00384

6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

HIPERESPACIOS QUE SON LOCALMENTE EUCLIDIANOS EN LA CUSPIDE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTORADO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

M. en C. SERGIO LOPEZ VAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

273291

MEXICO, D. F. 2000

Indice General.

Abstract (thesis)

Hyperspaces which are locally Euclidean at the top

Sergio López Vázquez

A continuum X is a metric, compact and connected space with more than one point. The hyperspaces of the continuum X are $2^X = \{A \dot{\subset} X : A \text{ is closed and no empty}\}$ and $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ is connected}\}$. A **Whitney map** is a map $\mu : C(X) \to [0,1]$ such that

$\mu(X) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$ for each $x \in X$, and $\mu(A) < \mu(B)$ whenever $A \subset B \neq A$. A **Whitney level** is a set of the form $\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\}$, with $t \in [0,1]$.

We may think the hyperspaces $C(X)$ like a partially order set. In this way, X has a privilege status since it is the greater of all other elements in $C(X)$. And so, we call it "The top of $C(X)$".

In this work, we study conditions in order that X has a neighborhood $\mathcal{U}$ in $C(X)$ such that:

1) $\mathcal{U}$ is homeomorphic to a n-cell

2) $\mathcal{U}$ is homeomorphic to a Hilbert cube

The most simple situation is when $C(X)$ has a neighborhood around X homeomorphic to a disk. We were lucky in this way, since we found several characterizations. We were able to find a relationship between the existence of such neighborhood and the existence of Whitney levels homeomorphic to arcs or circles. Namely. **$C(X)$ has a neighborhood of X homeomorphic to a disk if and only if $C(X)$ has a Whitney level which is either an arc or a circle.**

$C(X)$ is called *locally flat at the top* if $C(X)$ has a neighborhood of X homeomorphic to a 2-cell. We introduced the combinatorial notions of *pseudolinear* and *pseudocircular* continuum and, with this notions, we arrived to the following result.

Theorem. Let X be a continuum. Then the following statements are equivalent.

a) $C(X)$ is locally flat at the top.

b) $C(X)$ has a Whitney level which is either an arc or homeomorphic to circle.

c) X is pseudolinear or pseudocircular.

Starting from above results, we introduced the notion of "locally Euclidean at the top.

Namely: $C(X)$ is *locally Euclidean at the top* if $C(X)$ has a neighborhood of X homeomorphic to an n-cell. In this case, we obtained a characterization for finite graphics

Theorem. Let G be a connected finite graphic, then $C(G)$ is locally Euclidean at the top If an only if X is a fruit tree (X is a *fruit tree* if every cycle contains exactly one vertex).

I order to complete this work, we gave a result about of characterization of hyperspaces which have neighborhoods homeomorphic to the Hilbert cube.

In this sense, we obtained the following result:

Theorem. Let X a continuum. Then 2^X has a neighborhood homeomorphic to the Hilbert cube if and only if X is locally connected.

Este trabajo está dedicado a esas dos energías que han alegrado mis días en estos últimos años.

Mi esposa Alejandra
y mi hija Mariana.

Aprovecho esta oportunidad para dar mi agradecimiento a todos mis profesores, especialmente a mis profesores del CCH Sur y de la Facultad de Ciencias por haberme iniciado en el maravilloso mundo de las matemáticas.

" Si veo más allá del horizonte es porque estoy parado en los hombros de gigantes".

Tengo un agradecimiento especial para papá y mamá por ser ellos una constante y fundamental motivación para el logro de esta y otras empresas.

También quiero agradecer el apoyo y motivación que recibí de todos mis hermanos a través de las distintas charlas que tuvimos en fiestas y reuniones.

Tampoco me olvido de mis compañeros de trabajo de la UPN-Ajuco (gracias por el apoyo que recibí, en ocasiones de manera sutil, de todos ellos).

Con respecto a mi asesor y gurú Alejandro quiero decir, simplemente, que tuve la fortuna de conocer y trabajar con uno de esos seres que vienen con la misión de disipar las tinieblas y enseñarnos el camino. Gracias por la paciencia que me tuviste.

Un agradecimiento especial a mis sinodales por revisar y mejorar en muchos sentidos este trabajo.

Antes de que se me olvide, no quiero dejar de expresar mi agradecimiento a las autoridades de la UPN por el apoyo, tanto económico como de tiempo, que me brindaron para la elaboración de este trabajo.

Hiperespacios que son localmente Euclidianos en la cúspide

Sergio López Vázquez

Enero 2000

"... Muy poco por encima del agua titilaba en la columna de luz algo así como una estrella luminosa. Se movía con lentitud majestuosa, y Momo vio un péndulo increíble que oscilaba sobre el espejo oscuro. Flotaba y parecía carecer de peso.

Cuando el péndulo estelar se acercaba lentamente a un extremo del estanque, salía del agua, en aquel punto, un gran capullo floral. Cuanto más se acercaba el péndulo, más se abría, hasta que por fin se quedaba totalmente abierto sobre las aguas.

Era una flor de belleza tal, que Momo no la había visto nunca. Parecía componerse solamente de colores luminosos. Momo nunca había sospechado que esos colores siquiera existieran. El péndulo se detuvo un momento sobre la flor y Momo se ensimismó totalmente en su visión, olvidando todo lo demás.

Pero entonces, muy lentamente, el péndulo volvió a oscilar hacia el otro lado. Y mientras, muy poco a poco, se alejaba, Momo vio, consternada que la maravillosa flor comenzaba a marchitarse. Una hoja tras otra caía y se hundía en la negra profundidad. Momo lo sentía con tal dolor, como si desapareciera para siempre de ella algo totalmente irrepetible.

Cuando el péndulo hubo llegado al centro del estanque, la extraordinaria flor había desaparecido del todo. Pero al mismo tiempo comenzaba a salir, al otro lado del estanque, del agua negra, otro capullo. Y mientras el péndulo se acercaba lentamente a él, Momo vio que el capullo que comenzaba a abrirse era mucho más hermoso todavía. La niña dio la vuelta al estanque para verlo de cerca.

Era totalmente diferente a la flor anterior. Tampoco los colores de ésta los había visto jamás Momo, pero le pareció que era todavía más rica y preciosa que la anterior: Tenía un olor completamente diferente, Más maravilloso, y cuanto más la miraba Momo, más detalles extraordinarios descubría.

Pero de nuevo volvió el péndulo estelar, y toda esa maravilla se disolvió y se hundió, hoja a hoja, en las inescrutables profundidades del estanque oscuro.

Lentamente, muy lentamente, el péndulo volvió al otro lado, pero no alcanzó exactamente el lugar anterior, sino que había avanzado un corto trecho. Y allí, a un paso del punto anterior, comenzaba a emerger y abrirse nuevamente un capullo.

Esa flor era, realmente, la más hermosa, según le pareció a Momo. Era la flor de las flores, un milagro.

Momo hubiera querido llorar cuando tubo que ver que también esa perfección comenzaba a marchitarse y a hundirse en las oscuras profundidades. También al otro lado había avanzado un paso el péndulo, y de las negras aguas comenzaba a surgir una nueva flor..."

Momo

Michael Ende

INTRODUCCIÓN

Los resultados que se presentan en este trabajo pertenecen al tema "Hiperespacios de un continuo". En particular, nos interesó estudiar el comportamiento de vecindades alrededor de la "cúspide" del los *hiperespacios* 2^X y $C(X)$. Aunque más adelante definimos formalmente los conceptos que se utilizarán a lo largo del presente trabajo, nos pareció conveniente establecer, en esta parte introductoria, el concepto de *hiperespacio* de un *continuo* y algunas otras nociones estrechamente relacionadas con él.

A lo largo de nuestra discusión, la letra I denotará al intervalo unitario $[0,1]$.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. La letra X denotará un continuo con métrica d. Un *subcontinuo* de un continuo X es un subespacio conexo, compacto y diferente del vacío. Dado un continuo X, un hiperespacio de X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ con alguna topología. En este caso nos interesan:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\} \text{ y}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

con la topología que induce la métrica de Hausdorff.

Una *función de Whitney* es una función continua $\mu : C(X) \to I$ tal que $\mu(X) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$, y si A es un subconjunto propio de B entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Un *nivel de Whitney* para $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1]$.

Cuando se piensa a un hiperespacio $C(X)$ como un conjunto ordenado por la inclusión, el elemento X tiene la posición privilegiada de ser el mayor de los elementos. Por esta razón podemos decir que X es la cúspide del hiperespacio. También, topológicamente hablando, X ocupa un lugar privilegiado. Por ejemplo, se puede demostrar fácilmente que $C(X)$ y 2^X son siempre localmente conexos en X, aun cuando hay continuos en los que $C(X)$ y 2^X no son localmente conexos en ningún otro de sus elementos. Esta regularidad de X en sus hiperespacios ha sido investigada por varios autores. Por ejemplo, contestando a una pregunta de

Dilks, Illanes y Kato mostraron que hay continuos para los que $C(X)$ y 2^X no son localmente contraíbles en X. Otro ejemplo son los resultados de Montejano y Puga, quienes estudiaron condiciones para que el hiperespacio $C(X)$ tenga una vecindad alrededor de X con la forma de un cono.

En este trabajo estudiamos el problema de decidir cuándo los hiperespacios tienen, alrededor de X, una vecindad homeomorfa a una *N-celda* o a un cubo de Hilbert.

La situación más sencilla que se puede plantear al respecto, es cuándo $C(X)$ tiene una vecindad de X, homeomorfa a un disco. En este sentido tuvimos la fortuna de encontrar varias caracterizaciones.

Para empezar, pudimos relacionar la existencia de una vecindad de dicha forma con la existencia de niveles de Whitney homeomorfos a arcos o a círculos. A saber.

Teorema. El hiperespacio $C(X)$ es localmente plano alrededor de X si y sólo si $C(X)$ tiene un nivel de Whitney homeomorfo a un intervalo o a un círculo.

El siguiente paso fue encontrar una caracterización de continuos tales que $C(X)$ fuera localmente plano, alrededor de X, en términos de propiedades combinatorias, propias del continuo X. Es decir, propiedades que para su definición no se hiciera uso de los hiperespacios. Para llegar a esta caracterización, recurrimos a las siguientes definiciones:

Definición. Sean A y B dos subcontinuos de un continuo X tales que $A \subset B$. Entonces A es *terminal con respecto a B* si para cualquier par de subcontinuos K, L de B, tales que $A \subset K$ y $A \subset L$, se tiene que $L \subset K$ o $K \subset L$.

Definición. Un continuo X es *pseudolineal* si existen dos subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que:

a) $X = X_1 \cup X_2$,
b) $Y = X_1 \cap X_2$ es un subcontinuo de X,
c) Y es terminal con respecto a X_1 y X_2,
d) para todo subcontinuo L de X tal que $L \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $L \backslash X_2 \neq \emptyset$, se cumple que $Y \subset L$.

Definición Un continuo X es *pseudocircular* si existen dos subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que:

a) $X = X_1 \cup X_2$,
b) $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes K_1 y K_2,
c) las componentes K_1 y K_2 son terminales con respecto a los subcontinuos X_1 y X_2,
d) $Fr(X_1) = Fr(X_2) = K_1 \cup K_2$,
e) para todo subcontinuo L de X tal que $L \cap K_1 \neq \emptyset$ y $L \cap K_2 \neq \emptyset$, se tiene que $X_1 \subset L$ o $X_2 \subset L$,
f) existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo subcontinuo L de X con las propiedad de que todo punto de X dista de uno de L en menos que ε y tal que $L \setminus X_1 \neq \emptyset$ y $L \setminus X_2 \neq \emptyset$, se tiene que $K_1 \subset L$ o $K_2 \subset L$.

Con estas tres definiciones en mente, obtuvimos el siguiente teorema.

Teorema. $C(X)$ es localmente plano alrededor de X si y sólo si X es pseudo-lineal o X es seudocircular.

El problema de caracterizar a los continuos X para los cuales $C(X)$ es localmente Euclidiano alrededor de X -es decir, aquellos continuos tales que $C(X)$ contiene una vecindad alrededor de X homeomorfa a una N-*celda*- es bastante difícil para $N \geq 3$. En este trabajo, usando algunas nociones y resultados previos de Illanes, Puga y Torres, conseguimos una caracterización de las gráficas finitas G tales que $C(G)$ es localmente Euclidiano alrededor de X.

Teorema. Sea G una gráfica finita conexa, entonces $C(X)$ es localmente Euclidiano alrededor de X si y sólo si X es un árbol frutal (X es un árbol frutal si todo ciclo contiene a lo más un vértice).

Finalmente, abordamos el problema de caracterizar a los continuos X para los cuales sus hiperespacios contienen una vecindad de X homeomorfa al cubo de Hilbert. En este caso no tuvimos tanto éxito como en los anteriores, pues al investigar si era cierto el regreso del resultado que aparece a continuación y que es consecuencia de un teorema de Kelley ([22, Teorema 1.109]), encontramos un continuo que es localmente conexo, que no es una gráfica finita y sin embargo su hiperespacio $C(X)$ no tiene ninguna vecindad alrededor de X que sea homeomorfa al cubo de Hilbert. En el capítulo 4 mostramos este subcontinuo.

Teorema. Sea X un continuo localmente conexo. Supongamos que $C(X)$ tiene una vecindad de X homeomorfa al cubo de Hilbert, entonces X no es una gráfica finita.

A pesar de no haber logrado una caracterización de los continuos cuyo hiperespacio $C(X)$ tiene una vecindad alrededor de X homeomorfa al cubo de Hilbert, sí pudimos hacer esto cuando trabajamos con el hiperespacio 2^X de un continuo X, a saber:

Teorema. 2^X tiene una vecindad homeomorfa al cubo de Hilbert si y sólo si X es localmente conexo.

De acuerdo a los resultados que obtuvimos, el presente trabajo quedó dividido, de manera natural, en cuatro capítulos. En el primer capítulo se dan las definiciones básicas que están relacionadas con la noción de Hiperespacio, así como algunos de los resultados importantes para el desarrollo de este trabajo. En el segundo capítulo desarrollamos las ideas y resultados que tienen que ver con los continuos cuyo hiperespacio contiene una vecindad homeomorfa a un disco, alrededor de su cúspide. En el tercer capítulo nos enfocamos al problema de encontrar una caracterización de las gráficas finitas cuyo hiperespacio contiene una vecindad homeomorfa a una *N-celda* en su cúspide. Por último, en el capítulo cuarto discutimos los resultados que tienen que ver con el tipo de continuos cuyo hiperespacio contiene una vecindad, alrededor de su cúspide, homeomorfa a un cubo de Hilbert.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS BÁSICOS Y NOTACIÓN

Para el desarrollo de la discusión en éste y en los siguientes capítulos se dan como conocidos los resultados que aparecen en los libros *Topology* de Dugundji ([8]), *General Topology* de Willard ([25]), *Continuum theory* de Nadler ([23) y los dos primeros capítulos del libro *Hyperspaces of sets,* también de Nadler([22]). Sin embargo, expondremos con su demostración algunos resultados que nos pareció importante remarcar, ya que juegan un papel relevante a lo largo del trabajo.

Hiperespacios.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. La letra X denotará un continuo con métrica d. Un *subcontinuo* Y es un subespacio conexo, compacto y diferente del vacío del continuo X. Dado un continuo X, consideraremos sus *hiperespacios*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}$$

Una métrica para 2^X se define como sigue:

Definición 1.1. Si $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ entonces

$$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

$N(\varepsilon, A)$ será llamada la ε-*nube* de A.

Definición 1.2. Para cada par de elementos A y B de 2^X definimos

$H(A,B) = inf\,\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$.

Efectivamente, en [22, Teorema 0.2] se prueba que H es una métrica para 2^X y es llamada la *métrica de Hausdorff.*

Podemos hablar sobre la convergencia de conjuntos en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff. Para esto utilizamos la definición usual. Decimos que la sucesión $(A_n)_n$ en 2^X converge a $A \in 2^X$, y escribimos $lím A_n = A$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

Se sigue de la Definición 1.2. y de la compacidad de A y B que para demostrar que $H(A, B) < \varepsilon$, basta verificar que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Este hecho será constantemente usado a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.3. Sean $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ dos sucesiones en 2^X tales que $límA_n = A$ y $límB_n = B$, para A y B en 2^X. Entonces $lím(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen N_1 y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $H(A_n, A) < \varepsilon$, para toda $n \geq N_1$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$, para toda $n \geq N_2$. Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. Entonces para toda $n \geq N$ se tiene que $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n) \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$, de donde se sigue que $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$. □

Teorema 1.4. Sean X un continuo y $h : [0,1] \to 2^X$ una función continua. Si $L \in C(X)$, entonces la función $h^* : [0,1] \to 2^X$, definida por $h^*(s) = L \cup h(s)$, es una función continua.

Demostración. Sea $a \in [0,1]$ y sea $(a_n)_n$ una sucesión en $[0,1]$. Supongamos que $lím(a_n) = a$, entonces mostraremos que $lím(h^*(a_n)) = h^*(a)$. Por hipótesis, sabemos que $lím(h(a_n)) = h(a)$. También, la sucesión $(C_n)_n$, con $C_n = L$ para toda $n \in \mathbb{N}$, converge a L. Entonces, por el teorema anterior, se tiene que $lím(h^*(a_n)) = lím(h(a_n) \cup C_n) = h(a) \cup L = h^*(a)$.

Lo anterior prueba que h^* es continua.□

En [1, Teorema 1.9] se demuestra el siguiente resultado, el cual nos será de utilidad en capítulos posteriores.

Teorema 1.5. Sean $A \in 2^X$ y U un abierto en X tales que $A \subset U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$.

Se sabe que tanto 2^X como $C(X)$ son compactos [22, Teorema 0.8]. También se sabe que 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias. La demostración clásica de este resultado es muy larga, sin embargo en [1, Corolarios 1.2 y 1.3, pág. 32] se da una demostración nueva y más corta.

Por lo tanto 2^X y $C(X)$ son continuos y podemos hablar de los hiperespacios de $C(X)$:

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C^2(X) = C(C(X)) = \{\mathcal{A} \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo}\}$$

A los hiperespacios $2^{C(X)}$ y $C^2(X)$ se les considera con la métrica de Hausdorff H_2, definida en términos de H (en lugar de d).

La siguiente definición nos permite trabajar, en algunas ocasiones, la convergencia de conjuntos en 2^X de manera más sencilla que la convergencia en el sentido clásico.

Definición 1.6. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en 2^X, definimos

$lím \inf A_n = \{x \in X :$ para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N\}$.

$lím \sup A_n = \{x \in X :$ para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset\}$.

Si $lím \inf A_n = A = lím \sup A_n$ entonces decimos que la sucesión $(A_n)_n$ converge a A y lo escribimos como $lím A_n = A$.

El siguiente teorema enlaza esta convergencia con la convergencia asociada a la métrica de Hausdorff ([22, 0.7.]).

Teorema 1.7. Sea $(A_n)_n$ una sucesión en 2^X. Entonces la sucesión $(A_n)_n$ converge con respecto a la métrica de Hausdorff si y sólo si (A_n) converge en el sentido de 1.6..

Terminamos esta sección probando el siguiente resultado.

Teorema 1.8. Sean A y $B \in 2^X$ y $(A_n)_n$ y $(B_n)_n \subset 2^X$ tales que $lím A_n = A$, $lím B_n = B$ y $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subset B$.

Demostración. Por el Teorema 1.3., $lím(A_n \cup B_n) = A \cup B$, pero $A_n \cup B_n = B_n$. De modo que $A \cup B = B$. Por tanto $A \subset B$.

Algunos resultados básicos de Teoría de Continuos.

Presentamos dos resultados que son fundamentales en la teoría de continuos y que nos serán de gran utilidad en la demostración de algunos teoremas que aparecen en este trabajo.

Teorema 1.9. (Teorema del cable cortado). Sean Y un espacio métrico compacto y A y B dos subconjuntos cerrados de Y. Si ningún subconjunto conexo de Y intersecta simultáneamente tanto a A como a B entonces $Y = Y_1 \cup Y_2$, donde Y_1 y Y_2 son subconjuntos cerrados ajenos de Y con $A \subset Y_1$ y $B \subset Y_2$ ([23, Teorema 5.2]).

Teorema 1.10. (Teorema de los golpes en la frontera). Sean X un continuo y E un subconjunto propio de X diferente del vacío. Si K es una componente de E entonces $Ce(K) \cap Fr(E) \neq \emptyset$ ([23, Teorema 5.6]).

Teorema 1.11. Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X \backslash A$, entonces $K \cup A$ es un continuo ([23, Corolario 5.9.]).

Funciones y niveles de Whitney.

Las funciones de Whitney fueron usadas por vez primera por Kelley para el estudio de los hiperespacios y resultan ser de gran utilidad para estudiar la estructura de los hiperespacios. Una de sus principales características es medir finamente los elementos de 2^X. A continuación damos la definición formal de este concepto.

Definición 1.12. Sea $\Phi = 2^X$ o $C(X)$. Una *función de Whitney* para Φ es una función continua $\mu : \Phi \to I$ que satisface:
a) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ y $\mu(X) = 1$,
b) Si A es un subconjunto propio de B entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Un *nivel de Whitney* para $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0, 1]$.

Teorema 1.13. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para 2^X. Entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si A y $B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ entonces $H(A, B) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que el teorema no es cierto. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen A y $B \in 2^X$ con $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ tales que $H(A, B) \geq \varepsilon$. Por lo tanto para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ existen A_n y $B_n \in 2^X$ tales que: $A_n \subset B_n$, $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$. Por la compacidad de 2^X, existen subsucesiones $(A_{n_k})_k$ y $(B_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$, respectivamente, de 2^X tales que $lím A_{n_k} = A$ y $lím B_{n_k} = B$ para algunos A y $B \in 2^X$. Entonces, por el Teorema 1.8, resulta que $A \subset B$. Afirmamos que $\mu(A) = \mu(B)$ y que $A = B$. En efecto, de la continuidad de μ se sigue que $lím(\mu(A_{n_k})) = \mu(A)$ y $lím \mu((B_{n_k})) = \mu(B)$. Por lo tanto $lím(\mu(B_{n_k}) - \mu(A_{n_k})) = \mu(B) - \mu(A)$. Pero sabemos que $lím(\mu(B_{n_k}) - \mu(A_{n_k})) = 0$, de donde se sigue que $\mu(A) = \mu(B)$ por la unicidad del límite. De $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$ se sigue que A no puede ser un subconjunto propio de B, por lo que se concluye que $A = B$. Tenemos entonces que $H(A,B)=0$. Sin embargo $H(A_{n_k},B_{n_k})\geq\varepsilon$ para toda $k\in\mathbb{N}$ implica que $H(A,B)\geq\varepsilon$ y entonces $\varepsilon\leq 0$ lo cual es absurdo. Esto prueba la veracidad del teorema. □

La función unión definida entre hiperespacios.

Teorema 1.14 ([1, Teorema 1.18]). Si $\mathcal{A}\in 2^{2^X}$ y $\sigma(\mathcal{A})=\bigcup\{A:A\in\mathcal{A}\}$, entonces se tiene lo siguiente:

1. $\sigma(\mathcal{A})\in 2^X$.
2. Si $\mathcal{A}$ es conexo y $\mathcal{A}\cap C(X)\neq\emptyset$ entonces $\sigma(\mathcal{A})\in C(X)$.
3. $\sigma:2^{2^X}\to 2^X$ es una función continua.

Demostración. Probaremos que $\sigma(\mathcal{A})\in 2^X$.

Primero comprobaremos que $\sigma(\mathcal{A})\neq\emptyset$. En efecto, como $\mathcal{A}\neq\emptyset$, podemos elegir $A\in\mathcal{A}$, lo que implica que $A\in 2^X$, por lo que $\emptyset\neq A\subset\bigcup\{A:A\in\mathcal{A}\}$.

Es claro que $\sigma(\mathcal{A})\subset X$.

Mostraremos que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en 2^X. Sea $a\in Ce(\sigma(\mathcal{A}))$, entonces $a\in X$ y existe una sucesión $(a_n)_n\subset\sigma(\mathcal{A})$ tal que $lím(a_n)=a$. Por lo tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $A_n\in\mathcal{A}$ tal que $a_n\in A_n$. De la compacidad de $\mathcal{A}$, tenemos que existe una subsucesión $(A_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ tal que $límA_{n_k}=A$ para alguna $A\in\mathcal{A}$. De donde se desprende, a partir del Teorema 1.8, que $a\in A$, por lo cual se tiene que $a\in\sigma(\mathcal{A})$. Esto implica que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado X. De esta manera concluimos que $\sigma(\mathcal{A})\in 2^X$.

Ahora probaremos la segunda aseveración. Supongamos que se tienen las hipótesis de ésta y que, sin embargo, $\sigma(\mathcal{A})$ no es conexo. Entonces existen H y $K\in 2^X$ tales que $H\cup K=\sigma(\mathcal{A})$ y $H\cap K=\emptyset$. Sea $B\in\mathcal{A}\cap C(X)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B\subset H$. Hagamos $\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{A}:A\subset H\}$ y $\mathcal{K}=\{A\in\mathcal{A}:A\cap K\neq\emptyset\}$. Por [1, Teorema 1.8], $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados en 2^X. Además $\mathcal{H}\neq\emptyset$, pues $B\in\mathcal{H}$. Si $\mathcal{K}=\emptyset$ entonces todos los elementos de $\mathcal{A}$ se encuentran contenidos en $\mathcal{H}$. por lo que $\sigma(\mathcal{A})\subset H$. Por lo tanto $K=\emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\mathcal{K}\neq\emptyset$. Notamos que $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}=\emptyset$, pues si $A\in\mathcal{H}\cap\mathcal{K}$ entonces resultaría que $\emptyset\neq A\cap K\subset H\cap K$, lo cual es absurdo. Mostraremos, finalmente, que $\mathcal{H}\cup\mathcal{K}=\mathcal{A}$. En efecto, por definición $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$, de modo que $\mathcal{H}\cup\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$. Sea $A\in\mathcal{A}$. Si $A\in\mathcal{H}$, entonces $A\in\mathcal{H}\cup\mathcal{K}$. Supongamos que $A\notin\mathcal{H}$, entonces $A\not\subset H$ y $A\subset H\cup K$, así que $A\cap K\neq\emptyset$. De aquí que $A\in\mathcal{K}$ y, por lo tanto, $A\in\mathcal{H}\cup\mathcal{K}$. Todo lo anterior prueba que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ constituyen una disconexión de $\mathcal{A}$. Como esto es una contradicción, concluimos que $\sigma(\mathcal{A})\in C(X)$.

Por último, probaremos que σ es una función continua. Sean $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $H_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \varepsilon$ (ver pág. 9), entonces mostraremos que $\sigma(\mathcal{A}) \subset N(\varepsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. Por definición, sabemos que $\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, \mathcal{B})$ y $\mathcal{B} \subset N(\varepsilon, \mathcal{A})$. Sea $a \in \sigma(\mathcal{A})$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Es claro que $A \in N_2(\varepsilon, \mathcal{B})$, así que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Dado que $a \in A \subset N(\varepsilon, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. De esta forma , hemos encontrado $b \in \sigma(\mathcal{B})$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$, de modo que $a \in N(\varepsilon, \sigma(\mathcal{B}))$ y, por tanto, que $\sigma(\mathcal{A}) \subset N(\varepsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. Análogamente se puede verificar que $\sigma(\mathcal{B}) \subset N(\varepsilon, \sigma(\mathcal{A}))$. Por consiguiente obtenemos que $H(\sigma(\mathcal{B}),\sigma(\mathcal{A})) < \varepsilon$ y, por tanto, hemos demostrado que σ es continua en A. □

La función σ del teorema anterior es llamada la función unión en 2^X. En seguida veremos que la función $\tau = \sigma|_{C^2(X)} : C^2(X) \to C(X)$ está bien definida y es continua. En efecto, si $\mathcal{A} \in C^2(X) \subset 2^{2^X}$ entonces $\mathcal{A}$ es conexo y pertenece a $2^{C(X)}$. Esto último implica a su vez que $\mathcal{A} \subset C(X)$ y $\mathcal{A} \neq \emptyset$. De donde concluimos que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Aplicando la segunda parte del teorema anterior tenemos que $\tau(\mathcal{A}) \in C(X)$. Esto prueba que τ está bien definida y, por ser una. restricción de una función continua, resulta ser continua. A τ se le llama la función unión en $C^2(X)$.

En lo que sigue, acordaremos que σ denotará la función unión ya sea en 2^{2^X} o en $C^2(X)$.

Arcos ordenados.

Mencionamos anteriormente que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias. La demostración clásica de este hecho es muy larga, sin embargo en [1, Corolarios 1.2 y 1.3.] se da una demostración nueva y más corta. En lo que sigue daremos los resultados básicos relacionados con la estructura de arcos de los hiperespacios. Empezaremos con algunas definiciones importantes.

Definición 1.15. Por un *arco* entenderemos un homeomorfismo h de un intervalo cerrado y no degenerado $[a, b]$ a un subconjunto de un espacio topológico, o también lo entenderemos como el rango $h([a, b])$ de tal homeomorfismo. Utilizaremos estas dos acepciones de arco, dependiendo de cual nos resulte más conveniente usar. Ahora, si α es un arco en un espacio X y h es un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre α entonces, un *extremo* de α será cualquiera de los puntos $h(0)$ o $h(1)$.

A continuación presentamos uno de los resultados fundamentales de hiperespacios.

Teorema 1.16 ([22, Teorema 1.8]). Sean A_0 y $A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$, Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) Existe un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1.
(b) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Otra forma de presentar el Teorema 1.16 y que resulta conveniente para introducir la noción de *arco ordenado* es el siguiente

Teorema. 1.17. Si A y $B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$ entonces existe una función continua $\lambda : I \to C(X)$ tal que $\lambda(0) = A$ y $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subset \lambda(t)$ si $s \leq t$ ([1, Teorema 1.23]).

Definición 1.18. Sea $\Psi = 2^X$ o $C(X)$. Sean $A, B \in \Psi$ tales que $A \subset B$. Un *arco ordenado* de A a B en Ψ es una función continua $\lambda : I \to \Psi$ tal que $\lambda(0) = A, \lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subset \lambda(t)$ siempre que $s \leq t$.

A los elementos A y B de la definición anterior se les llama los extremos de $\lambda([0,1])$.

Teorema 1.19 ([22, Lema 1.11]). Si λ es un arco ordenado en 2^X tal que $\lambda(0) \in C(X)$, entonces $\lambda([0,1]) \subset C(X)$.

Teorema 1.20 ([22, Teoremas 1.9 y 1.12]). Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias.

El Teorema 1.22 (el cual fue probado originalmente por J.T. Rogers, Jr.) resulta ser de vital importancia para la demostración de varios teoremas de este trabajo. Y en vista de que en algunos de estos resultados se hace uso explícito de algunos pasajes de su demostración, se da una presentación completa de ésta. Antes, presentaremos un resultado que nos será de utilidad. Recordemos que una función continua y sobre $f : X \to Y$ entre continuos se llama *monótona* si $f^{-1}(B) \in C(X)$ para toda $B \in C(Y)$. Por ([25,Teorema 23.2]) sabemos que la imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio Hausdorff es metrizable. Entonces, si Y es un espacio de Hausdorff y $f : [0,1] \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, podemos hablar de una función entre continuos y, por lo tanto suponer o no que f es una función monótona. El siguiente resultado nos dice de que forma es la imagen continua y monótona del intervalo $[0,1]$.

Teorema 1.21 ([23, Proposición 8.22]). Si Y es un espacio Hausdorff no degenerado y $f : [0,1] \to Y$ es una función continua y monótona sobre Y entonces Y es un arco.

Teorema 1.22 ([1, Teorema 1.25]). Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $0 < t_0 < 1$. Si A y $B \in \mu^{-1}(t_0)$, $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$ entonces existe un arco g de A a B tal que $\operatorname{Im} g \subset \mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$. Más aún, si K es una componente de $A \cap B$ entonces α puede ser escogida con la propiedad adicional de que $K \subset L$ para todo $L \in \operatorname{Im} g$.

Demostración. Sean A y $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$. Entonces A y $B \in C(X)$ y $A \cap B \in 2^X$. Sea K una componente de $A \cap B$. Puesto que K y $A \in C(X)$, $K \subset A \cap B \subset A$ y $K \neq A$ (si $K = A$ entonces $A \subset B$, lo que implicaría que $A = B$, lo cual es absurdo), existe un arco ordenado $\alpha_1 : I \to C(X)$ de K a A (Teorema 1.16). De hecho, $\alpha_1 : I \to C(A)$. Análogamente, existe un arco ordenado $\alpha_2 : I \to C(B)$ de K a B. Notamos que para todo t y $s \in I$, se tiene que $\alpha_1(t) \in C(A)$ y $\alpha_2(s) \in C(B)$. De donde se sigue que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s) \subset A \cup B$ y entonces $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s) \in C(A \cup B)$. Fijemos $t \in I$. Entonces, por el Teorema 1.4, la función $j : I \to C(A \cup B)$, dada por $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s)$, para todo $s \in I$, resulta ser una función continua.

Consideremos la función $\mu \circ j : I \to I$. Por la continuidad de μ y j, $\mu \circ j$ resulta ser continua. Además observamos que $\alpha_1(t) \cup K \subset A \cup K \subset A$, de donde se tiene que:

$$\mu(j(0)) = \mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(0)) = \mu(\alpha_1(t) \cup K) \leq \mu(A) = t_0.$$

Por otra parte $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(1) = \alpha_1(t) \cup B \supset B$, de donde se tiene que:

$$t_0 = \mu(B) \leq \mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(1)) = \mu(j(1)).$$

Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in I$ tal que

$$\mu(j(s)) = t_0$$

Es claro que s depende de t, así que, en general, se tiene que para toda $t \in I$ existe $s_t \in I$ tal que :

$$\mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t)) = t_0 \tag{1.1}$$

y por lo tanto $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$.

Afirmamos que la función $g : I \to \mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$ definida como

$$g(t) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) \tag{1.2}$$

es una trayectoria de B a A cuya imagen está contenida en $\mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)$. En efecto, $g(0) = \alpha_1(0) \cup \alpha_2(s_0) = K \cup \alpha_2(s_0) \subset K \cup B = B$. De donde se sigue que $t_0 = \mu(g(0)) \leq \mu(B) = t_0$ y, por lo tanto, se llega a que $g(0) = B$. Por otro lado, $g(1) = \alpha_1(1) \cup \alpha_2(s_t) = A \cup \alpha_2(s_1) \supset A$, así que $t_0 = \mu(g(1)) \geq \mu(A) = t_0$ y, por lo tanto, $g(1) = A$.

Sólo nos resta verificar que g es una función continua. Sean $t \in I$ y $(t_n)_n \subset I$ tales que $lím(t_n) = t$. De acuerdo a (1.1), para cada t_n existe s_{t_n} tal que

$$\mu(\alpha_1(t_n) \cup \alpha_2(s_{t_n})) = t_0.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $lím(s_{t_n}) = r$ para algún $r \in I$. Tenemos entonces dos sucesiones convergentes $(t_n)_n$ y $(s_n)_n$, con $lím(t_n) = t$ y $lím(s_{t_n}) = r$, en el intervalo I. De la continuidad de α_1 y α_2 se sigue que $lím(\alpha_1(t_n)) = \alpha_1(t)$ y $lím(\alpha_2(s_{t_n})) = \alpha_2(r)$. Por lo tanto, $lím(\alpha_1(t_n) \cup \alpha_2(s_{t_n})) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(r)$ (Teorema 1.3) o, equivalentemente:

$$lím(g(t_n)) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(r) \tag{1.3}$$

Como $t_0 = \mu(g(t_n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $lím(\mu(g(t_n))) = \mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r))$, entonces se tiene que

$$\mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r)) = t_0.$$

Ahora bien, tenemos que $r \leq s_t$ o $s_t \leq r$ y, puesto que α_2 es un arco ordenado, se tiene que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r) \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t)$ o $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(r)$. Si ocurre que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r) \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t)$ entonces se tiene que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r) \subset g(t)$.

Puesto que $\mu(\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r)) = \mu(g(t))$, concluimos que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(r) = g(t)$. De la misma forma se tiene este último resultado si $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(r)$. Por lo tanto, de (1.3), se sigue que $lím(t_n) = g(t)$, con lo que concluimos que g es continua.

En segundo término, notamos que para toda $t \in I$ se tiene que $K = K \cup K \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) = g(t)$, de modo que $K \subset L$ para toda $L \in \operatorname{Im} g$.

Sabemos que $g([0,1])$ es un espacio de Hausdorff debido a que éste es un subespacio de $C(X)$, el cual es métrico. También se tiene que $g([0,1])$ es no degenerado (ya que $g(0) = B \neq A = g(1)$).

Ahora mostraremos que la función g es monótona y, puesto que $g([0,1])$ es un espacio Hausdorff y no degenerado, concluiremos que $g([0,1])$ es un arco (Teorema 1.21).

Para esto, primero mostraremos que si $g(t_1) = g(t_2)$, con t_1 y $t_2 \in [0,1]$, entonces se cumple que $g(t) = g(t_1)$ para toda $t \in [t_1, t_2]$. Sea $t \in [t_1, t_2]$, entonces se tiene que $\alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1}) = \alpha_1(t_2) \cup \alpha_2(s_{t_2})$. Además se tiene, por ser α_1 un arco ordenado, que $\alpha_1(t_1) \subset \alpha_1(t) \subset \alpha_1(t_2)$. Si $s_{t_1} \leq s_t$ entonces, por ser α_2 un arco ordenado, se tiene que $\alpha_2(s_{t_1}) \subset \alpha_2(s_t)$. De donde se sigue que $\alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1}) \subset \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t)$ y, puesto que los dos tienen el mismo tamaño (por definición de s_t y s_{t_1}, ver (1.1)), se concluye que

$$g(t_1) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1}) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) = g(t)$$

Entonces podemos suponer que $s_t < s_{t_1}$. Esto implica que $\alpha_2(s_t) \subset \alpha_2(s_{t_1})$. De lo cual se sigue que $\alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) \subset \alpha_1(t_2) \cup \alpha_2(s_{t_1}) \subset \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1}) \cup \alpha_2(s_{t_1}) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1})$. De donde se desprende nuevamente que

$$g(t) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(s_{t_1}) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(s_t) = g(t_1),$$

y, por lo tanto, hemos demostrado que $g(t) = g(t_1)$ para toda $t \in [t_1, t_2]$.

Ahora estamos listos para demostrar que g es una función monótona. Supongamos lo contrario. Entonces existe un elemento $A \in g([0,1])$ tal que $g^{-1}(A)$ no es conexo. Puesto que $g^{-1}(A)$ es compacto, existe un elemento mínimo t_1y un elemento máximo t_2 en este conjunto. Ya que $g^{-1}(A)$ es disconexo existe un elemento $t \in [t_1, t_2]$ tal que $t \notin g^{-1}(A)$. Por otro lado, puesto que $t \in [t_1, t_2]$, se sabe que $g(t) = g(t_1) = A$. Pero esto es una contradicción ya que $t \notin g^{-1}(A)$. Puesto que esta contradicción vino de suponer la no monotoneidad de g se concluye la afirmación. Por lo tanto, por lo que habíamos dicho antes, concluimos finalmente que $g([0,1])$ es un arco.

Con esto terminamos la prueba del teorema. $\square$

El siguiente resultado se obtiene fácilmente tomando arcos ordenados.

Teorema 1.23. Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y L un subcontinuo de X tal que $\mu(L) < t_0 < 1$. Entonces existe un subcontinuo M de X tal que $L \subset M$ y $\mu(M) = t_0$.

Definición 1.24. Un *arco estrictamente ordenado* es un arco ordenado tal que $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ siempre que $s < t$.

El siguiente teorema nos garantiza que siempre podemos obtener un arco estríctamente ordenado a partir de un arco ordenado dado.

Teorema 1.25. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Dado un arco ordenado α de A a B en $C(X)$, podemos encontrar un arco estrictamente ordenado de A a B.

Demostración. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de A a B, donde $A \subset B$, $A, B \in C(X)$ y $A \neq B$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $\gamma = \alpha([0,1]) \subset C(X)$. Dados C y $D \in \gamma$, existen s y $t \in [0,1]$ tales que $C = \alpha(s)$ y $D = \alpha(t)$. Entonces $C \subset D$ o $D \subset C$, dependiendo de si $s \leq t$ o $t \leq s$. Si $C \neq D$, entonces $C \subsetneq D$ o $D \subsetneq C$, de manera que $\mu(C) \neq \mu(D)$. Esto prueba que $\mu|\gamma : \gamma \to [0,1]$ es inyectiva. Ya que γ es un continuo, $\mu|\gamma$ es un homeomorfismo en su imagen, la cual tiene que ser de la forma $[a,b]$, con $a < b$. Dada $s \in [0,1]$, $A = \alpha(0) \subset \alpha(s) \subset \alpha(1) = B$, así que $\mu(A) \leq \mu(\alpha(s)) \leq \mu(B)$. Por tanto $\mu(A)$ es el mínimo y $\mu(B)$ es el máximo de $\mu(\gamma)$.

Definimos $\beta : [0,1] \to \gamma$ por $\beta(t) = (\mu|\gamma)^{-1}(a + t(b-a))$. Notemos que $\beta(0) = (\mu|\gamma)^{-1}(a) = A$ y $\beta(1) = (\mu|\gamma)^{-1}(b) = B$. Dados $s < t$ en $[0,1]$, $a + s(b-a) < a + t(b-a)$, así que $\mu(\beta(s)) = a + s(b-a) < a + t(b-a) = \mu(\beta(t))$. Ya que $\beta(s), \beta(t) \in \gamma$, debemos tener que $\beta(s) \subset \beta(t)$ o $\beta(t) \subset \beta(s)$ y, como $\mu(\beta(s)) < \mu(\beta(t))$, concluimos que $\beta(s) \subsetneq \beta(t)$. Por tanto β es un arco estrictamente ordenado de A a B. De esta forma terminamos la prueba del teorema. $\square$

Hacemos notar que en la prueba del anterior teorema no usamos esencialmente que el arco ordenado α ewstuviera contenido en $C(X)$, lo que nos lleva a decir que la misma demostración sirve para el hiperespacio 2^X.

Observación 1.26. En lo que resta del presente trabajo supondremos que todos los arcos ordenados son estrictamente ordenados.

Teorema 1.27. Sean X un continuo y μ una cualquier función de Whitney para $C(X)$, entonces se tiene lo siguiente:
(a) $\mu^{-1}(t)$ es un conjunto no degenerado para cada $0 \leq t < 1$,
(b) para toda $t \in [0,1]$, se tiene que $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$,
(c) para toda $A \in \mu^{-1}([t,1])$ se tiene que $\bigcup (C(A) \cap \mu^{-1}(t)) = A$.

Demostración. Probaremos (a). Si $t = 0$. Entonces, $\{p\} \in \mu^{-1}(t)$ para todo $p \in X$. Puesto que X no es degenerado, concluimos que $\mu^{-1}(t)$ tampoco lo es. Supongamos que $0 < t < 1$. Sea $A \in \mu^{-1}(t)$. Como $\mu(A) = t$, existe un elemento $x \in X \backslash A$. Por el Teorema 1.16 existe un arco β de $\{x\}$ a X. Debido a que $\{x\} \in C(X)$, β está contenido en $C(X)$. De manera que podemos considerar la función $\mu \circ \beta : C(X) \to [0,1]$. Por la continuidad tanto de μ como de β, $\mu \circ \beta$ es continua. Además observamos que $\mu(\beta(0)) = \mu(\{x\}) = 0$ y $\mu(\beta(1)) = \mu(X) = 1$. Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\beta(s)) = t$. Pero esto implica que $\beta(s) \in \mu^{-1}(t)$. Además, puesto que $x \in \beta(s) \backslash A$, concluimos que $\beta(s) \neq A$ y, por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ tiene al menos dos elementos.

Ahora mostraremos (b). Puesto que $\bigcup \mu^{-1}(t) \subset X$, es suficiente con demostrar que $X \subset \bigcup \mu^{-1}(t)$. Sea $x \in X$. Entonces, por el Teorema 1.16., existe un arco ordenado β de $\{x\}$ a X en 2^X. Consideremos ahora la función $\mu \circ \beta :\to [0,1]$. Por un argumento similar al del párrafo anterior se sigue la existencia de un valor $s \in [0,1]$ tal que $\beta(s) \in \mu^{-1}(t)$, y como $x \in \beta(s)$, concluimos que $x \in \bigcup \mu^{-1}(t)$. Con lo cual probamos que $\bigcup \mu^{-1}(t) = X$.

Por último, veremos el inciso (c). Supongamos que $A \in \mu^{-1}([t,1])$. Recordemos que esto implica que $\mu(A) \geq t$. Notemos que $C(A) \cap \mu^{-1}(t) = \{B \in C(X) : B \subset A \text{ y } \mu(B) = t\} = \{B \in C(A) : \mu(B) = t\} = (\mu|C(A))^{-1}(t)$. Por (b), $\bigcup(\mu|C(A))^{-1}(t) = A$. De manera que $\bigcup C(A) \cap \mu^{-1}(t) = A$. Con esto terminamos la prueba del teorema. $\square$

Conjuntos irreducibles.

Para terminar esta sección citamos un resultado que habla de la irreducibilidad en niveles de Whitney y el cual reultará vital para la demostración del Teorema 2.1.8.

Definición 1.28. Un continuo Z es irreducible si existen dos puntos p y $q \in Z$ tales que ningún subcontinuo propio de Z contiene a p y a q.

Teorema 1.29 ([22, Teorema 14.73.2]). Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ es irreducible para alguna $t_0 \in [0,1]$ entonces $\bigcup \mathcal{S} \neq X$ para todo subcontinuo propio $\mathcal{S}$ de $\mu^{-1}(t_0)$.

"... En algún lugar de la bahía de Nápoles se observó a un caracol marino común que llevaba adherido permanentemente a su superficie ventral, cerca de su boca, un pequeño parásito degenerado, en forma de medusa. El parásito adherido, aunque en apariencia tan especializado como para haber renunciado a vivir por sí mismo conservaba, sin embargo su aptitud reproductora, pues se encontraron abundantes descendientes suyos en ciertas estaciones del año. Estos descendientes viven libremente arrastrados a la deriva en las aguas superiores, crecen adecuada y sorprendentemente y, por último, se convierten en hermosas medusas normales completamente desarrolladas. Entre tanto, el gastrópodo produce larvas y éstas también crecen normalmente, aunque no por mucho tiempo. Mientras son aún pequeñísimas, las atrapan los tentáculos de las medusas, quien después las absorbe en su cuerpo en forma de sombrilla. A primera vista se creería que las medusas son entonces los depredadores, que vengan humillaciones anteriores, y que los caracoles son la presa. Pero no. Pronto, los caracoles indigeridos e insaciables, empiezan a comer, ramoneando primero en los conductos radiales, luego en el borde y, finalmente en los tentáculos, hasta reducir la sustancia de la medusa, poco a poco comida por el caracol, mientras que éste aumenta de tamaño correspondientemente. Al final la disposición regresa a la primera escena, con el nudibranquio completamente desarrollado sin que de la medusa haya quedado algo más que un redondeado resto venturosamente reducido, adherido a la piel del caracol, cerca de su boca."

La medusa y el caracol

Lewis Thomas

CAPÍTULO 2

HIPERESPACIOS LOCALMENTE PLANOS EN LA CÚSPIDE.

2.1. CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE NIVELES DE WHITNEY.

En esta sección veremos la relación entre la existencia de vecindades alrededor de X en $C(X)$, homeomorfas a un disco, y la existencia de niveles de Whitney homeomorfos a un intervalo o a un círculo.

Primero, damos la definición formal de lo que entenderemos por un hiperespacio localmente plano en la cúspide.

Definición 2.1.0. Sea X un continuo. Decimos que $C(X)$ *es localmente plano en la cúspide* si $C(X)$ contiene una vecindad $\mathcal{U}$ alrededor de X la cual es homeomorfa a una 2-celda.

Observación 2.1.1. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Para cada $t \in [0,1]$ consideremos la función $\sigma_{t,\mu} : C(\mu^{-1}(t)) \longrightarrow \mu^{-1}([t,1])$ definida como $\sigma_{t,\mu}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Es decir, $\sigma_{t,\mu}$ es la restricción de la función unión $\bigcup : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ al conjunto $C(\mu^{-1}(t))$. Por el Teorema 1.14. sabemos que $\bigcup$ es continua y, por tanto, $\sigma_{t,\mu}$ lo es. Por [22, Teorema 14.73.8.], sabemos que $\operatorname{Im}\sigma_{t,\mu} = \mu^{-1}([t,1])$.

Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos σ en lugar de $\sigma_{t,\mu}$. La figura 1 muestra un esquema de la función $\sigma_{t,\mu}$:

Lema 2.1.2. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un intervalo o a un círculo. Entonces para la función $\sigma = \sigma_{t,\mu}$ se cumple lo siguiente:
a) para todo $A \in \mu^{-1}([t,1))$, se tiene que $\sigma^{-1}(A) = \{\mu^{-1}(t) \cap C(A)\}$.
b) la función σ es inyectiva en $\mathfrak{A} = \sigma^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$. Es decir, σ es inyectiva en el conjunto de los elementos de $C(\mu^{-1}(t))$ cuya unión es diferente de X.

Demostración. A continuación mostraremos el inciso a).

Por el Teorema 1.27.(c), sabemos que $\sigma(\mu^{-1}(t) \cap C(A)) = A$ y, por lo tanto, $\mu^{-1}(t) \cap C(A) \in \sigma^{-1}(A)$. Mostraremos que $\mu^{-1}(t) \cap C(A)$ es el único elemento de $\mathfrak{A}$ que, bajo σ, va a dar a A. Supongamos que existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{A} = \sigma^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$ tal que $\sigma(\mathcal{A}) = A$. Mostraremos que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$, para lo cual consideramos dos casos:

i) $\mu(A) = t$.

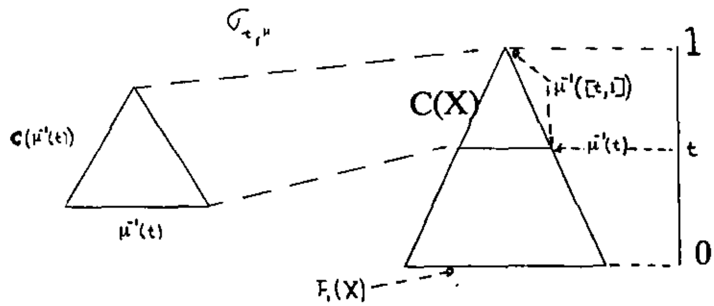

Figura 1

En este caso observamos que para cada $D \in \mathcal{A}$ se tiene que $D \subset \sigma(\mathcal{A}) = A$ y, puesto que $t \leq \mu(D) \leq \mu(A) = t$, concluimos que $D = A$. Lo anterior implica que $\mathcal{A} \subset \{A\}$. Por tanto $\mathcal{A} = \{A\} = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$.

ii) $\mu(A) > t$.

Hagamos $\mu_1 = \mu|C(A)$. Observamos que $\mu_1^{-1}(t) = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$. En primer lugar mostraremos que, para todo subcontinuo propio $\mathcal{S}$ de $\mu_1^{-1}(t)$, se tiene que $\sigma(\mathcal{S}) \neq A$. Puesto que μ_1 es una función de Whitney para $C(A)$ y $t < \mu(A)$ tenemos, por el Teorema 1.27.(a), que $\mu_1^{-1}(t) = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$ es un subcontinuo propio no degenerado de $\mu^{-1}(t)$ (ya que es un nivel de Whitney con respecto a μ_1). Por tanto, puesto que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un arco o a un círculo, $\mu_1^{-1}(t)$ es homeomorfo a un arco. De esto se sigue que $\mu_1^{-1}(t)$ es un subcontinuo irreducible. De acuerdo con el Teorema 1.29, esto implica que para todo subcontinuo propio $\mathcal{S}$ de $\mu_1^{-1}(t)$ se tiene que $\cup\mathcal{S} \neq A$.

Dada $D \in \mathcal{A}$, $D \subset \sigma(\mathcal{A}) = A$. De manera que $\mathcal{A} \subset \mu_1^{-1}(t)$. Por tanto $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu_1^{-1}(t)$ tal que $\sigma(\mathcal{A}) = A$, y como esto no lo puede hacer ningún subcontinuo propio, concluimos que $\mathcal{A} = \mu_1^{-1}(t)$.

De los incisos *i)* e *ii)*, llegamos a que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$. Concluyendo finalmente que $\sigma^{-1}(A) = \{\mu^{-1}(t) \cap C(A)\}$ para todo $A \in \mu^{-1}([t, 1))$.

Inciso b).

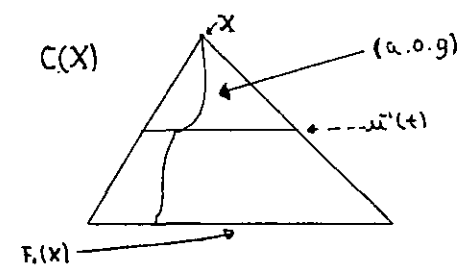

Figura 2

Sean $A \in \mu^{-1}([t,1))$ y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \in \mathfrak{A} = \sigma^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$ tales que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) = A$.

Por el inciso a) tenemos que $\sigma^{-1}(A) = \{\mu^{-1}(t) \cap C(A)\}$ y, por tanto, tenemos que

$\mathcal{A} = \mu^{-1}(t) \cap C(A) = \mathcal{B}$. Concluimos que σ es inyectiva en $\sigma^{-1}(\mu^{-1}([t,1)))$.

□

Antes de continuar con nuestra exposición, acordaremos con el lector que un *arco* significará un espacio homeomorfo al segmento [0.1] y un *círculo* significará una curva cerrada simple o un espacio homeomorfo al círculo unitario S^1.

Establecido el acuerdo anterior. probaremos que si algún nivel del hiperespacio $C(X)$ es un arco o un círculo entonces los niveles por "arriba" de éste heredan esta propiedad. Para tal propósito introducimos dos conceptos que sirven para decidir cuándo un subconjunto de $C(X)$ es un nivel de Whitney.

Definición 2.1.3. Un *arco ordenado grande (a.o.g.)* es un arco ordenado α en $C(X)$ tal que $\cap\alpha \in F_1(X)$ y $\cup\alpha = X$. (véase figura 2)

Definición 2.1.4. Un subconjunto $\mathcal{L}$ de $C(X)$ es una *anticadena* si dados A y B en $\mathcal{L}$, con $A \subset B$, entonces se tiene que $A = B$.

A. Illanes probó que si un subconjunto $\mathcal{L}$ de $C(X)-(\{X\}\cup F_1(X))$ es compacto, anticadena e intersecta a todo a.o.g. en $C(X)$ entonces es un nivel de Whitney para $C(X)$ ([14, Teorema 1.2]).

Teorema 2.1.5. Sea X un continuo tal que tiene un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t_0)$ el cual es un arco o un círculo para alguna $t_0 \in [0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un arco o un círculo, respectivamente, para toda $t \in (t_0, 1)$.

Demostración. Sea $t \in (t_0, 1)$. Hagamos $\mathfrak{M} = \sigma^{-1}(\mu^{-1}(t))$, donde $\sigma = \sigma_{t_0,\mu}$ fue definida en 2.1.1.

Por el Lema 2.1.2.(b) y puesto que $\mathfrak{M}$ es la imagen inversa de $\mu^{-1}(t)$ bajo σ, $\sigma|_{\mathfrak{M}}$ es un homeomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mu^{-1}(t)$ (ya que $\sigma|_{\mathfrak{M}}$ es una función continua y biyectiva del compacto $\mathfrak{M}$ en el espacio Hausdorff $\mu^{-1}(t)$, [25, Teorema 17.14]).

Utilizando el resultado que acabamos de mencionar de A. Illanes, mostraremos que $\mathfrak{M}$ es un nivel de Whitney de $C(\mu^{-1}(t_0))$. Puesto que los niveles de Whitney de $C(\mu^{-1}(t_0))$ son arcos o círculos [22, Teoremas 14.6 y 14.7], concluiremos que $\mathfrak{M}$ es un arco o un círculo y en consecuencia $\mu^{-1}(t)$ lo será.

Debido a que $t \in (t_0, 1)$ y a que $\sigma(\mu^{-1}(t_0)) = X$ y $\sigma(\{A\}) = A \in \mu^{-1}(t_0)$ para toda $A \in \mu^{-1}(t_0)$, tenemos que $\mathfrak{M}$ es un subconjunto de $C(\mu^{-1}(t_0))\backslash(\{\mu^{-1}(t_0)\} \cup F_1(\mu^{-1}(t_0)))$. A continuación demostraremos que $\mathfrak{M}$ es un subconjunto compacto, es una anticadena e intersecta a todo arco ordenado grande de $C(\mu^{-1}(t_0))$ y por tanto es un nivel de Whitney de éste.

En primer lugar probaremos que $\mathfrak{M}$ es una anticadena.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$. Sean $A = \sigma(\mathcal{A})$ y $B = \sigma(\mathcal{B})$. Entonces A y $B \in \mu^{-1}(t) \subset \mu^{-1}([t_0,1))$. Por el Lema 2.1.2.(a) tenemos que $\mathcal{A} \in \sigma^{-1}(A) = \{\mu^{-1}(t) \cap C(A)\}$ y $\mathcal{B} \in \sigma^{-1}(B) = \{\mu^{-1}(t) \cap C(B)\}$.

Por tanto $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$ y $\mathcal{B} = \mu^{-1}(t) \cap C(B)$. Supongamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. Es decir $A \subset B$. Puesto que A y $B \in \mu^{-1}(t)$ tenemos que $A = B$ y por tanto $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Con lo anterior queda probado que $\mathfrak{M}$ es una anticadena.

En seguida demostraremos que $\mathfrak{M}$ intersecta a cada arco ordenado grande (a.o.g.) de $C(\mu^{-1}(t_0))$.

Sea α un a.o.g. de $C(\mu^{-1}(t_0))$. Puesto que $\cap\alpha \in F_1(\mu^{-1}(t_0))$, entonces $\sigma(\cap\alpha) \in \mu^{-1}(t_0)$. Debido a que $\cup\alpha = \mu^{-1}(t_0)$, tenemos que $\sigma(\cup\alpha) = X$. De modo que $\mu(\sigma(\cap\alpha)) = t_0$ y $\mu(\sigma(\cup\alpha)) = 1$. Entonces, por la conexidad de α, existe $E \in \alpha$ tal que $\mu(\sigma(E))) = t$. Por tanto $E \in \sigma^{-1}(\mu^{-1}(t)) = \mathfrak{M}$. Con lo anterior concluimos que α intersecta a $\mathfrak{M}$.

Finalmente, puesto que $\mathfrak{M}$ es la imagen inversa bajo una función continua de un subconjunto cerrado, tenemos que $\mathfrak{M}$ es un cerrado de $C(\mu^{-1}(t_0))$ y, por tanto, compacto. De esta forma finalizamos la prueba del teorema. □

En lo que sigue desarrollaremos el modelo del hiperespacio del círculo S^1, el cual nos será de gran utilidad para probar que si el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X tiene un nivel de Whitney homeomorfo a un círculo entonces la parte del hiperespacio $C(X)$ que queda por "arriba" del nivel es homeomorfa al disco D.

Consideremos el círculo unitario S^1 centrado en el origen del plano Euclidiano. Se sabe que cada subcontinuo propio C de S^1 es un arco determinado por su punto medio m_C y su longitud $l(C)$, donde $0 \leq l(C) \leq 2\pi$. Sea D el disco unitario. Consideremos las coordenadas polares en el plano cartesiano. Entonces dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$, éste queda determinado por la pareja $(\alpha(p), r(p))$, donde $\alpha(p)$ es el ángulo que hay entre el eje polar y la línea que pasa por $\bar{o} = (0,0)$ y el punto p, y $r(p)$ denota la distancia entre $\bar{o}$ y p. Definimos la función $h : C(S^1) \to D$ dada por

$$h(C) = \begin{cases} \bar{o}, & \text{si } C = S^1 \\ (\alpha(m_C), 1 - l(C)/2\pi), & \text{si } C \neq S^1 \end{cases}$$

Se puede demostrar que h es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y D, lo cual nos dice que el disco unitario D es un modelo para el hiperespacio $C(S^1)$.

Lema 2.1.6. El homeomorfismo $h : C(S^1) \to D$ tiene las siguientes propiedades:

a) $h(F_1(S^1)) = S^1$,
b) para toda $\bar{p} \in D$ y todo par de números s y t, con $0 \leq s \leq t \leq 1$, se tiene que $h^{-1}(t\bar{p}) \subset h^{-1}(s\bar{p})$. (véase figura 3)

Demostración. Demostraremos el inciso a). Sea $\{\bar{p}\} \in F_1(S^1)$. Entonces se tiene que $h(\{\bar{p}\}) = (\alpha(\bar{p}), 1 - l(\{\bar{p}\})/2\pi) = (\alpha(\bar{p}), 1) \in S^1$ (ya que este elemento tiene longitud cero). Por lo tanto $h(F_1(S^1)) \subset S^1$. Sea $q \in S^1$. Entonces su forma polar es $q = (\alpha(q), r(q))$. Puesto que $q \in S^1$, se tiene que $r(q) = 1$. Consideremos el elemento $\{q\} \in F_1(S^1)$. $h(\{q\}) = (\alpha(m_{\{q\}}), 1 - l(\{q\})/2\pi)) = (\alpha(q), 1) = q$. Con esto demostramos que $S^1 \subset h(F_1(S^1))$ y, por lo tanto, que $h(F_1(S^1)) = S^1$.

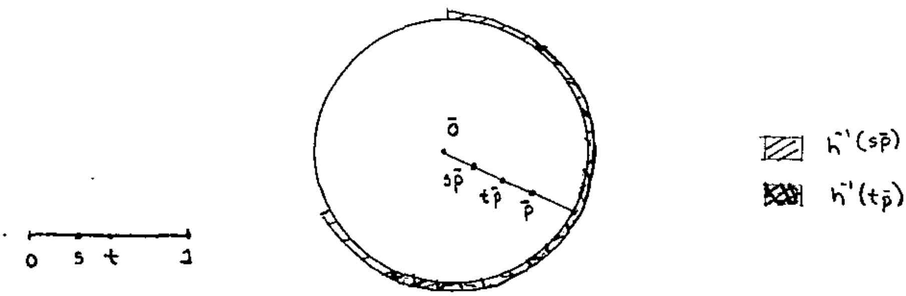

Figura 3

Para demostrar el inciso b) procedemos como sigue. Sea $\bar{p} \in D$ y tomamos un par de números s y t, con $0 \leq s \leq t \leq 1$. Si $\bar{p} = \bar{o}$ entonces se tiene que $s\bar{p} = t\bar{p} = \bar{o}$ y, por lo tanto, que $h^{-1}(t\bar{p}) = S^1 = h^{-1}(s\bar{p})$. De manera que podemos suponer que $\bar{p} \neq \bar{o}$.

Puesto que $0 \leq s \leq t \leq 1$, se tiene $0 \leq r(s\bar{p}) \leq r(t\bar{p}) \leq 1$. Además, puesto que h es una función suprayectiva, existen arcos propios C y C^* tales que $h(C) = (\alpha(s\bar{p}), r(s\bar{p}))$ y $h(C^*) = (\alpha(t\bar{p}), r(t\bar{p}))$. De lo anterior y de la definición de h, se tiene que $1 - l(C)/2\pi \leq 1 - l(C^*)/2\pi$ y, por lo tanto, que $l(C) \geq l(C^*)$. Puesto que $\alpha(s\bar{p}) = \alpha(t\bar{p})$, concluimos que $C^* \subset C$. Es decir, $h^{-1}(t\bar{p}) \subset h^{-1}(s\bar{p})$, que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 2.1.7. Sea X un continuo. Supongamos que el hiperespacio $C(X)$ tiene un nivel $\mu^{-1}(t)$ homeomorfo al círculo unitario S^1. Denotemos a este homeomorfismo por:

$$\varphi : \mu^{-1}(t) \to S^1$$

y sea

$$\varphi^* : C(\mu^{-1}(t)) \to C(S^1)$$

el homeomorfismo inducido por φ del hiperespacio $C(\mu^{-1}(t))$ al hiperespacio del círculo $C(S^1)$, el cual está definido como $\varphi^*(\mathcal{A}) = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{A}\}$ para cada $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}(t))$. Entonces, usando el homeomorfismo $h : C(S^1) \to D$, el cual se definió previo al Lema 2.1.6, obtenemos el homeomorfismo:

$$\phi = h \circ \varphi^* : C(\mu^{-1}(t)) \to D$$

que va del hiperespacio del nivel $\mu^{-1}(t)$ al disco unitario D.

Puesto que φ^* es un homeomorfismo tal que $\varphi^*(F_1(\mu^{-1}(t))) = F_1(S^1)$, mostraremos que ϕ conserva las propiedades del Lema 2.1.6. A saber:

a) $\phi(F_1(\mu^{-1}(t))) = S^1$,
b) para toda $\bar{p} \in D$ y todo par de números s y t, con $0 \leq s \leq t \leq 1$ se tiene que $\phi^{-1}(t\bar{p}) \subset \phi^{-1}(s\bar{p})$.

Para comprobar el inciso a), hacemos lo siguiente: aplicamos ϕ a $F_1(\mu^{-1}(t))$, a saber, $\phi(F_1(\mu^{-1}(t)) = h \circ \varphi^*(F_1(\mu^{-1}(t)) = h(\varphi^*(F_1(\mu^{-1}(t))) = h(F_1(S^1))$ (esta última igualdad se debe a que φ^* es un hemeomorfismo entre $C(\mu^{-1}(t))$ y $C(S^1)$). Como $h(F_1(S^1)) = S^1$, concluimos que $\phi(F_1(\mu^{-1}(t)) = S^1$. Para mostrar el inciso b), sean $\bar{p} \in D$ y s y t en $[0,1]$ (supondremos que s y t son mayores que cero, si alguno de los dos es cero el resultado se sigue inmediatamente). El inciso b) se obtiene fácilmente a partir de saber que si un conjunto contiene a otro entonces sus imágenes inversas bajo cualquier función preservan dicha contención.

En las páginas siguientes mostraremos que si $C(X)$ tiene un nivel homeomorfo a un intervalo o a un círculo entonces $C(X)$ es localmente plano en la cúspide (ver la Definición 2.1.0).

Teorema 2.1.8. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco. Entonces $\mu^{-1}([t,1])$ es homeomorfo al disco unitario D.

Demostración. Sea $\sigma = \sigma_{t,\mu}$ como se definió en 2.1.1. Por 2.1.1, sabemos que σ es un función continua de $C(\mu^{-1}(t))$ sobre $\mu^{-1}([t,1])$. Además, sabemos que σ es una función inyectiva en $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1))$ (Lema 2.1.2.(b)). Entonces basta demostrar que $\sigma^{-1}(X) = \{\mu^{-1}(t)\}$ para concluir que σ es inyectiva en todo $C(\mu^{-1}(t))$.

Por el Lema 1.27.(b), se tiene que $\sigma(\mu^{-1}(t)) = X$. Puesto que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un intervalo, $\mu^{-1}(t)$ es irreducible. Esto implica que para todo subcontinuo propio $\mathcal{S}$ de $\mu^{-1}(t)$ se tiene que $\sigma(\mathcal{S}) \neq X$ (Teorema 1.29). Lo anterior implica que para todo $\mathcal{S} \in C(\mu^{-1}(t)) \setminus \{\mu^{-1}(t)\}$ se tiene que $\sigma(\mathcal{S}) \neq X$ y, por lo tanto, concluimos que $\sigma^{-1}(X) = \{\mu^{-1}(t)\}$.

Entonces tenemos que σ es una función continua, sobre y inyectiva y, por lo tanto, σ es un homeomorfismo entre $C(\mu^{-1}(t))$ y $\mu^{-1}([t,1])$. Finalmente, como $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un intervalo, entonces $C(\mu^{-1}(t))$ es una 2-celda ([22, Ejemplo 0.54.]). De todo lo cual concluimos que $\mu^{-1}([t,1])$ también es una 2-celda. □

Teorema 2.1.9. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un círculo. Entonces $\mu^{-1}([t,1])$ es homeomorfo al disco unitario D.

Demostración. Sea $\mathfrak{D} = C(\mu^{-1}(t))$. De acuerdo con la Observación 2.1.7, existe un homeomorfismo $\phi : \mathfrak{D} \to D$, donde D es el disco unitario en $\mathbb{R}^2$, tal que $\phi(F_1(\mu^{-1}(t))) = S^1$, $\phi(\mu^{-1}(t)) = \bar{o}$ y si $\bar{p} \in D$ y $0 \leq s \leq r \leq 1$ entonces $\phi^{-1}(r\bar{p}) \subset \phi^{-1}(s\bar{p})$.

Definimos $\psi : \mathfrak{D} \to D$ por $\psi(\mathcal{A}) = \left(\frac{1-\mu(\sigma(\mathcal{A}))}{1-t}\right)\phi(\mathcal{A})$, para toda $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$, donde σ es la función unión restringida a $\mathfrak{D}$. Vamos a probar algunas propiedades de ψ :

(a) En efecto, el contradominio de ψ es D.

Si $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$ entonces $t \leq \mu(\sigma(\mathcal{A})) \leq 1$, así que $\psi(\mathcal{A})$ es un elemento de D multiplicado por un número entre 0 y 1, de manera que $\psi(\mathcal{A}) \in D$.

(b) ψ es continua.

Esto se sigue del hecho de que ψ es una función construida a partir del producto y composición de funciones continuas.

(c) $\psi^{-1}(\bar{o}) = \sigma^{-1}(X)$.

Dada $\mathcal{A} \in \psi^{-1}(\bar{o})$, $\left(\frac{1-\mu(\sigma(\mathcal{A}))}{1-t}\right)\phi(\mathcal{A}) = \bar{o}$, entonces $\mu(\sigma(\mathcal{A})) = 1$ o $\phi(\mathcal{A}) = \bar{o}$. De modo que $\sigma(\mathcal{A}) = X$ o $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$. En los dos casos $\mathcal{A} \in \sigma^{-1}(X)$. Ahora tomemos $\mathcal{A} \in \sigma^{-1}(X)$, entonces $\mu(\sigma(\mathcal{A})) = 1$, de manera que $\psi(\mathcal{A}) = \bar{o}$.

(d) si $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}\backslash\psi^{-1}(\bar{o})$ entonces $\psi^{-1}(\psi(\mathcal{A})) = \{\mathcal{A}\}$

Supongamos que $\mathcal{B} \in \psi^{-1}(\psi(\mathcal{A}))$ y que $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$. Sean $\bar{p} = \phi(\mathcal{A}), = \phi(\mathcal{B})$, $a = \frac{1-\mu(\sigma(\mathcal{A}))}{1-t}$ y $b = \frac{1-\mu(\sigma(\mathcal{B}))}{1-t}$. Entonces $a\bar{p} = b\bar{q}$. Si $a = 0$ entonces $\psi(\mathcal{A}) = \bar{o}$. Lo cual es contrario a lo que supusimos. Esto prueba que $a > 0$. Similarmente $b > 0$.

Entonces $\frac{a}{b}\bar{p} = \bar{q}$. Si $\bar{p} = \bar{q}$ entonces $\phi(\mathcal{A}) = \phi(\mathcal{B})$, de manera que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, lo cual es contrario a nuestra suposición. De manera que $\bar{p} \neq \bar{q}$. Si $a = b$, llegamos a que $\bar{p} = \bar{q}$, lo que es absurdo. Por tanto $a \neq b$.

Si $a < b$ entonces $-\mu(\sigma(\mathcal{A})) < -\mu(\sigma(\mathcal{B}))$ y $\mathcal{A} = \phi^{-1}(\bar{p}) \subset \phi^{-1}(\frac{a}{b}\bar{p}) = \phi^{-1}(\bar{q}) = \mathcal{B}$. De modo que $\mu(\sigma(\mathcal{B})) < \mu(\sigma(\mathcal{A}))$ y $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$ Lo cual es absurdo.

Si $b < a$ entonces $-\mu(\sigma(\mathcal{B})) < -\mu(\sigma(\mathcal{A}))$ y $\mathcal{B} = \phi^{-1}(\bar{q}) = \phi^{-1}(\frac{a}{b}\bar{p}) \subset \phi^{-1}(\bar{p}) = \mathcal{A}$. De modo que $\mu(\sigma(\mathcal{A})) < \mu(\sigma(\mathcal{B}))$ y $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Lo cual también es un absurdo.

Puesto que todo vino de suponer que $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ se concluye la afirmación.

(e) $\psi^{-1}(\bar{o}) \cap F_1(\mu^{-1}(t)) = \emptyset$.

Supongamos que existe $\mathcal{A} \in \psi^{-1}(\bar{o}) \cap F_1(\mu^{-1}(t))$. Entonces $\mathcal{A}$ es de la forma $\mathcal{A} = \{A\}$, donde $A \in \mu^{-1}(t)$. Entonces $\sigma(\mathcal{A}) = A \neq X$. Pero por (c) $\sigma(\mathcal{A}) = X$, lo que es absurdo. Con esto probamos el inciso (e).

(f) $\psi|F_1(\mu^{-1}(t)) : F_1(\mu^{-1}(t)) \to S^1$ es un homeomorfismo.

Dada $\mathcal{A} \in F_1(\mu^{-1}(t))$, existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $\mathcal{A} = \{A\}$. Entonces $\phi(\mathcal{A}) \in S^1$ y $\mu(\sigma(\mathcal{A})) = \mu(A) = t$. De manera que $\psi(\mathcal{A}) = \phi(\mathcal{A}) \in S^1$. Esto muestra que $\psi\left(F_1(\mu^{-1}(t))\right) \subset S^1$. Dada $\bar{p} \in S^1$, existe $\mathcal{A} \in F_1(\mu^{-1}(t))$ tal que $\phi(\mathcal{A}) = \bar{p}$. De modo que $\psi(\mathcal{A}) = \phi(\mathcal{A}) = \bar{p}$. Esto muestra que $S^1 \subset \psi\left(F_1(\mu^{-1}(t))\right)$. De lo cual se tiene que $\psi\left(F_1(\mu^{-1}(t))\right) = S^1$.

Dada $\mathcal{A} \in F_1(\mu^{-1}(t))$, por (e), $\mathcal{A} \notin \psi^{-1}(\bar{o})$. Por (d), $\psi^{-1}(\psi(\mathcal{A})) = \{\mathcal{A}\}$. De aquí que $\psi|F_1(\mu^{-1}(t))$ es inyectiva. Como $F_1(\mu^{-1}(t))$ es compacto, concluimos que $\psi|F_1(\mu^{-1}(t)) : F_1(\mu^{-1}(t)) \to S^1$ es un homeomorfismo.

(g) ψ es suprayectiva.

En la prueba de (f) vimos que, dada $\bar{p} \in S^1$, existe $\mathcal{A} \in F_1(\mu^{-1}(t))$ tal que $\psi(\mathcal{A}) = \phi(\mathcal{A}) = \bar{p}$. Entonces $\psi(\phi^{-1}(\bar{p})) = \{\bar{p}\}$, para toda $\bar{p} \in S^1$. De manera que $\psi \circ \phi^{-1} : D \to D$ es una función continua que es la identidad en S^1. Supongamos que ψ no es una función suprayectiva. Entonces existe un punto $\bar{q} \in D\backslash \operatorname{Im}(\psi)$. Esto implica, puesto que la imagen de ψ contiene a S^1 (inciso (f)), que $\bar{q} \notin S^1$. Entonces construimos la proyección radial. $g : D\backslash\{\bar{q}\} \to S^1$, la cual es una función continua y resulta ser la identidad en S^1. Entonces la función $g \circ \psi \circ \phi^{-1} : D \to D$ es una función bien definida, continua y es la identidad en S^1. Es decir, $g \circ \psi \circ \phi^{-1}$

es una retracción de D en S^1. Pero esto contradice el Teorema de Brouwer ([25, Teorema 34.5.]). Por lo tanto la función ψ es suprayectiva.

Ya tenemos las herramientas necesarias para probar la afirmación del teorema. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D} & \xrightarrow{\sigma} & \mu^{-1}([t,1]) \\ \psi \downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

Observamos que σ y ψ son funciones continuas, suprayectivas, con dominio compacto y cuyo respectivo contradominio es Hausdorff. Por tanto ambas son funciones cerradas y, en consecuencia, identificaciones.

A continuación veremos que cada una de las funciones σ y ψ preserva las fibras de la otra.

Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}$. Si $\sigma(\mathcal{A}) \neq X$, por el Lema 2.1.2.(b), $\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \{\mathcal{A}\}$. De manera que $\psi(\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A})))$ es un conjunto de un solo elemento $(\psi(\mathcal{A}))$. Si $\sigma(\mathcal{A}) = X$ entonces $\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma^{-1}(X)$. De donde se sigue, por el inciso (c), que $\psi(\sigma^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))) = \psi(\sigma^{-1}(X)) = \psi(\psi^{-1}(\bar{o})) = \{\bar{o}\}$, que también es un conjunto de un solo elemento. Por tanto ψ preserva las fibras de σ. La demostración de que σ preserva las fibras de ψ es similar y se puede hacer usando los incisos (c) y (d).

Por el Teorema de la Transgresión ([8, Teorema 3.2., pág. 123]), la función $h : D \to \mu^{-1}([t_0, 1])$, dada por $h(\bar{p})$ = el único punto en $\sigma(\psi^{-1}(\bar{p}))$ es continua. De la misma manera, la función $f : \mu^{-1}([t_0, 1]) \to D$, dada por $f(\mathcal{A})$ = el único punto en $\psi(\sigma^{-1}(\mathcal{A}))$, es continua. Entonces, dada $\bar{p} \in D$, $f(h(\bar{p}))$ es el único punto en $\psi(\sigma^{-1}(\sigma(\psi^{-1}(\bar{p})))) \supset \psi(\psi^{-1}(\bar{p})) = \{\bar{p}\}$. Esto muestra que $f \circ h$ es la identidad en D. Similarmente $h \circ f$ es la identidad en $\mu^{-1}([t_0, 1])$. Por tanto h y f son homeomorfismos.

De todo lo anterior concluimos que D es homeomorfo a $\mu^{-1}([t_0, 1]$. $\square$

Corolario 2.1.10. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco un círculo. Entonces $\mu^{-1}([t,1])$ es homeomorfo al disco unitario D.

Más adelante veremos que la implicación inversa a la del Corolario 2.1.10. es cierta. Antes de esto, estudiaremos condiciones a partir de las cuales podamos inferir que el hiperespacio $C(X)$ del continuo X es localmente plano.

2.2. CARACTERIZACIÓN COMBINATORIA.

El resultado principal de esta sección tiene que ver con las propiedades combinatorias que debe tener el continuo X para que su hiperespacio tenga una vecindad homeomorfa a una 2-celda alrededor de la cúspide (ver pág. 2).

Un concepto que juega un papel importante en el análisis siguiente es el de terminalidad, por lo que daremos su definición formal.

Definición 2.2.0. Sean A y B dos subcontinuos de un continuo X tales que $A \subset B$. Entonces *A es terminal con respecto a B* si para cualquier par de subconjuntos K y L de B, tales que $A \subset K$ y $A \subset L$, entonces se tiene que $L \subset K$ o $K \subset L$.

A continuación describimos las propiedades combinatorias que requerimos de un continuo X para que su hiperespacio sea localmente plano en su cúspide. La siguiente definición fue dada por Krasinkiewicz y Nadler en [18, Teorema 5.3]. En ese artículo ellos probaron que para un continuo pseudolineal, todos los niveles de Whitney, cuyos elementos tienen medida cercana a la del continuo, son arcos.

Definición 2.2.1. Un continuo X *es pseudolineal* si existen dos subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que:

A) $X = X_1 \cup X_2$,
B) $Y = X_1 \cap X_2$ es un subcontinuo de X,
C) Y es terminal con respecto a X_1 y X_2,
D) para todo subcontinuo L de X tal que $L \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $L \backslash X_2 \neq \emptyset$, se cumple que $Y \subset L$.

En las figuras 4 y 5 se muestran dos ejemplos de espacios pseudolineales.

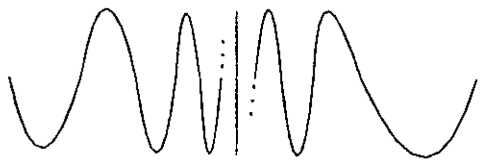

Figura 4

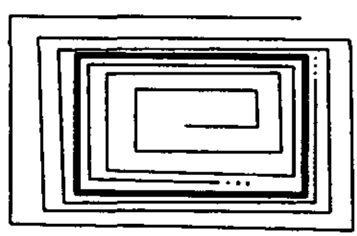

Figura 5

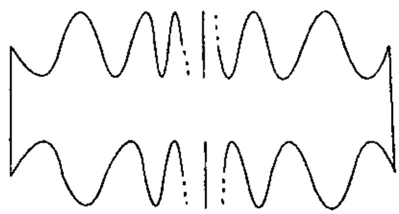

Figura 6

Definición 2.2.2. Un continuo X es *pseudocircular* si existen dos subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que:

A) $X = X_1 \cup X_2$,
B) $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes K_1 y K_2,
C) las componentes K_1 y K_2 son terminales con respecto a los subcontinuos X_1 y X_2,
D) $Fr(X_1) = Fr(X_2) = K_1 \cup K_2$,
E) para todo subcontinuo L de X tal que $L \cap K_1 \neq \emptyset$ y $L \cap K_2 \neq \emptyset$, se tiene que $X_1 \subset L$ o $X_2 \subset L$,
F) existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo subcontinuo L de X tal que $X \subset N(\varepsilon, L)$, se tiene que $K_1 \subset L$ o $K_2 \subset L$.

En las figuras 6 y 7 se muestran dos ejemplos de espacios pseudocirculares.

En las páginas siguientes estableceremos los resultados necesarios para mostrar que si un continuo X es pseudolineal o pseudocircular entonces su hiperespacio $C(X)$ tiene un nivel que es un segmento o un círculo. De donde se seguirá, por el

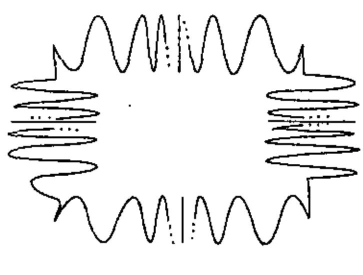

Figura 7

Corolario 2.1.10 de la sección anterior, que $C(X)$ tiene una vecindad homeomorfa a un disco.

Espacios pseudocirculares

Primero analizaremos el caso cuando X es pseudocircular, para lo cual empezamos demostrando algunos lemas que serán de utilidad.

Lema 2.2.3. Sean X un continuo pseudocircular y X_1, X_2, K_1 y K_2 como en la Definición 2.2.2. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $m'x\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} < t < \mu(X)$. Entonces existen subcontinuos únicos L_1 y L_2 de X tales que:

a) $K_1 \subset L_1 \subset X_2$, $K_2 \subset L_2 \subset X_1$,
b) $\mu(Y_1) = t = \mu(Y_2)$, donde $Y_1 = X_1 \cup L_1$ y $Y_2 = X_2 \cup L_2$,
c) $Y_1 \neq Y_2$,
d) $L_1 \cap K_2 = \emptyset$, $L_2 \cap K_1 = \emptyset$,
e) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$,
f) $Y_1 \cap Y_2 = L_1 \cup L_2$,

g) si $M \in C(X)$ es tal que $M \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $M \backslash X_2 \neq \emptyset$ entonces se cumple que

$$\emptyset \neq Fr_M(M \cap X_1) \subset Fr(X_1)$$

y

$$\emptyset \neq Fr_M(M \cap X_2) \subset Fr(X_2),$$

h) $Fr(Y_1) \subset K_2 \cup L_1$ y $Fr(Y_2) \subset K_1 \cup L_2$.
i) $\mu^{-1}(t)$ contiene un círculo.

Demostración. Construiremos L_1, la construcción de L_2 es similar.

Puesto que K_1 es un subcontinuo propio de X_2, existe un arco ordenado α_1 de K_1 a X_2 (Teorema 1.16). Consideremos la función $h : [0,1] \to C(X)$, definida por $h(s) = X_1 \cup \alpha_1(s)$, para $s \in [0,1]$.

En efecto, debido a que $h(0) = X_1 \cup \alpha_1(0) = X_1 \cup K_1 = X_1 \in C(X)$, la imagen de h, está contenida en $C(X)$ (Teorema 1.19). Por el Teorema 1.4, h resulta ser continua. De lo cual se sigue que la función $g = \mu \circ h : [0,1] \to [0,1]$ es continua.

Al evaluar la función g en 0 y 1 observamos que

$$g(0) = \mu(h(0)) = \mu(X_1 \cup \alpha_1(0)) = \mu(X_1 \cup K_1) = \mu(X_1),$$
$$g(1) = \mu(h(1)) = \mu(X_1 \cup \alpha_1(1)) = \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X).$$

Puesto que $\mu(X_1) < t < \mu(X)$, existe un valor $s_1 \in (0,1)$ tal que $g(s_1) = t$ (Teorema del Valor Intermedio). Es decir, existe $s_1 \in (0,1)$ tal que $\mu(h(s_1)) = t$. Hagamos $L_1 = \alpha_1(s_1)$ y sea $Y_1 = h(s_1) = X_1 \cup L_1$. Por la forma en que está definida h, Y_1 resulta ser un subcontinuo de X. Además se tiene que $\mu(Y_1) = \mu(h(s_1)) = t$. De manera similar se obtienen los subcontinuos L_2 y $Y_2 = X_2 \cup L_2$. Mostraremos que L_1, Y_1, L_2 y Y_2 satisfacen las propiedades requeridas.

a) Por construcción, se tienen las contenciones $K_1 \subset L_1 \subset X_2$ y $K_2 \subset L_2 \subset X_1$.

b) También por construcción, tenemos que $Y_1 = X_1 \cup L_1$, $Y_2 = X_2 \cup L_2$ y $\mu(Y_1) = \mu(Y_2) = t$.

c) A continuación demostraremos que $Y_1 \neq Y_2$.

Supongamos que ocurre lo contrario. Esto implica que $X_1 \cup L_1 \subset X_2 \cup L_2$. Sea $x \in X_1 \backslash X_2$. Por la contención anterior, tenemos que $x \in L_2$. De donde se sigue que $X_1 \backslash X_2 \subset L_2$ y, por lo tanto, que $X = X_1 \cup X_2 = (X_1 \backslash X_2) \cup X_2 \subset L_2 \cup X_2 = Y_2$. Lo que implica finalmente que $t < \mu(X) = \mu(Y_2) = t$, que es evidentemente un absurdo. Este absurdo muestra que $Y_1 \neq Y_2$.

d) $L_1 \cap K_2 = \emptyset$, $L_2 \cap K_1 = \emptyset$.

Supongamos que $L_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Esto implica, debido a que $K_1 \subset L_1$, que $X_1 \subset L_1$ o $X_2 \subset L_1$ (Definición 2.2.2.(E)). Puesto que $L_1 \subset X_2$ y $X_1 \backslash X_2 \neq \emptyset$, tenemos que la contención $X_1 \subset L_1$ no ocurre. Por lo tanto, tenemos que $X_2 \subset L_1$. Además, sabemos que $L_1 \subset X_2$, de donde se concluye que $X_2 = L_1$. Pero esto implica que $Y_1 = X_1 \cup L_1 = X_1 \cup X_2 = X$. Así que $t = \mu(Y_1) = \mu(X_1) > t$. Lo cual es un contradicción. Por lo tanto, concluimos que $L_1 \cap K_2 = \emptyset$. De manera similar se prueba que $L_2 \cap K_1 = \emptyset$.

e) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Supongamos lo contrario, y hagamos $N = L_1 \cup L_2$. Como K_1 y K_2 están contenidos en N, por 2.2.2.(E), tenemos que $X_1 \subset N$ o $X_2 \subset N$. Supongamos que $X_1 \subset N = L_1 \cup L_2$. Entonces, puesto que $X_1 \cap L_1 = K_1$ (ya que $X_1 \cap L_1 \subset X_1 \cap X_2 = K_1 \cup K_2$ y $L_1 \cap K_2 = \emptyset$), tenemos que $X_1 \subset K_1 \cup L_2$. Pero $K_1 \cup L_2 \subset X_1$, lo que nos lleva a que $X_1 = K_1 \cup L_2$. Puesto que $K_1 \cap L_2 = \emptyset$, concluimos que X_1 es disconexo, lo cual contradice el que X_1 es un subcontinuo de X. De manera similar se prueba que $X_2 \subset N$ tampoco puede suceder. Por lo tanto, concluimos que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

f) $Y_1 \cap Y_2 = L_1 \cup L_2$.

Para demostrar lo anterior fijémonos en las siguientes identidades.

$$
\begin{aligned}
Y_1 \cap Y_2 &= (X_1 \cup L_1) \cap (X_2 \cup L_2) \\
&= (X_1 \cap X_2) \cup (L_1 \cap X_2) \\
&\qquad\qquad \cup \\
&\quad\; (X_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_2) \\
&= (K_1 \cup K_2 \cup L_1) \cup [L_2 \cup \emptyset] \text{(inciso e)} \\
&= L_1 \cup L_2
\end{aligned}
$$

Con lo anterior probamos, además, que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$.

g) Sea $M \in C(X)$ tal que $M \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $M \backslash X_2 \neq \emptyset$. Entonces $\emptyset \neq Fr_M(M \cap X_1) \subset Fr(X_1)$ y $\emptyset \neq Fr_M(M \cap X_2) \subset Fr(X_2)$.

Puesto que $M \backslash X_1 \neq \emptyset$, se tiene que $M \cap X_1 \neq M$ y, por tanto, que

$Fr_M(M \cap X_1) \neq \emptyset$ (si $Fr_M(M \cap X_1) = \emptyset$, entonces $M \cap X_1$ resultaría ser un subconjunto abierto y cerrado de M, el cual es conexo y, por lo tanto, llegaríamos a que $M \cap X_1 = \emptyset$ o $M \cap X_1 = M$, contradiciendo el que $M \backslash X_2 \neq \emptyset$ en el primer caso y el que $M \cap X_1 \neq M$ en el segundo caso).

La demostración de que $Fr_M(M \cap X_1) \subset Fr(X_1)$ es válida en general. Es decir, es cierta para cualesquiera subconjuntos M y X_1 de un espacio topológico y es fácil de demostrar.

h) $Fr(Y_1) \subset K_2 \cup L_1$, $Fr(Y_2) \subset K_1 \cup L_2$.

Probaremos la primera contención, la segunda se prueba de manera similar.

Se sabe que $Fr(Y_1) = Fr(X_1 \cup L_1) \subset Fr(X_1) \cup Fr(L_1)$. Pero $Fr(X_1) \cup Fr(L_1) \subset K_1 \cup K_2 \cup L_1 = K_2 \cup L_1$. Por lo tanto $Fr(Y_1) \subset K_2 \cup L_1$.

i) $\mu^{-1}(t)$ contiene un círculo.

Por los incisos c) y f) se tiene que $Y_1 \neq Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Entonces existen arcos β_1 y β_2 contenidos en $\mu^{-1}(t) \cap C(Y_1 \cup Y_2)$ de Y_1 a Y_2 y de Y_2 a Y_1, respectivamente, tales que $L_1 \subset N$ para toda $N \in \beta_1$ y $L_2 \subset M$ para toda $M \in \beta_2$ (Teorema 1.22).

En seguida probaremos que β_1 y β_2 coinciden sólo en sus extremos y, puesto que β_1 y β_2 son arcos, concluiremos que $\beta_1 \cup \beta_2$ es un círculo en $\mu^{-1}(t)$.

Por lo que convenimos en la definición de arco (Definición 1.15.), pensemos a β_1 y β_2 como funciones inyectivas de $[0,1]$ en $\mu^{-1}(t) \cap C(Y_1 \cup Y_2)$.

Sean s_0 y $r_0 \in [0,1]$ tales que $\beta_1(s_0) \neq Y_1, \beta_1(s_0) \neq Y_2$, $\beta_2(r_0) \neq Y_1$ y $\beta_2(r_0) \neq Y_2$. Supongamos que $\beta_1(s_0) = \beta_2(r_0)$. De esta suposición y de las propiedades de β_1 y β_2, tenemos que $L_1 \cup L_2 \subset \beta_1(s_0)$. Esto implica que $K_1 \cap \beta_1(s_0) \neq \emptyset$ y que $K_2 \cap \beta_1(s_0) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, que $X_1 \subset \beta_1(s_0)$ o $X_2 \subset \beta_1(s_0)$ (2.2.2.E). Si $X_1 \subset \beta_1(s_0)$ entonces tenemos que $Y_1 = X_1 \cup L_1 \subset \beta_1(s_0)$. Puesto que Y_1 y $\beta_1(s_0) \in \mu^{-1}(t)$, lo anterior implica que $Y_1 = \beta_1(s_0)$. Pero esto contradice la elección de s_0. Por lo tanto $X_1 \not\subseteq \beta_1(s_0)$. Entonces $X_2 \subset \beta_1(s_0)$, así que $Y_2 = X_2 \cup L_2 \subset \beta_1(s_0)$. Esto implica que $Y_2 = \beta_1(s_0)$, contradiciendo nuevamente la elección de s_0. De lo anterior concluimos que $\beta_1(s) \neq \beta_2(r)$ para todo par de números s y $r \in [0,1]$ tales que $\beta_1(s) \neq Y_1, Y_2$ y $\beta_2(r) \neq Y_1, Y_2$. Con lo que concluimos, finalmente, que $\beta_1 \cup \beta_2$ es un círculo en $\mu^{-1}(t)$. De esta forma terminamos la prueba del inciso i).

Sólo resta demostrar que L_1 y L_2 son únicos. Supongamos que existen subcontinuos N_1 y N_2 de X que satisfacen las propiedades enlistadas anteriormente. En particular N_1 y N_2 satisfacen los incisos a) y b), lo que implica que $K_1 \subset N_1 \subset X_2$, $K_2 \subset N_2 \subset X_1$ y $Z_1 = X_1 \cup N_1$, $Z_2 = X_2 \cup N_2$, con $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = t$. Probaremos que $Y_1 = Z_1$, la demostración de que $Y_2 = Z_2$ es similar. Puesto que $K_1 \subset N_1 \subset X_2$ y K_1 es terminal con respecto a X_2, se tiene que $L_1 \subset N_1$ o $N_1 \subset L_1$. Esto implica a su vez que $Y_1 = X_1 \cup L_1 \subset X_1 \cup N_1 = Z_1$ o que $Z_1 = X_1 \cup N_1 \subset X_1 \cup L_1 = Y_1$. Puesto que $\mu(Z_1) = \mu(Y_1) = t$, cualquiera de las dos contenciones anteriores implica que $Y_1 = Z_1$.

De lo anterior y el inciso f), llegamos a que $L_1 \cup L_2 = Y_1 \cap Y_2 = N_1 \cup N_2$. Puesto que $L_1 \cap N_1 \neq \emptyset$, $L_2 \cap N_2 \neq \emptyset$ y $L_1 \cap L_2 = N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (inciso e)), la conexidad de L_1, L_2, N_1 y N_2 implica que $N_1 = L_1$ y $N_2 = L_2$. Con esto terminamos la prueba del lema. □

A continuación demostraremos un lema técnico que nos será de utilidad en la discusión de los siguientes resultados.

Lema 2.2.4. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t) \subset B_\varepsilon^H(X)$, para toda $t \in [t_0, 1]$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.13 existe $\delta > 0$ tal que si A y $B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$. Sea $t_0 \in (0,1)$ tal que $|1 - t_0| < \delta$. Sea $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Puesto que $B \subset X$ y $|\mu(B) - \mu(X)| = |t_0 - 1| < \delta$, se tiene que $H(B, X) < \varepsilon$ y, por tanto, que $B \in B_\varepsilon^H(X)$. Como B fue un elemento arbitrario de $\mu^{-1}(t_0)$ concluimos que $\mu^{-1}(t_0) \subset B_\varepsilon^H(X)$. Finalmente, ya que para toda $t \in [t_0, 1]$ se cumple $|1 - t| \leq |1 - t_0| < \delta$, se concluye, en forma similar, que $\mu^{-1}(t) \subset B_\varepsilon^H(X)$ para toda $t \in [t_0, 1]$. Con esto finalizamos la prueba del lema. □

Convención 2.2.5. En la exposición de los siguientes resultados, supondremos que X es pseudocircular y que se tiene una función de Whitney μ para $C(X)$. Se tomarán los subcontinuos X_1, X_2, K_1 y K_2 de X como en la definición 2.2.2. Consideraremos un número real t_1 tal que $m\acute{} x\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} < t_1 < 1$. Fijemos $t^* \in (t_1, 1)$. Tomaremos a los subcontinuos Y_1, L_1, Y_2 y L_2 como en el Lema 2.2.3 para t^*.

Con esto en mente, establecemos los siguientes resultados.

Lema 2.2.6. Sea X un continuo pseudocircular. Entonces existe $t^* \in (0,1)$, con $t_1 \leq t^*$ tal que para toda $M \in \mu^{-1}(t^*)$ se cumple que $M \cap Y_1$ y $M \cap Y_2$ tienen a lo más dos componentes. Además, $M \cap X_1$ y $M \cap X_2$ tienen a lo más dos componentes. En el caso en que $M \cap X_i$, $(i = 1, 2)$ tenga dos componentes, una de ellas contiene a K_1 y la otra a K_2.

Demostración. Sea ε como en 2.2.2.(F) Por el Lema 2.2.4 existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t) \subset B_\varepsilon^H(X)$ para toda $t \in [t_0, 1]$. Sea $t^* \in [t_0, 1]$ tal que $t_1 \leq t^*$. Mostraremos que t^* cumple lo que se pide.

Sea $M \in \mu^{-1}(t^*)$. En primer lugar, mostraremos que $M \cap X_1$ y $M \cap X_2$ tienen a lo más dos componentes. Específicamente, demostraremos que $M \cap X_1$ tiene a lo más dos componentes, la prueba para $M \cap X_2$ es similar.

Puesto que $M \in B_\varepsilon^H(X)$, tenemos que $K_1 \subset M$ o $K_2 \subset M$ (2.2.2.(F)). Supongamos que $K_1 \subset M$. Entonces K_1 es un subconjunto conexo de $M \cap X_1$. De manera que existe una componente L de $M \cap X_1$ tal que $K_1 \subset L$.

A continuación mostraremos que $M \cap X_1$ tiene a lo más dos componentes. Podemos suponer que $M \cap X_1 \neq X_1$ (si $M \cap X_1 = X_1$ entonces $M \cap X_1$ tendría una sola componente y, por lo tanto, habríamos terminado).

Para mostrar que $M \cap X_1$ tiene a lo más dos componentes bastará probar que si N es una componente de $M \cap X_1$ y $N \neq L$ entonces $K_2 \subset N$.

Sea N una componente de $M \cap X_1$ diferente de L. Primero mostraremos que N intersecta a la frontera de X_1. Efectivamente, puesto que $M \backslash X_2 \neq \emptyset$ (ya que $t^* > m'x\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$), se tiene que $M \cap X_1 \neq X_1$ y $M \cap X_1 \neq \emptyset$ y, por lo tanto, que $Fr_M(M \cap X_1) \neq \emptyset$. Ya que $M \cap X_1$ es un conjunto cerrado, se sigue del Teorema 1.10 que $N \cap (Fr_M(M \cap X_1)) \neq \emptyset$. Puesto que $Fr_M(M \cap X_1) \subset Fr(X_1)$ (Lema 2.2.3.g), concluimos que $N \cap Fr(X_1) \neq \emptyset$.

Debido a que $Fr(X_1) = K_1 \cup K_2$ (2.2.2.D) y $K_1 \subset L$, lo anterior implica que $N \cap K_2 \neq \emptyset$. Como L y $N \subset M$, llegamos a que $X_1 \subset M$ o $X_2 \subset M$ (2.2.2.(E)). En particular $K_2 \subset M$. Por tanto K_2 es un subconjunto conexo de $X_1 \cap M$ que intersecta a N, esto implica que $K_2 \subset N$.

De lo anterior concluimos que $X_1 \cap M$ tiene a lo más dos componentes.

De la discusión anterior se desprende que si L y N son dos componentes diferentes de $M \cap X_1$ entonces una de ellas contiene a K_1 y la otra a K_2.

Ahora demostraremos que $M \cap Y_1$ y $M \cap Y_2$ tienen a lo más dos componentes. Como en el caso anterior, sólo demostraremos que $M \cap Y_1$ tiene a lo más dos componentes. Una prueba similar se puede hacer para $M \cap Y_2$.

Si $M \subset Y_1$ entonces $M \cap Y_1 = M$ tiene sólo una componente. Podemos suponer entonces que $M \not\subset Y_1$.

De la elección de t^* y ε podemos suponer que $K_i \subset M$ para alguna $i \in \{1, 2\}$ y, puesto que $K_i \subset Y_1$, llegamos a que $K_i \subset M \cap Y_1$. Esto implica que existe una componente Q de $M \cap Y_1$ tal que $K_i \subset Q$.

Supongamos que $M \cap Y_1$ tiene más de dos componentes. Sean N y R dos componentes de $M \cap Y_1$ diferentes de Q. Puesto que $M \cap Y_1$ es un subconjunto propio de M, tenemos que $\emptyset \neq N \cap Fr_M(M \cap Y_1) \subset N \cap Fr(Y_1)$ (Teorema 1.10). Por tanto $N \cap Fr(Y_1) \neq \emptyset$. Similarmente $R \cap Fr(Y_1) \neq \emptyset$.

Recordemos que $Fr(Y_1) \subset K_2 \cup L_1$ (Lema 2.2.3.(h)). Si $N \cap K_j \neq \emptyset$, con $j \neq i$, entonces $M \cap X_1 \subset M \cap Y_1$ y $M \cap X_1$ intersecta a las componentes Q y N de $M \cap Y_1$. Esto implica que $M \cap X_1$ tiene dos componentes Q_1 y N_1 tales que $Q_1 \subset Q$ y $N_1 \subset N$. Por lo que vimos antes $K_i \subset Q_1$ y $K_j \subset N_1$. Hemos probado, por consiguiente, que si $N \cap K_j \neq \emptyset$, entonces $K_j \subset N$. Por tanto alguno de los conjuntos N o R no intersecta a K_j.

Entonces sólo tenemos que analizar los siguientes casos:

a) $K_1 \subset Q$, $K_2 \subset N$ y $R \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$,
b) $K_1 \subset Q$, $N \cap K_2 = \emptyset$, $R \cap K_2 = \emptyset$, $N \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$ y $R \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$,
c) $K_2 \subset Q$, $N \cap K_1 = \emptyset$, $R \cap K_1 = \emptyset$, $N \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$ y $R \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$,

Analicemos la primera situación.

Puesto que $N \cap K_2 \neq \emptyset$, se sigue que $M \cap K_2 \neq \emptyset$. Lo cual significa, por 2.2.2.(E), que $X_1 \subset M$ o $X_2 \subset M$. Si $X_1 \subset M$ entonces $X_1 \subset M \cap Y_1$. Lo que significa que X_1 está contenido en una componente de $M \cap Y_1$. Pero $\emptyset \neq K_1 \subset X_1 \cap Q$ y $\emptyset \neq N \cap K_2 \subset N \cap X_1$. Así que $N = Q$. Pero esto contradice el que Q y N eran componentes diferentes de $M \cap Y_1$. Supongamos, entonces, que $X_2 \subset M$. En particular se tiene que $L_1 \subset M$ y, por tanto, que $L_1 \subset M \cap Y_1$. Puesto que L_1 es conexo, debe existir una componente C, de $M \cap Y_1$, tal que $L_1 \subset C$. Como $K_1 \subset Q$ y $K_1 \subset L_1$, se sigue $Q = C$. Por otro lado, sabemos que $R \cap (L_1 \backslash K_1) \neq \emptyset$, de lo cual se sigue que $R \cap C \neq \emptyset$. De donde concluimos que $R = C = Q$, que contradice el hecho de que R y Q eran componentes diferentes de $M \cap Y_1$. Por lo tanto , esta posibilidad no puede suceder.

Analicemos la segunda y tercera posibilidades al mismo tiempo. Sean γ_1 y γ_2 arcos ordenados de N a M y de R a M, respectivamente. Debido a que N y R son cerrados ajenos, existen valores r_0,$s_0 \in (0,1]$ tales que $\gamma_1(r_0) \cap \gamma_2(s_0) = \emptyset$.

Mostraremos que, a partir de $\gamma_1(r_0)$ y $\gamma_2(s_0)$, podemos construir dos subcontinuos de X_2 que contienen a K_2 pero que no son comparables, lo cual estará en contradicción con 2.2.2.(C). Para tal fin mostraremos, en primer lugar, que $\gamma_1(t) \backslash L_1 \neq \emptyset$ y $\gamma_2(s) \backslash L_1 \neq \emptyset$ para cualesquiera $t, s \in (0,1]$. Probaremos que $\gamma_1(t) \backslash L_1 \neq \emptyset$ (la prueba de que $\gamma_2(s) \backslash L_1 \neq \emptyset$ es similar).

Supongamos que existe $t \in (0,1]$ tal que $\gamma_1(t) \backslash L_1 = \emptyset$. Esto implica que $\gamma_1(t) \subset L_1 \subset Y_1$. Debido a que $\gamma_1(t) \subset M$, se sigue que $\gamma_1(t) \subset Y_1 \cap M$. Puesto que $\gamma_1(t)$ es conexo y $N \subset \gamma_1(t)$, se sigue que $N = \gamma_1(t)$ Pero esto contradice el hecho de que γ_1 es estrictamente ordenado. De donde concluimos que $\gamma_1(t)\backslash L_1 \neq \emptyset$ para toda $t \in (0,1]$.

Ahora, ya que $N \cap (K_1 \cup K_2) = \emptyset$ y $R \cap (K_1 \cup K_2) = \emptyset$, N y $R \subset X_2 \backslash X_1$, podemos encontrar r_2 y $s_2 \in (0,1]$ suficientemente pequeñas tales que $\gamma_1(r_2)$ y $\gamma_2(s_2) \subset X_2$. Hagamos $r = mín\,\{r_0, s_0, r_2, s_2\}$. Entonces, debido a que $\gamma_1(r) \cap \gamma_2(r) = \emptyset, \gamma_1(r)\backslash L_1 \neq \emptyset$, $\gamma_2(r)\backslash L_1 \neq \emptyset$ y $\gamma_1(t_2)$ y $\gamma_2(s_2) \subset X_2$, podemos concluir que $\gamma_1(r) \cup L_1$ y $\gamma_2(r) \cup L_1$ son dos subcontinuos propios de X_2 que contienen a K_1 y que no son comparables. Pero esto contradice 2.2.2.(C), de manera que b) y c) tampoco se cumplen.

De esta manera comprobamos que las posibilidades a), b) y c) no se dan. Puesto que éstas vinieron de suponer que $Y_1 \cap M$ tenía más de dos componentes, concluimos que $Y_1 \cap M$ tiene a lo más dos componentes. Como Y_1 y Y_2 juegan papeles simétricos, se sigue, también, que $Y_2 \cap M$ tiene a lo más dos componentes. Con lo anterior finalizamos la prueba del lema. $\square$

Lema 2.2.7. Sean X un continuo pseudocircular y t^* como en el Lema 2.2.6. Entonces para toda $M \in \mu^{-1}(t^*)$ se tiene que $L_1 \subset M$ o $L_2 \subset M$.

Demostración. Sea $M \in \mu^{-1}(t^*)$. Sabemos que los conjuntos $M \cap Y_1$ y $M \cap Y_2$ tienen a lo más dos componentes y que $K_1 \subset M$ o $K_2 \subset M$.

Supongamos que $K_1 \subset M$.

Sea R la componente de $M \cap Y_2$ que contiene a K_1. Analicemos primero el caso en que $R \cap K_2 \neq \emptyset$. Por 2.2.2.E, $X_1 \subset R$ o $X_2 \subset R$. Así que $L_2 \subset R \subset M$ o $L_1 \subset R \subset M$ y, con esto, terminamos este caso. Por tanto, podemos suponer que $R \cap K_2 = \emptyset$. Notemos que $X_2 \cap L_2 \subset X_2 \cap X_1 = K_1 \cup K_2$, $L_2 \cap K_1 \subset L_2 \cap L_1 = \emptyset$ y $K_2 \subset X_2 \cap L_2$. De manera que $X_2 \cap L_2 = K_2$ y $Y_2 = X_2 \cup L_2$. Entonces $Y_2\backslash K_2 = (Y_2\backslash X_2) \cup (Y_2\backslash L_2)$ y tanto $(Y_2\backslash X_2)$ como $(Y_2\backslash L_2)$ son abiertos en Y_2 y ajenos. Como $R \subset Y_2\backslash K_2$, R es conexo y $K_1 \subset R \cap (Y_2\backslash L_2)$ tenemos que $R \subset Y_2\backslash L_2 \subset X_2$. Por lo tanto $R \subset X_2$.

Puesto que R es un subcontinuo de X_2 conteniendo a K_1 y $K_1 \subset L_1$ tenemos, por 2.2.2.C, que $R \subset L_1$ o $L_1 \subset R$. Si $L_1 \subset R$ entonces, ya que $R \subset M$, tendremos que $L_1 \subset M$ y por tanto habremos terminado.

Supongamos ahora que $R \subset L_1$. A continuación mostraremos que si R es la única componente de $M \cap Y_2$ entonces se debe cumplir que $M \subset Y_1$. Supongamos, pues, que R es la única componente de $M \cap Y_2$. Sea $x \in M$. Esto implica que

$x \in M \cap Y_1$ o $x \in M \cap Y_2$ (ya que $Y_1 \cup Y_2 = X$). Si $x \in M \cap Y_1$, entonces, en particular, está en Y_1 que es lo que afirmamos. Si $x \in M \cap Y_2$ entonces, puesto que $M \cap Y_2 = R \subset L_1$, tenemos que $x \in Y_1$. Concluimos, por tanto, que $M \subset Y_1$. Esto implica que $t_1 \leq t^* \leq \mu(M) \leq \mu(Y_1) = t_1$. Asi que M y Y_1 están en $\mu^{-1}(t^*)$ (ver Convención 2.2.5.), lo anterior implica que $M = Y_1$, y por tanto que $L_1 \subset M$ que lo que queríamos demostrar.

Ahora, supongamos que $M \cap Y_2$ tiene una componente Q diferente de R. Demostraremos que Q intersecta la frontera de X_2, que es igual a $K_1 \cup K_2$. Supongamos que esto no ocurre. Bajo esta suposición, llegaremos a una contradicción mostrando que $Q \cap (X_2 \backslash X_1) \neq \emptyset$ y $Q \cap (X_1 \backslash X_2) \neq \emptyset$.

Primero comprobaremos la primera propiedad. Podemos suponer que $Q \cap (Y_2 \backslash Y_1) \neq \emptyset$. Si ocurriera lo contrario, entonces tendríamos que $Q \subset Y_1$ y, por tanto, (ver Lema 2.2.6) que

$$M \cap Y_2 = R \cup Q \subset L_1 \cup Y_1 = Y_1 \text{ (recordemos que } R \subset L_1).$$

Lo que implicaría que $M \subset Y_1$ y, como antes, tendríamos que $Y_1 = M$, lo cual implicaría finalmente que $L_1 \subset M$.

De la anterior suposición se sigue, fácilmente, que $Q \cap (X_2 \backslash X_1) \neq \emptyset$.

Ahora mostraremos que $Q \cap (X_1 \backslash X_2) \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario. Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} M &= (M \cap Y_1) \cup (M \cap Y_2) \\ &= (M \cap X_1) \cup (M \cap L_1) \cup (M \cap Y_2) \\ &= (M \cap X_1) \cup (M \cap L_1) \cup (R \cup Q) \\ &= ((M \cap X_1) \cup R) \cup Q. \end{aligned}$$

(la última igualdad se tiene debido a que $M \cap L_1 \subset M \cap Y_2 = R \cup Q$)

Puesto que $(M \cap X_1) \cap Q = (M \cap X_1) \cap X_2 \cap Q \subset (K_1 \cup K_2) \cap Q = \emptyset$ y $R \cap Q = \emptyset$, llegamos a que M es disconexo, lo cual resulta una contradicción con la elección de M. Por tanto $Q \cap (X_1 \backslash X_2) \neq \emptyset$.

De esta forma tenemos un subconjunto conexo Q que intersecta a X_2 y a $X \backslash X_2$. Esto implica que $Q \cap Fr(X_2) \neq \emptyset$. Este absurdo muestra que, efectivamente $Q \cap Fr(X_2) \neq \emptyset$. Puesto que $Fr(X_2) = K_1 \cup K_2$ y $Q \cap K_1 = \emptyset$ (pues $K_1 \subset R$), llegamos a que $Q \cap K_2 \neq \emptyset$. Pero esto implica que $X_1 \subset M$ o $X_2 \subset M$. De donde se sigue que $L_2 \subset M$ o $L_1 \subset M$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 2.2.8. Sean X un continuo pseudocircular y Q un subcontinuo de Y_2 (respectivamente, Q un subcontinuo de Y_1) tal que $L_1 \subset Q$ (respectivamente, $L_2 \subset Q$). Entonces se cumple que $Q \subset X_2 \backslash L_2$ o $X_2 \subset Q$ (respectivamente, $Q \subset X_1 \backslash L_1$ o $X_1 \subset Q$).

Demostración. Para mostrar el lema consideraremos dos casos.

Primer caso, $Q \cap L_2 = \emptyset$.

Si $Q \cap L_2 = \emptyset$ entonces, puesto que $Q \subset Y_2 = X_2 \cup L_2$, concluimos que $Q \subset X_2 \backslash L_2$.

Segundo caso, $Q \cap L_2 \neq \emptyset$.

Como $Q \subset Y_2 = X_2 \cup L_2$, $Q = (Q \cap X_2) \cup (Q \cap L_2)$. Estos dos uniendos son cerrados y no vacíos.. Lo cual implica, por la conexidad de Q, que $Q \cap (X_2 \cap L_2) \neq \emptyset$ y, como $Q \cap (X_2 \cap L_2) = Q \cap (X_2 \cap X_1) \cap L_2 = Q \cap ((K_1 \cup K_2) \cap L_2)) = Q \cap K_2$, lo anterior implica que $Q \cap K_2 \neq \emptyset$.

En resumen, tenemos que $Q \cap K_2 \neq \emptyset$ y $K_1 \subset L_1 \subset Q$. Lo cual implica que $X_2 \subset Q$ o $X_1 \subset Q$ (2.2.2.(E)). Puesto que $Q \subset Y_2$, concluimos que $X_2 \subset Q$. $\square$

Lema 2.2.9. Sean X un continuo pseudocircular y Q un subcontinuo de Y_2 (respectivamente, Q un subcontinuo de Y_1) tal que $L_1 \subset Q$ (respectivamente, $L_2 \subset Q$). Entonces se cumple que $Q \cap L_2$ es conexo (respectivamente, $Q \cap L_1$ es conexo).

Demostración. Por el Lema 2.2.8, sabemos que $X_2 \subset Q$ o $Q \subset X_2 \backslash L_2$. Si ocurre que $Q \subset X_2 \backslash L_2$ entonces $Q \cap L_2 = \emptyset$ que es conexo y, por tanto, terminamos la prueba. Supongamos que $X_2 \subset Q$. Esto implica, en particular, que $K_2 \subset Q$. Demostraremos que $Q \cap L_2$ es conexo. Notemos que $K_1 \subset Q \backslash L_2$, así que $Q \backslash L_2 \neq \emptyset$. Puesto que $K_2 \subset L_2 \cap Q$, debe existir una componente Q_1 de $L_2 \cap Q$ que contenga a K_2. Supongamos que existe otra componente R de $L_2 \cap Q$ ($R \neq Q_1$). Por Teorema 1.10 existe un punto $x \in R \cap Fr_Q(L_2 \cap Q) \subset Fr_{Y_2}(L_2) \subset L_2 \cap Ce(Y_2 \backslash L_2) \subset L_2 \cap X_2 \subset K_2$. Así que $R \cap K_2 \neq \emptyset$ y, entonces $R \cap Q_1 \neq \emptyset$. De modo que $R = Q_1$. Esta contradicción muestra que $L_2 \cap Q$ es conexo.

Con esto finalizamos la prueba. $\square$

Lema 2.2.10. Sea X un continuo pseudocircular. Entonces tanto L_1 como L_2 son terminales con respecto a Y_1 y Y_2.

Demostración. Por simetría basta probar que L_1 es terminal con respecto a Y_2 y a Y_1.

En primer lugar demostraremos que L_1 es terminal con respecto a Y_2. Sean Q y N subcontinuos de Y_2 tales que $L_1 \subset Q$ y $L_1 \subset N$. Por el Lema 2.2.8, podemos suponer que se dan las siguientes posibilidades:

a) $Q \subset X_2, N \subset X_2$

b) $Q \subset X_2, X_2 \subset N$

c) $X_2 \subset Q, X_2 \subset N$

La primera posibilidad implica que Q y N son subcontinuos de X_2 conteniendo a K_1 (pues $K_1 \subset L_1$) y, por lo tanto, $Q \subset N$ o $N \subset Q$.

Supongamos que se tiene b). Las dos contenciones implican que $Q \subset N$.

A continuación analizaremos el tercer caso. Las dos contenciones implican, por el Lema 2.2.9, que $Q \cap L_2$ y $N \cap L_2$ son subconjuntos conexos y cerrados de X_1 y, por lo tanto, subcontinuos de X_1. Como $K_2 \subset X_2 \subset Q \cap N$ tenemos que $Q \cap L_2$ y $N \cap L_2$ contienen a K_2 y, por lo tanto, son comparables. Es decir $Q \cap L_2 \subset N \cap L_2$ o $N \cap L_2 \subset Q \cap L_2$. Finalmente, puesto que $(Q \cap L_2) \cup X_2 = Q$. y $(N \cap L_2) \cup X_2 = N$, lo anterior implica que $Q \subset N$ o $N \subset Q$.

Todo lo anterior implica que L_1 es terminal con respecto a Y_2.

Ahora demostraremos la terminalidad de L_1 con respecto a Y_1.

Primero demostraremos que si Q es un subcontinuo de Y_1 conteniendo a L_1 entonces $Q \cap X_1$ es conexo. Para tal fin, consideremos los casos $Q \cap K_2 \neq \emptyset$ y $Q \cap K_2 = \emptyset$.

Supongamos que $Q \cap K_2 \neq \emptyset$. Entonces Q es un subcontinuo de X_1 tal que $Q \cap K_1 \neq \emptyset$ y $Q \cap K_2 \neq \emptyset$, lo que implica que $X_1 \subset Q$ o $X_2 \subset Q$ (Definición 2.2.2.(E)). Puesto que $Q \subset Y_1$ y $X_2 \backslash Y_1 \neq \emptyset$, llegamos a que $X_1 \subset Q$. Por lo tanto tenemos que $Q \cap X_1 = X_1$, con lo que concluimos que $Q \cap X_1$ es conexo.

Supongamos ahora que $Q \cap K_2 = \emptyset$ y que no es cierta la afirmación. Esto implica que existen dos subconjuntos compactos R y S de X, diferentes del vacío, tales que $R \cap S = \emptyset$ y $Q \cap X_1 = R \cup S$.

Debido a que $K_1 \subset Q \cap X_1$ y K_1 es un subconjunto conexo, se tiene que $K_1 \subset R$ o $K_1 \subset S$. Supongamos que $K_1 \subset R$. A continuación mostraremos que, bajo la suposición de que $Q \cap X_1$ es disconexo, podemos encontrar una disconexión de Q.

Para mostrar lo anterior, observamos que $Q = (Q \cap X_1) \cup L_1$ (esta igualdad se obtiene por lo siguiente: Por hipótesis, $L_1 \subset Q$, de donde se sigue la contención $(Q \cap X_1) \cup L_1 \subset Q$. Por otro lado, si tomamos un elemento $q \in Q$, entonces $q \in Y_1 = X_1 \cup L_1$. Lo anterior implica que $q \in X_1 \cup Q$ o $q \in L_1$ y, por lo tanto, $Q \subset (Q \cap X_1) \cup L_1$). De manera que podemos conseguir la igualdad $Q = L_1 \cup (R \cup S) = (L_1 \cup R) \cup S$, donde $R \cap S = \emptyset$. Además se tiene que $S \cap L_1 = \emptyset$ ya que $S \subset X_1 \backslash X_2$ y $L_1 \cap X_1 = K_1$ (esto debido a que $S \cap K_2 = \emptyset$, $S \cap K_1 = \emptyset$, $S \subset X_1$). Por lo tanto $(L_1 \cup R)$ y S forman una disconexión de Q, lo cual contradice el que Q sea un subcontinuo de Y_1. Por lo tanto $Q \cap X_1$ es conexo.

Finalmente demostraremos que si Q y P son subcontinuos de Y_1 conteniendo a L_1 entonces deben ser comparables.

Sean Q y P subcontinuos de Y_1 tales que $L_1 \subset Q$ y $L_1 \subset P$. Entonces $Q = (Q \cap X_1) \cup L_1$. Ahora, por lo que vimos más arriba, sabemos que $Q \cap X_1$ y $P \cap X_1$ son subcontinuos de X_1 conteniendo a K_1. Por lo tanto, tenemos que $Q \cap X_1 \subset P \cap X_1$ o $P \cap X_1 \subset Q \cap X_1$. Lo cual nos lleva a que

$$Q = (Q \cap X_1) \cup L_1 \subset (P \cap X_1) \cup L_1 = P$$

o

$$P = (P \cap X_1) \cup L_1 \subset (Q \cap X_1) \cup L_1 = Q$$

De lo cual concluimos que L_1 es terminal con respecto a Y_1. □

Debido a que en la discusión de los siguientes resultados se hace un uso específico de la estructura del círculo $\beta_1 \cup \beta_2$ (definido en 2.2.3), aclararemos algunas de las características de β_1 y de β_2.

Observación 2.2.11. Efectivamente, en 2.2.3.(i) construimos un círculo en un nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$. Esta construcción se hizo a partir de dos arcos β_1 y β_2 que van de Y_1 a Y_2 y de Y_2 a Y_1 (definidos en 2.2.3, respectivamente). Recordemos que tales arcos, según el Teorema 1.22, se definen como $\beta_1(s) = g_1(s) \cup h_1(t_s)$ y $\beta_2(r) = g_2(r) \cup h_2(l_r)$, con $s, t_s, r, l_r \in [0, 1]$. Donde g_1 y h_1 son arcos ordenados que van de L_1 a Y_2 y de L_1 a Y_1, respectivamente, y g_2 y h_2 son arcos ordenados que van de L_2 a Y_1 y de L_2 a Y_2.

Lema 2.2.12. Sean X un continuo pseudocircular, Y_1 y Y_2 como en el Lema 2.2.3, β_1 y β_2 los arcos descritos en la observación 2.2.11, y Q un subcontinuo de Y_2 que contiene a L_1 (respectivamente, un subcontinuo de Y_1 que contiene a L_2). Entonces existe $s^* \in [0,1]$ tal que $Q = g_1(s^*)$ (respectivamente, $Q = g_2(s^*)$).

Demostración. Consideremos el conjunto $Z = \{s \in [0,1] : g_1(s) \subset Q\}$. Puesto que $g_1(0) = L_1 \subset Q$, tenemos que $Z \neq \emptyset$. Sea $s^* = \sup Z$. Mostraremos que $g_1(s^*) = Q$. En primer lugar, mostraremos que $g_1(s^*) \subset Q$. Para esto, tomemos una sucesión $(s_n)_n \subset [0,1]$, con $s_n < s^*$, que converja a s^*. Puesto que las s_n son menores que s^*, se tiene que $g_1(s_n) \subset Q$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, sabemos que g_1 es continua, lo que implica que $g_1(s_n)$ converge a $g_1(s^*)$. Entonces, por el Teorema 1.8, llegamos a que $g_1(s^*) \subset Q$. Si $s^* = 1$ entonces $Y_2 = g_1(1) \subset Q \subset Y_2$. De modo que $g_1(1) = Q$. De manera que podemos suponer que $s^* < 1$. A continuación demostraremos que la contención $g_1(s^*) \subset Q$ no puede ser propia. Supongamos que $Q \backslash g_1(s^*) \neq \emptyset$. Sea $x \in Q \backslash g_1(s^*)$. Por la continuidad de g_1 y como $s^* < 1$, existe $s_1 > s^*$ tal que $x \in Q \backslash g_1(s_1)$. Por el Lema 2.2.10 y puesto que Q y $g_1(s_1)$ son subcontinuos de Y_2 conteniendo a L_1, tenemos que $Q \subset g_1(s_1)$ o $g_1(s_1) \subset Q$. Como la primera contención no se da, obtenemos que $g_1(s_1) \subset Q$. Pero esto contradice el que s^* sea el supremo de Z. De todo lo anterior concluimos que $g_1(s^*) = Q$. □

Teorema 2.2.13. Sea X un continuo pseudocircular y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces existe $t^* \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t^*)$ es un círculo.

Demostración. Sea t^* como en el Lema 2.2.6. Por el Lema 2.2.3.(i), existe un círculo en $\mu^{-1}(t^*)$ de la forma $\beta_1 \cup \beta_2$, donde los arcos β_1 y β_2 tienen las características señaladas en 2.2.11.

Sea $M \in \mu^{-1}(t^*)$. Demostraremos que $M \in \beta_1 \cup \beta_2$, con lo cual concluiremos que $\mu^{-1}(t^*) = \beta_1 \cup \beta_2$. Por el Lema 2.2.7, sabemos que $L_1 \subset M$ o $L_2 \subset M$. Supongamos que $L_1 \subset M$.

Consideraremos tres casos:

Primer caso. $M \cap X_2$ es disconexo.

Por el Lema 2.2.6, $M \cap X_2$ se puede escribir en la forma $M \cap X_2 = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 son continuos ajenos, $K_1 \subset R_1$ y $K_2 \subset R_2$. Entonces $M \cap K_1 \neq \emptyset$ y $M \cap K_2 \neq \emptyset$. De manera que $X_1 \subset M$ o $X_2 \subset M$. La segunda posibilidad no se puede dar pues $M \cap X_2$ no es conexo. Así que $X_1 \subset M$ y, como $L_1 \subset M$, obtenemos que $Y_1 \subset M$. Como ambos continuos miden t^* bajo μ (Convención 2.2.5.), tenemos que $M = Y_1 \in \beta_1$.

Segundo caso. $M \cap X_1$ disconexo.

Por el Lema 2.2.6., $M \cap X_1$ se puede escribir en la forma $M \cap X_1 = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 son continuos ajenos, $K_1 \subset R_1$ y $K_2 \subset R_2$. Como en el primer caso, se deduce que $X_2 \subset M$. Entonces $M = (M \cap X_1) \cup (M \cap X_2) = R_1 \cup X_2 \cup R_2$. Ya que L_2 y R_2 son subcontinuos de X_1 y contienen a K_2, tenemos que $L_2 \subset R_2$ o $R_2 \subset L_2$. Si $L_2 \subset R_2$, entonces $Y_2 = X_2 \cup L_2 \subset M$ y, como ambos miden t^* bajo μ, tenemos que $M = Y_2 \in \beta_1$. Por otra parte, si $R_2 \subset L_2$, entonces $X_2 \cup R_2$ es un subcontinuo de Y_2. Por el Lema 2.2.12., tenemos que $X_2 \cup R_2 = g_1(s^*)$ para algún $s^* \in [0,1]$. Ya que $L_1 \cup R_1$ es un subcontinuo de Y_1 que contiene a L_1, por el Lema 2.2.10., $L \cup R_1 \subset h_1(t_{s^*})$ o $h_1(t_{s^*}) \subset L \cup R_1$. En el primer caso $M = X_2 \cup R_2 \cup L_1 \cup R_1 \subset g_1(s^*) \cup h_1(t_{s^*}) = \beta_1(s^*)$. En el segundo caso, $\beta_1(s^*) = g_1(s^*) \cup h_1(t_{s^*}) \subset X_2 \cup R_2 \cup L_1 \cup R_1 = M$. De manera que $M \subset \beta_1(s^*)$ o $\beta_1(s^*) \subset M$. Como ambos miden t^* bajo μ, concluimos que $M = \beta_1(s^*)$.

Tercer caso. $M \cap X_1$ y $M \cap X_2$ son conexos.

Por el Lema 2.2.12., tenemos que $M \cap X_2 = g_1(s^*)$ para $s^* \in [0,1]$ pues $M \cap X_2$ es un subcontinuo de Y_2 que contiene a L_2. Ya que $L_1 \cup (M \cap X_1)$ es un subcontinuo ($K_1 \subset M \cap X_1$) de Y_1 que contiene a L_1, por el Lema 2.2.10., $L_1 \cup (M \cap X_1) \subset h_1(t_{s^*})$ o $h_1(t_{s^*}) \subset L_1 \cup (M \cap X_1)$. Entonces $M = (M \cap X_1) \cup L_1 \cup (M \cap X_2) \subset g_1(s^*) \cup h_1(t_{s^*}) = \beta_1(s^*)$ o $\beta_1(s^*) \subset M$. Esto implica que $M = \beta_1(s^*)$.

En cualquier caso $M \in \beta_1 \cup \beta_2$.

De lo anterior concluimos que $\mu^{-1}(t^*) = \beta_1 \cup \beta_2$. □

Espacios pseudolineales

En esta sección probaremos que si un espacio X es pseudolineal entonces su hiperespacio $C(X)$ tiene un nivel de Whitney que es un arco. Este resultado es original de J. Krasinkiewicz y Sam B. Nadler, Jr [18, Teorema 5.3]. Lo presentaremos aquí con el objeto de dejar completo el presente trabajo.

Recordemos que un espacio pseudolineal X es un continuo que puede ser descompuesto por dos subcontinuos propios X_1 y X_2 con las siguientes propiedades:
A) $X = X_1 \cup X_2$,
B) $Y = X_1 \cap X_2$ es un subcontinuo de X,
C) Y es terminal con respecto a X_1 y X_2,

D) para todo subcontinuo L de X tal que $L\backslash X_1 \neq \emptyset$ y $L\backslash X_2 \neq \emptyset$, se cumple que $Y \subset L$.

Lema 2.2.14. Sean X un continuo pseudolineal y X_1, X_2 y Y los subcontinuos que describimos en la Definición 2.2.2, .μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (m\acute{\ }x\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}, 1)$. Entonces existen subcontinuos L_1 y L_2 de X tales que:

a) $Y \subset L_1 \subset X_2$ y $Y \subset L_2 \subset X_1$
b) $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = t$, donde $Z_1 = X_1 \cup L_1$ y $Z_2 = X_2 \cup L_2$
c) $Z_1 \cap Z_2 = L_1 \cup L_2$
d) $Z_1 \neq Z_2$
e) $\mu^{-1}(t)$ contiene un arco.

Demostración. Sea $t > m\acute{\ }x\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$. A partir de esta t construiremos L_1, la construcción dc L_2 es similar.

Puesto que Y es un subcontinuo propio de X_2, existe un arco ordenado α_1 de Y a X_2 (Teorema 1.16.). Consideremos la función $h : [0,1] \to C(X)$ definida por $h(s) = X_1 \cup \alpha_1(s)$, para $s \in [0,1]$. Debido a que $X_1 \in C(X)$, la imagen de h está, en efecto, contenida en $C(X)$ (Teorema 1.19.). Por el Teorema 1.4, h resulta ser continua. De donde se sigue finalmente que la función $g = \mu \circ h : [0,1] \to [0,1]$ es continua.

Al evaluar la función g en 0 y 1 observamos que
$g(0) = \mu(h(0)) = \mu(X_1 \cup \alpha_1(0)) = \mu(X_1 \cup Y) = \mu(X_1)$,
$g(1) = \mu(h(1)) = \mu(X_1 \cup \alpha_1(1)) = \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X)$.

Puesto que $\mu(X_1) < t < \mu(X)$, existe $s_1 \in (0,1)$ tal que $g(s_1) = t$ (Teorema del Valor Intermedio). Es decir, existe $s_1 \in (0,1)$ tal que $\mu(h(s_1)) = t$. Hagamos $L_1 = \alpha_1(s_1)$ y sea $Z_1 = h(s_1) = X_1 \cup L_1$.

Por la forma en que está definida h, Z_1 resulta ser un subcontinuo de X. Además tenemos que $\mu(Z_1) = \mu(h(s_1)) = t$. De manera similar se obtienen los subcontinuos L_2 y $Z_2 = X_2 \cup L_2$. Mostraremos que L_1, Z_1, L_2 y Z_2 satisfacen las propiedades requeridas.

a) Por construcción se tienen las contenciones $Y \subset L_1 \subset X_2$ y $Y \subset L_2 \subset X_1$.

b) También por construcción, tenemos que $Z_1 = X_1 \cup L_1$, $Z_2 = X_2 \cup L_2$ y $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = t$.

c) Para mostrar que $Z_1 \cap Z_2 = L_1 \cup L_2$ fijémonos en la siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
Z_1 \cap Z_2 &= (X_1 \cup L_1) \cap (X_2 \cup L_2) \\
&= (X_1 \cap X_2) \cup (L_1 \cap X_2) \\
&\qquad\qquad \cup \\
&\quad\; (X_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_2) \\
&= (Y \cup L_1) \cup [L_2 \cup (L_1 \cap L_2)] \\
&= Y \cup L_1 \cup L_2 \\
&= L_1 \cup L_2 \text{ (ya que } Y \subset L_1 \cap L_2)
\end{aligned}
$$

Con lo anterior probamos adicionalmente que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$.

d) $Z_1 \backslash Z_2 \neq \emptyset$ y $Z_2 \backslash Z_1 \neq \emptyset$.

Como $X = X_1 \cup X_2 \subset Z_1 \cup Z_2 \subset X$, tenemos que $X = Z_1 \cup Z_2$. Si $Z_2 \backslash Z_1 = \emptyset$, entonces $Z_2 \subset Z_1$, así que $X = Z_1$. Esto es absurdo, ya que $\mu(Z_1) = t < 1 = \mu(X)$. Por tanto $Z_2 \backslash Z_1 \neq \emptyset$. Similarmente $Z_1 \backslash Z_2 \neq \emptyset$.

e) $\mu^{-1}(t)$ contiene un arco.

Puesto que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, $Z_1 \backslash Z_2 \neq \emptyset$, $Z_2 \backslash Z_1 \neq \emptyset$ y $Z_1, Z_2 \in \mu^{-1}(t)$, existe un arco γ en $\mu^{-1}(t) \cap C(Z_1 \cup Z_2)$ de Z_1 a Z_2 tal que $L = L_1 \cup L_2 \subset \gamma(t)$ para toda $t \in [0, 1]$ (Teorema 1.22). Con esto terminamos la prueba del lema. □

Convención 2.2.15. En la exposición de los siguientes resultados, dado el continuo pseudolineal X, supondremos que se tiene una función de Whitney μ para $C(X)$. Se tomarán los subcontinuos X_1, X_2 y Y como en la definición 2.2.1. Consideraremos un número real t_1 tal que $máx\,\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} < t_1 < 1$ y tomaremos los subcontinuos Z_1, L_1, Z_2 y L_2 como en el Lema 2.2.14 para t_1.

Con esto en mente establecemos los siguientes resultados.

Lema 2.2.16. Sean X un continuo pseudolineal y $A \in C(X)$ tal que $Y \subset A$. Entonces $A \cap X_1$ y $A \cap X_2$ son subcontinuos de X_1 y X_2, respectivamente. En particular, si $B \in \mu^{-1}(t_1)$ (donde t_1 es como en 2.2.15) entonces se tiene que $B \cap X_1$ y $B \cap X_2$ son continuos.

Demostración. Mostraremos que $A \cap X_1$ es un subcontinuo de X_1, la prueba para $A \cap X_2$ es similar.

Supongamos que $A \cap X_1$ es disconexo. Puesto que $A \cap X_1$ es compacto, lo anterior implica que existen dos subconjuntos compactos ajenos y no vacíos M y N de X, tales que $A \cap X_1 = M \cup N$. Puesto que $Y \subset A \cap X_1$ y Y es un subconjunto conexo, se tiene que $Y \subset N$ o $Y \subset M$. Supongamos que $Y \subset M$. Mostraremos que existe una disconexión del subconjunto $X_2 \cup A$, lo cual estará en contradicción con el hecho de que $X_2 \cup A$ es un subconjunto conexo.

Observemos la siguiente serie de igualdades:

$$\begin{aligned} X_2 \cup A &= X_2 \cup [(X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A)] \\ &= X_2 \cup [(M \cup N) \cup (X_2 \cap A)] \\ &= X_2 \cup (M \cup N) \\ &= (X_2 \cup M) \cup N \end{aligned}$$

Mostraremos que $N \cap X_2 = \emptyset$. Supongamos que $N \cap X_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in N \cap X_2$. Ya que $A \cap X_1 = M \cup N$, lo anterior implica que $x \in X_1$. De modo que $x \in X_1 \cap X_2 = Y$. Pero esto implica que $N \cap Y \neq \emptyset$. Como estamos suponiendo que $Y \subset M$, llegamos a que $M \cap N \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $N \cap X_2 = \emptyset$. Por lo tanto, la igualdad $X_2 \cup A = (X_2 \cup M) \cup N$ implica que $(X_2 \cup M)$ y N forman una disconexion de $X_2 \cup A$, lo que es absurdo.

Ya que todo lo anterior vino de suponer $A \cap X_1$ es disconexo, concluimos la conexidad de este conjunto. Puesto que $A \cap X_1$ es compacto, tenemos que $A \cap X_1$ es un subcontinuo de X_1. Si $B \in \mu^{-1}(t_1)$ entonces $\mu(B) > \mu(X_1)$ y $\mu(B) > \mu(X_2)$.De manera que $B \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $B \backslash X_2 \neq \emptyset$. De aquí que $Y \subset B$ (Definición 2.2.1.(D)). Entonces, aplicando la primera parte del lema a B, se sigue el resultado deseado. Con esto terminamos la prueba del lema. □

Lema 2.2.17. Sea X un continuo pseudolineal. Hagamos $L = L_1 \cup L_2$. Entonces para toda $A \in \mu^{-1}(t_1)$, se tiene que $L \subset A$.

Demostración. Sea $A \in \mu^{-1}(t_1)$. Mostraremos que $L_1 \subset A$.

Podemos suponer que $A \neq Z_1$ (si $Z_1 = A$ entonces, puesto que $Z_1 = X_1 \cup L_1$, se tendría que $L_1 \subset A$). Lo anterior implica que $A \backslash Z_1 \neq \emptyset$ (de otra forma tendríamos que $A \subset Z_1$ lo cual implicaría, debido a que A y Z_1 están en $\mu^{-1}(t_1)$, que $A = Z_1$, lo cual no puede ser por suposición). Sabemos, por el Lema 2.2.16, que $A \cap X_2$ es un subcontinuo de X_2 que contiene a Y. De modo que $A \cap X_2$ y L_1 son subcontinuos de X_2 que contienen a Y y, por lo tanto, se tiene alguna de las contenciones $A \cap X_2 \subset L_1$ o $L_1 \subset A \cap X_2$. Debido a que $A \backslash Z_1 \neq \emptyset$, la contención $A \cap X_2 \subset L_1$ no se tiene. Lo que implica que $L_1 \subset A \cap X_2$ y, por lo tanto, que $L_1 \subset A$. La demostración de que $L_2 \subset A$ es similar. De esta manera concluimos que $L \subset A$. □

Lema 2.2.18. Sean X un continuo pseudolineal y $L = L_1 \cup L_2$. Entonces para todo subcontinuo A de X tal que $L \subset A$, se cumple que $A \cap Z_1$ es un subcontinuo de Z_1 (respectivamente, $A \cap Z_2$ es un subcontinuo de Z_2).

Demostración. Sea A un subcontinuo de X tal que $L \subset A$. Mostraremos que $A \cap Z_1$ es conexo. Supongamos lo contrario. Puesto que $A \cap Z_1$ es compacto, lo anterior implica que existen dos subconjuntos compactos no vacíos y ajenos M y N de X, tales que $A \cap Z_1 = M \cup N$. Ya que L es un subconjunto conexo y $L \subset A \cap Z_1$, tenemos que $L \subset M$ o $L \subset N$. Supongamos que $L \subset N$.

Mostraremos que la suposición de que $A \cap Z_1$ es disconexo nos permitirá construir una disconexión del continuo $Z_2 \cup A$, lo que será, por supuesto, una contradicción.

Observemos la siguiente serie de igualdades:

$$\begin{aligned} Z_2 \cup A &= Z_2 \cup [(Z_1 \cap A) \cup (Z_2 \cap A)] \\ &= Z_2 \cup [M \cup N \cup (Z_2 \cap A)] \\ &= Z_2 \cup M \cup N \\ &= (Z_2 \cup N) \cup M \end{aligned}$$

Mostraremos que $M \cap Z_2 = \emptyset$. Supongamos que $M \cap Z_2 \neq \emptyset$ y sea $x \in M \cap Z_2$. Debido a que $M \cup N = A \cap Z_1$, lo anterior implica que $x \in Z_1$. De donde se tiene que $x \in Z_1 \cap Z_2 = L_1 \cup L_2 = L$ (Lema 2.2.14.c). Puesto que $L \subset N$, lo anterior implica que $M \cap N \neq \emptyset$. Lo que contradice el hecho de que M y N forman una disconexión de $A \cap Z_1$. Por lo tanto $M \cap Z_2 = \emptyset$.

De todo lo anterior se sigue que $Z_2 \cup N$ y M forman una disconexión de $Z_2 \cup A$. Esto es una contradicción, que viene de suponer que $A \cap Z_1$ es disconexo. Por tanto este conjunto es conexo. Puesto que $A \cap Z_1$ es compacto, se concluye la afirmación del lema. □

Lema 2.2.19. Sean X un continuo pseudolineal y $L = L_1 \cup L_2$. Entonces L es terminal con respecto a Z_1 y a Z_2.

Demostración. Demostraremos que L es terminal con respecto a Z_1, la prueba de la terminalidad con respecto a Z_2 es similar.

Sean Q y R subcontinuos de Z_1 tales que $L \subset Q$ y $L \subset R$. Por el Lema 2.2.16 sabemos que $Q \cap X_1$ y $R \cap X_1$ son subcontinuos de X_1. Debido a que $Y \subset Q \cap X_1$ y $Y \subset R \cap X_1$ (pues $Y \subset X_1$ y $Y \subset L$), tenemos que $Q \cap X_1 \subset R \cap X_1$ o $R \cap X_1 \subset Q \cap X_1$ (Definición 2.2.1.(C)).

Observamos que $L_1 \subset Q \subset Z_1 = X_1 \cup L_1$.

Lo que implica que $L_1 = L_1 \cap X_2 \subset Q \cap X_2 \subset (X_1 \cup L_1) \cap X_2 = Y \cup L_1 = L_1$. De lo cual se deduce que $L_1 = Q \cap X_2$. De manera similar obtenemos que $L_1 = R \cap X_2$. De esta observación y la conclusión que habíamos obtenido en el párrafo anterior llegamos a que $R = (R \cap X_1) \cup L_1 \subset (Q \cap X_1) \cup L_1 = Q$ o $Q = (Q \cap X_1) \cup L_1 \subset (R \cap X_1) \cup L_1 = R$. Por lo tanto R y Q son comparables y por lo tanto concluimos que L es terminal con respecto a Z_1. Con esto finalizamos la prueba del lema. □

Debido a que en la discusión del siguiente resultado se hace uso específico de la estructura del arco γ. (definido en 2.2.14.(e)), aclararemos algunas de las características de éste.

Observación 2.2.20. Efectivamente, en 2.2.14.(e) se obtiene un arco γ contenido en $\mu^{-1}(t_1) \cap C(Z_1 \cup Z_2)$ que va deZ_1 a Z_2. Este arco γ es de la forma $\gamma(s) = j(s) \cup i(r_s)$, con s y $r_s \in [0,1]$ y j e i son arcos ordenados que van de L a Z_2 y de L a Z_1, respectivamente.

Teorema 2.2.21. Sea X un continuo pseudolineal. Entonces existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_1)$ es un arco.

Demostración. Sea γ el arco que mencionamos en la Observación 2.2.20. Mostraremos que también se tiene la contención $\mu^{-1}(t_1) \subset \gamma$.

Sea $A \in \mu^{-1}(t_1)$. Por los Lemas 2.2.17 y 2.2.1, sabemos que $A \cap Z_2$ es un subcontinuo de Z_2 conteniendo a L.

Consideremos el conjunto $W = \{s \in [0,1] : j(s) \subset A \cap Z_2\}$. Puesto que $j(0) = L \subset A \cap Z_2$, se tiene que $W \neq \emptyset$. Sea $s^* = \sup W$. Mostraremos que $j(s^*) = A \cap Z_2$. En primer lugar probaremos que $j(s^*) \subset A \cap Z_2$. Para tal fin, tomemos una sucesión $(s_n)_n \subset [0,1]$, con $s_n < s^*$, que converja a s^*. Debido a que las s_n son menores que s^*, se tiene que $j(s_n) \subset A \cap Z_2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además sabemos que j es una función continua, lo cual implica que $j(s_n)$ converge a $j(s^*)$. De donde se sigue, por el Teorema 1.8, que $j(s^*) \subset A \cap Z_2$. Si $s^* = 1$ entonces $Z_2 = j(1) \subset A \cap Z_2 \subset Z_2$. De modo que $j(s^*) = A \cap Z_2$. De manera que podemos suponer que $s^* < 1$. A continuación demostraremos que la contención $j(s^*) \subset A \cap Z_2$ no puede ser propia. Supongamos que $(A \cap Z_2) \setminus j(s^*) \neq \emptyset$. Tomemos un punto $x \in (A \cap Z_2) \setminus j(s^*)$. Por la continuidad de j y el hecho de que $s^* < 1$, existe s_1,con $s^* < s_1 < 1$, tal que $x \in (A \cap Z_2) \setminus j(s_1)$.

Por otra parte, puesto que $j(s^*)$ y $A \cap Z_2$ son subcontinuos de Z_2 conteniendo a L, se tiene que $j(s_1) \subset A \cap Z_2$ o $A \cap Z_2 \subset j(s_1)$ (Lema 2.2.19). Por la elección de s_1, sabemos que la segunda contención no se da. Por lo tanto, concluimos que $j(s_1) \subset A \cap Z_2$. Pero esto contradice el que s^* sea el supremo de W. De lo anterior concluimos que $j(s^*) = A \cap Z_2$.

Ahora, por el Lema 2.2.18, sabemos que $A \cap Z_1$ es un subcontinuo de Z_1 conteniendo a L. Ya que $i(r_{s^*})$ es un subcontinuo de Z_1 que contiene a L, tenemos que $i(r_{s^*}) \subset A \cap Z_1$ o $A \cap Z_1 \subset i(r_{s^*})$ (Lema 2.2.19). Lo anterior implica, puesto que $j(s^*) = A \cap Z_2$, que $A = (A \cap Z_1) \cup (A \cap Z_2)$ está contenido o contiene a $j(s^*) \cup i(r_{s^*}) = \gamma(s^*)$. Como ambos conjuntos miden t_1 concluimos que $A = \gamma(s^*)$. Por lo tanto $A \in \gamma$. Por todo lo anterior concluimos que $\mu^{-1}(t_1) = \gamma$, y de esta manera damos por finalizada la prueba del teorema. □

De los Teoremas 2.2.13 y 2.2.2. se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.22. Sea X un continuo pseudolineal o pseudocircular. Entonces existe $t \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un arco o un círculo, respectivamente.

2.3. CARACTERIZACIÓN DE CONTINUOS A TRAVÉS DE LOS NIVELES DE WHITNEY DE SU HIPERESPACIO.

En esta sección veremos que si el hiperespacio de un continuo X contiene un nivel de Whitney que es un arco o es un círculo, entonces el continuo es pseudolineal o pseudocircular, respectivamente.

C(X) tiene un nivel que es un arco.

El Teorema 2.3.2. junto con el Teorema 2.2.21. nos permitirán dar una caracterización de los continuos pseudolineales. Esta caracterización nos dice básicamente que los únicos subcontinuos cuyo hiperespacio tiene, a partir de cierto momento, niveles de Whitney iguales a arcos son los continuos pseudolineales.

El siguiente lema nos dice de qué forma son los subcontinuos que viven "por arriba" de un nivel de Whitney homemorfo a un arco. El conocimiento de este hecho resultó ser de gran utilidad en la demostración del Teorema 2.3.2..

Lema 2.3.1. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un arco. Sea g el homeomorfismo de $I = [0,1]$ sobre $\mu^{-1}(t_0)$. Entonces para toda $t \in [t_0, 1]$ y para toda $A \in \mu^{-1}(t)$, se tiene que $A = \bigcup_{r_1 \leq r \leq r_2} g(r)$ para algunas r_1 y r_2 en $[0,1]$.

Demostración. Sea $A \in \mu^{-1}(t)$. Consideremos al conjunto $\mathcal{A} = \{B \in \mu^{-1}(t_0) : B \subset A\}$.

A continuación mostraremos que $\bigcup \mathcal{A} = A$. Es claro que $\bigcup \mathcal{A} \subset A$. Por lo tanto resta demostrar que $A \subset \bigcup \mathcal{A}$. Si $\mu(A) = t_0$, entonces $A \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $A \subset \bigcup \mathcal{A}$. Con lo que habremos demostrado que $A = \bigcup \mathcal{A}$. Supongamos entonces que $\mu(A) > t_0$. Elegimos $a \in A$. Por el Teorema 1.16 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(A)$ tal que $\alpha(0) = \{a\}$ y $\alpha(1) = A$. Consideremos la función $h = \mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$. Puesto que μ y α son funciones continuas, h lo es. Observamos, además, que $h(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{a\}) = 0$ y $h(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(A)$. Puesto que $0 < t_0 < t = \mu(A)$ existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $h(s_0) = t_0$. Es decir, $\mu(\alpha(s_0)) = t_0$, lo que implica que $\alpha(s_0) \in \mu^{-1}(t_0)$. Puesto que $a \in \alpha(s_0)$ y $\alpha(s_0) \subset A$, concluimos que $a \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto $A \subset \bigcup \mathcal{A}$. Con lo que concluimos, finalmente, que $A = \bigcup \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A} = C(A) \cap \mu^{-1}(t_0) = (\mu|_{C(A)})^{-1}(t_0)$, se tiene que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0) = g([0,1])$ y, puesto que los subcontinuos de $g([0,1])$ son de la forma $g([r_1, r_2])$, con $r_1, r_2 \in [0,1]$, tenemos que $\mathcal{A} = g([r_1, r_2])$. Con lo que concluimos, finalmente, que $A = \bigcup \mathcal{A} = \cup g([r_1, r_2]) = \bigcup_{r_1 \leq r \leq r_2} g(r)$. Con esto terminamos la prueba del lema. □

Teorema 2.3.2. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un arco, entonces X es un continuo pseudolineal.

Demostración. Probaremos que existen subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $Y = X_1 \cap X_2$ es un subcontinuo de X, Y es terminal con respecto a X_1 y X_2 y, finalmente, que todo subcontinuo L de X tal que $L \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $L \backslash X_2 \neq \emptyset$, contiene a Y.

Sea $g : I \to \mu^{-1}(t_0)$ un homeomorfismo. Dados $s_1 \leq s_2$ en I, hacemos $A(s_1, s_2) = \bigcup_{s_1 \leq s \leq s_2} g(s)$. Por el Teorema 1.14 $A(s_1, s_2)$ es un subcontinuo de X.

Primero veremos que si $s_1 \in (0,1)$ entonces $A(0, s_1) \cap A(s_1, 1) = g(s_1)$. Es claro que $g(s_1) \subset A(0, s_1) \cap A(s_1, 1)$. Supongamos que la otra contención no es cierta y tomemos $x \in A(0, s_1) \cap A(s_1, 1) \setminus g(s_1)$. Entonces existen $s_2 < s_1$ y $s_3 > s_1$ tales que $x \in g(s_2)$ y $x \in g(s_3)$. Por el Teorema 1.22, existe un arco $\alpha \subset \mu^{-1}(t_0) \cap (C(g(s_2) \cup g(s_3)))$ tal que tiene por extremos a $g(s_2)$ y $g(s_3)$ y cumple que $x \in A$ para toda $A \in \alpha$.

Ya que $\mu^{-1}(t_0)$ es un arco, tenemos que sólo hay un subarco de $\mu^{-1}(t_0)$ que une a $g(s_2)$ con $g(s_3)$ y es, precisamente, el arco $g([s_2, s_3])$. Esto implica que $\alpha = g([s_2, s_3])$. De manera que $g(s_1) \in \alpha$ y, en consecuencia, $x \in g(s_1)$. Esto contradice la elección de x y, por lo tanto, se concluye la afirmación.

Ahora veremos que si $s_1 \in (0,1)$ entonces $A(0, s_1) \neq X$ y $A(s_1, 1) \neq X$. Únicamente probaremos que $A(0, s_1) \neq X$, la prueba de que $A(s_1, 1) \neq X$ es similar. Supongamos, por el contrario, que $A(0, s_1) = X$. Por la afirmación anterior, $g(1) \subset X \cap A(s_1, 1) = A(0, s_1) \cap A(s_1, 1) = g(s_1)$. Así que $g(1) \subset g(s_1)$ y, como ambos son elementos de $\mu^{-1}(t_0)$, deducimos que $g(1) = g(s_1)$, lo que contradice la inyectividad de g. Lo anterior muestra que $A(0, s_1) \neq X$.

Definimos $X_1 = A(0, \frac{1}{2})$ y $X_2 = A(\frac{1}{2}, 1)$. Entonces X_1 y X_2 son subcontinuos propios de X tales que $X = X_1 \cup X_2$ y, si hacemos $Y = X_1 \cap X_2 = g(\frac{1}{2})$, tenemos que Y es un subcontinuo de X.

Ahora veremos que Y es terminal con respecto a X_1 y a X_2. Como los argumentos son similares, sólo mostraremos que Y es terminal con respecto a X_2. Para esto, tomemos dos subcontinuos K y L de X_2 tales que $Y \subset K$ y $Y \subset L$. Por el Lema 2.3.1, $K = A(s_1, s_2)$ y $L = A(s_3, s_4)$ para algunas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$ y $0 \leq s_3 \leq s_4 \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq s_1$ entonces $Y = g(\frac{1}{2}) \subset A(0, s_1) \cap K \subset A(0, s_1) \cap A(s_1, 1) = g(s_1)$, así que $Y \subset g(s_1)$, y como ambos están en $\mu^{-1}(t_0)$, llegamos a que $Y = g(s_1)$, lo cual implica que $s_1 = \frac{1}{2}$. Ahora, si $s_1 \leq \frac{1}{2}$ entonces $g(s_1) \subset A(0, \frac{1}{2}) \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = g(\frac{1}{2})$. Esto implica, también. que $s_1 = \frac{1}{2}$. Por tanto $s_1 = \frac{1}{2}$. En forma similar se muestra que $s_3 = \frac{1}{2}$. Ahora sólo hay que comparar a s_2 y s_4. Si $s_2 \leq s_4$ entonces $K = A(\frac{1}{2}, s_2) \subset A(\frac{1}{2}, s_4) = L$. Y si $s_4 \leq s_2$, entonces $L = A(\frac{1}{2}, s_4) \subset A(\frac{1}{2}, s_2) = K$. Por tanto, Y es terminal con respecto a X_2.

Por último, demostraremos que cada subcontinuo de X que intersecta tanto a $X \setminus X_1$ como a $X \setminus X_2$ contiene a Y.

Sea L un subcontinuo de X tal que $L \cap X \setminus X_1 \neq \emptyset$ y $L \cap X \setminus X_2 \neq \emptyset$. Primero demostraremos que $\mu(L) \geq t_0$. Supongamos que no es así. Es decir, $\mu(L) < t_0$. Sea α un arco ordenado de L a X y consideremos la función $h = \mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$. Observamos que h es una función continua tal que $h(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(L) < t_0$ y $h(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X) = 1$. Por lo tanto existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $h(s_0) = t_0$. Lo que implica que $L^* = \alpha(s_0) \in \mu^{-1}(t_0)$. Observamos que $Y \neq L^*$, ya que $L \subset L^*$,

$L \cap X\backslash X_1 \neq \emptyset$ y $Y \subset X_1$. Puesto que $L^* \in \mu^{-1}(t_0)$, de lo anterior se sigue que $L^* = g(s_L)$, con $s_L < \frac{1}{2}$ o $s_L > \frac{1}{2}$. Supongamos que $s_L < \frac{1}{2}$. Esto implica que $L^* \subset X_1$, pero esto contradice el que $L \cap X\backslash X_1 \neq \emptyset$. Por lo tanto debe suceder que $s_L > \frac{1}{2}$, pero esto implica que $L \subset X_2$, lo cual es nuevamente una contradicción con el hecho de que $L \cap X\backslash X_2 \neq \emptyset$. Puesto que las anteriores contradicciones vinieron de suponer que el tamaño de L era menor que t_0, concluimos que $\mu(L) \geq t_0$. Pero esto implica, por el Lema 2.3.1, que $L = \bigcup_{s_4 \leq s \leq s_5} g(s)$ para algunos $s_4, s_5 \in [0,1]$. Observamos que no puede suceder que $\frac{1}{2} < s_4$ o $s_5 < \frac{1}{2}$, pues esto implicaría que $L \subset X_2$ o $L \subset X_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $s_4 \leq s_2 \leq s_5$ y, por lo tanto, $Y \subset L$.

De todo lo anterior concluimos que los subcontinuos X_1 y X_2 satisfacen las condiciones de Krasinkiewicz y Nadler y, por lo tanto, el continuo X es pseudolineal. Con esto concluimos la prueba del teorema. □

C(X) tiene un nivel que es homeomorfo a un círculo.

Para finalizar esta sección analizaremos el caso cuando el hiperespacio de un continuo X contiene un nivel de Whitney homeomorfo a un círculo. Probaremos que el continuo resulta ser pseudocircular. Esto, junto con el Teorema 2.2.13, dan una caracterización de los continuos pseudocirculares. Nuevamente, como lo señalamos en el caso de los espacios pseudolineales, esta caracterización nos dice básicamente que los únicos subcontinuos cuyo hiperespacio tiene, a partir de cierto momento, niveles de Whitney homeomorfos a un círculo son los continuos pseudocirculares.

Con el fin de establecer este resultado, probaremos algunos lemas que fundamentarán la demostración del teorema principal.

Definición 2.3.3. Un *triodo* en X es un subcontinuo B de X el cual contiene un subcontinuo A tal que $B\backslash A$ tiene al menos tres componentes. Al continuo A se le llama un corazón del triodo.

Lema 2.3.4. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t \in [0,1]$ tal que $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1])$ no contiene 3-celdas. Entonces para toda $A \in \mathcal{A}$, se tiene que:

1) A no es el corazón de un triodo.
2) $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes para toda $B \in C(X)$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$. Demostraremos el inciso 1). Supongamos que sucede lo contrario. Según esto, existe un subcontinuo B de X tal que $B \backslash A$ tiene al menos tres componentes. Sean S_1, S_2 y S_3 componentes de $B \backslash A$ diferentes entre sí. Hagamos $B_i = S_i \cup A$, para $i = 1, 2$ y 3. Por el Teorema 1.11, cada B_i es un subcontinuo de X. Por los Teoremas 1.16, 1.1. y 1.25 existen arcos estrictamente ordenados $\sigma_i : [0,1] \to C(X)$ de A a B_i para cada $i = 1, 2$ y 3.

Dada i, se tiene que $A \subset \sigma_i(t)$ para toda $t \in [0,1]$. De donde se tiene lo siguiente:

a) $(\cup_{i=1}^{3} \sigma(t_i)) \in C(X)$ para cualquier elección de $(t_1, t_2, t_3) \in I^3$, donde $I^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b) Puesto que $\mu(A) \geq t$, se tiene que $\mu(\cup_{i=1}^{3} \sigma(t_i)) \geq t$ para cualquier elección de $(t_1, t_2, t_3) \in I^3$.

Consideremos la función $h : I^3 \to C(X)$ definida por

$$h((t_1, t_2, t_3)) = \cup_{i=1}^{3} \sigma(t_i) \text{ para cada tercia } (t_1, t_2, t_3) \in I^3.$$

Por a), efectivamente, h es una función de I^3 en $C(X)$. Por la continuidad de la función unión y el hecho de que cada σ_i es continua, tenemos que h es una función continua.

Por la forma en que está definida cada σ_i y el hecho de que $S_i \neq S_j$ y $S_i \neq S_k$, para $i \neq j$ e $i \neq k$, tenemos que h es una función inyectiva. De modo que h es una función continua e inyectiva de un espacio compacto a un espacio Hausdorff. Lo que implica que h es un homeomorfismo en su imagen. Lo anterior implica que $h(I_3) \subset \mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1])$ contiene una 3-celda, lo que contradice la hipótesis del lema. Puesto que esta contradicción vino de suponer que A era un corazón de algún triodo se concluye la primera parte del lema.

Para demostrar la segunda parte del lema tomemos B en $C(X)$ y supongamos que $A \cap B$ tiene más de tres componentes. Sean C_1, C_2 y C_3 componentes diferentes de $A \cap B$. Sea α_i un arco ordenado de C_i a B para cada $i = 1, 2$ y 3. Por el Teorema 1.19 sabemos que $\alpha_i([0,1]) \subset C(X)$ para cada i. Sean t_i, t_j y $t_k \in (0,1)$ tales que $\alpha_i(t_i) \cap [\alpha_j(t_j) \cup \alpha_k(t_k)] = \emptyset$, para $i \neq j$ e $i \neq k$.

Sabemos que $\alpha_i(t_i) \backslash A \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, 3$ (Teorema 1.25.). Consideremos el subcontinuo $A \cup (\cup_{i=1}^{3} \alpha_i(t_i)) = M$. Por construcción, el subconjunto $M \backslash A$ tiene al menos tres componentes, a saber, si elegimos puntos $x_i \in \alpha_i(t_i)\backslash A$, entonces la componente C_i de $M\backslash A$ está contenida en $\alpha_i(t_i)$, así que $C_i \neq C_j$ y $C_i \neq C_k$, para $i \neq j$ e $i \neq k$.

Lo que implica que A es el corazón de un triodo. Pero esto contradice la primera parte de este lema. Por lo tanto, probamos que $A \cap B$ tiene a los más dos componentes. Con lo anterior completamos la demostración del lema. □

Lema 2.3.5. Sean X un continuo y μ una función de Whitney. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo para alguna $t_0 \in [0,1)$. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$. Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $B \in C(X)$, tales que $\mu(B) \leq \mu(A)$ y $A \cap B$ es disconexo, se tiene que $A \cup B = X$.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $B \in C(X)$, con $\mu(B) \leq \mu(A)$. Supongamos que $A \cap B$ es disconexo. Por el Teorema 2.1.9 sabemos que $\mu^{-1}([t_0,1])$ es homeomorfo a una 2-celda. Esto implica que $\mathcal{A}$ no contiene 3-celdas. Esto y el Lema 2.3.4.(2) implican que $A \cap B$ tiene exactamente dos componentes.

Sean C_1 y C_2 las componentes de $A \cap B$ y $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ arcos ordenados de C_1 a A, de C_1 a B, de C_2 a A y de C_2 a B, respectivamente. Consideremos las funciones h y $g : [0,1] \to [0,1]$ definidas por $h(r) = \mu(B \cup \alpha(r))$ y $g(s) = \mu(B \cup \gamma(s))$ para todas r y $s \in [0,1]$. Observamos que h y g son funciones continuas, debido a la continuidad de la función μ y de las funciones definidas por $h^*(r) = B \cup \alpha(r)$ y $g^*(s) = B \cup \gamma(s)$ (Teorema 1.4). Fijémonos en las siguientes series de desigualdades:

$$h(0) = \mu(B \cup \alpha(0)) = \mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B \cup A) = h(1)$$

$$g(0) = \mu(B \cup \gamma(0)) = \mu(B) \leq \mu(A) \leq \mu(B \cup A) = g(1)$$

Esto implica que existen números r_1 y $s_1 \in [0,1]$ tales que $h(r_1) = g(s_1) = \mu(A)$. Lo que implica que $\mu(B \cup \alpha(r_1)) = \mu(B \cup \gamma(s_1)) = \mu(A)$. Hagamos $D = B \cup \alpha(r_1)$ y $F = B \cup \gamma(s_1)$.

Ahora, estamos listos para probar que $A \cup B = X$. Consideraremos dos casos:

a) $\alpha(r_1) \cap C_2 = \emptyset$.

Observamos que:

$$\begin{aligned} D \cap A &= (B \cup \alpha(r_1)) \cap A \\ &= (B \cap A) \cup (\alpha(r_1) \cap A) \\ &= C_1 \cup C_2 \cup \alpha(r_1) \end{aligned}$$

Puesto que $C_2 \cap \alpha(r_1) = \emptyset$ y $C_1 \subset \alpha(r_1)$, concluimos que $D \cap A = \alpha(r_1) \cup C_2$. De donde se sigue que $D \cap A$ tiene dos componentes. Esto implica, por el Teorema 1.22, que existe un círculo $\mathcal{C}$ contenido en $C(D \cup A) \cap \mu^{-1}(t)$, con $t = \mu(A)$. Ya que $\mu^{-1}(t)$ es un círculo (Teorema 2.1.5.), lo anterior implica que $\mathcal{C} = \mu^{-1}(t)$. De donde se sigue que $X = \bigcup \mu^{-1}(t) = \bigcup \mathcal{C} \subset \bigcup [C(D \cup A)] \subset A \cup B$. Por lo tanto, tenemos que $X = A \cup B$.

b) $\alpha(r_1) \cap C_2 \neq \emptyset$.

Si ocurre que $\alpha(r_1) \cup C_2 = A$. Esto implica, en particular, que $A \subset \alpha(r_1) \cup C_2 \subset D$ y, puesto que A y D están en $\mu^{-1}(t)$, se sigue que $A = D$. Pero esto implica, a su vez, que $B \subset A$. De donde se desprende que $B = B \cap A = C_1 \cup C_2$. Lo que nos dice que B es disconexo. Pero esto está en contradicción con el hecho de que $B \in C(X)$.

De manera que podemos suponer que $\alpha(r_1) \cup C_2 \neq A$. Hagamos $E = \alpha(r_1) \cup C_2$. Como E es un subcontinuo propio de A, existe un arco ordenado τ de E a A. Consideremos la función $\tau^* = \mu \circ \tau : [0,1] \to [0,1]$. Observamos que $\tau^*(0) = \mu(\tau(0)) = \mu(\alpha(r_1) \cup C_2) < t$ y $\tau^*(1) = \mu(\tau(1)) = \mu(A) = t > t_0$. De esto se sigue la existencia de $w_1 \in (0,1)$ tal que $t_0 < \tau^*(w_1) < t$.

Mostraremos que $\tau(w_1)$ es el corazón de un triodo. Sean $t_1, t_2 > 0$ tales que $\beta(t_1) \cap \delta(t_2) = \emptyset$. Hagamos $T = A \cup \beta(t_1) \cup \delta(t_2)$. Observamos que $T \backslash \tau(w_1) = (A \backslash \tau(w_1)) \cup (\beta(t_1) \backslash \tau(w_1)) \cup (\delta(t_2) \backslash \tau(w_1))$. Puesto que $(\beta(t_1) \backslash A) \neq \emptyset$ y $(\delta(t_2) \backslash A) \neq \emptyset$ y $\tau(w_1) \subset A$, se tiene que $\beta(t_1) \backslash \tau(w_1) \neq \emptyset$ y $\delta(t_2) \backslash \tau(w_1) \neq \emptyset$ y, por lo que vimos en el párrafo anterior, se tiene, también que $A \backslash \tau(w_1) \neq \emptyset$. Es claro que $(\beta(t_1) \backslash \tau(w_1))$ y $(\delta(t_2) \backslash \tau(w_1))$ son conjuntos separados, ya que $\beta(t_1) \cap \delta(t_2) = \emptyset$. Puesto que $\beta(t_1) \cap A = C_1$, $\delta(t_2) \cap A = C_2$ y $C_1 \cup C_2 \subset \alpha(r_1) \cup C_2 = E \subset \tau(w_1)$, se sigue que tanto $(A \backslash \tau(w_1))$ y $(\beta(t_1) \backslash \tau(w_1))$ como $(A \backslash \tau(w_1))$ y $(\delta(t_2) \backslash \tau(w_1))$ son también conjuntos separados. De todo lo anterior concluimos que $\tau(w_1)$ es el corazón de un triodo. Pero esto contradice el Teorema 2.3.4.1, ya que $\tau(w_1) \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1])$ y $\mu^{-1}((t_0, 1])$ no contiene 3-celdas (ya que es una 2-celda). Puesto que esta contradicción vino de suponer que $\alpha(r_1) \cap C_2 \neq \emptyset$, sólo sucede que $\alpha(r_1) \cap C = \emptyset$. Pero esto implicaba que $X = A \cup B$, que es lo que se quería demostrar.

De esta forma finalizamos la prueba del lema. $\square$

Corolario 2.3.6. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo para alguna $t_0 \in [0, 1)$. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1))$. Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $B \in C(X)$, con $A \cap B$ disconexo, se tiene que $A \cup B = X$.

Demostración. Si $\mu(B) \leq \mu(A)$, el resultado se sigue del teorema anterior. Si $\mu(A) < \mu(B)$ podemos aplicar el teorema anterior a los continuos A y B pero considerándolos en papeles invertidos. $\square$

Lema 2.3.7. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo para alguna $t_0 \in [0,1)$. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$. Entonces, dada $A \in \mathcal{A}$ no existen subcontinuos C_1, C_2 y C_3 de X tales que $A \subset C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $C_1 \backslash (C_2 \cup C_3) \neq \emptyset$, $C_2 \backslash (C_1 \cup C_3) \neq \emptyset$ y $C_3 \backslash (C_2 \cup C_1) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$. Supongamos que existen tales subcontinuos. Puesto que $A \subset C_1 \cap C_2 \cap C_3$, se sigue que C_1, C_2 y $C_3 \in \mathcal{A}$. Además, $C_1 \cup C_2$ es diferente de X, ya que $C_3 \backslash (C_2 \cup C_1) \neq \emptyset$. Lo que implica que $C_1 \cap C_2$ es un subconjunto conexo de X (Corolario 2.3.6.). De la misma forma se tiene que $C_2 \cap C_3$ y $C_1 \cap C_3$ son subconjuntos conexos y, por lo tanto, subcontinuos de X.

Hagamos $C = (C_1 \cap C_2) \cup (C_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_3)$. Puesto que $A \subset (C_1 \cap C_2) \cap (C_2 \cap C_3) \cap (C_1 \cap C_3)$, tenemos que C es conexo y por lo tanto un subcontinuo de X. Es claro que $C \in \mathcal{A}$ (pues $A \subset C$). Ahora, sea $T = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

En lo que sigue demostraremos que T es un triodo cuyo corazón es C. Observamos que $T \backslash C = (C_1 \backslash C) \cup (C_2 \backslash C) \cup (C_3 \backslash C)$. Mostraremos que $Ce(C_1 \backslash C) \cap (C_2 \backslash C) = \emptyset$. Para ver esto, notemos que $Ce(C_1 \backslash C) \cap (C_2 \backslash C) \subset C_1 \cap (C_2 \backslash C) \subset (C_1 \cap C_2) \backslash C = \emptyset$. Por lo tanto se tiene que $Ce(C_1 \backslash C) \cap (C_2 \backslash C) = \emptyset$. De la misma forma se prueba que $Ce(C_1 \backslash C) \cap (C_2 \backslash C) = \emptyset$. Por tanto $C_1 \backslash C$ y $C_2 \backslash C$ están separados. Con argumentos análogos podemos concluir que $(C_1 \backslash C), (C_2 \backslash C)$ y $(C_3 \backslash C)$ están mutuamente separados. Puesto que cada $(C_i \backslash C) \neq \emptyset$ (ya que $C_i \backslash C_j \cup C_k \neq \emptyset$ si $i \neq j$ e $i \neq k$), lo anterior implica que $T \backslash C$ tiene al menos tres componentes. De lo cual concluimos que T es un triodo que tiene como corazón a C. Como $C \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ no contiene 3-celdas, lo anterior contradice el Lema 2.3.4. Puesto que esta contradicción vino de suponer la existencia de los subcontinuos C_1, C_2 y C_3, se sigue el lema. $\square$

Lema 2.3.8. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo para alguna $t_0 \in [0,1)$. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$. Entonces, para cada $Z \in \mathcal{A}$, con $intZ \neq \emptyset$, se cumple que los conjuntos $M = Z \cap Ce(X \backslash Z)$ y $X \backslash Z$ no pueden ser conexos simultáneamente.

Demostración. Supongamos que esto sí ocurre. Puesto que, por hipótesis, M es un subcontinuo propio de Z, existe un arco ordenado σ de M a Z (Teoremas

1.16 1.19) tal que todos sus elementos están contenidos en Z. Como $\mu(Z) > t_0$, existe un elemento $L = \sigma(s)$ tal que $\mu(Z) > \mu(L) > t_0$. Consideremos a los subcontinuos $N = L \cup Ce(X\backslash Z)$ y Z. Mostraremos que ellos cumplen las condiciones de pseudolinealidad de Krasinkiewicz y Nadler (Definición 2.2.1).

Es claro que N y Z son subcontinuos de X (pues N es la unión de dos continuos que contienen a M). Además son subcontinuos propios de X ya que $\mu(Z) < 1$ y $N \neq X$ (ya que si $N = X$, puesto que $\mu(Z) > \mu(L)$, tendríamos que para $y \in Z\backslash L$, se seguiría que $y \in Ce(X\backslash Z)$. Lo cual implicaría que $y \in Ce(X\backslash Z) \cap Z = M \subset L$ lo cual es absurdo).

Debido a que $Z \cup (X\backslash Z) = X$ y $X\backslash Z \subset L \cup Ce(X\backslash Z) = N$, tenemos que $X = N \cup Z$.

Para constatar la conexidad del subconjunto $N \cap Z$ nos fijamos en las siguientes igualdades.

$$
\begin{aligned}
Z \cap N &= (Z \cap L) \cup (Z \cap Ce(X\backslash Z)) \\
&= (Z \cap L) \cup M \\
&= Z \cap L \\
&= L
\end{aligned}
$$

Así que $Z \cap N$ es precisamente L y, por lo tanto, un subcontinuo de X.

Mostraremos que L es terminal con respecto a N y a Z.

Para mostrar la terminalidad de L con respecto N, tomemos dos subcontinuos propios R y S de N tales que $L \subset R \cap S$. Supongamos que $R\backslash S \neq \emptyset$ y que $S\backslash R \neq \emptyset$. Hagamos $C_1 = R$, $C_2 = S$ y $C_3 = Z$. Observamos que $L \subset C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Además, puesto que $L \subset R \cap S$ y $R\backslash S \neq \emptyset$, tenemos que $C_1 \not\subset C_2 \cup C_3$. De la misma forma se deduce que $C_2 \not\subset C_1 \cup C_3$. Puesto que $\mu(Z) > \mu(L)$ y $N \cap Z = L$ se concluye también que $C_3 \not\subset C_1 \cup C_2$.

Sin embargo, todo lo anterior y el hecho de que $L \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1])$ contradicen el Lema 2.3.7. Por lo cual debe ocurrir que $R \subset S$ o $S \subset R$.

De manera similar se prueba que L es terminal con respecto a Z.

A continuación mostraremos que todo subcontinuo K de X que intersecta tanto a $X\backslash Z$ como a $X\backslash N$ tiene que contener a L.

Sea K un subcontinuo de X que cumple las condiciones que acabamos de señalar y supongamos que K no contiene a L. Puesto que $L \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1))$, sabemos que $L \cap K$ tiene a lo más dos componentes (Lema 2.3.4). Analizaremos el caso en que $L \cap K$ es conexo. Esto implica que $L \cap K$ es un subcontinuo de L.

Hagamos $J = L \cap K$. Ya que $J \subset L$ y $\mu(L) > t_0$, existe un subcontinuo L^* de L tal que $J \subset L^* \subset L$ y $\mu(L) > \mu(L^*) > t_0$. En particular, tenemos que L^* es un subcontinuo propio de L.

Sea $B = L \cup K$. Entonces

$$\begin{aligned} B \backslash L^* &= (L \backslash L^*) \cup (K \backslash L^*) \\ &= (L \backslash L^*) \cup (K \backslash L) \\ &= (L \backslash L^*) \cup (K \backslash (Z \cap N)) \\ &= (L \backslash L^*) \cup (K \backslash Z) \cup (K \backslash N) \end{aligned}$$

Los tres últimos uniendos son no vacíos y, como $L \cap ((K \backslash Z) \cup (K \backslash N)) = \emptyset$ y $K \cap (L \backslash L^*) = \emptyset$, llegamos a que estos uniendos están mutuamente separados. Por tanto $B \backslash L^*$ tiene al menos tres componentes, de manera que L^* es el corazón de un triodo. Esto contradice el Lema 2.3.4. Por tanto $L \cap K$ no puede ser conexo.

Supongamos ahora que $L \cap K$ es disconexo. Esto implica que $L \cup K = X$ (Corolario 2.3.6). Además, por el Lema 2.3.4, $L \cap K$ tiene exactamente dos componentes J_1 y J_2. Aplicando el Corolario 2.1.10. tenemos que $\mu^{-1}([t_0, 1])$ es homeomorfo a un disco. Entonces, por el Lema 2.3.4, L no es el corazón de ningún triodo. En particular, $X \backslash L$ tiene a lo más dos componentes. Observamos que $X \backslash L = (X \backslash Z) \cup (X \backslash N)$. Los dos uniendos son abiertos no vacíos. Esto muestra que $X \backslash L$ tiene exactamente dos componentes, $D_1 = X \backslash Z$ y $D_2 = X \backslash N$. Observamos que $L \cup Ce(D_1) = L \cup D_1 = N$ y $L \cup Ce(D_2) = L \cup D_2 = Z$. Así que $Ce(D_i) \cap L \neq \emptyset$ para $i = 1$ y 2. Por el Lema 2.3.5, $L \cap Ce(D_i)$ es conexo. Como $L \cup K = X$, cada D_i es subconjunto de K, de modo que $\emptyset \neq L \cap Ce(D_i) \subset L \cap K = J_1 \cup J_2$. Así que $L \cap Ce(D_i) \subset J_{k_i}$ para alguna $k_i \in \{1, 2\}$. Supongamos que $L \cap Ce(D_1) \subset J_1$ y que $L \cap Ce(D_2) \subset J_2$ Sean $E_1 = J_1 \cup Ce(D_1)$ y $E_2 = J_2 \cup Ce(D_2)$. Es claro que E_1 y E_2 son cerrados, ajenos y no vacíos. Afirmamos que $K = E_1 \cup E_2$. Puesto que $L \cap K = J_1 \cup J_2$, se tiene que $J_1 \cup J_2 \subset K$ y, puesto que cada D_i es un subconjunto de K y $L \cap Ce(D_i) \subset J_1 \cup J_2$, se sigue que $E_1 \cup E_2 \subset K$. Ahora, sea $k \in K$, entonces $k \in X \backslash L$ (ya que $L \cup K = X$) o $k \in K \cap L$. Si $k \in X \backslash L$ entonces $k \in D_1 \cup D_2$ y, por lo tanto $k \in E_1 \cup E_2$. Si $k \in X \cap L$ entonces $k \in J_1 \cup J_2$ y, por lo tanto, $k \in E_1 \cup E_2$. De las anteriores contenciones se obtiene $K = E_1 \cup E_2$. Pero esto contradice la conexidad de K y muestra que $K \cap L$ tampoco puede ser disconexo.

Como esta contradicción vino de suponer que $L \backslash K \neq \emptyset$, concluimos que $L \subset K$.

La discusión anterior muestra que los subcontinuos Z y N satisfacen las condiciones de linealidad de Krasinkiewicz y Nadler. Lo que implica que existe un valor $t > t_0$ tal que el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un segmento (Teorema 2.2.21). Pero esto está en contradicción con el Teorema 2.1.5.

La anterior contradicción vino de suponer que los subconjuntos M y $X \backslash Z$ eran simultáneamente conexos. Por lo que se concluye finalmente el lema. $\square$

Lema 2.3.9. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0)$ un círculo para alguna $t_0 \in [0,1)$. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$. Entonces, para cada $Z \in \mathcal{A}$, se tiene que $X \backslash Z$ es conexo.

Demostración.
Sea $Z \in \mathcal{A}$. Supongamos que $X \backslash Z$ es disconexo. Primero diremos por qué $X \backslash Z$ debe tener exactamente dos componentes. Por el Teorema 2.1.9, $\mu^{-1}([t_0,1])$ es homeomorfo a un disco y, por lo tanto, no contiene 3-celdas. Por el Lema 2.3.4., Z no es el corazón de un triodo. Por tanto $X \backslash Z$ no puede tener 3 componentes. Concluimos entonces que $X \backslash Z$ tiene exactamente 2 componentes.

Sean Q_1 y Q_2 las componentes de $X \backslash Z$. Mostraremos que la cerradura de cada una de estas componentes intersecta Z en un conexo. Supongamos que la intersección de la cerradura de la componente Q_1 con Z es disconexa. Sean J_1 y J_2 dos componentes de $Ce(Q_1) \cap Z$. Sabemos que existen arcos ordenados α_1 y α_2 de J_1 a $Ce(Q_1)$ y de J_2 a $Ce(Q_1)$, respectivamente (Teoremas 1.16 y 1.19). Puesto que J_1 y J_2 son conjuntos compactos y ajenos, podemos encontrar números s_1 y $s_2 \in (0,1)$ tales que $\alpha(s_1) \cap \alpha(s_2) = \emptyset$. Puesto que α_1 y α_2 son arcos ordenados de J_i a $Ce(Q_1)$, se tiene que $\alpha(s_i) \backslash Z \neq \emptyset$. De modo que si consideremos los subcontinuos $C_1 = Z \cup \alpha(s_1), C_2 = Z \cup \alpha(s_2)$ y $C_3 = Z \cup Q_2$, tendremos que estos contradicen lo que afirma el Lema 2.3.7. De manera similar se prueba que la intersección de la cerradura de la componente Q_2 con Z no puede se disconexa.

Por consiguiente, tenemos que $X \backslash Z$ tiene dos componentes Q_1 y Q_2 cuya cerradura intersecta a Z en un conexo.

Consideremos al subcontinuo $Z_0 = Z \cup Q_1$. Entonces sucede que $X \backslash Z_0 = Q_2$. Hacemos $M = Z_0 \cap Ce(X \backslash Z_0) = Z_0 \cap Ce(Q_2) = Z \cap Ce(Q_2)$, el cual es conexo por lo que acabamos de ver. De manera que tenemos que $X \backslash Z_0$ y $M = Z_0 \cap Ce(X \backslash Z_0)$ son conexos. Pero esto contradice el Lema 2.3.8, ya que $int Z_0 \neq \emptyset$ (los puntos de Q_1 están en el interior de Z_0) y $Z_0 \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$.

Puesto que esta contradicción vino de suponer que $X\setminus Z$ era disconexo, se concluye el lema. $\square$

Observación 2.3.10. De los Lemas 2.3.8 y 2.3.9 se sigue que, si $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo y tomamos un subcontinuo propio Z de X con interior distinto del vacío y $t_0 < \mu(Z)$, entonces $X\setminus Z$ es conexo y $M = Z \cap Ce(X\setminus Z) = K_1 \cup K_2$, con K_1 y K_2 subcontinuos ajenos no vacíos (si existieran más de dos componentes en $Z \cap Ce(X\setminus Z)$ entonces se contradiría el Lema 2.3.4).

Lema 2.3.11. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo. Entonces existen subcontinuos propios Y y Z de X, con interior distinto del vacío, tales que $\mu(Y)$ y $\mu(Z) > t_0$ y $Y \cup Z = X$.

Demostración. Escribamos $\mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0,1))$ y sea $M \in \mathcal{A}$. De lo anterior se tiene que $\mu(M) = t$, con $t > t_0$. Por lo que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un círculo (Teorema 2.1.5). Sea $\eta : S^1 \to \mu^{-1}(t)$ un homeomorfismo. Consideremos la función inducida $C(\eta) : C(S^1) \to C(\mu^{-1}(t))$. Sabemos que $C(\eta)$ es continua ([1, Teorema 1.20]). Sea $f : C(S^1) \to \mu^{-1}((t_0,1])$ dada por $f(L) = \bigcup[C(\eta)(L)]$. Por el Teorema 1.14, f está bien definida y es continua. Sea $\mathcal{K} = f^{-1}(\{X\})$. Ya que $f(S^1) = \bigcup[C(\eta)(S^1)] = \bigcup \mu^{-1}(t) = X$, tenemos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Claramente $\mathcal{K}$ es un subconjunto compacto de $C(S^1)$ y si $p \in S^1$, entonces $f(\{p\}) = \cup\eta(\{p\}) = \cup(\{\eta(p)\}) = \eta(p)$. Ya que $\eta(p) \in \mu^{-1}(t)$, tenemos que $\eta(p) \neq X$. De manera que $\mathcal{K} \cap F_1(S^1) = \emptyset$.

Sea $\omega : C(S^1) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $A \in \mathcal{K}$ tal que $\omega|\mathcal{K}$ alcanza su mínimo en A. Es decir, $\omega(A) \leq \omega(B)$ para toda $B \in \mathcal{K}$. Por lo que dijimos antes, A no es un conjunto degenerado. Entonces A es un arco o $A = S^1$. En los dos casos, A se puede escribir como la unión de dos de sus subcontinuos propios, es decir, $A = C \cup D$, donde C y D son subarcos propiamente contenidos en A. Sean $Y_1 = f(C)$ y $Z_1 = f(D)$. Entonces Y_1 y Z_1 son subcontinuos de X, $Y_1 \cup Z_1 = f(C) \cup f(D) = (\cup\eta(D)) \cup (\cup\eta(C)) = \cup\eta(D \cup C) = \cup\eta(A) = X$. Por la elección de A, tenemos que $C, D \notin \mathcal{K}$. De manera que $f(C) \neq X \neq f(D)$. Entonces Y_1 y Z_1 son subconjuntos propios de X. Tomando arcos ordenados de Y_1 y Z_1 a X, podemos obtener $Y, Z \in C(X)\setminus\{X\}$ tales que $Y_1 \subset Y$, $Z_1 \subset Z$ y $\mu(Y)$ y $\mu(Z) > t_0$. Claramente, $X = Y \cup Z$. Como $\emptyset \neq X\setminus Z \subset Y$, tenemos que $intY \neq \emptyset$. De igual manera se tiene que $intZ \neq \emptyset$. De esta forma finalizamos la prueba del lema. $\square$

Lema 2.3.12. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo. Sean K_1 y K_2 las componentes de $Y \cap Ce(X \backslash Y)$ (donde Y es como en el Lema 2.3.11 y K_1 y K_2 como en la Observación 2.3.10). Entonces existen subcontinuos propios X_1 y X_2 de X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 = Ce(X \backslash Y)$, $X_2 = Ce(X \backslash X_1)$, $Y = X_2 \cup K_1 \cup K_2$, $X_1 \cap X_2 \subset K_1 \cup K_2$ y si D es un subcontinuo de X_i, con $D \cap K_1 \neq \emptyset$ y $D \cap K_2 \neq \emptyset$, entonces se cumple que $D = X_i$.

Demostración. Consideramos a los subcontinuos Y y Z de X del Lema 2.3.11..

Hagamos $M = Y \cap Ce(X \backslash Y)$. Puesto que $Y \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1))$ e $intY \neq \emptyset$, sabemos que M y $X \backslash Y$ no pueden ser simultáneamente conexos (Lema 2.3.8). Aun más, por el Lema 2.3.9 y la Observación 2.3.10, sabemos que $X \backslash Y$ es conexo y que $Y \cap Ce(X \backslash Y) = K_1 \cup K_2$, con K_1 y K_2 subcontinuos ajenos no vacíos.

Hagamos $X_1 = Ce(X \backslash Y)$. Por lo que dijimos en el párrafo anterior y el hecho de que Y tiene interior distinto del vacío, tenemos que X_1 es un subcontinuo propio de X.

La discusión que sigue es con el propósito de hallar al subcontinuo X_2.

En primer lugar, mostraremos que el conjunto $X \backslash X_1$ es conexo. Para lo cual mostraremos, primeramente, que $X \backslash X_1$ tiene sólo un número finito de componentes. Supongamos que $X \backslash X_1$ tiene una infinidad de componentes. Es decir $X \backslash X_1 = \cup_{\alpha \in J} B_j$, donde J es un conjunto infinito y cada B_j es una componente de $X \backslash X_1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(X) \subset \mu^{-1}((t_0, 1])$. Sea F un subconjunto finito de X tal que $F \in B_\varepsilon^H(X)$. Hagamos $E = X_1 \cup (\bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F \neq \emptyset\})$. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera (Teorema 1.10.) tenemos que $X_1 \cup B_\alpha$ es un subcontinuo de X para cada $\alpha \in J$. De modo que E es un subcontinuo de X. Mostraremos que $H(E, X) < \varepsilon$. Para lo cual debemos mostrar que $X \subset N(\varepsilon, E)$ y que $E \subset N(\varepsilon, X)$. La última contención es inmediata, por lo que sólo resta demostrar que $X \subset N(\varepsilon, E)$. Sea $y \in X$. Puesto que $H(F, X) < \varepsilon$, existe $z \in F$ tal que $d(y, z) < \varepsilon$. Si $z \in X_1$, entonces $y \in N(\varepsilon, X_1) \subset N(\varepsilon, E)$. Supongamos que $z \in X \backslash X_1$. Entonces, por hipótesis, $z \in B_\beta$ para alguna $\beta \in J$ y, por lo tanto, $z \in B_\beta \cap F$, para alguna $\beta \in J$. Lo anterior implica que $z \in \bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F \neq \emptyset\}$, y por lo tanto en E. De donde se sigue que $y \in N(\varepsilon, E)$. Todo lo anterior nos hace concluir que $H(E, X) < \varepsilon$.

Lo anterior implica, en particular, que $E \in \mu^{-1}((t_0, 1])$. Además, puesto que X_1 tiene interior distinto del vacío, E tiene interior distinto del vacío. Entonces, por el Teorema 2.3.9, tenemos que $X \backslash E$ es conexo. Pero esto contradice la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} X \backslash E &= X \backslash (X_1 \cup (\bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F \neq \emptyset\})) \\ &= (X \backslash X_1) \cap (X \backslash (\bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F \neq \emptyset\})) \\ &= \bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F = \emptyset\}, \end{aligned}$$

en vista de que la expresión de la derecha representa a un conjunto disconexo (debido a que $\bigcup \{B_\alpha : B_\alpha \cap F = \emptyset\}$ es un conjunto con una infinidad de componentes y F es un conjunto finito).

Por lo tanto, $X \backslash X_1$ tiene sólo un número finito de componentes.

A continuación mostraremos que, en realidad, $X \backslash X_1$ es conexo. Supongamos que $X \backslash X_1$ tiene n componentes $C_1, C_2, ..., C_n$ $(n > 1)$. Para cada componente C_i de $X \backslash X_1$, $Ce(C_i) \cap X_1 \neq \emptyset$ (Teorema 1.10). Así que $X_1 \cup Ce(C_i)$ es un subcontinuo de X. Sea $\beta_i : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de X_1 a $X_1 \cup Ce(C_i)$.

En el Lema 2.3.4 argumentamos que si tomamos a $I^n = [0,1] \times [0,1] \times ... \times [0,1]$ (para $n = 3$) y consideremos la función $h : I^n \to C(X)$ definida por:

$$h((t_1, t_2, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \beta(t_i) \text{ para cada n-ada } (t_1, t_2, ..., t_n) \in I^n,$$

entonces h resulta ser una función continua. Entonces podemos considerar la función $g = \mu \circ h : I^n \to [0,1]$, la cual resulta ser continua debido a la continuidad de las funciones μ y h.

Observamos que

$$g(0, .., 0) = \mu(h(0, 0, ..., 0)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} \beta(0)) = \mu(X_1) < 1$$

$$g(1, ..., 1) = \mu(h(1, 1, ..., 1)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} \beta(1)) = \mu(X) = 1$$

Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ dada por $\kappa(t) = g(t,t,...,t)$. Entonces $\kappa(0) = \mu(X_1) < 1$ y $k(1) = \mu(X) = 1$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t^* \in [0,1]$ tal que $t_0 < \kappa(t^*) < 1$. Lo que implica, en particular, que $M = h(t^*,...,t^*) \in \mathcal{A}$. Notemos que $t^* < 1$, así que $C_i \backslash \beta_i(t^*) = (X_1 \cup Ce(C_i)) \backslash \beta_i(t^*) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1,...,n\}$.

Además sabemos que M tiene interior distinto del vacío ya que X_1 lo tiene. Todo esto implica que $X \backslash M$ es conexo (Teorema 2.3.9).

Pero esto es, nuevamente, una contradicción, ya que se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned} X\backslash M &= X\backslash \bigcup_{i=1}^n \beta(t^*) \\ &= (X_1 \cup X\backslash X_1)\backslash(\bigcup_{i=1}^n \beta(t^*)) \\ &= (X_1 \cup (\bigcup_{i=1}^n C_i))\backslash(\bigcup_{i=1}^n \beta(t^*)) \\ &= (\bigcup_{i=1}^n C_i)\backslash(\bigcup_{i=1}^n \beta(t^*)) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (C_i\backslash \beta_i(t^*)), \end{aligned}$$

y el conjunto de la derecha de esta igualdad es claramente disconexo.

Esta contradicción muestra que $X\backslash X_1$ es conexo.

Por construcción, tenemos que $Y \cap X_1 = K_1 \cup K_2$, con K_1 y K_2 subcontinuos ajenos y distintos del vacío de X. Proponemos a la cerradura del conjunto $X\backslash X_1$ como el subcontinuo X_2. Es decir, $X_2 = Ce(X\backslash X_1)$. Por lo que acabamos de ver, efectivamente, X_2 es un subcontinuo de X. El subcontinuo X_2 es un subconjunto propio de X debido a que se tiene la contención $X_2 = Ce(X\backslash X_1) = Ce(X\backslash Ce(X\backslash Y)) = Ce(int(Y)) \subset Y$ y Y es un subconjunto propio de X.

En resumen, tenemos que $X_1 = Ce(X\backslash Y)$ y $X_2 = Ce(X\backslash X_1)$ son subcontinuos propios de X.

Para demostrar que $X_1 \cup X_2 = X$ es suficiente con mostrar que se tiene la contención $X \subset X_1 \cup X_2$. Notemos que $X = X_1 \cup (X\backslash X_1) \subset X_1 \cup X_2$. Por tanto $X = X_1 \cup X_2$.

Ahora mostraremos que si D es un subcontinuo propio de X_2 tal que $D \cap K_1 \neq \emptyset$ y $D \cap K_2 \neq \emptyset$ entonces $D = X_2$.

En primer lugar, demostraremos la siguiente propiedad:

(*) $Y = (X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2$ y $Y = Ce(X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2$. Para mostrar que $Y \subset (X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2$, procedemos como sigue. Sea $y \in Y$, entonces $y \in intY$ o $y \in Fr(Y)$. Si $y \in intY$ entonces $y \notin X_1$ y, por lo tanto, $y \in$

$X\backslash X_1 \subset Ce(X\backslash X_1)$. Si $y \in Fr(Y)$ entonces, en particular, $y \in Ce(X\backslash Y)$. De modo que $y \in Ce(X\backslash Y) \cap Y = K_1 \cup K_2$. Por lo tanto $Y \subset X\backslash X_1 \cup K_1 \cup K_2$. Como $X\backslash Y \subset X_1$, tenemos que $X\backslash X_1 \subset Y$ y, puesto que $K_1 \cup K_2 \subset Y$ (pues $Y \cap X_1 = K_1 \cup K_2$), se tiene que $Ce(X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2 \subset Y$. Con lo cual se concluye que $Y = Ce(X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2$ y $Y = (X\backslash X_1) \cup K_1 \cup K_2$.

De (*) obtenemos de paso que $X_1 \cap X_2 \subset X_1 \cap Y = K_1 \cup K_2$.

Sea D un subcontinuo de X_2 tal que $D \cap K_1 \neq \emptyset$ y $D \cap K_2 \neq \emptyset$. Supongamos que $D \neq X_2$. Aseguramos que $D \cup (K_1 \cup K_2)$ está contenido propiamente en Y. Si $D \cup (K_1 \cup K_2) = Y$ entonces tendríamos en particular que $X\backslash X_1 \subset D \cup (K_1 \cup K_2)$. Puesto que $(X\backslash X_1) \cap (K_1 \cup K_2) = \emptyset$, llegaríamos a que $X\backslash X_1 \subset D$. Lo que implicaría que $X_2 = Ce(X\backslash X_1) \subset D$ y, puesto que $D \subset X_2$, concluiríamos que $D = X_2$. Lo cual estaría en contradicción con nuestra suposición original. Por lo tanto, $D \cup (K_1 \cup K_2) \subsetneq Y$.

Puesto que $D \cup (K_1 \cup K_2)$ es un subconjunto propio de Y y $\mu(Y) > t_0$, existe un subcontinuo F de Y tal que $D \cup (K_1 \cup K_2) \subset F \subset Y$ y $t_0 < \mu(F) < \mu(Y)$, (Teorema 1.23). Mostraremos que el conjunto $F \cap X_1$ es disconexo.

Sabemos que $X_2 \cap X_1 \subset K_1 \cup K_2$. Por consiguiente, ya que $F \subset Y = X_2 \cup K_1 \cup K_2$, tenemos que $F \cap X_1 \subset K_1 \cup K_2$. Puesto que $K_1 \cup K_2 \subset F$, concluimos que $F \cap X_1$ es disconexo.

Pero esto implica que $F \cup X_1 = X$ (Corolario 2.3.6), de donde se tiene, en particular, que $X_2 \subset F \cup X_1$. Puesto que F está contenido propiamente en Y (ya que $\mu(F) < \mu(Y)$) y $K_1 \cup K_2 \subset F$, lo anterior implica que existe $x \in (Y\backslash F) \cap X_1 \subset (X_2\backslash F) \cap X_1$. Pero esto último implica que $x \in K_1 \cup K_2 \subset F$ (ya que $X_1 \cap X_2 \subset K_1 \cup K_2$). Lo cual es una contradicción ya que habíamos tomado x en $(Y\backslash F)$.

Puesto que esta contradicción vino de suponer que D y X_2 eran diferentes, concluimos que $D = X_2$.

El siguiente paso es demostrar que para todo subcontinuo D de X_1, tal que $D \cap K_1 \neq \emptyset$ y $D \cap K_2 \neq \emptyset$, se cumple que $D = X_1$.

Sea D un subcontinuo de X_1 con las propiedades antes indicadas arriba. Por la observación (*), $D \cap Y \subset X_1 \cap Y = X_1 \cap (X_2 \cup K_1 \cup K_2) \subset K_1 \cup K_2$ y $D \cap K_1 \neq \emptyset$ y $D \cap K_2 \neq \emptyset$. Lo cual implica que $D \cap Y$ es disconexo. Puesto que $\mu(Y) > t_0$, se sigue que $Y \cup D = X$. Entonces $X\backslash Y \subset D$ y, por lo tanto, que $X_1 = Ce(X\backslash Y) \subset D$. Con lo que concluimos, finalmente que $X_1 = D$.

Con esto finalizamos la última parte del lema. □

Lema 2.3.13. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo. Sean K_1 y K_2 las componentes de $Y \cap Ce(X \backslash Y)$ (donde Y es como en el Lema 2.3.12) y X_1 y X_2 los subcontinuos del mismo Lema 2.3.12.. Entonces se tiene que $X_2 \cap K_i$ es conexo para $i = 1$ y 2, y $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes. De hecho $X_1 \cap X_2 = (X_2 \cap K_1) \cup (X_2 \cap K_2)$ es la descomposición en componentes de $X_1 \cap X_2$. Además $X_1 \cap X_2 = Fr(X_1) = Fr(X_2)$.

Demostración. Mostraremos que $X_2 \cap K_1$ es conexo, la demostración para $X_2 \cap K_2$ es similar. Supongamos lo contrario. Sea C una componente de $X_2 \cap K_2$ (por el Lema 2.3.12, $Y = X_2 \cup K_1 \cup K_2$, como $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, la conexidad de Y implica que $X_2 \cap K_1 \neq \emptyset$ y $X_2 \cap K_2 \neq \emptyset$). Sea β un arco ordenado que va de C a X_2 (Teorema 1.16). Nuevamente, por el Teorema 1.4, tenemos que la función $\gamma : [0,1] \to C(X)$, definida por $\gamma(s) = \beta(s) \cup X_1$ es una función continua y, por lo tanto, la función $g = \mu \circ \gamma$, también resulta ser continua. Observamos que $g(1) = \mu(\beta(1)) = \mu(X) = 1$. De manera que existen s^* y $s_1 \in (0,1)$ tales que $t_0 < g(s^*) < g(s_1) < 1$. Hagamos $G = \gamma(s^*)$. No puede suceder que $\beta(s_1) \cap K_1 \neq \emptyset$, ya que esto implicaría que $\beta(s_1) = X_2$ (Lema 2.3.12) y por lo tanto que $\gamma(s_1) = \beta(s_1) \cup X_1 = X$. De donde obtendríamos que $\mu(X) = \mu(\gamma(s_1)) = g(s_1) < 1 = \mu(X)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, tenemos que $\beta(s_1) \cap K_1 = \emptyset$.

Por hipótesis, $X_2 \cap K_1$ es disconexo, así que podemos considerar a dos componentes C_1 y C_2 de $X_2 \cap K_1$. Sean δ y η dos arcos ordenados de C_1 y C_2 a X_2, respectivamente. Puesto que $\beta(s_1) \cap K_1 = \emptyset$, existen valores r_1 y $w_1 \in (0,1)$ tales que $\beta(s_1) \cap \delta(r_1) = \emptyset$, $\beta(s_1) \cap \eta(w_1) = \emptyset$ y $\delta(r_1) \cap \eta(w_1) = \emptyset$. De manera que si consideramos los conjuntos $C_1 = G \cup \beta(s_1)$, $C_2 = G \cup \delta(r_1)$ y $C_3 = G \cup \eta(w_1)$, entonces se puede comprobar fácilmente que los continuos C_1, C_2 y C_3 cumplen las condiciones del Lema 2.3.7.. Puesto que $G \in \mu^{-1}((t_0, 1))$, la existencia de estos continuos contradice a dicho lema.

La anterior contradicción muestra que $X_2 \cap K_1$ es conexo.

Ahora nos disponemos a mostrar que $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes. Por el Lema 2.3.12, $X_1 \cap X_2 \subset K_1 \cup K_2$. De manera que

$$\begin{aligned} X_1 \cap X_2 &= X_1 \cap X_2 \cap (K_1 \cup K_2) \\ &= (X_1 \cap X_2 \cap K_1) \cup (X_1 \cap X_2 \cap K_2) \\ &= (K_1 \cap X_2) \cup (K_2 \cap X_2). \end{aligned}$$

Por tanto $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes.

Finalmente mostraremos que $X_1 \cap X_2 = Fr(X_1) = Fr(X_2)$.

Puesto que $Fr(X_1) = Ce(X_1) \cap Ce(X \backslash X_1) = X_1 \cap X_2$ por definición, sólo hay que demostrar que $Fr(X_2) = X_1 \cap X_2$. Para esto observamos que

$$Fr(X_2) = Ce(X_2) \cap Ce(X \backslash X_2) = X_2 \cap Ce(X \backslash X_2)$$

Por lo que es suficiente demostrar que $Ce(X \backslash X_2) = X_1$. Mostraremos esta igualdad por contenciones. Observamos que

$$X \backslash X_2 = X \backslash Ce(X \backslash X_1) = int(X \backslash (X \backslash X_1)) = int X_1 \subset X_1$$

De donde se sigue que $Ce(X \backslash X_2) \subset X_1$. Para mostrar que $X_1 \subset Ce(X \backslash X_2)$ procedemos como sigue. Puesto que $X_2 \subset Y$ (Teorema 2.3.12), entonces $X \backslash Y \subset X \backslash X_2$. Esto implica que $X_1 = Ce(X \backslash Y) \subset Ce(X \backslash X_2)$. Todo lo anterior implica que $Ce(X \backslash X_2) = X_1$ y, por lo tanto, hemos demostrado que $Fr(X_2) = X_2 \cap X_1$. Concluimos, finalmente, que $X_2 \cap X_1 = Fr(X_2) = Fr(X_1)$.

Con esto terminamos la prueba del lema. □

Teorema 2.3.14. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que existe $t_0 \in [0, 1)$ tal que $\mu^{-1}(t_0)$ es un círculo, entonces X es pseudocircular.

Demostración. Sean X_1 y X_2, como en el Lema 2.3.12. Mostraremos que los subcontinuos X_1 y X_2 cumplen las condiciones de la Definición 2.2.2. Por el Lema 2.3.12, sabemos que los subcontinuos X_1 y X_2 están contenidos propiamente en X y que $X_1 \cup X_2 = X$. Por el Lema 2.3.13., también sabemos que $X_1 \cap X_2$ tiene exactamente dos componentes. Sean J_1 y J_2 estas componentes. Observamos que J_1 y J_2 están contenidas en K_1 y K_2 respectivamente (donde K_1 y K_2 son las componentes de $Y \cap Ce(X \backslash Y)$, y Y es como en el Lema 2.3.11).

En primer lugar mostraremos que las componentes J_1 y J_2 son terminales con respecto a X_2 y X_1.

Mostraremos que J_1 es terminal con respecto a X_1. La terminalidad de J_2 con respecto a X_1 y la de J_1 con respecto a X_2 y de J_2 con respecto a X_2 se hacencon argumentos similares.

Sean L y M dos subcontinuos de X_1 tales que $J_1 \subset L \cap M$. Mostraremos que $L \subset M$ o $M \subset L$. Si ocurriera que $L \cap J_2 \neq \emptyset$, esto implicaría que $X_1 = L$ (Lema 2.3.12.) y, por lo tanto, que $M \subset X_1 \subset L$. De la misma forma, si $M \cap J_2 \neq \emptyset$, tendremos que $L \subset X_1 \subset M$. Podemos suponer entonces que $M \cap J_2 = \emptyset$ y que $L \cap J_2 = \emptyset$.

Supongamos, contrariamente a lo que queremos demostrar, que $M \backslash L \neq \emptyset$ y $L \backslash M \neq \emptyset$. Sea $\beta : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de J_2 a X_1. Consideremos la función $g : [0,1] \to C(X)$ dada por $g(s) = M \cup X_2 \cup \beta(s)$. Como $J_1 \subset M \cap X_2$ y $J_2 \subset \beta(s) \cap X_2$, tenemos que efectivamente $g(s) \in C(X)$ para toda $s \in [0,1]$. Por el Teorema 1.4, $g(s)$ es una función continua. Además $g(1) = M \cup X_2 \cup X_1 = X$. De manera que existe $s_1 \in [0,1]$ tal que $t_0 < \mu(g(s_1)) < 1$. Sea $G = g(s_1)$. Si ocurre que $\beta(s_1) \cap M \neq \emptyset$ entonces $\beta(s_1) \cup M$ es un subcontinuo de X_1 que intersecta tanto a K_1 como a K_2. Por el Lema 2.3.12, $X_1 = \beta(s_1) \cup M$. Entonces $X = X_1 \cup X_2 = \beta(s_1) \cup M \cup X_2 = g(s_1)$. Así que $\mu(g(s_1)) = 1$, lo que es un absurdo. Por tanto $\beta(s_1) \cap M = \emptyset$. Ahora mostraremos que $\beta(s_1) \cap L = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Procediendo como antes, concluimos que $X = \beta(s_1) \cup L \cup X_2$. Como estamos suponiendo que $M \backslash L \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $p \in M \backslash L$. Entonces $p \notin \beta(s_1) \cup L$. Esto implica que $p \notin J_2 \cup J_1 = X_1 \cap X_2$. Como $p \in X_1$, tenemos que $p \notin X_2$. Por tanto $p \notin \beta(s_1) \cup L \cup X_2 = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\beta(s_1) \cap L = \emptyset$.

Observamos que $X_2 \cup \beta(s_1) \cup M \cup L$ es un subcontinuo propio de X, pues de lo contrario tendríamos que

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 \cap X \\ &= (X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap \beta(s_1)) \cup (X_1 \cap M) \cup (X_1 \cap L) \\ &= J_1 \cup J_2 \cup \beta(s_1) \cup M \cup L \\ &= \beta(s_1) \cup (M \cup L) \end{aligned}$$

y, puesto que $\beta(s_1) \cap (M \cup L) = \emptyset$, tendríamos una descomposición del continuo X_1. Esta contradicción prueba que $G \cup L = X_2 \cup \beta(s_1) \cup M \cup L \neq X$. Aplicando el Corolario 2.3.6, tenemos que $G \cap L$ es conexo.

Sea

$$\begin{aligned}F &= G \cap L \\ &= (X_2 \cup \beta(s_1) \cup M) \cap L \\ &= (X_2 \cap L) \cup (M \cap L) \\ &= J_1 \cup (M \cap L) \\ &= M \cap L\end{aligned}$$

Por tanto $M \cap L$ es conexo y $F = M \cap L$.

Sea $h : [0,1] \to C(X)$ dada por $h(s) = F \cup X_2 \cup \beta(s)$. Entonces h es una función continua tal que $h(1) = F \cup X_2 \cup X_1 = X$. Así que existen s_2 y $s_3 \in [0,1]$ tales que $t_0 < \mu(h(s_2)) < \mu(h(s_3)) < 1$.

Sea $Q = h(s_3)$. Aseguramos que $\beta(s_3) \cap F = \emptyset$. De no ser así, $\beta(s_3) \cup F$ es un subcontinuo de X_1 que contiene a J_1 y J_2. Por el Lema 2.3.12, $\beta(s_3) \cup F = X_1$. Entonces $\mu(h(s_3)) = \mu(F \cup X_2 \cup \beta(s_3)) = \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X) = 1$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $\beta(s_3) \cap F = \emptyset$.

Ahora veremos que $\beta(s_3) \cap M = \emptyset$. Supongamos lo contrario, entonces $\beta(s_3) \cup M$ es un subcontinuo de X_1 que contiene a J_1 y J_2. Esto implica que $X_1 = \beta(s_3) \cup M$. De modo que $L \subset \beta(s_3) \cup M$. De manera que $L = (\beta(s_3) \cap L) \cup (M \cap L)$. Ya que L es conexo, debe existir un punto $p \in (\beta(s_3) \cap L) \cap (M \cap L) = \beta(s_3) \cap (M \cap L) = \beta(s_3) \cap F$. Esto contradice lo probado en el párrafo anterior. Por tanto $\beta(s_3) \cap M = \emptyset$. Similarmente $\beta(s_3) \cap L = \emptyset$.

Si ocurre $s_3 \leq s_2$ entonces $h(s_3) \subset h(s_2)$ y así que $\mu(h(s_3)) \leq \mu(h(s_2))$ lo que es absurdo. Por tanto $s_2 < s_3$. Esto implica que $\beta(s_2) \subset \beta(s_3)$. Si $\beta(s_2) = \beta(s_3)$ entonces tenemos que $h(s_2) = h(s_3)$, lo que no es posible. De manera que $\beta(s_2)$ está contenido propiamente en $\beta(s_3)$.

Observamos que

$$\begin{aligned}(h(s_3) \cup M \cup L) \backslash h(s_2) &= (M \cup L \cup F \cup X_2 \cup \beta(s_3)) \backslash (F \cup X_2 \cup \beta(s_2)) \\ &= (M \backslash F) \cup (L \backslash F) \cup (\beta(s_3) \backslash \beta(s_2)).\end{aligned}$$

Ya que estos conjuntos son no vacíos y están mutuamente separados, se sigue que $h(s_2)$ es el corazón de un triodo. Pero esto contradice el Lema 2.3.4. Debido a que esta contradicción vino de suponer que L y M no eran comparables, concluimos que $L \subset M$ o $M \subset L$. Por lo tanto J_1 es terminal con respecto a X_1.

En seguida nos concentraremos en demostrar que todo subcontinuo L de X tal que $L \cap J_1 \neq \emptyset$ y $L \cap J_2 \neq \emptyset$, tiene la propiedad de contener a alguno de los subcontinuos X_1 o X_2. Sea L un subcontinuo que satisface las condiciones antes señaladas. Mostraremos que alguna de las componentes de $L \cap X_1$ o $L \cap X_2$ intersecta tanto a J_1 como a J_2. Supongamos que esto no sucede. Entonces, por el Teorema del Cable Cortado (Teorema 1.9), existen subconjuntos cerrados H_1, H_2, L_1 y L_2 de $L \cap X_1$ y $L \cap X_2$, respectivamente tales que

$L \cap X_1 = H_1 \cup H_2$, con $J_1 \subset H_1$ y $J_2 \subset H_2$ y H_1 y H_2 son ajenos
$L \cap X_2 = L_1 \cup L_2$, con $J_1 \subset L_1$ y $J_2 \subset L_2$ y L_1 y L_2 son ajenos.

Lo cual implica que $L = (H_1 \cup L_1) \cup (H_2 \cup L_2)$.

Mostraremos que L_2 no puede intersectar a H_1. Supongamos, por el contrario, que $L_2 \cap H_1 \neq \emptyset$. Entonces, sea $x \in L_2 \cap H_1 \subset L \cap X_1 \cap X_2 \subset X_1 \cap X_2 = J_1 \cup J_2$. De lo anterior se sigue que $x \in J_1 \cup J_2$. Puesto que L_1 y L_2 son ajenos y $J_1 \subset L_1$, llegamos a que $x \in J_2$. Lo que implica que $x \in H_2$, que es absurdo puesto que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Por lo tanto concluimos que $L_2 \cap H_1 = \emptyset$. Con el mismo argumento se puede demostrar que $L_1 \cap H_2 = \emptyset$.

La discusión previa implica que los conjuntos $(H_1 \cup L_1)$ y $(H_2 \cup L_2)$ forman una disconexión de L, lo cual es una contradicción. Por lo tanto podemos suponer que existe una componente C de $L \cap X_1$ tal que $C \cap J_1 \neq \emptyset$ y $C \cap J_2 \neq \emptyset$. Pero esto implica que $C = X_1$ (Lema 2.3.12) y, por lo tanto, $X_1 \subset L$. Con esto terminamos la prueba de esta propiedad.

Mostraremos, finalmente, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo subcontinuo $L \in B_\varepsilon^H(X)$ se tiene que $J_1 \subset L$ o $J_2 \subset L$.

Tomemos $t^* > máx\{t_0, \mu(X_1), \mu(X_2)\}$. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(X) \subset \mathcal{A} = \mu^{-1}((t^*, 1])$ y $L \in B_\varepsilon^H(X)$. Mostraremos que esta L cumple lo que se pide. Si $L \cap J_1 \neq \emptyset$ y $L \cap J_2 \neq \emptyset$ entonces $X_1 \subset L$ o $X_2 \subset L$ y, por lo tanto, J_1 y $J_2 \subset L$. Supongamos entonces que $L \cap J_2 = \emptyset$.

Puesto que $\mu(L) > t^*$, $L \backslash X_1 \neq \emptyset$ y $L \backslash X_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto $L \cap J_1 \neq \emptyset$.

Supongamos que $J_1 \backslash L \neq \emptyset$. Mostraremos que $L \cap J_1$ es conexo. Si $L \cap J_1$ es disconexo entonces $L \cup J_1 = X$ (por el Lema 2.3.6, ya que $\mu(L) > t_0$). Pero esto es una contradicción ya que J_2 no está contenido en $L \cup J_1$. Por lo tanto $L \cap J_1$ es conexo.

También se tiene que $L \cap X_1$ y $L \cap X_2$ son conexos, pues si $L \cap X_1$ fuera disconexo, por ejemplo, entonces, por el Lema 2.3.6, tendríamos que $L \cup X_1 = X$. Lo cual sería una contradicción, ya que esto implicaría que

$$\begin{aligned} X_2 &= (L \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2) \\ &= [(L \cap X_2) \cup J_1] \cup J_2 \end{aligned}$$

es una descomposición del continuo X_2.

Entonces existen arcos ordenados α, β y $\gamma : [0,1] \to C(X)$ de $L \cap J_1$ a J_1 (ya que estamos suponiendo que $J_1 \backslash L \neq \emptyset$), a $L \cap X_1$ y a $L \cap X_2$, respectivamente. Puesto que $\mu(L) > t_0$, podemos encontrar valores s_0, r_0 y $w_0 \in (0,1)$ tales que si $H = \alpha(s_0) \cup \beta(r_0) \cup \gamma(w_0)$ entonces $t_0 < \mu(H) < \mu(L)$.

Sean s_1 y r_1 en $(0,1)$ tales que $s_0 < s_1$ y $r_0 < r_1$ y consideremos los subcontinuos

$$C_1 = \alpha(s_1) \cup \beta(r_0) \cup \gamma(w_0)$$

$$C_2 = \alpha(s_0) \cup \beta(r_1) \cup \gamma(w_0)$$

$$C_3 = \alpha(s_0) \cup \beta(r_0) \cup J_1$$

Entonces se cumple que $H \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $C_1 \not\subseteq C_2 \cup C_3$, $C_2 \not\subseteq C_1 \cup C_3$ y $C_3 \not\subseteq C_1 \cup C_2$ (ya que $J_1 \backslash L \neq \emptyset$). Puesto que $H \in \mathcal{A} = \mu^{-1}((t_0, 1))$, la existencia de los subcontinuos C_1, C_2 y C_3 contradice el Lema 2.3.7. Puesto que esta contradicción vino de suponer que $J_1 \backslash L \neq \emptyset$, concluimos que $J_1 \subset L$. Esto quiere decir que la ε que escogimos es la requerida.

Con esto terminamos la demostración de todas las propiedades que deben de cumplir los subcontinuos X_1 y X_2. Concluimos, entonces, que el espacio X es pseudocircular. De esta forma finalizamos la prueba del teorema. $\square$

2.4. NIVELES "GRANDES" EN HIPERESPACIOS LOCALMENTE PLANOS.

Cerraremos el presente capítulo con un resultado que nos indica cómo son los niveles "grandes" en un hiperespacio localmente plano. Con este resultado tendremos todas las piezas para llegar al resultado principal del capítulo; caracterizar a los continuos cuyo hiperespacio es localmente plano en la cúspide.

Antes daremos un par de definiciones y lemas que nos serán de utilidad y cuya demostración de algunos de ellos aparece en la bibliografía.

Definición 2.4.0. Un *triodo simple* es un continuo homeomorfo al conjunto $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$.

Lema 2.4.1 ([16, Ejercicio 31.11]). Sea X un continuo localmente conexo. Si X no es homeomorfo a un intervalo o a un círculo, entonces X contiene un triodo simple.

Definición 2.4.2. Un continuo X es *conexo en pequeño en* p si para cada conjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subcontinuo L de X tal que $p \in intL \subset L \subset U$.

Se sabe que si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos entonces X es localmente conexo ([25, Teorema 27.16.]).

Lema 2.4.3 ([9, Teorema 1.2)]. Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si para toda función de Whitney μ para $C(X)$ se tiene que $\mu^{-1}(\mu(A))$ es conexo en pequeño en A.

Teorema 2.4.4. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que $C(X)$ es localmente plano en X. Entonces existe $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es un círculo o un arco.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ una vecindad de X contenida $C(X)$ homeomorfa a una 2-celda y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(X) \subset \mathcal{U}$. Por el Lema 2.2.4 existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t) \subset B_\varepsilon^H(X)$ para toda $t \in [t_0, 1]$.

A continuación mostraremos que existe $t \in (t_0, 1)$ tal que que $\mu^{-1}(t)$ es un arco o un círculo. Supongamos que esto no es cierto. Es decir, para toda $t \in (t_0, 1)$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ no es un arco ni una curva cerrada simple.

Sea $t \in (t_0, 1)$. Puesto que $B_\varepsilon^H(X) \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es una 2-celda, se tiene que $C(X)$ es conexo en pequeño en cada elemento del interior de $\mathcal{U}$. De donde se sigue, por el Lema 2.4.3, que $\mu^{-1}(t)$ es conexo en pequeño en todos sus elementos y, por lo tanto, localmente conexo.

Entonces, por el Lema 2.4.1, sabemos que $\mu^{-1}(t)$ contiene triodos simples. Lo cual nos dice que para toda $t \in (t_0, 1)$ se cumple que $\mu^{-1}(t)$ contiene triodos simples. Por consiguiente $\mathcal{U}$ contiene una infinidad no numerable de triodos simples y ajenos. Pero esto contradice el hecho de que una 2-celda no puede contener un número no numerable de triodos simples ajenos ([21]).

Puesto que la anterior contradicción vino de suponer que para toda $t \in (t_0, 1)$ se tenía que $\mu^{-1}(t)$ no era ni un arco ni una curva cerrada simple, se concluye el teorema. $\square$.

Corolario 2.4.5. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $C(X)$ es localmente plano en la cúspide
(b) X es pseudolineal o pseudocircular
(c) Existe $t \in [0, 1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a un intervalo o a un círculo

Demostración. (a) implica (c) se tiene por el Teorema 2.4.4. (c) implica (b) se sigue de los Teoremas 2..3.2 y 2.3.14. La implicación (b) implica (c) se sigue del Corolario 2.2.22. Por último, (c) implica (a) se tiene a partir del Corolario 2.1.10. $\square$

" --Ves, Momo—le decía el barrendero--, las cosas son así: a veces tienes ante ti una calle larguísima. Te parece tan terriblemente larga, que nunca crees que podrás acabarla.

--Y entonces te empiezas a dar prisa, cada vez más prisa. Cada vez que levantas la vista, ves que la calle no se hace más corta. Y te esfuerzas más todavía, empiezas a tener miedo, al final estas sin aliento. Y la calle sigue por delante. Así no se debe hacer.

Penso durante un rato. Entonces siguió hablando.

--nunca se ha de pensar en toda la calle de una vez, ¿entiendes? Solo hay que pensar en el paso siguiente, en la inspiración siguiente, en la siguiente barrida. Nunca más que en la siguiente.

Volvió a callar y reflexionar, antes de añadir:

--Entonces es divertido; eso es importante, porque entonces se hace bien la tarea. Y así ha de ser.

Después de una nueva larga interrupción, siguió:

--De repente se da uno cuenta de que, paso a paso, se ha barrido toda la calle. Uno no se da cuenta cómo ha sido. Eso es importante".

Momo

Michael Ende

3. HIPERESPACIOS QUE SON LOCALMENTE EUCLIDIANOS EN LA CÚSPIDE.

El resultado principal de este capítulo (Teorema 3.16) nos dice cuales son las características que debe tener una gráfica finita conexa X para que su hiperespacio $C(X)$ tenga una vecindad homeomorfa a una N-celda alrededor de X. De esta forma, diremos que el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X es *localmente Euclidiano en la cúspide* si existe una vecindad $\mathcal{U}$ alrededor de X en $C(X)$ la cual es homeomorfa a una N-celda.

Con el fin de desarrollar nuestra discusión estableceremos algunas convenciones y definiciones básicas.

Definición 3.1. Un *segmento* en un continuo es un arco o una curva cerrada simple. Definimos los *extremos* de un segmento de la siguiente manera: (a) en el caso de que el segmento es un arco, sus extremos son los puntos que no lo separan (b) en el caso de que el segmento sea una curva cerrada simple, dicho segmento sólo tiene un extremo y es un punto que se ha fijado de antemano. Una *gráfica finita conexa* es un continuo que es una unión finita de segmentos tales que cualesquiera dos de ellos se intersectan en uno o dos de sus extremos, o no se intersectan (convendremos en que el vacío es una gráfica finita conexa). Cada vez que hablemos de una gráfica finita, se entiende que los segmentos y sus extremos ya están dados. Los *vértices* de una gráfica finita conexa son los extremos de sus segmentos.

Dados una gráfica X y un punto $p \in X$, el *orden* de p en X es el mínimo cardinal n tal que p tiene una base de vecindades en la cual la frontera de cada uno de sus elementos tiene a lo más n elementos. Se dice que p es un *extremo* de X si su orden es igual a uno y se dice que p es un *punto de ramificación* si su orden es al menos 3.

En este capítulo la letra X denotará a una gráfica finita diferente de un círculo. Supondremos que la métrica d en X es la métrica de longitud de arco (en donde la distancia entre dos puntos será la mínima longitud entre ellos dos) y cada segmento de X tiene longitud igual a uno. También para cada segmento J de X, identificaremos a J, o bien, con el intervalo cerrado $[(0)_J, (1)_J]$, cuando J es un arco, o con el intervalo $[(0)_J, (1)_J]$ que tiene a sus extremos identificados ($(0)_J = (1)_J$), en el caso en que J sea una curva cerrada simple.

En el resto del presente capítulo nos referiremos a una gráfica finita conexa diferente de un círculo simplemente como una gráfica. Con esto en mente se dan las siguientes definiciones.

Definición 3.2. Una *subgráfica* Y de una gráfica X es una gráfica contenida en X que está formada por algunos de los segmentos de X. También permitiremos que el conjunto vacío y un conjunto que conste de un sólo vértice sean subgráficas.

Para tener el menor número posible de segmentos y vértices, tomaremos únicamente gráficas en las que cada vértice de X es un extremo de X o un punto de ramificación. Es fácil ver que a todo continuo que es una gráfica se le pueden redefinir sus segmentos de tal manera que satisfaga estas condiciones.

Si $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces definimos

$$Q(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) \leq \varepsilon\}$$

$$y$$

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \varepsilon\}$$

Definición 3.3. Sea X una gráfica. Diremos que un subconjunto S de X es una *subgráfica fina* de X si $S = \emptyset$ o S es una subgráfica de X tal que S no tiene ciclos (es decir, S es un *árbol*) y no tiene puntos extremos de X.

Definición 3.4. Sea S una subgráfica fina de X. Si $S \neq \emptyset$ entonces definimos

$$\mathcal{M}_S = \{B \in C(X) : S \subset B \subset Q(1,S) \text{ y } B \cap N(1,S) \text{ es conexo}\}$$

Para el caso en que $S = \emptyset$ y J es un segmento de X, se define $\mathcal{M}_S^J = \{A \in C(X) : A \subset J\}$. En caso de que no haya posibilidad de confusión, escribiremos simplemente $\mathcal{M}_\emptyset$ en lugar de $\mathcal{M}_\emptyset^J$.

Supongamos que S es una subgráfica fina de X distinta del vacío. Sean $I_1, I_2, ..., I_r$ los segmentos en X que son arcos que intersectan a S exactamente en uno de sus extremos y sean $J_1, J_2, ..., J_s$ los segmentos de X que, o bien, son arcos que intersectan a S en sus dos extremos, o son curvas cerradas simples tales que cada una de ellas intersecta a S en su extremo. Es fácil convencerse de que

$$Q(1,S) = S \cup (\bigcup\{I_i : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{J_j : 1 \leq j \leq s\})$$

A esta representación de $Q(1,S)$ le llamaremos la *representación canónica* para $Q(1,S)$. Tomando como base la representación canónica para $Q(1,S)$, a cada elemento A en $\mathcal{M}_S$ se le puede asociar una representación de la forma:

$$A = S \cup (\bigcup\{[0,a_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,c_j] \cup [d_j,1] : 1 \leq j \leq s\}),$$

donde $0 \leq a_i \leq 1$ para cada i y $0 \leq c_j \leq d_j \leq 1$ para cada j.

Convendremos en llamar a la anterior expresión la *representación canónica de A con respecto a la subgráfica S.*

Decimos que A está en el *interior relativo de $\mathcal{M}_S$* ($A \in IR(\mathcal{M}_S)$) si $0 < a_i < 1$, para cada i y $0 < c_j < d_j < 1$ para cada j. En el caso en que $S = \emptyset$, el *interior relativo* se define como: $RI(\mathcal{M}_S^J) = \{A \in \mathcal{M}_S^J : (0)_J, (1)_J \notin A\}$, para cada segmento J de X.

Probaremos un lema técnico.

Lema 3.5. Sean S una subgráfica fina y distinta del vacío de X y $A \in IR(\mathcal{M}_S)$. Hagamos $\varepsilon = mín\{\{a_1,...,a_r\} \cup \{1-a_1,...,1-a_r\} \cup \{c_1,...,c_s\} \cup \{1-d_1,...,1-d_s\} \cup \{d_1 - c_1/2,...,d_s - c_s/2\}\}$. Donde los a_i, c_j y d_j son lo valores determinados por la forma canónica de A con respecto a la subgráfica S ($A = S \cup (\bigcup\{[0,a_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,c_j] \cup [d_j,1] : 1 \leq j \leq s\})$, con $0 < a_i < 1$ para cada i y $0 < c_j < d_j < 1$ para cada j).
Entonces se tiene que $N(\varepsilon, A) \subset N(1,S)$.

Demostración. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$ entonces $d(x,a) < \varepsilon$, para alguna $a \in A$. Si $a \in S$ entonces el resultado se sigue inmediatamente. Podemos suponer entonces que $a \notin S$. Puesto que $A = S \cup (\bigcup\{[0,a_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,c_j] \cup [d_j,1] : 1 \leq j \leq s\})$, con $0 < a_i < 1$, para cada i, y $0 < c_j < d_j < 1$, para cada j, tenemos que $a \in [0,a_i]$ o $a \in [0,c_j] \cup [d_j,1]$. Supongamos que $a \in [0,a_i]$. Esto implica que $0 \leq d(x,0) \leq d(x,a) + d(a,0) < \varepsilon + a_i < 1$. Es decir , $d(x,(0)_{I_i}) < 1$ y $(0)_{I_i} \in S$, lo que implica que $x \in N(1,S)$). El caso en que $a \in [0,c_j \cup [d_j,1]$ se demuestra de manera similar. $\square$

El Lema 3.5 implica, en particular, que para cualquier subcontinuo B de X, tal que $H(A,B) < \varepsilon$, se tiene que $B \subset N(1,S)$ (donde ε y A tienen las características indicadas en este lema).

Observación 3.6. Hacemos notar que si X es una gráfica finita y α es un arco de X cuyos extremos p_1 y p_2 son vértices de X entonces $\alpha = \bigcup\{I : I$ es un segmento de X, I es un arco e $I \subset \alpha\}$. Para ver esto, supongamos que existe un punto $p \in \alpha$ y que no está en la unión de la derecha de la igualdad. Como esta unión es un conjunto cerrado toda una vecindad de p la evade. Como sólo hay un número finito de vértices de X, en toda vecindad de p en α hay puntos que no son vértices. Por tanto podemos suponer que p no es un vértice. Lo anterior implica que existe un segmento L de X tal que $p \in L\setminus\{(0)_L,(1)_L\}$ y $L \not\subseteq \alpha$. De donde se sigue que existe un punto $q \in Fr_L(\alpha \cap L)\setminus\{(0)_L,(1)_L\}$. Entonces q tiene una base de vecindades en α cuya frontera tiene un solo punto. Por tanto q es un extremo de α. Esto es absurdo pues $q \neq p_1$, y $q \neq p_2$. Esta contradicción muestra que α es unión de segmentos de X.

Lema 3.7. Sea S una subgráfica fina de X, entonces $IR(\mathcal{M}_S)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ diferente del vacío.

Demostración. Si $S = \emptyset$ entonces, dado un segmento J de X, se tiene que $RI(\mathcal{M}_S^J) = \{A \in \mathcal{M}_S^J : (0)_J,(1)_J \notin A\}$. Sean J un segmento de X y $A \in RI(\mathcal{M}_S^J)$. Entonces tenemos que $A = [a,b]$, con $0 < a \leq b < 1$. Hagamos $\varepsilon = \min\{a,(1-b)\}$. Mostraremos que si $B \in C(X)$ y $H(A,B) < \varepsilon$ entonces $B \in RI(\mathcal{M}_S^J)$. Sea $B \in C(X)$, con $H(A,B) < \varepsilon$. Puesto que $B \subset N(\varepsilon, A)$, se sigue de la elección de ε que $B \subset J$. Lo anterior implica, en particular, que B es un intervalo cerrado. También, por la elección de ε, los extremos de B no coinciden con $(0)_J$, ni con $(1)_J$. De lo anterior se desprende que $B \in RI(\mathcal{M}_S^J)$. De modo que para el caso en que $S = \emptyset$ se tiene que $IR(\mathcal{M}_S)$ es abierto.

Podemos suponer entonces que S es distinto del vacío. Sea $A \in IR(\mathcal{M}_S)$. Entonces A es de la forma $A = S \cup (\bigcup\{[0,a_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,c_j] \cup [d_j,1] : 1 \leq j \leq s\})$, donde $0 < a_i < 1$ para cada i y $0 < c_j < d_j < 1$. Por definición se tiene que $A \subset N(1,S)$.

Hagamos $\varepsilon = mín\{\{a_1,...,a_r\} \cup \{1-a_1,...,1-a_r\} \cup \{c_1,...,c_s\}$
$\cup\{1-d_1,...,1-d_s\} \cup \{(d_1-c_1)/2,...,(d_s-c_s)/2\}\}$.

Sea $B \in C(X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$. Por el comentario que hicimos después del Lema 3.5, tenemos que $B \subset N(1,S)$. Para mostrar que $B \in IR(\mathcal{M}_S)$ estableceremos la siguiente suposición:

Observamos que $Q(1,S) = S \cup (\bigcup \{I_i : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\})$ (por definición de $Q(1,S)$, ya que $S \neq \emptyset$). Puesto que todos los vértices de S son puntos de ramificación, podemos suponer que los conjuntos $\{I_i : 1 \leq i \leq r\}$ y $\{J_j : 1 \leq j \leq s\}$ son diferentes del vacío (los argumentos de la demostración para los otras posibilidades son bastante similares, además observemos que no puede ocurrir que los conjuntos $\{I_i : 1 \leq i \leq r\}$ y $\{J_j : 1 \leq j \leq s\}$ sean igual al vacío simultaneamente).

Mostraremos que B cumple con lo siguiente:

(a) Para cada segmento I_i de la representación canónica $Q(1,S)$ se tiene que $(1)_{I_i} \notin B$.

Puesto que $(1)_{I_i} \notin N(1,S)$, el resultado se sigue del hecho de que $B \subset N(1,S)$.

(b) Para cada segmento I_i de la representación canónica $Q(1,S)$, se tiene que $B \cap I_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, ..., r\}$.

Efectivamente, como $A \subset N(\varepsilon, B)$, existe un punto $b \in B$ tal que $d(a_i, b) < \varepsilon$. Esto implica que $b \in I_i$.

(c) Para cada segmento J_j de la representación canónica $Q(1,S)$, se tiene que $B \cap J_j \neq \emptyset$.

Esto se muestra en forma similar al inciso (b).

(d) Para cada segmento I_i de la representación canónica $Q(1,S)$, se tiene que $B \cap I_i = [e_i, f_i]$, con $0 \leq e_i \leq f_i < 1$.

Sea I_i un segmento de la representación canónica de $Q(1,S)$. Mostraremos que $B \cap I_i$ es conexo. Si B esta contenido en I_i entonces $B \cap I_i = B$ y, por lo tanto, $B \cap I_i$ es conexo. Podemos suponer entonces que $B \backslash I_i \neq \emptyset$. Supongamos que $B \cap I_i$ es disconexo. Entonces, puesto que $B \cap I_i$ es cerrado, existen dos subconjuntos cerrados K y L de X ajenos y diferentes del vacío tales que $B \cap I_i = K \cup L$. Alguno de ellos no contiene al extremo $(0)_{I_i}$ (podría ser que los dos no lo contuvieran). Supongamos que $(0)_{I_i} \notin K$. Debido a que $B \subset N(1,S)$, tenemos que

$$\begin{aligned} B &= B \cap [S \cup (\bigcup \{I_h : 1 \leq h \leq r, \text{ con } h \neq i\}) \cup (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\})] \cup (B \cap I_i) \\ &= B \cap [S \cup (\bigcup \{I_h : 1 \leq h \leq r, \text{ con } h \neq i\}) \cup (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\})] \cup (K \cup L) \\ &= [B \cap [S \cup (\bigcup \{I_h : 1 \leq h \leq r, \text{ con } h \neq i\}) \cup (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\}) \cup L] \cup K) \end{aligned}$$

Puesto que estamos suponiendo que $B \backslash I_i \neq \emptyset$ y $(0)_{I_i} \notin K$ y éste es el único punto donde K podría intersectar a los segmentos I_i y J_j (debido a que $(1)_{I_i} \notin B$), lo anterior nos da una separación de B, lo cual es absurdo.

En vista de lo anterior concluimos que $B \cap I_i$ es conexo. Esto implica que $B \cap I_i$ es un subcontinuo del segmento I_i, y, por lo tanto, que $B \cap I_i$ es un subconjunto de la forma $B \cap I_i = [e_i, f_i]$, con $0 \leq e_i \leq f_i < 1$.

(e) $(0)_{I_i} = e_i$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$, donde e_i está dado por la expresión $B \cap I_i = [e_i, f_i]$, con $0 \leq e_i \leq f_i < 1$ en el inciso (d).

Supongamos que existe i_0 tal que $(0)_{I_{i_0}} \neq e_{i_0}$. Entonces, por el inciso (d), se tiene que $B \cap I_{i_0} = [e_{i_0}, f_{i_0}]$, con $0 < e_{i_0} \leq f_{i_0} < 1$. Probaremos que B debe estar contenido en I_{i_0}. Si B no estuviera contenido en I_{i_o} entonces tendríamos que $B \backslash I_{i_o} \neq \emptyset$ y, debido a que $B \subset N(1, S)$ y $B \cap I_{i_0} = [e_{i_0}, f_{i_0}]$ no intersecta a ningún otro segmento de la representación canónica de $Q(1, S)$, obtendríamos la siguiente descomposición de B:

$$\begin{aligned} B &= B \cap [S \cup (\bigcup \{I_i : 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq i_0\}) \cup (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\})] \cup [B \cap I_{i_0}] \\ &= [B \cap [S \cup (\bigcup \{I_i : 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq i_0\}) \cup B \cap (\bigcup \{J_j : 1 \leq j \leq s\})]] \cup [e_{i_0}, f_{i_0}] \end{aligned}$$

lo cual es absurdo ya que B es un subcontinuo de X. Por lo tanto B está contenido en I_{i_0}. Lo anterior implica que $B = B \cap I_{i_0} = [e_{i_0}, f_{i_0}]$, con $0 < e_{i_0} \leq f_{i_0} < 1$. Pero esto implica entonces que $B \cap J_j = \emptyset$ para toda $j \in \{1, ..., s\}$, lo cual contradice el inciso (c) (ya que estamos suponiendo que $s \neq 0$).

Esta contradicción prueba el inciso (e).

Puesto que $(0)_{I_i} = e_i$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$, del inciso (d) se sigue que $B \cap I_i = [(0)_{I_i}, f_i]$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$.

La argumentación para probar el siguiente inciso se hace con ideas similares a las que se usaron en los incisos (a), (b), (c), (d) y (e).

(f) $B \cap J_j = [0, g_j] \cup [h_j, 1]$, donde $0 < g_j < h_j < 1$, para cada $j \in \{1, ..., s\}$.

Considerando los incisos anteriores, sólo hace falta demostrar que $S \subset B$ para concluir que $B = S \cup (\bigcup \{[0, f_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup \{[0, g_j] \cup [h_j, 1] : 1 \leq j \leq s\})$, con $0 < f_i < 1$ para cada i y $0 < g_j < h_j < 1$ y, por lo tanto, concluir que $B \in RI(\mathcal{M}_S)$.

A continuación mostraremos que la subgráfica S está contenida en B. En primer lugar, observamos que todo punto extremo de S está en B. En efecto, si p es un punto extremo de S entonces p es el extremo de algún segmento de la representación canónica de $Q(1, S)$ (es decir, $p = (0)_{I_{i_0}}$, $p = (0)_{J_{i_0}}$ o $p = (1)_{J_{j_0}}$ para algún $i_0 \in i \in \{1, ..., r\}$ o algún $j_0 \in \{1, ..., s\}$).

De donde se sigue, por los incisos (e) y (f), que $p \in B$.

Sean p_1 y p_2 puntos extremos de S. Si S tuviera un único punto extremo v entonces (ya que S no tiene curvas cerradas simples, por ser una subgráfica fina) se seguiría que $S = \{v\}$, de tal forma que, por la observación que acabamos de hacer, v sería el extremo de algún segmento I_i o J_jy, por tanto, sería elemento de B. De donde concluiríamos que $S \subset B$. De modo que podemos suponer que $p_1 \neq p_2$. Por lo que dijimos en líneas anteriores, p_1 y p_2 están en B. Puesto que en una gráfica finita conexa cualquier subcontinuo es conexo por trayectorias, podemos elegir un arco en B tal que conecte p_1 con p_2. Sea α este arco. Por la Observación 3.6., sabemos que $\alpha = \bigcup\{I : I \text{ es un segmento de } X, I \text{ es un arco e } I \subset \alpha\}$. Ya que $B \subset N(1,S)$, $B \cap I_i = [(0)_{I_i}, f_i]$ para cada $i \in \{1,...,r\}$ y $B \cap J_j = [0,g_j] \cup [h_j,1]$, para cada $j \in \{1,...,s\}$ tenemos que $\alpha \subset B \subset S \cup (\bigcup\{[0,f_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,g_j] \cup [h_j,1] : 1 \leq j \leq s\}$, con $f_i < 1$ y $0 < g_1 < f_i < 1$.
De aquí se sigue que cualquier segmento de Lde X tal que $L \subset \alpha$, tiene que estar contenido en S y, como α es unión de segmentos, obtenemos que $\alpha \subset S$.

Debido a que S es una subgráfica acíclica, lo anterior implica que el único arco en S que va de p_1 a p_2 está contenido en B. Además, debido también a que S es una subgráfica acíclica, ésta es la unión de los arcos que unen sus puntos extremos. Lo cual implica, por la discusión anterior, que $S \subset B$. De donde obtenemos finalmente que $B \in RI(\mathcal{M}_S)$ Concluimos por tanto que A es un punto interior de $RI(\mathcal{M}_S)$. Con esto finalizamos la prueba del lema. $\square$

Al inicio de este capítulo introdujimos la noción de representación canónica de $Q(1,S)$, a saber:

$$Q(1,S) = S \cup (\bigcup\{I_i : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{J_j : 1 \leq j \leq s\})$$

En donde S es una subgráfica fina de X distinta del vacío y se tiene que $I_1, I_2, ..., I_r$ son los segmentos en X que son arcos que intersectan a S exactamente en uno de sus extremos y $J_1, J_2, ..., J_s$ son los segmentos de X que, o bien, son arcos que intersectan a S en sus dos extremos, o son curvas cerradas simples que intersectan a S en su extremo. A partir de esta noción se definió el conjunto $\mathcal{M}_S$ como:

$$\mathcal{M}_S = \{B \in C(X) : S \subset B \subset Q(1,S) \text{ y } B \cap N(1,S) \text{ es conexo}\}$$

y donde un elemento $A \in \mathcal{M}_S$ puede ser escrito en la forma:

$A = S \cup (\bigcup\{[0,a_i] : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{[0,c_j] \cup [d_j,1] : 1 \leq j \leq s\})$, donde $0 \leq a_i \leq 1$, para cada i, y $0 \leq c_j \leq d_j \leq 1$, para cada j.

Si consideramos el número $n = 2s + r$, donde s y r son los valores asociados al número de segmentos de la representación canónica de $Q(1,S)$, entonces se sabe que $\mathcal{M}_S$ tiene dimensión n. Más aún, R. Duda demostró que $\mathcal{M}_S$ es homeomorfo a I^n [6, Teorema 5.2]. El siguiente lema es una extensión del resultado de Duda, y aparece en un artículo de A. Illanes e I. Puga [15. Teorema 1.1.]. Aunque este último lema es fácil de visualizar, resulta bastante laborioso de demostrar. De modo que sólo presentamos su enunciado.

Lema 3.8. Sea $n = 2s + r$, donde s y r son los valores asociados al número de segmentos de la representación canónica de $Q(1,S)$. Si $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r$ y $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq s$, entonces la dimensión del conjunto $\{A \in \mathcal{M}_S : I_1 \cup ... \cup I_{r_1} \subset A,\ a_{r_1+1} = 0, ..., a_{r_2} = 0,\ J_1 \cup ... \cup J_{s_1} \subset A \text{ y } d_{s_1+1} = 1, ..., d_{s_2} = 1, c_{s_1+1} = 0, ..., c_{s_2} = 0\}$ es a lo más $n - r_2 - 2s_1 - 2s_2 = n - r_2 - 2(s_1 + s_2)$.

El teorema dice, básicamente, que la dimensión del subconjunto de elementos de $\mathcal{M}_S$ que resulta de añadir (o quitar) a cada uno de ellos algunos de los segmentos de la representación canónica de $Q(1,S)$ es a lo más la dimensión original menos el número (o el doble del numero, dependiendo del tipo de segmento) de segmentos que se les añadieron o quitaron a cada uno de estos elementos. Por ejemplo, si consideramos el subconjunto $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_S$ tal que cada uno de los elementos de $\mathcal{N}$ contiene al segmento I_1 y al segmento J_1. Entonces la dimensión de $\mathcal{N}$ satisfará $\dim \mathcal{N} = n - 1 - 2(1) = n - 3$.

La prueba del siguiente lema aparece en [17, Lema 1.4.].

Lema 3.9. Sean S y T subgráficas finas de X tales que $S \subset T$. Entonces se tiene que :
(a) $\dim \mathcal{M}_S < \dim \mathcal{M}_T$ siempre que $T \neq S$,
(b) Si $S \neq \emptyset$ y existe exactamente un segmento en T el cual no pertenece a S entonces $T \neq Q(1,S)$.

Usando los Lemas 3.8 y 3.9 probaremos el siguiente lema, el cual nos dice que subgráficas finas para las que $\mathcal{M}_S$ tiene igual dimensión y que son distintas se intersectan en conjuntos de dimensión menor o igual que la dimensión original disminuida en dos unidades. Este hecho será una pieza importante para probar el Teorema 3.11, el cual nos dice básicamente que si se tiene una vecindad $\mathcal{U}$ alrededor de X en $C(X)$ homeomorfa a una N-celda entonces existe una subgráfica fina S de X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$.

Lema 3.10. Sean X una gráfica y S y T subgráficas finas de X diferentes del vacío tales que $\mathcal{M}_S \neq \mathcal{M}_T$.

Supongamos que $N = \dim \mathcal{M}_S = \dim \mathcal{M}_T \geq 1$. Entonces $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N-2$.

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T \neq \emptyset$ (si $\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T = \emptyset$ entonces $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) = -1$ y, por lo tanto, se cumple el lema).

Sea $A \in \mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$. Debido a que a lo largo de la prueba se consideran varios casos, convendremos en que si logramos demostrar que el elemento A tiene cierta propiedad entonces todos los elementos de $\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$ tendrán también la propiedad.

En primer lugar, por definición de $\mathcal{M}_S$ y $\mathcal{M}_T$, tenemos que $S \subset A \subset Q(1,T)$ y $T \subset A \subset Q(1,S)$. Consideremos las representaciones canónicas de $Q(1,S)$ y $Q(1,T)$.

$$Q(1,S) = S \cup (\bigcup\{I_i : 1 \leq i \leq r\}) \cup (\bigcup\{J_j : 1 \leq j \leq s\})$$

$$Q(1,T) = T \cup (\bigcup\{L_l : 1 \leq l \leq n\}) \cup (\bigcup\{K_k : 1 \leq k \leq m\})$$

Observamos que $S \neq T$ (si $S = T$ entonces tendríamos que $\mathcal{M}_S = \mathcal{M}_T$ lo cual contradice una de las hipótesis iniciales). Esto implica, por el Lema 3.9., que S no está contenido en T ni T está contenido en S.

Primero analizaremos el caso en que hay dos segmentos M_1 y M_2 de T, que son arcos, y que no pertenecen a S.

Puesto que $T \subset A \subset Q(1,S)$ y M_1 y M_2 no están contenidos en S, se sigue de las suposiciones que estamos haciendo que M_1 y M_2 son iguales a algunos de los segmentos I_i de la representación canónica de $Q(1,S)$. Podemos pensar que $M_1 = I_1$ y $M_2 = I_2$. Puesto que M_1 y M_2 están contenidos en A, (ya que M_1 y $M_2 \subset T \subset A$) se sigue que I_1 y $I_2 \subset A$.

Entonces, por la convención que hicimos al inicio de la demostración se tiene que I_1 y $I_2 \subset A$ para todo $A \in \mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$ y por lo tanto, aplicando el Teorema 3.8 a estos elementos, concluimos que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N-2$.

Ahora veamos el caso en que hay un segmento de T que no es un arco y que intersecta a S exactamente en su extremo. Sea M tal segmento. Nuevamente, puesto que $T \subset A \subset Q(1,S)$ y M no está contenido en S, se tiene que M es igual a alguno de los segmentos J_j de la representación canónica de $Q(1,S)$. Podemos pensar que $M = J_1$. Como M está contenido en A, se tiene que $J_1 \subset A$. Por tanto, concluimos que para toda $A \in \mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$ se cumple que $J_1 \subset A$. Y aplicando nuevamente el Teorema 3.8, se tiene que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2(1) = N - 2$.

El caso en que hay un segmento de T que es un arco y que intersecta a S en exactamente sus dos extremos es similar al que acabamos de ver. También observamos que si T tiene más de dos segmentos que no están contenidos en S entonces podemos reducir esta situación a los casos anteriores para concluir que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2$.

De esta forma, podemos suponer que hay un único segmento L en T que es un arco y que no pertenece a S. Sea v el extremo de L que no está en S. Lo anterior implica además que todos los vértices de T excepto v están en S.

Puesto que $v \in T$, tenemos que v es un punto de ramificación de X. Esto nos lleva a considerar dos casos:

(a) Existe un segmento de N de X diferente de L que no es un arco y tal que su extremo coincide con v.

Puesto que $v \notin S$, el interior de N no intersecta a $Q(1,S)$. Por otro lado, puesto que $N \subset Q(1,T)$ (ya que N intersecta a T en v) y N no está contenido en T, se tiene que N es igual a alguno de los segmentos K_k de la representación canónica de $Q(1,T)$. Supongamos, por ejemplo, $N = K_1$. Observamos, por lo que dijimos dos líneas antes, que $K_1 \cap Q(1,S) = \{v\} = \{(0)_K\}$. Entonces, puesto que $T \subset A \subset Q(1,S)$ y $v \in T$, tenemos que $A \cap K_1 = \{v\} = \{(0)_{K_1}\}$.

Consideramos la representación canónica de A con respecto a T, a saber,

$A = T \cup (\bigcup \{[0, f_l] : 1 \leq l \leq n\}) \cup (\bigcup \{[0, g_k] \cup [h_k, 1] : 1 \leq k \leq m\})$. Entonces, puesto que $[0, g_1] \cup [h_1, 1] \subset K_1$ y $A \cap K_1 = \{v\} = \{(0)_{K_1}\}$, se sigue que $g_1 = 0$ y $h_1 = 1$ en la representación canónica de A con respecto a T y, por lo tanto, para todo elemento $A \in \mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$, se cumple que $g_1 = 0$ y $h_1 = 1$, en su representación canónica con respecto a T. Con lo cual concluimos que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2(1) = N - 2$ (Teorema 3.8).

(b) Existen dos segmentos M y N de X diferentes de L que son arcos y tales que v es uno de los extremos tanto de M como de N y M y N tienen sus otros extremos, u y w respectivamente, diferentes de v. Observamos que M y N no son segmentos de S (ya que $v \notin S$).

Consideremos tres subcasos.

$(b.1)$ u y $w \notin S$. Entonces tenemos que u y $w \notin T$ (ya que v es el único vértice de T que no está en S) y que el interior de $M \cup N$ no intersecta a $Q(1, S)$. Por otro lado, puesto que N y $M \subset Q(1, T)$ (ya que tanto N como M intersectan a T en v) y ni N ni M están contenidos en T, se tiene que tanto M como N son iguales a alguno de los segmentos L_l de la representación canónica de $Q(1, T)$. Supongamos, por ejemplo, $M = L_1$ y $N = L_2$. Por lo que anteriormente, sabemos que $L_1 \cap Q(1, S) = \{v\} = \{(0)_{L_1}\}$ y $L_2 \cap Q(1, S) = \{v\} = \{(0)_{L_2}\}$. Entonces, puesto que $T \subset A \subset Q(1, S)$ y $v \in T$, tenemos que $A \cap L_1 = A \cap L_2 = \{v\} = \{(0)_{K_1}\} = \{(0)_{K_2}\}$.

Consideremos nuevamente la representación canónica de A con respecto a T, a saber:

$A = T \cup (\bigcup\{[0, f_l] : 1 \leq l \leq n\}) \cup (\bigcup\{[0, g_k] \cup [h_k, 1] : 1 \leq k \leq m\})$. Entonces, puesto que $[0, f_1] \subset L_1$, $A \cap L_1 = \{(0)_{L_1}\}$ y $[0, f_2] \subset L_2$, $A \cap L_2 = \{(0)_{L_2}\}$, se sigue que $f_1 = f_2 = 0$ en la representación canónica de A con respecto a T. De modo que para todo elemento $A \in \mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}$ se cumple que $f_1 = f_2 = 0$ en su representación canónica con respecto a T. Por lo tanto, concluimos que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2$ (Teorema 3.8).

$(b.2)$ $u \in S$ y $w \notin S$. Aplicando a w argumentos similares al subcaso $(b.1)$, tenemos que $f_2 = 0$ (donde f_2 es el extremos del intervalo $[0, f_2]$ de la representación canónica de A con respecto a T, a saber, $A = T \cup (\bigcup\{[0, f_l] : 1 \leq l \leq n\}) \cup (\bigcup\{[0, g_k] \cup [h_k, 1] : 1 \leq k \leq m\}))$.

Puesto que $u \in S$, puede ocurrir que $u \in T$. Mostraremos que u no puede ser vértice de T. Si este fuera el caso entonces el razonamiento sería el siguiente: Puesto que u y v son vértices de T, entonces M es un segmento de T. Puesto que estamos suponiendo que el L es el único segmento de T que no pertenece a S, lo anterior implica que M es un segmento de S. Lo que implica que los extremos de M, u y v, están en S, lo cual es absurdo ya que $v \notin S$. De lo anterior concluimos que $u \notin T$.

Entonces tenemos que $u \notin T$ y que $v \in T$, lo que implica que $M \subset Q(1, T)$ (ya que M intersecta a T en v) y M no está contenido en T. Por lo tanto M es igual a alguno de los segmentos L_l de la representación canónica de $Q(1, T)$. Supongamos que $M = L_1$.

Mostraremos que A no puede tener en su representación canónica, con respecto a T, un intervalo de la forma $[(0)_{L_1}, f_1]$, donde $(0)_{L_1}$ está asociado con el vértice v y $0 < f_1 < 1$. Supongamos que esto si ocurre. Observamos que $L_1 \subset Q(1, S)$ (ya que $M \subset Q(1, S)$). Entonces, puesto que $[(0)_{L_1}, f_1] \subset L_1$, $[(0)_{L_1}, f_1] \subset A$ (por hipótesis) y $[(0)_{L_1}, f_1] \subset N(1, S)$, tenemos que $((0)_{L_1}, f_1] \subset A \cap L_1 \cap N(1, S)$. Sea $x \in A \cap L_1 \cap N(1, S)$. Puesto que $A \cap L_1 = [(0)_{L_1}, f_1]$, tenemos que $x \in ((0)_{L_1}, f_1]$. Lo anterior implica que $(A \cap L_1) \cap N(1, S) = ((0)_{L_1}, f_1]$. De manera similar obtenemos que $(A \cap L_1 \setminus \{v, u\}) \cap N(1, S) = ((0)_{L_1}, f_1]$. Lo cual implica que $((0)_{L_1}, f_1]$ es un subconjunto abierto, cerrado y diferente del vacío de $A \cap N(1, S)$. Como $A \cap N(1, S)$ es un conjunto conexo por definición, concluimos que $A \cap N(1, S) = (0, f_1]$, lo cual es absurdo ya que $\emptyset \neq S \subset A \cap N(1, S) \setminus (0, f_1]$.

Lo anterior implica que para los intervalos de la forma $[(0)_{L_1}, f_1]$ se tiene que $f_1 = 1$ o $f_1 = 0$.

Si $f_1 = 1$ entonces tenemos que $[(0)_{L_1}, f_1] = L_1$ y, por lo tanto, que $L_1 \subset A$ y $f_2 = 0$. Si $f_1 = 0$ entonces tenemos que $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$,

Por tanto, para todo elemento A de $\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$ se cumple que ($L_1 \subset A$ y $f_2 = 0$) o ($f_1 = 0$ y $f_2 = 0$). Esto implica que $\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T$ está contenido en la unión de dos conjuntos compactos de dimensión menor o igual a $N - 2$ (Teorema 3.8). Por tanto, $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2$.

(b.3) $u \in S$ y $w \in S$. La prueba de este caso es similar a (b.2).

Así pues, concluimos que $\dim(\mathcal{M}_S \cap \mathcal{M}_T) \leq N - 2$ y por tanto queda demostrado el lema.□

Teorema 3.11. Sean X una gráfica diferente de un arco y de una curva cerrada simple y $\mathcal{C}$ una vecindad de X en $C(X)$, homeomorfa a una N-celda ($N \geq 1$). Entonces existe una N-celda $\mathcal{U}$ contenida en $\mathcal{C}$ y una subgráfica fina S de X tal que $S \neq \emptyset$ y $X \in int_{C(X)}\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$.

Demostración. Ya que $\mathcal{C}$ es una vecindad de X en $C(X)$, existe un abierto $\mathcal{W}$ de $C(X)$ tal que $X \in \mathcal{W} \subset \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{W}$ es un abierto en $\mathcal{C}$, por lo que existe una N-celda $\mathcal{U}$ tal que $X \in int_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{W}$. Como $\mathcal{C}$ es una N-celda, podemos pensar que $\mathcal{C}$ es igual a $[0, 1]^N$. Por lo que $\mathcal{U}$ puede ser escogido de la forma $[a_1, b_1] \times ... \times [a_N, b_N]$, donde $b_i - a_i < 1$ para cada $i \in \{1, ..., N\}$. Sea $\mathcal{V} = int_{\mathcal{C}}(\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{V}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^N$ o al semiespacio $\mathbb{H}^N = \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 \geq 0\}$. Notemos que $\mathcal{U} = Ce_{C(X)}(\mathcal{V})$. Aseguramos que $\mathcal{V}$ es abierto en $C(X)$. Efectivamente, como $\mathcal{V} = int_{\mathcal{C}}(\mathcal{U})$, $\mathcal{V}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}$ por lo que existe un abierto $\mathcal{P}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{P} \cap \mathcal{C} = \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{P} \cap \mathcal{W} = \mathcal{P} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$ y, como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{W}$ son abiertos en $C(X)$, concluimos que $\mathcal{V}$ es abierto en $C(X)$.

A continuación probaremos que existe una subgráfica fina S de X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$. De [6, Proposición 5.1], tenemos que $\mathcal{U} \subset \bigcup\{\mathcal{M}_S : S$ es una subgráfica fina de $X\}$. Como X no es un arco ni un círculo, entonces X no puede estar contenido en ningún segmento de X. Más aún, los subcontinuos de X, cercanos a X, tampoco pueden estar contenidos en ningún segmento de X. Reduciendo a $\mathcal{U}$ si fuera necesario, podemos suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ no están contenidos en ningún segmento de X. Sean $S_1, ..., S_n$ las subgráficas finas de X tales que $IR(\mathcal{M}_{S_i}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por la observación que acabamos de hacer, cada S_i es diferente del vacío. Definimos $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{S_1} \cup, ..., \cup \mathcal{M}_{S_n}$. Observamos que $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado ya que cada $\mathcal{M}_{S_i}$ es un conjunto compacto (cada $\mathcal{M}_{S_i}$ es homeomorfo a una k-celda ([6, Teorema 5.2])).

Ahora probaremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Ya que $\mathcal{U} = Ce_{C(X)}(\mathcal{V})$, bastará probar que $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$. Supongamos que esto no es cierto. Sea $E \in \mathcal{V} \backslash \mathcal{M}$ y sea T una subgráfica fina de X tal que $E \in \mathcal{M}_T$ (podemos encontrar dicha T debido a que $\mathcal{V} \subset \bigcup\{\mathcal{M}_S : S$ es una subgráfica fina de $X\}$ ([6, Proposición 5.1])) . Entonces $\mathcal{V} \backslash \mathcal{M}$ es abierto en $C(X)$. Es fácil mostrar que $\mathcal{M}_T = Ce_{C(X)}(IR(\mathcal{M}_T))$ (todo elemento de $\mathcal{M}_T$ se puede aproximar por elementos de $IR(\mathcal{M}_T)$, basta alargar o recortar un poco sus "patas"), de manera que $(\mathcal{V} \backslash \mathcal{M}) \cap (IR(\mathcal{M}_T)) \neq \emptyset$. Así que $IR(\mathcal{M}_T) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Esto dice que $T = S_i$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$ y, entonces, $(\mathcal{V} \backslash \mathcal{M}) \cap \mathcal{M}_T = \emptyset$. Esta contradicción prueba que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

A continuación probaremos que si $i, j \in \{1, ..., n\}$, con $i \neq j$, entonces $\dim \mathcal{M}_{S_i} \cap \mathcal{M}_{S_j} \leq N - 2$.

Sabemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $IR(\mathcal{M}_{S_i})$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ que intersecta a $\mathcal{U} = Ce_{C(X)}(\mathcal{V})$ y entonces $IR(\mathcal{M}_{S_i}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Entonces $IR(\mathcal{M}_{S_i}) \cap \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto y no vacío tanto de $\mathcal{M}_{S_i}$ como de $\mathcal{V}$. sabemos que $\mathcal{M}_{S_i}$ es homeomorfo a una k-celda ([6, Teorema 5.2]) y, entonces $IR(\mathcal{M}_{S_i}) \cap \mathcal{V}$ tiene dimensión igual a k en todos sus puntos. Por otra parte, $\mathcal{V}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^N$ o a $\mathbb{H}^N$ de donde $IR(\mathcal{M}_{S_i}) \cap \mathcal{V}$ tiene dimensión igual a N en todos sus puntos. Esto muestra que $N = k$. Por tanto $\dim \mathcal{M}_{S_i} = N$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

Tomemos i y $j \in \{1, ..., n\}$ tales que $S_i \neq S_j$. Notemos que $S_i \in \mathcal{M}_{S_i}$ y S_i está contenido en todos los elementos de $\mathcal{M}_{S_i}$. Si ocurriera que $\mathcal{M}_{S_i} = \mathcal{M}_{S_j}$, entonces tendríamos que $S_i \subset S_j$ y viceversa. Lo que implicaría que $S_i = S_j$, lo cual sería una contradicción. Por tanto $\mathcal{M}_{S_i} \neq \mathcal{M}_{S_j}$. Debido a que cada S_i es diferente del vacío, tenemos que, para cada par de números i y $j \in \{1, ..., n\}$, con $S_i \neq S_j$, se cumple que dim $\mathcal{M}_{S_i} \cap \mathcal{M}_{S_j} \leq N - 2$ (Lema 3.10).

Ya sabemos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{S_1} \cup \mathcal{M}_{S_2} \cup ... \cup \mathcal{M}_{S_n}$. Ahora supongamos que, reordenando si es necesario, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{S_1} \cup \mathcal{M}_{S_2} \cup ... \cup \mathcal{M}_{S_m}$ y que m es mínima en el sentido de que $\mathcal{U}$ no está contenida en una unión de menos conjuntos $\mathcal{M}_{S_i}$.

Probaremos finalmente que $m = 1$. Supongamos que $m > 1$. Por la minimalidad de m, $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{M}_{S_1}$ y $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{M}_{S_2} \cup \mathcal{M}_{S_2} \cup ... \cup \mathcal{M}_{S_m}$. Definimos $\mathcal{B} = \mathcal{M}_{S_1} \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{D} = (\mathcal{M}_{S_1} \cup, ..., \cup \mathcal{M}_{S_m}) \cap \mathcal{U}$. Observamos que $\mathcal{U} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ y que dim $\mathcal{B} \cup \mathcal{D} \leq N$-2 (esto último debido a que dim $\mathcal{M}_{S_i} \cap \mathcal{M}_{S_j} \leq N$-2 si $i \neq j$ y por ([11, Teorema III.2]). Puesto que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{U} \backslash \mathcal{B}$ y $\mathcal{U} \backslash \mathcal{D}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{U}$, distintos del vacío, tales que $\mathcal{U} \backslash (\mathcal{B} \cup \mathcal{D}) = (\mathcal{U} \backslash \mathcal{B}) \cup (\mathcal{U} \backslash \mathcal{D})$. Lo anterior implica que el conjunto $\mathcal{U}$, que es una N-celda, está separado por un subconjunto de dimensión menor o igual que $N-2$, lo cual contradice un resultado famoso de dimensión ([11, Corolario 2 del Teorema IV.4]). Esto demuestra que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{S_1}$. De esta manera terminamos la prueba del teorema. $\square$

Definición 3.12. Una gráfica X es un *árbol frutal* si todo ciclo contiene exactamente un vértice o, en otras palabras, si los únicos ciclos de X, si los hay, son segmentos de X que son curvas cerradas simples.

Antes de presentar el teorema principal de este capítulo demostraremos tres lemas que tienen que ver con los árboles frutales y con las gráficas finitas que contienen ciclos.

Lema 3.13. Si X es un árbol frutal, J es un segmento de X que es un arco, $p \in J$ y p no es un punto extremo de X entonces p es un punto de corte de X.

Demostración. Sean $(0)_J$ y $(1)_J$ los extremos de J. Supongamos que p no es un punto de corte. Esto quiere decir que $X \backslash \{p\}$ es un subconjunto conexo de X. Lo que implica que existe un arco α en $X \backslash \{p\}$ que une los puntos $(0)_J$ y $(1)_J$. Por la Observación 3.6, $\alpha = \{I : I$ es segmento de X, I es un arco e $I \subset \alpha\}$. Esto implica que J no es un segmento de los que componen a α. Lo anterior implica que α tiene por lo menos un segmento K diferente de J. Entonces, si nos fijamos en el conjunto $\alpha \cup J$, éste resulta ser un ciclo con por lo menos dos vértices ($(0)_J$ y $(1)_J$), lo que contradice el que X sea un árbol frutal. Puesto que esta contradicción vino de suponer que $X \backslash \{p\}$ era conexo, concluimos que p es un punto de corte de X. $\square$

Lema 3.14. Sea X una gráfica finita. Supongamos que γ es una curva cerrada simple contenida en X, entonces γ es unión de segmentos de X.

Demostración. Sea γ una curva cerrada simple contenida en X. Mostraremos que $\gamma = \bigcup\{I : I$ es un segmento de X, I es un arco e $I \subset \gamma\}$. Puesto que γ es una curva cerrada simple. sabemos que todos los puntos de γ tienen orden dos con respecto a γ. Como en la observación 3.6, supongamos que existe un punto $p \in \gamma$ y que no está en la unión de la derecha de la igualdad. Como esta unión es un conjunto cerrado toda una vecindad de p la evade. Como sólo hay un número finito de vértices de X, en toda vecindad de p en γ hay puntos que no son vértices. Por tanto podemos suponer que p no es un vértice.

Entonces existe un segmento L de X tal que $p \in L\backslash\{(0)_L, (1)_L\}$ y $L \not\subset \gamma$. Entonces existe un punto $q \in Fr_L(\gamma \cap L)\backslash\{(0)_L, (1)_L\}$. Entonces q tiene una base de vecindades en γ cuya frontera tiene un solo punto. Por tanto q tiene orden 1 en γ. Esto es absurdo ya que todos los puntos de γ tienen orden 2. Esta contradicción muestra que α es unión de segmentos de X. $\square$

Lema 3.15. Sea X una gráfica finita. Supongamos que γ es un círculo en X, J es un arco contenido en γ y $(0)_J < a < b < (1)_J$. Entonces $X\backslash(a, b)$ es conexo.

Demostración Por el Lema 3.14, sabemos que γ es una unión de segmentos de X. Podemos convenir en que $\gamma = I_1 \cup ... \cup I_n$ y que $J = I_1$, donde se tiene que los extremos de estos intervalos cumplen con lo siguiente:

$(1)_{I_1} = (0)_{I_2}, (1)_{I_2} = (0)_{I_3}, ..., (1)_{I_{n-1}} = (0)_{I_n}, (1)_{I_n} = (0)_{I_1}$.

Esto implica que el conjunto $I_2 \cup ... \cup I_n$ es conexo y, también, el conjunto $\beta = I_2 \cup ... \cup I_n \cup [(1)_{I_1}, a] \cup [b, (0)_{I_1}]$ resultará ser conexo. Supongamos que $X\backslash(a, b)$ es un conjunto disconexo. Esto implica que existen dos subconjuntos cerrados, ajenos, no vacíos K y L de X tales que $X\backslash(a, b) \subset K \cup L$. Ya que el conjunto β es conexo, lo anterior implica que $\beta \subset K$ o $\beta \subset L$. Supongamos que $\beta \subset K$. Sea C una componente de $X\backslash(a, b)$ contenida en L. Por el Teorema 1.10 tenemos que $Ce(C) \cap Fr(X\backslash(a, b)) \neq \emptyset$. Como la frontera de $X\backslash(a, b)$ es el conjunto $\{a, b\}$ concluimos que $a \in C$ o $b \in C$ (ya que $C = Ce(C)$). Ambos casos implican que $\beta \cap L \neq \emptyset$. Lo que implica finalmente que $K \cap L \neq \emptyset$, lo cual es absurdo.

Puesto que esta contradicción vino de suponer $X\backslash(a, b)$ era disconexo se concluye la afirmación del teorema. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a las gráficas cuyo hiperespacio tiene una vecindad alrededor de X en $C(X)$ homeomorfa a una N-celda.

Teorema 3.16. Sea X una gráfica finita. Entonces X es un árbol frutal si y sólo si $C(X)$ es localmente Euclidiano en la cúspide.

Demostración. Puesto que para un intervalo y un círculo se tiene el resultado (Corolario 2.4.5), podemos suponer que X es diferente de estos continuos.

(Necesidad). Para esto tomemos una subgráfica fina S de X que contenga a todos los puntos de ramificación de X (más adelante probamos que existe un subcontinuo $L \in C(X)$ tal que L contiene a todos los puntos de ramificación y, entonces, usando el hecho de que $C(X) \subset \bigcup\{\mathcal{M}_S : S$ es una subgráfica fina de $X\}$, se obtiene tal S). Consideremos el conjunto $\mathcal{M}_S = \{B \in C(X) : S \subset B \subset Q(1, S)$ y $B \cap N(1, S)$ es conexo$\}$. Sabemos, por definición, que S no contiene puntos extremos de X. También sabemos que $\mathcal{M}_S$ es homeomorfa a una N-celda [6, Teorema 5.2] .

Tomemos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$.

Probaremos que $\mathcal{M}_S$ es una vecindad de X en $C(X)$. Para esto, mostraremos que existe $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}((t,1]) \subset \mathcal{M}_S$ y, puesto que $\mu^{-1}((t,1])$ es un subconjunto abierto de $C(X)$, conteniendo a X, habremos terminado.

Sean $S(X) = \{L :\ L$ es una subgráfica conexa de X tal que $L \neq X\}$ y $t \in (0,1)$ tal que $t > m\acute{}x\{\mu(L) : L \in S(X)\}$ y $A \in \mu^{-1}((t, 1])$. Afirmamos que A contiene a todos los puntos de ramificación de X. Supongamos que existe un punto de ramificación $v \notin A$.

Puesto que v es un punto de ramificación y X es un árbol frutal, v es un punto de corte de X (Lema 3.13).

Hagamos $Z = X\setminus\{v\}$. El hecho de que v sea un punto de corte implica que A debe quedar contenida en alguna componente de Z (si A no estuviera contenida en ninguna componente de Z entonces, puesto que $v \notin A$, tendríamos que A es disconexo, lo cual sería una contradicción). Supongamos que esta componente es C. Es fácil convencerse de que $C^* = C \cup \{v\}$ es una subgráfica conexa de X. Además, $\mu(A) \leq \mu(C^*)$.

Pero por otro lado, puesto que $C^* \in S(X)$, sabemos que $\mu(C^*) < t$. De todo lo cual llegamos a que son ciertas la siguiente serie de desigualdades: $\mu(C^*) < t \leq \mu(A) \leq \mu(C^*)$, lo que es, evidentemente, un absurdo. Esta contradicción implica que A contiene todos los puntos de ramificación de X.

Ahora probaremos que $S \subset A$. Supongamos que pasa lo contrario. Entonces existe un segmento I de S que no está contenido en A. Puesto que S es una subgráfica fina, I es un arco. De modo que sus extremos v y w son distintos.

Además, puesto que v y w son puntos de ramificación, tenemos que v y $w \in A$. Ya que I no está contenido en A, lo anterior implica que existe un punto p en I diferente de v y w tal que $p \notin A$.

Ahora, debido que X es un árbol frutal, sabemos que p es un punto de corte de X (Lema 3.13). Lo anterior implica $X \backslash \{p\}$ es subconjunto disconexo y, por lo tanto, existen dos subconjuntos abiertos U y V de X, distintos del vacío, tales que $X \backslash \{p\} = U \cup V$. Puesto que $p \notin A$, tenemos que $A \subset U \cup V$. Además, puesto que v y $w \in A$ y éstos son los extremos del segmento que contiene a p, también se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Todo lo anterior implica que A es disconexo, lo cual es absurdo.

Puesto que este absurdo vino de suponer que S no estaba contenido en A, concluimos que $S \subset A$.

Así pues, hemos demostrado que para todo $A \in \mu^{-1}((t,1])$ se cumple que $S \subset A$.

Para concluir que $\mu^{-1}((t,1]) \subset \mathcal{M}_S$ sólo resta demostrar que para todo $A \in \mu^{-1}((t,1])$ se tiene que $A \cap N(1,S)$ es conexo. Sea $A \in \mu^{-1}((t,1])$ y hagamos $P = \{x : x \text{ es punto extremo de } X\}$. Observamos que, puesto que S contiene a todos los puntos de ramificación de X, entonces $Q(1,S) = X$. De lo anterior se sigue que $A \cap N(1,S) = A \cap (Q(1,S) \backslash P) = A \cap (X \backslash P)$.

Si A no contiene puntos extremos de X entonces $A \cap (X \backslash P) = A$ y, por lo tanto, $A \cap N(1,S)$ es conexo. Supongamos que A contiene exactamente un punto extremo p de X. Entonces $A \cap (X \backslash P) = A \backslash \{p\}$. Observamos que si x es un punto extremo de X y x está en algún subconjunto B de X entonces x es punto extremo de B. De esta observación se tiene que p es punto extremo de A y, por lo tanto, $A \backslash \{p\}$ es un subconjunto conexo. Razonando de manera similar tendríamos que si A contiene k puntos extremos de X, entonces $A \backslash \{p_1, ..., p_k\}$ sería un subconjunto conexo. Lo anterior implica que $A \cap N(1,S)$ es conexo. Todo esto implica que $A \in \mathcal{M}_S$.

De todo lo anterior se sigue que $\mu^{-1}((t,1]) \subset \mathcal{M}_S$. Por tanto, concluimos que $\mathcal{M}_S$ es una vecindad de X homeomorfa a una N-celda. Es decir, X es localmente Euclidiano en la cúspide.

(Suficiencia). Puesto que X es localmente Euclidiano, existe una vecindad alrededor de X en $C(X)$ homeomorfa a una N-celda.

Por el Teorema 3.11, existe una N-celda $\mathcal{U}$ contenida en dicha vecindad y una subgráfica fina S de X, distinta del vacío, tal que $X \in int_{C(X)}\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$.

Puesto que $X \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$, se sigue que $S \subset X \subset Q(1,S)$ y, por lo tanto, que $X = Q(1,S)$.

Sea γ una curva cerrada simple en X. Por el Lema 3.14 sabemos que γ es unión de segmentos de X. Mostraremos que existe un segmento J en X tal que $\gamma = J$ y donde J es un círculo. Supongamos, por el contrario, que γ contiene más de un segmento de X.

Afirmamos que los segmentos de γ no son segmentos de S. Supongamos que existe un segmento L en γ que también lo es de la gráfica S. Entonces procedemos como sigue. Fijemos dos puntos a y $b \in L$, con $a < b$ y tales que estén lo suficientemente cerca de modo que si $B = X \backslash (a,b)$ entonces $B \in \mathcal{U}$ (debido a que podemos suponer que a y b no son extremos de L, la conclusión anterior es posible debido a que, como a y $b \in L \subset \gamma$ y γ es una curva cerrada simple, B es un subcontinuo (Lema 3.15) y, por otra parte, siempre podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(X) \subset \mathcal{U}$ y $B \in B_\varepsilon^H(X)$).

Ya que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$, se tiene que $B \in \mathcal{M}_S$. Lo cual implica, por definición de $\mathcal{M}_S$, que $L \subset S \subset B = \gamma \backslash (a,b)$. Esto implica que el punto $\frac{a+b}{2} \notin L$ lo cual es una contradicción.

Con lo anterior probamos que los segmentos de γ no lo son de S.

Sean M un segmento de γ y v y u los extremos de M. Puesto que $M \subset Q(1,S)$, consideremos dos casos:

(a) Los dos extremos de M están es S. Si los extremos de M coinciden entonces M es una curva cerrada simple contenida en γ, de modo que $M = \gamma$. Pero esto contradice lo que habíamos supuesto de γ. Por lo tanto los extremos de M son diferentes. Puesto que cualesquiera dos puntos de S pueden ser conectados por un arco en S, sea α en S el arco que une a v con u. Entonces $\gamma_1 = \alpha \cup M$ es una curva cerrada simple que comparte un segmento con S. Procediendo como en el párrafo anterior, lo anterior nos lleva a una contradicción. De manera que este caso no se puede dar.

(b) $v \in S$ y $w \notin S$. Sea $0 < a < 1$ tal que si hacemos $B = X \backslash (v,a)$ entonces $B \in \mathcal{U}$.

Por la forma en que construimos a B, sabemos que $[a,w] \subset B$. Lo cual implica que $N(1,S) \cap B \cap (v,w) = [a,w)$. Puesto que $w \notin N(1,S)$, también tenemos que $N(1,S) \cap B \cap [\frac{v+a}{2}, w] = [a,w)$. Es decir, $B \cap [a,w)$ es un subconjunto cerrado y abierto de $B \cap N(1,S)$. Por otro lado, puesto que $B \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}_S$, se tiene que $S \subset B$ y $B \cap N(1,S)$ es conexo. De modo que $S = B \cap S \subset B \cap N(1,S) = [a,w)$. Pero esto es una contradicción puesto que $S \cap [a,w) = \emptyset$.

Por lo tanto el caso (b) tampoco puede ser. Lo cual prueba que γ no puede contener más que un solo segmento de X. Lo cual prueba que X es un árbol frutal. De esta forma terminamos la segunda parte del teorema. $\square$

"... En el verano de 1991, después de pasar un año de calma chicha, Wiles encontró el método de Kolyvaguin y Flach y abandonó la teoría Iwasawa a favor de esta nueva técnica. Al año siguiente anunció la demostración en Cambridge y fue proclamado un héroe. En menos de dos meses se demostró que el método de Kolyvaguin–Flach era defectuoso y desde entonces la situación había empeorado. Cada intento de arreglar Kolyvaguin-Flach había fallado.

Todo el trabajo de Wiles, salvo la parte final que utilizaba el método de Kolyvaguin–Flach, era valioso. La conjetura de Taniyama-Shimura no había sido resuelta. Wiles quería entender al menos porque había fracasado y decidió dedicar el mes de septiembre a examinar por última vez la estructura del método de Kolyvaguin–Flach para intentar concretar porque no funcionaba. Recuerda vívidamente aquellos decisivos días: <<Estaba sentado frente a mi escritorio un lunes por la mañana, el 19 de septiembre, examinando el método de Kolyvaguin-Flach. No es que creyera que podía hacerlo funcionar, pero al menos quería saber porque fallaba. Creo que me estaba aferrando a un clavo ardiendo, pero quería convencerme a mí mismo. De repente en forma inesperada, tuve una revelación increíble. Me di cuenta que, aunque el método no funcionaba perfectamente era todo lo que necesitaba para desarrollar mi trabajo original con la teoría Iwasawa. Me di cuenta de que conseguía lo suficiente del método de Kolyvaguin–Flach para que mi enfoque original del problema, que había hecho tres años antes, funcionara. Así que de las cenizas del método de Kolyvaguin-Flach, parecía elevarse la respuesta real del problema.>>..."

El enigma dè Fermat

Simon Singh

4. HIPERESPACIOS QUE SON LOCALMENTE DE HILBERT EN LA CÚSPIDE.

El concepto de "localmente Euclidiano en la cúspide" tiene una generalización para Hiperespacios de un continuo arbitrario X. En este sentido, diremos que el hiperespacio 2^X (respectivamente $C(X)$) *es localmente de Hilbert en la cúspide* si existe una vecindad alrededor de X contenida en 2^X (respectivamente contenida en $C(X)$) la cual es homeomorfa al cubo de Hilbert.

En el Teorema 4.12. mostramos que una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio 2^X de un continuo X sea localmente de Hilbert en la cúspide es que X sea localmente conexo.

Al intentar dar una caracterización análoga para el hiperespacio $C(X)$ de un continuo localmente conexo X no corrimos con la misma suerte. Creímos que una condición suficiente para que el hiperespacio $C(X)$ de un continuo localmente conexo X fuera localmente de Hilbert en X era que X no fuera una gráfica finita conexa. Sin embargo, en el Ejemplo 4.7 mostramos un continuo localmente conexo X que no es una gráfica finita conexa y que, sin embargo, su hiperespacio $C(X)$ no tiene vecindades alrededor de X homeomorfas al cubo de Hilbert.

Con el fin de presentar el ejemplo del continuo X cuyo hiperespacio $C(X)$ no tiene vecindades alrededor de X homeomorfas al cubo de Hilbert, daremos algunas definiciones y resultados previos.

Definición 4.1. Sean X un continuo con métrica d y A un subconjunto cerrado de X. Entonces A es un *Z-conjunto* en X si para cada $\varepsilon > 0$ entonces existe una función continua $f_\varepsilon : X \to X \setminus A$ tal que $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.

Definición 4.2. Sean X un espacio localmente conexo y $M \in C(X)$. Entonces M es *estable en* $C(X)$ si para toda función continua $f : C(X) \to C(X)$, la cual es ε-cercana a la función identidad, se tiene que $M \in f(C(X))$. En caso contrario diremos que M es inestable en $C(X)$.

Observación 4.3. De la Definiciones 4.1 y 4.2 se sigue que M es inestable en $C(X)$ si y sólo si $\{M\}$ es un Z-conjunto en $C(X)$.

El siguiente teorema, debido a D. Curtis, nos será de ayuda para mostrar que existen continuos localmente conexos, que no son gráficas y cuyo hiperespacio $C(X)$ no siempre tiene vecindades alrededor de X homeomorfas a al cubo de Hilbert.

Teorema 4.4. ([3, Teorema 1.1]). Sea X un espacio localmente conexo. Entonces M es estable en $C(X)$ si y sólo si:

a) M es unión finita de arcos libres en X; y

b) el espacio cociente $M/Fr_X M$ no tiene puntos de corte.

Observación 4.5. ([3. pág. 260]) Sean X un espacio localmente conexo y U cualquier vecindad de M en $C(X)$, entonces M es estable en $C(X)$ si y sólo si M es estable en U.

Teorema 4.6. Sea X un espacio localmente conexo. Supongamos que $C(X)$ es localmente de Hilbert en la cúspide, entonces X no es una gráfica finita conexa.

Demostración. Si X es una gráfica finita conexa entonces $C(X)$ es un poliedro. Lo anterior implica que $C(X)$ no puede tener vecindades alrededor de algún punto homeomorfas al cubo de Hilbert, pues esto implicaría que la dimensión de $C(X)$ sería infinita. De lo anterior concluimos que si $C(X)$ es localmente de Hilbert en X, entonces X no puede ser una gráfica finita conexa. □

En el ejemplo que sigue mostramos un continuo localmente conexo, que no es una gráfica finita conexa y que, sin embargo, su hiperespacio $C(X)$ no tiene vecindades alrededor de X homeomorfas al cubo de Hilbert. Por lo tanto el regreso del Teorema 4.6 resulta ser falso.

Ejemplo 4.7. Para cada $n \geq 1$ consideramos al círculo C_n contenido en el plano Euclidiano, donde el círculo C_n tiene diámetro $1/n$, es tangente al eje x en el origen $(0,0)$ y se encuentra en el semiplano superior. Consideremos además el segmento L que va del origen al punto $(0,1)$. Definimos $X = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup L$. Es claro que X es un continuo, ya que es el anillo hawaiano cruzado por un segmento). Es fácil ver que X es localmente conexo. La figura 8 muestra al continuo X.

A continuación probaremos que existe una sucesión de elementos en $C(X)$ que convergen a X y tales que cada uno de estos elementos es estable en $C(X)$. Puesto que todo punto del cubo de Hilbert es un Z-conjunto ([16, págs. 59 y 60]), y por lo tanto inestable en el cubo de Hilbert ([Observación 4.3]), concluiremos que no puede haber una vecindad alrededor de X en $C(X)$ que sea homeomorfa al cubo de Hilbert (pues esto implicaría, por la Observación 4.5, que todos los elementos de esta vecindad serían inestables en $C(X)$, lo cual entraría en contradicción con la existencia de la sucesión indicada anteriormente).

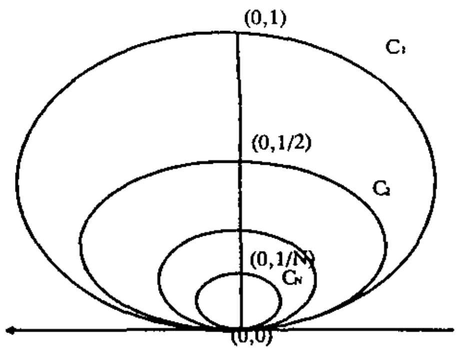

Figura 8

Por las características de $(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ (el anillo hawaiano), es fácil ver que podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigcup_{n=1}^{N} C_n)$ esté tan cerca como queramos de $(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$. Esto implica que, si denotamos por M al segmento que va del punto $(0, 1/N)$ al punto $(0, 1)$, entonces el conjunto $Y_N = (\bigcup_{n=1}^{N}\{C_n\}_n) \cup M$ también estará cerca de X. Ahora bien, si tomamos la frontera de Y_N (la frontera es el conjunto $\{(0,0),(0,1/N)\}$) y tomamos el espacio cociente $Y_N/\{(0,0),(0,1/N)\}$, éste será un continuo sin puntos de corte (ya que el segmento M hace que se necesiten por lo menos dos puntos para desconectar a $Y_N/\{(0,0),(0,1/N)\}$. También es claro que el continuo Y_N es unión finita de arcos libres en X. Todo lo anterior implica que el continuo Y_N es un conjunto estable de $C(X)$ (Teorema 4.4). De todo lo anterior, concluimos que podemos encontrar una sucesión de elementos de $C(X)$, que son estables en este hiperespacio y que convergen a X. Entonces, por lo que dijimos en el párrafo anterior, $C(X)$ no puede tener una vecindad alrededor de X homeomorfa al cubo de Hilbert. Por tanto, concluimos que $C(X)$ no es localmente de Hilbert en la cúspide.

Antés de demostrar el último teorema de este trabajo daremos algunos resultados que serán de utilidad.

Definición 4.8. Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es *fuertemente localmente conexo por continuos en* x si para cada conjunto abierto U conteniendo a x, existe un conjunto abierto V tal que $x \in V \subset U$ y tal que si B es un conjunto cerrado y $B \subset V$ entonces existe un continuo L tal que $B \subset L \subset V$.

Lema 4.9. Sea X un continuo. Supongamos que X es fuertemente localmente conexo por continuos en cada x, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, por [25, Teorema 27.9], tenemos que mostrar que cada componente de cada conjunto abierto es abierta.

Sean U un conjunto abierto en X, y C una componente de U. Si $x \in C$ entonces existe un conjunto abierto V_x de X tal que $x \in V_x \subset U$ y V_x satisface las condiciones mencionadas en la Definición 4.8. Por consiguiente, para cada conjunto de la forma $\{x, y\}$, con $y \in V_y$, existe un continuo L tal que $\{x, y\} \subset L \subset V_X$. De donde se sigue que $V_y \subset C$. De esto se sigue que C es un conjunto abierto de X y, por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

Lema 4.10 ([10, Corolario 2]). Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x\}$ si y sólo si X es fuertemente localmente conexo por continuos en x.

Lema 4. 11 ([10, Teorema 2]). Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces 2^X es localmente conexo por arcos en A si y sólo si 2^X es localmente conexo por arcos en cada componente de A.

Teorema 4.12. Sea X un continuo. Entonces 2^X es localmente de Hilbert en la cúspide si y sólo si X es localmente conexo.

Demostración. (Necesidad) Sea $\mathcal{U}$ la vecindad alrededor de X que es homeomorfa al cubo de Hilbert.

Sean $x \in X$, y $\varepsilon > 0$ tales que si hacemos $A = (X \setminus B_\varepsilon(x)) \cup \{x\}$ entonces se cumple que $A \in int_{2^X}(\mathcal{U})$. Puesto que $\mathcal{U}$ es homeomorfa al cubo de Hilbert, 2^X es localmente conexo por arcos en A. Esto implica que 2^X es localmente conexo por arcos en $\{x\}$ (Lema 4.11). Lo que implica que X es fuertemente localmente conexo en x (Teorema 4.10). Puesto que x fue elegida arbitrariamente, concluimos que X localmente conexo (Teorema 4.9.).

(Suficiencia) Se sabe que si X es localmente conexo entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert [16, Teorema 11.3.]. De donde se sigue la suficiencia de la aseveración. De esta forma terminamos la prueba del teorema. $\square$

Como corolario del teorema anterior tenemos que

Corolario 4.13. Sea X un continuo. Entonces 2^X es localmente de Hilbert en la cúspide si y sólo si 2^X es el cubo de Hilbert.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Acosta, G.**, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley,* tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Coahuila, 1994.

[2] **Curtis, D. W.**,*Growth hyperspaces of Peano contiua,* Trans. Amer. Soc. 238, (1978), 271-283.

[3] _______, *Stable points in hyperspaces of Peano continua,* Topology Proc. 10, (1985), 259-276.

[4] _______, *Boundary sets for Growth hyperspaces,* Topology Appl., 25(1987) 269-283.

[5] **Curtis, D.W y Shori, R. M.**, *Hyperspaces which characterize simple homotopy type,* General Topology Appl. 6, (1976), 153-165.

[6] **Duda, R.**, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph I,* Fund. Math. 62, (1968), 265-286.

[7] ______, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph II,* Fund. Math. 63, (1968), 225-255.

[8] **Dugundji, J.**, *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[9] **Eberhart, C.**, *Continua with locally connected Whitney continua,* Houston J. Math. 4, (1978), 165.

[10] **Goodykoontz, J.T., *Jr.***, *Local arcwise connectedess in 2^X and $C(X)$,* Houston J. Math. 4, (1978), 41-47.

[11] **Hurewicz, W. y Wallman, H.**, *Dimension Theory,* Princeton University Press, Princeton, N.J. 1948.

[12] **Illanes, A.**, *Cells and cubes in hyperspaces,* Fund. Math. 130, (1988), 57-65.

[13] ______, *Whitney blocks in the hyperspaces of a finite graph,* Comment. Math. Univ. Carolinae 36, (1995), 137-147.

[14] ______, *The space of Whitney Levels,* Topology Appl. 40, (1991), 157-169.

[15] **Illanes, A. y Puga, I.**, *Determining finite graphs by their large Whitney levels,* Topology Appl. 60, (1994), 173-184.

[16] **Illanes, A. y Nadler, S. B., Jr.**, *Hyperspaces; fundamentals and recents advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[17] **Illanes, A. y Torres, R.**, *The dimension of Whitney levels of a fnite graph.*

[18] **Krasinkiewicz, J. y Nadler, S. B., Jr.**, *Whitney properties,* Fund. Math. 48, (1978), 165-180.

[19] **Mercado, A.C.**, *Propiedades topológicas,* tesis de liceciatura, Universidad Autónoma de Coahuila, 1998.

[20] **Montejano, L. y Puga, I.**, *Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces,* Topology Appl. 46, (1992), 41-54.

[21] **Moore, R. L.**, *Concerning triods in the plane and the junction points of plane continua,* Proceeding of the National Academy of Sciences 14, (1928), 85-88.

[22] **Nadler S. B. Jr.**, *Hyperspaces of sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol 99, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[23] **Nadler S.B. Jr,** *Continuum theory, an introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[24] **Puga, I.**, *Hiperespacios con punta de cono,* tesis doctoral, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 1989.

[25] **Willard, S.**, *General Topology,* Addison Wesley, Pub. Co., Reading Mass., 1970.

TABLA DE SÍMBOLOS

$Ce(A)$	cerradura del conjunto A
$Ce_X(A)$	cerradura del conjunto A relativa a X
$Fr(A)$	frontera del conjunto A
$Fr_X(A)$	frontera del conjunto A relativa a X
$int(A)$	interior del conjunto A
$int_X(A)$	interior del conjunto A relativo a X
$\mathrm{Im}\, g$	la imagen de la función g
$B_\varepsilon(a)$	$\{x : d(x,a) < \varepsilon\}$
$\bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)$	$\{x : x \in B_\varepsilon(a)$ para alguna $a \in A\}$
$lím(a_n) = a$	la sucesión $(a_n)_n$ converge a a
$\mathbb{R}$	el conjunto de los números reales
$\mathbb{N}$	el conjunto de los números naturales
$\mathbb{R}^n$	el espacio Euclidiano de dimensión n
$\|\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|\|$	$[x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2]^{\frac{1}{2}}$
B^n	$\{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x\|\| \leq 1\}$
S^{n-1}	$\{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x\|\| = 1\}$
n-celda	un continuo homeomorfo a B^n
n-esfera	un continuo homeomorfo a S^{n-1}