

2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

1977 1773 1742

"REGULARIZACION DE ONDAS DE CHOQUE POR DIFUSION Y DISPERSION"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
SILVIA ANEL MADRID JARAMILLO



MEXICO, D. F.

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



281182

1999

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Mat. Margarita Elvira Chávez Cano
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Regularización
de ondas de choque por difusión y dispersión.

realizado por Silvia Anel Madrid Jaramillo

con número de cuenta 94554917 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis

Propietario

DR. GUSTAVO CRUZ PACHECO

Propietario

DRA. MARIA DEL CARMEN JORGE Y JORGE

Propietario

DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO

Suplente

DR. CARLOS ARTURO VARGAS GUADARRAMA

Suplente

DR. JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi familia todo su apoyo, y de manera especial a mi madre por su enorme respaldo a lo largo de toda mi vida. Gracias a todos mis amigos, a Gabriel y a los chicos de Misiones por lo estimulante que ha sido conocerlos. Gracias a mis amigos de la Facultad de Ciencias, a Laura, Chucho, Adrián, Emily, Amador, Lalo, Carlos, Héctor, Macbeth, Alfonso por cuanto compartimos mientras estudiamos juntos.

Muchas gracias al Dr. Minzoni por proponer este tema de tesis, que fue muy interesante. Le agradezco al Dr. Gustavo Cruz Pacheco haber dirigido mi tesis. Disfruté y aprendí trabajando con él. Fue una excelente oportunidad para experimentar lo que es trabajar en Matemáticas. Igualmente aprecio el cuidado de la revisión a la Dra. María del Carmen Jorge y Jorge, al Dr. Arturo Vargas y al Dr. Gilberto Flores.

Más allá de la tesis, gracias a todos ellos, al Dr. Arturo Olvera y al Dr. Jorge Ize por lo que me enseñaron. He aprendido y me he divertido mucho a través de los cursos que tomé, de las conferencias y pláticas y otras actividades que organizaron. Desafortunadamente no pude tomar cursos con todos, el tiempo se agotó rápidamente. Gracias a la Dra. Catherine García Reimbert al Dr. Arturo Vargas y al Dr. Darío Moreno por todo su calidez y su estímulo. De manera muy especial, le agradezco a Gilberto Flores por la hermosa amistad y apoyo a lo largo de estos años.

Como suele pasar, es muy difícil expresar plenamente lo que ha significado estudiar con ellos y cuánto los admiro. No sólo aprendí de Matemáticas. Así que quedarán conmigo cientos de atenciones y momentos especiales, e igualmente, el ambiente amigable con los demás estudiantes del Departamento de Matemáticas y Mecánica.

Agradezco la beca de tesis que recibí del proyecto IN106097 de DGAPA durante el primer semestre de 1999.

INDICE

I. Introducción.....	2
II. Estructura de choque en una ecuación con características.....	4
III. Efectos dispersivos y difusivos.....	19
IV. Regularización por difusión.....	28
V. Regularización por dispersión.....	39
VI. Apéndice. Método de máximo descenso.....	57
VII. Conclusiones.....	61
VIII. Bibliografía.....	63

INTRODUCCION

En este trabajo estudiaremos los efectos de difusión y dispersión en la formación y propagación de una onda de choque. Para ésto escogemos la ecuación hiperbólica más simple que genera choques y que contiene un término ya sea difusivo o dispersivo, esto es la ecuación de Burgers y la ecuación de Dobrokotov (o Burgers compleja). Usaremos el hecho de que estas dos ecuaciones se pueden resolver en forma exacta por medio de la transformación de Cole-Hopf. El caso de la regularización del choque por difusión quedó entendido desde los 50's, cuando Hopf resolvió en forma exacta la ecuación de Burgers.

La regularización del choque por dispersión es bastante más compleja. Se logró una comprensión bastante clara del efecto de la dispersión sobre el choque hasta después de 1966 cuando se desarrolló el método de dispersión inversa para resolver en forma exacta la ecuación de Korteweg-deVries. El primer avance en este sentido se encuentra en el trabajo de Gurievich-Pitaevskii [4], y posteriormente en el de Lax-Levermore [7]. En este sentido es importante resaltar la diferencia de este trabajo con el de Gurievich-Pitaevskii donde los autores usan la teoría de modulaciones para resolver la región de choque para la ecuación de KdV. Esto es, escogen desde un principio usar una aproximación para la región de choque. Este trabajo es en estilo más cercano, aunque mucho más simple, al estudio del límite de dispersión pequeña para la ecuación de KdV de Lax-Levermore, donde los autores resuelven en forma exacta la ecuación de KdV y después toman el límite de dispersión pequeña.

En el primer capítulo estudiaremos la ecuación

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1}$$

usando características. Debido a la no linealidad, la solución \tilde{u} de la ecuación (1) se vuelve multivaluada para condiciones iniciales que decrecen en algún intervalo. Esta ecuación la deduciremos a partir de un modelo físico que involucra funciones univaluadas. Por este motivo, se construirán soluciones univaluadas, aunque discontinuas, a partir de la solución multivaluada. La solución relevante está determinada por la ecuación de conservación de la que se deduce (1). A largo de este trabajo consideraremos dos tipos de condiciones iniciales: una del tipo escalón como $1 - H(x)$, y otra general del tipo de funciones positivas con un solo máximo. Con las primeras pueden hacerse cálculos explícitos que nos ayudarán a entender la solución \tilde{u} con otras condiciones iniciales, en particular con el segundo tipo de condiciones que mencionamos. Las del segundo tipo son condiciones iniciales generales que generan un solo choque.

Antes de estudiar las ecuaciones de Burgers y Dobrokotov, analizaremos el efecto de la difusión y de la dispersión en algunos ejemplos presentados en el segundo capítulo. En ese

capítulo examinaremos las diferencias en el mecanismo de decaimiento de la amplitud de las ondas al considerar difusión y dispersión; se mostrará que el decaimiento por efecto de la difusión es exponencial, y el debido a la dispersión es, en general, más lento.

La ecuación de Burgers se estudiará en el tercer capítulo. Al incluir el término difusivo μu_{xx} , la solución aproxima en forma continua y diferenciable a la solución discontinua del caso límite $\mu = 0$ al considerar las condiciones iniciales mencionadas. Finalmente analizaremos la ecuación de Dobrokhotov en el último capítulo. En este caso, la dispersión será incluida en la forma $i\frac{\hbar}{2}u_{xx}$, a diferencia de la ecuación de KdV donde la dispersión proviene del término u_{xxx} . Se mostrará que el comportamiento es más complejo, y que en la región de choque sólo se tiene convergencia débil.

CAPITULO 1

Estructura de choque en una ecuación con características

En este capítulo discutiremos una parte central del problema que nos interesa: la estructura de choque en la solución de $u_t + uu_x = 0$. Esta ecuación aparece en distintos contextos, por ejemplo, ondas en gases, transporte de partículas en fluidos y flujo de tráfico. Históricamente, la teoría que se tiene sobre ondas de choque y otros temas relacionados se desarrolló primero a partir de problemas no lineales de ondas en gases. Sin embargo, el flujo de tráfico es uno de los fenómenos donde se pueden entender las ideas principales de las ondas de choque de forma más simple. El desarrollo que haremos del tema está basado esencialmente en el segundo capítulo del libro "Linear and nonlinear waves" de G. H. Whitham. [5], [6] y [10].

Pensemos en autos que circulan en una carretera. A pesar de que las variables relacionadas con la descripción del tráfico son cantidades discretas, es posible obtener una buena descripción de los aspectos más relevantes del flujo de tráfico considerando que las variables son continuas. Para la descripción de este problema, necesitamos la densidad ρ y el flujo Q . La densidad $\rho(x, t)$ es el número de coches en el punto x al tiempo t por unidad de longitud, mientras que el flujo $Q(x, t)$ es el número de coches que cruzan la posición x al tiempo t por unidad de tiempo. En un tramo de carretera donde no hay ni entradas ni salidas, se conserva el número de coches. Esto significa que la rapidez de cambio del número de coches es igual al flujo de coches que entra menos el flujo de coches que sale. Esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(x_0, t) - Q(x, t). \quad (1.1)$$

Tenemos una ecuación para las variables ρ y Q . Para determinar a éstas supondremos que el flujo $Q(x, t)$ depende de la densidad ρ . Esta hipótesis es razonable, tal como lo experimentamos al viajar con tráfico; antes de que haya un embotellamiento, los vehículos pueden avanzar fácilmente y la cantidad de ellos que pasa es alta, pero mientras más coches hay, comienzan a ir más despacio por lo que el flujo disminuye. Suponiendo que $Q = Q(\rho)$, (1.1) queda expresada como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(\rho(x_0, t)) - Q(\rho(x, t)). \quad (1.2)$$

Una relación de dependencia $Q(\rho)$ de orden cuadrático aproxima correctamente las observaciones. Cuando la densidad es muy pequeña, casi no hay autos circulando, por lo que el

flujo será escaso. En cierto rango, el aumento de la densidad significa un aumento de flujo. Después de cierto valor de la densidad, hay demasiados coches, su velocidad disminuye, y con ello el flujo. Si la densidad sigue aumentando se llega a formar un embotellamiento (el flujo es cero).

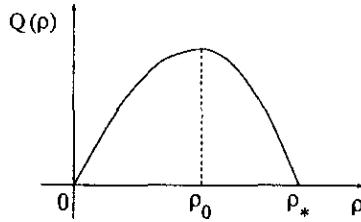


Figura 1.1

Luego de derivar (1.2) respecto a x obtenemos

$$\rho_t(x, t) + Q'(\rho)\rho_x(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.3)$$

La distribución inicial de coches $\rho(x, 0) = f(x)$ completa el problema.

Como primer paso para estudiar el problema anterior, sólo consideraremos densidades pequeñas, $\rho \ll 1$. En tal caso, una buena aproximación a $Q(\rho)$ es $Q'(0)\rho$. Así tenemos

$$\begin{aligned} \rho_t(x, t) + c\rho_x(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) &= f(x), \quad c = Q'(0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

La ecuación diferencial en (1.4) es equivalente a $(\rho_x, \rho_t) \cdot (c, 1) = 0$, es decir, la derivada direccional de $\rho(x, t)$ en la dirección $(c, 1)$ es cero. Por lo tanto, $\rho(x, t)$ es constante en las rectas paralelas al vector $(c, 1)$. La misma ecuación en (1.4) puede interpretarse como

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{con} \quad \frac{dx}{dt} = c.$$

De nuevo, tenemos que ρ es constante en las rectas $x = ct + \xi$. Dado que por cada punto (x, t) en el plano x, t pasa una sola de estas rectas y ρ es constante en ella, entonces el valor de ρ en (x, t) es el mismo que en la intersección de

$$x = ct + \xi \quad (1.5)$$

con el eje x . Por lo cual, $\rho(x, t) = \rho(\xi, 0)$. Por la condición inicial, $\rho(x, t) = f(\xi)$. Finalmente, despejando ξ en (1.5) obtenemos la solución del problema (1.4):

$$\rho(x, t) = f(x - ct).$$

La solución a diferentes tiempos conserva la misma forma de la condición inicial $f(x)$, pero recorrida una distancia ct a la derecha.

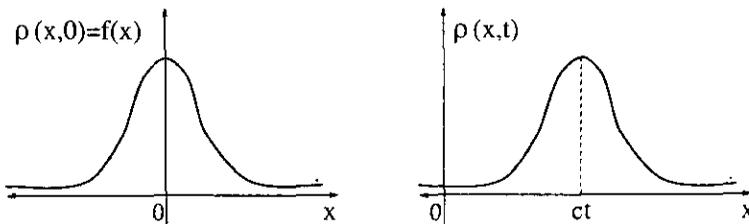


Figura 1.2

En términos del tráfico significa que éste se moverá a la derecha con velocidad c sin que se altere la distribución de los coches. Las rectas $x = ct + \xi$ sobre las cuales ρ es constante reciben el nombre de características. En este caso, sólo dependen de la ecuación $\rho_t + c\rho_x = 0$. Como vimos, este problema y su solución es una aproximación a (1.3) válida para densidades pequeñas.

Analizemos ahora el problema (1.3) con la hipótesis más realista presentada en la figura 1.1, donde $Q(\rho)$ es una función cuadrática. En ese caso, el problema es

$$\rho_t + (\alpha\rho + \beta)\rho_x = 0, \quad \rho(x, 0) = f(x).$$

Sin embargo, podemos hacer la translación $u = \rho + \frac{\beta}{\alpha}$, y luego el cambio de variable $x = \alpha x'$ para obtener la ecuación

$$u_t + uu_{x'} = 0. \tag{1.6}$$

En lo sucesivo, escribiremos x en lugar de x' . Para encontrar la solución, busquemos las curvas características de (1.6):

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Luego, $u(x, t)$ es constante sobre las características, y $\frac{dx}{dt}$ también lo es. Otra vez, las características son rectas parametrizadas por ξ . A diferencia del problema (1.4), aquí sí dependen de la condición inicial; para la mayoría de los casos no es posible despejar ξ en función de x y de t para valores arbitrarios. De tal forma que en la solución

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = f(\xi), \tag{1.7}$$

ξ está definida implícitamente por $x = \xi + f(\xi)t$. Por el teorema de la función implícita, se puede resolver localmente en la forma $\xi = \xi(x, t)$ si $1 + f'(\xi) \neq 0$. Esto sucede para t pequeños en los puntos donde $f'(\xi)$ es acotada, y para todo t donde $f'(\xi)$ es positivo.

La evolución de la solución $u(x, t)$ en el tiempo se puede describir desplazando el valor $f(\xi)$, correspondiente a la posición inicial ξ , una distancia $f(\xi)t$ hacia la derecha. Con tal descripción podemos explicarnos cómo $u(x, t)$ se vuelve multivaluada de una manera

intuitiva. Volvamos a la condición $\frac{dx}{dt} = u$. Nos dice que los valores más grandes de u viajan con una velocidad mayor. De esa manera si tenemos como condición inicial una curva de la forma

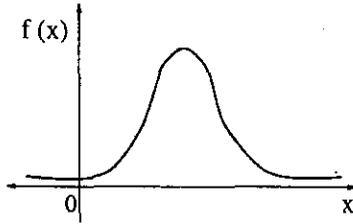


Figura 1.3

el punto máximo de la curva viajará más rápido y después de cierto tiempo, alcanzará y rebasará a puntos que antes estaban delante de él. Un bosquejo de la deformación de la curva $f(x)$ es la siguiente:

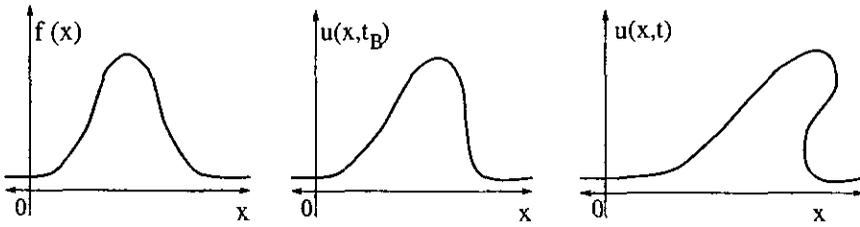


Figura 1.4

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la curva inicial se vuelva multivaluada?

La solución es multivaluada a partir de cuando u_x es infinita. Si derivamos respecto a x en

$$x = \xi(x, t) + f(\xi(x, t))t,$$

obtenemos

$$1 = \xi_x + f'(\xi)\xi_{xt}.$$

De ahí,

$$\xi_x = \frac{1}{1 + f'(\xi)t} \quad y \quad u_x = f'(\xi)\xi_x = \frac{f'(\xi)}{1 + f'(\xi)t}.$$

Por lo tanto, $u(x, t)$ es multivaluada en $t = \frac{-1}{f'(\xi)}$ para $f'(\xi) < 0$. La solución se vuelve multivaluada a partir del menor tiempo t_B en que se satisface tal relación, esto es cuando $-f'(\xi)$ es máximo.

Cabe notar que la ecuación más general

$$u_t + c(u)u_x = 0$$

se resuelve en forma análoga. Como puede verificarse, su solución está dada por

$$u(x, t) = F(\xi)$$

donde $F(\xi)$ se define como $F(\xi) = c(f(\xi))$, y $\xi(x, t)$ está definida implícitamente por $x = \xi + F(\xi)t$.

En la ecuación $u_t + cu_x = 0$, las características son rectas paralelas de pendiente $\frac{1}{c}$ en el plano (x, t) ; en cambio, para $u_t + uu_x = 0$, la pendiente de las características en ese plano es $\frac{1}{f(\xi)}$. Cuando $f(\xi)$ es creciente, la solución es univaluada; por el contrario, cuando $f(\xi)$ es decreciente las características se intersectan. Debido a que $u(x, t)$ está determinada por su valor en el punto $(\xi, 0)$, en los puntos donde se intersectan las características habrá dos valores asociados a $u(x, t)$. Esto sucede cuando $f'(\xi) < 0$.

Sabemos que la solución es multivaluada en cierta región donde las características se intersectan. Veamos cómo encontrar esa región. Dos características cercanas, parametrizadas por ξ y $\xi + h$ ($h > 0$), se intersectan cuando las siguientes condiciones se cumplen simultáneamente:

$$x = \xi + f(\xi)t \quad y \quad x = \xi + h + f(\xi + h)t,$$

lo cual implica

$$1 + \left(\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \right)t = 0.$$

En el límite cuando $h \rightarrow 0$,

$$1 + f'(\xi)t = 0 \quad y \quad x = \xi + f(\xi)t;$$

de ambas condiciones, se obtiene la representación paramétrica de la envolvente en el plano (x, t) de la región multivaluada de $u(x, t)$:

$$(x(\xi), t(\xi)) = \left(\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, -\frac{1}{f'(\xi)} \right),$$

que está definida en los intervalos donde $f'(\xi) < 0$. De nuevo aparece $t(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$, que es la condición para la intersección de las características.

Veamos un ejemplo. Consideremos la condición inicial

$$f(x) = \begin{cases} u_1, & \text{si } x > 0, \\ u_2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos dos familias de características en el plano x, t :

$$\begin{array}{ll} \text{para } \xi < 0, & x = \xi + u_2 t \quad \text{con pendiente } \frac{1}{u_2}, \\ \text{para } \xi > 0, & x = \xi + u_1 t \quad \text{con pendiente } \frac{1}{u_1}. \end{array}$$

Es necesario analizar dos casos:

i) $u_2 < u_1$

La pendiente de las características con $\xi < 0$ es mayor. Las características tienen la siguiente estructura:

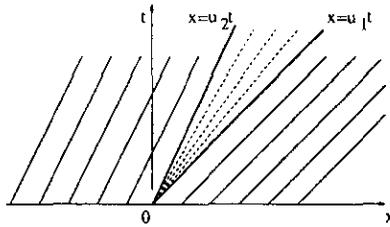


Figura 1.5

Por los puntos (x, t) tales que $u_2 < \frac{x}{t} < u_1$ no pasan las características. Es posible definir una solución en esa región asignándole a $u(x, t)$ un valor constante en cada una de las rectas $x = ct$, con $u_2 \leq c \leq u_1$, de manera que u tome todos los valores intermedios entre u_2 y u_1 . A todas esas rectas les corresponde $\xi = 0$. Entonces,

$$u(x, t) = c \text{ en } x = ct, \quad u_2 \leq c \leq u_1.$$

Finalmente, una solución para $u_2 < u_1$ es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_2, & \text{si } x < u_2 t, \\ \frac{x}{t}, & \text{si } u_2 t \leq x \leq u_1 t, \\ u_1, & \text{si } x > u_1 t. \end{cases}$$

Aunque la condición inicial no es continua en $t = 0$, esta solución es univaluada tal como sucede cuando la condición inicial es creciente.

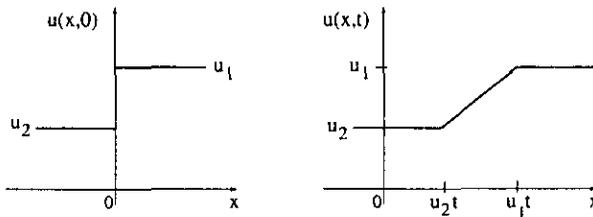


Figura 1.6

i) $u_2 > u_1$

Como los valores más grandes de $u(x, t)$ viajan más rápido, la estructura del escalón con $u_2 > u_1$ hace que inmediatamente la solución sea multivaluada. De hecho, todas las características se intersectan debido a que la pendiente de las rectas con $\xi > 0$ es mayor que la correspondiente a $\xi < 0$.

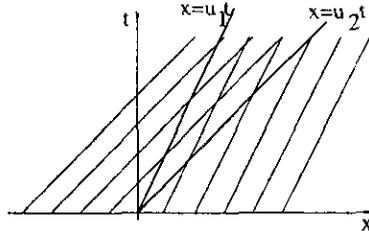


Figura 1.7

En la región donde $\frac{x}{u_2} < t < \frac{x}{u_1}$, la solución es multivaluada; con la convención de que, en $x = 0$, la condición inicial toma todos los valores en $[u_2, u_1]$, obtenemos el segmento que une los puntos $(u_1 t_0, u_1)$ y $(u_2 t_0, u_2)$ en la gráfica de u al tiempo t_0 . Con ello para $u_2 > u_1$, la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_2, & \text{si } \frac{x}{t} \leq u_2, \\ u_1 + \frac{1}{t}(x - u_1 t), & \text{si } u_2 \leq \frac{x}{t} \leq u_1, \\ u_1, & \text{si } \frac{x}{t} \geq u_1. \end{cases}$$

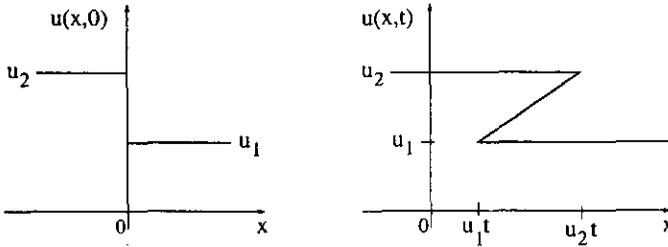


Figura 1.8

Para terminar con los ejemplos, veamos la gráfica de la envolvente de la región multivaluada de la solución de $u_t + uu_x = 0$ con $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$ ($-\infty < x < \infty$). En este ejemplo, la envolvente está parametrizada por

$$\gamma(\xi) = (x(\xi), t(\xi)) = \left(\frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2\xi}, \frac{(1 + \xi^2)^2}{2\xi} \right).$$

Dado que $f'(\xi) < 0$ determina la existencia de choques, necesitamos que $\xi > 0$. Además, el primer choque sucede en el mínimo de $t(\xi) = \frac{1}{-f'(\xi)} = -\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}$, que se alcanza en $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donde $t(\xi) = t_B = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. El mínimo de $x(\xi) = \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2\xi}$ también se alcanza en $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Con esta información se tiene la gráfica de $\gamma(\xi)$. La solución $u(x, t)$ es multivaluada en la región acotada por la envolvente, que aparece sombreada en la figura 1.9.

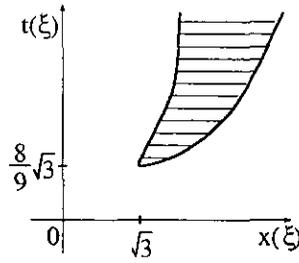


Figura 1.9

La densidad del tráfico descrita por medio de $u_t + uu_x = 0$ es multivaluada a partir de $t = t_B$ en donde $f'(\xi) < 0$, e igualmente sucede en $u_t + c(u)u_x = 0$ después de cierto tiempo. Esto no tiene sentido físico, la densidad es una cantidad medible que sólo puede tomar un único valor en (x, t) . Es por esto que construiremos una solución univaluada a partir de la solución multivaluada para $t > t_B$.

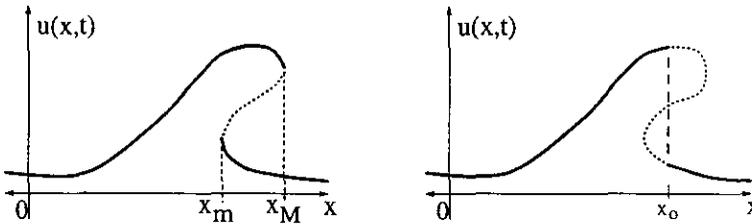


Figura 1.10

Las tres secciones señaladas en la primera gráfica de la figura 1.10 corresponden a funciones de x , consideradas por separado. Si omitimos alguna de ellas, el resto seguirá siendo solución. Para construir una solución univaluada, omitiremos la parte punteada de la curva y elegiremos un valor $x_0(t)$ en el intervalo $[x_m, x_M]$, que determinará la discontinuidad. En lo sucesivo, le llamaremos choque al punto $x_0(t)$ (ver la segunda gráfica de la figura 1.10).

Aunque esta construcción tiene sentido matemáticamente, ¿qué significa en términos físicos una discontinuidad en una variable de naturaleza continua? La discontinuidad puede interpretarse como una aproximación a un cambio muy brusco en la medición de alguna variable, en este caso la densidad, de manera que en alguna escala no es posible apreciar el cambio continuo de esa variable.

Veamos cuáles son las consecuencias de aceptar soluciones discontinuas. Partimos de la hipótesis física de conservación dada por la ecuación (1.1), donde son aceptables las discontinuidades de salto para la densidad ρ y para el flujo Q de coches. Consideraremos que $x = s(t)$ determina en forma continua la posición del choque al tiempo t . Además elegimos

x_1 y x_2 tales que $x_2 < s(t) < x_1$ para cada t . Por (1.1),

$$Q(x_2, t) - Q(x_1, t) = \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho(x, t) dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{s(t)} \rho(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_1} \rho(x, t) dx.$$

Para $g(s(t), t) = \int_{x_2}^{s(t)} \rho(x, t) dx$,

$$\frac{d}{dt} g(s(t), t) = \frac{\partial g}{\partial s} \dot{s}(t) + \frac{\partial g}{\partial t} = \rho^-(s(t), t) \dot{s}(t) + \int_{x_2}^{s(t)} \rho_t(x, t) dx$$

donde

$$\rho^-(s(t), t) = \lim_{x \rightarrow s^-} \rho(x, t), \quad x_2 \leq x < s(t)$$

y análogamente para ρ^+ . Entonces,

$$Q(x_2, t) - Q(x_1, t) = [\rho^-(s, t) - \rho^+(s, t)] \dot{s} + \int_{x_2}^{s(t)} \rho_t(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_1} \rho_t(x, t) dx.$$

Suponiendo que ρ y Q son continuas y que ρ_t es acotada en $x_2 \leq x < s(t)$ y $s(t) < x \leq x_1$, entonces las integrales anteriores tienden a cero cuando $x_2 \rightarrow s^-$ y $x_1 \rightarrow s^+$, y por lo tanto

$$Q^-(s, t) - Q^+(s, t) = [\rho^-(s, t) - \rho^+(s, t)] \dot{s}.$$

Para representar los valores antes del choque usamos el subíndice 2 y para después del choque el 1; la velocidad con que se mueve la discontinuidad la denotamos por $U \equiv \frac{ds}{dt}$. Con esto, en cualquier tiempo se debe satisfacer

$$Q_2 - Q_1 = U(\rho_2 - \rho_1).$$

En cada parte continua (antes y después del choque) retenemos la hipótesis $Q = Q(\rho)$. Por lo tanto, las soluciones discontinuas deben satisfacer que la velocidad del choque es:

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (1.8)$$

Es fácil calcular la velocidad de choque cuando $Q(\rho)$ es cuadrática. Para simplificar la notación, escribimos $c(\rho) = Q'(\rho)$; luego, expandimos $Q(\rho)$ y $c(\rho)$ alrededor de ρ_1 y evaluamos en ρ_2 :

$$Q(\rho_2) - Q(\rho_1) = c(\rho_1)(\rho_2 - \rho_1) + \frac{1}{2} c''(\rho_1)(\rho_2 - \rho_1)^2 \\ c(\rho_2) - c(\rho_1) = c'(\rho_1)(\rho_2 - \rho_1).$$

Entonces,

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \quad (1.9)$$

donde $c_1 = c(\rho_1)$ y $c_2 = c(\rho_2)$. De esta manera, la velocidad del choque es el promedio de las velocidades de flujo antes y después del choque si $Q(\rho)$ es cuadrática.

Por la manera en que se construyó la solución discontinua, se puede escoger cualquier $x_0(t)$ en el intervalo donde ρ es multivaluada al tiempo t . Podemos determinar una solución por cada valor x_0 . ¿Cómo se puede resolver la falta de unicidad de la solución discontinua? Recordemos que (1.1) es una ecuación de conservación del número de coches que circulan; de ella se obtuvo la ecuación

$$\rho_t + \rho \rho_x = 0, \quad \rho(x, 0) = f(x) \quad (1.10)$$

para el caso en que $Q(\rho)$ es cuadrática.* Tanto la curva multivaluada determinada por

$$\rho(x, t) = f(\xi), \quad x = \xi + f(\xi)t,$$

como la curva discontinua la satisfacen. Por esta razón, el área bajo ambas curvas debe ser la misma. Entonces se obtiene una única solución discontinua: el choque determinado por la línea que corta dos lóbulos de área igual en la curva multivaluada.

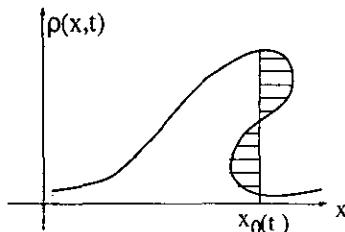


Figura 1.11

Veamos primero una descripción pictórica de cómo evoluciona la solución desde el perfil inicial hasta el tiempo $t > t_B$ cuando aparece el choque $s(t)$. Sabemos que la solución continua al tiempo t se construye a partir del perfil inicial $f(\xi)$, trasladando cada punto ξ la distancia $f(\xi)t$ a la derecha. De tal forma, para cada $t > t_B$ hay dos puntos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ ($\xi_2 < \xi_1$) en el dominio de $f(\xi)$ que determinan el segmento vertical que corta lóbulos de igual área en la gráfica de $\rho(x, t)$ (figura 1.13). Los puntos extremos de este segmento son $(s(t), f(\xi_1(t)))$ y $(s(t), f(\xi_2(t)))$ donde $s(t) = \xi_1(t) + f(\xi_1(t))t = \xi_2(t) + f(\xi_2(t))t$. Los valores ξ_1 y ξ_2 determinan las características que se intersectan en el choque $s(t)$. Por

* Este es el caso que nos interesa estudiar. La ecuación $u_t + uu_x = 0$ se obtiene luego de hacer $u = \rho + \frac{\beta}{\alpha}$ y $x = \alpha x'$ en (1.3).

conservación del número de coches que circulan, el segmento con extremos $(\xi_1(t), f(\xi_1(t)))$ y $(\xi_2(t), f(\xi_2(t)))$ en la gráfica de $\rho(x, 0)$ también corta lóbulos de áreas iguales. Este segmento corresponde al segmento vertical del choque $s(t)$ en la gráfica de $\rho(x, t)$. En este sentido, el choque $s(t)$ separa las partes continuas correspondientes a $\xi < \xi_2$ y $\xi > \xi_1$. En la gráfica de la figura 1.13 se muestra que ambos segmentos cumplen la propiedad de cortar áreas iguales, lo cual analíticamente se expresa como

$$\frac{1}{2}[f(\xi_1) + f(\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} f(\xi) d\xi. \quad (1.11)$$

Al final de este capítulo se mostrará que los valores $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ que satisfacen la propiedad de áreas iguales para el choque $s(t)$ determinan la condición (1.9) de la velocidad del choque. En el sentido contrario, de esta última condición junto con la intersección en $s(t)$ de las características determinadas por $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ se deduce la propiedad de áreas iguales.

En base a lo anterior es posible obtener toda la evolución de $\rho(x, t)$ a partir del perfil inicial trazando las cuerdas que satisfacen la propiedad de áreas iguales. Al tiempo $t = t_B$, la solución tiene pendiente infinita en $x_B = \xi_B + f(\xi_B)t_B$ y los lóbulos tienen área cero. Este choque corresponde al punto de inflexión de $f(\xi)$ (ver figura 1.12).

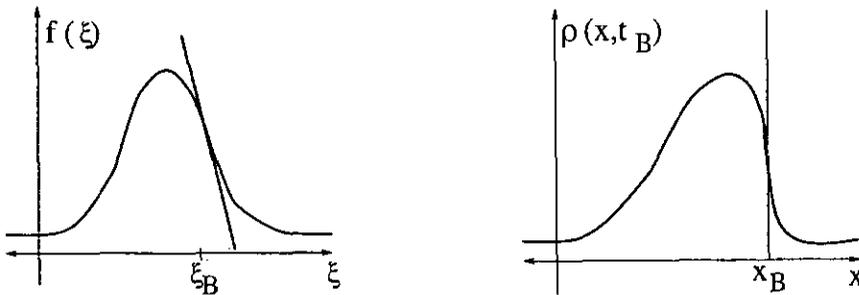


Figura 1.12

Al transcurrir el tiempo para $t > t_B$, el área $\hat{a}(t)$ de los lóbulos en la gráfica de $\rho(x, t)$ es cada vez mayor. Por la conservación de área, la secante debe cortar lóbulos de área $\hat{a}(t)$ en el perfil inicial (figura 1.13). Por ello, el extremo $\xi_2(t)$ se mueve hacia la izquierda y $\xi_1(t)$ hacia la derecha. Con esto, la cuerda (de pendiente negativa) tiende a la horizontal conforme $t \rightarrow \infty$.

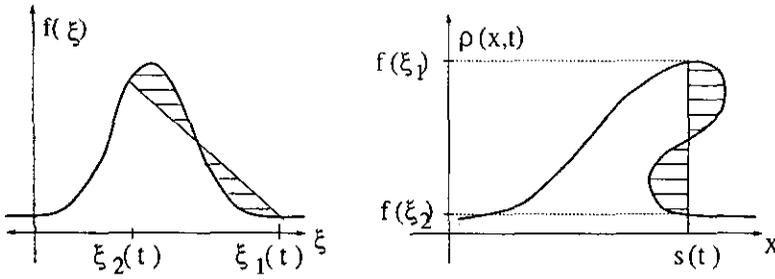


Figura 1.13

Esta manera de captar la dinámica del choque nos ayudará a entender la solución cuando la condición inicial es de la forma mostrada en la figura 1.14. En ella $f(\xi) = \rho_0$ fuera de $0 < \xi < L$ y $f(\xi) > \rho_0$ en ese intervalo. En el punto de inflexión de $f(\xi)$ con pendiente negativa, $\xi_2 = \xi_1$. Conforme el tiempo avanza, $\xi_1(t)$ aumenta hasta que en algún momento está adelante de L . A partir de ahí, $f(\xi_1) = \rho_0$ y el choque se mueve en la región constante $\rho = \rho_0$.

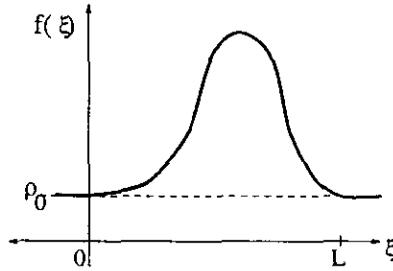


Figura 1.14

La propiedad de áreas iguales (1.9) se reescribe como

$$\frac{1}{2}[f(\xi_2) - \rho_0](\xi_2 - \xi_1) = \int_{\xi_2}^L [f(\xi) - \rho_0] d\xi.$$

Por la intersección de las características en el choque,

$$t = \frac{\xi_2 - \xi_1}{f(\xi_2) - \rho_0}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}[f(\xi_2) - \rho_0]^2 t = \int_{\xi_2}^L [f(\xi) - \rho_0] d\xi. \quad (1.12)$$

Mientras $t \rightarrow \infty$, $\xi_2(t)$ se mueve hacia la izquierda, aproximándose a cero. Veámos que $\xi_2(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Supongamos que $\xi_2(t)$ es negativo a partir de algún

valor de t . En consecuencia, $f(\xi_2(t)) = \rho_0$; por la expresión (1.12), el área entre la curva inicial y la recta $\rho = \rho_0$ para $\xi_2 < \xi < L$ es cero, lo que es una contradicción. Entonces, cuando $t \rightarrow \infty$, $\xi_2 \rightarrow 0$ y $f(\xi_2) \rightarrow \rho_0$. Entonces la ecuación (1.10) para $\xi_2(t)$ nos da la estimación de cómo $f(\xi_2)$ tiende a ρ_0 :

$$\frac{1}{2}[f(\xi_2) - \rho_0]^2 t \sim A \quad \text{donde} \quad A = \int_0^L [f(\xi) - \rho_0] d\xi,$$

$$\text{despejando} \quad f(\xi_2) \sim \rho_0 + \sqrt{\frac{2A}{t}}.$$

De esta manera, la fórmula asintótica que se obtiene para el choque $s(t) = \xi_2 + f(\xi_2)t$ es

$$s(t) \sim \rho_0 t + \sqrt{2At}.$$

El valor de ρ justo antes del choque es $\rho = f(\xi_2)$. Entonces, asintóticamente

$$\rho - \rho_0 \sim \sqrt{\frac{2A}{t}}.$$

La solución antes del choque está dada por

$$\rho(x, t) = f(\xi),$$

$$x = \xi + f(\xi)t$$

para $0 < \xi < \xi_2$. En ese intervalo,

$$\rho(x, t) = f(\xi) = \frac{x - \xi}{t}.$$

Como $\xi_2 \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\xi \rightarrow 0$. Además, $x = \xi + f(\xi)t$ implica que $f(0)t < x(\xi) < \xi_2 + f(\xi_2)t = s(t)$ para $0 < \xi < \xi_2$. Por lo tanto, la forma asintótica de la solución antes del choque es

$$\rho \sim \frac{x}{t}, \quad \rho_0 t < x < \rho_0 t + \sqrt{2At}. \quad (1.13)$$

En esta aproximación, los detalles de la distribución inicial no importan; el comportamiento asintótico sólo depende del área A del perfil inicial sobre la recta $\rho = \rho_0$. En la figura, hemos tomado $\rho_0 = 0$.

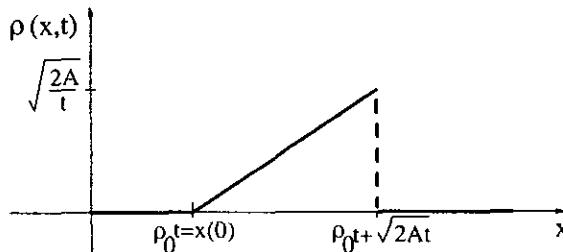


Figura 1.15

Para $\xi \leq 0$, $\rho = \rho_0$ y lo mismo para $\xi \geq \xi_1$ porque $\xi_1(t)$ se mueve hacia la derecha cuando $t \rightarrow \infty$, con lo que llega a la región $\rho = \rho_0$. En el caso especial $\rho_0 = 0$ y $f_{\alpha(x)} = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ (con $\alpha \ll 1$), el resultado (1.13) nos da una aproximación al problema en el que el dato inicial es la delta de Dirac.

Para concluir, queremos mostrar que la propiedad de áreas iguales puede ser obtenida en forma analítica y que es consistente con la condición de choque. Supongamos que la posición del choque está determinada por $x = s(t)$. Además tenemos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ que determinan los extremos $(\xi_1, f(\xi_1))$ y $(\xi_2, f(\xi_2))$ de la cuerda de la gráfica de $f(\xi)$ correspondiente al choque $x = s(t)$. La velocidad del choque es

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2}(f(\xi_1(t)) + f(\xi_2(t))). \quad (1.14)$$

Por la elección de ξ_1 y ξ_2 , las características que pasan por estos puntos del eje x se intersectan en $s(t)$

$$\begin{aligned} s(t) &= \xi_1 + f(\xi_1)t \\ s(t) &= \xi_2 + f(\xi_2)t. \end{aligned}$$

Entonces

$$t = -\frac{\xi_1 - \xi_2}{f(\xi_1) - f(\xi_2)}. \quad (1.15)$$

Derivamos las ecuaciones de las características anteriores

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{\xi}_1 + f'(\xi_1)\dot{\xi}_1 t + f(\xi_1) \\ \dot{s}(t) &= \dot{\xi}_2 + f'(\xi_2)\dot{\xi}_2 t + f(\xi_2). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para mantener la simetría, tomamos el promedio de $\dot{s}(t)$ e igualamos a la condición de choque

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2) + \frac{1}{2}(f'(\xi_1)\dot{\xi}_1 + f'(\xi_2)\dot{\xi}_2)t = 0$$

Luego sustituimos el valor (1.15) de t en la intersección

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)(f(\xi_1) - f(\xi_2)) = \frac{1}{2}(f'(\xi_1)\dot{\xi}_1 + f'(\xi_2)\dot{\xi}_2)(\xi_1 - \xi_2) \quad (1.17)$$

y reescribimos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f'(\xi_1)\dot{\xi}_1 + f'(\xi_2)\dot{\xi}_2)(\xi_1 - \xi_2) &= -\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)(f(\xi_2) - f(\xi_1)) = \\ -\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2 + 2\dot{\xi}_2)(f(\xi_1) + f(\xi_2) - 2f(\xi_1)) &= -\frac{1}{2}(f(\xi_1) + f(\xi_2))(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) + f(\xi_1)\dot{\xi}_1 - f(\xi_2)\dot{\xi}_2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}(f'(\xi_1)\dot{\xi}_1 + f'(\xi_2)\dot{\xi}_2)(\xi_1 - \xi_2) + \frac{1}{2}(f(\xi_1) + f(\xi_2))(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) = f(\xi_1)\dot{\xi}_1 - f(\xi_2)\dot{\xi}_2.$$

Al integrar obtenemos

$$\frac{1}{2}(f(\xi_1) + f(\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} f(\xi) d\xi + C. \quad (1.18)$$

Al evaluar (1.14) en $\xi_1 = \xi_2$, la constante C de integración es cero.

La condición de choque (1.14) se puede obtener a partir de la propiedad de áreas iguales (1.17) y de la intersección de las características

$$s(t) = \xi_1 + f(\xi_1)t \quad (1.19)$$

$$s(t) = \xi_2 + f(\xi_2)t.$$

Las ecuaciones (1.18) y (1.19) forman un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ y la posición del choque $s(t)$. La solución existe. Para obtenerla explícitamente, rehacemos los pasos de (1.18) a (1.14): la derivada de (1.18) respecto a t es equivalente a (1.17); derivando como antes (1.19), se calcula $\dot{s}(t)$ y (1.16), que se usa para obtener la condición de choque (1.14). Con esto, se muestra que toda la construcción de la solución discontinua es consistente.

En este capítulo, obtuvimos como solución de $u_t + uu_x = 0$ una función multivaluada, que no corresponde a algo plausible físicamente. ¿Qué parte del modelo no es una buena aproximación del fenómeno que queremos describir? La respuesta no está en haber considerado la densidad y el flujo de coches como funciones continuas, ni en la continuidad y la diferenciabilidad de ellas. Sabemos que con la misma ecuación se pueden describir otros fenómenos que involucran la densidad y el flujo para un medio continuo; en ellos, la solución solamente puede ser univaluada. En los siguientes capítulos, analizaremos la difusión y la dispersión como mecanismos con los cuales contrarrestar el efecto no lineal de $u_t + uu_x = 0$, y así evitar soluciones multivaluadas.

CAPITULO 2

Efectos dispersivos y difusivos

Vivimos rodeados de fenómenos ondulatorios de muy diversos tipos: desde las olas del mar, pasando por las ondas de agua en estanques y lagunas y otras ondas fáciles de observar en nuestro alrededor, hasta las ondas electromagnéticas emitidas y captadas por una gran variedad de aparatos. En muchos de estos fenómenos se aprecia un decaimiento de la amplitud de las ondas al transcurrir el tiempo. En este capítulo estudiaremos las posibles explicaciones de este efecto. Consideraremos las oscilaciones de una cuerda como motivación para el desarrollo de este capítulo. [1], [9].

Un experimento que probablemente de niño realizó al jugar, es producir una onda con el impulso dado en un extremo de una cuerda en la dirección de la misma. Es posible formar ondas que mantienen su perfil al recorrer la cuerda. Si la cuerda es suficientemente larga, se puede observar que la amplitud de la onda va disminuyendo mientras avanza hacia el extremo contrario, hasta desaparecer. ¿Por qué disminuye la amplitud mientras avanza? Podemos hacernos la misma pregunta en relación a ondas formadas en el agua. ¿Qué mecanismo produce este efecto? Esta es la pregunta central en este capítulo, a través de ella queremos entender cómo distinguir la dispersión y la difusión.

Comencemos por encontrar la ecuación que describe deformaciones pequeñas, en forma localizada, de una cuerda tensa. Sabemos que en ese caso, las deformaciones se propagan a lo largo de la cuerda manteniendo su forma inicial. Tomemos una porción pequeña de cuerda, entre las posiciones x y $x+h$. T denota la fuerza de tensión que se ejerce en ambos extremos.

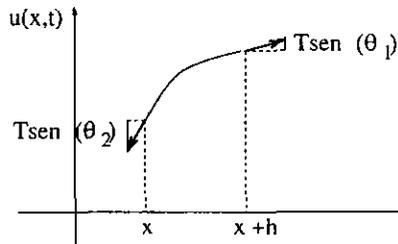


Figura 2.1

En la figura (2.1), $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda respecto de su posición de equilibrio, el eje x . La densidad ρ de la cuerda se supone constante. Con ello,

aplicando la ley de Newton, se obtiene

$$\rho h u_{tt} = T \sin(\theta_1) - T \sin(\theta_2)$$

donde θ_1, θ_2 son los ángulos que forma la recta tangente correspondiente con la horizontal. Para desplazamientos pequeños, $\sin(\theta) \approx \tan(\theta)$, es decir que la componente vertical de la tensión puede aproximarse por el valor de la pendiente u_x de la cuerda. Entonces,

$$\begin{aligned} \rho h u_{tt} &= T[u_x(x+h, t) - u_x(x, t)] \\ &= T u_{xx}(x + \xi h, t) \end{aligned}$$

para $\xi \in (0, 1)$. Por lo tanto, al tomar el límite $h \rightarrow 0$ obtenemos la ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (2.1)$$

que describe desplazamientos verticales pequeños de una cuerda infinita. Además, es necesario especificar la posición y la velocidad inicial: $u(x, 0) = \phi(x)$ y $u_x(x, 0) = \psi(x)$. Resolveremos la ecuación (2.1) con estas condiciones iniciales. Usando transformada de Fourier, se tiene

$$\hat{u}_{tt} + c^2 \kappa^2 \hat{u} = 0, \quad \text{con } \hat{u}(\kappa, 0) = \hat{\phi}(\kappa), \quad \hat{u}_t(\kappa, 0) = \hat{\psi}(\kappa).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{\phi}(\kappa) + \frac{\hat{\psi}(\kappa)}{i\kappa} \right) e^{i\kappa x} + \frac{1}{2} \left(\hat{\phi}(\kappa) - \frac{\hat{\psi}(\kappa)}{i\kappa} \right) e^{-i\kappa x} \right] e^{i\kappa x} d\kappa \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\kappa) e^{i\kappa(x+ct)} d\kappa + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\kappa) e^{i\kappa(x-ct)} d\kappa \right] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(\kappa)}{i\kappa} e^{i\kappa(x+ct)} d\kappa - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(\kappa)}{i\kappa} e^{i\kappa(x-ct)} d\kappa \right] \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} [\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)] \end{aligned}$$

donde $\Psi'(x) = \psi(x)$. De lo anterior, se obtiene la fórmula de D'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\eta) d\eta.$$

Esto significa que el perfil inicial $\phi(x)$ se descompone en dos ondas separadas, que viajan con velocidad c , pero en direcciones opuestas y con la mitad de la amplitud inicial si $\psi = 0$. El valor de $u(x, t)$ depende del valor que toman las condiciones iniciales ϕ y ψ en

la intersección de las rectas $x - ct = \xi$ y $x + ct = \xi$ con la recta $t = 0$. Con esto, todavía no podemos describir la disminución de la amplitud de las ondas en la cuerda.



Figura 2.2 a) Perfil inicial, b) Perfil al tiempo t_0

En la figura 2.2 se muestra la evolución de la onda que se produce con las condiciones iniciales $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $\psi(x) = 0$.

Analizemos los modos de Fourier. En lo sucesivo, κ denotará un número de onda y ω una frecuencia arbitrarios. La onda plana $\phi(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)}$ es solución de la ecuación (2.1) si $\omega(\kappa) = \pm c\kappa$. En tal caso, los modos $\phi(x, t) = e^{i\kappa(x \pm ct)}$ oscilan y son ondas viajeras con velocidad de propagación c .

Antes de continuar veamos un fenómeno típicamente difusivo: la disipación de calor. Pensemos en un material que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y que $D \subset \Omega$ es un volumen encerrado por la superficie C . Denotamos por \hat{n} a la normal unitaria a la superficie. En cada punto $\vec{x} = (x, y, z)$ del material están definidas la densidad $\rho(\vec{x})$, el calor específico $c(\vec{x})$, la conductividad térmica $k(\vec{x})$ y la temperatura $u(\vec{x}, t)$ al tiempo t . De tal manera que el calor en el sólido está dado por

$$Q(t) = \int_D c\rho u \, dV.$$

Si la región Ω es acotada o no es todo \mathbb{R}^3 , se necesitan condiciones de frontera: por ejemplo,

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (\text{temperatura constante en } \partial\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (\text{no flujo a través de } \partial\Omega). \end{aligned}$$

Si el material es isotrópico, el flujo de calor es proporcional a $-\text{grad}(u)$. Para describir la conducción de calor en el material se aplica la conservación de calor: la tasa de cambio del calor $Q(t)$ es igual al flujo de calor a través de la frontera C . Entonces,

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int_C k \nabla u \cdot \bar{n} \, dS.$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el lado derecho, suponiendo que c , ρ y k son continuas,

$$\frac{d}{dt} \int_D c\rho u \, dV = \int_D \text{div}(k \nabla u) \, dV.$$

Como la frontera de D no cambia en el tiempo, tenemos que

$$\int_D [c\rho u_t - \text{div}(k\nabla u)] dV = 0.$$

Si suponemos que el integrando es continuo y usamos que el dominio D es arbitrario, concluimos que

$$c\rho u_t - \text{div}(k\nabla u) = 0.$$

Finalmente, en un material homogéneo, c , ρ y k son constantes. Entonces, obtenemos la ecuación de calor

$$u_t = \nu \Delta u, \quad \nu = \frac{k}{c\rho}.$$

En una dimensión, la ecuación de la difusión de calor es

$$u_t = \nu u_{xx}. \quad (2.2)$$

Si sustituimos $\phi(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)}$ en (2.2), se encuentra que ϕ es solución si y sólo si $\omega = -i\nu\kappa^2$. Por lo tanto, los modos de Fourier

$$\phi(x, t) = e^{-\nu\kappa^2 t + i\kappa x} \quad (2.3)$$

de (2.2) decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$ para $\kappa \neq 0$; en este sentido, los modos de difusión son disipativos. Como la ecuación de calor es lineal, cualquier otra solución es la superposición de los modos de Fourier; en consecuencia, decaerá a cero exponencialmente para $t \rightarrow \infty$. Esto nos muestra que en un fenómeno difusivo, el decaimiento es extremadamente rápido, sobre todo cuando $|\kappa| \gg 1$.

Volvamos al experimento de la cuerda. Uno puede pensar que la amplitud de las ondas en la cuerda disminuye debido a la disipación de energía. Veamos qué pasa si incluimos en la ecuación de onda un término de amortiguamiento

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.4)$$

Los modos $\phi(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)}$ satisfacen la relación $\omega^2 + i\alpha\omega - \kappa^2 = 0$. Entonces, poniendo $\omega(\kappa) = if(\kappa)$, se encuentra una ecuación cuadrática para $f(\kappa)$ que tiene como soluciones

$$f_1(\kappa) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\kappa^2} \quad y \quad f_2(\kappa) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\kappa^2}.$$

Ambas soluciones cumplen $\text{Re}(f_i(\kappa)) < 0$ para cualquier κ . Entonces, los modos $\phi(x, t) = e^{f_i(\kappa)t} e^{i\kappa x}$, decaen. Para $|\kappa| \leq \frac{\alpha}{2}$, el decaimiento del módulo de $\phi(x, t)$ es exponencial, mientras que para $|\kappa| > \frac{\alpha}{2}$ se tienen oscilaciones en el tiempo acotadas por $e^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Cuando $|\kappa| \leq \frac{\alpha}{2}$, el efecto del amortiguamiento introducido por el parámetro α es suficientemente grande para que no haya oscilaciones en el tiempo; la evolución de los modos es similar

a la observada en la ecuación de calor: el decaimiento es muy rápido y sin oscilaciones temporales. En nuestro experimento con la cuerda, las ondas van decayendo mientras avanzan, lo que es diferente de lo que veríamos si tal comportamiento se debiera a la disipación como sucede en (2.3); ahí los modos no se propagan (no hay ondas viajeras). Un ejemplo de esto último se observa si el experimento se realiza dentro del agua.

Podemos modificar de otra manera la ecuación de onda e incluir un término correspondiente a una fuerza de restitución proporcional a $u(x, t)$. Ahora nos interesa la ecuación $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u = 0$. Esta ecuación aparece en el estudio de fluidos y en Mecánica Cuántica, donde se le conoce como la ecuación de Klein-Gordon lineal. Como los coeficientes de la ecuación pueden ser normalizados*, basta estudiar

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0. \quad (2.5)$$

Primero veamos si una onda plana de la forma $A \cos(kx - \omega t)$ es solución. A denota una amplitud de onda constante. Sustituimos la onda plana $\phi(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ en la ecuación (2.5). Como (2.5) es una ecuación lineal y la constante A es distinta de cero obtenemos:

$$[-\omega^2 + \kappa^2 + 1]e^{i(\kappa x - \omega t)} = 0.$$

Entonces, $\omega^2 = \kappa^2 + 1$ determina la relación entre la frecuencia ω y el número de onda κ , que se le llama relación de dispersión. Tenemos dos soluciones

$$\phi(x, t) = e^{i(\kappa x \pm W(\kappa)t)}. \quad (2.6)$$

donde $W(\kappa) = \sqrt{\kappa^2 + 1}$. Entonces, $Re(\phi(x, t))$ es solución de (2.5) cuando $\omega = \pm W(\kappa)$. Ahora, busquemos la solución general al problema $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$ con condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = 0$. Resolvemos usando transformada de Fourier:

$$\hat{u}_{tt} + (1 + \kappa^2)\hat{u} = 0 \quad \hat{u}(\kappa, 0) = \hat{f}(\kappa) \quad \hat{u}_t(\kappa, 0) = 0.$$

Su solución es

$$\hat{u}(\kappa, t) = \frac{1}{2}[\hat{f}(\kappa)e^{i\omega t} + \hat{f}(\kappa)e^{-i\omega t}].$$

Invirtiendo la transformada de Fourier se tiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{f}(\kappa) e^{i[\kappa x - W(\kappa)t]} d\kappa + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{f}(\kappa) e^{i[\kappa x + W(\kappa)t]} d\kappa. \quad (2.7)$$

El siguiente paso es entender la solución obtenida. Un caso interesante es analizar el comportamiento en una vecindad pequeña de un número de onda particular, digamos κ_0 . Esta situación se presenta cuando experimentalmente se quiere generar una onda de

* Se hace un escalamiento en las variables: $x' = \frac{\beta}{\alpha} x$, $t' = \beta t$.

un número de onda particular, pero el problema tiene espectro continuo. En ese caso, es prácticamente imposible elegir exactamente el número de onda deseado. Ahí surge la necesidad de estudiar paquetes de ondas, es decir, ondas con número de onda $\kappa \in (\kappa_0 - \epsilon, \kappa_0 + \epsilon)$ en conjunto. Por ello, analizaremos integrales de la forma

$$\int_{\kappa_0 - \epsilon}^{\kappa_0 + \epsilon} \frac{1}{2} \widehat{f}(\kappa) e^{i[\kappa x - W(\kappa)t]} d\kappa$$

donde se ha puesto $\widehat{f}(\kappa) = 0$ fuera del intervalo $(\kappa_0 - \epsilon, \kappa_0 + \epsilon)$ y sólo se ha considerado $\omega = W(\kappa)$. Nos interesa saber el comportamiento para valores grandes de t . Luego de expandir $W(\kappa)$ alrededor de $\kappa = \kappa_0$,

$$u(x, t) = e^{i[\kappa_0 x - W(\kappa_0)t]} \int_{\kappa_0 - \epsilon}^{\kappa_0 + \epsilon} \widehat{f}(\kappa) e^{i[(\kappa - \kappa_0)x - (W'(\kappa_0)(\kappa - \kappa_0) - \frac{1}{2}W''(\kappa_0)(\kappa - \kappa_0)^2 + O((\kappa - \kappa_0)^3))t]} d\kappa.$$

Haciendo el cambio de variable $s = \frac{1}{\epsilon}(\kappa - \kappa_0)$,

$$u(x, t) = \epsilon e^{i[\kappa_0 x - W(\kappa_0)t]} \int_{-1}^1 \widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s) e^{i[s\epsilon x - W'(\kappa_0)\epsilon t]} e^{-\frac{i}{2}W''(\kappa_0)s^2\epsilon^2 t + O(s^3)} ds.$$

Al hacer este cambio de variable, $u(x, t)$ queda expresada en las variables ϵx , ϵt y $\epsilon^2 t$. Debido al parámetro ϵ , tenemos tres escalas: la escala rápida corresponde a las variables originales x y t ; a la escala lenta corresponden las variables $y = \epsilon x$, $\tau = \epsilon t$ y $\sigma = \epsilon^2 t$. De hecho, σ está en una escala aún más lenta que y y τ . Definimos

$$A(y, \tau, \sigma; \epsilon) = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s) e^{is[y - W'(\kappa_0)\tau]} e^{-\frac{i}{2}W''(\kappa_0)\sigma s^2 + O(s^3)} ds$$

en términos de las variables lentas $y = \epsilon x$, $\tau = \epsilon t$ y $\sigma = \epsilon^2 t$. La lentitud de estas variables depende del ancho ϵ de la vecindad. Hemos supuesto $\epsilon > 0$ muy pequeño. De esta manera, hemos obtenido

$$u(x, t) = \epsilon A(y, \tau, \sigma; \epsilon) e^{i[\kappa_0 x - W(\kappa_0)t]}. \quad (2.8)$$

Esta última expresión muestra que $u(x, t)$ se comporta como una onda plana, correspondiente al número de onda κ_0 , que se propaga con velocidad $\frac{W(\kappa_0)}{\kappa_0}$ y cuya amplitud es modulada por una función $A(y, \tau, \sigma; \epsilon)$ complicada.

A primer orden en ϵ , tenemos la siguiente aproximación (por la expansión de $W(\kappa)$, $\kappa = \kappa_0 + O(\epsilon)$):

$$u(x, t) \approx \epsilon A_0(y, \tau; \epsilon) e^{i[\kappa_0 x - W(\kappa_0)t]}$$

donde $A_0(y, \tau; \epsilon) = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s) e^{is[y - W'(\kappa_0)\tau]} ds.$

De manera que a orden ϵ se obtiene que la amplitud A_0 es función de $y - W'(\kappa_0)\tau$, es decir que A_0 es una onda que viaja con la velocidad de grupo $W'(\kappa_0)$. Esto significa que todas las ondas con número de onda $\kappa \in (\kappa_0 - \epsilon, \kappa_0 + \epsilon)$ viajan como un solo paquete con la velocidad $W'(\kappa_0)$. Viajando con la velocidad de grupo, la amplitud de la onda centrada en el número de onda κ_0 es constante en esta aproximación.

A orden ϵ^2 , A_1 aproxima la amplitud $A(y, \tau, \sigma; \epsilon)$ en la forma

$$A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon) = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s) e^{is[y - W'(\kappa_0)\tau]} e^{-\frac{1}{2} W''(\kappa_0) s^2 \sigma} ds.$$

En un marco de referencia que se mueve con la velocidad de grupo $W''(\kappa_0)$, A_1 es de la forma

$$A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon) = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s) e^{-\frac{1}{2} W''(\kappa_0) \sigma s^2} ds. \quad (2.9)$$

Hay que notar que $s = 0$ es un punto estacionario del exponente $W''(\kappa_0) \sigma s^2$, por lo cual la mayor contribución de $A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon)$ proviene de integrar en la vecindad de $s = 0$. Por esta razón, es adecuado aproximar $\widehat{f}(\kappa_0 + \epsilon s)$ por $\widehat{f}(\kappa_0)$. Entonces,

$$A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon) \approx f(\kappa_0) \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{2} W''(\kappa_0) \sigma s^2} ds.$$

Haciendo el cambio de variable $r = as$ con $a = \sqrt{\frac{1}{2} |W''(\kappa_0)| \sigma}$, se encuentra que

$$A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon) \approx f(\kappa_0) \sqrt{\frac{2}{|W''(\kappa_0)| \sigma}} \int_{-a}^a e^{-i \operatorname{sgn}(W''(\kappa_0)) r^2} dr, \quad (2.10)$$

la integral que queda es alguna constante compleja. Para valores muy grandes de $|r|$, las oscilaciones de $e^{-i \operatorname{sgn}(W''(\kappa_0)) r^2}$ se cancelan y podemos aproximar la integral de (2.10) con las integrales de Fresnel:

$$\begin{aligned} A_1(y, \tau, \sigma; \epsilon) &\approx f(\kappa_0) \sqrt{\frac{2}{|W''(\kappa_0)| \sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \operatorname{sgn}(W''(\kappa_0)) r^2} dr \\ &= f(\kappa_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|W''(\kappa_0)| \sigma}} e^{-i \operatorname{sgn}(W''(\kappa_0)) \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Lo interesante del resultado (2.10) es que a orden ϵ^2 , la amplitud que modula la onda plana $e^{i[\kappa_0 x - W(\kappa_0)t]}$ es proporcional a $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ ($\sigma = \epsilon^2 t$) si $W''(\kappa_0) \neq 0$. Este decaimiento se debe a la variable más lenta $\sigma = \epsilon^2 t$ en la amplitud $A(y, \tau, \sigma; \epsilon)$. En resumen, la amplitud A que modula la onda plana se comporta como una onda viajera (a orden ϵ) en las variables lentas

y y τ . En la escala σ , aún más lenta, es posible apreciar el decaimiento en la amplitud al viajar con la velocidad de grupo $W'(\kappa_0)$.

¿Cuál es el mecanismo que hace decrecer a cero la amplitud cuando $t \rightarrow \infty$?

Para observar el decaimiento de la amplitud de las ondas a tiempos grandes, se necesita que $W''(\kappa_0) \neq 0$, es decir, que la velocidad de fase $c(\kappa_0) = \frac{W(\kappa_0)}{\kappa_0}$ no sea constante. Esto significa que diferentes números de onda dan lugar a velocidades de fase distintas. A este mecanismo se le conoce como dispersión. De ello resultará que para tiempos grandes, la diferencia entre las distancias $c(\kappa_1)t$ y $c(\kappa_2)t$, dados $\kappa_1 \neq \kappa_2$ positivos, aumentará. Entonces veremos las ondas correspondientes a κ_1 y κ_2 muy separadas, aún cuando ambos números de onda estén en el intervalo $(\kappa_0 - \epsilon, \kappa_0 + \epsilon)$. Esto se refleja en el decaimiento de la amplitud cuando $t \rightarrow \infty$. En la aproximación dada por (2.10) y en lo siguiente se muestra que el decaimiento de un fenómeno de naturaleza dispersiva es mucho más lento que el decaimiento por difusión.

Hemos examinado el comportamiento de la solución de la ecuación (2.5) para paquetes de ondas. Veremos el caso más general que aparece en la ecuación (2.7)

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{it\theta(\kappa)} d\kappa, \quad \theta(\kappa; x, t) = \kappa \frac{x}{t} - W(\kappa).$$

Recordemos que $W(\kappa) = \sqrt{1 + \kappa^2}$ para la ecuación (2.5). El término $e^{it\theta(\kappa)}$ es oscilatorio; mientras mayor sea el valor de t , las oscilaciones serán más densas, y habrá cancelaciones entre las partes positivas y negativas. Así la principal contribución a $I(t)$ provendrá de la vecindad de los puntos κ_0 donde $\theta(\kappa)$ no cambia de signo: en los máximos y mínimos de $\theta(\kappa)$. Ahí, $\theta(\kappa) - \theta(\kappa_0) = O((\kappa - \kappa_0)^2)$. De manera que

$$I(t) \sim \hat{f}(\kappa_0) e^{it\theta(\kappa_0)} \int_{\kappa_0 - \delta}^{\kappa_0 + \delta} e^{\frac{i}{2} t \theta''(\kappa_0) (\kappa - \kappa_0)^2} d\kappa$$

es una buena aproximación.

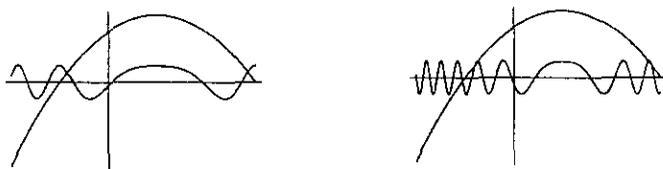


Figura 2.3 a) Gráficas de $\theta(\kappa)$ y $\cos(t_1\theta(\kappa))$.
b) Gráficas de $\theta(\kappa)$ y $\cos(t_2\theta(\kappa))$ para $t_1 < t_2$

Para cada x y t solamente hay un punto estacionario ($\theta'(\kappa_0) = 0$): $\kappa_0 = \frac{x}{\sqrt{t^2 - x^2}}$ (válido para $|x| < t$) que satisface $\theta''(\kappa_0) < 0$. Como en una vecindad pequeña de κ_0 es válido

$$\theta(\kappa) \approx \theta(\kappa_0) + \frac{1}{2} \theta''(\kappa_0) (\kappa - \kappa_0)^2 \quad \text{y} \quad \theta(\kappa_0) > \theta(\kappa),$$

podemos definir el cambio de variable

$$-s^2 = \theta(\kappa) - \theta(\kappa_0) = \frac{1}{2}\theta''(\kappa_0)(\kappa - \kappa_0)^2 + O((\kappa - \kappa_0)^3).$$

Entonces,

$$I(t) \sim \hat{f}(\kappa_0)e^{it\theta(\kappa_0)} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-its^2} \left(\frac{-2}{\theta''(\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} ds \quad \text{donde} \quad \alpha = \delta\left(-\frac{2}{\theta''(\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con la aproximación

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-its^2} ds \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa)e^{i(\kappa x - W(\kappa)t)} d\kappa \sim \hat{f}(\kappa_0) \left(\frac{2\pi}{tW''(\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\kappa_0 x - W(\kappa_0)t - \frac{\pi}{4})}.$$

En forma análoga con los cambios apropiados,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa)e^{i(\kappa x + W(\kappa)t)} d\kappa \sim \hat{f}(-\kappa_0) \left(\frac{2\pi}{tW''(-\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa_0 x + W(-\kappa_0)t + \frac{\pi}{4})}.$$

Por lo tanto para la solución de (2.5) (ver(2.7)),

$$\begin{aligned} u(x, t) &\sim \frac{1}{4\pi} \hat{f}(\kappa_0) \left(\frac{2\pi}{tW''(\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\kappa_0 x - W(\kappa_0)t - \frac{\pi}{4})} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \hat{f}(-\kappa_0) \left(\frac{2\pi}{tW''(-\kappa_0)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa_0 x + W(-\kappa_0)t + \frac{\pi}{4})}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De las ecuaciones (2.3) y (2.6) se observa un contraste significativo entre los efectos difusivos y dispersivos. En (2.3), el decaimiento exponencial de la solución es consecuencia directa de que la amplitud de los modos de Fourier tiende a cero. En cambio, para (2.6) la amplitud de los modos es constante; sin embargo, como puede verse en la ecuación (2.11), la solución decae a cero en la forma $\frac{1}{\sqrt{t}}$ si hay dispersión ($W''(\pm\kappa_0) \neq 0$).

CAPITULO 3

Regularización por difusión

En este capítulo queremos mostrar cómo se regulariza la solución multivaluada de

$$u_t + uu_x = 0 \quad (3.1)$$

en el sentido de obtener una solución univaluada al incluir un término difusivo. Estudiaremos la ecuación de Burgers teniendo como referencia el cuarto capítulo del libro de Whitham. [9], [10].

En el primer capítulo obtuvimos la ecuación de conservación del número de coches

$$\rho_t + Q_x = 0 \quad (3.2)$$

donde $\rho(x, t)$ es la densidad y $Q(x, t)$ es el flujo de coches en el punto x al tiempo t . Luego de usar la hipótesis de que Q es función de ρ , vimos que la parte de pendiente negativa de $\rho(x, 0) = f(x)$ da lugar a la parte multivaluada de $\rho(x, t)$ para $t \geq t_B$. En esa región, ρ_x toma valores muy grandes. Para mejorar la descripción del tráfico, queremos tomar en cuenta que al aumentar la densidad, los conductores deben reducir la velocidad de sus coches. Ahora, Q dependerá de la densidad ρ y del cambio ρ_x :

$$Q = u(\rho) - \mu\rho_x, \quad \mu > 0. \quad (3.3)$$

Sustituyendo la relación anterior en (3.2), se tiene

$$\rho_t + u'(\rho)\rho_x = \mu\rho_{xx}. \quad (3.4)$$

Para el caso en que $u(\rho)$ es cuadrática basta estudiar la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad \mu > 0. \quad (3.5)$$

En esta ecuación se combinan los efectos no lineales y de difusión. La no linealidad aparece en (3.1) y la difusión en la ecuación de calor $u_t = \mu u_{xx}$. Compararemos la solución de ambas usando la condición inicial $1 - H(x)$. Como vimos en el primer capítulo, la solución de (3.1) es multivaluada en el intervalo $[0, t]$ al tiempo t .

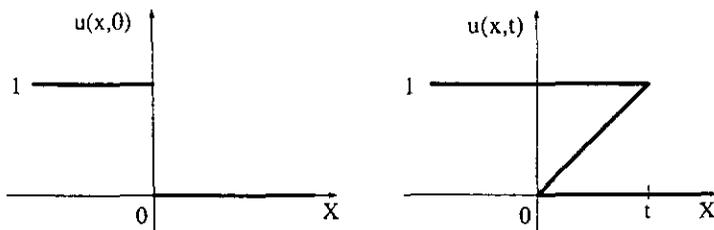


Figura 3.1 La solución de $u + uu_x = 0$ con $u(x, 0) = 1 - H(x)$

En cambio, la solución

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

de la ecuación de calor es univaluada y diferenciable para cualquier (x, t) .

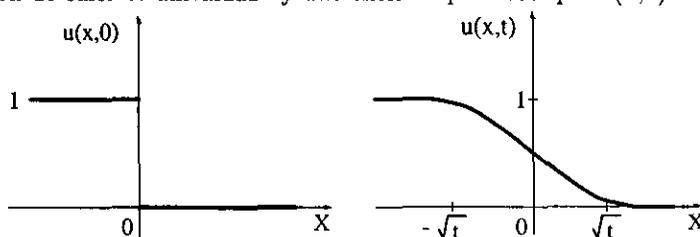


Figura 3.2 La solución de $v_t = \mu v_{xx}$ con $v(x, 0) = 1 - H(x)$

Como hemos visto, el término uu_x tiene el efecto de deformar la solución hasta volverla multivaluada para condiciones iniciales que decrecen en algún intervalo, mientras que μu_{xx} introduce el efecto difusivo que suaviza los datos iniciales y caracteriza a la ecuación de calor. Posteriormente veremos cómo se combinan los efectos de ambas ecuaciones en (3.5), en particular para este ejemplo. La ecuación de Burgers es la ecuación más simple que combina propagación no lineal y difusión.

Mediante la transformación de Cole-Hopf

$$u = -2\mu \frac{v_x}{v},$$

la ecuación no lineal de Burgers se puede reducir a la ecuación lineal de calor. Si sustituimos $u = \phi_x$ en (3.5) e integramos respecto a x ,

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 = \mu\phi_{xx}.$$

Si definimos v por medio de $\phi = -2\mu \log(v)$ se encuentra que

$$v_t = \mu v_{xx}.$$

De la misma forma se calcula el valor inicial para esta ecuación:

$$v(x, 0) = q(x) = e^{-\frac{1}{2\mu} \int_0^x f(\eta) d\eta}$$

correspondiente a $u(x, 0) = f(x)$. De este modo, con la transformación de Cole-Hopf hemos cambiado el problema (3.5) de condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ por $v_t = \mu v_{xx}$, $v(x, 0) = q(x)$. La solución a esto último es

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4\mu t}} d\eta = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\frac{(x-\eta)^2}{4\mu t} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\eta f(y) dy]} d\eta.$$

Entonces,

$$v_x(x, t) = \frac{1}{-2\mu\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu} G(\eta)} d\eta$$

donde

$$G(\eta; x, t) = \int_0^\eta f(y) dy + \frac{(x-\eta)^2}{2t}. \quad (3.6)$$

Finalmente,

$$u(x, t) = \frac{-2\mu v_x}{v} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu} G(\eta)} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\eta)} d\eta} \quad (3.7)$$

es la solución de la ecuación de Burgers con $u = f(x)$ en $t = 0$. La solución es continua y toma un solo valor en cada punto (x, t) .

Estamos interesados en mostrar que cuando $\mu \rightarrow 0$ la solución $u(x, t)$ de la ecuación de Burgers se reduce a la solución de (3.1) con discontinuidades en $s = s(t)$ que cumplen la condición de choque

$$U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad c_1 < U < c_2,$$

y satisfacen la propiedad de áreas iguales.

Para $\mu \rightarrow 0$, las contribuciones dominantes de la integrales en (3.7) provienen de la vecindad de los puntos estacionarios de $G(\eta)$:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow f(\eta) = \frac{x-\eta}{t}. \quad (3.8)$$

Nótese que los puntos estacionarios corresponden a la intersección de las características $x = \eta + f(\eta)t$ con el eje x . Sea $\eta = \eta(x, t)$ tal que satisface (3.8). Con el método de máximo descenso (ver Apéndice 1) se obtiene aproximaciones asintóticas de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-\alpha G(\eta)} d\eta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha |G''(\xi)|}} h(\xi) e^{-\alpha G(\xi)} \quad \text{para } \alpha \rightarrow \infty$$

en la vecindad del punto estacionario $\eta = \xi$. Entonces, las contribuciones alrededor de $\eta = \xi$ son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\eta)} d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}} \left(\frac{x - \xi}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\eta)} d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi\mu}{|G''(\xi)|}} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi)}.$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) \sim \frac{x - \xi}{t} = f(\xi). \quad (3.9)$$

De esta manera, hemos obtenido en forma asintótica la solución de (3.1), a la cual denotaremos \tilde{u} . Esta se vuelve multivaluada después de cierto tiempo t_B si la condición inicial $f(\xi)$ decrece en algún intervalo. Esto no sucede con la solución (3.7) (que es univaluada y continua) para $\mu > 0$, sin importar lo pequeño que se considere el parámetro μ . Debido a esto, la aproximación (3.9) es válida para $t < t_B$ (antes de que \tilde{u} sea multivaluada) y para valores $x = \xi + f(\xi)t$ para los cuales ξ está fuera de los intervalos donde $f(\xi)$ decrece si $t > t_B$. Esto nos muestra que debe considerarse la estructura de las características de (3.1) en el análisis asintótico de $u(x, t)$. Para los puntos (x, t) donde $\tilde{u}(x, t)$ toma dos valores, se debe considerar los contribuciones de dos puntos estacionarios ξ_1 y ξ_2 , ($\xi_2 < \xi_1$). Sin ambas contribuciones, no se puede recuperar la solución continua (3.7). Al tomarlo en cuenta se tiene

$$u(x, t) \sim \frac{\frac{x - \xi_1}{t} |G''(\xi_1)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_1)} + \frac{x - \xi_2}{t} |G''(\xi_2)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_2)}}{|G''(\xi_1)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_1)} + |G''(\xi_2)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_2)}}. \quad (3.10)$$

Cuando $G(\xi_1) \neq G(\xi_2)$, la presencia del parámetro $\mu > 0$ (muy pequeño) en $e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_i)}$, hace que uno de los exponentes sea mucho mayor que el otro conforme $\mu \rightarrow 0$. Entonces,

$$\text{para } G(\xi_1) < G(\xi_2), \quad e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_1)} \gg e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_2)} \quad \Rightarrow \quad u \sim \frac{x - \xi_1}{t} = f(\xi_1),$$

$$\text{para } G(\xi_1) > G(\xi_2), \quad e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_1)} \ll e^{-\frac{1}{2\mu} G(\xi_2)} \quad \Rightarrow \quad u \sim \frac{x - \xi_2}{t} = f(\xi_2).$$

Nótese que el mismo análisis funciona al considerar las contribuciones de tres puntos estacionarios (cuando $\tilde{u}(x, t)$ toma tres valores).

Veámos que sucede en los puntos estacionarios donde $G(\xi_1) = G(\xi_2)$. De acuerdo con la definición de $G(\eta)$ (ver (3.6)),

$$\int_0^{\xi_1} f(\eta) d\eta + \frac{(x - \xi_1)^2}{2t} = \int_0^{\xi_2} f(\eta) d\eta + \frac{(x - \xi_2)^2}{2t}.$$

Entonces,

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} f(\eta) d\eta = \frac{1}{2t} [(x - \xi_1 + \xi_1 - \xi_2)^2 - (x - \xi_1)^2] = \frac{(\xi_1 - \xi_2)}{2} \left[\frac{x - \xi_1}{t} + \frac{x - \xi_2}{t} \right],$$

que es la condición de áreas iguales que se obtuvo en el primer capítulo. Por lo tanto, el cambio de $u(x, t)$ del valor $f(\xi_1)$ a $f(\xi_2)$ se da en el choque

$$s(t) = \xi_1(t) + f(\xi_1(t))t = \xi_2(t) + f(\xi_2(t))t$$

donde se cumple la propiedad de cortar áreas iguales en la solución multivaluada $\tilde{u}(x, t)$ al tiempo t :

$$\frac{1}{2}(f(\xi_1) + f(\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} f(\eta) d\eta.$$

Por la parte final del capítulo uno, sabemos que si las características se intersectan y simultáneamente satisfacen la condición de choque, entonces se cumple la igualdad anterior. Esta aproximación muestra que, cuando $\mu \rightarrow 0$, $u(x, t)$ tiende asintóticamente a la solución discontinua de (3.1) a través de funciones continuas ($u(x, t)$ es continua). En la figura 3.3 tenemos un ejemplo de la convergencia de $u(x, t)$ a $\tilde{u}(x, t)$ donde $u(x, 0) = 1 - H(x)$ (compárese con las figuras 3.1 y 3.2).

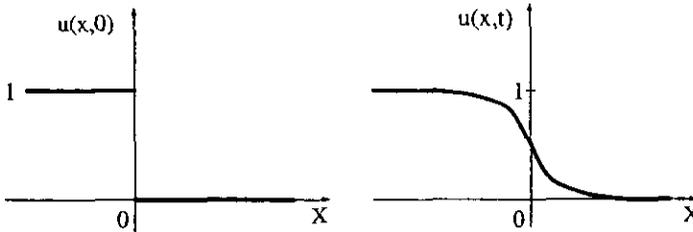


Figura 3.3

Veámos si la ecuación de Burgers tiene ondas viajeras como solución y si con ello se tiene una mejor descripción. Sea $u = u(X)$ donde $X = x - Ut$ y la constante U , la velocidad de la onda, se quieren determinar. Sustituimos $u = u(X)$ en la ecuación de Burgers e integramos. De ahí,

$$-Uu + \frac{1}{2}u^2 - M = \mu u_X \quad (3.11)$$

Para determinar las constantes U y M , usaremos las condiciones $u \rightarrow u_1$ cuando $X \rightarrow \infty$ y $u \rightarrow u_2$ cuando $X \rightarrow -\infty$. M y U son solución del sistema

$$-Uu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = M$$

$$-Uu_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = M;$$

de donde $U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ y $M = -\frac{1}{2}u_1u_2$. Con estos valores, (3.11) queda escrito como

$$(u - u_1)(u - u_2) = -2\mu uX.$$

Integrando,

$$\frac{X}{\mu} = \frac{2}{u_2 - u_1} \log\left(\frac{u_2 - u}{u - u_1}\right).$$

De aquí despejamos u :

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + e^{\frac{u_2 - u_1}{2} X}} = u_1 + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{4\mu}(u_2 - u_1)X\right)\right]$$

$$\text{donde } U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \text{ y } X = x - Ut.$$

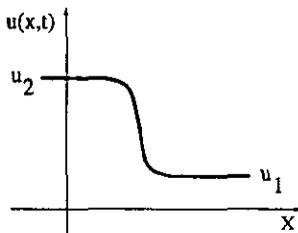


Figura 3.4 Gráfica de $u(x, t)$ para $u_2 > u_1$

Hasta aquí hemos resuelto la existencia de ondas viajeras. A continuación estudiaremos el problema con valores iniciales.

Es posible ver en forma exacta el comportamiento de $u(x, t)$ si consideremos la condición inicial

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{si } x > 0; \\ u_2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

para $u_1 < u_2$. En ese caso,

$$G(\eta) = \begin{cases} u_1\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t} & \text{para } \eta > 0, \\ u_2\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t} & \text{para } \eta < 0. \end{cases}$$

Con esto podemos reescribir el denominador de (3.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u_2}{2\mu}\eta - \frac{(x-\eta)^2}{4\mu t}} d\eta + \int_0^{\infty} e^{-\frac{u_1}{2\mu}\eta - \frac{(x-\eta)^2}{4\mu t}} d\eta$$

Con el cambio de variable

$$\xi(\eta; x, t) = \frac{x - \eta - ct}{\sqrt{4\mu t}}, \quad c = \begin{cases} u_1, & \text{si } \eta > 0, \\ u_2, & \text{si } \eta < 0. \end{cases}$$

tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta = \sqrt{4\mu t} e^{-\frac{u_2}{2\mu}(x-\frac{u_2}{2}t)} \int_{\frac{x-u_2t}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \sqrt{4\mu t} e^{-\frac{u_1}{2\mu}(x-\frac{u_1}{2}t)} \int_{-\infty}^{\frac{-(x-u_1t)}{\sqrt{4\mu t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Para el numerador,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta &= \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}[u_2\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta + \int_0^{\infty} \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}[u_1\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta \\ &= -\int_{-\infty}^0 \left(u_2 - \frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}[u_2\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta - \int_0^{\infty} \left(u_1 - \frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}[u_1\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta \\ &\quad + u_2 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2\mu}[u_2\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta + u_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu}[u_1\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}]} d\eta. \end{aligned}$$

Para las dos primeras integrales del lado derecho de la última igualdad, usamos el cambio de variable

$$s(t) = c\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t}$$

lo que muestra que se cancelan; las dos últimas integrales son una combinación lineal de las que aparecen en el denominador. De manera que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta &= \sqrt{4\mu t} \{u_1 [e^{-\frac{1}{2\mu}u_2(x-\frac{u_2}{2}t)} \int_{\frac{x-u_2t}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\ &+ e^{-\frac{u_1}{2\mu}(x-\frac{u_1}{2}t)} \int_{-\infty}^{\frac{-(x-u_1t)}{\sqrt{4\mu t}}} e^{-\xi^2} d\xi] + (u_2 - u_1) e^{-\frac{1}{2\mu}u_2(x-\frac{u_2}{2}t)} \int_{\frac{x-u_2t}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + h(x, t) e^{\frac{1}{2\mu}(u_2 - u_1)(x - Ut)}} \quad (3.12)$$

donde

$$h(x, t) = \frac{\int_{\frac{-(x-u_1t)}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}{\int_{\frac{-(x-u_2t)}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi} \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2).$$

El punto $x = Ut$ es especial. Este valor de x es condición necesaria y suficiente para que los extremos de integración de $h(x, t)$ sean iguales, esto es que h sea 1. Sustituyendo $x - Ut = 0$ y $h = 1$ en (3.12), se encuentra que $u(x, t) = U$ para todo t e independientemente del valor de μ . Para $x < Ut$, $h < 1$ y $X = x - Ut$ es negativo, por lo cual cuando μ tiende a 0, la exponencial decae y $u \rightarrow u_2$. En cambio para $x > Ut$, la exponencial crece cuando $\mu \rightarrow 0$ y $u \rightarrow u_1$. De esta manera, la solución discontinua del caso límite $\mu = 0$ se recupera. Por otro lado, tomando μ fija, $u \rightarrow u_2$ cuando $X \rightarrow -\infty$, y $u \rightarrow u_1$ cuando $X \rightarrow \infty$.

Un caso interesante de analizar es una función positiva con un solo máximo como condición inicial. Esta sería una aproximación a la delta de Dirac.

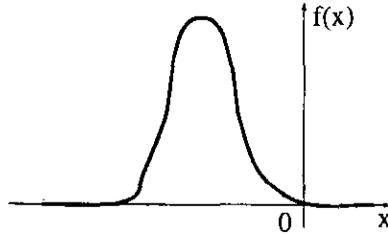


Figura 3.5

Consideraremos la condición inicial $u(x, 0)$ en la forma $f(x) = A\delta(x)$ para $x < 0$ y $f(x) = 0$ para $x \geq 0$.

De tal forma,

$$G = - \int_{\eta}^0 A\delta(s) ds + \frac{(x - \eta)^2}{2t} = \frac{(x - \eta)^2}{2t} - A \text{ para } \eta < 0,$$

$$G = \frac{(x - \eta)^2}{2t} \text{ para } \eta > 0.$$

Entonces, para el numerador de (3.7) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta = 2\mu e^{\frac{A}{2\mu}} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x - \eta}{2\mu t}\right) e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} d\eta + 2\mu \int_0^{\infty} \left(\frac{x - \eta}{2\mu t}\right) e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} d\eta$$

$$= 2\mu \left\{ e^{\frac{A}{2\mu}} \left[e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} \right]_{-\infty}^0 + \left[e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} \right]_0^{\infty} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \eta}{t}\right) e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta = 2\mu \left(e^{\frac{A}{2\mu}} - 1 \right) e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}.$$

En cuanto al denominador de (3.7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\mu}G(\eta)} d\eta = e^{\frac{A}{2\mu}} \int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} d\eta + \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x - \eta}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} d\eta$$

$$= \sqrt{4\mu t} e^{\frac{A}{2\mu}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \sqrt{4\mu t} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= \sqrt{4\mu t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \left(e^{\frac{A}{2\mu}} - 1 \right) \int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right\}$$

$$= \sqrt{4\mu t} \left\{ \sqrt{\pi} + \left(e^{\frac{A}{2\mu}} - 1 \right) \int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right\}.$$

Definimos $R = \frac{A}{2\mu}$. Entonces,

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{t}} \frac{(e^R - 1)e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}}{\sqrt{\pi} + (e^R - 1) \int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi} \quad (3.13)$$

es la solución de

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

con condición inicial $f(x) = A\delta(x)$.

Queremos verificar que la difusión domina sobre la no linealidad cuando $R \rightarrow 0$ ($R = \frac{A}{2\mu}$). La integral que aparece en (3.13) es convergente ya que

$$\int_{\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{si } \mu \rightarrow \infty$$

Como $e^R - 1 = O(R)$, entonces el denominador de (3.13) es igual a $\sqrt{\pi} + O(R)$ uniformemente en x, t, μ para $R \ll 1$. Entonces,

$$u(x, t) \sim \sqrt{\frac{\mu}{t}} \frac{R e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}}{\sqrt{\pi} + O(R)} \sim \frac{A}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}.$$

Así, la solución de la ecuación de Burgers es aproximada por la solución de la ecuación de calor $u_t = \mu u_{xx}$ con la condición inicial $f(x) = A\delta(x)$. Efectivamente, la difusión domina en (3.13) cuando $R \ll 1$.

¿Cómo se comporta la solución (3.13) cuando $R \gg 1$? Por conveniencia, definimos la variable $z = \frac{x}{\sqrt{2At}}$ para reescribir (3.13):

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2A}{t}} g(z; R)$$

donde

$$g(z; R) = \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{(e^R - 1)e^{-Rz^2}}{\sqrt{\pi} + (e^R - 1) \int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}, \quad R = \frac{A}{2\mu}.$$

Para $R \gg 1$,

$$g(z; R) \sim \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{e^{(1-z^2)R}}{\sqrt{\pi} + e^R \int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}. \quad (3.14)$$

Ahora analizaremos el comportamiento de g cuando $R \rightarrow \infty$ para diferentes valores de z . Para $z < 0$,

$$\int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}, \quad R \rightarrow \infty;$$

por lo cual

$$g(z; R) \sim \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{e^{(1-z^2)R}}{\sqrt{\pi}(1+e^R)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi R}} e^{-z^2 R}.$$

Por lo tanto,

$$g = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \text{ uniformemente para } z < 0 \text{ y } R \gg 1.$$

Para $z > 0$, necesitamos una mejor aproximación de la integral

$$\int_{z\sqrt{R}}^{\infty} \frac{1}{\xi^2} e^{-\xi^2} d\xi$$

para no perder información. La forma asintótica de esta integral viene del siguiente límite:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta e^{\eta^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\xi^2} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}.$$

Entonces para $\eta \rightarrow \infty$, se tiene la aproximación

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\xi^2} e^{-\xi^2} d\xi \sim \frac{1}{2\eta} e^{-\eta^2} + O\left(\frac{1}{2\eta} e^{-\eta^2}\right) \quad (3.15)$$

Sustituyendo lo anterior en la aproximación (3.14) obtenemos

$$g(z; R) \sim \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{e^{(1-z^2)R}}{\sqrt{\pi} + \frac{e^{(1-z^2)R}}{2z\sqrt{R}}} = \frac{z}{1 + 2z\sqrt{\pi R} e^{(z^2-1)R}}. \quad (3.16)$$

Por lo tanto,

$$g \sim \begin{cases} z, & \text{si } 0 < z < 1, \\ 0, & \text{si } z > 1. \end{cases}$$

Lo anterior, reescrito en las variables originales, es

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2A}{t}} g \sim \begin{cases} \frac{x}{t}, & \text{si } 0 < x < \sqrt{2At} \\ 0, & \text{en el complemento.} \end{cases} \quad (3.17)$$

En este análisis, que se hizo para $R \rightarrow \infty$, hemos recuperado el comportamiento de $u_t + uu_x = 0$, obtenido en (1.11), con un choque en $x = \sqrt{2At}$. A es el área bajo el perfil inicial, que puede ser una aproximación a la delta de Dirac.

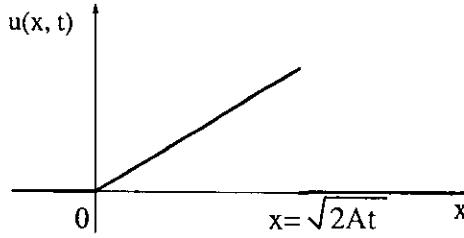


Figura 3.6

Analizemos la transición de g en $z = 0$ y en $z = 1$. De (3.14) g es proporcional a $\frac{1}{R}$ y su comportamiento alrededor de $z = 0$ es de la forma

$$g \sim \frac{e^{-Rz^2}}{2\sqrt{R} \int_{\sqrt{Rz}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}.$$

En la vecindad de $z = 1$, $z^2 - 1 = 2(z - 1) + O((z - 1)^2)$. Ahora tenemos (ver (3.16))

$$g \sim \frac{1}{1 + \sqrt{4\pi R} e^{2R(z-1)}};$$

alrededor de $z = 1$, g es de orden $O(\frac{1}{\sqrt{R}})$.

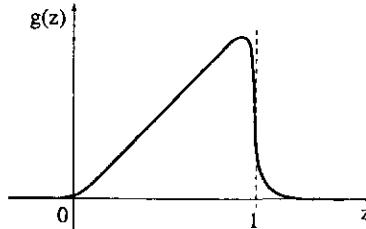


Figura 3.7

Cuando el parámetro $R = A/2\mu$ es grande, la franja de transición de $g(z)$ en $z = 1$ es muy angosta; en ese caso, la solución discontinua de $u_t + uu_x = 0$ es una buena aproximación. De hecho, $u(x, t) = \sqrt{\frac{2A}{t}} g(x, t)$ converge a la solución discontinua (1.13) conforme $R \rightarrow \infty$. En el siguiente capítulo veremos que el caso dispersivo es totalmente distinto: la franja de transición alrededor del choque no tiende a cero.

CAPITULO 4

Regularización por dispersión

En este capítulo nos interesa estudiar el efecto de la dispersión en la solución de la ecuación $u_t + uu_x = 0$. Una forma simple de incluir efectos dispersivos, como veremos a continuación, es sumarle $i\frac{\hbar}{2}u_{xx}$ a la ecuación anterior [2], [3], [7]. Obtenemos así la ecuación de Dobrokhotov

$$u_t + uu_x = \frac{i\hbar}{2}u_{xx}. \quad (4.1)$$

Consideraremos esta ecuación con la condición inicial $u(x, 0) = p(x)$. Mostraremos que la solución de (4.1) oscila y aproxima, cuando $\hbar \rightarrow 0$, la solución de $u_t + uu_x = 0$ en la región donde no hay intersección de características. En la región de choque, la solución oscila con oscilaciones crecientes en el tiempo.

Como veremos, la ecuación (4.1) es de carácter dispersivo. Esta ecuación es satisfecha por cualquier constante u_0 . Hacemos una expansión de $u(x, t)$ alrededor de u_0 :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 + \epsilon u_1(x, t) + O(\epsilon^2) \\ uu_x &= \{u_0 + \epsilon u_1(x, t) + O(\epsilon^2)\}[\epsilon u_{1x}(x, t) + O(\epsilon^2)] = \epsilon u_0 u_{1x} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Entonces, a orden ϵ , la ecuación (4.1) implica

$$u_{1t} + u_0 u_{1x} = i\frac{\hbar}{2}u_{1xx}.$$

Como la ecuación anterior es lineal, proponemos una onda plana $u_1(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)}$ como solución; sustituyendo, tenemos

$$i(\omega - u_0 \kappa - \frac{\hbar}{2}\kappa^2)e^{i(\kappa x - \omega t)} = 0.$$

De esta manera la relación de dispersión de la aproximación lineal de la solución de (4.1) es $\omega(\kappa) = u_0 \kappa + \frac{\hbar}{2}\kappa^2$. El término $\frac{\hbar}{2}\kappa^2$ hace que $c(\kappa) = \frac{\omega(\kappa)}{\kappa}$ dependa de κ : por lo tanto, el término $i\frac{\hbar}{2}u_{xx}$, que lo origina, es por esta razón de carácter dispersivo.

La ecuación (4.1) es sólo un modelo de estudio, el cual analizaremos sin intentar relacionarlo a algún modelo físico. Esta ecuación nos ayudará a entender en un caso integrable el efecto

de la dispersión en una onda de choque. De nuevo, como en la ecuación de Burgers, con la transformación de Cole-Hopf

$$u = -ih \frac{v_x}{v} \quad (4.2)$$

podemos transformar la ecuación no lineal (4.1) en una ecuación lineal. Definimos $u = \psi_x$. De (4.1),

$$\psi_{xt} + \psi_x \psi_{xx} = i \frac{\hbar}{2} \psi_{xxx}.$$

Integrando respecto a x ,

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 = i \frac{\hbar}{2} \psi_{xx}.$$

Integrando (4.2) y usando $u = \psi_x$ se obtiene $\psi = -ih \log(v)$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de Schrödinger en una dimensión (para un electrón libre)

$$v_t = i \frac{\hbar}{2} v_{xx}. \quad (4.3)$$

Para la ecuación (4.1) consideraremos una condición inicial $u(x, 0) = p(x)$. Calculamos la nueva condición $v(x, 0)$ con la transformación de Cole-Hopf de $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) = \psi_x(x, 0) &\Rightarrow \psi(x, 0) = \int_0^x p(\eta) d\eta = -ih \log(v(x, 0)) \\ &\Rightarrow v(x, 0) = e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^x p(\eta) d\eta}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Resolvemos, (4.3), $v_t = \epsilon i v_{xx}$, $v(x, 0) = q(x)$ ($\epsilon = \frac{\hbar}{2}$) usando transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{v}_t &= -\epsilon i \kappa^2 \hat{v}, & \hat{v}(\kappa, 0) &= \hat{q}(\kappa), \\ \text{por lo cual } \hat{v}(\kappa, t) &= \hat{q}(\kappa) e^{-i\epsilon \kappa^2 t}. \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de \hat{v} , obtenemos

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(\kappa) e^{i\kappa(x - \epsilon \kappa t)} d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{-i\kappa y} dy \right] e^{i\kappa(x - \epsilon \kappa t)} d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{i\kappa[(x-y) - \epsilon \kappa t]} d\kappa dy. \end{aligned}$$

Reescribimos el exponente

$$\begin{aligned} \kappa[(x-y) - \epsilon \kappa t] &= -\epsilon t \left[\kappa^2 - 2\kappa \left(\frac{x-y}{2\epsilon t} \right) + \left(\frac{x-y}{2\epsilon t} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2\epsilon t} \right)^2 \right] \\ &= -\epsilon t \left[\kappa - \left(\frac{x-y}{2\epsilon t} \right) \right]^2 + \frac{(x-y)^2}{4\epsilon t} \end{aligned}$$

para hacer el cambio de variable $\xi(\kappa) = \kappa - (\frac{x-y}{2t})$. Entonces,

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{-i\epsilon t \xi^2} e^{i \frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\epsilon t \xi^2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{i \frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}} dy \\ &= \frac{(1-i)}{\sqrt{4\pi h t}} \int_{-\infty}^{\infty} q(y) e^{i \frac{(x-y)^2}{2h t}} dy. \end{aligned}$$

Finalmente después de sustituir la condición inicial (4.4) obtenemos

$$v(x, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi h t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} G(y)} dy \quad (4.5)$$

donde se ha definido

$$G(y; x, t) = \int_0^y p(\eta) d\eta + \frac{(x-y)^2}{2t}. \quad (4.6)$$

Usando otra vez la transformación de Cole-Hopf se encuentra la solución del problema dado por la ecuación (4.1) y la condición inicial $u(x, 0) = p(x)$:

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{x-y}{t}) e^{\frac{i}{h} G(y)} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} G(y)} dy}. \quad (4.7)$$

Cuando $h \rightarrow 0$, las contribuciones dominantes de las integrales en la ecuación (4.7) provienen de la vecindad de los puntos estacionarios de $G(\xi; x, t)$, es decir de los puntos ξ tales que $\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0$. La definición de G implica que los puntos estacionarios satisfacen $p(\xi) = \frac{x-\xi}{t}$. Sea $\xi = \xi(x, t)$ uno de tales puntos. Usamos el método de la fase estacionaria para obtener una aproximación asintótica de $u(x, t)$ para $h \rightarrow 0$ (es necesario que $p(x)$ sea C^1):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{x-y}{t}) e^{\frac{i}{h} G(y)} dy &\sim \sqrt{\frac{2\pi h}{|G'''(\xi)|}} (\frac{x-\xi}{t}) e^{i[\frac{G(\xi)}{h} + sgn(G''(\xi))\frac{\pi}{4}]} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} G(y)} dy &\sim \sqrt{\frac{2\pi h}{|G'''(\xi)|}} e^{i[\frac{G(\xi)}{h} + sgn(G''(\xi))\frac{\pi}{4}]} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por lo tanto

$$u(x, t) \sim \frac{x-\xi}{t} = p(\xi). \quad (4.9)$$

Si sólo hay un punto estacionario, entonces $u(x, t)$ es aproximado por $p(\xi)$ cuando $h \rightarrow 0$; $\xi(x, t)$ está definido implícitamente por $x = \xi + p(\xi)t$. Por lo cual, $u(x, t)$ aproxima a la solución de

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x = 0 \quad \text{con} \quad u(x, 0) = p(x). \quad (4.10)$$

Sabemos que conforme pasa el tiempo, la solución de la ecuación anterior se vuelve multivaluada, si $p'(\xi) < 0$ en algún intervalo, por la intersección de características: sin embargo, la solución exacta, dada por (4.7), es univaluada y continua. Por ello la aproximación anterior sólo es válida cuando \tilde{u} toma un único valor. Por la continuidad de la expresión en (4.7) con respecto a x y t , tampoco se puede considerar la solución discontinua de (4.10). La dificultad proviene de la intersección de las características, y que ello da lugar a más de un punto estacionario para cada x , en lugar de uno solo. Recordemos que por cada valor que toma $\tilde{u}(x, t)$ hay un punto estacionario $\xi(x, t)$. Debido a esto es necesario modificar el análisis del comportamiento asintótico.

En lo siguiente, se hará el análisis del comportamiento de la solución (4.7) con la condición inicial

$$u(x, 0) = p(x) \equiv \begin{cases} u_2, & \text{if } x < 0; \\ u_1, & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

con $u_2 < u_1$. Con esta condición inicial, se tiene que $G(y) = cy + \frac{(x-y)^2}{2t}$ donde $c = p(y)$. Calcularemos la solución explícita de $u(x, t)$ con la condición (4.11). A diferencia de (4.8) y (4.9), aquí no necesitaremos que $p(x)$ sea C^1 . El argumento de la exponencial que aparece en (4.7) puede reescribirse completando cuadrados en la forma

$$\frac{i}{h}G(y) = i\xi^2 + \frac{i}{h}(cx - \frac{c^2}{2}t)$$

donde $\xi(y) = \frac{x-y-cy}{\sqrt{2ht}}$ define un cambio de variable. Esto permite reescribir el denominador de la ecuación (4.7) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}G(y)} dy &= \int_{-\infty}^0 e^{\frac{i}{h}[u_2y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy + \int_0^{\infty} e^{\frac{i}{h}[u_1y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy \\ &= \int_{\frac{x-u_2t}{\sqrt{2ht}}}^{\infty} e^{i[\xi^2 + \frac{i}{h}(u_2x - \frac{u_2^2}{2}t)](\sqrt{2ht})} d\xi + \int_{-\infty}^{-\frac{(x-u_1t)}{\sqrt{2ht}}} e^{i[\xi^2 + \frac{i}{h}(u_1x - \frac{u_1^2}{2}t)](\sqrt{2ht})} d\xi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

El numerador lo reescribimos como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-y}{t}\right) e^{\frac{i}{h}G(y)} dy &= - \int_{-\infty}^0 \left(u_2 - \frac{x-y}{t}\right) e^{\frac{i}{h}[u_2y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy \\ &- \int_0^{\infty} \left(u_1 - \frac{x-y}{t}\right) e^{\frac{i}{h}[u_1y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy + u_2 \int_{-\infty}^0 e^{\frac{i}{h}[u_2y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy + u_1 \int_0^{\infty} e^{\frac{i}{h}[u_1y + \frac{(x-y)^2}{2t}]} dy \end{aligned}$$

para hacer el cambio de variable $s(y) = cy + \frac{(x-y)^2}{2t}$ en las dos primeras integrales y $\xi(y) = \frac{x-y-cy}{\sqrt{2ht}}$ en las dos últimas. Con esto se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-y}{t}\right) e^{\frac{i}{h}G(y)} dy &= \sqrt{2ht} \left\{ u_2 e^{\frac{i}{h}(u_2x - \frac{u_2^2}{2}t)} \int_{\frac{x-u_2t}{\sqrt{2ht}}}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi + \right. \\ &\left. u_1 e^{\frac{i}{h}(u_1x - \frac{u_1^2}{2}t)} \int_{-\frac{(x-u_1t)}{\sqrt{2ht}}}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora definimos $C_i = \frac{x-u_i t}{\sqrt{2ht}}$ y $D_i = u_i x - u_i^2 t$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_2 e^{\frac{1}{2} D_2} \int_{C_2}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi + u_1 e^{\frac{1}{2} D_1} \int_{-C_1}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi}{e^{\frac{1}{2} D_2} \int_{C_2}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi + e^{\frac{1}{2} D_1} \int_{-C_1}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi} \\ &= u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + g(x, t) e^{-\frac{1}{2k}(u_2 - u_1)X}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde

$$g(x, t) = \frac{\int_{\frac{-(x-u_1 t)}{\sqrt{2ht}}}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi}{\int_{\frac{x-u_2 t}{\sqrt{2ht}}}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi}, \quad X = x - Ut, \quad U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2). \quad (4.15)$$

Veremos cómo se comporta la parte real de $u(x, t)$ cuando el parámetro $h > 0$ se aproxima al caso límite $h = 0$. La parte de $u(x, t)$ que tiene la información relevante es $g(x, t)$, y el valor de ésta cuando $h \rightarrow 0$ depende del signo de los límites inferiores de integración. Consideremos t fijo, digamos t_0 . Cuando h tiende a cero tenemos lo siguiente, si:

$$\begin{array}{llll} \frac{x}{t_0} \in (-\infty, u_1) \equiv I_1 & x - u_1 t_0 < 0, \quad x - u_2 t_0 < 0 & g \rightarrow 0 & u \rightarrow u_2 \\ \frac{x}{t_0} = u_1 & x - u_1 t_0 = 0, \quad x - u_2 t_0 < 0 & g \rightarrow \frac{1}{2} & \\ \frac{x}{t_0} \in (u_1, u_2) \equiv I_2 & x - u_1 t_0 > 0, \quad x - u_2 t_0 < 0 & g \rightarrow 1 & u \rightarrow U \\ \frac{x}{t_0} = u_2 & x - u_1 t_0 > 0, \quad x - u_2 t_0 = 0 & g \rightarrow 2 & \\ \frac{x}{t_0} \in (u_2, \infty) \equiv I_3 & x - u_1 t_0 > 0, \quad x - u_2 t_0 > 0 & g \rightarrow \infty & u \rightarrow u_1. \end{array} \quad (4.16)$$

Nótese que para $\frac{x}{t_0} = U$ ($X = 0$) se deduce que $g(x, t_0) = 1$, por lo cual $u(x, t_0) = U$ independientemente de h .

Rescribiremos (4.14) para analizar su comportamiento. Dado que $g(x, t)$ es una función compleja, $g(x, t) = r(x, t) e^{i\theta(x, t)}$ se puede representar en la forma $g = e^{i\psi}$ con $\psi(x, t) = \theta(x, t) - i \log(r(x, t))$, donde $\theta(x, t)$ y $r(x, t)$ son funciones reales. Ahora definimos $\phi = \psi - \frac{(u_2 - u_1)}{2h} X$. Con ello resulta de la ecuación (4.14) que

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + e^{i\phi}} = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{e^{-\frac{i\phi}{2}}}{e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}}.$$

Entonces,

$$u(x, t) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) \frac{e^{-\frac{i\phi}{2}}}{\cos(\frac{\phi}{2})}.$$

Para encontrar las partes real e imaginaria de $u(x, t)$ definimos

$$\begin{aligned} A &\equiv \operatorname{Re}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{u_2 - u_1}{2h} X \right] \\ B &\equiv \operatorname{Im}\left(\frac{\phi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \log(r) \end{aligned} \quad (4.17)$$

para escribir $u(x, t)$ como

$$u(x, t) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)e^B \frac{\cos(A) - i \sin(A)}{\cos(A) \cosh(B) - i \sin(A) \sinh(B)}. \quad (4.18)$$

De donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) &= U + \frac{1}{4}(u_2 - u_1) \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(A) + \sinh^2(B)} \\ \operatorname{Im}(u) &= u_1 + \frac{1}{4}(u_2 - u_1) \frac{\sin(2A)}{\cos^2(A) + \sinh^2(B)}; \end{aligned} \quad (4.19)$$

ambas oscilan debido a las variaciones del ángulo $\theta(x, t)$. Para la parte real se tienen las siguientes cotas: para $B > 0$

$$U + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \tanh(B) \leq \operatorname{Re}(u(x, t)) \leq U + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \coth(B), \quad (4.20)$$

para $B < 0$ las cotas quedan invertidas ya que

$$H(A, B) = \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(A) + \sinh^2(B)}$$

es impar respecto a B .

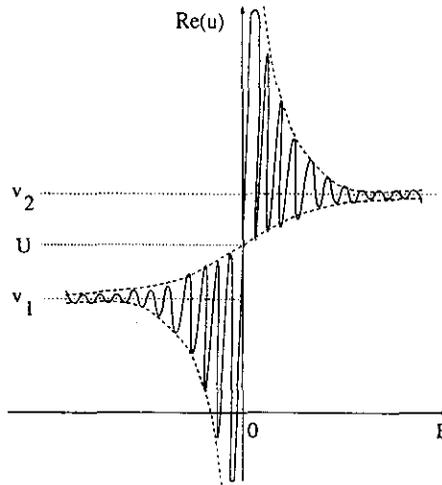


Figura 4.1. Gráfica de la parte real de $u(x, t)$

La variable B determina la envolvente de las oscilaciones de la parte real de $u(x, t)$. Por la continuidad de $g(x, t)$, su módulo r recorre todos los reales positivos; como $B = -\frac{1}{2} \log(r)$,

entonces la función $H(A, B)$ está definida para todo B real. Conforme $\frac{x}{t_0}$ recorre los reales, pasando por los intervalos I_k , $k = 1, 2, 3$, B recorre de $+\infty$ a $-\infty$. Por otra parte, si A tomara todos los valores reales quedaría determinado el carácter oscilatorio de $Re(u)$ para todo (x, t) . En tal caso, las oscilaciones de $Re(u)$ para valores de $\frac{x}{t_0}$ fuera del intervalo $[u_1, u_2]$ serán de amplitud cada vez más pequeña conforme h tiende a cero. Recordemos que para $\frac{x}{t_0}$ en el intervalo I_1 , los extremos de integración del numerador y del denominador en la ecuación (4.15) tienden a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente cuando $h \rightarrow 0$. Eso significa que B tiende a $+\infty$; por (4.16) estamos en la región donde $Re(u)$ tiende asintóticamente a u_2 . Para los valores de $\frac{x}{t_0}$ en el intervalo I_3 la situación es análoga: $Re(u)$ tiende asintóticamente a u_1 . Esto coincide con la aproximación (4.9).

¿Qué información se puede obtener acerca de los valores que toma A ? La variable A se definió en (4.17) como $A = \frac{1}{2}[\theta(x, t) - \frac{1}{2h}(u_2 - u_1)X]$. Sea t fijo. En el punto $x = u_1 t$, g tiende a $\frac{1}{2}$ cuando $h \rightarrow 0$; en $x = u_2 t$, g tiende a 2. En estos puntos, $\theta \approx 0$ cuando $h \rightarrow 0$. La variable X la podemos reescribir:

$$X \equiv x - Ut = (x - u_1 t) - \frac{1}{2}(u_2 - u_1)t = (x - u_2 t) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)t.$$

Entonces,

$$A(x, t) = \frac{1}{2}[\theta(x, t) - (\frac{u_2 - u_1}{2})^2 \frac{t}{h}] \quad \text{en } x = u_1 t,$$

$$A(x, t) = \frac{1}{2}[\theta(x, t) + (\frac{u_2 - u_1}{2})^2 \frac{t}{h}] \quad \text{en } x = u_2 t$$

De manera que al tomar el límite $h \rightarrow 0$, $A(u_1 t, t)$ tiende a $-\infty$ y $A(u_2 t, t)$ tiende a $+\infty$. Por la continuidad de g , A también es continua. Entonces, para x en el intervalo $(u_1 t, u_2 t)$, las oscilaciones también tienen la amplitud dada por las cotas y es creciente porque g tiende a 1 cuando $h \rightarrow 0$. La igualdad en las cotas (4.19) se alcanza para $B > 0$ en $A = (n + \frac{1}{2})\pi$, y para $B < 0$ en $A = 2n\pi$.

Por otro lado, cuando la dispersión domina sobre la no linealidad, el comportamiento está dado principalmente por

$$u_t = i \frac{h}{2} u_{xx}.$$

Su solución para la condición inicial (4.11) puede escribirse en la forma

$$u(x, t) = u_2 - (u_2 - u_1) \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2ht}}} e^{i \xi^2} d\xi.$$

de donde $u(x, t)$ oscila para todo x y para todo t ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(u_2 - u_1) \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{x^2}{2ht}}.$$

Además, cuando $h \rightarrow 0$,

$$u(x, t) \rightarrow \begin{cases} u_2, & \text{si } x < 0, \\ u_1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Con esto vemos que la solución de la ecuación (4.1) con la condición inicial (4.11) siempre oscila, y que en los intervalos I_1 e I_3 las oscilaciones tienden a cero si $h \rightarrow 0$.

Las oscilaciones de la parte real de $u(x, t)$ son no acotadas en la vecindad de $B = 0$ (ver figura 4.1). Veamos cómo se comporta $Re(u)$ al tiempo t fijo para valores distintos de x (véase (4.16) y (4.17)):

- Para $x \in (-\infty, u_1 t)$ fijo, $B(x, t; \sqrt{h})$ tiende a $+\infty$ cuando $h \rightarrow 0$, por lo que estamos en la región donde la envolvente tiende asintóticamente a u_2 . Entonces, $Re(u)$ oscila con amplitud decreciente conforme $h \rightarrow 0$.
- Para $x \in (u_1 t, Ut)$ fijo, el módulo de $g(x, t; h)$ está entre $1/2$ y 1 , que es equivalente a $0 < B < \log(\sqrt{2})$. Al tender h a cero, $B(x, t; \sqrt{h})$ tiende a 0 , sin importar que x y t estén fijos. Esto significa que el valor de $Re(u(x, t))$ oscilará con amplitud creciente y no acotada conforme $h \rightarrow 0$.
- Para $x \in (Ut, u_2 t)$ fijo, la situación es análoga: $-\log(\sqrt{2}) < B < 0$ y B tiende a 0 si $h \rightarrow 0$. Las oscilaciones de $Re(u(x, t))$ son de amplitud creciente y no acotada cuando h tiende a cero.
- Para $x \in (u_2 t, +\infty)$ fijo, B tiende a $-\infty$ cuando $h \rightarrow 0$. En este caso, la amplitud de la envolvente decae a cero y oscila alrededor de u_1 .

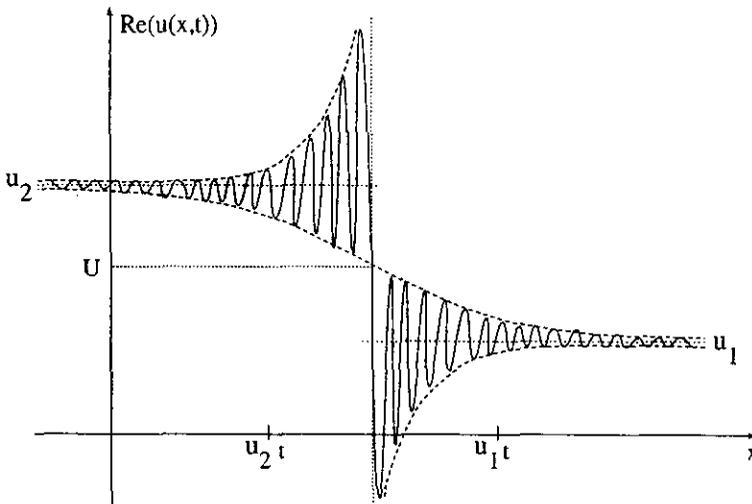


Figura 4.2

Debido a que $\tilde{u}(x, t)$ es univaluada para x en $(-\infty, u_1 t) \cup (u_2 t, \infty)$ al tiempo t , la aproximación (4.10) es válida. Esto muestra que $u(x, t)$ tiende puntualmente a $p(\xi)$ para esos

valores de x cuando $h \rightarrow 0$. Para la condición inicial (4.11), significa que $u \rightarrow u_2$ si $x - u_1 t = \xi < 0$ y $u \rightarrow u_1$ si $x - u_2 t = \xi > 0$. Esto es consistente con el comportamiento descrito en el párrafo anterior.

Como ya se mencionó, para valores de x en el intervalo $(u_1 t, u_2 t)$ ($1/2 < \tau < 2$) la amplitud de las oscilaciones de $Re(u(x, t))$ crece conforme $h \rightarrow 0$. Por esto, $u(x, t)$ no puede converger puntualmente a la solución discontinua de (4.11):

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u_2, & \text{if } x < Ut, \\ u_1, & \text{if } x > Ut \end{cases} \quad (4.21)$$

para $x \in [u_1 t, u_2 t]$. Este es el intervalo donde \tilde{u} es multivaluada al tiempo t . Abajo mostraremos que en este intervalo hay convergencia en promedio al valor correspondiente dado por \tilde{u} en (4.21). Calcularemos el promedio respecto a la variable $X = x - Ut$ en intervalos de la forma $[\alpha, \beta]$. Escribiendo

$$x - u_1 t = X + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)t, \quad x - u_2 t = X - \frac{1}{2}(u_2 - u_1)t,$$

vemos que a x en $(u_1 t, u_2 t)$ le corresponde X en $(-(u_2 - u_1)t/2, (u_2 - u_1)t/2)$. Por lo cual, mostraremos, con α y β arbitrarios, que para $x \in (u_1 t, Ut)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} Re(u) dX = u_2 \quad (4.22)$$

con $[\alpha, \beta] \subset (-(u_2 - u_1)t/2, 0)$; y para $x \in [Ut, u_2 t]$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} Re(u) dX = u_1 \quad (4.23)$$

con $[\alpha, \beta] \subset (0, (u_2 - u_1)t/2)$.

En las ecuaciones (4.19), se mostró que la parte real de $u(x, t)$ es

$$Re(u) = U + \frac{1}{4}(u_2 - u_1) \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(A) + \sinh^2(B)}.$$

Las variables A y B , que fueron definidas en (4.17), son funciones complicadas de x y t . La variable A está relacionada con las oscilaciones de $Re(u)$, y B con la envolvente de las oscilaciones. Respecto al parámetro h , B depende de \sqrt{h} . En cambio, A depende tanto de \sqrt{h} (a través del argumento θ de $g(x, t)$), como de h . Por esto, A varía más rápidamente que B , tal como se observa en las oscilaciones de $Re(u)$ (figura 4.1). B únicamente determina la amplitud de las oscilaciones de $Re(u)$, pero no las oscilaciones mismas. La dependencia en \sqrt{h} nos motiva a considerar B y θ como constantes. De esta manera, $A = \frac{1}{2}[\theta + (u_2 - u_1)X/h]$ es una translación que no modifica el valor de $Re(u)$

al tomar el promedio. Tampoco el factor $(u_2 - u_1)/2$ altera el promedio. Por esta razón tomaremos $A = X/h$ como única variable para aproximar el cálculo de los promedios (4.22) y (4.23).

Queremos evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} Re(u) dX = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(\frac{X}{h}) + \sinh^2(B)} dX. \quad (4.24)$$

El integrando

$$\frac{\sinh(2B)}{\cos^2(z) + \sinh^2(B)} \quad (4.25)$$

es una función periódica, de período π . Por lo cual, usaremos el siguiente lema para evaluar (4.24):

Sea $f(x)$ una función periódica, de período T e integrable en el período. Entonces, para $h > 0$ y $\beta > \alpha$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\frac{X}{h}\right) dX = F \quad \text{donde} \quad F = \frac{1}{T} \int_0^T f(X) dX. \quad (4.26)$$

Para demostrar este resultado, escribiremos el límite anterior como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} \left[f\left(\frac{X}{h}\right) - F \right] dX = 0. \quad (4.27)$$

Con el cambio de variable $y = \frac{X}{h}$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[f\left(\frac{X}{h}\right) - F \right] dX = h \int_{\frac{\alpha}{h}}^{\frac{\beta}{h}} [f(y) - F] dy.$$

Como nos interesa que h tienda a cero, podemos restringirnos a $h < h_0$ con h_0 suficientemente pequeño para que $\frac{\beta - \alpha}{h_0} > T$. Entonces, el intervalo $[\frac{\alpha}{h}, \frac{\beta}{h}]$ contiene un intervalo de la forma $[rT, sT]$, r y s enteros, tal que los intervalos $[\frac{\alpha}{h}, rT]$ y $[sT, \frac{\beta}{h}]$ tienen longitud menor que T , por lo cual

$$\int_{\frac{\alpha}{h}}^{\frac{\beta}{h}} [f(y) - F] dy = \int_{\frac{\alpha}{h}}^{rT} [f(y) - F] dy + \int_{rT}^{sT} [f(y) - F] dy + \int_{sT}^{\frac{\beta}{h}} [f(y) - F] dy.$$

En el intervalo $[rT, sT]$, el área bajo la función $f(y) - F$ es cero porque F es el promedio de f en un período. Nos queda

$$\begin{aligned} |h \int_{\frac{\alpha}{h}}^{\frac{\beta}{h}} [f(y) - F] dy| &= |h \int_{\frac{\alpha}{h}}^{rT} [f(y) - F] dy + h \int_{sT}^{\frac{\beta}{h}} [f(y) - F] dy| \\ &\leq 2h \int_0^T |f(y) - F| dy \rightarrow 0, \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para α y β arbitrarios

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\frac{X}{h}) - F] dX = 0.$$

Debido a este lema, para evaluar (4.24) es suficiente calcular el promedio de la función (4.25) en un período de longitud π . Calcularemos el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(z) + \sinh^2(B)} dz. \quad (4.28)$$

El integrando es de la forma

$$\frac{b}{\cos^2(z) + c}.$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dz} [\arctan(c \cot(z))] = \frac{-\frac{c}{c^2-1}}{\cos^2(z) + \frac{1}{c^2-1}}.$$

La única constante para la cual se recupera el integrando (4.25) es $c = \coth(B)$. Para verificarlo es suficiente escribir $\frac{1}{c^2-1} = \sinh^2(z)$ y despejar c . De esta manera se obtiene que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(z) + \sinh^2(B)} dz = -\frac{1}{\pi} \arctan(\coth(B) \cot(z)) \Big|_0^{\pi} = 1. \quad (4.29)$$

Esto significa que el promedio del integrando en el intervalo $[0, \pi]$ es 1. Para $x \in [u_1 t, Ut]$, el módulo de $g(x, t)$ es menor que 1, es decir que B es positivo. Pero si $x \in [Ut, u_2 t]$, B es negativo ($r > 1$). Como el integrando (4.25) es impar respecto a B , entonces el límite en (4.29) es igual a -1 cuando B es negativo. Esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{\sinh(2B)}{\cos^2(\frac{X}{h}) + \sinh^2(B)} dX = \begin{cases} 1, & \text{si } B > 0, \\ -1, & \text{si } B < 0. \end{cases}$$

En consecuencia, por la ecuación (4.24)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} Re(u) dX = \begin{cases} u_2, & \text{si } B > 0, \\ u_1, & \text{si } B < 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

La convergencia en promedio a (4.21) que obtuvimos es válida para $|B| \geq \delta > 0$. Sabemos que para $x = Ut$ ($X = 0, B = 0$), $u(x, t) = U$. Aún hace falta mostrar que en la vecindad del choque $X = 0$, el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(u) dX$$

es continuo. Sin embargo, hasta aquí dejaremos el análisis de la solución $u(x, t)$ de la ecuación (4.1) con la condición inicial (4.11) cuando $h \rightarrow 0$.

Ahora estudiaremos cómo se comporta la solución de la ecuación de Dobrokhotov (4.1) cuando $h \rightarrow 0$ al considerar una condición inicial $u(x, 0) = p(x)$ positiva con un solo máximo, como la mostrada en la figura 4.3.

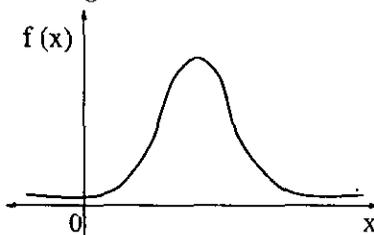


Figura 4.3

Para ello necesitamos obtener una aproximación de u . En lugar de buscarla para la ecuación (4.1), lo haremos para la de Schrödinger $v_t = i\frac{h}{2}v_{xx}$, cuya solución está dada por (4.5). Después usaremos la transformación de Cole-Hopf para obtener la solución de (4.1). Por ahora buscaremos una aproximación asintótica de

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kG(y)} dy \quad (4.31)$$

cuando $h \rightarrow 0$. La aproximación depende únicamente de los puntos estacionarios de $G(y)$. Es de notar que tanto la fase de u como la de v dependen de $G(y)$ (ver (4.5) y (4.7)). Como los puntos estacionarios y satisfacen $x = y + p(y)t$, el número de ellos correspondientes al punto (x, t) está determinado por las intersecciones de las características de

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (4.32)$$

En lo sucesivo, denotaremos por \tilde{u} a la solución de la ecuación anterior. En el semiplano $t \geq 0$ tenemos dos regiones: la región Ω (lo sombreado en la figura siguiente) corresponde a valores de x y t donde \tilde{u} es multivaluada; \tilde{u} toma un solo valor en el complemento.

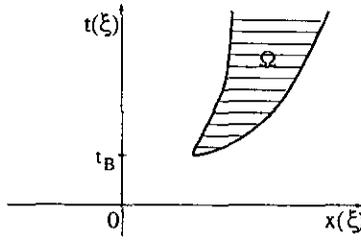


Figura 4.4

Fuera de la región Ω , las características no se intersectan. A cada punto (x, t) de esa región le corresponde sólo un punto estacionario. En tal caso, la aproximación asintótica dada por el método de la fase estacionaria es la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iG(y)} dy \sim \sqrt{\frac{2\pi h}{|G''(\xi)|}} e^{i\left[\frac{G(\xi)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi))\frac{\pi}{4}\right]}, \quad (4.33)$$

para cada punto estacionario ξ .

Volviendo a la ecuación (4.5) y usando (4.33), para puntos (x, t) donde $t \leq t_B$ se tiene que

$$v(x, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ht}} I(h) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi)|}} e^{i\left[\frac{G(\xi)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi))\frac{\pi}{4}\right]}. \quad (4.34)$$

Para un tiempo t_0 posterior a t_B , la recta $t = t_0$ intersecta la región Ω en el intervalo $[x_2(t), x_1(t)]$ (figura 4.4 y 4.5). Fuera de este intervalo \tilde{u} sólo toma un valor, toma dos valores en los extremos del intervalo y tres valores en el interior. Recordemos que hay un punto estacionario asociado a cada valor de \tilde{u} .

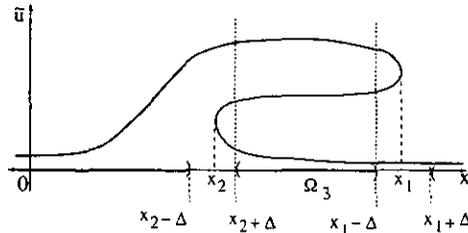


Figura 4.5

Para distinguir las diferentes contribuciones de (x, t_0) definiremos los siguientes intervalos: $\Omega_1 = (-\infty, x_2 - \Delta)$, $\Omega_2 = (x_2 - \frac{\Delta}{2}, x_2 + \frac{\Delta}{2})$, $\Omega_3 = (x_2 + \Delta, x_1 - \Delta)$, $\Omega_4 = (x_1 - \frac{\Delta}{2}, x_1 + \frac{\Delta}{2})$, $\Omega_5 = (x_1 + \Delta, \infty)$ donde Δ es un número positivo arbitrariamente pequeño. Todos estos

intervalos dependen del tiempo. Para x en los intervalos $\Omega_1 \cup \Omega_5$ le corresponde un punto estacionario ξ , por lo cual éste contribuye a $v(x, t_0)$ en la forma dada por (4.34). Por lo tanto, de la ecuación (4.9) se tiene que

$$u(x, t) \rightarrow \bar{u} \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0$$

para los puntos (x, t) en el complemento de Ω .

Para cada valor x en $\Omega_3(t_0)$, le corresponde tres puntos estacionarios distintos $\xi_k(t_0)$. $k = 1, 2, 3$. Como $G''(\xi) = 0$ se cumple únicamente en la frontera de Ω , los puntos ξ_k son ceros de G de primer orden. Ahora tenemos tres contribuciones:

$$v(x, t_0) \sim \sum_{k=1}^3 \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|G''(\xi_k)|}} e^{i\left[\frac{G(\xi_k)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi_k))\frac{\pi}{4}\right]}. \quad (4.35)$$

Veamos cuál es la contribución de x en $\Omega_2(t_0)$. A $x = x_2$ le corresponde dos puntos estacionarios ξ^1 y ξ^2 . Para x en el intervalo $(x_2, x_2 + \Delta)$ están asociados tres puntos estacionarios que los denotaremos por $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$ y $\xi_1^{(2)}$. Cuando $x \rightarrow x_2$ los puntos $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$ tienden a $\xi^{(1)}$ (figura 4.6).

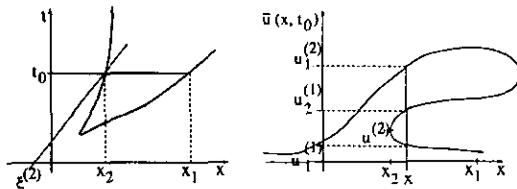


Figura 4.6 Estructura de los puntos estacionarios

Si se observa la figura anterior, hay dos puntos $(x(\xi_0), u_i^{(1)})$ ($i = 1, 2$) que se aproximan a $u^{(1)}$ cuando $x \rightarrow x_2$; en cambio, a $u^{(2)}$ sólo se aproxima $u_1^{(2)}$. Con esta descripción se explica el origen de las contribuciones para $x = x_2$. La contribución de $\xi^{(2)}$ es de la forma mostrada en (4.33).

Para obtener la segunda contribución (proveniente de $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$), transformaremos $G(y)$ en una función lo más simple posible que preserve la estructura de esos puntos. Ambos son ceros simples de $G'(y)$ que están en una vecindad pequeña de $x_2(t)$. Por esta razón, se propone un cambio de variable de la forma

$$G(y) = \tau(s) \equiv a_0 + \sigma s - \frac{1}{3}s^3 \quad (4.36)$$

donde $\xi^{(2)}$ corresponde a $s = 0$. Las constantes a_0 y σ se determinan de la siguiente manera: $\tau'(s)$ tiene dos ceros simples en $\pm\sigma^{1/2}$, entonces evaluando $\tau(s)$ se tiene

$$G(\xi_1^{(1)}) = \tau(\sigma^{1/2}) = a_0 + \frac{2}{3}\sigma^{3/2}$$

$$G(\xi_2^{(1)}) = \tau(-\sigma^{1/2}) = a_0 - \frac{2}{3}\sigma^{3/2}.$$

De lo anterior se encuentra que

$$a_0 = \frac{1}{2}[G(\xi_1^{(1)}) + G(\xi_2^{(1)})]$$

$$\sigma = \left\{ \frac{3}{4}[G(\xi_1^{(1)}) - G(\xi_2^{(1)})] \right\}^{2/3}. \quad (4.37)$$

Con el cambio de variable $G(y) = \tau(s)$,

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{\frac{i}{h}\tau(s)} ds$$

donde $f(s) = \frac{dy}{ds} = \frac{\tau'(s)}{G'(y)}$. (4.38)

Para mantener la regularidad de $I(h)$, el numerador y el denominador de $f(s)$ deben tener ceros del mismo orden. Los puntos estacionarios $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$ son ceros de primer orden de $G(y)$, al igual que sus puntos correspondientes $\pm\sigma^{1/2}$ lo son para $\tau(s)$. Esto es otra razón por la cual $\tau(s)$ se eligió de grado cúbico. Entonces la aproximación a primer orden para la ecuación (4.38) es

$$I(h) \sim -f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}\tau(s)} ds. \quad (4.39)$$

Esta aproximación es válida para valores pequeños de σ , esto es para $\xi_1^{(1)} \approx \xi_2^{(1)}$. La integral de la derecha en la ecuación anterior se expresa en términos de la función de Airy

$$\text{Ai}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda z - z^3/3} dz.$$

aplicando el cambio de variable $s = ih^{1/3}t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}\tau(s)} ds = ih^{1/3} e^{\frac{i}{h}\tau_0} \int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-\sigma h^{-2/3}t - \frac{1}{3}t^3} dt = -2\pi h^{1/3} e^{\frac{i}{h}\tau_0} \text{Ai}(-\sigma h^{-2/3}). \quad (4.40)$$

De la ecuación (4.39) aún falta evaluar $f(0)$. Con la hipótesis de que $f(s)$ es regular y que varía lentamente en la vecindad de $s = 0$, se puede escribir de manera aproximada como

$$f(0) \approx f(+\sigma^{1/2}) \approx f(-\sigma^{1/2}).$$

Como $\tau(s)$ y $G(y)$ se anulan a primer orden en $\pm\sqrt{\sigma}$ y $\xi_{1,2}^{(1)}$ respectivamente, usaremos la regla de L'Hôpital para evaluar $f(s)$ (Ec.4.38):

$$h_1 \equiv \frac{dy}{ds} \Big|_{s=\sqrt{\sigma}} = \lim_{s \rightarrow \sqrt{\sigma}} \frac{\tau'(s)}{G'(y)} = \lim_{s \rightarrow \sqrt{\sigma}} \frac{\tau''(s)}{G''(y) \frac{dy}{ds}} = \frac{\tau''(\sqrt{\sigma})}{G''(y_1) h_1}$$

$$h_2 \equiv \frac{dy}{ds} \Big|_{s=-\sqrt{\sigma}} = \lim_{s \rightarrow -\sqrt{\sigma}} \frac{\tau'(s)}{G'(y)} = \lim_{s \rightarrow -\sqrt{\sigma}} \frac{\tau''(s)}{G''(y) \frac{dy}{ds}} = \frac{\tau''(-\sqrt{\sigma})}{G''(y_2) h_2}$$

Entonces,

$$h_1 = \sqrt{\frac{-2\sigma^{1/2}}{G''(\xi_1^{(1)})}} \quad \text{y} \quad h_2 = \sqrt{\frac{2\sigma^{1/2}}{G''(\xi_2^{(1)})}}.$$

Finalmente se obtiene

$$v(x, t) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi_1^{(2)})|}} e^{i\left[\frac{\sigma(\xi_1^{(2)})}{h} + \text{sgn}(G''(\xi_1^{(2)}))\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ht}} \{h_1 + h_2\} \pi h^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{h} a_0} Ai(-\sigma h^{-\frac{2}{3}}) \quad (4.41)$$

al considerar la contribución del punto $\xi_1^{(2)}$ y la contribución de los puntos estacionarios $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$ que colisionan (véase la figura 4.6).

A manera de resumen, escribiremos la aproximación asintótica de la solución $v(x, t)$ de la ecuación (4.5):

Para $t < t_B$ (ec.4.34),

$$v(x, t) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi)|}} e^{i\left[\frac{\sigma(\xi)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi))\frac{\pi}{4}\right]}.$$

Para $t > t_B$ fijo, la aproximación depende del intervalo Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, donde esté x :

Si $x \in \Omega_1 \cup \Omega_5$,

$$v(x, t) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi)|}} e^{i\left[\frac{\sigma(\xi)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi))\frac{\pi}{4}\right]}.$$

Si $x \in \Omega_2 \cup \Omega_4$ (ec.4.35),

$$v(x, t) \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi_1^{(2)})|}} e^{i\left[\frac{\sigma(\xi_1^{(2)})}{h} + \text{sgn}(G''(\xi_1^{(2)}))\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ht}} \{h_1 + h_2\} \pi h^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{h} a_0} Ai(-\sigma h^{-\frac{2}{3}}).$$

Si $x \in \Omega_3$ (ec.4.41),

$$v(x, t_0) \sim \sum_{k=1}^3 \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t|G''(\xi_k)|}} e^{i\left[\frac{\Omega(\xi_k)}{h} + \text{sgn}(G''(\xi_k))\frac{\pi}{4}\right]}.$$

Vimos que en los intervalos Ω_1 y Ω_5 , la convergencia es puntual. En la siguiente parte, se mostrará que $u(x, t)$ converge débilmente (en promedio) en el intervalo Ω_3 .

Consideremos x y t fijos. Para x en el intervalo Ω_3 , hay tres puntos estacionarios $\xi_n(x, t)$, $n = 1, 2, 3$. Definimos las funciones

$$\psi_n(x, t) = G(\xi_n) + \text{sgn}(G''(\xi_n))\frac{\pi}{4}h.$$

Además definimos $F(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t)$ como el cociente de las aproximaciones asintóticas de las integrales que aparecen en (4.7):

$$F = \frac{|G''(\xi_1)|^{-1/2}(\frac{x-\xi_1}{t})e^{\frac{i}{h}\psi_1} + |G''(\xi_2)|^{-1/2}(\frac{x-\xi_2}{t})e^{\frac{i}{h}\psi_2} + |G''(\xi_3)|^{-1/2}(\frac{x-\xi_3}{t})e^{\frac{i}{h}\psi_3}}{|G''(\xi_1)|^{-1/2}e^{\frac{i}{h}\psi_1} + |G''(\xi_2)|^{-1/2}e^{\frac{i}{h}\psi_2} + |G''(\xi_3)|^{-1/2}e^{\frac{i}{h}\psi_3}} \quad (4.42)$$

de manera que

$$u(x, t) \sim F\left(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t\right). \quad (4.43)$$

La función $F(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t)$ es continua y 2π -periódica en las variables $\frac{\psi_n}{h}$, $n = 1, 2, 3$. Entonces podemos expandir F en serie de Fourier:

$$F\left(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{klm}(x, t) e^{\frac{i}{h}(k\psi_1 + l\psi_2 + m\psi_3)}$$

con los coeficientes $A_{klm}(x, t)$ dados por

$$A_{klm}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t\right) e^{\frac{i}{h}(k\psi_1 + l\psi_2 + m\psi_3)} d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3.$$

Nos interesa saber si $F(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t)$ converge en promedio para valores de x tales que $\tilde{u}(x, t)$ con $u(x, 0) = p(x)$ es multivaluada, tal como ocurrió con la condición inicial (4.11). Usando el lema de Riemman-Lebesgue, al tomar el siguiente límite con $\beta > \alpha$ arbitrarios

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} F\left(\frac{\psi_1(x, t)}{h}, \frac{\psi_2(x, t)}{h}, \frac{\psi_3(x, t)}{h}; x, t\right) dX$$

solamente queda el término correspondiente a $k = l = m = 0$. Aunque haya contribuciones de los puntos estacionarios de $k\psi_1(x, t) + l\psi_2(x, t) + m\psi_3(x, t)$, éstas no son significativas porque son de orden $h^{\frac{1}{2}}$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} F\left(\frac{\psi_1(x, t)}{h}, \frac{\psi_2(x, t)}{h}, \frac{\psi_3(x, t)}{h}; x, t\right) dX = \int_{\alpha}^{\beta} A_{000}(x, t) dX.$$

La función $A_{000}(x, t)$ es el promedio de $F(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t)$ en el cubo $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$:

$$A_{000}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{\psi_1}{h}, \frac{\psi_2}{h}, \frac{\psi_3}{h}; x, t\right) d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3.$$

Esto muestra que la solución $u(x, t)$ de la ecuación de Dobrokhotov converge débilmente (en promedio) a $A_{000}(x, t)$ cuando $h \rightarrow 0$. El límite débil $A_{000}(x, t)$ es una integral triple sobre un compacto que depende continuamente de los parámetros x y t ; por lo tanto, $A_{000}(x, t)$ es continua en (x, t) .

En resumen, cuando $h \rightarrow 0$, la solución de (4.1) tiende puntualmente a la solución (4.10) en los intervalos Ω_1 y Ω_5 . En el intervalo Ω_3 , la solución de (4.1) converge débilmente cuando $h \rightarrow 0$. Resta por estudiar la convergencia de la solución en los intervalos Ω_2 y Ω_4 .

APENDICE

Método de máximo descenso

El método de máximo descenso se utiliza para obtener la principal contribución de integrales convergentes del tipo

$$f(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda h(z)} dz$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Suponemos que $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas en algún dominio que contiene al contorno C ; $g(z)$ y $h(z)$ no dependen de λ . La idea del método es deformar el contorno C a uno que pase por el punto z_0 donde la parte real de $h(z)$ alcanza el máximo y decrece lo más rápido posible a lo largo de ese contorno. De manera que al integrar en una vecindad de z_0 , se tenga la contribución más importante de $f(\lambda)$.

Sea $h(z) = \phi(x, t) + i\psi(x, t)$. El máximo relativo $z_0 = x_0 + iy_0$ de $h(z)$ está dado por $\nabla\phi(x_0, y_0) = 0$. Por otro lado, las partes real e imaginaria de $h(z)$ son analíticas en cierto dominio D , por lo cual satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta y} \quad \frac{\delta\phi}{\delta y} = -\frac{\delta\psi}{\delta x}.$$

Entonces, $\nabla\psi(x_0, y_0) = 0$ y

$$h'(z) = \phi_x + i\psi_x = 0 \quad \text{en } z = z_0.$$

Por el teorema del módulo máximo, ϕ y ψ no pueden tener un máximo (o un mínimo) en el dominio de analiticidad de $h(z)$. Como $h'(z) = 0$, entonces z_0 debe ser un punto silla de $h(z)$. Supongamos que $h''(z_0) \neq 0$. * De nuevo, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisface

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0.$$

De aquí tenemos que las líneas $\phi = \text{constante}$ y $\psi = \text{constante}$ son ortogonales. Nos interesa la dirección en la cual ϕ decrece lo más rápido posible: ésta es la dirección de $\nabla\phi$, que es perpendicular a las curvas de nivel $\phi = \text{constante}$. Por lo tanto, ϕ cambia lo más rápido posible a lo largo de las líneas $\psi = \text{constante}$. Sin embargo, hay dos de estas curvas porque z_0 es un punto silla. Para elegir la curva de máximo descenso que pasa por z_0 , basta ver en cuál de las dos

$$\phi(x, t) < \phi(x_0, t_0).$$

* Con los cambios adecuados, el método puede aplicarse a puntos silla de orden mayor.

Veamos cómo obtener una aproximación asintótica para $f(\lambda)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Expandemos en serie de Taylor alrededor del punto silla z_0

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

y escribimos $h''(z_0) = ae^{i\alpha}$ y $z - z_0 = re^{i\theta}$, ($a > 0, r > 0$). Entonces,

$$h(z) = \phi(x, t) + i\psi(x, t) = \phi(x_0, t_0) + i\psi(x_0, t_0) + \frac{1}{2}ar^2e^{i(2\theta+\alpha)} + O(r^3)$$

de donde las partes real e imaginaria de $h(z)$ son

$$\phi = \text{Re}(h(z)) = \phi_0 + \frac{1}{2}ar^2 \cos(2\theta + \alpha) + O(r^3)$$

$$\psi = \text{Im}(h(z)) = \psi_0 + \frac{1}{2}ar^2 \sin(2\theta + \alpha) + O(r^3).$$

Para r pequeñas, las curvas $\phi \sim \phi_0$ que se obtienen al tomar $\cos(2\theta + \alpha) = 0$ son tangentes a las rectas determinadas por tal condición:

- 1) $\theta = -\frac{\alpha}{2}$ junto con $\theta = \pi - \frac{\alpha}{2}$
- 2) $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ junto con $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

La región $\phi < \phi_0$ corresponde a $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ y $\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

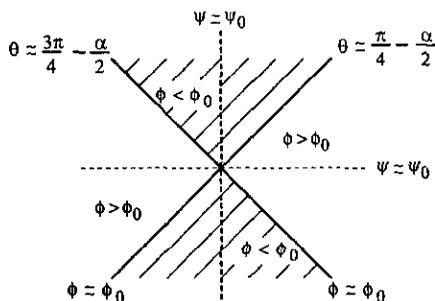


Figura 1

Hay que notar que las oscilaciones del término $e^{i\lambda\psi}$ reducen su efecto si ψ es constante en la vecindad de z_0 . Esto sucede alrededor de z_0 (r pequeña) con la condición $\sin(2\theta + \alpha) = 0$ ($a, r \neq 0$) que determina las dos rectas ortogonales:

- 1) $\theta = -\frac{\alpha}{2}$ junto con $\theta = \pi - \frac{\alpha}{2}$
- 2) $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ junto con $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

De ellas, la segunda recta está en la región $\phi < \phi_0$; a esta recta es tangente la curva $\psi = \psi_0$, para la cual ϕ decrece de manera más rápida.

Ahora usando el teorema de Cauchy podemos deformar el contorno C a la trayectoria $\psi = \psi_0$ de máximo descenso. En tal curva en la vecindad de z_0 ,

$$h(z) - h(z_0) = \phi(z) + i\psi(z) - \phi(z_0) - i\psi(z_0) = \phi(z) - \phi_0.$$

Por estar sobre la trayectoria de máximo descenso, a orden cuadrático

$$0 > \phi(z) - \phi_0 = h(z) - h(z_0) = \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2,$$

por lo que $h''(z_0) < 0$. Por esto, definimos una nueva variable real

$$h(z) - h(z_0) = -s^2 \tag{1}$$

para s real, la cual determina implícitamente a z como función de s . Entonces,

$$f(\lambda) = e^{\lambda h(z_0)} \int_{s_a}^{s_b} e^{-\lambda s^2} g(z(s)) \frac{dz}{ds} ds$$

donde s_a y s_b corresponden a los extremos del contorno original bajo la transformación $s = s(z)$. Dado que la contribución dominante de $f(\lambda)$ proviene de la vecindad de $s = 0$ correspondiente a z_0 , podemos tomar $g(z) \sim g(0)$ como primera aproximación. En una vecindad pequeña de z_0 ,

$$-s^2 = h(z) - h(z_0) = \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2 + O(s^2).$$

De lo cual,

$$t = \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}}s + O(s^2),$$

$$g(z(s)) = g(0) + g'(0) \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}}s + O(s^2).$$

Así

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= e^{\lambda h(z_0)} \int_{s_a}^{s_b} [g(0) + g'(0) \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}}s + O(s^2)] e^{-\lambda s^2} \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}} ds \\ &= e^{\lambda h(z_0)} \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}} \int_{s_a}^{s_b} [g(0) + O(s)] e^{-\lambda s^2} ds \\ &= g(0) e^{\lambda h(z_0)} \sqrt{\frac{-2}{h''(z_0)}} \int_{s_a}^{s_b} e^{-\lambda s^2} ds + e^{\lambda h(z_0)} O\left(\int_{s_a}^{s_b} s e^{-\lambda s^2} ds\right). \end{aligned}$$

Cuando $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\int_{s_a}^{s_b} e^{-\lambda s^2} ds \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Entonces

$$f(\lambda) = g(0)e^{\lambda h(z_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda h''(z_0)}} + e^{\lambda h(z_0)} O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Por lo que la principal contribución está dada por

$$f(\lambda) \sim \int_C g(z)e^{\lambda h(z)} dz \sim g(0)e^{\lambda h(z_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda h''(z_0)}}.$$

CONCLUSIONES

Al inicio de este trabajo, nos propusimos entender el efecto de la difusión y de la dispersión en una onda de choque. Para ello, trabajamos con la ecuación

$$u_t + uu_x = 0. \quad (1)$$

con condición inicial $u(x, 0) = p(x)$. En el primer capítulo, utilizamos la estructura de las características para comprender la formación de ondas de choque. Estas aparecen por la existencia de intervalos donde la condición inicial es decreciente. Consideramos condiciones donde sólo se produce una onda de choque.

Para entender el efecto de la difusión, analizamos la ecuación de Burgers (3.5) debido a que ésta combina no linealidad y difusión en la forma más simple. Para la dispersión estudiamos la ecuación de Dobrokhotov (4.1). Ambas ecuaciones se resuelven en forma exacta (ec. (3.7) y (4.7) usando la transformación de Cole-Hopf. En el tercer capítulo, vimos que la difusión es un mecanismo que aproxima continuamente la discontinuidad de la solución \tilde{u} de (1) para la condición inicial (4.11). En este caso, como para $u(x, 0) = A\delta(x)$, La franja de transición alrededor del choque es más angosta mientras menor sea el parámetro μ del término difusivo en (3.5).

Al introducir la dispersión se encuentra un comportamiento radicalmente distinto al del efecto difusivo. La solución $\tilde{u}(x, t)$ al tiempo t es multivaluada en un intervalo, que denotaremos I . Primero estudiamos la solución $u(x, t)$ de la ecuación de Dobrokhotov con la condición de escalón. En este caso, los cálculos se hicieron explícitamente. El comportamiento de $Re(u(x, t))$ varía dependiendo del intervalo donde se encuentra x . Esto se describe en la página 8. Al tiempo t , $Re(u(x, t))$ converge puntualmente en el complemento de I (4.9). Las oscilaciones de $Re(u(x, t))$, para x en I y t fijo, crecen en amplitud y la envolvente es no acotada. Mediante el lema en (4.26) se probó que hay convergencia en promedio para x en el intervalo I al tiempo t . Para $x \in I$, el promedio de las oscilaciones antes del choque converge a u_2 , y después del choque a u_1 . De esta manera, se mostró que la solución $u(x, t)$ converge, aunque en distintos sentidos, a la solución discontinua de (1) que se contruye con la propiedad de áreas iguales. En este trabajo no se demostró la continuidad del límite débil de $u(x, t)$ para dispersión pequeña, en el caso del escalón. porque hizo falta analizar el comportamiento en vecindades arbitrariamente pequeñas en el punto medio de I .

En cuanto a la condición inicial más general del tipo mostrado en la figura 4.3 se obtuvo la aproximación asintótica de la solución $v(x, t)$ de la ecuación de Schrödinger. En la página

(54) y anteriores, se muestra cuál es la aproximación dependiendo del número de puntos estacionarios $\xi(x, t)$ correspondientes a (x, t) . Para la aproximación asintótica de $u(x, t)$ hay que tomar derivada logarítmica de $Re(u(x, t))$. De nuevo, fuera del intervalo I , donde la solución de (1) es multivaluada, la solución de la ecuación de Dobrokhotov tiende a la solución de (1) puntualmente. En el intervalo I el comportamiento es más complicado. Mostramos que la solución de la ecuación de Dobrokhotov converge débilmente en un subintervalo propio de I . Quedó por analizar lo que sucede en los extremos del intervalo I .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Courant, R., y John, Fritz. *Introduction to Calculus and Analysis, Vol II*. John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Dobrokhotov, S. Yu., Maslov V.P., y Tsketkov, V.B. *Problem of the reversal of a wave for the model equation $v_t + vv_{xx} - \frac{i\hbar}{2}v_{xx} = 0$* . Translated from *Matematicheskie Zametki*. Vol.51. No.6. p.p. 143-147. Junio. 1992.
- [3] Felsen, L.B., y Marcuvitz, N. *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice Hall. 1973.
- [4] Gurevich, A.V., and Pitaevskii, L.P. *Nonstationary structure of a collisionless shock wave*. *Sov. Physics. JETP*. Vol.38. No.2. Febrero. 1974.
- [5] Haberman, R. *Mathematical models, Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*. *Classics in Applied Mathematics* 21.
- [6] John, Fritz. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag. 1978.
- [7] Lax, P.D., y Levermore, C.D., *The small dispersion limit of the Korteweg de Vries equation. I, II, III*. *Comm. Pure Appl. Math.* 36, 1983. p.p 253-290, 571-594, 809-830.
- [8] Lebedev, N.N. *Special functions & their applications*. Dover. 1972.
- [9] Murray, J.D. *Asymptotic Analysis*. Springer-Verlag. 1984.
- [10] Whitham, G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley. 1974.