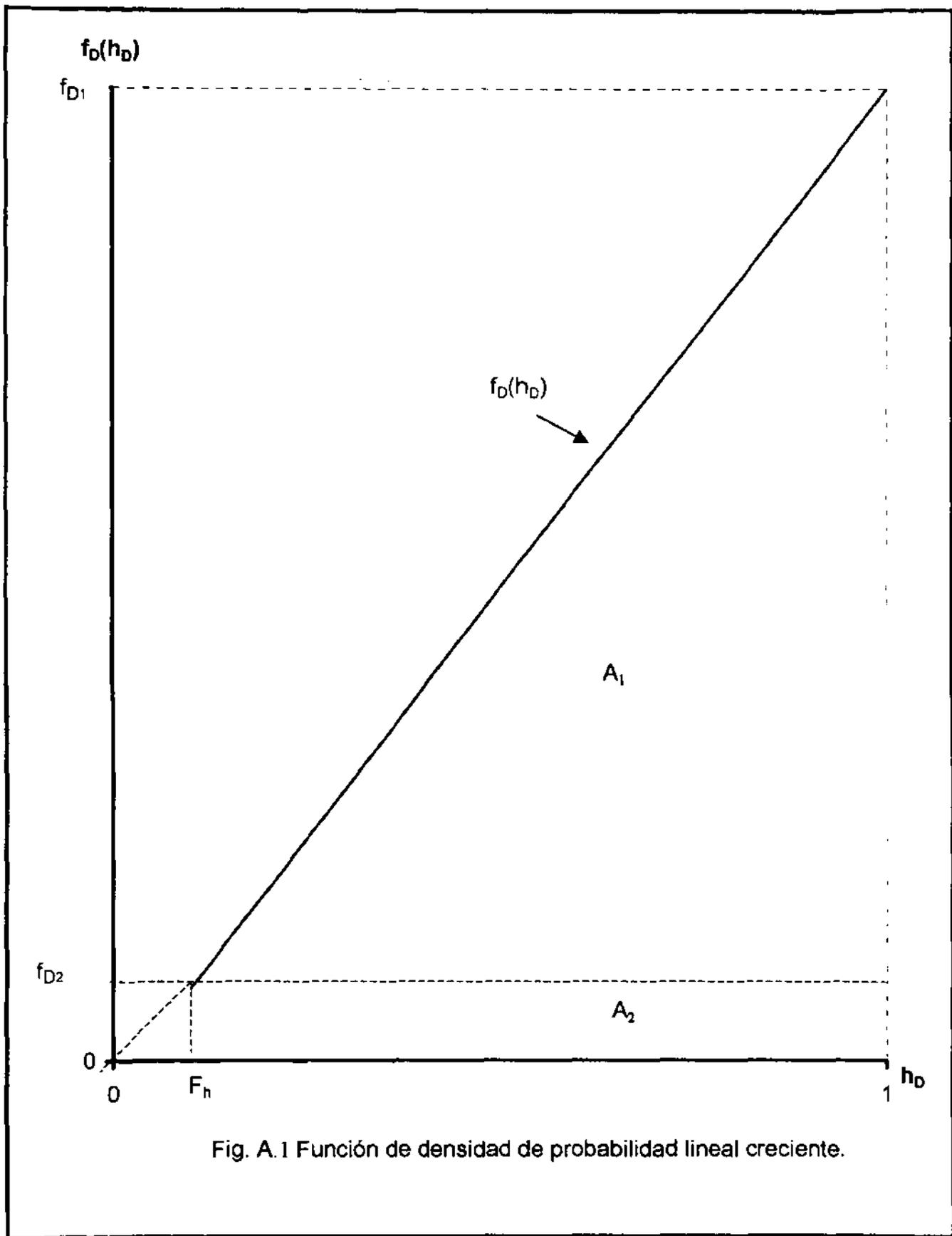


Fig. A.1 Función de densidad de probabilidad lineal creciente.

Además los valores de f_D deben estar restringidos a los correspondientes de h_D entre F_h y 1.

La solución de la Ec. A.1 en el espacio real, para el caso de "x" y "g" dadas por las Ecs. A.2 y A.8, se obtiene aplicando el algoritmo de Stehfest⁷⁴:

$$p_{wD}(t_D) = \left(\frac{Ln 2}{t_D} \right) \sum_{i=1}^N V_i P(s_i), \quad (A.19)$$

donde

$$P(s_i) = \bar{p}_{wD}(s), \text{ (transformada de Laplace de } p_{wD}(t_D)) \quad (A.20)$$

$$s_i = (Ln 2) i / t_D \quad (A.21)$$

$$V_i = (-1)^{(N/2+i)} \sum_{k=(i+1)/2}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! (k!) (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}, \quad (A.22)$$

N es el índice superior de la sumatoria y su valor depende de la precisión que se utilice en el cálculo numérico.

La primera y segunda derivadas de p_{wD} se calculan por medio de la propiedad de la transformada de Laplace que consiste en que cada vez que se multiplique por el parámetro "s" la solución en el plano de Laplace equivale a derivar la solución en el plano real; es decir, si $p_{wD}(t_D)$ corresponde a $F(s)$, entonces $p'_{wD}(t_D)$ corresponde a $sF(s)$ y $p''_{wD}(t_D)$ a $s^2F(s)$. En otras palabras, se usaron las relaciones:

$$\bar{p}'_{wD}(s) = s\bar{p}_{wD}(s) - p_{wD}(0), \quad (A.23)$$

$$\bar{p}''_{wD}(s) = s^2 \bar{p}_{wD}(s) - sp_{wD}(0) - p'_{wD}(0), \quad (\text{A.24})$$

para la primera y segunda derivadas, respectivamente, donde $\bar{p}'_{wD}(s)$ y $\bar{p}''_{wD}(s)$ son las transformadas de Laplace de $p'_{wD}(tD)$ y $p''_{wD}(tD)$.

Con el fin de obtener una mayor capacidad de diagnóstico se desarrollaron relaciones logarítmicas de p'_{wD} ; la mayor capacidad diagnóstico se debe a las mejores características de sus representaciones gráficas en papel semi-log o log-log.

Haciendo $w = tD \frac{dp_{wD}}{dtD} = tD p'_{wD}$ y recordando que $\log(w) = C \ln(w)$:

$$\frac{d(\log w)}{dtD} = C \frac{d(Lnw)}{d(tD)} = \frac{C}{w} \frac{dw}{dtD} = \frac{C}{w} \frac{d(tD p'_{wD})}{dtD} = \frac{C}{w} (tD p''_{wD} + p'_{wD}).$$

Pero $\frac{d(\log w)}{dtD} = \frac{d(\log w)}{d(\log tD)} \frac{d(\log tD)}{dtD} = \frac{C}{tD} \frac{d(\log w)}{d(\log tD)}$ y por consiguiente:

$$\frac{d[\log(tD p'_{wD})]}{d[\log tD]} = \frac{1}{p'_{wD}} (tD p''_{wD} + p'_{wD}). \quad (\text{A.25})$$

Por otra parte, para valores pequeños del argumento x , $K_0(x)$ y $K_1(x)$ se pueden aproximar por^{31,81}:

$$K_0(x) = -\left(\ln \frac{x}{2} + 0.577216\right) \quad (\text{A.26})$$

$$K_1(x) = 1/x, \quad (\text{A.27})$$

con lo cual, de la Ec. A.1:

$$\bar{p}_{wD} = -\left(\ln \frac{x}{2} + 0.577216\right) / s = -\frac{1}{s} \left\{ n \left[s^{1/2} [\omega + (1-\omega)g]^{1/2} \right] - 0.115934 \right\} \quad (\text{A.28})$$

\bar{p}_{wD} se obtiene a partir de esta ecuación aplicando la propiedad representada por la Ec. A.23; $g(f_D, z)$ está dada por la Ec. A.9 y las constantes de la Ec. A.28 se relacionan como sigue:

$$\gamma = e^{-\gamma}, \quad (\text{A.29})$$

donde $\gamma = 0.577216$ es la constante de Euler y $\gamma = 1.781073$. La integral involucrada en $g(f_D, z)$ se calculó por medio de la Regla de Simpson extendida⁸²:

$$\int_{z_1}^{z_{ns}} f(z) dz = \frac{\Delta z}{3} [f_1(z) + 4f_2(z) + 2f_3(z) + 4f_4(z) + \dots + 2f_{ns-2} + 4f_{ns-1} + f_{ns}]. \quad (\text{A.30})$$

Por experimentación numérica se determinó que el número de términos necesarios en este cálculo, para obtener una aproximación congruente con la que se tiene en el algoritmo de Stehfest, está dado por $ns=35$.

' APÉNDICE " B "

' PROGRAMA DE CÓMPUTO DEL PROBLEMA DIRECTO

' Con este programa se calcula la respuesta de presión en el pozo en
' forma adimensional PWD o la función derivada DERPWD, de un yaci --
' miento naturalmente fracturado con tamaño múltiple de bloques de --
' matriz, considerando una variación continua del tamaño de los blo-
' ques. Al programa se le llama Sub Calc_Fp y se acopla con otros --
' programas, que se presentan en el Apéndice " D ", para resolver el
' problema inverso (estimación de parámetros).

' Nomenclatura del programa.

' A, B, C, D, E, F1, K, K1, KK, MÍN : expresiones que intervienen en
' el cálculo de Vi. Ver la Ec. A.22.

' Caso : parte de la instrucción " Select Case ", con la cual se cal-
' culan las diferentes posibilidades de f(p), Ec. C.1.

' CD : coeficiente de almacenamiento en forma adimensional.

' COMPL : variable que es complemento de la solución del problema de
' flujo, en el espacio de Laplace. Ver la Ec. A.28.

' CTE3 = ZHMIN*Sqr(I/T), donde ZHMIN=8.32556. Ver las Ecs. A.5 y A.21.
' Se usa el radio del pozo de 10 cm y se considera (Ref. 65) que el
' coeficiente de rw_2/h_{ma2} de la Ec. 4.17 es 10^{-4} .

' CTE4 : expresión en la función de densidad de probabilidad expo--
' nencial. Ver la Ec. 5.4.

' DA : factor de daño en el pozo.

' DERIV : variable donde se guardan los valores de la presión adimen-
' sional PWD o bien de su derivada DERPWD.

' EFEDE : función de densidad de probabilidad. Ver las Ecs. 5.1, 5.4
' y A.10.

' EME y ORD : valores de la pendiente y de la ordenada al origen, de la
' función densidad de probabilidad lineal; se usa la misma nomencla-
' tura (sólo en el programa) para representar a la constante exponen-
' cial "a" y al cociente ZMIN/ZHMAX, respectivamente.

' FH : cociente $H_{MIN}/H_{MAX} = Z_{MIN}/Z_{HMAX}$.

' FpM2 y FpB2 : arreglos para guardar valores de f(p) calculados con un
' desplazamiento en "EME" y uno en "ORD". Estos valores se usan en el
' cálculo de los elementos del Jacobiano J, Ec. C.6.

' Fpeq() : arreglo en el que se guardan los valores de f(p).

' Fpsup y Fpobs : arreglos para guardar valores de f(p) calculados con

' los valores supuestos y los reales de los parámetros.

' FZ : función de la cual se desea calcular su integral por medio de
' la Regla de Simpson extendida. Ver la Ec. A.30.

' G : función expresada en la Ec. 4.19.

' G1 : función factorial.

' I : contador en el cálculo de la expresión de Stehfest. Ver la Ec.
' A.19.

' I1 : argumento en el cálculo de factoriales. Ver la Ec. A.22.

' J : contador en la aplicación de la Regla de Simpson extendida. Ver
' la Ec. A.30.

' K, KK, MIN : controles para calcular la sumatoria de la función V.

' M : cociente $N/2$, siendo N el número de términos de la expresión de
' Stehfest. Ver la Ec. A.19.

' M1 : control para calcular sólo una vez la función V.

' N : número de términos de la expresión de Stehfest. Ver la Ec. A.19.

' NS, NS1 : contadores en el cálculo de la integral de la Ec. 4.19 por
' medio de la Regla de Simpson extendida. Ver también la Ec. A.30.

' OMEGA : almacenamiento de las fracturas, Ec. 2.7.

' P, P1 : soluciones del problema de flujo en el plano de Laplace, sin
' y con almacenamiento y factor de daño, respectivamente. Ver las Ecs.
' A.28 y A.6, en este orden.

' P2 : solución del problema de flujo en el plano de Laplace, multi-
' plicada por SI. Se aplica para obtener la derivada de PWD. Ver la Ec.
' A.23.

' $s = (\ln 2)/T = .69315/T$. Ver la Ec. A.19.

' SERIE : sumatoria involucrada en el algoritmo de Stehfest. Ver la Ec.
' A.19

' SERIE1 : sumatoria involucrada en la Regla de Simpson extendida. Ver
' la Ec. A.30.

' SI : argumento de P en el algoritmo de Stehfest, Ecs. A.19 y A.21;
' también es la variable "s" en el espacio de Laplace.

' SV : sumatoria de la Ec. A.22.

' T : tiempo adimensional.

' TINI y TFIN : potencias inicial y final de 10, para expresar tD, (e-
' jemplo $tD = 10^{(TINI)}$).

```

' TT : potencias de 10 en el cálculo de T.
' V : función del algoritmo de Stehfest expresada en la Ec. A.22.
' z : función expresada en la Ec. 4.20. También es igual a CTE3 por el
' espesor de un bloque.
' ZH : es la delta Z de la Ec. A.30 (Regla de Simpson extendida).
' ZINT : expresión involucrada en el cálculo de la función g(fD,z).
' Ver las Ecs. 4.19 y A.30.
' ZMIN y ZHMAX : espesores mínimo y máximo de los bloques, cm.
End Sub

```

```

Sub Calc_Fp (ZMIN, ZHMAX, EME, ORD, OMEGA, TINI, TFIN, caso, FpREQ#())
ReDim Preserve Fpsup#(100, 100), FpM2#(100, 100), FpB2#(100, 100)
ReDim Preserve Fpobs#(100, 100)
No_DATOS = TFIN - TINI + 1

```

```

Open "prueba.txt" For Output As #1
Print #1, No_DATOS
Dim SI#, CTE3#, ZINT#, DERIV#, CTE4#, COMPL#
Dim FH#, ZH#, M#, CD#, DA#, A#, B#, C#, D#, E#, K1#, F1#, T#, S#
Dim I1%, I%, TT%, KK, MIN, K, NS1%, J%

```

```

ReDim P(40), SERIE(40), V(40), TANH(40), G(40)
ReDim SV(40), P1(40), P2(40)
ReDim Z(40), ZHMA(40), FZ(40), SERIE1(40), G1(40), EFEDA(40)

```

```

N# = 6: : NS# = 35: M1# = 1
FH# = ZMIN / ZHMAX: ZH# = (ZHMAX - ZMIN) / (NS# - 1#)
CTE4 = EME / (Exp(-EME * ORD) - Exp(-EME))
M = N / 2: CD = 0: DA = 0:

```

```

'Control para calcular sólo una vez la función V del
' algoritmo de Stehfest. Ec. A.22.
If (M1 - N) = 0 Then GoTo 98 Else GoTo 99
99 : M1 = N: G1(0) = 1!: G1(1) = 1!

```

```

' Cálculo de la función factorial.
For I1 = 2 To N
G1(I1) = G1(I1 - 1) * I1
Next I1

```

```

'Control para calcular la sumatoria de la función V, Ec. A.22.
For I = 1 To N
KK = Int((I + 1) / 2)
If I < M Then MIN = I Else MIN = M
K = KK: SV(K - 1) = 0!
For K = KK To MIN
A = G1(2! * K): B = G1(M - K): C = G1(K): D = G1(K - 1)
E = G1(I - K): K1 = 2! * K - I: F1 = G1(K1)
SV(K) = SV(K - 1) + (A * K ^ M) / (B * C * D * E * F1): Next K

```

```
V(I) = ((-1) ^ (I + M)) * SV(MIN): Next I
```

```
'Ciclo para diferentes valores de T
```

```
98 : For TT = TINI To TFIN
```

```
T = 5 * 10 ^ (TT)
```

```
S = .69315 / T
```

```
SERIE(0) = 0!
```

```
For I = 1 To N
```

```
'Cálculo de P(Si). Ver la Ec. A.19.
```

```
SI = S * I: CTE3 = ZHMIN * Sqr(I / T): SERIE1(0) = 0!
```

```
'Inicia el cálculo de Gi, distribución continua(ver la Ec. A.19; la integral  
'se evalúa por medio de la Regla de Simpson extendida, Ec. A:30).
```

```
ZHMA(1) = ZMIN: ZHMA(NS) = ZHMAX: Z(1) = CTE3 * ZHMA(1): Z(NS) = CTE3 * ZHMA(
```

```
NS)  
If .5 * Z(1) > 4 Then TANH(1) = 1 Else TANH(1) = (Exp(.5 * Z(1)) - Exp(-.5 *  
Z(1))) / (Exp(.5 * Z(1)) + Exp(-.5 * Z(1)))
```

```
EFEDE(1) = CTE4 * Exp(-EME * Z(1) / Z(NS))
```

```
FZ(1) = (TANH(1) / Z(1)) * EFEDE(1)
```

```
If .5 * Z(NS) > 4 Then TANH(NS) = 1 Else TANH(NS) = (Exp(.5 * Z(NS)) - Exp(-.  
5 * Z(NS))) / (Exp(.5 * Z(NS)) + Exp(-.5 * Z(NS)))
```

```
EFEDE(NS) = CTE4 * Exp(-EME)
```

```
FZ(NS) = (TANH(NS) / Z(NS)) * EFEDE(NS)
```

```
SERIE1(1) = FZ(1): SERIE1(NS) = FZ(NS)
```

```
NS1 = NS - 1
```

```
For J = 2 To NS1
```

```
ZHMA(J) = ZHMIN + (J - 1) * ZH
```

```
Z(J) = CTE3 * ZHMA(J)
```

```
If .5 * Z(J) > 4 Then TANH(J) = 1 Else TANH(J) = (Exp(.5 * Z(J)) - Exp(-.5 *  
Z(J))) / (Exp(.5 * Z(J)) + Exp(-.5 * Z(J)))
```

```
EFEDE(J) = CTE4 * Exp(-EME * Z(J) / Z(NS))
```

```
FZ(J) = (TANH(J) / Z(J)) * EFEDE(J)
```

```
SERIE1(J) = FZ(J)
```

```
If (-1) ^ J > 0 Then SERIE1(J) = SERIE1(J - 1) + 4 * SERIE1(J) Else SERIE1(J  
) = SERIE1(J - 1) + 2 * SERIE1(J)
```

```
Next J
```

```
ZINT = 2! * (ZH * CTE3 / 3!) * (SERIE1(NS - 1) + FZ(NS))
```

```
G(I) = ZINT / (CTE3 * ZHMAX)
```

```
'Obtención de soluciones en el espacio de Laplace.
```

```
COMPL = -(0.5 * Log(SI) - Log(2) + .577216) / SI
```

```
P(I) = -.5 * Log(OMEGA + (1! - OMEGA) * G(I)) / SI + COMPL
```

```
P1(I) = (P(I) + DA / SI) / (1! + SI * DA * CD + SI ^ 2 * CD * P(I))
```

```
P2(I) = SI * P1(I)
```

```
SERIE(I) = SERIE(I - 1) + P2(I) * V(I)
```

```
Next I
```

```
'Obtención de soluciones en el espacio real. Ver la Ec. A.19.
```

```
DERIV = T * S * SERIE(N) ' PARA DERPWD
```

```
' DERIV = s * SERIE(N) ' PARA PWD
```

```
Print #1, DERIV
```

```
Next TT
```

```
Close #1
```

```
Select Case caso
Case Is = 1
  Open "PRUEBA.TXT" For Input As #1
  Input #1, No_DATOS
  For J = 1 To No_DATOS
    Input #1, DERIV
    Fpsup#(J, 1) = DERIV
  Next J
  Close #1: Kill "PRUEBA.TXT"

Case Is = 2
  Open "PRUEBA.TXT" For Input As #1
  Input #1, No_DATOS
  For J = 1 To No_DATOS
    Input #1, DERIV
    FpM2#(J, 2) = DERIV
  Next J
  Close #1: Kill "PRUEBA.TXT"

Case Is = 3
  Open "PRUEBA.TXT" For Input As #1
  Input #1, No_DATOS
  For J = 1 To No_DATOS
    Input #1, DERIV
    FpB2#(J, 3) = DERIV
  Next J
  Close #1: Kill "PRUEBA.TXT"

Case Is = 4
  Open "PRUEBA.TXT" For Input As #1
  Input #1, No_DATOS
  For J = 1 To No_DATOS
    Input #1, DERIV
    Fpobs#(J, 4) = DERIV
  Next J
  Close #1: Kill "PRUEBA.TXT"
End Select
```

APÉNDICE C

TÉCNICA DE OPTIMIZACIÓN: MÍNIMOS CUADRADOS NO LINEALES

La técnica de optimización que se aplica en este trabajo se clasifica⁵⁶ como indirecta y se basa en el criterio del error en los resultados, donde una estimación o suposición inicial de los parámetros se mejora iterativamente hasta que la respuesta del modelo queda suficientemente próxima a la respuesta medida. Esta técnica de optimización ha sido utilizada en ejemplos de campo de análisis automático de pruebas de variación de presión⁵⁷ y después modificada y aplicada en pruebas de interferencia en yacimientos convencionales^{60,128}.

En esta tesis se seleccionan los valores de los parámetros básicos descritos en la Sección 5.1, de las funciones de densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_{ma} (tamaño de los bloques de matriz), que dan el mejor ajuste de los datos por ejemplo de la función derivada

$$f_p = t_D p'_{wD}, \quad (C.1)$$

donde p'_{wD} puede obtenerse de la Ec. 5.12 o de la ecuación correspondiente en la que no se usen las aproximaciones de las funciones de Bessel modificadas K_0 y K_1 (Ec. 4.13, evaluando directamente⁸¹ K_0 y K_1 , lo cual se encuentra en el programa INVLIN; ver también la descripción del subprograma Sub Calc_Fp en la Sección 6.3)

A los parámetros por estimar se les representa por medio de C_1 y C_2 , que pueden ser la pendiente y la ordenada al origen, la constante exponencial y el cociente $h_{min}/h_{máx}$, o bien la media y la desviación estándar, para las

distribuciones lineales, exponenciales y de Gauss, respectivamente. Entonces, además de otros parámetros que se consideran conocidos, la función f_p de la Ec. C.1 depende de C_1 y C_2 (en la misma forma podría manejarse ω), pudiendo escribirse:

$$f_p = f_p(C_1, C_2). \quad (C.2)$$

Si ahora se le llama "y" al valor de f_p correspondiente a los datos de campo, entonces se desea encontrar los valores de C_1 y C_2 que hacen mínimo el valor de ξ , ésto es:

$$\text{Min}\{\xi(C_1, C_2)\} = \sum_{i=1}^n (y_i - f_p)^2, \quad (C.3)$$

donde "n" es el número de datos de campo disponibles y f_p es el valor calculado con la Ec. C.1 para el mismo tiempo en el que se tiene el dato y_i .

Con la estimación inicial de C_1 y C_2 realizada tomando en cuenta lo que se establece en el Capítulo 7, la f_p calculada con la Ec. C.2 en general no satisface el criterio de mínimos cuadrados dado por la Ec. C.3, considerando una tolerancia para ξ , por lo que se necesita corregir C_1 y C_2 con ΔC_1 y ΔC_2 de tal manera que los nuevos valores hagan menor a ξ ; el ciclo se repite hasta que se alcance la tolerancia fijada.

Para encontrar ΔC_1 y ΔC_2 se hace una expansión en serie de Taylor, despreciando las derivadas de orden superior:

$$f_p(C_1 + \Delta C_1, C_2 + \Delta C_2) = f_p(C_1, C_2) + \frac{\partial f_p}{\partial C_1} \Delta C_1 + \frac{\partial f_p}{\partial C_2} \Delta C_2, \quad (C.4)$$

que en forma matricial es:

$$\vec{f}_p(\vec{C} + \Delta\vec{C}) = \vec{f}_p(\vec{C}) + J\Delta\vec{C} , \quad (\text{C.5})$$

donde J es la matriz cuyos elementos están dados por

$$J = \left[\frac{\partial f_{pi}}{\partial C_j} \right] . \quad (\text{C.6})$$

Substituyendo la Ec. C.4 en la Ec. C.3, derivando con respecto a C_1 y C_2 e igualando a cero para obtener el valor mínimo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial C_1} = 2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_1} \left(y_i - f_{pi} - \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_1} \Delta C_1 - \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_2} \Delta C_2 \right) \right] = 0 , \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial C_2} = 2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_2} \left(y_i - f_{pi} - \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_1} \Delta C_1 - \frac{\partial f_{pi}}{\partial C_2} \Delta C_2 \right) \right] = 0 . \quad (\text{C.8})$$

En forma matricial:

$$J^T (\vec{y} - \vec{f}_p - J\Delta\vec{C}) = 0 , \quad (\text{C.9})$$

donde J^T es la matriz transpuesta de J . Despejando $\Delta\vec{C}$:

$$\Delta\vec{C} = (J^T J)^{-1} J^T (\vec{y} - \vec{f}_p) , \quad (\text{C.10})$$

que es la ecuación que proporciona las correcciones buscadas ΔC_1 y ΔC_2 .

Una forma alternativa que proporciona ΔC_1 y ΔC_2 es la siguiente¹⁴⁴:

El mínimo de la Ec. C.3 ocurre cuando (mínimos cuadrados no lineales):

$$\frac{\partial \xi}{\partial C_1} = 0 = F_1(C_1, C_2) , \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial C_2} = 0 = F_2(C_1, C_2) , \quad (\text{C.12})$$

C.11 y C.12 constituyen un sistema de 2 ecuaciones no lineales en C_1 y C_2 con 2 incógnitas (C_1 y C_2) cuya solución se obtiene por medio del método de Newton, para lo cual se expanden las funciones F_1 y F_2 iterativamente en series de Taylor, reteniendo los términos de menor orden:

$$F_1^{(k+1)} = F_1^{(k)} + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial C_1} \Delta C_1^{(k+1)} + \frac{\partial F_1^{(k)}}{\partial C_2} \Delta C_2^{(k+1)} = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$F_2^{(k+1)} = F_2^{(k)} + \frac{\partial F_2^{(k)}}{\partial C_1} \Delta C_1^{(k+1)} + \frac{\partial F_2^{(k)}}{\partial C_2} \Delta C_2^{(k+1)} = 0 \quad (\text{C.14})$$

donde k es el nivel de iteración. Nótese que las Ecs. C.13 y C.14 corresponden a la Ec. C.4.

C.13 y C.14 forman un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, con las incógnitas $\Delta C_1^{(k+1)}$ y $\Delta C_2^{(k+1)}$, que se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial C_1} & \frac{\partial F_1}{\partial C_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial C_1} & \frac{\partial F_2}{\partial C_2} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \end{bmatrix}^{(k+1)} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (\text{C.15})$$

o bien

$$J^{(k)} \Delta C^{(k+1)} = -F^{(k)} \quad (\text{C.16})$$

Con valores iniciales supuestos $C_1^{(0)}$ y $C_2^{(0)}$ de los parámetros por estimar se calculan $F_1^{(0)}$, $F_2^{(0)}$ y $J^{(0)}$ y se resuelve la Ec. C.15 para $\Delta C_1^{(1)}$, $\Delta C_2^{(1)}$ con lo que se obtienen $C_1^{(1)} = C_1^{(0)} + \Delta C_1^{(1)}$ y $C_2^{(1)} = C_2^{(0)} + \Delta C_2^{(1)}$. El ciclo se repite hasta que se alcance la tolerancia fijada.

Los valores de F_1 , F_2 , $\frac{\partial F_1}{\partial C_1}$, $\frac{\partial F_1}{\partial C_2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial C_1}$ y $\frac{\partial F_2}{\partial C_2}$ están dados por:

$$F_1(C_1, C_2) = \frac{\partial \xi}{\partial C_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - fp_i) \frac{\partial fp_i}{\partial C_1} = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$F_2(C_1, C_2) = \frac{\partial \xi}{\partial C_2} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - fp_i) \frac{\partial fp_i}{\partial C_2} = 0 \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial C_1} = -2 \sum_{i=1}^n \left[(y_i - fp_i) \frac{\partial^2 fp_i}{\partial C_1^2} - \left(\frac{\partial fp_i}{\partial C_1} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial C_2} = -2 \sum_{i=1}^n \left[(y_i - fp_i) \frac{\partial^2 fp_i}{\partial C_2 \partial C_1} - \frac{\partial fp_i}{\partial C_2} \frac{\partial fp_i}{\partial C_1} \right] = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial C_1} = -2 \sum_{i=1}^n \left[(y_i - fp_i) \frac{\partial^2 fp_i}{\partial C_1 \partial C_2} - \frac{\partial fp_i}{\partial C_1} \frac{\partial fp_i}{\partial C_2} \right] = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial C_2} = -2 \sum_{i=1}^n \left[(y_i - fp_i) \frac{\partial^2 fp_i}{\partial C_2^2} - \left(\frac{\partial fp_i}{\partial C_2} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{C.22})$$

APÉNDICE " D "

PROGRAMA DE CÓMPUTO DEL PROBLEMA INVERSO

Con este programa se estiman los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad de yacimientos naturalmente fracturados, con variación continua del tamaño de los bloques. Se desarrolló a partir de un programa para analizar pruebas de interferencia de presión en yacimientos convencionales, proporcionado por el Ing. Néstor Martínez Romero, por lo cual también por este medio se hace público el reconocimiento correspondiente.

En la Nomenclatura ya no se incluye la explicación de las variables comunes con el programa del Apéndice " B ". Por otra parte, en el Capítulo 6 de esta tesis, Sección 6.3, se describen los subprogramas que constituyen el programa de cómputo del problema inverso.

Nomenclatura del programa.

A(), B(), IPivotes(), Vec_Trab: arreglos que se utilizan en los subprogramas "decomp" y "solve", con los que se resuelve un sistema de ecuaciones.

A(): matriz de elementos del Jacobiano. Ver la Ec. C.6.

Anorm, Cond, EK, I, J, K, KB, M, N, Temporal, YNORM, ZNORM: variables que se utilizan en los subprogramas "decomp" y "solve".

b_rnl(), m_rnl(): arreglos en los que se guardan valores intermedios de los parámetros en el proceso de optimización. Ver el subprograma Sub Calc_Regresión.

C(): arreglo de valores de los parámetros. También es la matriz producto (ver el subprograma Sub Matr_Mult).

C_Temp(): arreglo en el que se guardan temporalmente los valores de C(). Ver el subprograma Sub Calc_Regresión.

DatoTp(I).P y DatoTp(I).T: arreglos donde se guardan los datos de campo de la función de presión y del tiempo adimensional.

DpCal(): arreglo para guardar las diferencias entre los valores observados y los calculados de las funciones de presión. Ver el subprograma Sub Calc_Desv.

Dvx: corrección de los parámetros por estimar; se calcula en cada iteración del proceso de optimización. Ver el subprograma Sub

' Calc_Regresión.

' Eme_est y Ord_est: variables para designar a los valores estimados
' de los parámetros. Ver el subprograma Sub Calc_Regresión.

' EMESUP y ORDSUP: valores iniciales supuestos de los parámetros por
' estimar. Ver el subprograma Sub Calc_Regresión.

' Global b_rnl, m, rnl, s_rnl,...: declaración de variables globales;
' significa que son válidas y tienen los valores actuales en todos los
' subprogramas que se encadenen. Ver la sección de declaraciones gene-
' rales del programa de cómputo del problema inverso.

' I, J, K, KK, K1: contadores o índices. Ver los subprogramas Function
' Calc_BA, Sub Calc_Desv, Sub Calc_Fp y Sub Calc_Regresión.

' Inic_intervan, Final_Intervan: tiempos adimensionales inicial y fi-
' nal. Ver el subprograma Sub Calc_Regresión.

' InvJact, Jac, Jact, JactJac, N: argumentos que se utilizan en la mul-
' tiplicación, transposición e inversión de matrices. Ver Matr_Mult,
' Matr_tran y Matr_invr del subprograma Sub Calc_Regresión.

' Mlt: factor para lograr y acelerar la convergencia en el proceso de
' optimización. Ver la Sección 6.3 en la parte "Sub Calc_Desv".

' M2, B2: variables que se utilizan en el cálculo numérico de los ele-
' mentos del Jacobiano. Ver el subprograma Sub Jacobiano.

' Nmax_iter: núm. máximo de iteraciones; control adicional para ter-
' minar la ejecución del programa. Ver el subprograma Sub Calc_Regre-
' sión.

' NO_DATA, No_DATOS: número de datos disponibles para aplicar el pro-
' ceso de optimización. Se utilizan 2 nombres porque en un caso (ver
' el subprograma Sub Calc_Regresión) se cambia NO_DATA, haciéndolo
' igual a K (ésto con otro fin).

' Nt: número de parámetros por estimar. Ver los subprogramas Function
' Calc_BA y Sub Calc_Regresión.

' PORC: por ciento; se utiliza en el cálculo numérico de los elementos
' del Jacobiano. Ver el subprograma Sub Jacobiano.

' S_rnl: arreglo para guardar valores de SumtD. Ver el subprograma Sub
' Calc_Regresión.

' SumtD y SumtD_Old: valores sucesivos de las sumas de los valores
' absolutos de DpCal. Ver los subprogramas Sub Calc_Desv y Sub
' Calc_Regresión.

' T: variable con la que se muestra un mensaje. Ver el subprograma
' Sub Error_Conver.

' T, t1: sumas de los cuadrados de Ci y de Mlt por delta Ci. Ver la
' Sección 6.3 del Capítulo 6 de esta tesis, en la parte "Function

```

'   Calc_BA".
'
'   trouble: variable para indicar si existe algún problema en la conver-
'   gencia del proceso de optimización. Ver el subprograma Sub
'   Calc_Regresión.
'
'   TT: variable en la que se guarda el valor actual de un parámetro
'   en el proceso iterativo de optimización. Ver el subprograma Sub
'   Calc_Regresión.

Sub Calc_Regresion (Inic_intervAn, Final_IntervAn, Nt%, TINI#, TFIN#)
'           6 de agosto de 1999
On Error GoTo E_R ' Si existe algún error, se muestra un mensaje.

Inic_intervAn = 10 ^ (TINI#) ' Tiempos adimensionales
Final_IntervAn = 10 ^ (TFIN#) ' inicial y final.

' Valores iniciales supuestos( de los parámetros ).
C(1) = EMESUP#: C(2) = ORDSUP#

ZMIN = ZHMAX * ORDSUP#
NO_DATA = TFIN - TINI + 1
Nmax_iter = 10

Dim Iteracion%, I%, J%, K%, SumtD#, SumtD_Old#, Mlt#, TT#, trouble%
Dim PORC#
ReDim m_rnl(Nmax_iter + 1), b_rnl(Nmax_iter + 1), S_rnl(Nmax_iter + 1)

Nt = 2 ' Número de parámetros por estimar.
ReDim Jac#(NO_DATA, Nt), Jact#(Nt, NO_DATA), JactJac#(Nt, Nt)
ReDim InvJact#(Nt, NO_DATA), Dvx#(Nt, 1), DpCal#(NO_DATA, 1), C_Temp#(5)
ReDim DatoTp(100)

I = 0
' Se guarda en " DatoTp(I).T " la información de los tiempos adimensionales.
For TT = TINI# To TFIN#
  I = I + 1
  DatoTp(I).T = 10 ^ (TT)
  ' FORM1.Print Str$(DatoTp(I).T). 'Impresión de los datos de T.
Next TT

' Se proporcionan los valores de ZMÍN, ZHMÁX, EME, ORD y OMEGA como parte del
' argumento de Calc_Fp, para calcular Fpobs.
Call Calc_Fp(300, 3000, 5#, .1, .01, TINI, TFIN, 4, Fpobs#())
I = 0

' Se guarda en " DatoTp(I).P " la información de la función derivada.
For I = 1 To NO_DATA
  DatoTp(I).P = Fpobs#(I, 4)
  ' FORM1.Print Str$(DatoTp(I).P) ' Se muestran los datos de P.
Next I

' Aparece en la pantalla el mensaje que se indica entre comillas, si se omite
' la suposición inicial de alguno de los parámetros por estimar.

```

```

If C(1) = 0 Or C(2) = 0 Then
MsgBox "Introduzca vector inicial. Menú propiedades roca-fluidos.": Exit Sub
End If

'Se inicializan valores.
Iteracion% = 1: K = 0: trouble = 0
Open "Temp.dat" For Output As #1 ' almacena información
Print #1, NO_DATA
For I = 1 To NO_DATA: Print #1, DatoTp(I).T, DatoTp(I).P: Next I
Close #1

'Si el tiempo es intermedio en el intervalo considerado, entonces se inter -
'cambian valores de P y T.
For I = 1 To NO_DATA
If DatoTp(I).T > Inic_intervAn And DatoTp(I).T < Final_intervAn Then
K = K + 1: DatoTp(K).T = DatoTp(I).T: DatoTp(K).P = DatoTp(I).P
End If
Next I

NO_DATA = K
'Se guardan los últimos valores disponibles de los parámetros.
m_rnl(1) = C(1): b_rnl(1) = C(2)

'Se obtiene SumtD y se guarda en S_rnl.
Calc_Desv DpCal#(), SumtD: S_rnl(1) = SumtD

'Se inicia el proceso iterativo. Los subprogramas Error_Conver, Calc_Desv,
'Jacobiano, Matr_tran, Matr_Mult, Matr_invr y Calc_BA se describen en la
'Sección 6.3 del Capítulo 6.
ac: Jacobiano Jac#(), PORC#, EME#, ORD#, TINI, TFIN, EMESUP#, ORDSUP#
Matr_tran Nt, NO_DATA, Jac#(), JacT#()
Matr_Mult Nt, NO_DATA, Nt, JacT#(), Jac#(), JacTJac#()
Matr_invr Nt, JacTJac#(), Jac#()
Matr_Mult Nt, Nt, NO_DATA, Jac#(), JacT#(), InvJact#()
Calc_Desv DpCal#(), SumtD_Old
Matr_Mult Nt, NO_DATA, 1, InvJact#(), DpCal#(), Dvx#()

'Control para lograr la convergencia del proceso de optimización, usando un
'valor reducido de Mlt en las primeras iteraciones.
Mlt = .5: If Iteracion% > 3 Then Mlt = 1#
: If Mlt < .5 And Calc_BA(Nt, Dvx#(), Mlt) = 0 Then
If trouble = 1 Then Error_Conver
GoTo Outp
End If

'Se guardan en un arreglo los valores anteriores de los parámetros y se cal-
'culan los actuales.
For I = 1 To Nt
C_Temp#(I) = C(I): TT = C(I) + Mlt * Dvx#(I, 1)
If I = 1 Then ' Restricción en la pendiente.
If TT = 0 Then Mlt = Mlt * .5: trouble = 1: GoTo 0
End If
If I = 2 Then ' Restricción para la ordenada al origen.
If TT = 0 Then
Mlt = Mlt * .5: trouble = 1: GoTo 0
End If

```

End If

'Se guardan los valores nuevos de los parámetros.

C(I) = TT

'FORM1.Print Str\$(C(I)). 'Valores de C(I) en las diferentes iteraciones.

Next I

Calc_Desv DpCal#(), SumtD

'Se comparan los valores sucesivos de SumtD; se guardan los últimos valores
'disponibles de los parámetros y se reduce el valor de Mlt si no se mejora
'el cálculo de los mismos.

If SumtD > SumtD_Old Then

For I = 1 To Nt: C(I) = C_Temp#(I): Next I

Mlt = Mlt * .95: trouble = 1: GoTo O

End If

'Se actualizan los parámetros m_rnl, b_rnl y de SumtD, EMESUP, ORDSUP e
'Iteración.

m_rnl(Iteracion + 1) = C(1): b_rnl(Iteracion + 1) = C(2)

S_rnl(Iteracion + 1) = SumtD

EMESUP# = C(1): ORDSUP# = C(2)

Iteracion% = Iteracion + 1

'Control para terminar la ejecución del programa al llegar a un máximo de
'iteraciones establecido previamente.

If Iteracion% > Nmax_iter% Then GoTo Outp

If Calc_BA(Nt, Dvx#(), Mlt) Then GoTo Jac

Outp: Eme_est.Calc = m_rnl(Iteracion): Ord_est.Calc = b_rnl(Iteracion)

form1.Print Str\$(Eme_est.Calc)

form1.Print Str\$(Ord_est.Calc)

Open "Temp.dat" For Input As #1

Input #1, NO_DATA

For I = 1 To NO_DATA

Input #1, DatoTp(I).T, DatoTp(I).P

Next I

Close #1

Exit Sub

E_R: Error_Conver

GoTo Outp

End Sub

Sub COPIA_REGRE (Inic_intervAn, Final_IntervAn, Nt%)

End Sub

Sub decomp (N%, A#(), Cond#, IPivotes%())

'(Los subprogramas " decomp " y " solve " se usan en forma combinada para
'resolver sistemas de ecuaciones. Ver la Sección 6.3 del Capítulo 6).

Dim Anorm#, Temporal#, I%, J%, K%, M%, EK#, KB%, YNORM#, ZNORM#

ReDim Vec_Trab#(N%)

IPivotes%(N%) = 1: Anorm# = 0#

For J% = 1 To N%

```

Temporal# = 0#
For I% = 1 To N%: Temporal# = Temporal# + Abs(A#(I%, J%)): Next I%
If Temporal# > Anorm# Then Anorm# = Temporal#
Next J%
For K% = 1 To N% - 1
M% = K%
For I% = K% + 1 To N%
If Abs(A#(I%, K%)) > Abs(A#(M%, K%)) Then M% = I%
Next I%
IPivotes%(K%) = M%
If M% <> K% Then IPivotes%(N%) = -IPivotes%(N%)
Temporal# = A#(M%, K%): A#(M%, K%) = A#(K%, K%): A#(K%, K%) = Temporal#

If Temporal# <> 0# Then
For I% = K% + 1 To N%: A#(I%, K%) = -A#(I%, K%) / Temporal#: Next I%
For J% = K% + 1 To N%
Temporal# = A#(M%, J%): A#(M%, J%) = A#(K%, J%): A#(K%, J%) = Temporal#

If Temporal# <> 0# Then
For I% = K% + 1 To N%: A#(I%, J%) = A#(I%, J%) + A#(I%, K%) * Temporal#: Next I%
End If
Next J%
End If
Next K%
For K% = 1 To N%
Temporal# = 0#
If K% <> 1 Then
For I% = 1 To K% - 1: Temporal# = Temporal# + A#(I%, K%) * Vec_Trab#(I%): Next I%
End If
EK# = 1#
If Temporal# < 0# Then EK# = -1#
If A#(K%, K%) = 0# Then Cond# = 1E+32: Exit Sub
Vec_Trab#(K%) = -(EK# + Temporal#) / A#(K%, K%)
Next K%
For KB% = 1 To N% - 1
K% = N% - KB%: Temporal# = 0#
For I% = K% + 1 To N%: Temporal# = Temporal# + A#(I%, K%) * Vec_Trab#(I%): Next I%
Vec_Trab#(K%) = Temporal#: M% = IPivotes%(K%)
If M% <> K% Then
Temporal# = Vec_Trab#(M%): Vec_Trab#(M%) = Vec_Trab#(K%): Vec_Trab#(K%) = Temporal#
End If
Next KB%
YNORM# = 0
For I% = 1 To N%: YNORM# = YNORM# + Abs(Vec_Trab#(I%)): Next I%
Call solve(N%, A#(), Vec_Trab#(), IPivotes%())
ZNORM# = 0#
For I% = 1 To N%: ZNORM# = ZNORM# + Abs(Vec_Trab#(I%)): Next I%
Cond# = Anorm# + ZNORM# / YNORM#
If Cond# < 1# Then Cond# = 1#

```

End Sub

```

Sub Error_Conver ()
'Subrutina para terminar la ejecución del programa si existe un error
'en la programación o si no se logra convergencia en el proceso
'iterativo.
Dim T$
T = "No se logró convergencia en el proceso iterativo"
T = T + " de la técnica de Regresión No-Lineal."
T = T + " Posiblemente los valores iniciales están muy alejados"
T = T + " de los parámetros de yacimiento. Pruebe con otros valores."
MsgBox T

```

End Sub

```

Sub Jacobiano (A#(), PORC#, EMESUP#, ORD#, TINI, TFIN, EMESUP#, ORDSUP#)
'(Este subprograma se describe en la Sección 6.3 del Capítulo 6. Con
'él se calculan los elementos del Jacobiano. Ver la Ec. C.6).
ReDim Preserve Fpsup#(100, 100), FpM2#(100, 100), FpB2#(100, 100)
ReDim Preserve Fpobs#(100, 100), A#(8, 2)

```

```

Dim I%, M2#, B2#
M2# = (1 - PORC#) * EMESUP#
B2# = (1 - PORC#) * ORDSUP#

```

```

'Se obtienen los valores de f(p) que se utilizan para calcular
'numéricamente los elementos del Jacobiano. Ver la Ec. C.6.
Call Calc_Fp(ZMIN, ZHMAX, EMESUP#, ORDSUP#, OMEGA, TINI, TFIN, 1, Fpsup#())
Call Calc_Fp(ZMIN, ZHMAX, M2, ORDSUP#, OMEGA, TINI, TFIN, 2, FpM2#())
Call Calc_Fp(ZMIN, ZHMAX, EMESUP#, B2, OMEGA, TINI, TFIN, 3, FpB2#())

```

```

For I = 1 To 8
form1.Print Str$(Fpsup#(I, 1))
Next I
'FORM1.Print "UNO"
'For I = 1 To 8
'FORM1.Print Str$(FpM2#(I, 2))
'Next I
'FORM1.Print "DOS"
'For I = 1 To 8
'FORM1.Print Str$(FpB2#(I, 3))
'Next I

```

```

For I = 1 To 8
A#(I, 1) = (FpM2#(I, 2) - Fpsup#(I, 1)) / (-PORC# * EMESUP#)
A#(I, 2) = (FpB2#(I, 3) - Fpsup#(I, 1)) / (-PORC# * ORDSUP#)
Next I
'For I = 1 To 8
' FORM1.Print A#(I, 1) 'Elementos del Jacobiano.
'Next I
' FORM1.Print "UNO"
'For I = 1 To 8
' FORM1.Print A#(I, 2) 'Elementos del Jacobiano.
'Next I

```

End Sub

```

Sub Matr_invr (N%, A#(), INVA#()) 'Inversa de la matriz A
Dim Cond#, I%, J%

```

```

ReDim IPivotes%(N%), ej%(N%)
decomp N%, A#(), Cond#, IPivotes%()
For I% = 1 To N%
  For J% = 1 To N%: ej%(J%) = 0#: Next J%
  ej%(I%) = 1
  Call solve(N%, A#(), ej#(), IPivotes%())
  For J% = 1 To N%: INVA%(J%, I%) = ej%(J%): Next J%
Next I%
End Sub

```

```

Sub Matr_Mult (N%, M%, L%, A#(), B#(), C() As Double)

```

```

'Esta rutina multiplica una matriz A de orden (NxM) por una
'matriz B de orden (MxL), resultando una matriz C de orden (NxL).

```

```

On Error GoTo em

```

```

Dim I%, J%, K%

```

```

For I = 1 To N ' Se inicializa la matriz C.

```

```

  For J = 1 To L

```

```

    C(I, J) = 0!

```

```

  Next J

```

```

Next I ' Se realiza el cálculo.

```

```

For I = 1 To N

```

```

  For J = 1 To L

```

```

    For K = 1 To M

```

```

      C(I, J) = C(I, J) + A#(I, K) * B#(K, J)

```

```

    Next K, J, I

```

```

Exit Sub

```

```

em: Resume Next

```

```

End Sub

```

```

Sub Matr_tran (N%, M%, A#(), AT#()) 'Transpuesta de la matriz A.

```

```

Dim I%, J%

```

```

For I = 1 To N

```

```

  For J = 1 To M: AT#(I, J) = A#(J, I): Next J

```

```

Next I

```

```

End Sub

```

```

Sub solve (N%, A#(), B#(), IPivotes%())

```

```

' (Ver la Sección 6.3 del Capítulo 6).

```

```

On Error GoTo SV

```

```

Dim K%, M%, Temporal#, KB%, I%, KM1%

```

```

For K = 1 To N - 1

```

```

  M = IPivotes%(K)

```

```

  Temporal# = B#(M): B#(M) = B#(K): B#(K) = Temporal#

```

```

  For I = K + 1 To N

```

```

    B#(I) = B#(I) + A#(I, K) * Temporal#

```

```

  Next I

```

```

Next K

```

```

For KB = 1 To N - 1

```

```

  KM1 = N - KB: K = KM1 + 1

```

```

  B#(K) = B#(K) / A#(K, K): Temporal# = -B#(K)

```

```

  For I% = 1 To KM1%

```

```

    B#(I) = B#(I) + A#(I, K) * Temporal#

```

```

  Next I

```

```

Next KB

```

EGRNR.BAS - 15

B#(1) = B#(1) / A#(1, 1)

Exit Sub

V: Resume Next

End Sub

Function TIEMPOS (TIINI, TFIN) . . .

End Function

SECCIÓN DE DECLARACIONES GENERALES

```

Option Explicit
Type Dato
T As Double: P As Double
End Type
Type TUM
Dat As Double: Calc As Double
End Type

Global DatoTp() As Dato
Global Eme_est As TUM, Ord_est As TUM      ' Datos con Unidades
Global T As TUM
Global m_rnl#(), b_rnl#()                ' Almacena resultados de regresión
Global S_rnl#()
Global NO_DATA%, Nmax_iter%, C#(2)
Global Inic_intervAn#, Final_IntervAn#
Global No_DATOS
Global Fpobs#(), Fpsup#(), FpM2#(), FpB2#(), DpCal#(), Fpreg#(100, 100)
Global N#, NS#, M1#, ZHMAX#, ZHMIN#, EME#, ORD#, OMEGA#
Global TINI#, TFIN#, ORDSUP#, EMESUP#, ZMIN#

Function Calc_BA (Nt%, Dvx#(), Mlt) ' calcula la bondad del ajuste
Dim T#, t1#, I%
T = 0#: t1# = 0: Calc_BA = 1      ' vector corrección
For I = 1 To Nt                  ' comparado con el vector solución
T = T + C(I) ^ 2
t1 = t1 + (Mlt * Dvx#(I, 1)) ^ 2
Next I
If t1 / T < .0001 Then Calc_BA = 0 ' porcentaje de error 0.01 %
End Function

' SE CALCULA LA DESVIACIÓN DE LOS RESULTADOS CALCULADOS CON
' RESPECTO A LOS DATOS DE CAMPO

Sub Calc_Desv (DpCal#(), SumtD)
Dim I%, No_DATOS%
ReDim Fpsup#(100, 100), FpM2#(100, 100), FpB2#(100, 100), Fpobs#(100, 100)
ReDim DpCal#(100, 100)
No_DATOS = 8
Call Calc_Fp(ZMIN, ZHMAX, EMESUP#, ORDSUP#, OMEGA, TINI, TFIN, 1, Fpsup#())
Call Calc_Fp(ZMIN, ZHMAX, EME, ORD, OMEGA, TINI, TFIN, 4, Fpobs#())

SumtD = 0#
For I = 1 To No_DATOS           ' Cálculo de Dp con vector
DpCal#(I, 1) = Fpobs#(I, 4) - Fpsup#(I, 1)
SumtD = SumtD + Abs(DpCal#(I, 1))
Next I
SumtD = SumtD

```

APÉNDICE "E"

DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO MÁXIMO DE LOS BLOQUES

Aquí se presenta un procedimiento, complementando con un ejemplo de aplicación, para estimar el tamaño máximo $h_{máx}$ de los bloques de un yacimiento naturalmente fracturado. Con $h_{máx}$ y el procedimiento que se desarrolla en esta tesis es posible obtener el rango y la forma de distribución de todos los tamaños de bloques de matriz que existan en un yacimiento de este tipo, la cual es información esencial para calcular el comportamiento de un proceso de inyección de agua que podría presentar efectos, tanto de imbibición como gravitacionales, que dependen precisamente del tamaño de los bloques^{1,21,24-30,134}.

Como información pertinente, se incluyen en esta parte datos de $h_{máx}$, del rango de valores de h_{ma} y de distribuciones de tamaños de bloques reportados en la literatura. Por ejemplo, Johns y Jalali-Yazdi²⁰ indican que las distribuciones de las fracturas comúnmente observadas en afloramientos son exponenciales decrecientes y que en el caso de un afloramiento en Sierra Nevada²⁰, $h_{máx} = 33$ m, con una frecuencia muy pequeña (del orden del 1%) de bloques de 17 a 33 m, siendo $h_{min} = 1$ m, con una frecuencia de 20%; en general, a mayores tamaños de bloque la frecuencia disminuye. Elsayed y Cols¹³² reportan que el espaciamiento de las fracturas en la Unidad Midale¹³³ varía de 0.5 a 10 m, en tanto que en la Unidad Weyburn varía de 8 a 14 m; es decir, los valores correspondientes de $h_{máx}$ son 10 y 14 m. El espaciamiento se estimó a partir de información obtenida de núcleos verticales. Por otra parte, cabe agregar que en una investigación sobre

comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados, Streltsova¹³⁵ encontró que entre más grandes son los bloques dura más el período de transición (ver la Sección 5.2).

En relación a la transferencia matriz-fractura, el tiempo en el que se inicia el período de flujo tipo pseudo-homogéneo se puede aproximar mediante la ecuación ¹³:

$$t_{D_{bss}} = 1/A^2_{fD} \eta_{maD}, \tag{E.1}$$

donde

$$A_{fD} = A_{fb} h_{ma} V_b / V_{ma}, \tag{E.2}$$

siendo A_{fb} el área de las fracturas por unidad de volumen total V_b y V_{ma} es el volumen de la matriz ; para el caso analizado en esta tesis de bloques de matriz en forma de estratos horizontales, se ha demostrado que³¹

$$A_{fb} = 2l(h_{ma} + h_f) = 2V_{ma} / h_{ma} V_b, \tag{E.3}$$

por tanto $A_{fD} = 2$ y

$$t_{D_{bss}} = 1/4 \eta_{maD}. \tag{E.4}$$

η_{maD} está expresada por la Ec. 2.8

Procedimiento.

Del final del período de transición, que es a la vez el principio del flujo tipo pseudo - homogéneo (con iniciales en inglés *bpsss*), se obtiene $t_{D_{bss}}$ y con la Ec.E.4 se calcula η_{maD} ; en el caso de tamaño variable de los bloques η_{maD} corresponde a $h_{máx}$ (es decir, con la Ec. E.4 se calcula $\eta_{maD_{máx}}$; ver la Ec. 2.8)

porque su efecto se presenta hasta el final del período de transición. El efecto de los bloques más pequeños se presenta al principio de ese período y así sucesivamente para los bloques cada vez más grandes. Finalmente, con la Ec. 2.8 se calcula $h_{m\acute{a}x}$.

Ejemplo.

Para el caso de los resultados de la Tabla 5.1 y la Fig. 5.4 del Capítulo 5 se utilizó la información siguiente:

$$Cte_2 = \frac{k_{ma}(\phi C_t)_t}{k_{fb}(\phi C_t)_{ma}} = 7.4 \times 10^{-4},$$

que corresponde a valores típicos de estos parámetros^{13,65}. Usando además $r_w = 12.4$ cm, de la Ec. 2.8:

$$\eta_{maD_{min}} = 7.4 \times 10^{-4} (12.4)^2 / h_{m\acute{a}x}^2 = 0.11378 / h_{m\acute{a}x}^2. \tag{E.5}$$

De la Tabla 5.1 y la Fig 5.4 se obtiene $t_{D_{opt}} \approx 1.8 \times 10^7$, con lo cual, aplicando la Ec. E.4:

$$\eta_{maD_{min}} = 1 / (4 \times 1.8 \times 10^7).$$

De este resultado y usando la Ec. E.5 se calcula $h_{m\acute{a}x} = 2,862$ cm (el valor correcto es 3,000 cm).

APÉNDICE "F"

LÍMITES DE CONFIANZA EN LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Una estimación de un parámetro no es muy significativa si no se dispone de alguna medida del error posible en su estimación; por esta razón, la evaluación de un parámetro estimado por algún procedimiento se ha tratado en numerosos trabajos^{58, 59, 61-64, 99, 108, 123, 126}, siendo algunos de ellos sobre parámetros de yacimientos petroleros^{58, 64, 123, 126}.

Ramey⁶⁴ establece, con respecto al análisis de resultados de pruebas de variación de presión, que los límites de confianza en la estimación de parámetros obtenidos a partir de la teoría de regresión no lineal, proporcionan una medida cuantitativa de la concordancia entre datos de campo y los resultados obtenidos con el modelo que se aplique. En este orden de ideas, Yeh⁵⁹, indica que la ventaja de usar un procedimiento de regresión estándar para la estimación de parámetros es que permite la aplicación de técnicas estadísticas formales para probar el ajuste del modelo y la confiabilidad de sus parámetros. Por otra parte, Dogru⁵⁸ aplica métodos de la teoría de regresión no lineal en el problema de ajuste de la historia de un yacimiento, para determinar el efecto de estimaciones erróneas de los parámetros obtenidos de pruebas de pozos en la predicción de las presiones del propio yacimiento.

Para el caso de la función derivada $f_p = f_{DP'WD}$, se emplea la función objetivo de mínimos cuadrados siguiente:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^n (f_{pobs} - f_p)^2, \quad (F.1)$$

donde f_p es el valor calculado de la función derivada y f_{pobs} es el valor de esta función obtenido de los datos de campo; ambos valores corresponden a la misma posición y tiempo y se dispone de n parejas de estos valores.

Se obtiene el valor mínimo f_{min} de f_{obj} (que depende de los valores reales de los parámetros del yacimiento $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dots, \dot{C}_m$) en la Ec. F. 1, variando los valores C_1, C_2, \dots, C_m de los parámetros del modelo; éstos son aproximaciones respectivamente para los valores reales $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dots, \dot{C}_m$; f_{min} se calcula con la técnica de optimización presentada en el Apéndice C, dando como resultado los parámetros estimados $C_{1est}, C_{2est}, \dots, C_{mest}$. Durante el proceso de optimización se obtienen el Jacobiano J (Ec. C. 6) y la matriz B dada por

$$B = (J^T J)^{-1}, \quad (F.2)$$

que está involucrada en la Ec. C. 10, con la cual se calculan las correcciones que se deben hacer a C_1, C_2, \dots, C_m para cumplir con el objetivo de mínimos cuadrados establecido en la Ec. F. 1. Con esto se obtiene

$$f_{min} = \sum_{i=1}^n (f_{pobs} - f_{pest})^2, \quad (F.3)$$

que es la Ec. 7.8 del texto.

Usando los resultados de la Ec. F. 3, la variancia σ_p^2 de las funciones f_p se puede aproximar⁵⁸ por la ecuación:

$$\sigma_p^2 = f_{min} / (n - m). \quad (F.4)$$

Por consiguiente, de las Ecs. F.2 a F.4 y considerando la definición de variancia para cada parámetro estimado C_j se obtiene:

$$\sigma_{C_j}^2 = B_{jj} \sigma_p^2, \quad (F.5)$$

donde B_{jj} es el elemento de la diagonal de la matriz B (Ec. F.2). Una vez calculadas σ_p y σ_{C_j} en la forma indicada (a partir de sus variancias, Ecs. F.4 y F.5), los límites de confianza para cada parámetro C_j se establecen como sigue^{58, 130}:

$$C_j - t_{1-\alpha/2} \sigma_{C_j} \text{ y } C_j + t_{1-\alpha/2} \sigma_{C_j},$$

de tal manera que el intervalo de confianza correspondiente es

$$C_j - t_{1-\alpha/2} \sigma_{C_j} \leq \dot{C}_j \leq C_j + t_{1-\alpha/2} \sigma_{C_j}, \quad (F.6)$$

donde t se obtiene de la distribución t de Student con un nivel de riesgo α ^{91,92,130}.

En el ejemplo que se presenta en el texto de esta tesis se ilustran todos los detalles de cálculo de cada uno de los pasos del procedimiento.