UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"MODELOS MATEMATICOS PARA LA DETERMINACION DE COORDENADAS GEOGRAFICAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA

P R E S E N T A :

BOLIVAR HERRERA SANCHEZ

CD. UNIVERSITARIA. 1997

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-070/92

Señor
BOLIVAR HERRERA SANCHEZ
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. GERMAN GARCIA GONZALEZ**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA.**

"MODELOS MATEMATICOS PARA LA DETERMINACION DE COORDENADAS GEOGRAFICAS"

INTRODUCCION
I. CONCEPTOS GENERALES DE GEODESIA
II. METODOS MATEMATICOS PARA LA OBTENCION DE LAS COORDENADAS GEOGRAFICAS
III. SOLUCION POR PROGRAMAS PARA CALCULADORA
IV. ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 9 de mayo de 1995.
EL DIRECTOR

ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS GMP*nll

INTRODUCCIÓN

Al realizar la investigación sobre los diferentes métodos para determinar las coordenadas geográficas de un punto (B) desconocido, por medio de otro vértice (A) conocido, sabiendo la distancia entre estos dos vértices y el acimut de la línea que los une, me di cuenta que era necesario plantear algunos aspectos de la Geodesia Práctica; esto es, definir los conceptos generales y básicos de la Geodesia, sin los cuales no sería posible comprender la explicación y desarrollo de las fórmulas necesarias para la obtención de la latitud, la longitud, el acimut, etc. Para comprender esta investigación era necesario definir qué era la Elipse Meridiana, la compresión polar, los diferentes tipos de elipsoides conocidas, etc. Por lo cual me aboqué en la primera parte a dar los conceptos básicos de la Geodesia, para luego pasar a dar las fórmulas más conocidas para encontrar la obtención de las coordenadas geográficas, así como sus desarrollos matemáticos para la obtención de dichas coordenadas.

Todos estos métodos de cálculo tendientes a facilitar el transporte de las coordenadas geográficas, han ocupado a generaciones de Geógrafos y Geodestas, que idearon brillantes e ingeniosos procedimientos sin detrimento de la precisión final. Hoy en día con el desarrollo de la informática y las telecomunicaciones, se facilitó enormemente la solución al problema del posicionamiento terrestre, lo cual ha traído como consecuencia que los métodos descritos queden en el ámbito de la Geodesia Clásica, ya que actualmente el problema se resuelve generalmente recurriendo a los métodos propios de la geometría plana, derivados del empleo sistemático de sistemas de representación conformes que pasan del elipsoide al plano, o bien en ciertos momentos a la geometría tridimensional. Sin embargo no deja de ser interesante conocer los métodos de cálculo para obtener las coordenadas geográficas, los cuales nos permitirán entender a la Geodesia y tener un panorama más amplio sobre esta ciencia, específicamente sobre el tema que expongo.

Desde sus inicios la Astronomía y la Geodesia han estado íntimamente ligadas; ya que todos los astrónomos se interesaron por la forma y el tamaño de la Tierra, lo cual es el principal objeto de la Geodesia; de hecho, pocas ramas de la ciencia están tan intrínsecamente unidas como las anteriores, así la Astronomía Geodésica o de Posición puede estudiarse indistintamente en una u otra disciplina. Los progresos habidos en la Astronomía teórico-práctica y en la Mecánica Celeste han acelerado y mejorado el desarrollo de los procedimientos geodésicos, destacando los avances introducidos en la instrumentación y metodología relativas a la obtención de las coordenadas latitud y longitud, correcciones del posicionamiento estelar y las relacionadas a los satélites artificiales (GPS) y con los radiotelescopios (ULBI). Estas dos últimas aportaciones de la Mecánica Celeste y de la Astronomía permiten la determinación precisa de puntos sobre la superficie terrestre en unos términos impensables hace tan sólo veinte años. En esta tesis he hecho mención a este tipo de adelantos, los cuales expongo al final. Ahora, es bien importante aclarar que lo resumido en este trabajo fue hecho por diferentes autores y maestros de Geodesia, en diferentes épocas, que abarcan desde el siglo pasado hasta los apuntes de "Geodesia Geométrica" dados por el Ing.. Medina Peralta (1974).

Lo anterior produjo que en los ejercicios desarrollados y en la deducción de fórmulas haya diferencias en cuanto a la elipsoide usada para determinar las incógnitas buscadas; otra diferencia notable está en el manejo de los datos conocidos, con diferentes tipos de variables, de acuerdo al autor del cual se hable.
Así que es necesario comprender que el cambio en el uso de variables no es con motivo premeditado; también es importante hacer notar que los valores de los factores geodésicos usados en las fórmulas están dados, por diferentes autores, de acuerdo a la elipse escogida por ellos (los autores) para el desarrollo de sus fórmulas. Esta tesis tiene como finalidad despertar el interés por la Geodesia, por el tema por desarrollar ó como consulta.

Si se logra despertar interés por la Geodesia entre algunos compañeros, mediante este tema de tesis, será una alta y personal satisfacción ... ¡ojalá se pueda cumplir este objetivo!.

Cabe aclarar que los procedimientos para la realización de cálculos fue hecho de la manera tradicional, usando logaritmos para facilitar los cálculos; sin embargo, en la actualidad este procedimiento (uso de logaritmos), está totalmente superado, recurriéndose a la obtención de los valores naturales proporcionados, bien sea por las máquinas electrónicas de cálculo u ordenadores, medio de cálculo universalmente aceptado.

INDICE

III. MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA LA OBTENCIÓN DE COORDENADAS GEODÉSICAS

I. CONCEPTOS GENERALES DE LA GEODESIA

I.1) DEFINICIÓN, DIVISIONES Y PROPÓSITOS DE LA GEODESIA.

La Geodesiá es la ciencia que comprende todos los procedimientos aplicables a la determinación de la figura y dimensiones de la Tierra.

Por su etimología la palabra Geodesia quiere decir , división de tierras (DESIA: división y GEO: Tierra) y es el significado que tenía entre los griegos, los cuales designaban con esta palabra la ciencia que se ocupa de la medición y división de la superficie de terreno. En la actualidad ya no comprende esta ciencia la'medición de tierras de corta extensión , sino únicamente de las grandes extensiones de Tierra, tomándose en cuenta la forma esferoidal de la Tierra y ejecutándose el trabajo con instrumentos mucho más precisos que los que se emplean en las operaciones topográficas.

La principal aplicación de la Geodesia consiste en la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra. La Geodesia, en efecto, unida a la Astronomía, da los medios de medir y configurar las grandes divisiones naturales del globo terrestre como los continentes y los mares; determina la forma, magnitud y dirección de las cordilleras, y traza el curso de ríos; establece limites convencionales de los estados; y apoya a la construcción de "proyecciones" o cartas geográficas. La Geodesia acompaña otras veces a la Geología y a la Física en sus investigaciones respecto de la estructura, estado actual del interior de nuestro planeta; y aún se atreve a acercarse con ellas (la Geología y la Física) al origen de los tiempos, estableciendo hipótesis fundadas respecto de la forma, naturaleza y estado que debió presentar la Tierra. Mucho antes de la aparición del hombre y todos los seres que hoy la habitan.

DIVISIÓN DE LA GEODESIA

1) **Geodesia Matemática o Esferoidal**.- Estudia los métodos para determinar o resolver los problemas geodésicos sobre la superficie del elipsoide.

2) **Geodesia de Posición** .-Estudia los métodos para determinar exactamente la posición relativa (posición geográfica) de los puntos situados sobre la superficie terrestre mediante la realización de mediciones angulares, lineales y diferencias de elevación (triangulación, trilateración, poligonación y nivelación).

3) **Geodesia Astronómica**.- Considera los métodos para determinar la latitud, longitud y los acimuts a partir de las observaciones de los cuerpos celestes.

4) **Geodesia Física o Dinámica**.- Estudia los métodos para determinar el valor de la aceleración de la gravedad, estas determinaciones son importantes para conocer la forma de la Tierra.

5) **Geodesia Satelital o Cósmica**.- Estudia los métodos para resolver problemas fundamentales de la Geodesia usando satélites artificiales. Así mismo estudia los cuerpo celestes en su influencia gravitacional sobre la Tierra.

6) **Geodesia Superior**.- Estudia y generaliza los resultados obtenidos en las otras ramas de la Geodesia y con las mediciones de arco de meridiano de la superficie del Geoide, la desviación vertical, las anomalías de la gravedad, la compensación isostática y todos los demás trabajos necesarios para llegar a un cierto número de conclusiones e hipótesis sobre la forma y dimensiones de la Tierra, constitución interna de la misma y la mayor o menor rigidez de la corteza terrestre.

LOS PROPÓSITOS DE LA GEODESIA SON:

a) Determinación de la forma y dimensiones de la Tierra para lo cual realiza:

   1) La medida exacta de una línea llamada base de varios kilómetros de longitud.

   2) La determinación de la latitud y longitud de uno de los extremos de la base, así como el acimut astronómico de la misma.

   3) La ampliación de la base por medio de una Triangulación.

   4) El cálculo de esa triangulación hasta llegar a las coordenadas geográficas de los vértices de la triangulación.

b) Estudio del campo gravitacional terrestre.
c) Estructura interna de la Tierra.
d) Determinación de diferencias del nivel del mar.
e) Estudio del movimiento de los polos terrestres.
f) Determinación de las coordenadas de los puntos de las redes Nacionales y Mundiales.

I.2) BOSQUEJO HISTÓRICO

FORMA DE LA TIERRA .- La idea relativa a la forma de la Tierra ha variado con los siglos.
La evolución del conocimiento de la forma de nuestro planeta se hizo lentamente. Las primeras nociones de su convexidad probablemente las adquirieron los fenicios, por haber sido navegantes que emprendieron grandes viajes.

Con los filósofos griegos anteriores a los pitagóricos, apareció la primera idea de que la Tierra estaba aislada en el espacio, pero no se concebía que fuera redonda, como una esfera, solo con Pitagóras (siglo VI a de J.C.), y su escuela, comienza a enseñarse que la Tierra es esférica y que se encuentra aislada en el espacio. La idea de que la Tierra es esférica, se fundaba en que, la sombra que proyectaba la Tierra sobre la Luna, en los momentos de un eclipse, se veía limitada por una curva circular. Así fue como desde más de 500 años antes de nuestra era, se dedujo la forma de la Tierra y su aislamiento.

Aunque la idea de la esfericidad no dejo de creerse durante la Edad Media, si languideció y fue perdiendo su credibilidad hasta un mínimo y la idea de la superficie plana, otra vez prevaleció.
Con la reedición de la Geografía de Ptolomeo (siglo II D.C.), y el Renacimiento que siguió al siglo XV la representación de la Tierra fue nuevamente la esfera.

Al final del siglo XVII la idea del achatamiento polar debido a la rotación, fue dada por Newton.
En esta época, Maraldi y Domingo Cassini midieron un arco de 8'30'' a través de Francia y se vio que el grado no tenía la misma longitud en todas las latitudes, si no que iba disminuyendo hacia los polos. Antes de que se hiciese esta medida, ya Newton había descubierto el principio de la Gravitación Universal y Huygens había expuesto la teoría sobre la fuerza centrífuga, con lo cual se produjo una revolución en las ideas científicas imperantes en el siglo XVII. Newton afirmó, que de acuerdo a sus teorías la Tierra tenia que estar aplanada en los polos. Como toda idea nueva, la expuesta por Newton encontró fuerte oposición entre los sabios de aquel tiempo, oposición que se vio reforzada por los resultados obtenidos en la medida hecha por Cassini, en la cual, las longitudes de los grados iban disminuyendo hacia los polos. A pesar de que estos resultados no estaban en contradicción con las teorías de Newton, éste reforzó sus argumentos con los resultados que se obtuvieron con la expedición de Richer en Cayena, los cuales indicaban que la gravedad iba disminuyendo de los polos al Ecuador hecho que se explicaba por la existencia de la fuerza centrifuga, lo cual era una prueba de que a causa de ella (la fuerza centrífuga) tenía que haberse achatado La Tierra en su origen.

Con el objeto de dilucidar el punto de discusión, la Academia de Ciencias de París dispuso que se midiesen dos arcos que estuviesen a muchos grados de latitud uno del otro; y para esto se mando la expedición al Perú y otra a Laponia, las cuales ejecutaron las medidas en 1735 y 1736, el resultado de ellas vino a dar el triunfo a Newton, pues se encontró que las magnitudes de los grados iban creciendo hacia los polos. Después se repitió la medida hecha por Cassini, encontrándose con que se habian cometido errores, que fueron causa de las primeras conclusiones.

En Alemania se comenzaron los trabajos geodésicos en el año de 1802, habiéndose ejecutado el primero en Prusia, bajo la dirección de Von Zach en Hannover, midió Gauss un arco en 1821, y esté trabajo es notable por haberse aplicado el método de "mínimos cuadrados" por primera vez, el cual aunque expuesto por Lagrange en 1805 y por Adrián en 1808, debe a Gauss su completo desarrollo pues este en 1808 publico varios artículos en los cuales estableció la teoría de los errores de observación, exponiendo la manera de aplicar este al cálculo de una triangulación.

Se multiplicaron las medidas de Arcos Terrestres tanto meridianos como oblicuos y los valores de la Tierra se fueron mejorando progresivamente. Mientras las medidas Francesas de los siglos XVII y XVIII sirvieron para calcular los elipsoides de Bessel (1841) y de Clarke (1866), las medidas norteamericanas, en las que México tomo parte, han servido para calcular el elipsoide de Hayford.(1921).

I.3) FORMAS Y DIMENSIONES DE LA TIERRA

El conocer las formas y dimensiones de la Tierra, es fundamental, para representar en una carta geográfica, los datos de campo. En los levantamientos topográficos o geodésicos los datos que se obtienen se refieren al terreno mismo, es decir los ángulos son propiamente ángulos diedros y los lados son arcos terrestres, por la pequeñez en los lados en un levantamiento topográfico se considera a los ángulos como planos y los lados como rectos, en cambio en un levantamiento geodésico los ángulos son esféricos y los lados son curvos, como es necesario conocer la superficie sobre la cual han de proyectarse los valores más probables de los ángulos y los lados, se hace necesario conocer, la forma y dimensiones de la Tierra. Hay dos formas para este conocimiento:
a) Por los resultados de la Geodesia Matemática que proporciona el valor de la longitud a diferentes latitudes o b) empleando la Geodesia Dinámica la cual nos da a conocer la intensidad de la pesantez en diferentes lugares.

Con los procedimientos geodésicos se han obtenido los valores de los semiejes obtenidos por varias autoridades. En los Estados Unidos y en México se usa generalmente el elipsoide de Clarke de 1866 cuyas medidas son:

(a)	RADIO ECUATORIAL	6,378,206.40 m
(b)	SEMIEJE POLAR	6,356,583.80 m
	RADIO DE LA ESFERA DE IGUAL ÁREA	6,370,997.20 m
	ÁREA DE LA TIERRA	510,900,000.00 Km^2
	CIRCUNFERENCIA ECUATORIAL	40,075.00 Km.
	COMPRESIÓN POLAR	1/295

OTRAS	a	b	
ELIPSOIDE DE WALBECK	6,376,746	6,355,785	1/304
ELIPSOIDE DE SCHMIDT	6,376,959	6,355,523	1/297
ELIPSOIDE DE CLARKE (1866)	6,378,206	6,356,584	1/295
ELIPSOIDE DE BESSEL (1841)	6,377,397	6,356,079	1/299
ELIPSOIDE DE HAYFORD (1921)	6,378,388	6,356,912	1/297
ELIPSOIDE DE HELMERT (1921)	6,378,200	6,356,818	1/298

La Tierra es un elipsoide de tres ejes: uno polar y dos ecuatoriales : estos últimos poco diferentes entre si. Sin embargo, a causa de la falta de datos suficientes, se ha continuando considerando la Tierra como un elipsoide de revolución.
En realidad, cuando se habla de la determinación de las dimensiones de la Tierra, se quiere decir, que se trata de encontrar las dimensiones del esferoide que más se aproxima al Geoide.

Ya que hablando rigurosamente, la forma exacta de la Tierra no es la de ningún sólido geométrico sino que tiene forma propia y única, sin embargo en la mayoría de las operaciones Geodésicas se pueden calcular los diversos elementos sin error apreciable considerando a la Tierra como un elipsoide generado por una elipse generatriz que gira alrededor del eje polar, por tanto las coordenadas de los vértices de una triangulación se calculan referidas a esta esferoide y en las operaciones de alta precisión se reducen posteriormente al Geoide.

II. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DEL ELIPSOIDE

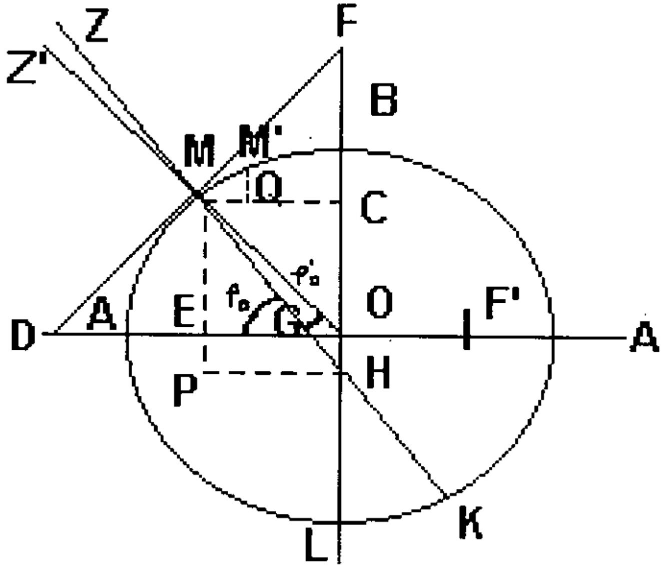


FIGURA 1

Z =	CENIT GEOGRÁFICO	O	ASTRONÓMICO
Z' =	CENIT GEOCÉNTRICO	OM	
$\widehat{MGA}$ =	LATITUD GEOGRÁFICA	φ	
$\widetilde{MOA}$ =	LATITUD GEOCÉNTRICA	φ'_0	
MH =	NORMAL MAYOR	N	
MG =	NORMAL MENOR	n	
$\overline{MO}$ =	RADIO	R	
$\overline{OF'}$ =	SEMIDISTANCIA FOCAL	OF	

II.1). EJES APLANAMIENTO Y EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSOIDE

En la figura número 1, la elipse generatriz esta dada por el plano "BALA", que no es más que un meridiano terrestre y las secciones perpendiculares al eje polar son círculos llamados paralelos. El mayor de estos círculos es el Ecuador, cuyo radio es el semieje mayor "CA" de la elipse generatriz .
Los valores que tomaremos pertenecen a la elipsoide de Beseel (1841):

RADIO ECUATORIAL	OA=a= 6,377,397 m
RADIO POLAR	OB=b= 6,356,079 m

Se le llama aplanamiento o compresión polar a la diferencia de los semiejes referida al semieje mayor como unidad. Designando por alfa el aplanamiento , se tendrá:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad \text{..} \quad (1)$$

y si en esta expresión sustituimos los valores de a y b obtendremos:

$$\alpha = 0.0033427 = \frac{1}{299.2}$$

se llama excentricidad "e" a la distancia del centro de la elipse a uno de los focos, tomando como unidad el semieje mayor.

$$e = \frac{OF}{a} \quad \text{..} \quad (2)$$

Por la propiedad de la elipse que nos dice que el cuadrado del semieje mayor a, es igual a la suma de los cuadrados del semieje menor b y la semidistancia focal :

$$OF = c \; ; \; (a^2 = b^2 + c^2)$$

$$OF = c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{......................} \quad (3)$$

por lo tanto sustituyendo la ec. (2) en la ec. (3)

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

ó bien

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ .... } (4)$$

sustituyendo los valores precedentes.

$$e = \sqrt{\frac{(6377397)^2 - (6356079)^2}{(6377397)^2}} = 0.08169$$

ó

e^2 = 0.00676847 (CLARKE)

e^2 = 0.0066743 (BESSEL)

Del valor encontrado se puede concluir que hay una mínima diferencia entre la forma real de la Tierra a la de una esfera. En efecto por el valor del aplanamiento se ve que esté no es más de 21 km. Mientras que el valor del radio medio de la Tierra pasa de 6,300 km. De aquí se infiere que en muchos casos puede suponerse a la Tierra esférica sin tener un error de importancia.

$$\alpha = 6300000 \text{ m}\left(\frac{1}{299.2}\right) = 21,056 \approx 21 \text{ km}$$

cualquiera de las expresiones (1) y (4) nos permitirá simplificar de los cálculos a uno de los ejes, remplazandoló por la compresión polar o por la excentricidad, pues de la ec.(4) se deduce:

$$e^2 = 1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$$\therefore\ b^2 = a^2\left(1 - e^2\right) \text{ .... } (5)$$

ó de la ec. (1)

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

$$\alpha a \doteq a - b$$

$$b = a(1-\alpha)$$

$$\therefore \quad b^2 = a^2(1-\alpha)^2 \text{ .... } (6)$$

Nótese de paso que si se elimina a b entre estas 2 ecuaciones y se desarrolla la resultante se encontrara la siguiente relación entre la excentricidad y aplanamiento, obsérvese, igualando ec (5) y ec (6) .

$$\begin{aligned}
a^2(1-e^2) &= a^2(1-\alpha)^2 \\
1-e^2 &= (1-\alpha)^2 \\
-e^2 &= (1-\alpha)^2-1 \\
e^2 &= 1-(1-\alpha)^2 \\
e^2 &= 1-[(1^2-2\alpha+\alpha^2)] \\
e^2 &= 1-1+2\alpha-\alpha^2 \\
e^2 &= 2\alpha-\alpha^2
\end{aligned}$$

Y puesto que la compresión polar es una pequeña fracción (0.00347). Su cuadrado casi siempre podrá despreciarse, se podrá inferir que "el cuadrado de la excentricidad es aproximadamente igual al doble de la compresión"

Ahora sustituiremos los valores de la ec. (5) en la ecuación de la elipse con centro en el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes cartesianos y el eje focal esta sobre el eje x :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2$$

sustituyendo la ec (5) por (b^2) obtenemos:

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - e^2\right)a^2$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(a^2 - a^2e^2\right)$$

$$y^2 = a^2 - a^2e^2 - \frac{x^2a^2}{a^2} + \frac{x^2a^2e^2}{a^2}$$

agrupando :

$$y^2 = a^2(1-e^2) - x^2(1-e^2)$$

$$\therefore y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

II.2). ECUACIÓN DE LA ELIPSE MERIDIANA

Expresaremos ahora las coordenadas rectangulares x e y de un punto M de la superficie de la Tierra en función de los elementos que pueden fijar su posición sobre el meridiano. Si por M se levanta una línea perpendicular a la tangente F D (ver fig. 1) se tendrá la línea vertical HZ del punto M. Esta línea prolongada encuentra la Esfera Celeste en un punto Z, que es el cenit geográfico o astronómico de M, y la prolongación del radio OM marca el cenit geocéntrico Z', el ángulo MGA formado por la normal MG con el Ecuador, se llama latitud Geográfica; y el ángulo MOA formado por el radio con el mismo plano del Ecuador, se llama latitud geocéntrica del punto m.

Las observaciones Astronómicas que se practican con el objeto de dar la posición de un lugar sobre el meridiano, nos proporcionan directamente la latitud geográfica; de manera que este dato es el que introduciremos en los cálculos, pues una vez obtenida, la latitud por medio de la observación directa, servirá como argumento para determinar todos los datos geodésicos correspondientes a ese punto.

Designaremos por φ_0' su latitud geocéntrica y por "R" el radio central MO. Llamaremos "N" a la normal mayor del punto M, que es la parte MH comprendida desde la superficie de la Tierra hasta el eje polar y "n" a la normal menor MG terminada en el Ecuador.

Los triángulos MHP y MGE dan respectivamente que HP = OE = x y que ME = y :

$$\begin{pmatrix} x = N\cos\varphi \\ \\ y = N\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{.....................................} \quad (8)$$

también del triángulo MOE, resulta:

$$\begin{pmatrix} x = R\cos\varphi' \\ \\ y = R\sin\varphi' \end{pmatrix} \quad \text{.....................................}(9)$$

Ahora buscaremos la forma de calcular las normales N y n con otro sistema de valores de x e y. Para lo cual haremos las siguientes consideraciones. - si el arco AM del meridiano crece un incremento dy, la abcisa tendrá un decremento dx y se formara un triángulo rectángulo MQM' ; en el cual el ángulo en M' es igual a φ, por lo cual se tiene:

$$\tan\varphi = -\frac{dx}{dy} \text{.....................................}(10)$$

Ahora desarrollaremos la ecuación de la elipse meridiano y diferenciando esta ecuación tendremos:

$$\begin{aligned}
y^2 &= (1 - e^2)(a^2 - x^2) \\
y^2 &= a^2 - a^2 e^2 - x^2 + e^2 x^2 \\
2ydy &= 2xdx + 2xe^2 dx \\
ydy &= (e^2 x - x)\, dx \\
ydy &= (e^2 - 1)xdx
\end{aligned}$$

reacomodando términos :

$$ydy = -\, xdx\,(1-e^2)$$

Despejando dx / dy:

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x\left(1-e^{2}\right)}$$

sustituyendo la diferencial dx /dy con la ecuación 10 tenemos :

$$\tan\varphi=\frac{y}{x\left(1-e^{2}\right)}$$

despejando a *y*

$y = x\,(1 - e^2)\tan\varphi$.............................. (11)

sustituyendo en esta última, el valor de *y* con la ecuación (8) y después el valor de *x*, obtendremos:

$$x\left(1-e^{2}\right)\ \tan\varphi = n\sin\varphi$$

$$x=\frac{n\sin\varphi}{\left(1-e^{2}\right)\ \tan\varphi}$$

$$x=\frac{n\cos\varphi}{1-e^{2}}\text{ ....(12)}$$

y para *x* de igual forma, despejando en la ecuación (11) a *x* tenemos:

$$x=\frac{y}{\left(1-e^{2}\right)\ \tan\varphi}\text{ .... (13)}$$

Igualando esta ultima ecuación con la ecuación (8) tendremos:

$$\frac{y}{\left(1-e^{2}\right)\ \tan\varphi}=N\cos\varphi$$

$$y = N\left(1 - e^2\right)\cos\varphi\tan\varphi$$

$$y = N\left(1 - e^2\right)\cos\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

$$y = N\left(1 - e^2\right)\sin\varphi \;.........(13')$$

Por lo tanto nos quedaran estas dos ecuaciones 13 y 13' para un nuevo sistema que nos permitirá calcular las normales.

II.3). NORMAL MAYOR .- Si en la ecuación de la elipse meridiano introducimos el valor de x dado en la ecuación 8, y el último valor dado a 'y' en la ecuación 13' tendremos:

$$y^2 = \left(1 - e^2\right)\left(a - x^2\right)$$

$$\left[N\left(1 - e^2\right)\sin\varphi\right]^2 = \left(1 - e^2\right)\left[a^2 - (N\cos\varphi)^2\right]$$

$$N^2\left(1 - e^2\right)^2\sin^2\varphi = \left(1 - e^2\right)\left(a^2 - N^2\cos^2\varphi\right)$$

SIMPLIFICANDO:

$$N^2\left(1 - e^2\right)\sin^2\varphi = a^2 - N^2\cos^2\varphi$$

$$a^2 = N^2\left(1 - e^2\right)\sin^2\varphi + N\cos^2\varphi$$

$$a^2 = N^2\left[\left(1 - e^2\right)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right]$$

$$a^2 = N^2\left[\sin^2\varphi - e^2\sin^2\rho + \cos^2\varphi\right]$$

Por la identidad: $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$; tenemos:

$$a^2 = N^2\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)$$

Despejando a la normal mayor (N):

$$N^2 = \frac{a^2}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)}$$

$$\therefore\ N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \sin^2 \rho\right)^{1/2}} \text{ ....(14)}$$

El denominador de N entra con mucha frecuencia a las fórmulas Geodésicas, por lo cual se designa por la letra r, esto es:

$$r = \left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{1/2} \text{ .... (14')}$$

Y entonces la expresión de la normal mayor será :

$$N = \frac{a}{r} \text{ .... (15)}$$

II.4). NORMAL MENOR (n) . Sustituyendo los valores de x e y que contienen a n de la ecuación 8, en la ecuación numero 13' tenemos:

$$n \operatorname{sen} \varphi = N\,(1 - e^2)\operatorname{sen} \varphi$$
$$n = N\,(1 - e^2)$$

Pero $N = \dfrac{a}{r}$

por lo tanto:

$$n = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r} \text{.....................................(16)}$$

EJEMPLO 1.

Calcularemos como ejemplo, la normal mayor (N) y la normal menor (n) a la Facultad de Ingenieros de la Ciudad Universitaria (UNAM), cuya latitud es (φ) =19 19'50'. Calculando con el elipsoide de Beseel.

Ejemplo 1

SOLUCIÓN

LOG e^2	=	7.8244057			
LOG sen φ	= +	9.5198512	LOG r	=	- 9.9998411
LOG sen φ	=	9.5198512	LOG a	=	6.8046434
LOG e^2 sen φ	= {	6.86441081	LOG N	=	6.8048023
e^2 sen φ	= {	0.00073132	N	=	6,379,730 m
r^2	=	0.99926867			

Cálculo de la normal menor (n); n = N (1 - e^2):

log N	=	6.8048023
log 1 - e^2	=	9.9970917
log n	=	6.8018940
n	=	6,337,150.2 m

II.5). TRANSFORMACIÓN DE LATITUD GEOGRÁFICA A LATITUD GEOCÉNTRICA Y VICEVERSA.- Ahora deduciremos esta fórmula para lo cual utilizaremos la ecuación (9) y las dividiremos entre si para obtener y/x y la sustituiremos en la ec (13) :

$$\frac{y}{x} = \frac{R\sin\varphi'}{R\cos\varphi'} = \tan\varphi$$

Tenemos que en la ec 13 :

$$x = \frac{y}{\left(1 - e^2\right)\tan\varphi'}$$

Despejando $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \left(1 - e^2\right)\tan\varphi$$

sustituyendo el valor encontrado para y/x

$$\tan\varphi' = \left(1 - e^2\right)\tan\varphi \quad \text{......................} \quad (17)$$

II.6). ÁNGULO VERTICAL

Esta ecuación nos relaciona las latitudes geográfica y geocéntrica, y nos permite calcular una de ellas (las latitudes) conociendo la otra latitud (geocéntrica o geográfica). La diferencia entre las latitudes no es otra más que un pequeño ángulo OMG = ZMZ' , formado por la vertical y la radio, y por lo cual se le llama usualmente "ángulo de la vertical" el cual designaremos como 'v', donde 'v' tiene el valor de:

$$\tan v = \frac{0.5\, e^2 \sin 2\rho}{r^2} \quad \text{........................} \quad (18)$$

Como v es muy pequeño, no hay error de importancia en tomar el arco por su tangente, así como igualar el denominador a uno del cual difiere muy poco, y dividimos entre sen 1" para expresar a 'v' en segundos.

$$v = \frac{0.5\, e^2}{\sin 1''}\sin 2\rho = (2.83780)\sin 2\rho$$

La cantidad contenida en el paréntesis el logaritmo del factor constante:

$$\frac{0.5\ e^2}{\sin 1''}\left(e^2 = 0.0066743\right)$$

EJEMPLO 2

Calculemos la latitud geocéntrica para la facultad de ingeniería C.U. Usando la ecuación (18) :

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
\log\ \tfrac{1}{2} e^2 &= 7.5233757 \\
\log \text{sen } 2\varphi &= 9.7956804 \\
\log -r &= \underline{9.999682} \\
\log \tan v &= 7.319373 \\
v &= 00^\circ\ 07'\ 10''.33
\end{aligned}$$

La fórmula segunda nos daría:

$$\begin{aligned}
\text{CONSTANTE} &= 2.8378000 \\
\log \text{sen } 2\varphi &= \underline{9.7956804} \\
\log v &= 2.63334804 \\
v &= 430.01'' = 07\ 10.01''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= 19^\circ\ 19'\ 50'' \\
v &= \underline{-7'\ 10''} \\
\varphi' &= 19^\circ\ 12'\ 40''
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Con lo expuesto hasta ahora en este capitulo del cálculo de los elementos del elipsoide realizaré un ejemplo más completo de las fórmulas vistas:

Para: $\varphi = 65°$ y elipsoide de Clarke (1866).

$$a = 6'\,378.\,206 \text{ m}$$
$$b = 6'\,356.\,584 \text{ m}$$

Calcule: N, n, ρ', R y $\rho - \rho'$

SOLUCIÓN:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(6'378{,}208)^2 - (6'356{,}584)^2}{(6'378{,}206)^2}$$

$$e^2 = 0.00676847$$

a) Cálculo de N

$$\begin{aligned} \log e^2 &= 7.8304905 \\ \log \text{sen}\, \varphi &= 9.9572757 \\ \log \text{sen}\, \varphi &= 9.9572757 \\ \hline \log e^2 \,\text{sen}^2 \varphi &= 7.77450419 \\ e^2 \,\text{sen}^2 \varphi &= 0.00555958 \\ r^2 &= 0.99444042 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= -\ 9.99878938 \\ \log a &= 6.80469854 \\ \hline \log N &= 6.8034879 \\ N &= 6\ 360\ 451.20 \text{ m} \end{aligned}$$

b). Cálculo de n

$$\begin{aligned} \log N &= 6.80348779 \\ \log (1 - e^2) &= 9.9970505 \\ \log n &= 6.8005384 \\ n &= 6,\ 317,\ 400.\ 68 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Cálculo de φ'

$$\begin{aligned} \log (1 - e^2) &= 9.9970505 \\ \log \tan \varphi &= 0.3313274 \\ \log \tan \varphi' &= 0.3283779 \\ \text{Tan}\, \varphi' &= 2.1299916 \end{aligned}$$

$\varphi' = 64.8506 = 64° \; 51' \; 02.3''$
$\therefore \varphi = 64° \; 51' \; 02.3''$

d). Igualando ecs. 8 y 9, y despejando R:

$$\begin{aligned}
\log N &= 6.8034879 \\
\log \cos \varphi &= 9.6259482 \\
\log N \cos \varphi &= \overline{6.4294361} \\
\log \cos \varphi' &= -9.6283679 \\
\log R &= \overline{6.8010682} \\
R &= 6\,325\,112.8 \text{ m}
\end{aligned}$$

e). $\nu = \rho - \rho'$ (ángulo vertical).

$$\begin{array}{rl}
 & 64° \; 59' \; 60'' \\
- & \underline{64° \; 51' \; 02.3''} \\
\nu = & 00° \; 08' \; 57.7''
\end{array}$$

Nota se ve que en el resultado de N (normal mayor) difiere 35,338.7 m del valor del radio la diferencia es 0.005 O 0.5 %

II.7). RADIO CENTRAL

Aunque la diferencia no es muy considerable, obtendremos el radio de otra manera: en la fig. 1, Del triángulo MOE :

$x = N\cos\varphi$ y $y = n\sin\varphi$, nos queda:

$$R^2 = N^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi$$

Pero $N = \dfrac{a}{r}$ y $n = \dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{r}$, Ecuaciones (15) y (16)

Nos queda: $R^2 = \frac{a^2}{r^2}\cos^2\varphi + \frac{a^2}{r^2}\left(1-e^2\right)\sin^2\varphi$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left[\cos^2\varphi + \left(1-2e^2+e^4\right)\sin^2\varphi\right]$$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2e^2\sin^2\varphi + e^4\sin^2\varphi\right)$$

Por la identidad $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(1-2e^2\sin^2\varphi + e^4\sin^2\varphi\right) \text{..........} \quad (19)$$

Como: $r^2 = \left(1-e^2\sin^2\varphi\right)$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(1-e^2\sin^2\varphi - \varphi^2\sin^2 + e^4\sin^2\varphi\right.$$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^2 - e^2\sin^2\varphi\left(1-e^2\right)\right)$$

$$R^2 = a^2 - \frac{a^2}{r^2}e^2\sin^2\varphi\left(1-e^2\right)$$

$$R^2 = a^2\,\frac{\left(1-e^2\sin^2\varphi\left(1-e^2\right)\right)}{r^2}$$

De lo cual resulta:

$$R = a\left[1 - \frac{e^2\sin^2\varphi\left(1-e^2\right)}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{...........(20)}$$

Esta es la fórmula que se da por lo común a la expresión del radio, pero si se sustituye el valor de r y y se ejecuta la división indicada se obtendrá sucesivamente.

$$R = a\left[1 - e^2\sin^2\varphi\left(1-e^2\right) - e^4\sin^4\varphi\left(1-e^2\right) - e^6\sin^6\varphi\left(1-e^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R = a\left[1 - e^2\sin^2\varphi + e^4\sin^2\varphi - e^4\sin^4\varphi + e^6\sin^4\varphi - e^6\sin^6\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R = a\left[r^2 + \left(e^4\sin^2\varphi + e^6\sin^4\varphi + \ldots\right)\cos^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}$$

Como φ es una pequeña fracción, por lo tanto se podrán despreciar, sin notable error, su cuarta y siguientes potencias, de lo que resulta:

$$R = a\,r \text{...(21)}$$

Que es una expresión suficientemente exacta y más sencilla de la ecuación (19) es posible obtener otra fórmulas casi tan breve, como la ecuación 21 y enteramente exacta. El valor de r da :

$$r^2 = 1 - e^2\sin^2\varphi$$

$$r^4 = \left(1 - e^2\sin^2\varphi\right)^2$$

$$r^4 = 1 - 2\,e^2\sin^2\varphi + e^4\,\text{sen}^4\,\varphi$$

y como los dos primeros términos son idénticos a los contenidos dentro del paréntesis de la ecuación (19) resulta por sustitución:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(1 - 2\, e^2\, \mathrm{sen}^2\, \varphi + e^4\, \mathrm{sen}^2\, \varphi\right)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^4 + e^4\, \mathrm{sen}^2\, \varphi - e^4\, \mathrm{sen}^4\, \varphi\right)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^4 + e^4\, \mathrm{sen}^2\, \varphi\left(1 - \mathrm{sen}^2\, \varphi\right)\right)$$

por la identidad $\cos^2 \varphi = 1 - \mathrm{sen}^2\, \varphi$, por lo tanto tenemos:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(r^4 + e^4\, \mathrm{sen}^2\, \varphi\ \cos^2\ \ \cos^2 \varphi\right.$$

Multiplicando y dividiendo entre 4, separo el argumento

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\ \left(r^4 + \frac{e^4}{4}\right)\ (2\mathrm{sen}\rho\ \cos\varphi)\,(2\mathrm{sen}\rho\ \cos\varphi)$$

Por la identidad $\mathrm{sen}2\ \varphi = 2\mathrm{sen}\ \varphi \cos \varphi$ tengo:

$$R^2 = \frac{a^2}{r^2}\ \left(r^4 + \frac{e^4}{4}\mathrm{sen}^2\, \varphi\right)$$

La ecuación 17 da: $\frac{1}{4}\, e^4\ \ \mathrm{sen}^2\ \ \varphi = r^4 \tan^2 v$, de donde se deduce:

$$R^2 = a^2\ (r^2 + r^2\ \tan^2 v)$$

y por último:

$$R = \frac{ar}{\cos r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

El valor de ' v' es tan pequeño que casi siempre es permitido tomar la unidad por su coseno, en cuyo caso vuelve a resultar la expresión de la ecuación (21) .

Otra forma de calcular el valor del radio de la elipse meridiano es igualando los dos valores de "x" de las ecuaciones (8) y (9) y sustituyendo en el último valor dado a R se tiene:

$$R = \frac{N\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

$$\frac{a\,r}{\cos v} = \frac{\left(\frac{a}{r}\right)\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

$$r^2 = \frac{\cos\varphi\cos v}{\cos\varphi'}$$

Como:

$$R = \frac{a\,r}{\cos v}$$

$$R = \frac{a}{\cos v}\left(\frac{\cos\rho\cos v}{\cos\varphi'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R = a\left(\frac{\cos\rho}{\cos\varphi'\cos v}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Ahora resolvamos el inciso (d) del ejemplo (3) anterior, ya resuelto con la fórmula (20) y tendremos:

log a	6.8046435			
log r	9.9998394			
log ar	6.8044829	....	ar =	6375039^m
cos. v	9.9999991			
R	6.8044838	....	R =	6375052^m

Es importe hacer notar que la diferencia con la ecuación (20) no difiere más que de 21 m el valor exacto de R, cantidad que es insignificante respecto a una magnitud tan considerable, de manera que se adoptará la ecuación (21) como expresión del radio.

EJEMPLO 4

Calcularemos el radio de la elipse meridiana dada por Beseel para la Facultad de Ingeniería (C.U.) $\varphi = 19° \; 19' \; 50''$:

log a =	6.8046434		
log r =	9.9998411		
ar =	6.8044845	.... ar =	6,375,063.28 m

II.8). RADIO DE CURVATURA DEL MERIDIANO ρ

En la elipse, así como en otras curvas de segundo grado, el radio de curvatura es igual al cubo de la normal dividido por el cuadrado de la ordenada correspondiente al foco o el cuadrado del semiparámetro ($\frac{b^2}{a}$) de la curva, cuando la normal es al semieje mayor;

Así:

$$\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2} = \frac{a^3\left(1-e^2\right)^3}{\left(1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \div \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

Pero $\quad \frac{b^2}{a} = a\left(1-e^2\right)$;

$$\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2$$

$$\rho = \frac{a^3\left(1-e^2\right)^3}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{a^2\left(1-e^2\right)^2}$$

$$\rho = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho = \frac{\left(1-e^2\right)}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

Está es la ecuación general del radio de curvatura para todo punto del esferoide terrestre, cuya latitud es φ.

EJEMPLO 5:

Para la Facultad de Ingeniería , se tendrá:

log a	6.8046435	
log $1 - e^2$	9.9970917	
log r^3	- 9.9995183	
log ρ	6.8022169	.... ρ = 6341864m

II.9). TANGENTE, SUBTANGENTE SUBNORMAL

El cálculo de estas líneas se deducen de la Fig. 1

$$\text{Tangente}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots MD = \frac{y}{\cos\varphi} = n \tan\varphi = \frac{a\left(1-e^2\right)\tan\varphi}{r}$$

$$\text{Tangente}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots MF = N\ \cot\varphi = \frac{a\ \cot\varphi}{r}$$

$$\text{Subtangente}\ldots\ldots\ldots\ldots ED = MD\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{a\left(1-e^2\right)\tan\varphi\ \operatorname{sen}\varphi}{r}$$

$$\text{Subnormal}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots EG = n\cos\varphi$$

LA DIFERENCIA DE NORMALES :

$$GH = N - n = \frac{a\,e^2}{r}$$

Distancia del centro de la elipse meridiana a la normal mayor que se encuentra en el plano ecuatorial.

$$OG = \frac{a\,e^2\ \cos\varphi}{r}$$

Distancia del centro de la tierra a la normal mayor en el eje polar .

$$OH = \frac{a\,e^2\ \operatorname{sen}\varphi}{r}$$

II.10). VARIACIONES EN LOS CAMBIOS DE POSICIÓN DEL PUNTO M (fig. 1) con respecto a la latitud y manera en que afecta en las normales N y n y en el radio de curvatura del meridiano, consideraciones:

Cuando la latitud aumenta:

1) Aumenta el valor de las dos normales (N,n)

2) Aumenta el radio de curvatura del meridiano ρ

3) Disminuye el radio central (R)

Cuando la latitud crece hasta los 45° :

1) El ángulo de la vertical (v) llega a su máximo (decrece al aumentar la latitud)

Si suponemos al punto M sucesivamente en el Ecuador, en la latitud media de 45° y en el polo, podremos formar la siguiente tabla de los valores que adquieren las dos normales, el radio central, el radio de curvatura y el ángulo vertical.

	$\varphi = 0$ --	$\varphi = 45°$ --	$\varphi = 90°$ --
NORMAL MAYOR	$N = a$	$N = \dfrac{a}{\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$	$N = \dfrac{a}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
NORMAL MENOR	$n = a(1 - e^2)$	$n = \dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$	$n = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$
RADIO CENTRAL	$R = a$	$R = a\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$R = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$
RADIO DE CURVATURA	$\rho = a(1 - e^2)$	$\rho = \dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\rho = \dfrac{a}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
ÁNGULO DE LA VERTICAL	$v = 0$	$v = \dfrac{0.5\, e^2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right) \operatorname{sen} 1}$	$v = 0$

TABULANDO AHORA CON LOS VALORES DADOS PARA LA ELIPSOIDE DE BESSEL

a = 6,377397
b = 6,356079
e^2 = 0.0066743

CONCEPTO	$\varphi = 0$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 90°$
NORMAL MAYOR (N)	6, 377, 397	6, 388, 064	6, 398, 786
NORMAL MENOR (n)	6, 334, 832	6, 345, 428	6, 356, 079
RADIO CENTRAL (R)	6, 377, 397	6, 336, 747	6, 356, 079
RADIO DE CURVATURA ρ	6, 334, 832	6, 366, 675	6, 398, 786
ÁNGULO VERTICAL (v)	0	690 . 64 ″ 00° 11′ 30.64″	0

Las conclusiones a las cuales llegamos es que en el Ecuador N = R y n = R. Por lo tocante al ángulo vertical (v) se deduce que tanto el Ecuador como en el polo coincide el Zenit Geográfico con el Zenit Geocéntrico. A la latitud media de 45°, el radio central R es igual a ρ con una corta diferencia. Lo cual determina que el radio central a la latitud media (45°) puede suponerse igual al término medio Geométrico entre los radios ecuatorial y polar, o bien:

$$R_{45} = \sqrt{a\,b}$$

II.11). ARCO DE MERIDIANO. La extensión de un arco pequeño del meridiano es igual a la diferencia de latitud de sus extremos multiplicada por el radio de curvatura. Para mayor precisión debe tomarse el radio que corresponde a la latitud del medio del arco.

$ds = \rho\, d\varphi$.. (24)

ds = extensión lineal (expresadas en las mismas unidades que ρ)
ρ = Radio de curvatura del meridiano.

Sí multiplicamos por sen 1" la ecuación 24 se obtendrá el arco de meridiano en segundos:

EJEMPLO 6 : Calcúlese el arco de meridiano en la Facultad de Ingeniería φ = 19° 19′ 50″ para un grado de meridiano.

Log r	= 6.8022118
Log 3600"	= 3.5563025
Log sen 1"	= 4.6855749
Log ds	= 5.0440 892..ds = 110,685.10 m

Si esta cantidad de divide entre 60 se tendrá 1,844.75 m, para 1′ de arco, esto es entre dos puntos del meridiano de México cuyas verticales formen un ángulo 1' de una manera semejante se encontraría el valor para 1" esto es 30.746 m.

La fórmula 24 permite calcular con bastante exactitud la extensión de los arcos del meridiano cuando son pequeños, esto es cuando no exceden del valor de dos o tres grados. (33 Km. aproximadamente)

Cuando el arco no es muy pequeño tenemos:

$$d\rho = \rho_1 - \rho_2 \qquad \Rightarrow \qquad s = \int ds = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho$$

pero

$$\rho = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r^3} \qquad (25)$$

por lo cual tenemos:

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \rho\right)^{\frac{3}{2}}} d\rho$$

Para conseguirlo, desarrollémosla en serie para obtener:

$$s = a\left(1-e^2\right)\int\left(1+\frac{3}{2}e^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{15}{8}e^4 \operatorname{sen}^4\varphi + \frac{35}{16}e^6 \operatorname{sen}^6\varphi + \ldots\right)d\varphi$$

Se tiene, por otra parte:

$$\operatorname{sen.}^2 \varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos. 2\varphi\right)$$

$\text{sen.}^4\ \varphi = \frac{1}{8}\ (3 - 4\cos.2\ \varphi + \cos.\ 4\ \varphi)$

$\text{sen.}^6\ \varphi = \frac{1}{32}\ (10 - 15\cos.2\ \varphi + 6\cos.\ 4\ \varphi - \cos.\ 6\ \varphi)$

Sustituyendo estos valores y haciendo para abreviar:

$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{65}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \ldots\ldots$ log. A = 0.00218214

$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \ldots\ldots$ log. B = 7.7031107

$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \ldots\ldots$ log. C = 5.023664

$D = \frac{35}{512}e^6 + \ldots\ldots$ log. D = 2.30802

La serie anterior se representará así:

$$s = a\left(1 - e^2\right)\int\left(A - B\cos 2\varphi + C\cos 4\varphi - D\cos 6\varphi\right)d\varphi$$

y efectuando la integración, resulta:

$$s = a\left(1 - e^2\right)\left(A\varphi - \frac{1}{2}B\,\text{sen}\ 2\varphi + \frac{1}{4}C\,\text{sen}\ 4\varphi - \frac{1}{6}D\,\text{sen}\ 6\varphi\right)\ldots\ldots(26)$$

Los coeficientes tienen los siguientes valores.

ELIPSOIDE DE BESSEL	ELIPSOIDE DE CLARKE
A = 1.0050372	A = 1.0050093
B = 0.0050479	B = 0.0051202
C = 0.0000106	C = 0.0000108
D = 0.00000002	D = 0.00000002

II.12). ARCO DE PARALELO

En la Fig. 1 se observa que todo punto M de la elipse generatriz describe un círculo que se llama paralelo al Ecuador, siendo OC = x su radio. Por consiguiente, un arco de g grados tendrá una extensión P, que puede calcularse por la siguiente relación:

$$\frac{P}{g} = \frac{\pi}{180^\circ} N \cos \varphi$$

$$P = \frac{\pi}{180^\circ} g N \cos \varphi$$

El cociente $\pi/_{180^\circ}$ expresa el arco 1° en partes de radio, cuyo logaritmo constante, introduciendo en la ecuación anterior, reduce la fórmula a·

P = (8.2418774) g N cos φ

EJEMPLO 7:

Ahora calculemos la extensión en metros de un grado en la Facultad de Ingeniería (UNAM), en este caso g = 1° y p = 19° 19' 50"

Const.	= 8.2418774	
Log N	= 6.8048023	
Log cos p	= 9.9747992	
P	= 5.0214789	P = 105070.0 m

El arco de un minuto será (105070 / 60) 1751.16 m y el de un segundo 29.186 M del elipsoide de BESSEL .
En la tabla No. V se dan los valores del paralelo en metros

Const.	=	8.2418774	
Log N	=	6.8048596	
Log cos p	=	9.9747992	
P	=	5.0215362	P = 105083.9 m

Y el arco de un minuto tiene una extensión de 1751.39m
Y el de un segundo de 29.190m. (ELIPSOIDE DE CLARKE).

II.13). RADIO DE CURVATURA DEL MERIDIANO

Hallaremos el radio de curvatura en el punto M (Fig. 1) por ser de uso frecuente en geodesia el Ru es:

$$Rc = -\frac{1}{K} = -\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$y' = \frac{dy}{dx};\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$Az = u$$

K= Variación en la dirección de la curva y recibe el nombre de curvatura en el punto

Diferenciando dos veces la ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$$

$$2Axdx + 2Bydy + Cxdy + Cxdy + Ddx + Edy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2A + 2B\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2c\dfrac{dy}{dx}}{2By + Cx + E}$$

Sustituidos estos valores en la expresión Ru, darán el radio de curvatura del punto cualquiera de la curva cuyas coordenadas sean x e y; pero como lo que importa es conocer el correspondiente al punto M cuyas coordenadas son:

$$x = 0, y = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r}$$

tendremos introduciendo estos valores y los de los coeficientes A, B, C, etc.

$$A = 1 - e^2\left(1 - \cos^2 Az \cos^2 \varphi\right)$$

$$B = 1 - e^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = e^2 \cos Az\, sen^2 \varphi$$

$$D = \frac{a\, e^2\left(1 - e^2\right)\cos Az\, sen^2 \varphi}{r}$$

$$E = \frac{2a\, e^2\left(1 - e^2\right)\cos^2 \varphi}{r}$$

$$F = \frac{a^2}{r^2}\left(1 - e^2\right)\left(1 + e^2 \cos^2 \varphi\right)$$

Tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-r\left[1 - e^2\left(1 - \cos^2 Az \cos^2 \varphi\right)\right]}{a\left(1 - e^2\right)}$$

En consecuencia el radio de curvatura en el punto M, es:

$$Ru = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r\left(1 - e^2 + e^2 \cos^2 Az \cos\varphi\right.} \quad .....(26)$$

Cuando Az es 0° ó 180° resulta:

$$Ru = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)} = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r^3}$$

Que es en efecto el valor de (ρ) hallado para el radio de curvatura del meridiano. Sí Az = 90° ó Az = 270° se tiene :

$$R_{90} = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r\left(1 - e^2\right)} = \frac{a}{r} = N$$

El radio de curvatura de una sección perpendicular al meridiano es igual a la normal mayor del punto de intersección de los dos planos.
Para facilitar el calculó logarítmico de la fórmula (26) elevemos el denominador al numerador desarrollando hasta la segunda potencia de e, y teniendo presente que:

$$\frac{a}{r} = N$$

Resulta:

$$Ru = N\left(1 - e^2 \cos^2 \rho \cos^2 Az\right) \quad .... (27)$$

Y donde se obtiene la fórmula logarítmico:

$$\log Ru = \log (N - Me^2 \cos^2 \rho \cos^2 Az)$$

Esta fórmula suministra directamente el LOG. de radio de curvatura de la sección cuyo acimut Az, conociendo la normal mayor que corresponde a la misma latitud calculando el logaritmo de la cantidad constante Me^2 se tiene:

$$\log Ru = \log N - (\ 7.46219\ ) \cos^2 \varphi \cos^2 Az ...... \qquad (28)$$

EJEMPLO 8:

Determinemos, por ejemplo, el radio del círculo osculador de la sección que forma un ángulo de 45° sin el meridiano de la Ciudad Universitaria (φ) =19° 19' 50"

Constante	=	7.46219
Cos^2 (φ)	=	9.94959
Cos^2 u	=	9.69897
		7.11075

log N =		6.8042024
	-	0.0012905
log Ru =		6.8035119
$R_{45°}$ =		6,360,802 m

Al final de este capitulo se dan los logaritmos de las normales para todas las latitudes de la República, se calculará con mayor facilidad el radio de curvatura de cualquier sección que tenga Az por acimut.

II.14). REDUCCIÓN DE LÍNEAS GEODÉSICAS A SEGUNDOS.

Sea AB = k una línea Geodésica o sea la distancia más corta que hay entre dos puntos del globo, sobre la superficie de este.
Esta línea es de doble curvatura, puesto que las normales de sus diversos puntos no están en un mismo plano; pero como las mayores líneas geodésicas que se consideran en la práctica común, son muy pequeñas con respecto al radio de la elipsoide, ningún error apreciable se origina de suponer las curvas planas; y así es que las consideremos como rigurosamente tales.

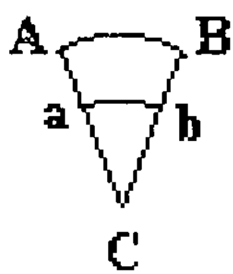


Figura 2

Así la línea geodésica k que une los puntos A y B son de tal pequeñez que se confunde sensiblemente con un arco trazado con un radio CA=Ru (Radio de Curvatura) de su círculo osculador. Si con un arco Ca tomado por unidad, se describe el arco ab = (θ), este arco medirá la amplitud de k y la figura da la proporción 1 : θ :: Ru : k de lo que se obtiene:

$$\theta = \frac{k}{Ru} \quad \text{...} \qquad (29)$$

Esta fórmula nos expresa el Arco (θ) en partes de la unidad con que esta descrito el arco; para expresarlo en segundos únicamente se multiplicarlo por sen 1" y se tiene:

$$(\text{sen}\, 1")\theta = \frac{k}{Ru} \quad \text{..} \qquad (30)$$

Sustituyendo el valor de Ru dado en la fórmula (27) tenemos:

$$\theta = \frac{k}{N\, \text{sen}\, 1"}\left(1 - e^2 \cos^2 Az\right)^{-1}$$

Efectuando operaciones:

$$\theta = \frac{k}{N\, \text{sen}\, 1"} + \frac{k\, e^2 \cos^2 \rho \cos^2 Az}{N\, \text{sen}\, 1"}$$

Haciendo $c = \dfrac{1}{N\, \text{sen}\, 1"}$

y obteniendo el logaritmo de e^2 (constante), tendremos:

$\theta = Ck + (\ 7.82441\ )\ Ck\ \ \cos^2 \varphi \cos^2\ Az$ ..... (31)

EJEMPLO 9:

Como ejemplo calcularemos el ángulo que forman las verticales de dos puntos cuya distancia, reducida al nivel del mar, es $k\ = 36000^m$, con un acimut de 30° y siendo la latitud 21° 30′.

C	8.5095868		Const.	7.82441
k	4.5563025		$\cos^2\ \varphi$	9.93735
	3.00658893	....	....	3.06589
	1163 ″ .83		$\cos^2\ \nu$	9.877506
	5 .04	....	....	0.70271
θ =	1168 ″ .9	= 19′ 28″ .9		

II.15). REDUCCIÓN DE SEGUNDOS A METROS

Este problema, es inverso al anterior, tiene por objeto hallar la extensión de k (línea geodésica) cuya amplitud es (θ), por lo tanto tenemos por la ecuación 23, despejando el arco k

$$k = \theta \text{ Ru sen } 1''$$

Sustituyendo el valor de Ru y el de C, que es lo mismo que despejar a k de la fórmula (24), tenemos:

$$k = \frac{\theta}{c} - (7.82441)\frac{\theta}{c}\cos^2\varphi\cos^2 \text{ Az} \ldots\ldots \qquad (32)$$

EJEMPLO 10:

A la laltiutd de 32° ¿ qué distancia habrá entre dos puntos del meridiano, cuya diferencia de latitud sea θ = 25′ 37 ″ ?

logθ	3.1866739		Const	7.82441
log C	8.5093742		log $\cos^2\varphi$	9.85684
	4.6772997	....	....	4.67730
	$47566^{m}.3$		log $\cos^2$ v Az	9.87506
	171.2	....	....	2.23361
k =	47737.5 m			

Cuando se trate de una línea Geodésica cuyo ACIMUT es nulo, es preferible el uso de la fórmula (16), para lo cual se proporciona una tabla de logaritmo de (ρ) . También haciendo :

$$A = \frac{1}{\rho \text{ sen } 1''}, \text{ se tiene}$$

$$k = \frac{\theta}{A}$$

II.16). TABLAS GEODÉSICAS

ELIPSOIDE DE CLARKE

TABLA No.I

φ	N*	$n = \dfrac{a(1-e^2)}{r}$	φ_0	$R = \dfrac{N\cos\rho}{\cos\rho_0}$	$\rho - \varphi_0$
0°	6378206	6335035.3	00° 00' 00"	6378206.0	0° 00' 00"
5°	6378369	6335198.1	04° 57' 58.7"	6378042.9	0° 02' 01.3"
10°	6378857	6335681.9	09° 56' 01.2"	6377559.4	0° 03' 58.8"
15°	6379652	6336471.9	14° 54' 10.8"	6376768.9	0° 05' 49.2"
20°	6380733	6337544.5	19° 52' 30.9"	6375695.1	0° 07' 29.2"
25°	6382065	6338868	24° 51' 04.6"	6374370.8	0° 08' 55.4"
30°	6383609	6340401.9	29° 49' 54.4"	6372833.9	0° 10' 05.6"
35°	6385319	6342100.4	34° 49' 02.6"	6371133.3	0° 10' 57.4"
40°	6387143	6343912.1	44° 48' 19.6"	6.367441	0° 11' 29.4"
45°	6389026	6345782.2	44° 48' 19.6	6367441.3	0° 11' 40.4"
50°	6390911	6347653.9	49° 48' 29.8"	6365561.5	0° 11' 30.2"
55°	6392739	6349470.4	54° 49' 10.0"	6363735.4	0° 10' 59.0"
60°	6394457	6351176.2	59° 49' 52.4"	6362024.5	0° 10' 07.6"
65°	6396010	6352719.1	64° 51' 02.3"	6360474.4	0° 08' 57.7"
70°	6397352	6354051.9	69° 52' 28.6"	6359131.8	0° 07' 31.4"
75°	6398441	6355133.6	74° 54' 08.7"	6358037.3	0° 05' 51.3"
80°	6399244	6355931	79° 55' 59.6"	6357228.2	0° 04' 00.4"
85°	6399736	6356419.5	84° 57' 57.9"	6356726.7	0° 02' 02.1"
90°	6399902	6356583.9	INFINITO	INFINITO	----------

$$^{*}N = \frac{a}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{1/2}}$$

TABLA II ELIPSOIDE DE BESEEL

φ	N (m)	n	a = 6377397 m R = ar	ρ
0	6377397.0	6334832.3	6377397.0	6334832.3
5	6377558.7	6334992.9	6377235.3	6335314.1
10	6378038.8	6335469.9	6376755.2	6336745.2
15	6378823.1	6336248.9	6375971.2	6339083.1
20	6379888.0	6337306.7	6374906.9	6342258.4
25	6381201.6	6338611.5	6375594.7	6346175.6
30	6382724.2	6340124.0	6372074.2	6350720.6
35	6384410.2	6341798.8	6370391.5	6355754.6
40	6386208.5	6343585.1	6368597.6	6361126.9
45	6388064.9	6345429.0	6366746.9	6366675.5
50	6389922.8	6347274.5	6364895.8	6372232.2
55	6391725.8	6349065.5	6363100.3	6377627.8
60	6393418.9	6350747.3	6361415.2	6382697.3
65	6394950.4	6352268.6	6359891.8	6387285.1
70	6396273.2	6353582.6	6358576.4	6391249.8
75	6397349.9	6354649.1	6357509.3	6394468.7
80	6398138.3	6355435.2	6356722.9	6396842.2
85	6398623.2	6355916.8	6356241.2	6398296.6
90	6398786.5	6356079.0	6356079.0	6398786.4

TABLA III ELIPSOIDE DE CLARKE

A_z	φ	Radio de curvatura R_{az}	Radio mayor $N = \frac{a}{r}$	Radio medio $\rho = R_m$	$r = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}$
0°	0°	6335035.30	6378206.00	6335035.30	1
	10	6336975.22	6378856.97	6336975.22	0.999897947
	20	6342566.49	6380732.50	6342566.50	0.999604041
	30	6351148.82	6383609.20	6351148.83	0.999153582
	40	6361703.05	6387143.30	6361703.05	0.998600736
	50	6372966.77	6390910.66	6372966.78	0.998012073
	60	6383581.53	6394456.91	6383581.53	0.997458594
	70	6392256.59	6397352.21	6392256.59	0.997007166
	80	6397929.43	6399244.10	6397929.44	0.996712407
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	0.996610013
10°	0°	6336328.51	6378206.00	6335035.30	1
	10	6338230.06	6378856.97	6336975.22	0.999897947
	20	6343710.67	6380732.50	6342566.50	0.999604041
	30	6352122.79	6383609.20	6351148.82	0.999153582
	40	6362467.20	6387143.30	6361703.05	0.998600736
	50	6373506.37	6390910.66	6372966.78	0.997458594
	60	6383908.92	6394456.91	6383581.53	0.997458594
	70	6392410.12	6397352.21	6392256.59	0.997007166
	80	6397969.07	6399244.10	6397929.44	0.996712407
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	0.996610018
20°	0°	6340055.11	6378206.00	6335035.30	1
	10	6341846.03	6378856.97	6336975.22	0.999897947
	20	6347007.48	6380732.50	6342566.50	0.999604041
	30	6354928.91	6383609.20	6351148.82	0.999153582
	40	6364668.52	6387143.30	6361703.05	0.998600736

	50	6375060.60	6390910.66	6372966.78	0.998012073
	60	6384851.80	6394456.91	6383581.53	0.997458594
	70	6392852.24	6397352.21	6392256.59	0.997007166
	80	6398083.19	6399244.10	6397929.44	0.996712407
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	0.996610018
30°	0 °	6345773.10	6378206	6335035.30	1
	10	6349260.29	6378856.97	6336975.22	0.99989794
	20	6354928.91	6380732.50	6342566.50	0.99960404
	30	6359232.93	6383609.20	6351148.82	0.99915358
	40	6368044.40	6387143.30	6361703.05	0.99860073
	50	6377443.29	6390910.66	6372966.78	0.99801207
	60	6386296.91	6394456.91	6383581.53	0.99745859
	70	6393529.73	6397352.21	6392256.59	0.99700716
	80	6398258.05	6399244.10	6397929.44	0.99671240
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	0.99661001
40°	0°	6352801.35	6378206.00	6335035.30	1
	10	6354212.90	6378856.97	6336975.22	.999897947
	20	6358280.29	6380732.50	6342566.50	.999604041
	30	6364520.56	6383609.20	6351148.82	.999153582
	40	6372189.74	6387143.30	6361703.05	.998600736
	50	6380368.52	6390910.66	6372966.78	.998012073
	60	6388070.49	6394456.91	6383581.53	.997458594
	70	6394360.99	6397352.21	6392256.59	.997007166
	80	6398472.56	6399244.10	6397929.44	.996712407
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	.996610018
50°	0°	6360297.78	6378206.00	6335035.30	1
	10	6361485.51	6378856.97	6336975.22	.999897947
	20	6364907.67	6380732.50	6342566.50	.999604041

	30	6370157.21	6383609.20	6351148.82	.999153582
	40	6376607.37	6387143.30	6361703.05	.998600736
	50	6383484.44	6390910.66	6372966.78	.998012073
	60	6389958.98	6394456.91	6383581.53	.997458594
	70	6395245.84	6397352.21	6392256.59	.997007166
	80	6398700.85	6399244.10	6397929.44	.996712407
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	.996610018
60°	0°	6367358.26	6378206.00	6335035.30	
	10	6368834.72	6378856.97	6336975.22	
	20	6371148.01	6380732.50	6342566.50	
	30	6375463.03	6383609.20	6351148.82	
	40	6380764.18	6387143.30	6361703.05	
	50	6386415.22	6390910.66	6372966.78	
	60	6391734.59	6394456.91	6383581.53	
	70	6396077.54	6397352.21	6392256.59	
	80	6398915.37	6399244.10	6397929.44	
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.56	
70°	0°	6373125.62	6378206	6335035.30	
	10	6373929.17	6378856.97	6336975.22	
	20	6376244.23	6380732.50	6342566.50	
	30	6379794.93	6383609.20	6351148.82	
	40	6384156.85	6387143.30	6361703.05	
	50	6388806.41	6390910.66	6372966.78	
	60	6393182.82	6394456.91	6383581.53	
	70	6396755.72	6397352.21	6392256.59	
	80	6399090.29	6399244.10	6397929.44	
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.55	
80°	0°	6376895.64	6378206	6335035.38	

	10	6377585.99	6378856.97	6336975.22
	20	6379574.95	6380732.50	6342566.50
	30	6382625.54	6383609.20	6351148.83
	40	6386373.20	6387143.30	6361703.05
	50	6390368.11	6390910.66	6372966.78
	60	6394128.44	6394456.91	6383581.53
	70	6397198.44	6397352.21	6392256.59
	80	6399204.46	6399244.10	6397929.44
	90	6399901.55	6399901.54	6399901.55
90°	0°	6378206.00		
	10	6378856.98		
	20	6380732.51		
	30	6383609.20		
	40	6387143.30		
	50	6390910.66		
	60	6394456.91		
	70	6397352.21		
	80	6399244.11		
	90	6399901.55		

$$R_{AZ} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r\left[1-e^2\left(1-\cos^2 Az\cos^2\rho\right)\right]}$$

$a(1 - e^2) = 6335035.30$ m
$a = 6378206.00$ m
$e^2 = .006768471$

$$R_m = \frac{a(1-e^2)}{r^3}$$

TABLA IV
Logaritmos de r, R y N

LATITUD	LOG. r.	LOG. R	LOG. N	DIF. COMUN POR 1′
15 ° 00′	9. 9999028	6.8045463	6.8044707	2.1
15 ° 30′	8964	5399	7471	2.2
16 ° 00′	8898	5333	7537	2.3
16 ° 30′	8830	5265	7605	2.3
17 ° 00′	8761	5196	7674	2.4
17 ° 30′	8689	5124	7746	2.4
18 ° 00′	8616	5051	7819	2.5
18 ° 30′	8540	4975	7895	2.6
19 ° 00′	8463	4898	7972	2.6
19 ° 30′	8384	4819	8051	2.7
20 ° 00′	8304	4739	8131	2.8
20 ° 30′	8221	4656	8214	2.8
21 ° 00′	9.9998137	6.8044572	6.8048298	2.8
21 ° 30′	8052	4487	8383	2.9
22 ° 00′	7965	4400	8470	2.9
22 ° 30′	7877	4312	8558	3.0
23 ° 00′	7786	4221	8649	3.1
23 ° 30′	7694	4129	8741	3.1
24 ° 00′	7601	4036	8834	3.2
24 ° 30′	7506	3941	8929	3.2
25 ° 00′	7410	3845	9025	3.3
25 ° 30′	7312	3747	9123	3.3
26 ° 00′	7213	3648	9222	3.4
26 ° 30′	7112	3547	9323	3.4
27 ° 00′	• 9.9997011	6.8043446	6.8049494	3.4
27 ° 30′	6908	3343	9527	3.5
28 ° 00′	6803	3238	9632	3.5
28 ° 30′	6697	3132	9738	3.6
29 ° 00′	6590	3025	9845	3.6
29 ° 30′	6482	2917	9953	3.6
30 ° 00′	6372	2808	0062	3.7
30 ° 30′	6263	2698	0172	3.7
31 ° 00′	6152	2587	0283	3.7
31 ° 30′	6040	2475	0395	3.8
32 ° 00′	5926	2361	0509	3.8
32 ° 30′	5812	2247	0623	3.9
33 ° 00′	5696	2131	0739	

TABLA V
Logaritmos de ρ , valores de φ – λ y ángulo de la vertical.
Elipsoide de Bessel

Latitud	Log. ρ	Dif. por 1′	ν = φ – φ′	Dif. por V.	φ – λ	Dif. por
15° 00′	6.8020267	6.4	5′ 44.″3	0.″35	2′ 52.″4	0.″17
15° 30′	0459	6.6	5 54. 7	34	2 57. 5	17
16° 00′	0657	6.8	6 4. 9	34	3 2. 6	17
16° 30′	0861	6.9	6 15. 1	34	3 7. 7	17
17° 00′	1069	7.2	6 25. 1	33	3 12. 7	16
17° 30′	1284	7.3	6 35. 0	33	3 17. 6	16
18° 00′	1504	7.6	6 44. 8	33	3 22. 5	16
18° 30′	1731	7.7	6 54. 5	32	3 27. 4	16
19° 00′	1963	7.9	7 4. 1	32	3 32. 2	16
19° 30′	2199	8.0	7 13. 5	31	3 36. 9	16
20° 00′	2439	8.3	7 22. 8	31	3 41. 6	15
20° 30′	2688	8.4	7 32. 0	31	3 46. 2	15
21° 00′	6.8022940	8.5	7 41. 0	30	3 50. 7	15
21° 30′	3195	8.7	7 49. 9	30	3 55. 1	15
22° 00′	6456	8.8	7 58. 6	29	3 59. 4	15
22° 30′	3721	9.1	8 7. 2	29	4 3. 7	14
23° 00′	3993	9.2	8 15. 6	28	4 7. 9	14
23° 30′	4269	9.3	8 23. 9	28	4 12. 1	14
24° 00′	4549	9.5	8 32. 1	27	4 16. 2	13
24° 30′	4833	9.6	8 40. 1	27	4 20. 2	13
25° 00′	5122	9.8	8 47. 9	26	4 24. 1	13
25° 30′	5416	9.9	8 55. 6	26	4 27. 9	13
26° 00′	5713	10.1	9 3. 1	25	4 31. 7	12
26° 30′	6015	10.1	9 13. 5	25	4 35. 4	12
27° 00′	6.8026318	10.3	9 17. 6	24	4 39. 0	12
27° 30′	6627	10.5	9 24. 6	23	4 42. 5	11
28° 00′	6942	10.6	9 31. 5	23	4 45. 9	11
28° 30′	7260	10.7	9 38. 2	22	4 49. 2	11
29° 00′	7581	10.8	9 44. 7	22	4 52. 4	11
29° 30′	7905	10.9	9 51. 0	21	4 55. 6	10
30° 00′	8232	11.0	9 57. 1	20	4 58. 7	10
30° 30′	8562	11.1	10 3. 1	20	5 1. 6	10
31° 00′	8895	11.2	10 8. 8	19	5 4. 5	09
31° 30′	9232	11.4	10 14. 4	19	5 7. 3	09
32° 00′	9573	11.4	10 19. 8	18	5 10. 0	09
32° 30′	9916	11.6	10 25. 0	17	5 12. 6	09
33° 00′	6.8030264		10 30. 1	17	5 15. 2	

TABLA VI
VALORES DE UN GRADO DE MERIDIANO Y DE PARALELO.
Elipsoide de BESSEL

Latitud	Grado de meridiano	Dif. Por 1′	Grado de paralelo	Dif. por 1′
15° 00′	110637. ᵐ 8	0. ᵐ 17	107538. ᵐ 0	8. ᵐ 47
15° 30′	110642. 8	17	107284. 0	8. 74
16° 00′	110647. 9	17	107021. 9	9. 01
16° 30′	110653. 1	18	106751. 7	9. 28
17° 00′	110658. 4	18	106473. 4	9. 55
17° 30′	110663. 8	19	106187. 0	9. 81
18° 00′	110669. 4	19	105892. 6	10. 08
18° 30′	110675. 2	20	105590. 2	10. 35
19° 00′	110681. 2	20	105279. 7	10. 61
19° 30′	110687. 3	21	104961. 3	10. 88
20° 00′	110693. 4	21	104634. 8	11. 15
20° 30′	110699. 7	21	104300. 4	11. 41
21° 00′	110706. 0	22	103958. 2	11. 67
21° 30′	110712. 5	22	103608. 0	11. 93
22° 00′	110719. 2	23	103250. 0	12. 12
22° 30′	110726. 0	23	102884. 1	12. 46
23° 00′	110732. 9	23	102510. 4	12. 72
23° 30′	110747. 0	24	102128. 9	12. 97
24° 00′	110754. 3	24	101739. 7	13. 23
24° 30′	110761. 7	25	101342. 7	13. 49
25° 00′	110769. 2	25	100938. 1	13. 74
25° 30′	110776. 8	25	100525. 8	14. 00
26° 00′	110784. 5	26	100105. 9	14. 26
26° 30′	110792. 3	26	99678. 2	14. 51
27° 00′	110800. 1	26	99243. 0	14. 75
27° 30′	110808. 1	27	98800. 4	15. 00
28° 00′	110816. 2	27	98350. 3	15. 26
28° 30′	110824. 4	27	97892. 5	15. 51
29° 00′	110832. 7	28	97427. 3	15. 75
29° 30′	110841. 1	28	96954. 7	16. 00
30° 00′	110849. 5	28	96747. 7	16. 24
30° 30′	110858. 0	28	95987. 4	16. 48
31° 00′	110866. 6	29	95492. 9	16. 73
31° 30′	110875. 3	29	94991. 1	16. 95
32° 00′	110884. 1	29	94482. 0	17. 21
32° 30′	110982. 9	29	93965. 7	17. 45

III. MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA LA OBTENCIÓN DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS

III.1). Ideas generales en triangulaciones geodésicas

Para determinar las dimensiones de la Tierra, es necesario primeramente determinar una figura geométrica que se acerque a la forma real de la Tierra y la cual no se conoce. Para decirlo mas claramente lo que se va a decidir no son las dimensiones verdaderas de la Tierra sino las del sólido que más se aproxima a la Tierra. La Tierra tiene una forma, a la cual se llama Geoide.

El Geoide es un cuerpo tal que se puede considerar como una superficie equipotencial normal a la vertical en todos los puntos. No es la configuración del terreno, la cual esta constituida por elevaciones y depresiones, sino la correspondiente a la marea media de los océanos, supuestamente prolongada a través de los continentes por medio de canales angostos que se extienden a través de los continentes.
La figura que han adoptado los Geodestas es el elipsoide de revolución llamado "esferoide" del cual se conocen sus dimensiones aproximadas por observaciones hechas en diversas épocas y países.
Cuando en un país se ejecutan observaciones geodésicas con el objeto de terminar las dimensiones de la Tierra se procede a determinar el tamaño del semieje mayor "a", del elipsoide, así como su excentricidad "e" y se calculan también las correcciones más probables que se deben hacer a dichos elementos del elipsoide.

El método más usado para encontrar estas correcciones, consiste en comparar las latitudes, longitudes y acimutes geodésicos, con los astronómicos. Esto es porque si la superficie del nivel de agua de los océanos fuera esferoidal la vertical que marca el hilo de la plomada y la normal mayor que se supone es perpendicular a la superficie del esferoide coincidirían y la posiciones astronómicas serían iguales a las geodésicas pero si esto no se diera tendrían que resultar diferentes.
Una causa por la cual no coinciden ambas líneas es el relieve del terreno, el cual a consecuencia de las atracciones que ejerce sobre la plomada, hace que esta se desvíe de la dirección de la vertical.

En las triangulaciones geodésicas hechas en la elipsoide, que tienen por objeto el hacer planos de grandes porciones, de la Tierra, como lo son los Continentes y los Estados, y que su objeto final sea en rigor lo mismo que la Topografía, fácilmente se comprende que deben existir notables diferencias entre ellas. Pues en la Topografía se proyectan ortogonalmente los puntos del terreno sobre un plano tangente a la superficie de la Tierra; mientras en la Geodesia la proyección se verifica por medio de líneas convergentes hacia el centro del globo terráqueo, que son las verticales de los puntos.

Las cadenas topográficas constan de triángulos rectilíneos que se resuelven por medio de la trigonometría plana; y las geodésica, por el contrario, se componen de triángulos esferoidicos, trazados en la superficie curva del elipsoide. Hay otra dos diferencias de suma importancia:

Primera, la orientación de una cadena geodésica debe hacerse por procedimientos astronómicos, únicos que pueden suministrar toda la exactitud que se necesita; en segundo lugar, el cálculo de la posición de un punto situado en una superficie plana se determina por medio de sus distancias a dos líneas fijas; mientras que estando situado sobre una superficie curva hay necesidad de adoptar un sistema de coordenadas angulares o esféricas, tales como la longitud y la latitud geográficas, llamadas coordenadas geográficas, referidas a dos planos coordenados que en este caso son el Ecuador y un meridiano.

Definiremos a la latitud de un punto como la distancia angular ó arco de meridiano medido a partir del Ecuador hasta el punto de observación (vértice por conocer).

Las latitudes se cuentan de 0° a 90° partiendo del Ecuador hacia ambos polos (sur ó norte), para diferenciar esta dirección se le agregan en algunos casos los nombres de norte a sur, según los puntos a que pertenezcan. Así decimos por ejemplo, que la catedral de México esta a los + 19° 26' 05.3" de latitud norte, y la ciudad de Santiago de Chile a - 33° 26' 42" latitud sur. Con más frecuencia se designan las latitudes del hemisferio boreal (Norte) con el signo +, y las del hemisferio austral (Sur) con el signo - de
modo que se dice que la latitud de México es de + 19° 26' 05.3" y la de Santiago de Chile - 33° 26' 42" .

El ángulo formado por dos meridianos cualesquiera se llama en general diferencia de longitud y la definiremos como el arco de Ecuador medido a partir del origen (de Greenwich) hasta el meridiano del observador (vértice por conocer).

Las longitudes se cuentan desde 0 hasta 180° tanto al Este como al Oeste, por lo que es preciso indicar la dirección del punto fijado al respecto del meridiano que sirve de origen. También se acostumbra y es preferible por brevedad, señalar a las longitudes occidentales con el signo + , y con signo - las orientales.
Las longitudes geográficas no siempre se expresan en medidas angulares, sino en unidades de tiempo.

Explicaremos brevemente la causa y la ventaja de este modo de contarlas. En virtud del movimiento de rotación del globo terrestre alrededor de su eje, cualquiera de sus puntos emplea 24 horas en describir un círculo paralelo al Ecuador o perpendicular al eje polar, y como este movimiento es uniforme, resulta que la velocidad angular será de 15° por hora. Por otra parte, la diferencia de meridianos, o de longitudes de dos lugares, es el ángulo que forman sus respectivos meridianos; y en consecuencia, puede expresarse por el tiempo que emplea la Tierra en describir la velocidad uniforme que acaba de indicarse.

La reducción de unidades angulares a unidades de tiempo, se hace fácilmente para ello designaremos a "a" un arco cualquiera expresado en medidas angulares, y por "t" expresamos el tiempo, por tanto se tiene la ecuación : $a = 15\ t$. Pero como el coeficiente 15 puede ponerse como 60/4 y así tendremos $a = 60/4\ t$, lo cual indica que para convertir tiempo en arco debe multiplicarse el tiempo por 60 y tomar la cuarta parte del producto.

La multiplicación por 60 equivale a convertir los segundos en minutos y estos en grados, de modo que la operación queda reducida a tomar la cuarta parte de la cantidad dada después de haber convertido los minutos en grados, los segundos en minutos y las fracciones de segundo de tiempo en segundos de arco.

Si por el contrario, se da un arco para reducirlo en tiempo, se multiplicará por cuatro después de haber convertido los grados en minutos, los minutos en segundos y los segundos en fracción decimal.

En los cálculos geodésicos casi siempre se expresan en arco las longitudes, pero generalmente la longitud se expresa en tiempo, en los cálculos astronómicos.

III.2). El propósito del tema por desarrollar es comparar los diferentes métodos de resolución (fórmulas) que existen, para el cálculo de posiciones Geodésicas, de un vértice , en una triangulación cualquiera, esto es su latitud y su longitud, así como el Acimut de uno de uno de los lados que concurren a dicho vértice, para así poder obtener las coordenadas geodésicas de los demás vértices de la triangulación, así como el Acimut directo e inverso de cada uno de los lados de esta triangulación.

Para realizar la comparación de métodos tendré que hacer las siguientes consideraciones; primera, en los levantamientos geodésicos que cubren grandes áreas las posiciones de los vértices se expresan por medio de sus latitudes y sus longitudes. Segunda, antes de calcular la latitud y longitud de un vértice partiendo de las coordenadas de otro, es necesario conocer las dimensiones del esferoide que se toma como representativo de la forma de la Tierra, y tercera es necesario fijar la latitud y longitud de un punto específico, así como el Acimut de las direcciones de ese punto a algunos otros vértices de la triangulación.

El punto seleccionado así como el Acimut de una dirección partiendo de él (el vértice) determina la posición relativa de toda la triangulación con respecto al esferoide adoptado y ello constituye lo que se denomina dato geodésico o "DATUM" .
Por regla se a adoptado el punto situado en MEADES RANCH, KANSAS CITY, USA, por MÉXICO Y CANADÁ (1927) , existen además el Europeo (1950), POSTDAM (ALEMANIA , Elipsoide de Hayford) ; PULKOVO (1946), Pulkovo (URSS, elipsoide de KRASOVSKY) .

La determinación de la latitud y longitud de un punto, así como la del Acimut de una línea constituyen las aplicaciones más importantes de la Astronomía a la Geodesia, pero se comprende fácilmente que no es necesario la medida directa de estos elementos para cada uno de los vértices, porque conocida la posición geográfica de uno sólo y el Acimut de un lado es posible situar los demás vértices y así orientar la cadena, por el enlace íntimo que existe entre todas sus partes.

Para obtener la latitud de un vértice B, conocida la latitud de un vértice A, supondremos a la Tierra esférica y determinaremos en forma analítica las diferencias entre esta superficie y el esferoide para lo cual se tendrán como datos, la distancia reducida al nivel del mar entre los vértices A y B, y el Acimut Astronómico del lado que une a dichos vértices A y B.

III.3). OBTENCIÓN DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Se determina la posición de un punto sobre la Tierra por sus coordenadas geográficas, que son la diferencia de latitudes, y la de longitudes, o más bien la latitud y longitud geográficas.

Como se sabe las latitudes se cuentan desde el Ecuador hacia los polos sobre los meridianos, que se suponen los ejes de las abcisas; y las longitudes en partes del Ecuador al Oriente y al Poniente de uno de los meridianos, y con signos diferentes; las Orientales llevaran signo (+) y las Occidentales el signo (-).

Si fuera la superficie de la Tierra plana, como se puede suponer en algunos casos. La posición de un punto M (figura 3) se determinaría por las líneas :

AP = x
PM = y
z = acimut PAM

Donde la primera (AP) la diferencia de latitudes de los puntos AM y la segunda (PM) la diferencia de longitudes.
Supongamos que AM sea el lado conocido de un triángulo y que se haya observado su acimut PAM: en el triángulo rectángulo formado por la parte AP de la meridiana por la perpendicular PM y por el lado AM de una cadena de triángulos se tendrá:

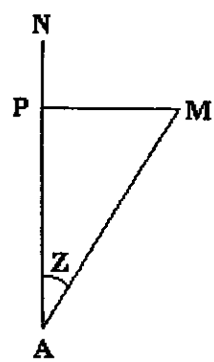


FIGURA 3

$$AP = x = AM \cos z$$
$$PM = y = AM \operatorname{sen} z$$

Llamando z el acimut PAM. Así determinados AP, PM se reducen a partes del Ecuador a razón 30.7261 m. por cada segundo. Para mayor exactitud, se calcula la extensión del grado meridiano para el país donde se trabaja, esto significa que las extensiones lineales de los grados del meridiano crecen caminando del Ecuador, a los polos y este crecimiento es aproximadamente al cuadrado de los senos de las Latitudes o sea $sen^2 \varphi: sen^2 \varphi'$ y de aquí se deduce el valor correspondiente a 1" , en el Ecuador por ejemplo es el grado de 110, 614 m. y a los 45° de latitud de 111,116 m. la diferencia es 502 m. lo que nos dará la siguiente proporción ; 502 aumento a 45°, es con (x); aumento a 20°, como sen^2 45° es con sen^2 20° esto es:

$$502 \text{ m}: x :: sen^2 45° : sen^2 20°$$

De aquí resulta x= 117.m , que agregados a los 110,614 m del Ecuador hacen 110,731 m, grado del meridiano a 20° de latitud; este número de metros repartido entre 3600" que tiene un grado dan para un segundo (1") , 30.7586 m

Ahora para nuestro ejemplo fig. 3, que sea 20° 30' norte la latitud de la estación A, su longitud 68° 10' al oriente de un meridiano origen, y que la distancia AP = 2987.47M, PM = 724m ahora usando el grado de meridiano para la latitud en el Ecuador de 30.7261m por lo tanto:

LÍNEA AP = 2987.47 m x (1/30.7261)

LÍNEA AP = 97.22" = 01' 37.22"

LÍNEA PM = 724 m x (1/30.7261)

LÍNEA PM = 23.56"

De esto se deduce que la latitud del punto M es:

Latitud punto M	= 20° 30' + 01' 37.22"	=	20° 31' 37.22"
Longitud punto M	= 68° 10' + 23.56"	=	68° 10' 23.56"

(puesto que M esta más al Oriente de M)

Al formar el plano con el resultado de las operaciones, se puede situar el punto M, por medio de sus coordenadas x,y ó bien por el Acimut y la distancia AM ; en este último caso, se forma en A, con el transportador el ángulo NAM = Z, se tira una línea indefinida AM y sobre ella se lleva la distancia AM así queda situado el punto M a rumbo y distancia.

Aunque estos principios pertenecen más bien a la Topografía, ha parecido conveniente recordarlos para que se entienda con más facilidad lo que a continuación se expondrá:

La figura 4 representa una cadena de triángulos cuyo origen esta en A, se supone observado el ACIMUT NAB = Z de la base AB y se trata de determinar las coordenadas de los vértices A,B,C,D.... llévense perpendiculares y paralelas a la meridiana (AN) del punto de partida para formar triángulos rectángulos que tengan por hipotenusa los lados AB,AC,BD...en el primero de los triángulos ABb se conocen AB que es la base y el Acimut BAb ; se podrá determinar Ab = x,Bb = y, que nos darán las coordenadas del vértice B.

En ACc se tienen conocidos AC, y el Acimut Cac = cAB - CAB, se calcularán Ac y cC, coordenadas del vértice C.

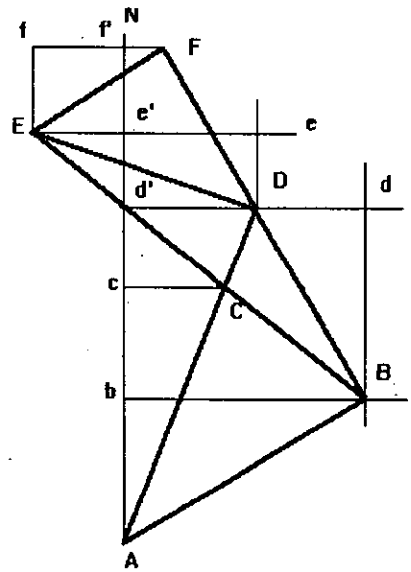


FIGURA 4

En BDd se conocen BD y DBd = 90° - CBb - DBC, con cuyos datos se podrá determinar Bd y Dd, y nos permitirán obtener la latitud del vértice D, Ab + Bd y la longitud respecto al punto de partida bB - dD. En EDe se tienen ED y el Acimut EDe = 360° - la suma de los otros ángulos en D, para calcular Ee y De; será, pues, de la estación Ee Ad' + De , y su longitud Ee - Dd' = C'E, a la cual se pondrá el signo (-) por haber resultado occidental.

Por último en EFf se conocen EF y el Acimut FEf = 90° - FEe, y se resolverán Ef y fF; la latitud de F será Ac' + Ef' y su longitud fe -- Ee' = Ef con signo + por ser oriental.

Se logra entender que con este método se determina la diferencia de latitudes de dos estaciones extremas, la amplitud de la meridiana, y por consiguiente la extensión de un grado con alguna aproximación.

Este método para determinar las coordenadas no tiene toda la exactitud posible, pero es usado por los geógrafos, atendiendo a la comodidad y sencillez que presenta; y lo empleo Cassini para formar la carta de Francia.

Cuando se resuelven los triángulos rectángulos de la fig. 4 para tener mejor exactitud se puede aplicar la corrección por exceso esférico de Legendre, entonces la latitud de la última estación comparada con la del punto de partida daría un número de segundos correspondientes a la extensión lineal de la parte del meridiano abrazada por la triangulación, y por consiguiente la extensión del grado de meridiano con una mayor aproximación que al de llevar perpendiculares y paralelas a la meridiana.

Pero ni uno ni otro de estos métodos proporciona la mejor exactitud posible; pues en el primero se ha supuesto plana la superficie de la Tierra y en este último que los triángulos son formados por arcos de círculos máximos de una esfera, cuando la Tierra debe suponerse a lo más un elipsoide de revolución. Por lo tanto vamos a tomar otro arbitrio para determinar las latitudes, las longitudes y los Acimutes de los objetos terrestres.

III.4). DIFERENTES MODELOS DE RESOLUCIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE LATITUDES

Haré primeramente la demostración de la fórmula la cual se encuentra en cualquier tratado de Geodesia, aunque lo haré de manera detallada a manera de que cualquier persona que la lea la pueda entender, pues en los diferentes tratados de Geodesia se omiten algunos pasos para la obtención de esta fórmula, lo cual ocasiona confusión y mala interpretación por parte de la persona que busca obtener el desarrollo de esta fórmula.

El procedimiento de cálculo que vamos a ver es el de Puissant y que resuelve este problema por el método de diferencias.

Sea BA = k, fig. 5, un lado de la triángulación, P el polo de la Tierra y PA, PB, los meridianos de las estaciones A y B; supongamos conocida la longitud L del punto A, así como su latitud ρ, cuyo complemento llamado colatitud, es el arco PA de su meridiano.

También suponemos conocido el Acimut de B, que es u = PAB, admitiendo que como en la topografía, los acimutes se miden desde 0° hasta 360° partiendo del Norte hacia el Oeste.

Con estos datos vamos a determinar la longitud L' y la latitud ρ' de B, así como el Acimut inverso u' que es el del vértice, tal como se observaría en el vértice B.

III.4.1). Deducción del Ing. Díaz Covarrubias.

Llamando θ la amplitud del lado K, y suponiendo por ahora que el triángulo PAB pertenece á una esfera cuyo radio es igual a la unidad, se tiene:

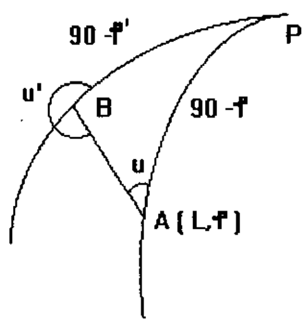


FIGURA 5

Por la fórmula de los cosenos de un triángulo esférico en función de los elementos de un triángulo astronómico:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\cos PB = \cos (90 - \varphi') \cos \theta + \operatorname{sen} (90-\varphi) \operatorname{sen} \theta \cos u$$

como: $\cos (90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi$

$\operatorname{sen} (90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$

tenemos:

$$\cos PB = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta + \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos u \text{ .... (1)}$$

Si designamos por d la diferencia de latitud φ' - φ de los puntos B y A respectivamente, tendremos también, que d = φ' - φ, y. φ' = d + φ, sustituyendo este valor en cos PB obtendremos:

$$\cos PB = \cos (90^\circ - \varphi') = \cos (90^\circ - (\varphi + d)) = \operatorname{sen} (\varphi + d)$$

por lo que igualando este último valor con la ecuación 1 anterior, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\varphi + d) = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta + \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos u \text{ ....(2)}$$

o también nos podría quedar de la siguiente forma:

sen φ cos d + cos φ sen d = sen φ cos θ + cos φ sen θ cos u .. (3)

La amplitud θ por pertenecer A' una línea Geodésica, y por ser d la diferencia de latitud de sus extremos de cada uno de los vértices A y B, son por lo tanto arcos muy pequeños, un ejemplo de lo anterior es que si θ = 60 km. realizando una regla de tres para una esfera obtendremos:

$$\frac{360^\circ}{2\pi R} = \frac{x}{60}$$

donde R= radio de la Tierra
R= 6372 km.

$$x = \frac{60 \times 360}{2\pi(6{,}372)} = 00^\circ 32'.2''$$

Que nos representa el ángulo que subentiende la Tierra, considerándola está (la Tierra) como una esfera. Si ahora en lugar de ser 60 km. damos una distancia 120 km. obtendríamos el ángulo de 01° 04' 44.4", lo cual es un ángulo muy pequeño lo que provoca que se confunda el arco y el coseno del ángulo.

Entonces podremos sustituir las series de sus senos y cosenos hasta la tercera potencia, esto es la serie de Taylor centrada en x = 0, que al centrarse en x = 0 se transforma en la serie MACLAURIN.

Por lo tanto:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(IV)}(0)$$

EVALUADA PARA EL SENO Y COSENO EN X=0 :

f(x) = sen x	f (0) = 0	f (x) = cos x	f (0) = 1
f'(x) = cos x	f ' (0) = 1	f ' (x) = -sen x	f ' (0) = 0
f''(x) = - sen	f '' (0) = 0	f ' ' (x) = -cos x	f '' (0) = -1
f'''(x) = -cos x	f '''(0) = -1	f ''' (x) = sen x	f ''' (0) = 0
fIV (x) = sen x	fIV(0) = 0	fIV (X) = cos x	fIV (0) = 1

Hasta la tercera potencia.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots; \operatorname{sen} d = d - \frac{1}{6} d^3$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots; \cos d = 1 - \frac{1}{2} d^2$$

Por lo tanto sustituyendo estos valores en la Ec. 3 obtendremos

$$\operatorname{sen}\varphi\left(1 - \frac{1}{2} d^2\right) + \cos\varphi\left(d - \frac{1}{6} d^3\right) = \operatorname{sen}\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + \cos\varphi\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right)\cos u$$

Desarrollando:

$$\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} d^2 \operatorname{sen}\varphi + d\cos\varphi - \frac{1}{6} d^3 \cos\varphi = \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}\theta^2 \operatorname{sen}\varphi + \theta\cos\varphi\cos u$$
$$-\frac{1}{6}\theta^3 \cos\varphi\cos u$$

La ecuación obtenida es de tercer grado y como d (diferencia de latitud) y θ (amplitud del lado k, formado por AB), vamos a resolver esta ecuación por aproximaciones sucesivas, despejando primero a la primera potencia de d, obtendremos:

$$d\cos\varphi = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{6} d^3 \cos\varphi - \frac{1}{2}\theta^2 \operatorname{sen}\varphi + \theta\cos\varphi\cos u - \frac{1}{6}\theta^3 \cos\varphi\cos u$$

Desarrollando:

$$d\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(d^2 - \theta^2\right) \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{6}\cos\varphi\left(d^3 - \theta^3 \cos u\right) + \theta\cos\varphi\cos u$$

$$d = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(d^2 - \theta^2\right)\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{1}{6}\cos\varphi\left(d^3 - \theta^3\cos u\right) + \theta\cos\varphi\cos u\right]}{\cos\varphi}$$

Por entidades trigonométricas obtenemos:

$$d = \frac{1}{2}\left(d^2 - \theta^2\right)\tan\varphi + \frac{1}{6}\left(d^3 - \theta^3\cos u\right) + \theta\cos u$$

Reacomodando términos:

$$d = \theta\cos u + \frac{1}{2}\left(d^2 - \theta^2\right)\tan\varphi + \frac{1}{6}\left(d^3 - \theta^3\cos u\right)$$

La cual podemos expresar también como:

$d = \theta \cos u - ½ (\theta^2 - d^2)\ \mathrm{tg}\ \varphi - \frac{1}{6}(\theta^3 \cos u - d^3)$ .... (2)

Desechando los términos de segundo y tercer orden, tendremos por primera aproximación:

$d = \theta \cos u$ .... (3)

Primera aproximación.

Sustituyendo este valor aproximativo, en el término de segundo orden y desechando el de tercer orden, resulta por segunda aproximación (sustituyendo ec 3 en la ec 2)

$d = \theta \cos u - ½ (\theta^2 - \theta^2 \cos^2 u)\ \mathrm{tg}\ \varphi$

$d = \theta \cos u - ½ \theta^2 (1 - \cos^2 u)\ \mathrm{tg}\ \varphi$:   ya que $\mathrm{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$

$d = \theta \cos u - ½ \theta^2 (\mathrm{sen}^2 u)\ \mathrm{tg}\ \varphi$ .... (4)

Segunda aproximación

Finalmente, introduciendo este valor más exacto en los términos de segundo y tercer orden sin apreciar más que hasta la tercera potencia de θ, se obtiene (sustituyendo ec 4 en la ec 2)

$$d = \theta\cos u - \frac{1}{2}\left(\theta^2 - \left(\theta\cos u - \frac{1}{2}\theta^2 \operatorname{sen}^2 u \tan\varphi\right)^2\right)\tan\varphi -$$

$$-\frac{1}{6}\left(\theta^2 \cos u - \left(\theta\cos u - \frac{1}{2}\theta^2 \operatorname{sen}^2 u\tan\varphi\right)^3\right)$$

$$d = \theta \cos u - \frac{1}{2}\left[\theta^2 - \left(\theta^2\cos^2 u - \theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u \tan\varphi + \frac{1}{4}\theta^4 \operatorname{sen}^4 u \tan^2\varphi\right)\right]$$

$$\tan\varphi - \frac{1}{6}\left(\theta^3 \cos u - \theta^3 \cos^3 u\right)$$

Reacomodando y despreciando las cuartas potencias y mayores a esta; obtendremos:

$$d = \cos u - \frac{1}{2}\tan\varphi\left[\theta^2\left(1 - \cos^2 u\right) + \theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u \tan\varphi\right] -$$

$$-\frac{1}{6}\left[\theta^3 \cos u\left(1 - \cos^2 u\right)\right]$$

$$d = \theta\cos u - \frac{1}{2}\theta^2\tan\varphi\left(1 - \cos^2\right) - \frac{1}{2}\theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u \tan^2\varphi -$$

$$-\frac{1}{6}\left(\theta^3 \cos u\left(1 - \cos^2 u\right)\right)$$

$$d = \theta\cos u - \frac{1}{2}\theta^2\tan\varphi \operatorname{sen}^2 - \frac{1}{2}\theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 \theta\tan^2\varphi - \frac{1}{6}\theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u$$

O bien factorizando obtendremos:

$$d = \theta \cos u - \frac{1}{2}\theta^2\tan\varphi \operatorname{sen}^2 u - \frac{1}{6}\theta^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u\left(1 + 3\tan^2\varphi\right) \quad \text{..... (5)}$$

Ahora para poder pasar de la esfera que tiene un radio igual a la unidad a la de radio R' , (radio del elipsoide) donde:

$\theta = \dfrac{k}{R'}$ Sustituyendo este valor en la ecuación anterior (5),

observese figura 6.

$$g' = \frac{s}{R'}$$

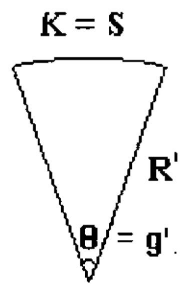


FIGURA 6

$$d = \frac{k\cos u}{R'} - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 u \tan\rho}{2R'^2} - \frac{k^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u}{6R'^3}\left(1 + 3\tan^2\rho\right)\ )$$

Esta fórmula daría la diferencia de latitud sobre una esfera.

regresando a la fórmula de la diferencia de latitud después de multiplicado por $\frac{R'}{\rho}$ y dividiendo por sen 1" para que el arco quede expresado en segundos, se tiene:

$$\varphi' - \varphi = d = \frac{k\cos u}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 u \tan\varphi}{2R'\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u}{6R^2 \rho \operatorname{sen} 1''}\left(1 + 3\tan^2\varphi\right).1$$

Esta ecuación suministra la diferencia de paralelos con cuanta exactitud se necesita aún para lados Geodésicos muy grandes, pero el último término tiene un valor casi insensible para las líneas geodésicas comunes, especialmente en las bajas latitudes. Por ejemplo si K = 100,000m, u = 45° y φ =30° el tercer término da un valor que no llega a 0, 1" , y así se podrá desecharse en la mayor parte de los casos, bastando con la segunda aproximación, a saber:

$$\varphi' = \varphi + \frac{k\cos u}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{tg}\varphi}{2R'\rho \operatorname{sen} 1''}$$

También se puede tomar la normal N por R' en el segundo término que es siempre pequeño y haciendo:

$$A = \frac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''} \;; \qquad B = \frac{0.5 \operatorname{tg} p}{N\rho \operatorname{sen} 1''}$$

tendremos como último resultado:

$$\varphi' = \varphi + Akcosu - Bk^2 \operatorname{sen}^2 u$$

De la tabla proporcionada en el tratado de Geodesia de Francisco Díaz Cobarrubias podemos obtener los logaritmos de A y B que se han calculado para las latitudes de la República Mexicana y que presenta además sus diferencias por 1' a fin de facilitar las interpolaciones para cualquier latitud intermedia entre las latitudes dadas (ver tabla VII).

Es importante señalar que al aplicar esta fórmula debe tenerse cuidado con el signo de cos u, que dependerá del valor que tenga el Acimut. El segundo término Akcosu será positivo cuando u corresponda a los cuadrantes primero y cuarto, y negativo en los otros dos restantes cuadrantes. El último término no varia de signo, al menos en nuestras latitudes septentrionales.

K = 49 326.95 m

u = 289° 40′ 22.2″

u′ = 225° 23′ 32.9″

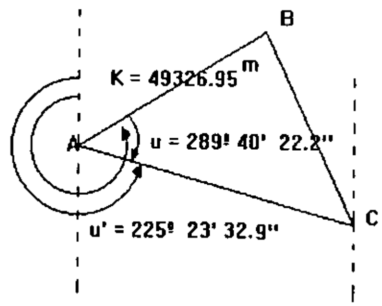


FIGURA 7

EJEMPLO 11:

Latitud del punto A φ = 19° 53' 42.3" y para el Acimut de B se encontró u=289° 40' 22" 2 y la distancia que separa AB = 49 326.95m.

Tomando de la tabla de logaritmos los valores para A y B , de la fórmula anterior se tiene:

A	8.512186		B	0.9649	Primer término	+ 9′ 00″ . 07
k	4.693084		k^2.....	9.3862	Segundo término	- 1. 99
cos. u	9.527177	+	sen^2 u...	9.9477	d =	+ 8′ 58″. 07
	2.732447			0.2988	φ =	19° 53 42 . 30
					φ' =	20° 2′ 40″. 37
	+ 540″. 07			- 1″ .99		

Como segundo ejemplo calculemos la latitud en C (fig.7), tercer vértice de nuestro triángulo. para deducir al Acimut del lado AC, tenemos que o ángulo A = 64° 16' 49.3"

Az. AB	= 289° 40' 22" .2
Ángulo A	= -64° 16 49 .3
Az AC	= 225° 23' 32 .9" = u

El ángulo 'A' del triángulo esta ya corregido por los errores de observación, lo cual ha demandado el cálculo previo del exceso esférico que corresponde al triángulo. Este es uno de los casos en que es indispensable determinarlo, a fin de no incluir el error que proviene puramente de las observaciones. La distancia de AC es de K = 39 512.36m.

Los logaritmos de A y B son los mismos que antes, porque la latitud no cambia al ser el mismo punto de partida, por lo tanto el cálculo nos queda:

A	8.512186	B	0.9649	Primer término	-15′ 2″ .42
k	4.596733	k^2.....	9.1935	Segundo término	- 0 .73
cos. u	9.846490 -	sen^2 u....	9.7049	d =	-15′ 3″ .15
	2.955409 -		9.8633	φ =	19° 53 42 . 30
				φ′ =	19° 38′ 39″ .15
	- 902″ . 42		- 0″ .73		

Es claro que en este último ejemplo se ha tomado por k la longitud y por u el Acimut del lado AC de una manera idéntica se prosiguen los cálculos para todos los demás vértices.

Nota: Estos factores están calculados para la Elipsoide de Beseel

TABLA VII
LOGARITMOS DE LOS FACTORES A, B, Y C
PARA EL CALCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRAFICAS
DADAS POR EL MAESTRO FRANCISCO DÍAZ C.

Latitud		Log. A	Dif. por 1'	Log. B	Dif. por 1'	Log. C	Dif. por 1'
15°	00	8.5123984	6. 4	0.8347	5. 0	8.5096844	
15	30	3792	6	8496	4. 8	6780	2. 1
16	00	3594	8	8641	7	6714	2
16	30	3390	9	8781	6	6646	3
17	00	3182	7. 2	8919	4	6577	3
17	30	2967	3	9052	3	6505	4
18	00	2747	6	9182	2	6432	4
18	30	2520	7	9309	1	6356	5
19	00	2288	9	9434	0	6279	6
19	30	2052	8. 0	9555	3. 9	6200	6
20	00	1812	3	9674	8	6120	7
20	30	1563	4	9790	7	6037	8
21	00	8.5121311	5	0.9904	7	8.5095953	8
21	30	1056	7	1.0016	6	5868	8
22	00	0795	8	0126	5	5781	9
22	30	0530	9. 1	0234	5	5693	9
23	00	8.5120258	2	0340	4	5602	3. 0
23	30	8.5119982	3	0444	4	5510	1
24	00	9702	5	0546	3	5417	1
24	30	9418	6	0647	3	5322	2
25	00	9129	8	0746	2	5226	2
25	30	8835	9	0844	2	5128	3
26	00	8538	10. 1	0941	1	5029	3
26	30	8236	1	1036	1	4928	4
27	00	8.5117933	3	1.1130	0	8.5094827	4
27	30	7624	5	1222	0	4724	4
28	00	7309	6	1314	0	4619	5
28	30	6991	7	1404	2. 9	4513	5
29	00	6670	8	1494	9	4406	6
29	30	6346	9	1582	9	4298	6
30	00	6019	11. 0	1670	9	4189	6
30	30	5689	1	1757	8	4079	7
31	00	5356	2	1842	8	3968	7
31	30	5019	4	1927	8	3742	7
32	00	4678	4	2012	8	3628	8
32	30	4335	6	2095		8 5093512	8
33	00	8.5113987		1.2178			9

III.4.2). DEDUCCIÓN DEL ING. MEDINA PERALTA

El manual de Geodesia del Ing. Medina Peralta deduce de una manera similar la fórmula de la diferencia de latitud, aunque con la variante de cambiar o bautizar, de manera distinta, las variables involucradas en dicha fórmula de diferencia de latitudes.
Tenemos:

$$\varphi'-\varphi = d = \frac{k\cos u}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 u \tan\varphi}{2R'\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^3 \cos u \operatorname{sen}^2 u}{6R'^2 \rho \operatorname{sen} 1''}\left(1+3\tan^2\varphi\right) \quad (1)$$

En el Manual de Geodesia Geométrica del Ing. Peralta encontramos la fórmula de la siguiente manera:

$$-d\varphi = -\frac{k\cos Az}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 Az \tan\varphi}{2N\rho \operatorname{sen} 1''} + \frac{k^3 \cos Az \operatorname{sen}^2 Az}{6N\rho \operatorname{sen} 1''}\left(1+3\tan^2\varphi\right) \quad 2$$

Donde:

$$u = Az = \text{Acimut}$$

$$\rho = \text{Radio de curvatura del Meridiano}$$

Introduciendo en la fórmula los factores.

$$B = \frac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''}; \quad C = \frac{\tan\varphi}{2N\rho \operatorname{sen} 1''}; \quad E = \frac{1+3\tan^2\varphi}{6N^2}$$

$$h = \frac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''}; \quad \text{donde } h = B$$

Por lo tanto nos queda

$$d\varphi = Bk\cos Az + Ck^2 \operatorname{sen}^2 Az - Ehk^2 \operatorname{sen}^2 Az \cos^2 \Delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Introduciendo en la fórmula los factores.
Recordando:

k = Extensión de una línea.
θ = Amplitud en grados de k, ó ángulo que subentiende la línea Geodésica k.

Realizando una proporción entre la línea Geodésica, k con la amplitud del lado que la subentiende θ con respecto a una circunferencia de 360°, obtenemos:

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{\left(\frac{k}{N}\right)}{2\pi} = \frac{k}{2N\pi} \qquad \therefore k = \frac{\pi N\theta}{180^\circ}$$

Ya que para pasar de la esfera de Radio, igual a la unidad, a otra esfera de Radio N, sólo se necesitará poner a θ en función del nuevo Radio N o sea:

$$\theta = \frac{k}{N}$$

Continuando con el cálculo para otra esfera de Radio ρ (roo) la misma línea Geodésica dará:

$$k = \frac{\Pi\,\rho\,\theta'}{180^\circ} = \frac{\Pi\,N\theta}{180^\circ}$$

Simplificando cantidades tendremos

$$\theta' = \theta\frac{N}{\rho}$$

de aquí deducimos que k es igual en las diferentes esferas o sea su extensión lineal no cambia. Su amplitud angular varía inversamente a sus lados.

Esta corrección se aplica a la fórmula de obtención de latitudes, de un punto, conocida su latitud, a otro de latitud desconocida. Para poner esta fórmula en función de un radio medio ρm o sea una diferencia de latitudes con respecto a una latitud media dφ'

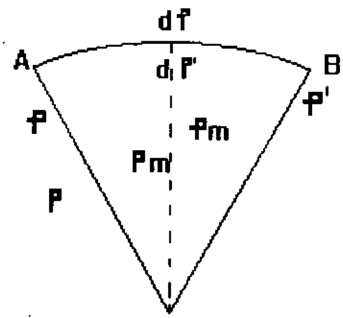


FIGURA 8

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{\rho}{\rho_m}$$

De tal forma

$$d\varphi' = \frac{d\varphi\rho}{\rho_m}$$

$$d\varphi' - d\rho = d\varphi\left(\frac{\rho}{\rho_m} - 1\right)$$

$$d\varphi' - d\rho = d\varphi\left(\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}\right)$$

$$d\varphi' = d\rho + d\varphi\left(\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Por lo deducido en la fórmula No. 3 la diferencia de latitudes entre los puntos A y B referidas a una latitud media φm (ver fig. 8), es igual a la diferencia de latitud, entre los puntos "A y B", tomando como origen el punto "A" (de latitud conocida), más una corrección.

$$d\varphi \left(\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Esta fórmula se aplica para pasar de la esfera al elipsoide seleccionado.
o sea $d\varphi$ es la diferencia de latitudes, considerando a la esfera osculadora en el punto A

Para el cálculo de ($d\varphi$) se acepta en la generalidad de los casos que es igual al 1er. término de la fórmula, o a la suma de los dos primeros términos cuando se trate de lados que pasen los 100 km. de longitud.

Ahora respecto al término:

$$\left(\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m}\right)$$

Donde se conocen o pueden calcularse los valores (ρ y ρm) (Radios de curvatura en el punto A de latitud).

Sabemos que el radio de curvatura del meridiano :

$$\rho = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r^3} = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \rho\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m} = \frac{\left[\dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}}\right]}{\left[\dfrac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}}\right]}$$

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{a\left(1-e^2\right)\left[\dfrac{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right]}{\left[\dfrac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}}\right]}$$

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Como:

$$\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)e^4\,\mathrm{sen}^4\,\varphi_m}{2!}+$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^6\,\mathrm{sen}^6\,\varphi_m}{3!}\cdots$$

Tenemos:

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\left[\left(1-\frac{3}{2}e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)-\left(1+\frac{3}{2}e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)\right]}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\frac{3}{2}e^2\left(\mathrm{sen}^2\,\varphi-\mathrm{sen}^2\,\varphi_m\right)}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

la ecuación ($\mathrm{sen}^2\,\varphi$ - $\mathrm{sen}^2\,\varphi_m$) = sen (φ - φ m) sen ($\varphi + \varphi_m$)

y aproximadamente $\varphi+\varphi_m=2\varphi;\quad \varphi-\varphi_m=\frac{d\varphi}{2};\ d\varphi\ ;\ \mathrm{sen}\,2\,\varphi=$ $\mathrm{sen}\,2\varphi\ \ \cos 2\varphi$ luego:

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\frac{3}{2}e^2\left(\mathrm{sen}(\varphi-\varphi m)\mathrm{sen}(\varphi+\varphi_m)\right)}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\frac{3}{2}e^2\,\mathrm{sen}\frac{d\varphi}{2}\,\mathrm{sen}\,2\varphi}{\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\frac{3}{2}e^2\frac{d\varphi}{2}\operatorname{sen}1''\left(2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right)}{\left(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

El seno de la diferencia de latitudes $\operatorname{sen} d\frac{\varphi}{2}=d\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}1''$, haciendo simplificaciones

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=\frac{\frac{3}{2}e^2 d\varphi\operatorname{sen}1''\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\left(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\text{..........................} \qquad (6)$$

El maestro Medina da, a esta última ecuación , su valor por medio de un factor D.

$$D=\frac{\frac{3}{2}e^2\operatorname{sen}1''\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\left(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación numero 4 tenemos:

$$\frac{\rho-\rho_m}{\rho_m}=Dd\rho\text{.......................}(7)$$

Sustituyendo esta última ecuación 7 en la ecuación 3 obtenemos:

$d\varphi' = d\varphi + d\varphi\ (D\, d\varphi)$; $-d\varphi' = -d\varphi - D\,(d\varphi)^2$

$d\varphi' = d\varphi + D\,(d\varphi)^2$; $-D\,(d\varphi)^2 = d\varphi' - d\varphi$ ....(8)

Por último este valor correctivo los sumamos a la fórmula 3 para la diferencia de latitudes y nos quedara.

$-d\varphi' = Bk\cos Az + Ck^2\operatorname{sen}^2 Az + D\,(d\varphi)^2 - Ehk^2\operatorname{sen}^2 Az$

LOS FACTORES A,B,C,D,E ESTAN CALCULADOS PARA VARIAS LATITUDES. ESTOS FACTORES ESTAN CALCULADOS CON DATOS DE LA ESFEROIDE DE CLARKE (1866); a = 6'378,206.4 y b = 6'356,583.8 m. Calcular A, B, C, D, E para cada 5 de latitud.

TABLA VIII

φ	A	B	C	D	E
0 °	.032339	.03255937	0	0	4.0968651E-15
5	.032338169	.03255439	2.24936E-10	4.273259E-9	4.19072513E-15
10	.0323356999	.03254941	4.49872E-10	8.419985E-9	4.47808039E-15
15	.0323316684	.032535056	6.88698E-10	1.231380E-8	4.97703254E-15
20	.0323261955	.032520716	9.27524E-10	1.583835E-8	5.72052065E-15
25	.03231944719	.032498728	1.19808E-9	1.888724E-8	6.7611835E-15
30	.03231162808	.032476771	1.46864e-9	2.136783E-8	8.1798654E-15
35	.0323029749	.032449808	1.79919E-9	2.320410E-8	1.01002273E-14
40	.0322937495	.03242289	2.12974E-9	2.433898E-8	1.27148704E-14
45	.03228423284	.032394213	2.57372E-9	2.47363E-8	1.633200146E-14
50	.03227471313	.032365586	3.01770E-9	2.438208E-8	2.146730438E-14
55	.03226547965	.032338654	3.6969E-9	2.328508E-8	2.903238779E-14
60	.03225681391	.032311768	4.37610E-9	2.147695E-8	4.07606798E-14
65	.03224897969	.032289827	5.65258E-9	1.901133E-8	6.0283183E-14
70	.03224221519	.03226791	6.92906E-9	1.596244E-8	9.62950605E-14
75	.03223672713	.032253605	1.060748E-8	1.242291E-8	1.741758523E-13
80	.03223268296	.03223930	1.42859E-8	8.500976E-9	3.96782818E-13
85	.03223020598	.032234338	2.984319E-8	4.317053E-9	1.599001942E-1
90	.03222937201	.03222937	INFINITO	0	1.599001942E-12

$$A = \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''} \qquad B = \frac{1}{R \operatorname{sen} 1''} \qquad C = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2NR_m \operatorname{sen} 1''}$$

$$D = \frac{\frac{3}{2} e^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} \varphi \ \cos\varphi}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad E = \frac{1 + 3 + g^2 \varphi}{6N^2}$$

TABLA DE FACTORES GEODÉSICOS

Tabla de los factores A, B, C, D, E y F para el cálculo de posiciones geodésicas.

TABLA IX

Lat.	log A′	log B	log C	log D	log E	log F
10 ..	8.5096826	8.5125432	0.65309	1.9253	5.6511	7.518
11 ..	8.5096730	8.5125156	0.69539	1.9648	5.6590	7.556
12 ..	8.5096630	8.5124855	0.73417	2.0006	5.6675	7.591
13 ..	8.5096522	8.5124530	0.77001	2.0331	5.6767	7.621
14 ..	8.5096405	8.5124180	0.80337	2.0629	5.6865	7.649
15 ..	8.5096281	8.5123807	0.83460	2.0903	5.6970	7.675
16 ..	8.5096149	8.5123411	0.86400	2.1156	5.7080	7.698
17 ..	8.5096009	8.5122991	0.89178	2.1390	5.7196	7.719
18 ..	8.5095862	8.5122550	0.91816	2.1606	5.7317	7.738
19 ..	8.5095707	8.5122086	0.94330	2.1808	5.7443	7.756
20 ..	8.5095546	8.5121602	0.96733	2.1996	5.7574	7.772
21 ..	8.5095377	8.5121096	0.99037	2.2170	5.7711	7.787
22 ..	8.5095202	8.5120571	1.01253	2.2333	5.7851	7.800
23 ..	8.5095020	8.5120026	1.03393	2.2485	5.7997	7.812
24 ..	8.5094833	8.5119463	1.05456	2.2627	5.8146	7.823
25 ..	8.5094639	8.5118881	1.07457	2.2759	5.8300	7.832
26 ..	8.5094439	8.5118283	1.09400	2.2882	5.8458	7.841
27 ..	8.5094234	8.5117667	1.11290	2.2997	5.8620	7.849
28 ..	8.5094024	8.5117036	1.13132	2.3104	5.8785	7.855
29 ..	8.5093808	8.5119389	1.14932	2.3203	5.8955	7.861
30 ..	8.5093588	8.5115729	1.16692	2.3294	5.9127	7.866
31 ..	8.5093363	8.5115054	1.18416	2.3379	5.9304	7.870
32 ..	8.5093134	8.5114368	1.20108	2.3456	5.9484	7.873
33 ..	8.5092901	8.5113669	1.21772	2.3527	5.9667	7.875
34 ..	8.5092665	8.5112959	1.23409	2.3592	5.9853	7.877

EJEMPLO 12:

Sea el lado GF de una triangulación de la que se conocen las coordenadas Geográficas de G y el acimut GF.

DATOS

$\varphi g = 16° 15' 46.2''$

$\lambda g = 93\ 42'\ 18.2''$

Acimut G-F = 37 47' 19.3"

Distancia = 45 758.75 m

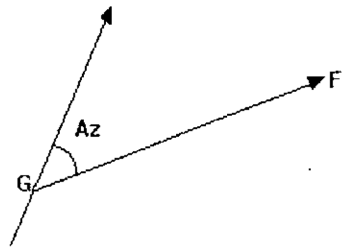


FIGURA 9

FACTORES A, B, C, D, E

A = 0.03233028
B = 0.03253143
$C = 7.490174817 \times 10^{-10}$
$D = 1.320398459 \times 10^{-8}$
$E = 5.164812854 \times 10^{-15}$

FORMULA

$$d\varphi = Bk\cos Az + CK^2 \operatorname{sen}^2 Az + D\,(d\varphi)^2 - EhK^2\ \operatorname{sen}^2 Az$$

log B	= 8.51230321	
log k	= 4. 66047415	
log cos Az	= 9.89777875	
log 1^{er} Sumando	= 3.07055611	= 1er Sumando = 1176.40"
log C	= 0.874491957	
log k^2	= 9.320948304	
log $\operatorname{sen}^2 \alpha$	= 9.574568200	
log 2° Sumando	= 9.770008501	= 2° Sumando = 0.58"
		SUMA = 1176.98"
log D	= 2.120705009	
log $(d\varphi)^2$	= 6.143764015	
log 3^{er} Sumando	= 8.264469024	= 3er Sumando = 0.02"

log E	= 5.71305459		
log h	= 2.939599116		
log s^2 sen^2 α	= <u>8.895516540</u>		
log 4° Sumando	= 7.548170246	= 4° Sumando	= 0.003"

$\therefore$ dφ = - 1180.00"
dφ = 19' 40"

dφ = - 00° 19' 40"
φ_G = <u>16° 15' 46.2"</u>
φ_F = 15° 56' 06.2"

Por lo tanto la latitud del punto F es φ_F = 15° 56' 06.2"

EJEMPLO 13:

Cálculo de la latitud

DATOS		FACTORES GEODÉSICOS	
φA =	21° 49' 56.2"	A =	0.03232372254
λA =	97° 47' 27.4"	B =	0.03251265838
AZ = αAB =	123° 46' 56.9"	C =	1.026670749 x 10^{-9}
K = S = AB =	32 787.90 m	D =	1.695563268 x 10^{-8}
		E =	6.101877333 x 10^{-15}

log B	=	8.512052481
log S	=	4.515713602
log cos α	=	9.745107110 n
log 1^er^ sumando	=	2.772873193 n

1^er^ sumando	=	- 592" .75

log C	=	1.011431189
log S^2	=	9.031427204
log sen^2 α	=	9.839363637
log 2^do^ sumando	=	19.882222030

2^do^ sumando	=	+ 0" .76

$\therefore$. dφ = 592"
dφ = 09" 52'

log D	=	2.229314
log (dφ)^2	=	5.544643413
log 3^er^ sumando	=	7.773957413

φ_A = 21° 49' 56" 2
+ dφ = 09' 52" 0
φ_B = 21° 59' 48" 2

3^er^ sumando	=	0.005 . ≈ 0" .01

φ_B = 21° 59' 48" 2

log E	=	5.78546347
log n	=	2.772873193 n
log (S^2 sen^2 α)	=	8.870790841
log 4° sumando	=	17.429127504 n

4° sumando = + 0" .002

FORMULA $d\varphi = BS\cos\alpha + CS^2 sen^2\alpha + D(d\varphi)^2 - Ehs^2 sen^2\alpha$

EJEMPLO 14:
Cálculo de la latitud

φA =	24° 32' 15.9"	A =	0.03224739508
λA =	102° 46' 21.1"	B =	0.03227491225
α = AZ =	205° 46' 13.9"	C =	$1.173067098 \times 10^{-9}$
K = S =	57 497 .46 m	D =	$1.860537012 \times 10^{-8}$
		E =	$6.66497422 \times 10^{-15}$

$-d\varphi = BS\cos\alpha - CS^2 sen^2\alpha - Ehs^2 sen^2\alpha - D(d\varphi)^2$

log B	=	8.50886507
log S	=	4.75964866
log cos α	=	9.95450423 n
log 1^{er} término	=	3.22301796 n

- 1671.16
+ 0.73
-1670:43 = dφ

1^{er} término = - 1671" .16

log C	=	1.06932285
log S^2	=	9.51929732
log C S^2	+	0.58862017
log sen^2 α	=	9.27651500
log 2^{do} término		9.86513517

dφ = +1670.43
- .05
- .01
dφ = 1670" .37

2^{do} término = 0" .73

log D	=	2.269638314
log $(d\varphi)^2$	=	6.445656562
log 3^{er} término	=	8.715294876

dφ = + 0° 27' 50" 37
φ_A = 24° 32' 15" 9
φ_B = 25° 00' 06" 27

3^{er} término = – 0".05

∴ φ_B = 25° 00' 06" 27

log E	=	5.82379847
log n	=	3.22301796 n
log S^2	=	9.51929732
log $sen^2 \alpha$	=	9.27651500
log 4° término	=	27.84262875 n

$$\boxed{4° \text{ término} = +0.006 \approx 0''.01}$$

EJEMPLO 15

Cálculo de la latitud

Datos		Factores Geodésicos	
φ_A =	19° 53′ 42.3"	A =	0.0323266
λA =	00° 23′ 37.4"	B =	0.0325211
Acimut $\overline{AB}$ =	289° 40′ 2.2"	C =	$9.2251263 \times 10^{-10}$
Distancia $\overline{AB}$ =	49. 326 .95 m	D =	1.5764393×10^{-8}
		E =	$6.739346918 \times 10^{-15}$

Formula

$$-d\varphi = BK \cos AZ + CK^2 \operatorname{sen}^2 AZ \;\; + D (d\varphi)^2 \;\; EhK^2 \operatorname{sen}^2 AZ$$

Sustituciones

log B	=	8.512165227	
log K	=	4.693084263	
log cos AZ	=	9.527176042	
log 1^{er} término	=	2.73242561	= 540.04"
log C	=	0.96497232	
log K^2	=	9.38616852	
log sen^2 AZ	=	9.94776109	
log 2^{do} término	=	0.485018900	= + 01.99"
			dφ = 542.03" = 00° 09' 02.03"
log D	=	2.197677253	
log $(d\varphi)^2$	=	5.468046649	
log 3^{er} término	=	7.665723902	= 00.004"

φa	=	19 ° 53' 42.3"
dφ	=	00° 09' 02.3"
φb	=	20° 02' 44.33"

III.4.2.C). MÉTODO EXPEDITIVO

Como es posible apreciar en la fórmula:

$$- d\varphi = BK\cos Az + CK^2 \operatorname{sen}^2 Az - EhK^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - D (d\varphi)^2$$

Los últimos dos términos nos dan valores tan pequeños que es posible despreciarlos, lo cual hace el maestro Medina Peralta en su memorable manual elemental de Astronomía de Posición, en el cual nos da la siguiente fórmula:

$$\varphi' = \varphi + A\, K \cos Az - B\, k^2\ \operatorname{sen}^2 Az \;.....(8)$$

En que $A = \dfrac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''}$ y $B = \dfrac{0.5\tan\rho}{N\rho \operatorname{sen} 1''}$

φ' = Latitud buscada del vértice F

ρ = Es el radio de curvatura terrestre del lugar considerado

N = Normal mayor

La longitud de F se calcula con la fórmula:

$$\lambda' = \lambda + \frac{c\ k \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} \;..............................(9)$$

En la que $c = \dfrac{1}{N \operatorname{sen} 1''}$ .... (10)

El acimut inverso Az' lo calcula por la fórmula:

$$Az = 180^\circ + Az + (\lambda' - \lambda) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \;............. (11)$$

Los valores A,B y C se toman con el argumento de latitud conocida, de la siguiente tabla.

TABLA X
LOGARITMOS DE LOS FACTORES A, B Y C

LATITUD	LOG. A	DIF. POR 1'	LOG. B.	DIF. POR 1'	LOG. C.	DIF. POR 1'
15 ° 00'	8.5123807		0.8346		8.5096281	2
30'	8.5123612	6	0.8495	5	8.5096216	2
16 ° 00'	8.5123411	6	0.8640	5	8.5096149	2
30'	8.5123204	7	0.8781	5	8.5096080	2
17 ° 00'	8.5122991	7	0.8918	5	8.5096009	2
30'	8.5122773	7	0.9051	4	8.5095936	2
18 ° 00'	8.5122550	7	0.9182	4	8.5095862	2
30'	8.5122320	8	0.9309	4	8.5095785	2
19 ° 00'	8.5122086	8	0.9433	4	8.5095707	3
30'	8.5121847	8	0.9554	4	8.5095627	3
20 ° 00'	8.5121602	8	0.9673	4	8.5095546	3
30'	8.5121351	8	0.9790	4	8.5095462	3
21 ° 00'	8.5121096	8	0.9904	4	8.5095377	3
30'	8.5120836	9	1.0016	4	8.5095290	3
22 ° 00'	8.5120571	9	1.0125	4	8.5095202	3
30'	8.5120301	9	1.0233	4	8.5095112	3
23 ° 00'	8.5120026	9	1.0339	4	8.5095020	3
30'	8.5119747	9	1.0443	3	8.5094927	3
24 ° 00'	8.5119463	9	1.0546	3	8.5094833	3
30'	8.5119174	9	1.0646	3	8.5094737	3
25 ° 00'	8.5118881	10	1.0746	3	8.5094639	3
30'	8.5118584	10	1.0814	3	8.5094540	3
26 ° 00'	8.5118283	10	1.0943	3	8.5094439	3
30'	8.5117977	10	1.1035	3	8.5094337	3
27 ° 00'	8.5117667	10	1.1129	3	8.5094234	3
30'	8.5117353	10	1.1222	3	8.5094130	3
28 ° 00'	8.5117036	11	1.1313	3	8.5094024	4
30'	8.5116714	11	1.1404	3	8.5093917	4
29 ° 00'	8.5116389	11	1.1493	3	8.5093808	4
30'	8.5116061	11	1.1582	3	8.5093699	4
30 ° 00'	8.5115729	11	1.1669	3	8.5093588	4
30'	8.5115393	11	1.1756	3	8.5093476	4
31 ° 00'	8.5115054	11	1.1842	3	8.5093363	4
30'	8.5114713	11	1.1927	3	8.5093249	4
32 ° 00'	8.5114368	12	1.2011	3	8.5093249	4
30'	8.5114020	12	1.2094	3	8.5093134	4
33 ° 00'	8.5113669	12	1.2177	3	8.5093018	4

EJEMPLO 16:

Sea el lado G F de una triangulación de la que se conocen las coordenadas geográficas de G y el acimut G F.

Se trata de calcular las coordenadas geográficas de F y el acimut de F a G.

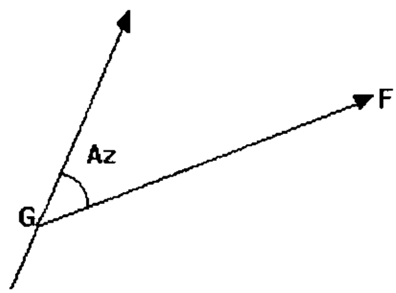


FIGURA 10

DATOS

latitud de G	....		$\varphi = 19° \ 53' \ .7$
longitud de G	....		$\lambda = 99° \ 31' \ .6$
Acimut G-- F	....	Az	$= 70° \ 19' \ .6$
Distancia G -- F	....	K	$= 49\,327$ m

Se comienza por obtener los valores de los coeficientes A, B, C, de la tabla anterior, con el argumento de la latitud $\varphi = 19° \ 54'$ y se encuentra:

$$\log A = 8.5121861$$
$$\log B = 0.9650$$
$$\log C = 8.5095555$$

a). Cálculo de la latitud.

$$\begin{array}{rl} \log A & = 8.5121861 \\ \log K & = 4.6930547 \\ \log \cos Az & = \underline{9.5271877} \\ & 2.7324585 \end{array}$$

1er término ... 540″ .08 = 9′ 00″ .08

$$\begin{aligned} \log B &= 0.9650 \\ \log K^2 &= 9.3862 \\ \log \operatorname{sen}^2 Az &= \underline{9.9478} \\ & \quad 0.2991 \end{aligned}$$

2° término ... 1'' .99

$\varphi = 19° 53' .7$

1er término	+	9 .0
2° término	-	0 .0
	φ' =	20° 02' .7

Se ve por este cálculo que el segundo término es despreciable, de modo que para operaciones topográficas basta tomar:

$$\varphi = \varphi' + A \cos Az$$

b). Cálculo de la longitud.

$$\begin{aligned} \log C &= 8.5095555 \\ \log K &= 4.6930847 \\ \log \operatorname{sen} Az &= 9.9738791 \\ \log \operatorname{sen} \varphi' &= \underline{0.0271384} \\ & \quad 3.2036577 \end{aligned}$$

1598'' .29 = 26' 38'' .29

$$\begin{aligned} \lambda &= \underline{99° 31' .6} \\ \text{correc.} &= -26 .6 \\ \lambda &= 99° 05' .4 \end{aligned}$$

c). Cálculo del acimut inverso.

$$\log(\lambda' - \lambda) = \log 1596 = 3.2030329$$

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underline{9.5334264}$$

$$2.7364593$$

$$545.'' 07 = 9' 05.'' 07$$

		180°	00' .0
+ Az	=	70	19' .06
+			9' .1
Az	=	250	28 .7

Hasta este momento únicamente hemos deducido las fórmulas para encontrar la latitud de un vértice; partiendo de las coordenadas Geodésicas (latitud y longitud) conocida de algún otro vértice, en este caso vértice A

EJEMPLO 17:

DATOS

$\varphi A = 19° \ 53' \ 42.3''$
$\lambda A = 00° \ 23' \ 37.4''$
Acimut $\overline{AB} = 289° \ 40' \ 22.2''$
Distancia $\overline{AB} = 49326.95$ m

FACTORES GEODESICOS

log A = 8.5121861
log B = 0.9650
log C = 8.5095555

FORMULA

$$\varphi' = \varphi + Ak\cos Az - Bk^2 \operatorname{sen}^2 Az$$

log A	= 8.5121861	
log K	= 4.693084263	
log cos Az	= 9.52717604	
1er término	2.7324463	540.065'' = 00° 09' 00 .06''

log B =	0.9650	
log K^2 =	9.386168	
log sen^2 Az =	0.994776	
2° termino	1.345944	= 22.179 ''

+ 19° 53′ 42.30
   09′ 00.06
20° 02′ 42.36
\- 22.18
$\varphi B = 20° \ 02' \ 20.18$

III.4.3). DEDUCCIÓN DEL ING. RICARDO TOSCANO

El Ing. Ricardo Toscano llega a la siguiente ecuación:

$$- dp = \frac{k \cos Az}{R \operatorname{sen} 1''} + \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 Az \operatorname{tg} \varphi}{2 R N \operatorname{sen} 1''} - $$

$$- \frac{k^3 \cos Az \operatorname{sen}^2 Az}{6 R N^2 \operatorname{sen} 1''} \left(1 + 3 \tan^2 \varphi\right)$$

La cual es muy similar y casi idéntica a las expresiones obtenidas por los maestros Francisco Díaz Covarrubias y Manuel Medina Peralta. Con la única diferencia que N^2 = RN. Aquí el Ing. Toscano hace la diferencia entre la esferoide y la esfera osculadora (utilizada para considerar triángulos esféricos y poder determinar la latitud del vértice B) y utiliza a R (Radio correspondiente a la latitud del vértice A).

Después introduce los siguientes coeficientes B,C y E, independientes de la distancia y el Acimut, se tiene finalmente la fórmula:

$$B = \frac{1}{R \operatorname{sen} 1''} \ ; \ C = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 R N \operatorname{sen} 1''} \ ; \ D = \frac{3e^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} 1''}{4\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}$$

$$E = \frac{1 + 3 \tan^2 \varphi}{6 N^2} \ ; \ d\rho = \frac{1}{R \operatorname{sen} 1''}$$

$$- dp = B k \cos Az + C k^2 \operatorname{sen}^2 Az + D\,(d\varphi)^2 - E d\varphi\, k^2 \operatorname{sen}^2 Az \ ....(12)$$

Lo cual nos hace llegar a la misma fórmula de los Ings. Díaz Covarrubias y Medina Peralta, se anexan las tablas calculadas para los factores A, B, C, D y E

CALCULO DE COORDENADAS GEODESICAS
TABLA XI
LOGARITMOS DE (A)

Lat		0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
15	8.5096	282	260	238	216	194	171	-2	4	7	9	11	13	15	18	20
16		149	126	103	080	056	033	-2	5	7	10	12	14	17	19	22
17		009														
17	8.5095		985	962	036	912	887	-3	5	8	10	13	15	18	20	23
18		862	837	811	785	759	733	-3	5	8	10	13	15	18	20	23
19		707	681	654	628	601	573	-3	5	8	11	14	16	19	22	24
20		546	518	490	463	434	406	-3	6	8	11	14	17	20	22	25
21		377	349	320	291	262	232	-3	6	9	12	15	17	20	23	26
22		202	172	142	112	082	051	-3	6	9	12	15	18	21	24	27
23		021														
23	8.5094		990	959	927	896	865	-3	6	9	12	16	19	32	25	28
24		833	801	769	737	704	672	-3	6	10	13	16	19	22	26	29
25		639	606	573	540	507	473	-3	7	10	13	17	20	23	26	30
26		439	406	372	337	303	269	-3	7	10	14	17	20	24	27	31
27		234	200	165	130	094	059	-4	7	11	14	18	21	25	28	32
28		024														
28	8.5093		988	952	917	881	845	-4	7	11	14	18	21	25	29	32
29		808	772	735	699	662	625	-4	7	11	14	18	21	25	29	32
30		588	551	514	476	439	401	-4	7	11	15	18	22	26	30	33
31		363	325	287	249	211	173	-4	8	11	15	19	23	27	30	34
32		134	096	057	018											
32	8.5092					979	940	-4	8	12	16	20	23	27	31	35
33		901	862	823	784	744	704	-4	8	12	16	20	24	28	32	35

TABLA XII
LOGARITMOS DE (B)

DECENAS DE MINUTOS								.MINUTOS								
Lat	log 8.51	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
15°	23	807	742	677	611	544	477	-7	13	20	26	33	40	46	53	59
16		411	342	273	203	133	062	-7	14	21	28	35	42	49	56	63
17	22	991	919	846	773	699	625	-7	15	22	29	37	44	51	58	66
18		550	474	397	320	243	165	-8	15	23	31	39	46	54	62	69
19		086	007													
19	21			927	847	766	684	-8	16	24	32	41	49	57	65	73
20		602	519	435	351	267	182	-8	17	25	34	42	50	59	67	76
21		096	010													
21	20			924	836	748	660	-9	17	26	35	44	52	61	70	78
22		571	481	391	301	210	118	-9	18	27	36	46	55	64	73	82
23		026														
23	19		933	840	747	653	558	-9	19	82	38	47	56	66	75	85
24		463	367	271	174	077										
24	18						979	-10	19	29	39	49	58	68	78	87
25		881	783	684	584	484	384	-10	20	30	40	50	59	69	79	89
26		283	181	079												
26	17				977	874	771	-10	20	31	41	51	61	71	82	92
27		667	563	458	353	248	142	-11	21	32	42	53	63	74	84	95
28		036														
28	16		929	822	715	607	498	-11	22	32	43	54	65	76	86	97
29		389	280	171	061											
29	15					950	840	-11	22	33	44	55	66	77	88	99
30		729	617	505	393	281	168	-11	22	34	45	56	67	78	90	101
31		054														
31	14		941	827	713	598	483	-11	23	34	46	57	68	80	91	103
32		368	252	136	020											
32	13					903	786	-12	23	35	47	58	70	82	93	105
33		669	551	433	315	197	078	-12	24	35	47	59	71	83	94	106

TABLA XIII
LOGARITMOS DE (C)

DECENAS DE MINUTOS							MINUTOS								
Lat	0'	10'	20'	30'	40'	50'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
15°	0.8346	396	446	495	544	592	5	10	15	20	25	30	35	41	46
16	640	687	734	781	827	872	4	9	14	18	23	27	32	37	41
17	918	962													
17	9		007	051	095	138	4	9	13	17	22	26	31	35	39
18	181	224	266	308	350	392	4	8	12	17	21	25	29	33	38
19	433	473	514	554	594	634	4	8	12	16	20	24	28	32	36
20	673	712	751	789	828	866	4	7	11	15	19	23	27	31	34
21	903	941	978												
21	1.0			015	052	089	3	7	11	15	18	22	26	29	33
22	125	161	197	233	268	304	3	7	10	14	18	21	25	28	32
23	339	374	408	443	477	511	3	7	10	14	17	20	24	27	31
24	545	579	613	646	679	713	3	6	10	13	17	20	23	27	30
25	745	778	811	843	870	908	3	6	10	13	16	19	23	26	29
26	940	972													
26	1.1		003	035	066	098	3	6	9	12	16	19	22	25	28
27	129	160	191	221	252	283	3	6	9	12	15	18	21	24	27
28	313	343	373	403	433	463	3	6	9	12	15	18	21	24	27
29	493	523	552	581	611	640	3	6	9	12	15	17	20	23	26
30	669	698	728	756	784	813	3	5	8	11	14	17	20	23	26
31	841	870	898	926	955	983	3	5	8	11	14	17	20	22	52
32	011														
32	1.2	038	066	094	122	149	3	5	8	11	14	16	19	22	25
33	177	204	232	259	286	314	3	5	8	11	14	16	19	22	25

Las cifras subrayadas indican que conviene poner el número 5 a la derecha, a fin de que el error de la última cifra no pase de 0.25

TABLA XIV
LOGARITMOS DE (D), (E) Y (F)

LOG (D)							LOG (E)						LOG (F)
LA T	0'	10'	20'	30'	40'	50'	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
15°	2.090	095	099	103	108	112	5.697	699	701	702	704	706	7.68
16	116	120	124	128	132	135	708	710	712	714	716	718	70
17	139	143	147	150	154	157	720	722	724	726	728	730	72
18	161	164	168	171	174	178	732	734	736	738	740	742	74
19	181	184	187	190	193	197	744	747	749	751	753	755	76
20	200	203	206	208	211	214	757	760	762	764	767	769	77
21	217	220	223	225	228	231	571	774	776	778	780	783	79
22	233	236	239	241	244	246	785	788	790	792	795	797	80
23	249	251	253	256	258	260	800	802	805	807	810	812	81
24	263	265	267	269	272	274	815	817	820	822	825	827	82
25	276	278	280	282	284	286	830	833	835	838	841	843	83
26	288	290	292	294	296	298	846	849	851	854	857	859	84
27	300	302	303	305	307	309	862	865	868	870	873	876	85
28	310	312	314	315	317	319	879	881	884	887	890	893	86
29	320	322	323	325	326	328	896	898	901	904	907	910	86
30	229	331	332	334	335	337	913	916	919	922	925	927	87
31	328	339	341	342	343	344	930	933	936	939	942	945	87
32	346	347	348	349	350	352	948	951	954	958	961	964	87
33	333	354	355	356	357	358	967	970	973	976	979	982	88

40.- EXPLICACIONES DE LAS TABLAS.- La Tabla XI da a conocer los valores de log (A) con la latitud del segundo punto como argumento. Por ejemplo, para una latitud igual a 23° 47′ 05″, se tiene:

Para la latitud de 23° 40′		8.5094896
Por 7′	-	22
Por 5″		0
log (A)		8.5094874

TABLA XII.- De los logaritmos de (B), con la latitud del punto de partida como argumento.

Para la latitud de 23° 50′		8.5119558
Por 2′	-	19
Por 33′	-	5
Para la latitud de 23° 52′ 53″ : log (B)		3.5119534

TABLA XIII.- Da a conocer los logaritmos de (C) con la latitud del punto de partida como argumento. Poniendo el número 5 a la derecha del valor tubular cuando éste subrayado, se tiene la quinta cifra con menos de 0.25 de error.

Para la latitud de 23° 50′		1.05115
Por 2′	+	7
Por 53′	+	3
Para la latitud de 23° 52′ 53″ : log (C)		1.05125

TABLA XIV.- Da a los logaritmos de [D] , [E] y [F] , con la latitud del punto de partida como argumento. Para la misma latitud del ejemplo anterior, se tienen:

log (D)	log (E)	log (F)
2.26	5.81	7.81

EJEMPLO 18:

Calculo de la latitud por el Ing. Ricardo Toscano

DATOS		FACTORES GEODESICOS
$\varphi_A =$	19 ° 53′ 42.3″	log A= 8.5095573
$\lambda A =$	00 ° 23′ 37.4″	log B= 8.51216840
Acimut $\overline{AB}=$	289° 40′ 22.2″	log C= 0.96355
Distancia $\overline{AB}=$	49 326.95 m	log D= 2.197

log E= 5.755
log F= 7.760

Formula:

$$d\varphi = BK\ \cos Az + Ck^2 \operatorname{sen} ZAZ + D(d\varphi)^2 - Ed\varphi\, K^2\ \operatorname{sen}^2 Az$$

Solución:

log B = 8.512168400
log K = 4.693084263
log cos Az= 9.527176040
log. 1er termino 2.7324287 = 540.043″

log C = 0.96355
log k^2 = 9.3861685
log sen^2 Az = 9.94776109
log 2° termino = 0.29747959 = 1.983″
Σ 542.023″

log D = 2.197
log $(d\varphi)^2$ = 5.4680354
log 3er. Termino = 7.6650354 = 0.004″

log $k^2 \operatorname{sen}^2$ Az = 9.3339295
log E = 5.755
log (dφ) = 2.7340177
log 4° termino = 7.8229472 = 0.006″

19° 53′ 42.3″
\+ 09′ 02.02″
φ B = 20° 02′ 44.32

540.043
\+ 1.983
0.004
\- 0.006
dρ = 542.024″
dρ = 00° 09′ 02.024″

III.4.4) DEDUCCIÓN DEL ING. GANDARIAS

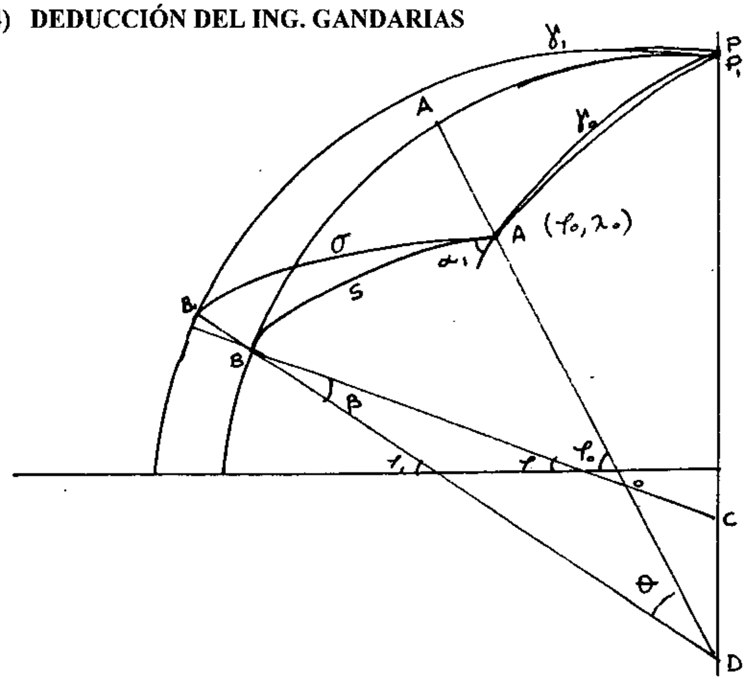


FIGURA 11

Conocida la posición A (φ_0 , λ_0) y el Acimut α y la distancia S a otro cualquier vértice B, determinar la posición Geográfica de este último vértice.
Para determinar la diferencia de latitud entre A y B resolveremos el triángulo esférico A,B,P, trazado sobre la esfera de Radio Na tangente al elipsoide a la largo del paralelo A, φ_0 mantiene su valor. En el triángulo (φ_1), latitud de B y σ El arco AB referido a un radio = 1, tenemos:

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \text{sen } b \text{ sen } \cos A$$

$$\cos \delta_1 = \cos \delta_0 \ \cos \sigma + \ \text{sen } \sigma \ \cos \ \varepsilon \text{ sen } \delta_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (A)$$

Teniendo en cuenta que el valor de σ raramente excederá de 1° y generalmente será menor de 30' , podremos expresar el valor de

$$\delta = f(\theta), \quad \text{por la serie de MACLURIN:}$$

$$\rho_1 = \rho_1 + \sigma \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2(\gamma_1)}{d\sigma^2} + \frac{\sigma^3}{6} \frac{d^3(\gamma_1)}{d\sigma^3} + \ldots\ldots$$

Diferenciando la fórmula (A) , un par de veces, nos queda:

$$-\operatorname{sen} \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{d\sigma} = -\cos\gamma_0 \operatorname{sen}\sigma + \cos\sigma \cos\varepsilon \operatorname{sen}\gamma_1 \ldots\ldots \quad (b)$$

$$-\operatorname{sen} \gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{d\sigma} - \cos\gamma_1 \left(\frac{d\gamma_1}{d\sigma}\right)^2 = -\cos\gamma_0 \cos\sigma - \operatorname{sen}\sigma \cos\varepsilon \operatorname{sen}\gamma_1 \ldots\ldots \quad (c)$$

Esta última ecuación (c), es igual a cos γ_1 , en su segundo miembro, realizando esta última sustitución y dividiendo ambos miembros entre cos γ , nos queda:

$$\tan \gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{d\sigma} + \left(\frac{d\gamma_1}{d\sigma}\right)^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Cuando $\sigma = 0$, $\gamma_1 = \gamma_0$, tenemos para la ecuación (b):

$$-\operatorname{sen}\gamma_0 \frac{d\gamma_1}{d\sigma} = \operatorname{sen} \gamma_0 \cos\varepsilon$$

$$\therefore \frac{d\gamma_1}{d\sigma} = -\cos\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Sustituyendo la ec. (f) en la ec. (d):

$$\tan \gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{d\sigma} + \cos^2\varepsilon = 1$$

$$\tan \gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{d\sigma} = \operatorname{sen}^2 \varepsilon$$

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\sigma} = \operatorname{sen}^2 \varepsilon \cot \gamma_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Sustituyendo los diferenciales (b) y (c) en la diferencial de (d) :

$$\tan \gamma \ \frac{d^3\gamma_1}{d\sigma^3} + \sec^2 \gamma_1 \left(\frac{d\gamma_1}{d\sigma}\right) \left(\frac{d^2\gamma_1}{d\sigma^2}\right) + 2 \left(\frac{d\gamma_1}{d\sigma}\right) \left(\frac{d^2\gamma_1}{d\sigma^2}\right) = 0 \ldots\ldots (\ e\ )$$

$$\tan \gamma_1 \ \frac{d^3\gamma_1}{d\sigma^3} + \sec^2 \gamma\ (\ -\cos \varepsilon\ )\ (\ \mathrm{sen}^2\, \varepsilon \cot \gamma\ ) + 2\ (\ -\cos \varepsilon\ )\ (\ \mathrm{sen}^2\, \varepsilon \cot \gamma\ ) = 0$$

Despejando la tercera diferencial, nos queda

$$\frac{d^3\gamma_1}{d\sigma} = \cos \varepsilon \ \ \mathrm{sen}^2\, \varepsilon \ \ \cot^2 \gamma_0\, (\ 2 + \mathrm{sen}^2\ \gamma_0)$$

$$\frac{d^3\gamma}{d\sigma} = (\ 2 \cot^2 \gamma_0 + \mathrm{cosec}^2\ \gamma_0\ )\ \mathrm{sen}^2\, \varepsilon \ \cos \varepsilon$$

Por la identidad $\mathrm{cosec}^2\ \gamma = 1 + \cot^2 \gamma$

$$\frac{d^3\gamma}{d\sigma} = (\ 2 \cot^2 \gamma_0 + (\ 1 + \cot^2 \gamma\ )\ )\ \mathrm{sen}\, \varepsilon \ \cos \varepsilon$$

$$\frac{d^3\gamma}{d\sigma} = (\ 1 + 3 \cot^2 \gamma\ )\ \mathrm{sen}\, \varepsilon \ \cos \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\ h\ )$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (f) , (g) y (h) en la serie de Maclaurin nos queda.

$$\gamma_1 = \gamma_0 - \sigma \cos \varepsilon + \frac{\sigma^2}{2} \ \mathrm{sen}\ \varepsilon \cot \gamma + \frac{\sigma^3}{6}\ (\ 1 + 3 \cot^2 \varphi)\ \mathrm{sen}\, \varepsilon \cos \varepsilon$$

$$\gamma_1 = 90^\circ - \varphi_1$$

$$\gamma_0 = 90^\circ - \varphi_0$$

$$\varepsilon = 180^\circ - \alpha$$

$$\delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1 = \sigma \cos\alpha_1 + \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{sen}\alpha_1 \tan\varphi_0 - \frac{\sigma^3}{6} (1 + 3\cot^2 \varphi_0) \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 \quad ..(\,i\,)$$

Ahora por medio de la figura No. 11 se deduce que la verdadera diferencia de la latitud entre los vértices A y B, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, se diferencia de la fórmula anterior en el ángulo B el cual es necesario determinar

$$\Delta\varphi - d\varphi = \varphi - \varphi_1 = B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\,j\,)$$

Trasladando por otro parte el punto A sobre su paralelo hasta el punto A_1, en el meridiano de B, y teniendo en cuenta que los radios de curvatura OA_1 y OB de la elipse pueden considerarse iguales al radio de curvatura ρm del trazo de la elipse A_1 B ya que estos puntos esta siempre muy próximos, podemos deducir del triángulo OBD.

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{B}{-\delta\varphi} = \frac{Na - \rho m}{\rho m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\,k\,)$$

Despejando la ecuación (j) el valor de Aφ , y sustituyendo seguidamente el valor de B deducido en la ecuación (k) tendremos:

$$\Delta\varphi = \delta\varphi - \beta = \delta\varphi + \frac{N_A}{\rho_m}\delta\varphi - \delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \delta\varphi - \beta = \frac{N_A \delta\varphi}{\rho_m}$$

Si sustituimos en esta relación el valor de (δ φ) en la ecuación (i) y tenemos en cuenta que los elementos $\sigma_y\ \alpha_i$ pueden considerarse iguales a los trazados sobre el elipsoide, dada la pequeña separación que siempre existirá entre las dos superficies y sustituyendo:

$$\sigma = \frac{s}{N_A} \quad \text{expresado en segundos}$$

$$\Delta\varphi = \frac{s\cos\alpha}{\rho_m \operatorname{sen}1''} + \frac{s^2 \operatorname{sen}^2\alpha_1 \operatorname{tg}\varphi_0}{2NA\rho_m \operatorname{sen}1''} - \frac{s^2 \operatorname{sen}^2\alpha_1 \cos\alpha_1}{6NA\rho_m \operatorname{sen}1''}\left(1 + 3\tan^2\varphi_0\right)$$

El signo negativo porque cuando el Acimut α_1 , está en el primer o cuarto cuadrante y cos α_1 es positivo la diferencia de latitud es negativa.

El Ing. Gandarias deduce que:

En triangulaciones ordinarias, el último término de la relación anterior es siempre despreciable no debiéndose tener en cuenta más que para longitudes de lados mayores a los 20 km.
La diferencia de latitud queda por lo tanto como:

$$-\Delta\varphi'' = \frac{s\cos\alpha_1}{\rho_m \operatorname{sen} 1''} + \frac{s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 \operatorname{tg}\varphi_0}{2NA\rho_m \operatorname{sen} 1''}$$

Como no es conocido ρ_m (Radio de curvatura medio del Elipsoide A,B.) . Sustituiremos su valor por ρ_A (radio de curvatura en el punto A, cuya posición geográfica es la conocida). Lo que provoca que el primer término de la ecuación anterior surge una variación la cual es necesario tomar en cuenta; esto no sucede en el segundo término, que por su pequeñez no se altera
Ahora introduciendo los factores tendremos:

$$P_{\rho 0} = \frac{1}{\rho_A \operatorname{sen} 1''}$$

$$Q_{\rho 0} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{2N_A\rho_A \operatorname{sen} 1''}$$

(Estos valores ya se encuentran tabulados, en la tabla dada al final de la deducción)

$$-\Delta\varphi'' = P\rho_0 \, s \cos\alpha_1 + Q\rho_0 \, s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1$$

El error cometido en esta última ecuación, consiste en tomar en el primer término un valor $P_{\rho 0}$ correspondiente a la latitud φ_0 (latitud conocida del vértice A) En lugar de $P_{\rho m}$. Por ello en necesario aplicar una corrección. Pues un valor aproximativo de $\Delta\varphi$ lo tenemos con el primer término de la ecuación anterior, y si la diferencia tabular para 1' corresponde al log $P\rho_0$ lo dividiremos entre 60 y lo multiplicamos por obtendremos la corrección que hay que aplicar al primer término de la susodicha ecuación, en unidades del séptimo orden del logaritmo.

Para facilitar el cálculo, esta corrección se ha tabulado, en función del log $\Delta\varphi$ en una tabla, al final de esta deducción:
Y por tanto la relación que expresa la diferencia de latitud del punto (B) cuando sea conocida la latitud de (A) quedará:

$$- \Delta\varphi'' = P_{\rho 0}\, s \cos \alpha_1 + Q_{\rho 0}\, s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + C \text{ corrección.}$$

EJEMPLO 19:

Ejercicio hecho ver figura 7, con los siguientes datos.

(Latitud de A)	$\varphi_0 =$	19° 53′ 42.3″
(Acimut A - B)	$A_z =$	289° 40′ 22.2″ $= \alpha_1$
(Distancia)	$S =$	49 326. 95 m

Fórmula: $- \Delta\rho'' = P_{\rho 0}\, s \cos \alpha_1 + Q_{\rho 0}\, s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 +$ corrección.

Log S	= 4.6930842	
Log cos α_1	= 9.5271771	
Log $P_{\rho 0}$	= <u>8.5124363</u>	
Log $\Delta\varphi$	= 2.7323976	
Corrección	= + 42	Log ($\Delta\varphi$/2) (log $P_{\rho 0} \div 60$)
Log [- (φ_1 - φ_0)]	= 2.7324018	
	540″	
Primer Término	= 00° 09′ 00″	
Log Q	= 0.964811779	
log S	= 4.6930842	
log S	= 4.6930842	
- 2 log sen α_1	= <u>9.9738804</u>	
Log [- (φ_1 - φ_0)]	= 0.2987409	
Segundo término	= 00° 00′ 01.99″	
φ_0	= 19° 53′ 42.30″	
1er. término	= 09′ 00.00″	
2° término	= - <u>01.99″</u>	
φ	= 20° 02′ 40.31″	

TABLA XV
TABLA VALORES DE P,N

φ	$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$	$P = \frac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''}$	Log P_{po}	N
0°	6335508.3	0.03255694	8.51264358	6378388.0
5	6335993.6	0.03255445	8.51261036	6378550.8
10	6337435.2	0.03254704	8.51251149	6379034.6
15	6339790.3	0.03253495	8.51235014	6379824.7
20	6342989.0	0.03251855	8.51213117	6380897.4
25	6346936.1	0.03249832	8.51186091	6382220.7
30	6351513.7	0.03247490	8.51154782	6383754.7
35	6356584.8	0.03244899	8.51120118	6385453.2
40	6361996.9	0.03242139	8.51083163	6387264.9
45	6367586.6	0.03239293	8.51045023	6389135.0
50	6373184.6	.03236448	8.51006863	6391006.7
55	6378620.2	0.03233690	8.50969838	6392823.2
60	6383727.4	0.03231102	8.50935067	6394528.9
65	6388349.4	0.03228765	8.50903644	6396071.8
70	6392343.6	0.03226747	8.50876492	6397404.5
75	6395586.6	0.03225111	8.50854467	6398486.2
80	6397977.8	0.03223906	8.50838237	6399283.6
85	6399443.0	0.03223168	8.508282943	6399772.0
90	6399936.6	0.03222919	8.50824939	6399936.5

e^2 = 0.006722653 ELIPSOIDE INTERNACIONAL (HAYFORD)
a = 6378388 m
b = 6356912 m

$\alpha = 1/297$

TABLA XV
TABLA VALORES DE P,N

φ	Log Q_{po}
0°	0
5	0.3483049
10	0.6530195
15	0.8345479
20	0.9672671
25	1.0744507
30	1.1667261
35	1.2501759
40	1.3281757
45	1.4039780
50	1.4795753
55	1.5577477
60	1.6410773
65	1.7367948
70	1.8406706
75	1.9733588
80	2.1547282
85	2.4590908
90	∞

III.4.5) DEDUCCIÓN DEL ING. L. HOSMER

En la fórmula (i) tenemos, introduciendo $\theta = \dfrac{s}{N}$:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{s\cos\alpha}{N} + \frac{s^2}{2N^2}\operatorname{sen}^2\alpha \tan\varphi -$$

$$- \frac{s^3}{6N^3}\operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha\left(1 + 3\tan^2\rho_0\right)$$

La diferencia de latitud es muy aproximada en la superficie de la esfera y el esferoide y su diferencia angular en la latitud varia inversamente al radio ; es decir:

$$s = (\varphi_1 - \varphi_0)\, N = \Delta\varphi' \ \mathrm{Rm}\ \operatorname{sen} 1''$$

$\Delta\rho''$ es la existencia en segundos de arco del meridiano de la esferoide y Rm es el radio de curvatura del meridiano en el punto medio entre las paralelas a través del vértice (A) y (B) . En consecuencia la diferencia de latitud (recuérdese que cuando el cos α es positivo y va creciendo, la latitud decrece) se puede escribir

$$-\Delta\varphi'' = \frac{s\cos\alpha}{\mathrm{Rm}\ \operatorname{sen}1''} + \frac{s^2\operatorname{sen}^2\tan\varphi_0}{2N\mathrm{Rm}\operatorname{sen}1''} -$$

$$- \frac{s^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha(1+3\tan^2)\varphi_0}{6N^2\mathrm{Rm}\operatorname{sen}1''} \qquad \text{...........(m)}$$

El signo negativo se introduce porque cuando esta en el primer o segundo cuadrante es positivo y la diferencia de latitudes es negativa. Introduciendo factores:

$$B = \frac{1}{Rm\,sen\,1''} \quad , \quad C = \frac{\tan\varphi_0}{2NRmsen1''}$$

$$h = \frac{s\cos\alpha}{Rm\,sen\,1''} \quad , \quad E = \frac{1 + 3\tan^2\varphi_0}{6N^2}$$

Sustituyendo en ec. (m) :

$-\Delta\varphi'' = Bscos\,\alpha + CS^2\,sen^2\,\alpha - Ehs^2\,sen^2\,\alpha$

Aquí Hosmer introduce el factor D ($\delta\varphi''$)^2 (término correctivo) puesto que al principio la medida de la latitud (B) no es conocida, no se puede tomar el valor de radio de curvatura media (φ_m) puesto que no se conoce la latitud media, para encontrar el valor aproximado de la diferencia de latitud referida a la latitud media y su relación a $\Delta\varphi''$ es inverso a la relación de sus radios respectivos o sea:

$$\frac{\delta\rho''}{RM} = \frac{\Delta\rho''}{Rm}$$

$$-\Delta\varphi'' = \delta\varphi''\,\frac{Rm}{RM} = \delta\varphi''\left(1 - \frac{RM - Rm}{RM}\right)$$

$$\Delta\varphi'' = \delta\varphi''\left(1 - \frac{dRM}{RM}\right)$$

En el cual $\delta\varphi''\,\dfrac{dRM}{RM}$:

Es la corrección que debe restarse al valor tabulado en la ecuación de la diferencia de latitud. Para lo cual tenemos, que el Rm vale:

$$Rm = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2\,sen^2\,\varphi\right)^{3/2}}$$

Por lo cual

$$dRm = a\,(1 - e^2)\,(-3/2)\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-5/2}\,(-2\,e^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$dRm = \frac{a\left(1 - e^2\right)3e^2 \operatorname{sen}\varphi\ \cos\varphi}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{5}{2}}}$$

En esta ecuación tenemos que dρ es igual a

$$d\varphi = \frac{\delta\varphi \operatorname{sen} 1''}{2} \quad (\text{ en segundos})$$

Puesto que dRm es el punto de partida del punto medio, la diferencia $d\varphi$ es tomada en medio de la diferencia de latitud $\delta\varphi$ y multiplicada por sen 1" para transformar en segundos nos queda:

$$\delta\varphi'' d\,\frac{Rm}{Rm} = \frac{3e^2 \operatorname{sen}\varphi\ \cos\varphi\ \operatorname{sen}1''}{2\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}\,(\delta\varphi'')^2 \quad = D\,(\delta\varphi'')^2$$

Con lo cual introduciendo este factor a la ecuación (m) nos queda:

$$-\Delta\varphi'' = B s\cos\alpha + CS^2 \operatorname{sen}^2\alpha + +D\,(\delta\varphi'')^2 - Ehs^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

y la latitud buscada será:

$$\varphi' = \varphi + \Delta\rho''$$

Los logaritmos de los factores B,C,D y E se encuentran en la tabla al final de esta deducción, y están referidos a la elipsoide de Clarke de 1866.

El término (D) se inserta adelante del término (E) a causa de que normalmente es mas grande que (E). El término (E) se omite cuando el Log S es menor que 4.23 (distancia menor de 17 000m aproximadamente) El término (D) se omite cuando Log S (longitud) es menor de 2.31 y el término (h^2) se sustituye por $(\delta\varphi'')^2$ cuando el Log S es menor de 4.93 .....

TABLA XVI
LOGARTIMO DE FACTORES GEODESICOS

LATITUD	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E
° '	- 10	- 10	- 10	- 10	- 20
18 00	8.5095862	85122550	0.91816	2.1606	5.7317
10	5836	2474	0.92243	2.1641	5.7337
20	5811	2397	0.92667	2.1675	5.7358
30	5785	2320	0.93088	2.1709	5.7379
40	5759	2243	0.93505	2.1742	5.7400
50	5733	2165	0.93919	2.1775	5.7422
19 00	5707	2086	0.94330	2.1808	5.7443
10	5681	2006	0.94737	2.1840	5.7464
20	5654	1927	0.95142	2.1872	5.7486
30	5627	1847	0.95544	2.1903	5.7508
40	5600	1766	0.95943	2.1934	5.7530
50	5573	1684	0.96339	2.1965	5.7552
20 00	5546	1602	0.96733	2.1996	5.7574
10	5518	1519	0.97123	2.2026	5.7597
20	5490	1435	0.97511	2.2055	5.7619
30	5462	1351	0.97896	2.2084	5.7642
40	5434	1267	0.98279	2.2113	5.7664
50	5406	1182	0.98659	2.2142	5.7688
21 00	5377	1096	0.99037	2.2170	5.7711
10	5348	1010	0.99412	2.2198	5.7734
20	5320	0924	0.99785	2.2226	5.7757
30	5290	0836	1.00156	2.2253	5.7780
40	5261	0748	1.00524	2.2280	5.7804
50	5232	0660	1.00890	2.2307	5.7828
22 00	5202	0571	1.01253	2.2333	5.7851
10	5172	0481	1.01615	2.2359	5.7875
20	5142	0391	1.01974	2.2385	5.7899
30	5112	0301	1.02331	2.2411	5.7924
40	5082	0210	1.02686	2.2436	5.7948
50	5051	0118	1.03039	2.2461	5.7972
23 00	5020	0026	1.03390	2.2485	5.7997
10	4990	9934	1.03739	2.2510	5.8021
20	4959	9840	1.04086	2.2534	5.8046
30	4927	9747	1.04431	2.2557	5.8071
40	4896	9653	1.04775	2.2581	5.8096
50	4865	9558	1.05116	2.2604	5.8121
24 00	4833	9463	1.05456	2.2627	5.8146
10	4801	9367	1.05794	2.2650	5.8172
20	4769	9271	1.06130	2.2672	5.8197
30	4737	9174	1.06464	2.2694	5.8223
40	4704	9077	1.06797	2.2716	5.8249
50	4672	8979	1.07128	2.2738	5.8274
60	4639	8881	1.07457	2.2759	5.8300

TABLA XVI
LOGARTIMO DE FACTORES GEODESICOS. continuación

LATITUD	LOG A	LOG B	LOG C	LOG D	LOG E
° '	- 10	- 10	- 10	- 10	- 20
25 00	8.5094639	85118881	1.07547	2.2759	5.8300
10	4606	8783	1.07785	2.2780	5.8326
20	4573	8684	1.08111	2.2801	5.8352
30	4540	8584	1.08435	2.2822	5.8379
40	4507	8484	1.08758	2.2842	5.8405
50	4473	8383	1.09080	2.2862	5.8431
26 00	4439	8283	1.09400	2.2882	5.8458
10	4406	8181	1.09718	2.2902	5.8485
20	4372	8079	1.10036	2.2922	5.8512
30	4337	7977	1.10351	2.2941	5.8539
40	4303	7874	1.10666	2.2960	5.8566
50	4269	7771	1.10979	2.2978	5.8593
27 00	4234	7667	1.11290	2.2997	5.8620
10	4200	7563	1.11600	2.3015	5.8647
20	4165	7458	1.11909	2.3033	5.8675
30	4130	7353	1.12217	2.3051	5.8702
40	4094	7248	1.12523	2.3069	5.8730
50	4059	7142	1.12829	2.3086	5.8757
28 00	4024	7036	1.13132	2.3104	5.8785
10	3988	6929	1.13435	2.3121	5.8813
20	3952	6822	1.13737	2.3137	5.8841
30	3917	6714	1.14037	2.3154	5.8870
40	3881	6607	1.14337	2.3170	5.8898
50	3845	6498	1.14635	2.3187	5.8926
29 00	3808	6389	1.14932	2.3203	5.8955
10	3772	6280	1.15228	2.3218	5.8983
20	3735	6171	1.15522	2.3234	5.9012
30	3699	6061	1.15810	2.3249	5.9041
40	3662	5950	1.16109	2.3264	5.9069
50	3625	5840	1.16401	2.3279	5.9098
30 00	3588	5729	1.16692	2.3294	5.9127
10	3551	5617	1.16981	2.3309	5.9157
20	3514	5505	1.17270	2.3323	5.9186
30	3476	5393	1.17558	2.3337	5.9215
40	3439	5281	1.17845	2.3351	5.9245
50	3401	5168	1.18131	2.3365	5.9274
31 00	3363	5054	1.18416	2.3379	5.9304
10	3325	4941	1.18700	2.3392	5.9334
20	3287	4827	1.18983	2.3405	5.9363
30	3249	4713	1.19266	2.3418	5.9393
40	3211	4598	1.19543	2.3431	5.9423
50	3173	4483	1.19828	2.3444	5.9453
60	3134	4968	1.21108	2.3456	5.9484

III.4.6) DEDUCCIÓN DEL MAESTRO SALENUEVE

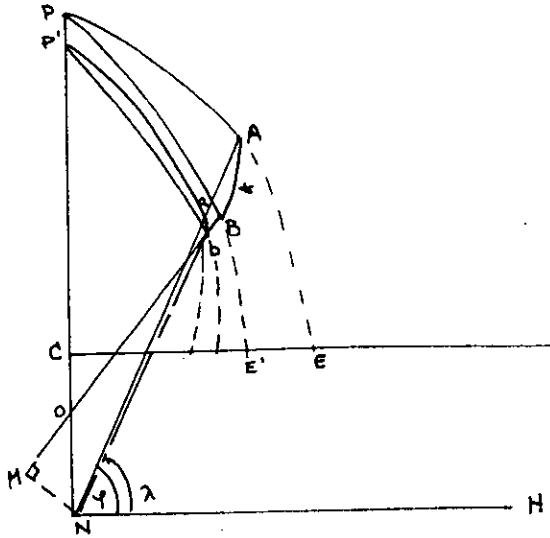


FIGURA No. 12

Existe otra fórmula que ha sido empleada para la obtención de la latitud del vértice 'B' conocidas las coordenadas geográficas del vértice 'A' . Esta fórmula fue empleada y deducida en el libro del curso de Geodesia del Colegio Nacional de Minería, en el siglo pasado (Julio 13 de 1852).

En la figura No. 12 sea P un polo de la Tierra, PA, PB, los meridianos; AN,BO las normales de los puntos A,B.

Suponiendo conocida la latitud φ o el ángulo ANH; tratando de determinar la latitud φ' del vértice B, extremo de la línea Geodésica AB=K
Para hallar $\varphi - \varphi'$ o la diferencia de inclinaciones de las normales AN,BO, que no están en un mismo plano sobre el Ecuador, se traza una línea BN que formará con dicho plano un ángulo λ (lambda) y de allí, obtendremos los valores de $\varphi - \lambda$ y $\lambda - \varphi'$ y simplificaremos a λ . Para ello supongamos que desde el centro N y con un radio igual a uno, se describirá una esfera;

su superficie será cortada por los planos de los meridianos PA,PB, y por el arco AB en los puntos P, a,b, donde p'a será, el complemento de la latitud φ , p'b el complemento de λ, y

ab = ψ , donde $\psi = \dfrac{K}{AN}$

ya que el arco k por ser demasiado pequeño respecto al radio de la Tierra se confunde con el de su círculo osculador y que:

$$\frac{1}{\psi} = \frac{AN}{K}$$

Si hacemos $\varphi - \lambda = x$ nos quedará :

$$x = (\,90° - pa\,) - (\,90° - pb\,) = pb - pa$$

$$pb = pa + x$$

por la identidad:

cos pb = coa pa cos x - sén pa sen x ....(13)

En el triángulo esférico de la figura anterior, p' a b, tenemos:

cos pb = cos pa cos ab + sen pa sen ab cos a ....(14)

igualando ecuaciones 13 y 14

cos pa cos x - sen pa sen x = cos pa cos ab + sen pa sen ab cos a

Pero a es el suplemento del Acimut z que se mide comúnmente desde el polo sur al oriente o al poniente, y así a = 180° - z , también:

$$pa = 90° - \varphi \text{ y } ab = \psi \text{, luego:}$$

$$\operatorname{sen}\varphi \cos x - \cos\varphi \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi - \cos\varphi \operatorname{sen}\psi \cos z$$

Siendo x y ψ cantidades muy pequeñas podemos tomar los dos primeros términos de las series de los senos y cosenos y sustituir:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad \text{sen } \psi = w - \frac{w^3}{6}$$

Así nos queda:

$$\text{sen } \varphi \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \cos\varphi\,(x) = \text{sen}\varphi\left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) - \cos\,\varphi(\psi)\cos z$$

Reduciendo términos:

$$\frac{x^2}{2}\text{sen } \varphi + x\cos\,\varphi = \frac{\psi^2}{2}\text{sen } \varphi + \psi\cos\varphi\cos AZ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Si resolvemos esta última ecuación de segundo grado con respecto a x, resultaría un valor irracional; pero considerando que son muy pequeños x, ψ podremos suprimir los términos cuadrados para obtener un valor aproximativo:

$$x\cos\varphi = \psi\cos\varphi\cos z$$
$$x = \psi\cos z$$
$$x^2 = \psi^2\cos^2 z$$

Que sustituido en la ecuación 15 se transforma en la ecuación siguiente de primer grado.

$$\frac{\psi^2}{2}\cos^2 z\,\text{sen } \varphi + x\cos\varphi = \frac{\psi^2}{2}\text{sen}\varphi + \psi\cos\varphi\cos z$$

Y de aquí despejando a x:

$$x\cos\varphi = \frac{\psi^2}{2}\text{sen}\varphi + \psi\cos\,\varphi\cos z - \frac{w^2}{2}\cos^2 z\,\text{sen }\varphi$$

$$x = \frac{\psi^2}{2}\tan\varphi + \psi\cos z - \frac{\psi^2}{2}\cos^2 z\tan\varphi$$

$$x = \psi\cos z + \frac{\psi^2}{2}\tan\varphi\,\text{sen}^2 z$$

$$x = \psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan \varphi \operatorname{sen}^2 z \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (16)$$

Este es el valor de x de $\varphi - \lambda$

Busquemos ahora $\lambda - \varphi'$. Siendo BO la normal del punto B, el ángulo OBN es la diferencia entre λ y φ' llevemos desde N la perpendicular NM sobre la prolongación de BO. y tendremos el triángulo rectángulo BNM. donde sen NBM = $\frac{MN}{BN}$; y como el ángulo B es muy pequeño tomaremos el arco por el seno y con esto

$$B = \lambda - \varphi' = \frac{MN}{BN}$$

Donde MN = NO cos MNO, y MNO = p' porque los lados que forman estos ángulos son perpendiculares respectivamente y así:

$$\lambda - \varphi' = \frac{NO}{BN} \cos \varphi$$

También se tiene NO = NC - CO, que es la diferencia entre las subnormales de los puntos A,B, y como BN se puede suponer igual a AN, que si la normal de A, resulta, haciendo las sustituciones:

$$\lambda - \varphi' = \frac{NC - CO}{AN} \cos \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (17)$$

Recordando que (véase pag. 32 , TANGENTE, SUBTANGENTE, NORMAL) CAPITULO II.8.

$$OH = NC = \frac{a\, e^2 \operatorname{sen} \varphi}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$N = AN = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen} \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$CO = \frac{a\,e^2 \operatorname{sen} \varphi'}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi'\right)^{\frac{1}{2}}}$$

por último los valores anteriores sustituidos en la ecuación 17 nos dará

$$\lambda - \varphi' = \left[\frac{a\,e^2 \operatorname{sen}\varphi}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\,e^2 \operatorname{sen} \varphi'}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi'\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \times$$

$$\times \; \frac{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{a} \cos \varphi'$$

La diferencia entre las latitudes φ, φ' es siempre muy pequeña, por lo que se pueden suponer iguales los denominadores:

$(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)$ ½ , $(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi')$ ½ , y con esta suposición:

$$\lambda - \varphi' = e^2\left(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi'\right)\cos\varphi$$

Se sabe que $\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi' = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\varphi - \varphi'\right)\cos\frac{1}{2}\left(\varphi + \varphi'\right)$

por consiguiente:

$$\lambda - \varphi' = 2\, e^2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\varphi - \varphi'\right)\cos\frac{1}{2}\left(\varphi + \varphi'\right)\cos \varphi$$

También la cuerda de un arco φ − φ' = 2 sen ½ (φ − φ') y siendo φ − φ' muy pequeño, se confunde, con su cuerda. Luego:

$$\lambda - \varphi' = e^2\left(\varphi - \varphi'\right) \cos\frac{1}{2}\left(\varphi + \varphi'\right) \cos\varphi$$

Aun se puede simplificar esta ecuación considerando que el factor φ − φ' es muy pequeño, puesto que los lados de los triángulos deben proporcionarse siempre al buen alcance de los anteojos de los instrumentos; y por consiguiente ½ (φ + φ') = φ' = φ con lo que:

$$\lambda - \varphi' = e^2(\varphi - \varphi')\cos^2\varphi \text{ ....} \quad (18)$$

Como los cálculos se dirigen a determinar $\varphi - \varphi'$ o φ' es necesario que desaparezca λ y lo conseguiremos sumando esta última ecuación con la ecuación 16

$$\varphi - \lambda = \psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z$$

+

$$\underline{\lambda - \varphi'} = e^2 (\varphi - \varphi') \cos^2\varphi$$

$$\varphi - \varphi' = \psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z + e^2 (\varphi - \varphi') \cos^2\varphi$$

Despejando $\varphi - \varphi'$ pasando el denominador al numerador, haciendo la potencia hasta el segundo término e indicando multiplicaciones

$$(\varphi - \varphi') - e^2 (\varphi - \varphi') \cos^2\varphi = \psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z$$

$$(\varphi - \varphi')(1 - e^2 \cos^2\varphi) = \psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z$$

$$\varphi - \varphi' = \frac{\psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z}{(1 - e^2 \cos^2\varphi)}$$

$$\varphi - \varphi' = [\psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z] \, (1 - e^2 \cos^2\varphi)^{-1}$$

Pero:

$$(1 - e^2 \cos^2\varphi)^{-1} = 1 - (-1)(1)\, e^2 \cos^2\varphi +$$

$$\frac{+ (-1)(-2)(1)(e^2 \cos^2\varphi)^2}{2}$$

$$\varphi - \varphi' = [\psi \cos z + \frac{\psi^2}{2} \tan\varphi \operatorname{sen}^2 z] \, (1 + e^2 \cos^2\varphi)$$

$$\varphi - \varphi' = \psi\ (1 + e^2 \cos^2 \varphi) \cos z + \frac{\psi^2}{2}\ (1 + e^2 \cos^2 \varphi) \tan \varphi \operatorname{sen}^2 z$$

$$\psi = \frac{K}{N} = \frac{K\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{1/2}}{a \operatorname{sen} 1''} \quad \text{.........................} \ (19)$$

$$\psi^2 = \frac{K^2}{N^2} = \frac{K^2 \left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}{a^2 \operatorname{sen}^2 1''} \quad \text{.......................} \ (20)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones 19 y 20 en la ecuación anterior:

$$\varphi - \varphi' = \frac{K\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{a \operatorname{sen} 1''}\left(1 + e^2 \cos^2 \varphi\right) \cos z +$$
$$+ \frac{K^2\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}{a^2 \operatorname{sen} 1''}\left(1 + e^2 \cos^2 \varphi\right) \tan \varphi \operatorname{sen}^2 z$$

Abreviando igualaremos:

$$P = \frac{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{a \operatorname{sen} 1''}\left(1 + e^2 \cos^2 \varphi\right)$$

$$Q = \frac{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}{2\ a^2 \operatorname{sen}^2 1''}\left(1 + e^2 \cos^2 \varphi\right) \tan \varphi$$

Por lo tanto las ecuaciones finales nos quedarán:

$$\varphi - \varphi' = P\ K \cos z + Q\ K^2 \operatorname{sen}^2 z$$

$$\varphi' = \varphi - PK \cos z - Q\ K^2 \operatorname{sen}^2 z$$

Nota: los signos no concuerdan con la fórmula del Ing. Covarrubias.

$$\varphi' = \varphi + \mathbf{AK\ cos\ Z\ -\ BK2\ \ sen\ Z}$$

Se forma una tabla para diferentes valores de los coeficientes P,Q (Elipsoide de Beseel)
a= 6 377,397

TABLA XVII

φ	$\frac{(1 - e^2 sen^2 \varphi)^{1/2}}{a\ sen\ 1''}$	$(1 + e^2 \cos^2 \varphi)$	P
0	0.03234310	1.0066743	0.0355896
5	0.03234228	1.0066236	0.0325565
10	0.03233985	1.0064730	0.0325492
15	0.03233587	1.0062272	0.03253723
20	0.03233047	1.0058935	0.032521014
25	0.03232382	1.0054822	0.032501014
30	0.03231611	1.0050057	0.032477872
35	0.03230757	1.0044785	0.032452263
40	0.03229847	1.0039166	0.032424976
45	0.03228909	1.0033371	0.032396842
50	0.03227970	1.0027576	0.032368716
55	0.03227059	1.0021957	0.032341453
60	0.03226205	1.0016685	0.03231588
65	0.03225432	1.0011921	0.032292775
70	0.03224765	1.0007807	0.032272829
75	0.03224224	1.0004470	0.032256654
80	0.03223825	1.0002012	0.032244739
85	0.03223581	1.0000506	0.032237441
90	0.03223498	1	0.03223498

Donde a sen 1'' = 30.9184 m

TABLA XVII

φ	$\frac{(1 - e^2 sen^2 \varphi)^{1/2}}{a \text{ sen } 1''}$	$(1 - e^2 \cos^2 \varphi) \tan \varphi$	Q
10°	5.229328E-4	0.17746835	9.2804E-9
15	5.228043E-4	0.269617767	1.4095E-4
20	5.226297-4	0.366115312	1.91342E-4
25	5.224146E-4	0.468864063	2.44941E-4
30	5.2216541E-4	0.580240325	3.0298E-4
35	5.218896E-4	0.703343433	3.67067E-4
40	5.21595E-4	0.842386082	4.39385E-4
50	5.20989E-4	1.195040044	6.22603E-4
60	5.20420E-4	1.734940864	9.02897E-4
70	5.199555E-4	2.749622498	1.42968E-3
80	5.196524E-4	5.672423192	2.94768E-3
90	5.19547E-4	0.017455064	9.0686E-9

EJEMPLO 20:

DATOS

$\varphi =$ 19° 53' 42.3

$\lambda = +$ 00° 23' 37.4''

Acimut $\overline{AB}$ = 49 326.95 m

Distancia $\overline{AB}$ = 289° 40' 22.2

FORMULA

$Q = 1.90284 \times 10^{-4}$

$P = 0.032521354$

Encontrar la φ (λ latitud del vértice B)

$$\varphi' = \varphi - Pk\cos z - Qk^2 \operatorname{sen}^2 z$$

$$\begin{array}{rcl} \log P &=& 8.512168619 - 10 \\ \log K &=& 4.693084703 \\ \log \cos z &=& 9.527187703 - 10 \\ \hline \boxed{2^\circ \text{ término}} &=& 2.73244105 \quad = 540.058'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log Q &=& 6.279402272 \\ \log K^2 &=& 9.386168520 \\ \log K &=& 4.693084703 \\ \log \operatorname{sen}^2 Z &=& 9.94776109 \\ \hline \boxed{3^{er} \text{ término}} &=& 5.613331882 \quad = 0.00004'' \end{array}$$

En este ejemplo tercer término es despreciable, por lo tanto nos queda:

$$\begin{array}{rcl} \varphi &=& 19^\circ\ 53'\ 42.30 \\ &+& \\ 2^{do} \text{ término} &=& \underline{00^\circ\ 09'\ 00.05} \\ && 20^\circ\ 02'\ 42'35 \end{array}$$

III.4.7) DEDUCCIÓN DEL MAESTRO PUISSANT

El cálculo de los puntos Geodésicos dados por el Maestro Puissant.
El Maestro Puissant tomo como referencia el Elipsoide de Clarke (1866) cuyos valores adoptados en los Estados Unidos son:

(a)	Semi eje mayor	= 6'378,276.5m	log = 6.8047033
(b)	Semi eje menor	= 6'356,653.7m	log = 6.8032285
(α)	Compresión Polar	= 0.003300069	log = 7.5302093 - 10
(e^2)	Excentricidad	= 0.0067686580	log = 7.8305026 - 10

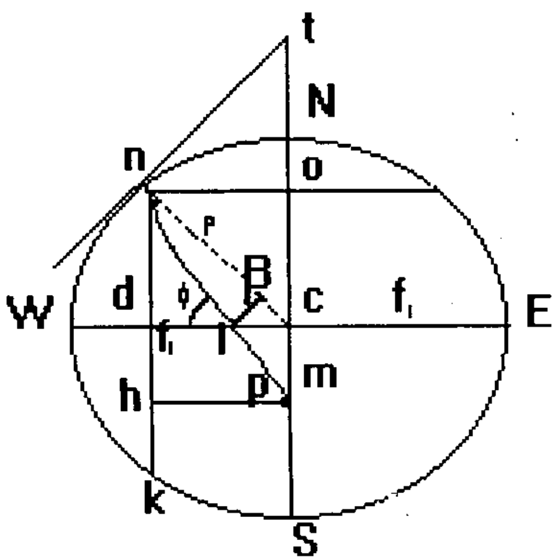


FIGURA 13

N = NORMAL MAYOR = nm
R = RADIO DE CURVATURA = np
r = RADIO DEL PARALELO = no
T = TANGENTE = nt
ϕ = LATITUD GEODÉSICA
β = LATITUD GEOCENTRICA
ρ = RADIO VECTOR = nc

Por Geometría Analítica tenemos:

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad R = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{R del Ecuador} = \frac{b^2}{a} \qquad \text{R de los Polos} = \frac{a^2}{b^2}$$

$r = N \cos \phi$ $\qquad$ $T = N \cot \phi$

$nl = N (1 - e^2)$ $\qquad$ $nd = N (1 - e^2) \operatorname{sen} \phi$

$$\tan \beta = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi \qquad \rho = a (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \beta) ½$$

$\sqrt{RN}$ = Radio de la Esfera Osculatriz o $n = \dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$

Logaritmos de las constantes

Número	Log
a	6.8047033
b	6.8032285
e^2	7.8305018 - 10
$(1 - e^2)$	9.9970504 -10
$a (1 - e^2) = b$	6.8032285
$\dfrac{b^2}{a} = a\left(1 - e^2\right)$	6.8017537
$\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}$	6.8061781
$\dfrac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$	9.9970504 - 10

En la siguiente figura tenemos:

α = acimut en el punto inicial
N = Normal mayor
R = Radio de curvatura
$R\alpha$ = Radio de curvatura en función del acimut (α)

$$R\alpha = \frac{R}{\cos^2\alpha\left(1 + \frac{R}{N}\tan^2\alpha\right)}$$

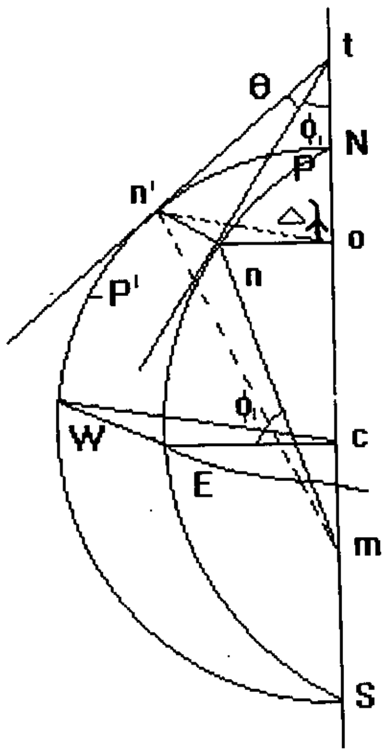


FIGURA 14

ϕ y ϕ' = representa las latitudes de los vértices n' y n

ϕ_1 = ½ (ϕ + ϕ') latitud media

n y n' = representan los vértices
$\Delta\lambda$ = diferencia de longitudes
no = r = radio del paralelo y latitud en n
nt = t = tangente a n

De la figura tenemos:

$$n\,n' = 2T \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,\theta = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,(\Delta\lambda)$$

sustituyendo $r = T \operatorname{sen} \phi_1$

$$2T \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,\theta = 2T \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,(\Delta\lambda)$$
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,\theta = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,(\Delta\lambda) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,\phi_1$$

Tomando los arcos por los senos de ϕ $\Delta\lambda$

$$\theta = \Delta\lambda \operatorname{sen} \phi_1 = \Delta\lambda \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\phi + \phi')$$

El maestro Puissant nos da las siguientes formulas con las cuales se requiere una precisión de siete cifras logarítmicos después del punto decimal, donde utiliza las siguientes variables.

ϕ = Latitud de la primera estación
λ = Longitud de la primera estación
α = Acimut de la primera estación.
ϕ' = Latitud de la segunda estación
λ' = Longitud de la segunda estación
α' = Acimut de la segunda estación
S = Distancia que separa las estaciones
A,B, etc., = factores geodésicos

Fórmulas

$$h = BS \cos\alpha \qquad (1)$$

$$\delta\phi = -(h + CS^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - E h s^2 \operatorname{sen}\alpha) \qquad (2)$$

Cuando la distancia S es menor a las 15 millas (24 km) usamos :

$$\delta\phi = -(h + CS^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) \qquad (3)$$

y en ambos casos:

$$\Delta\phi = \delta\phi - (\delta\phi)^2 D \qquad (4)$$

$\phi' = \phi + \Delta\phi$ = Latitud de la segunda estación................................(5)

$$\Delta\lambda = \left(\frac{AS \operatorname{sen}\alpha}{\cos\phi'.}\right) G \text{ ....(6)}$$

y $\lambda^1 = \lambda + \Delta\lambda$ = Longitud de la segunda estación...........................(7)

$$\Delta\alpha = -\left[(\Delta\lambda)\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\phi + \phi')\frac{1}{\cos \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)} + (\Delta\lambda)^3 F\right] \text{..........(8)}$$

Cuando s (Distancia entre el primer y segundo vértice) es menor de (24 km) usamos:

$$\Delta\alpha = -(\Delta\lambda)\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\phi + \phi') \text{...............................(9)}$$

y en ambos casos:

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha + 180° \text{..(10)}$$

En las fórmulas anteriores $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$ se obtienen en segundos y los factores geodésicos valen:

$A = A' (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{½}$

$B = B' (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}$

$C = C' (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^2 \tan\phi$

$$D = D' \left(\frac{\operatorname{sen}\phi \cos\phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}\right)$$

$E = E' (1 + 3\tan\phi)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)$

$F = F' (\operatorname{sen}\phi \cos^2\phi)$

G = Los valores de G están en la Tabla XXII al final del capitulo.

Los valores y logaritmos de las constantes son:

CONSTANTE	LOGARITMO
$A' = \dfrac{1}{a \operatorname{sen} 1''}$	8.5097218 - 10
$B' = \dfrac{1}{a\left(1-e^2\right)\operatorname{sen} 1''}$	8.5126714 - 10
$C' = \dfrac{1}{2a^2\left(1-e^2\right)\operatorname{sen} 1''2}$	1.4069381 - 10
$D' = \dfrac{3}{2} e^2 \operatorname{sen} 1''$	2.6981687 - 20
$E' = \dfrac{1}{6a^2}$	5.6124421 - 20
$F' = \dfrac{1}{12} \operatorname{sen}^2 1''$	8.2919684 - 20

Con la ayuda de las constantes no se tiene dificultades para valuar los factores Geodésicos de A hasta F para cualquier latitud.

III.4.8) DEDUCCIÓN DEL ING. CLARKE

Cálculo de los puntos Geodésicos dados por el Ing. Clarke, tenemos:

ϕ = Latitud de la primera estación.

λ = Longitud de la primera estación.

α = Acimut de la primera estación.

ϕ' = Latitud de la segunda estación.

λ' = Longitud de la segunda estación.

α' = Acimut inverso

S = Distancia entre las dos estaciones

θ = Ángulo que subtiende el lado S.

ζ = Ángulo acimutal auxiliar para la segunda estación.

$\Delta\lambda$ = $\lambda' - \lambda$ = diferencia de longitud

$\Delta\phi$ = $\phi' - \phi$ = diferencia de latitud

δ = $90 - \phi$ = colatitud de la primera estación.

N = Normal de la primera estación.

R = Radio de curvatura del meridiano en la latitud media

$\frac{1}{2}(\phi + \phi')$ = Latitud media.

Tenemos por Geometría Analítica.

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi\right)^{1/2}} \qquad \text{.......(11)}$$

$$R = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left[1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\phi + \phi')\right]^{3/2}} \qquad \text{.......(12)}$$

Entonces:

$$\theta = \frac{S}{N \operatorname{sen} 1''} + \left(\frac{e^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6\left(1 - e^2\right)}\right) \theta^3 \cos^2 \phi \cos^2 \alpha \qquad \text{.......(13)}$$

Si la distancia entre los vértices es menor de 100 millas (161 Km.) es suficiente calcular la amplitud del lado s como:

$$\theta = \frac{S}{N \operatorname{sen} 1''} \qquad \text{.......(14)}$$

y tenemos:

$$\zeta = \left(\frac{e^2 \operatorname{sen} 1''}{4\left(1 - e^2\right)}\right) \theta^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen} 2\alpha \qquad \text{.......(15)}$$

$$\zeta = 8.259 \times 10^{-9}\ \theta^2 \cos^2 \Phi \text{ sen } 2\ \alpha$$

θ y ζ se obtienen en segundos:

$$\text{TAN } p = \frac{\text{SEN } \frac{1}{2}(\gamma - \theta)}{\text{SEN } \frac{1}{2}(\gamma + \theta)} \text{COT} \frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots (16)$$

$$\text{TAN } Q = \frac{\cos \frac{1}{2}(\gamma - \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\gamma + \theta)} \text{COT} \frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots (17)$$

Estos valores se valúan en las siguientes fórmulas :

$\alpha' = P + Q - \zeta$ = Acimut en la segunda estación....................(18)

$\Delta\lambda = Q - P$..(19)

$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ = Longitud de la segunda estación.....................(20)

La diferencia de latitud se obtiene con la fórmula:

$$\Delta\phi = \frac{S}{R \operatorname{sen} 1''} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha' + \zeta - \alpha)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha' + \zeta + \alpha)} \right) \left[1 + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 1''}{12} \right) \theta^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \right] \quad \ldots\ldots 21$$

($\Delta\phi$ se obtiene en segundos)

$\phi' = \phi + \Delta\phi$ = Latitud de la segunda estación..(22)

Para el cálculo de la diferencia de latitud requiere calcularse el Radio de curvatura del meridiano en la latitud media, el cual no se conoce por no tener ϕ', por lo cual se tomará la latitud del primer punto y se realizarán aproximaciones sucesivas.

Las constantes usadas y sus logaritmos son:

CANTIDAD	LOGARITMO
a	6.8047033
e^2	7.3206875
$a(1 - e^2)$	6.8017537
$(1 - e^2)$	9.9970504 - 10
$\dfrac{e^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6(1 - e^2)}$	6.4264506 - 20
$\dfrac{e^2 \operatorname{sen}^2 1''}{4(1 - e^2)}$	1.9169671 - 10
$\operatorname{sen} 1''$	4.6855749 - 10
$\dfrac{\operatorname{sen}^2 1''}{12}$	8.2919684 - 20

TABLE XXI LOGARITMOS DE PUISSANT

LAT. °	A -10	B -10	C -10	D -10	E -10	F -10
20	8.5095499	8.5121555	0.96732	2.7996	5.7574	7.772
21	5330	1049	99036	2170	7711	787
22	5155	0524	1.01252	2333	7851	800
23	4973	8.5119979	3389	2485	7997	812
24	4786	9416	5455	2627	8146	823
25	4592	8834	7456	2759	8300	832
26	4392	8236	9399	2882	8458	841
27	4187	7620	11289	2997	8620	849
28	3977	6989	13131	3104	8785	855
29	9761	6342	14931	3203	8955	861
30	3541	5682	16691	3294	9127	866
31	3316	5007	18415	3379	9304	870
32	3087	4321	20107	3456	9484	873
33	2854	3622	21771	3527	9667	875
34	2618	2912	23408	3592	9853	877
35	2378	2102	25023	3651	0043	877
36	2135	1463	26616	3704	0237	877
37	1889	0725	28192	3750	0433	876
38	1640	9980	29752	3792	0633	874
39	1390	9228	31298	3827	0836	872
40	1137	8470	32832	3857	1043	869
41	0883	7708	34357	3882	1253	864
42	0628	6942	35874	3901	1467	860
43	0372	6173	37385	3914	1684	854
44	0115	5402	38893	3923	1905	848
45	8.5089857	4630	40399	3926	2139	840
46	9600	3858	40905	3924	2359	832
47	9343	3087	43413	3917	2592	824
48	9086	2317	44925	3994	2830	814
49	8831	1551	46442	3886	3071	804
50	8576	0788	47967	3862	3318	792
51	8324	0029	49501	3833	3569	780
52	8073	8.5099276	51947	3799	3826	767
53	7824	8530	52607	3759	4088	753
54	7577	7791	54182	3713	4355	738
55	7334	7060	55776	3661	4629	723
56	7993	6338	57390	3693	4909	706
57	6856	5626	59927	3539	5196	688
58	6622	4925	60691	3469	5490	669
59	6393	4230	62383	3392	5792	649
60	6167	3560	64108	3309	6102	627
61	5946	2897	65868	3218	6422	605
62	5730	2248	67667	3120	6759	581
63	5519	1614	69509	3014	7089	556
64	5313	0996	71399	2901	7440	529
65	5112	0395	73342	2778	7802	501
66	4917	9811	75343	2647	8177	471
67	4729	9245	77499	2506	8567	440
68	4546	8698	73546	2354	8972	406
69	4370	8170	81762	2192	9395	371

EJEMPLO 21

Calcular la latitud del vértice "B" (Maestro Puissant).

φ_A	=	19° 53' 42.3"	log B	=	8.512502083
λ_A	=	00° 23' 37.4"	log C	=	0.964846884
Acimut α	=	289° 40' 22.2"	log E	=	5.931353989
Distancia S	=	49 326.95 m	Log D	=	2.203642272

Solución:
Fórmulas

$h = BS\ \cos\alpha$

$\delta\phi = -\ (h + cs^2\ sen^2\ \alpha\ -\ EhS^2\ sen\,\alpha) > 24$ Km

$\Delta\alpha = \delta\phi - (\delta\phi)^2\ D$

log B	=	8.51250208	
log S	=	4.69308426	
log cos α	=	9.527177102	
Log h	=	2.73276344	.......540.46"
log C	=	0.96484688	
log S^2	=	9.386168526	
log $sen^2\ \alpha$	=	9.947660824	
Log 2° término	=	9.89552121	.......1.98"
log E	=	5.931353989	
log h	=	2.273276238	
log S^2	=	9.386168526	
- log sen α	=	9.973880412 n	
Log 3er término	=	7.616918341	...0.004 "
			$\delta\phi = \Sigma$ 542.444'
2 log $\delta\phi$	=	5.46870982	
log D	=	2.20364227	
log $(\delta\phi)^2$ D	=	7.67235209	....0.004"

Por lo tanto

$$\Delta \phi = \delta \phi - (\delta \phi)^2 D$$

$$\Delta \phi = 542.444" - 0.004" = 542.44" = 00° 09' 02.44"$$

$$\begin{array}{l} \varphi_A = 19° 53' 42.30" \\ \Delta \phi = \underline{00° 09' 02.44"} \\ \varphi_B = 20° 02' 44.74" \end{array}$$

Ahora calculamos la longitud del vértice B

$$\Delta\lambda = \left[\frac{ASse\alpha}{\cos\phi} \right] G$$

Log $\Delta \lambda$ = 3.2037 Tabla XXII

$\Delta \lambda$ = 1598.51

$$\begin{array}{l} \Delta \lambda = - 00° 26' 38.51 \\ \lambda_A = \underline{00° 23' 37.4"} \\ \quad - 00° 03' 01.11" \end{array}$$

EJEMPLO 22:

Calcular la latitud del vértice "B" (Clarke)

φ_A	=	19° 53' 42.3"
λ_A	=	00° 23' 37.4"
. Acimut α	=	289° 40' 22.2"
Distancia S	=	49 326.95

ELIPSOIDE DE CLARKE

Normal Mayor	N = 6380693.15	Tabla III (hoja 47)
Radio Medio	R = 0.999610208	Tabla III
Ángulo subtendido	θ = 1594.56"	

Por ser distancia menor de 161 km.

$$\theta = \frac{S}{N \operatorname{sen} 1''} = \frac{49326.95}{6380693.15 \operatorname{sen} 1''}$$

$$\theta = 1594.54'' = 00° \ 26' \ 34$$

Con la fórmulas anteriores 15, 16 y 17 obtenemos:

$$\zeta = - 00° \ 00' \ 41.05''$$

$$P = - 54° \ 32' \ 19.03''$$

$$Q = - 54° \ 58' \ 57.32''$$

Con los anteriores valores obtenemos:

$$\alpha^1 = P + Q - \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\begin{array}{rrl} & P = & - 54° \ 32' \ 19.03'' \\ & Q = & - 54° \ 58' \ 57.32'' \\ & -\zeta = & \underline{\ \ 00° \ 00' \ 41.05''} \\ \text{Acimut del vértice B} = & \alpha^1_B = & - 109° \ 31' \ 24.70'' \end{array}$$

De la formula 21, obtenemos:

$\Delta\phi$ = 00° 08' 59.92"

Por tanto la latitud del vértice B, es:

$$\begin{aligned} \phi &= 19° \ 53' \ 42.3" \\ \Delta\phi &= \underline{00° \ 08' \ 59.92"} \\ \varphi_B &= 20° \ 02' \ 42.22" \end{aligned}$$

y para obtener la longitud del vértice B:

$\Delta\lambda$ = Q - P .... (19)

$$\begin{aligned} Q &= - \ 54° \ 58' \ 57.32" \\ P &= \underline{+ \ 54° \ 32' \ 19.03"} \\ \Delta\lambda &= - \ 00 \ 26' \ 38.29" \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \ 00° \ 23' \ 37.4" \\ \Delta\lambda &= \ \underline{00 \ 26' \ 38.29"} \\ \lambda_B &= - \ 00 \ 03' \ 00.89" \end{aligned}$$

III.5) DIFERENTES MODELOS DE RESOLUCIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE LONGITUDES

III.5.1) DEDUCCIÓN DEL ING. GANDARIAS

Entre los vértices A y B la determinaremos por una simple relación de senos, deducida de la figura 11 No. (hoja No. 97) para el cálculo de latitudes del Ing. Hosmer, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\Delta\lambda}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos\varphi} \text{ .... (a)}$$

Por intervenir en esta relación la latitud del punto B, el triángulo A B P habremos de considerarlo sobre una esfera de radio N_B, tangente al elipsoide en el punto B, donde dicha latitud queda representada por su verdadero valor.

El ángulo $\Delta\lambda$ en dicha esfera es el mismo que sobre el elipsoide, y los elementos σ y S_1 son sensiblemente iguales a los trazados sobre el elipsoide, por las mismas consideraciones expuestas en la deducción de la diferencia de latitudes.

En dicha esfera $\sigma = \dfrac{s}{N_B}$, y por la ec. (a) podemos expresarlas así:

$$\Delta\lambda'' = \frac{s}{N_B \operatorname{sen} 1''} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi}$$

A la cual habría que aplicarse las correcciones correspondientes por las diferencias entre arcos y senos, $\Delta\lambda$ y S, que en nuestras triangulaciones ordinarias pueden despreciarse.

Si hacemos por último, $\dfrac{1}{N_B} \operatorname{sen} 1'' = R_\rho$, la diferencia en longitud vendrá dada por:

$$\Delta\lambda'' = R_\varphi \, s \operatorname{sen}\alpha_1 \sec\varphi$$

que permite determinar la longitud del vértice "B" cuando sea conocida la del vértice "A"

El valor de $\dfrac{1}{N_B} \operatorname{sen} 1'' = R_\varphi$ se encuentra tabulada en la siguiente tabla.

Donde:

$$R = \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''} \quad ; \quad N = \text{Gran Normal} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

φ = latitud geodésica

$$e = \text{excentricidad} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Dimensiones del Elipsoide Central

a = semieje mayor = 6378, 388 m

b = semieje menor = 6356, 909 m

e = excentricidad = 0.006769103

TABLA XIX
0 ° a 5 °

φ	Log R	d	φ	Log R	d
0 ° 0′	8 . 512 6 437	0	2° 0′	8 . 512 6 383	4
5′	437	1	5′	379	5
10′	436	0	10′	374	5
15′	436	1	15′	369	5
20′	435	1	20′	364	5
25′	434	1	25′	359	6
30′	433	1	30′	353	5
35′	432	1	35′	348	6
40′	431	2	40′	342	6
45′	429	2	45′	336	6
50′	427	2	50′	330	6
55′	425	2	55′	324	6
1 ° 0′	8 . 512 6 423	2	4 ° 0′	8 . 512 6 224	9
5′	421	2	5′	215	9
10′	419	3	10′	206	9
15′	416	3	15′	197	10
20′	412	3	20′	187	10
25′	410	3	25′	177	10
30′	407	3	30′	167	10
35′	404	4	35′	157	10
40′	400	4	40′	147	10
45′	396	4	45′	137	10
50′	392	4	50′	126	10
55′	388	5	55′	115	11
			5 ° 0′	8 . 512 6 104	

φ	Log R	d
20 ° 0′	8 . 5095434	3
5′	420	3
10′	406	3
15′	393	3
20′	379	3
25′	365	3
30′	351	3
35′	337	3
40′	323	3

45′	309	3
50′	295	3
55′	281	3
21 ° 0′	8. 509 5 266	3
5′	252	3
10′	238	3
15′	224	3
20′	209	3
25′	195	3
30′	180	3
35′	166	3
40′	151	3
45′	137	3
50′	122	3
55′	108	3
22 ° 0′	8. 509 5 093	3
5′	078	3
10′	063	3
15′	048	3
20′	033	3
25′	018	3
30′	003	3
35′	8. 509 4 988	3
40′	973	3
45′	958	3
50′	943	3
55′	928	3

EJEMPLO 23:

Obtener la Longitud del vértice "B", λB método del Ing. Gandarias.

FORMULA

$$\Delta\lambda' = R\varphi \; s \; \frac{\text{sen } \alpha_1}{\cos y}$$

DATOS

distancia s= 49 326.95 m.
acimut α = 289° 40'' 22.2''
latitud φ_A = 19° 53' 42.3''
longitud λ_A = + 00° 23' 37.4''

Solución

N = 6 380 693.15 (Tabla III)
$R\varphi$ = 0.032326394

$$\begin{aligned} \log R\varphi &= 8.509557273 \\ \log s &= 4.693084263 \\ \log \text{sen } \alpha_1 &= 9.973880412 \text{ n} \\ -\log \cos \varphi &= \underline{9.973274441} \\ \log \Delta\lambda'' & \; 3.20324751 \quad = -1596.73'' \end{aligned}$$

$$\Delta\lambda = -00° \; 26' \; 36.78''$$

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 00° \; 23' \; 37.4'' \\ -\Delta\lambda &= \underline{-00° \; 26' \; 36.78''} \\ \lambda_B & 00° \; 02' \; 59.74'' \end{aligned}$$

III.5.2) DEDUCCIÓN DEL MAESTRO SALNUEVE

Supongamos que PAB (Fig. 12) este trazado sobre una esfera cuyo centro sea N extremo de la normal mayor del punto A y cuyo radio sea la unidad; se requiere determinar el ángulo P, que es la diferencia de meridianos de los puntos de estación A,B. es claro que:

$$\operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} BA}{\operatorname{sen} BP}$$

Pero sen A = Sen Z, porque A es el suplemento del Acimut Z, sea BA = sen ψ y sen Bp = sen (90 - φ')

Así que:

$$\operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos\varphi} \operatorname{sen} \psi$$

La diferencia entre las longitudes de un lado de un triángulo es siempre muy pequeña y también lo es el lado Ψ ; se pueden tomar pues los arcos por los senos y en este caso

$$P = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos\varphi'} \cdot \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Para reducir esta ecuación a la superficie del elipsoide terrestre, sustituiremos por φ su valor obtenido en la ecuación 19 y nos quedará:

$$P = \frac{K\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{a \operatorname{sen} 1''} \times \frac{\operatorname{sen} z}{\cos\varphi'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Esta es la diferencia de longitudes que buscamos. De cuya fórmula se reduce a una tabla de los diferentes valores del cociente

$$\frac{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}{a \operatorname{sen} 1''}$$

Tales son las elegantes fórmulas para latitudes y longitudes del Maestro Salneuve.

EJEMPLO 24:

Obtendremos la longitud del vértice 'B'

$$P = \frac{K\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}{a \operatorname{sen} 1''} \times \frac{\operatorname{sen} z}{\cos\varphi'}$$

log K =	4.6930843
log ψ =	8.5096137
log sen Az =	9.9728804 m
log cos φ' =	- 9.9728628
	3.2037156

P = - 1598.305'' = - 0° 26' 38.40''

λ_A = + 00° 23' 37.40''
P = - 00° 26' 38.40''
λ_B = - 00° 03' 01.26''

El signo negativo indica una posición oriental respecto al meridiano de México.

III.5.3) DEDUCCIÓN DEL ING. DIAZ COVARRUBIAS E ING. MEDINA PERALTA

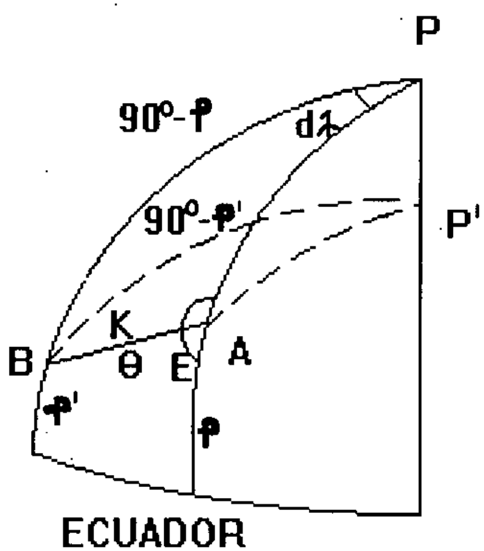


FIGURA 15

α = Acimut, admitiendo como en Topografía los Acimuts se miden de 0° a 360° partiendo del norte al oeste.

$$\frac{\text{sen}\, d\lambda}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\text{sen}\, Az}{\cos\varphi'} \quad ; \quad \alpha = (180 - E)$$

$$\text{sen}\, d\lambda = \frac{\text{sen}\, Az}{\cos\varphi'}\,\text{sen}\,\theta$$

por ser muy pequeño $A\lambda$ y θ

$$d\lambda = \frac{\text{sen}\, Az}{\cos\varphi'} \cdot \theta \quad \text{..} \qquad (22)$$

Pero $\theta = \frac{K}{N'}$, para referirla a la esfera de Radio N' y dividir entre sen 1" para expresar la fórmula en segundos:

$$d\lambda = \frac{K \operatorname{sen} Az \sec \varphi'}{N' \operatorname{sen} 1''}$$

Haciendo $A = \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''}$ tenemos:

$$d\lambda = A\ K \operatorname{sen} Az \sec \varphi'$$

El Ing. Medina aplica a la fórmula anterior dos factores de corrección C_1 y C_2 para compensar los errores provocados por haber considerado proporcionales los arcos por sus senos de $d\lambda$ y θ :

$$d\lambda = A\ K\ \operatorname{sen} Az \sec \varphi' - C_1 + C_2$$

Para obtener los valores C_1 y C_2 haremos las siguientes consideraciones, el valor del seno de un ángulo agudo es mayor que el valor de dicho ángulo, disminuido en un cuarto de cubo, o sea:

$$\operatorname{sen}\theta > \theta - \frac{\theta^3}{4}$$

Pero:

$$\operatorname{sen}\theta < \operatorname{ang}\theta$$

o sea,

$$\operatorname{ang}\theta > \operatorname{sen}\theta > \operatorname{ang}\theta - \frac{(\operatorname{ang}\theta)^3}{4}$$

Por tanto es posible obtener los valores de C_1 y C_2 con una aproximación muy buena si

$C_2 = \Delta\lambda - \frac{\Delta\lambda^3}{4}$ y $C_1 = \theta - \frac{\theta^3}{4}$ otra manera de obtener la fórmula sin

efectuar correcciones es; dada la pequeñez de θ (amplitud del lado k, con respecto al centro de la Tierra) y (diferencia de meridiano entre A y B), podemos obtener directamente el ángulo $\Delta\lambda$ por medio de la serie del seno

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

E introduciendo el desarrollo de Sen θ , también hasta el término de tercer orden se obtiene:

$$d\lambda = \frac{\theta \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{1}{6}\theta^3\left(\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{\operatorname{sen}^3 Az}{\cos^3\varphi'}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

El cual se obtuvo de la siguiente forma:

$$d\lambda - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 \Delta\lambda = \frac{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right)\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'}$$

Pero por la fórmula 22 tenemos:

$$d\lambda - \frac{1}{6}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 \Delta\lambda}{\cos^3\varphi'} \cdot \theta^3\right) = \frac{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right)\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'}$$

Por tanto:

$$d\lambda = \frac{\theta \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{1}{6}\frac{\theta^3 \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} + \frac{1}{6}\theta^3 \frac{\operatorname{sen}^3 \Delta\lambda}{\cos^3\varphi'}$$

Factorizando:

$$d\lambda = \frac{\theta \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi} - \frac{1}{6}\theta^3\left(\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{\operatorname{sen}^3 Az}{\cos^3\varphi'}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Con lo cual llegamos a la fórmula (24); ahora sustituiremos A θ por su valor K / N' A fin de pasar de la esfera cuyo Radio es la unidad a la que tiene N' o R' por Radio, y hallaremos:

$$d\lambda = \frac{K \operatorname{sen} Az}{N' \cos\varphi'} - \frac{K^3}{6N'^3}\left(\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{\operatorname{sen}^3 Az}{\cos^3\varphi'}\right) \text{......} \quad (26)$$

El último término de esta fórmula tiene un valor tan pequeño y por tanto inapreciable a causa del cubo del Radio que entra en su denominador, que puede despreciarse sin producirnos un error visible para que el valor de $A\lambda$ quede expresado en segundos será necesario dividirlo por Sen 1" . E introduciendo el factor c como:

$$C = \frac{1}{N \operatorname{sen} 1''}$$

Por tanto podemos calcular la diferencia de meridianos por la fórmula:

$$d\lambda = \frac{C\ K \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'}$$

o como $d\lambda = L' - L$ diferencia de meridianos:

$$L' = L + \frac{C\ K \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} \text{..................................} \quad (27)$$

Los logaritmos del factor C están dados en la Tabla VII

El signo de $\Delta\lambda$ será el mismo de Sen Az, de modo que la diferencia de longitud será positiva entre 0° y 180°, o sea en el primero y segundo cuadrantes. Por lo que se puede deducir que el modo de contar los Acimutes concuerda perfectamente con la convección establecida, de considerar positivas las longitudes occidentales y negativas las longitudes orientales.

EJEMPLO 25:

Calcularé la longitud del vértice B, para del triángulo geodésico donde tenemos una longitud de L = 00° 23' 37.41'' para el vértice A. La longitud (L) es contada desde meridiano de México.

Datos.

Az =	289° 40' 22.2''	Acimut de la línea A - B
φ =	19° 53 ' 42.3''	Latitud del vértice A
φ' =	20° 02' 40.37''	Latitud del vértice B
K =	49 326.95 m	Distancia de A - B

Fórmula:

$$L' = L + \frac{C\,K\,\text{sen Az}}{\cos\varphi'}$$

Log C	=	8.5096135 (tablas)	
Log k	=	4.6930843	
Log sen Az	=	9.9738804 n	
- Log cos φ'	=	9.9728628	
Log dλ	=	3.2037153	- 1598.51 = - 00° 26' 38.51"

dλ	=	- 00° 26' 38.51"
L	=	+ 00° 23' 37.40"
λ_B	=	- 00° 03' 01.11"

El signo de L' asigna al vértice B una posición oriental (derecha) respecto del meridiano de México.

Si se quiere expresar en tiempo las longitudes de este vértice B se multiplicara por 4/60 lo que se tiene dado en arco.

L' = Longitud del vértice B=-00 02'57.43"

(Tiempo) L' = 00° 02' 57.43" x (4/60) = 00^h 00^m 11.83^s
(Vértice) L = 00° 23' 37.4 x (4/60) = 00^h 10^m 34.49^s

III.5.4) DEDUCCIÓN DEL ING. RICARDO TOSCANO

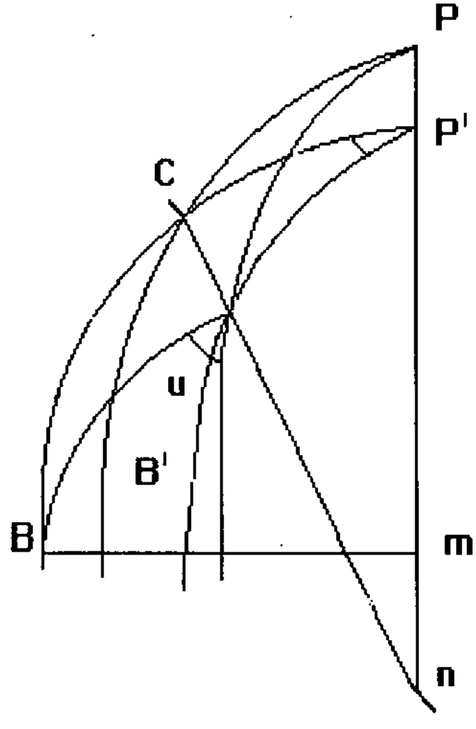


FIGURA 16

En está figura 16 la Diferencia de longitud entre los puntos A y B, esta representada por el ángulo diedro BPA,el cual determinaremos en función de sus lados AB y BP y del ángulo BAP.

No se puede usar la esfera osculadora de Radio N (normal mayor) y centro n, porque en el triángulo B' A P' no se conoce el ángulo BP' ; así que convendrá hacer uso de una esfera cuyo centro sea en m (normal mayor de B) y de Radio igual a esta, con lo cual se conseguirá que el ángulo entre B y el polo Pm de la nueva esfera, sea igual A 90° - φ' y así podemos aplicar la fórmula:

$$\operatorname{sen} \Delta\lambda = \frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen} Az}{\cos \varphi'}$$

En la cual. $\Delta\lambda$ representa la diferencia de longitud entre A y B; S el arco AB (o sea θ) u es el Acimut entre A y B.
La nueva esfera es tangente al esferoide a lo largo del paralelo que pasa por el vértice B y el plano que pasa por el meridiano y por el lado, será el Acimut inverso de AB.
El ángulo B puede considerarse igual a 180 - u , y la distancia A B = K.

Designando por N' la normal mayor de B, se tiene desarrollando los senos de $\Delta\lambda$ y S hasta los términos de la tercera potencia, tenemos:

$$\Delta\lambda - \frac{(\Delta\lambda)^3}{6} = \frac{\left(S - \left(\frac{S^3}{6}\right)\right) \operatorname{sen} Az}{\cos \varphi'}$$

$$\Delta\lambda\left(1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{6}\right) = \frac{S \operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{S^3 \operatorname{sen} Az}{6\cos\varphi'}$$

Ahora pondremos A' S' su valor K / N' y multiplicar por Sen 1" a fin de expresarlo en segundos:

$$\Delta\lambda\left(1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{6}\operatorname{sen}^2 1''\right) = \frac{K}{N'}\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'} - \frac{K^3}{6N'^3}\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'}$$

Factorizando:

$$\Delta\lambda\left(1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{6}\operatorname{sen}^2 1''\right) = \frac{K}{N'}\frac{\operatorname{sen} Az}{\cos\varphi'}\left[1 - \frac{K^2}{6N'^2}\right]$$

Aquí el Ing. Toscano toma los logaritmos de ambos miembros, despeja a $\Delta\lambda$ y toma en cuenta que Log (1 / X) = Mx (introduce el factor M), cuando x es pequeña, el factor M toma el valor de 0.4342945.... esto es da a "x" el valor de $\left(1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{6}\right)$

Introduciendo (A') = N / Sen 1" , tenemos:

$$\Delta\lambda = \frac{\dfrac{K \operatorname{sen} Az}{N' \cos\varphi'}\left[1 - \dfrac{K^2}{6N'^2}\right]}{\left(1 - \dfrac{(\Delta\lambda)^2}{6} \operatorname{sen}^2 1''\right)}$$

(**Nota:** El factor M es Log (1 / x) = Log e = 0.4342945 todos los factores)

También podemos expresar esta fórmula como:

$$\Delta\lambda = (A\ K \operatorname{sen} Az \sec\varphi')\left(1 - \frac{K^2}{6N'^2}\right)\left(1 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{6} \operatorname{sen}^2 1''\right)^{-1}$$

$$\Delta\lambda = (A\ K\operatorname{sen}Az\sec\varphi')\left(1 - \frac{K^2}{6N'^2}\right)\left(1 + \frac{(\Delta\lambda)^2}{6} \operatorname{sen}^2 1''\right)$$

$$\Delta\lambda = (A\ K\operatorname{sen}Az\sec\varphi')\left(1 + \frac{(\Delta\lambda)^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6} - \frac{K^2}{6N'^2} + \frac{K^2(\Delta\lambda)^2 \operatorname{sen}^2 1''}{36N'^2}\right)$$

$$\operatorname{Log} \Delta\lambda = \log(AK \operatorname{sen} Az \sec\varphi') + M\frac{(\Delta\lambda)^2 \operatorname{sen}^2 1''}{6} - \frac{MK^2}{6N'^2}$$

$$\operatorname{Log} \Delta\lambda = \log(A) + \log\ K + \log \operatorname{sen} Az + \log \sec\varphi' + C - C' \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (28)$$

Designamos por C y C' las correcciones que hay que agregar.

EJEMPLO 26:

Realizaremos el Ejercicio con los datos del problema anterior (ver ejercicio anterior) $\varphi' = 20°\ 02'\ 40.37''$, $AZ = 289°\ 40'\ 22.2''$, $K = 49\ 326.95$ m .

DE TABLAS	LOG (A)
Para la latitud 20° 00'	8.5095546
Por 2' .... -	6
Por 42"	0
	8.5095540

Log (A)	= 8.5095540	
Log (K)	= 4.6930843	
Log sen Az	= 9.9728804 n	
Log cos φ'	= -9.9728628	
Log k'	= 3.2026559	Aquí $k' = \Delta\lambda$

Aun falta encontrar las correcciones + C - C' para lo cual necesitamos el factor Log (D) y factor log (k') argumento y para ello entramos con $\varphi = 20°\ 02'\ 40.37''$ el factor D es de acuerdo a Tablas Log (D) = 2.2

$$(D) = \frac{3e^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{4\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)}$$

Con este argumento buscamos los valores de + C y - C y nos da para + C = 0.0000011 , el log D = 2.2, lo multiplicamos por 2 y nos da log (D) = 4.4 y -C' = 0.0000045, siempre se busca un múltiplo de Log.(D) que se encuentre en el rango de argumento para encontrar A - C' y nos queda:

Log k'	= 3.2026559
+ C	= 0.0000011
- C'	= 0.0000045
Log (Δ λ)	= 3.2026525
(Δ λ)	= 1594.60"
(Δ λ)	= 00° 26' 34.60"

λA	= 00° 23' 37.40
Δλ	= 00 26' 34.60
λB	= - 00° 03' . 03 20

III.6) MODELOS MATEMATICOS PARA LA OBTENCIÓN DE ACIMUTES INVERSOS

III.6.1) DEDUCCIÓN DEL TRATADO DE GEODESIA DE MINERÍA 1852

Supongamos primero paralelos los meridianos de los extremos del lado AB sobre el cual se apoya una cadena de triángulos (fig. 17). Un observador colocado en A mide el ángulo EAB = Z, contado desde el sur hasta 180° al oriente o al poniente (en este caso poniente) y de esta medida deduce el Acimut Z' ; porque E' BA = 180° -ABP o sea E'BA = 180° - Z .
Si se contaran los Acimutes desde el sur al poniente hasta 360°, el Acimut de A contado desde el punto B sería Z" , y entonces Z" = 180° + PBA = 180° + Z .

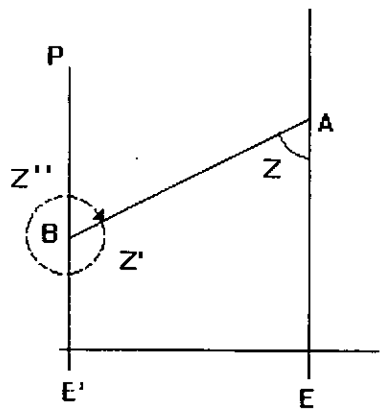


FIGURA 17

Si consideramos como es en realidad que los meridianos EA y E'P concurren al polo P, se dejará ver que Z es siempre algo mayor que ABP, y que no es tan sencilla la determinación de un Acimut por medio de otro en las operaciones Geodésicas, cuando se quiere emplear cuenta exactitud es posible.

Habiendo observado la figura dada para la obtención de las latitudes del Maestro Salneuve, tenemos el Acimut EAB y se desea conocer E'BA = Z' o su suplemento PBA, en el triángulo esférico PBA, por la analogía de Néper.

$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}P\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

Y como el lado AB es muy pequeño, AP, BP, son muy poco convergentes, y el ángulo PAB difiere poco de E'BA, y llamando (y) la pequeña diferencia, se harán las siguientes ecuaciones:

$$B = 180° - (A + y)$$
$$B = 180° - A - y \quad\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad (a)$$
$$A+B = 180° - y$$
$$½\ (A + B) = 90° - ½\ y$$

Por consiguiente:

$$\cot\frac{1}{2}y = \cot\frac{1}{2}P\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

o bien,

$$\frac{1}{\tan\frac{1}{2}y} = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}P}\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

Las tangentes de ½ y y, ½ P son tan pequeñas que pueden ser sustituidas por sus arcos, con lo que:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}y\right)} = \frac{1\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\left(\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}(a+b)\right)}$$

Quitando los denominadores y despejando:

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}P\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

Recordando ahora que $a = 90 - \varphi'$; $b = 90 - \varphi$ serán:

$$a + b = 90° - \varphi' + 90° - \varphi = 180 - (\varphi + \varphi')$$

$$½ \, (a + b) = 90° - ½ \, (\varphi + \varphi')$$

$$\cos ½ \, (a + b) = \cos ½ \, (90° - ½ \, (\varphi' + \varphi)) = \text{sen} ½ \, (\varphi + \varphi')$$

$$a - b = 90 - \varphi' - 90° + \varphi = \varphi - \varphi'$$

$$\cos ½ \, (a - b) = \cos ½ \, (\varphi - \varphi')$$

Sustituyendo en la ecuación de ½ y estos valores de Cos ½ (a + b), Cos ½ (a-b) resulta:

$$\frac{1}{2} y = \frac{1}{2} P \frac{\text{sen} \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')}{\text{sen} \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \text{.............................} \quad \text{(b)}$$

Y como de la ecuación (a):

$$B = 180° - A - y$$

$$\therefore \; y = 180° - A - B \text{ ....} \quad (c)$$

Siendo A y B suplementos de los Acimutes Z , Z'

$$y = 180 - (180 - Z) - (180° - Z')$$

$$y = 180 - 180° + Z - 180 + Z'$$

$$y = Z + Z' - 180°$$

Y la última ecuación (b) de ½ y vendrá a ser:

$$\frac{z+z'-180^{\circ}}{2}=\frac{1}{2}P\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$$

El denominador cos ½ (φ - φ') se acerca mucho a la unidad y puede igualarse a uno sin cometer un error considerable y entonces despejando Z" (Acimut inverso línea AB) nos quedará:

$\boxed{Z' = 180° Z + P \operatorname{sen} ½ (\varphi + \varphi')}$ .... (d)

Si se contaran los Acimutes desde el polo sur al poniente hasta 360° siendo entonces:

$$Z' = 180 + B$$
$$B = 180 - Z'$$

Sustituyendo valores en la ecuación C tenemos:

$$y = 180° - (180° - Z) - (Z' - 180°)$$

$$y = 180° - 180 + Z - Z' + 180$$

$$y = Z - Z' + 180° \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Sustituyendo esta ecuación (e) es la ecuación (b) nos queda

$$z' = 180 + z - P\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

III.6.2) DEDUCCIÓN DEL ING. DÍAZ COVARRUBIAS

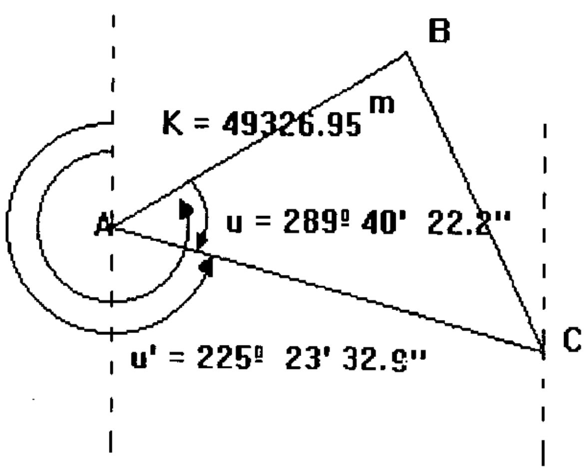


FIGURA 18

Para determinar los Acimutes de todos los lados de una cadena, se combinan los ángulos con el Acimut conocido del primer lado, como se ha hecho para calcular el Acimut AC de la Fig. 18 (Az Ac = 225° 23' 32.9") de nuestro triángulo, pero si se desea el Acimut inverso de BC, por ejemplo, sería necesario combinar el ángulo B con el de BA, el cual no es otra cosa que el Acimut inverso de AB.

En topografía se reduce comúnmente esta deducción a tomar ángulos suplementarios, a causa de la suposición del paralelismo de todos los meridianos; pero en la Geodesia no es admisible esa hipótesis y la deducción de los Acimutes inversos no es tan sencilla, porque debemos tomar en cuenta la convergencia de meridianos.

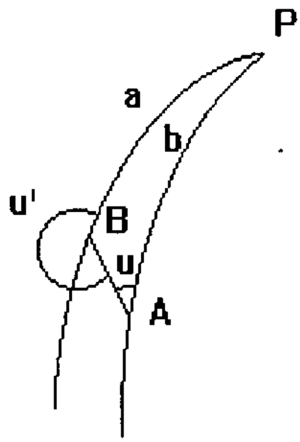


FIGURA 19

En la figura 19 es el Acimut de AB, que es el ángulo PAB, si los meridianos de A y B fuesen pararelos, el Acimut inverso sería u' =180° + u; pero puesto que convergen hacia el polo P, deberá ser u' un poco mayor que 180° + u , y designando por c el efecto de la convergencia, tendremos:

$$u' = 180° + u + c$$

Para calcular el pequeño ángulo c aplicaremos al triángulo PAB las analogías de Néper:

$$\tan\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C \qquad \text{(a)}$$

Siendo:

$A = u$

$B = 360° - u'$

$B = 180° - (u + c)$

$C = D$, diferencia de meridianos

$a = 90 - \varphi'$

$b = 90 - \varphi$

$$D = \frac{CK \operatorname{sen} u}{\cos\varphi'}$$

De donde se deduce:

$$½(A + B) = ½\ (u + 180° - (u + c))$$

$$½(A + B) = ½\ (u + 180° - u - c)$$

$$½(A + B) = 90° - ½\, c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Y además tenemos:

$$½(a + b) = ½\ (90 - \varphi' - (90 - \varphi))$$

$$½(a + b) = ½\ (\varphi - \varphi') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$½(a + b) = ½\ (180° - \varphi - \varphi')$$

$$½(a + b) = 90° - ½\ (\varphi + \varphi') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Sustituyendo estas analogías en la ecuación (a) tendremos:

$$\tan\left(90-\frac{1}{2}C\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\cos\frac{1}{2}\left(90-\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')\right)}\cot\frac{1}{2}D$$

Como:

$$\text{Tan}\,(90-c)=\cot c$$

$$\text{Cos}\,(90-B)=\text{sen}\,B$$

Tenemos:

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\text{sen}\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}\cot\frac{1}{2}D$$

o bien,

$$\tan\frac{1}{2}C=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}\tan\frac{1}{2}D$$

Como D y C son siempre muy pequeños, es suficientemente exacto tomar los arcos por sus tangentes y se obtendrá en segundos:

$$C=D\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (e)$$

La diferencia de latitud de los extremos de una línea Geodésica, es tan pequeña en general, que el coseno de su mitad se confunde sensiblemente con su unidad, por lo cual se suprime comúnmente el divisor de la fórmula, precedente por lo tanto nos queda:

$$C = D \text{ sen } \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

Con esta última ecuación, el valor de u' será:

$u' = 180 + u \, D \text{ sen } \tfrac{1}{2} \; (\varphi + \varphi')$

EJEMPLO 27:

Calcularemos ahora el Acimut de BA, de nuestro ejercicio figura 18 tenemos que el Acimut de AB era ...... u= 289° 40' 22.2" para lo cual necesitaremos la latitud media entre A y B.

Datos

$\varphi = 19° \, 53' \; 42.30''$
$\varphi' = \underline{20° \, 02' \;\; 40.37''}$
$\Sigma = 39° \, 56' \; 22.67''$

Log C = 8.5096136 (φ)
Log k = 4.6930842
Log sen u = 9.9738804 n
Log cos φ' = $\underline{-9.9728627}$
Log D = 3.2037155 n

$\tfrac{1}{2} \; (\varphi + \varphi') = 19° \, 58' \, 11.67''$

D = 00° 26' 38.51"

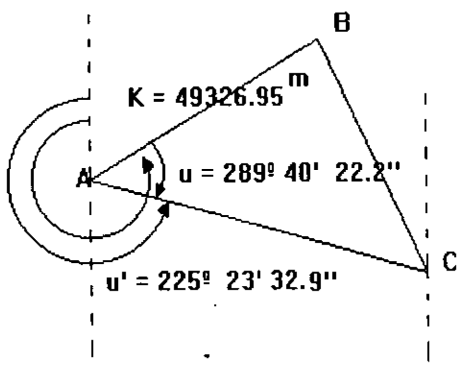
Log D = 3.2037155 n
Log sen ½ $(\varphi - \varphi')$ = $\underline{9.5334225}$
Log e = 2.7371380 n
c = - 545. 93"
c' = 00° 09' 05.93 "

180 + u - 360 = 109° 40' 22.2 "
c = $\underline{- 00° \;\; 09' \;\;\; 5.93''}$
u' = 109° 31' 16.27 "

Siempre que u (Acimut Directo) sea mayor de 180°, como nos sucedió en este problema deben restarse 360° de 180° + u , o bien tomar por fórmula general del Acimut Inverso u' = u + 180° + c. Se tomará el signo superior cuando u sea menor de 180°, y el inferior cuando sea mayor a 180°.

Si a u' le agregamos el ángulo B del triángulo, resultará el Acimut de BC. pero debemos recordar que :

A (19° 53' 42.3" , + 00 ° 23' 37.4") , ∢ A = 64° 16' 49.3"
B (20° 02' 40.37", - 00° 03' 01.11") , ∢ B = 47° 53' 15.0"
C (19° 38' 39.15" , - 00° 07' 31.37")



k (AB) = 49326.95 m   u = (AB) = 289° 40' 22.2"
k (AC) = 39512.36 m   u = (AC) = 225° 23' 32.9"
k (BC) = 47986.69 m   u = (BC) = 157° 24' 31.3"

Los ángulos que entren en la combinación deberán corregirse antes por el pequeño error de observaciones, para lo cual se necesita calcular el exceso esférico. En este ejercicio, el ángulo B (∢ B) corregid o es de 47° 53' 15.0" ; y así hallaremos el Acimut de Bc es:

$$\begin{array}{rl} u' = & 109° 31' 16.3" \\ & \underline{+ 47 \; 53' 15.0"} \\ & 157° 24' 31.3" \end{array}$$

EJEMPLO 28:

Como un ejemplo más calcularemos el Acimut inverso AC, siendo el directo
u = 225° 23' 32.9" y

$$\tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') = \tfrac{1}{2} (19° 53' 42'.3" + 19° 38' 39.15")$$

$= \quad 19 \quad 46' \ 10.73''$

Log D = 2.9848285 n	Log C = 8.5096136 (φ)
Log sen ½ (φ - φ') = <u>9.529224</u>	Log k = 4.5967330
Log C = 2.5140525 n	Log sen u = 9.8524396 n
	Log cos p' = <u>- 9.9739579</u>
C = - 326.63"	Log D = 2.9848285 n
C = - 00° 05' 26.62"	

u - 180 = 45° 23' 32.9"
C = <u>± - 05' 26.6"</u>
u' = 45° 18' 06.3"

Es recomendable servirse de un croquis de triangulación con el fin de evitar un error al hacer combinaciones.
El mejor modo de cerciorarse de no tener un equivoco en los cálculos, consiste en determinar la latitud y longitud de un mismo punto por medio de distintos lados de la triangulación pues resulta claro que deberán concordar los resultados.

EJEMPLO 29:

Ahora determinemos como un último ejercicio, la posición del vértice c valiéndonos de los datos calculados para el vértice B
Datos:

k = BC = 47986.69 m	Log C = 8.5096112 (φ_B Tablas)
u = 157° 24' 31.3"	Log k = 4.6811207
φ_B = 20 02' 40.37"	Log sen u = 9.5845067
φ_c = 19 38' 39.15"	Log cos φ' = <u>-9.9739579</u>
Fórmula	Log D = 2.8007816

$$D = \frac{CK\,\text{sen}\ u}{\cos\varphi'}$$

log sen ½ (φ + φ') = <u>9.5307970</u>

Log C = 2.2331578
C = + 00° 03' 34.57"

u' = 180° + u + D sen ½ (φ + φ')

½ (φ + φ') = 19° 50' 39.76"

c = + 00° 03' 34.57"
180 + u = <u>337° 24' 31.30"</u>
u' = 337 28 05.87 = Acimut inverso CB

III.6.3) DEDUCCIÒN DEL ING. MEDINA PERALTA

El Ing. Medina Peralta, deduce el Acimut Inverso de la siguiente forma; si los meridianos fueran paralelos tendríamos:

$$Az' = 180 + Az$$

Pero por ser convergentes los meridianos agregamos a la fórmula anterior dA el cual es un factor correctivo:

$$Az = 180 + Az + dA \qquad \text{.......................................} \quad (1)$$

Por las fórmulas de Niéper tenemos:

$$\tan \tfrac{1}{2} (A + B) = \cot \tfrac{1}{2} A\lambda \; \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)} \qquad \text{........................} \quad (2)$$

En cuya fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} A &= 180 - Az \\ B &= A'z - 180^\circ = Az + dA \\ a &= 90 - \varphi' \\ b &= 90 - \varphi \\ A\lambda &= d\lambda \end{aligned}$$

$$A + B = 180 - Az + Az + Da = 180 + dA$$

$$\tfrac{1}{2} (A + B) = 90^\circ + \tfrac{1}{2} \, dA$$

$$a + b = 180^\circ - (\varphi + \varphi') \qquad ; \; a - b = \varphi - \varphi'$$

$$\tfrac{1}{2} (a + b) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \qquad ; \; \tfrac{1}{2} (a - b) = \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi')$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 2 tenemos:

$$\tan\left(90 + \frac{1}{2} dA \right) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')}{\cos\left(90 - \frac{1}{2} (\varphi + \varphi') \right)} \, c\,tg \frac{1}{2} d\lambda$$

$$-\cot\frac{1}{2}dA = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}\, c\,tg\frac{1}{2}d\lambda$$

$$-\tan\frac{1}{2}dA = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}\tan\frac{1}{2}d\lambda$$

Por ser valores muy pequeños dA, dx . Sus tangentes se confunden con sus arcos y teniendo:

φ - φ' = dφ (diferencia de latitudes)

$\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ = φm (latitud media)

$$dA = -\frac{\operatorname{sen}\varphi m}{\cos\frac{1}{2}d\varphi}d\lambda$$

Dando el valor dA a la Ecuación (1) :

$$A'z = 180^\circ + Az - \frac{\operatorname{sen}\varphi m}{\cos\frac{1}{2}d\varphi}d\lambda$$

El Ing. Medina, agrega un término correctivo (dλ)^{3}F, por haber tomado los arcos por las tangentes donde:

$$F = \frac{1}{12}\operatorname{sen}\varphi m\ \cos^2\ \varphi m\ \operatorname{sen}^2\ 1''$$

Y nos queda al final

$$A'z = 180^\circ + Az - \frac{\operatorname{sen}\varphi m}{\cos\frac{1}{2}d\varphi}d\lambda + (d\lambda)^3\ F\ ....(3)$$

El valor F viene tabulado en las tablas dadas a los factores Geodésicos A, B,C,D y F para las posiciones Geodésicas Tabla IX hoja 81. Tomadas del esferoides de Clarke, 1866. En su tratado de Geodesia Geométrica.

EJEMPLO 30:

φ_A	=	19° 53' 42.30''	λ_A	=	00° 23' 37.40''
φ_B	=	20° 02' 40.37''	λ_B	=	00 03' 01.11
λ_A	=	00° 23' 37.40''	$d\lambda$	=	00° 20' 36.29
λ_B	=	00° 03' 01.11''	$d\lambda$	=	1236.29
Az	=	289° 40' 22.2''			

$\varphi m = ½ (\varphi_A + \varphi_B) = 19° 58'\ 11.34''$

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(\varphi_A - \varphi_B\right) = -\frac{00°\ 08'\ 58.07''}{2} = -00°\ 04'\ 29.03''$$

log	sen φm	=	9.53342258	
log	cos ½ $d\varphi$	=	9.99999963	
	log $d\lambda$	=	3.09212035	
	log dA	=	2.62554459	
	dA	=	422 22''	= 00° 07' 02.22''

3 log	($d\lambda$)	=	9.2763610	(tablas interpolado para φm= 19 ° 58' 11.34'')
	log F	=	7.7715291	
4°	término	=	7.0478901	
		=	0. 00 ''	

Az	=	289°40'22.2''
		180°00'00.0''
		109°40'22.2''
dA	=	- 07'02.22
Az'	=	109°33'20.0''

NOTA: En la obtención de este acimut inverso, hay una diferencia con el mismo ejercicio (hoja 147) por el Método del Colegio de Minería, y esta diferencia es de dos minutos y tres segundos.

III.6.4) DEDUCCIÓN DEL ING. RICARDO TOSCANO)

El Ing. Toscano deduce de manera similar a la del Ing. Medina.

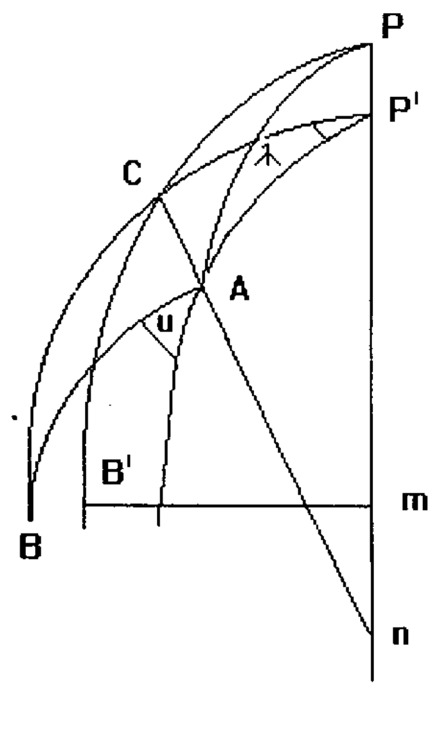


FIGURA 20

Tenemos: $u' = 180° + u + c$

Donde: u = acimut directo

u' = acimut inverso
C = convergencia de meridianos

Se supone que en el triángulo esférico P' AB', el lado P'B' es igual 90° - φ' , y por lo tanto se tiene:

P' AB' = 180° - u
P'B' A = u' - 180
P' AB' + P'B' A = u' - u = 180° + c

Por las analogías de Neper nos queda:

$$\tan\frac{1}{2}c = \tan\frac{1}{2}(\lambda)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$$

siendo: λ = diferencia de meridianos

Desarrollando en serie a tan ½ c y tan ½ (λ) y despreciando los términos de potencia mayor que 3, se tiene:

$$-\frac{c}{2}-\frac{c^3}{2_4}=(\lambda)\left[1+\frac{(\lambda)^2}{12}\right]\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}$$

Tomamos el primer valor aproximado.:

$$-c=(\lambda)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}$$

Y poniendo este valor en lugar de C^3, se obtiene finalmente el siguiente valor, en el cual se ha hecho igual a uno el coseno de (φ - φ') ½ , que entra en el término correctivo, y en el que se ha multiplicado por sen 1" :

$$-c = (\lambda)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')} + (\lambda)^3 F$$

$$(F) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\ \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\frac{\operatorname{sen} 1''}{12}$$

Llegamos a la misma fórmula del Ing. Medina Peralta.

III.7) NOCIONES DE GEODESIA ESPACIAL

En la actualidad es menos usado el posicionamiento directo, ya que muchos países están cubiertos por redes de control primario, esto es : levantamientos de cuadriláteros con diagonales o polígonos que cubren una superficie muy grande (países), con longitudes entre 40 km. y 70 km. Lo que provoca que se pueda dar la posición absoluta de cualquier levantamiento local, incluyéndolo como un punto, de referencia, de la red nacional. Para la mayoría de estos vértices las observaciones astronómicas para determinar su posición han sido reemplazadas por mediciones electromagnéticas o por observaciones por medio de satélites artificiales. Las posiciones relativas de las estaciones (vértices), pueden determinarse directamente por técnicas inerciales, desarrolladas originalmente para la navegación aérea.
Considero importante hacer del conocimiento de la persona que lee esta investigación, los novedosos sistemas de posicionamiento actual. Para que pueda tener un panorama más amplio en la manera de obtener las coordenadas de un vértice en la época actual.

Levantamiento Doopler (mediciones electromagnéticas).- En este tipo de levantamiento se usan satélites operacionales en la que cada Satélite tiene una órbita circumpolar, a una altitud alrededor de 1000 km. y esta construido de tal manera que su antena transmisora apunta hacia la tierra. Se establece un receptor en una estación sobre el terreno, con un oscilador puesto a una cierta frecuencia ligeramente mayor que la señal trasmitida del satélite (fs) .

La diferencia entre el intervalo de desplazamiento de la onda del satélite y receptor, medida en tiempos conocidos se obtiene, usando el efecto Doopler.

Recuérdese que este efecto nos dice: que cuando una fuente sonora emite un sonido de frecuencia fs. Siendo (v) la velocidad del sonido (aprox. 334 m/s) y suponiendo que la fuente de sonido se acerca al observador o receptor con una velocidad (v_s) Supóngase además, que el observador se mueve hacia la fuente de velocidad (v_0). Entonces , el observador oirá un sonido de frecuencia (f) dado por

$$f = fs\frac{v + v_0}{v - v_s}(Hz)$$

Por tanto la frecuencia recibida (f) debe de ser mayor que fs pero para este caso particular, esta viene a ser instantáneamente fs, conforme la fuente pasa al receptor, esto es, el desplazamiento Doppler será cero y a su vez que la ha pasado será negativo, siendo f menor que fs. Dado que en general la estación en el terreno quedará fuera del plano de la órbita del satélite, se generará una gráfica de frecuencias recibidas que sigue típicamente la curva mostrada.

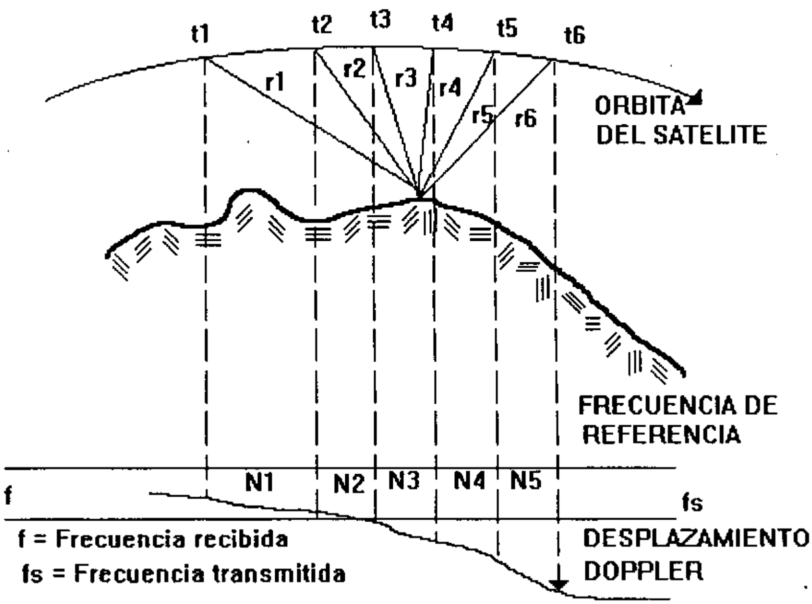


FIGURA 21

III.7.1) PRINCIPIOS

A partir del año 1957, con la aparición de los satélites artificiales, surge una nueva rama en la Geodesia que revolucionó las concepciones clásicas. Se trata de la Geodesia espacial, global o tridimensional que ha ampliado substancialmente las perspectivas geodésicas al introducir en las proximidades de la Tierra una fuente considerable de puntos de observación y de medida, cuya situación puede decidirse en función de las necesidades de un estudio dado; de esa forma las restricciones impuestas por la Geografía han desaparecido y la base de datos puede adquirir una dimensión planetaria.

Por un lado para la Geodesia geométrica los satélites proporcionan la ocasión de usarlos como puntos de mira móviles sobre los que puede aplicarse el método de triangulación o trilateración, permitiendo así que se coordinen los resultados de distintos continentes (enlaces de sus redes geodésicas), Por otra parte para la Geodesia dinámica, la observación e interpretación de las trayectorias orbitales de los satélites aportan información sobre el campo de la gravedad en el entorno inmediato a la Tierra, prolongando así las determinaciones gravimétricas realizadas sobre la superficie y permitiendo por tanto un soporte esencial para las zonas no cubiertas con tales mediciones; todo ello se ha traducido en una mejora considerable del mapa del geoide gravimétrico, continuamente perfeccionado. Entre los satélites geodésicos se distinguen los pasivos, usados como puntos de mira, de los activos que pueden ser emisores o reflectores de ondas electromagnéticas.

La diferencia básica de ésta concepción con las anteriores es el empleo de las coordenadas trirectangulares que han tenido así una aplicación verdaderamente espectacular. La Geodesia espacial, en fin, ha sido la que ha permitido una definición precisa del geoide "marino" (3/4 del total), solamente supuesto con las concepciones gravimétricas efectuadas a bordo de buques o aviones especializados.

Siempre es difícil definir rigurosa y exhaustivamente un área reciente en continua expansión acompañada de técnicas cada vez más nuevas y sobre todo con un repertorio de aplicaciones científico-prácticas en permanente crecimiento. Refiriéndonos al objeto primero de la Geodesia, que tradicionalmente se ha expuesto como la determinación de la forma y de las dimensiones de la Tierra, la Geodesia espacial es un conjunto de técnicas de medida y tratamiento de los datos que ofrece un interés geodésico y en los cuales intervienen varios puntos situados fuera de la superficie.

Tales puntos pueden ser tan diversos como:

Satélites artificiales, fuentes naturales galácticas o extragalácticas (estrellas, radiofuentes) e incluso instrumentos situados sobre cuerpos del sistema Solar, en la Luna por ejemplo. Las medidas realizadas pueden ser también muy variadas, pero fundamentalmente se limitan a direcciones, variaciones de frecuencia (efecto Doppler) y tiempo invertido en recorrer una trayectoria (distancia). Los tratamientos necesarios pueden ser rápidos o muy lentos en lo que a tiempo de cálculo se refiere, dependiendo en todo caso del modelo físico subyacente.

El hecho de utilizar puntos muy alejados de la Tierra permite eliminar una de las más grandes limitaciones de la Geodesia clásica, el problema de la intervisibilidad de los vértices geodésicos. Efectivamente, en los métodos terrestres las medidas ligan directamente los vértices o estaciones entre ellos y a la red geodésica que se va desarrollando progresivamente. Estos métodos son por tanto esencialmente locales y conducen a una red muy homogénea a nivel regional. Los problemas se plantean cuando la extensión aumenta ya que la precisión global se va degradando rápidamente, sobre todo en los contactos entre redes distintas.

Por el contrario los métodos espaciales son globales lo que se traduce en que la red así establecida no depende a ese respecto de su extensión.

La Astronomía geodésica responde, como se comprenderá, perfectamente a esta definición; es ciertamente la más antigua de las técnicas de Geodesia Espacial. No obstante hubo que esperar al lanzamiento de los primeros satélites artificiales terrestres para que esta rama de la Geodesia comenzara a desarrollarse con plenitud. Para ello ha sido transcendental el progreso habido en otros dominios tecnológicos tales como la electrónica, óptica coherente, desarrollo de la informática y de la Telecomunicación.

La Geodesia espacial, globalmente considerada, liga pues el conjunto de incógnitas definidas por la Geodesia tridimensional, ya sean de origen geométrico o dinámico. Sin embargo en los problemas de localización (posicionamiento), únicamente se trata de la determinación de las coordenadas que la definen y ello con independencia del campo gravitatorio.

III.7.2) MÉTODOS GEOMÉTRICOS Y DINÁMICOS

Atendiendo a está última consideración los métodos geodésicos pueden clasificarse en dos grandes grupo: Los métodos geométricos y los dinámicos u orbitales.
En el primer caso, el punto exterior a la superficie de la Tierra, generalmente el satélite artificial, se considera como una simple mira auxiliar situada a una altitud elevada. El modelo necesario es lógicamente similar a los terrestres, pero con la generalización a las tres dimensiones. Por analogía con la triangulación clásica, estos métodos geométricos conducirán a la determinación de poliedros.

Con ese objeto se observa un arco de la trayectoria del satélite, simultáneamente, desde un conjunto de estaciones terrestres. (fig. 22). Las observaciones realizadas relacionarán por tanto dos tipos de incógnitas: los parámetros que definen la posición del satélite y los representativos de las estaciones que se quieren localizar.

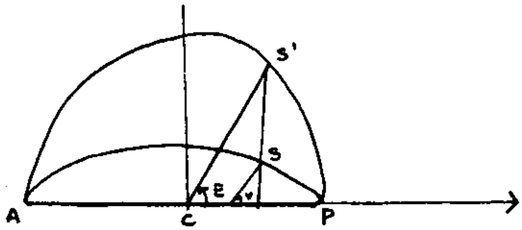


FIGURA 22

T = Centro de masas de la Tierra, en uno de los focos.

C = Centro de la elipse

El primer grupo no tiene interés, a priori, a efectos de posicionar los puntos, de modo que pueden considerarse auxiliares para el problema principal. Hay que hacer notar que con esta metodología se necesitan conocer las coordenadas de una serie de puntos o estaciones de control, proporcionadas por su pertenencia a una red geodésica previa.

El satélite S en los métodos orbitales estará sometido al campo de la gravedad, cuyo potencial sabemos que en primera aproximación vendrá dado por V= GM/r en donde G es la constante gravitacional con un valor de 6.672×10^{-11} $MKgs^{-12}$, M es la masa de la Tierra y r es la distancia entre el centro de masas de la Tierra y el de gravedad del satélite .(Fig. 21).El problema estará regido por las leyes de Kepler, de manera que la trayectoria y órbita del satélite será una elipse, que puede caracterizarse por su semieje mayor a y su excentricidad e. Su posición sobre esa trayectoria se fija generalmente por su anomalía excéntrica E. Los dos puntos de intersección de la elipse y de la recta focal se llaman respectivamente perigeo (P), para el punto más próximo de T y apogeo (A).

La circunferencia de centro c y de radio a puede ser considerada como la transformación a fin de la elipse con una relación a/b. Si s y s' son dos puntos homólogos situados respectivamente sobre la elipse y la circunferencia, el ángulo formado por TS y AP se le llama anomalía verdadera, v, y a al formado por CS' y AP se le designa con el nombre de anomalía excéntrica, E. La posición del satélite sobre su trayectoria será función del tiempo y determinada por la ecuación de Kepler E-e sen E= n(t-tp)siendo tp el instante de paso por el perigeo. n el llamado movimiento medio 2M/T. y T el periodo de revolución dado por la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Es frecuente que a la expresión n(t-tp) se le conozca como la anomalía media M. Figura 22
Para resolver el problema general de localizar el satélite, es preciso situar en el espacio el plano de la elipse, esto es de su órbita , con relación a una cierta referencia celeste: por ejemplo aquella que entrada en T, tiene como eje Z el de rotación, el eje X entraría dirigido hacia el punto de una cierta época y el plano ZTY sería el de un cierto meridiano origen. La elipse corta al plano TXY en dos puntos llamados nodo ascendente, N, si el satélite pasa del hemisferio Sur al Norte y descendente, N' . para el simétrico. El plano de esta órbita se define por su diámetro o eje nodal N'N y su inclinación i con relación al ecuador medio. La posición de dicho eje puede fijarse en el plano anterior por el ángulo Ω , ascensión recta del nodo ascendente. Finalmente hay que fijar la posición de la elipse en el plano orbital, lo que se consigue generalmente por el argumento w del perigeo. En resumen, la posición del satélite en su órbita con relación a la referencia celeste así definida vendrá dada por los seis parámetros siguientes: (Ω , i, w, a, e, tp)

En cuanto al potencial gravitacional creado por la Tierra es más complejo, ya que se expresa en forma de un desarrollo en armónicos esféricos del tipo:

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (\mathrm{Cnmcos}m\lambda + \mathrm{Snmsen}m\lambda)\ \mathrm{Pnm}(\cos\theta)\right]$$

FIGURA 23

usando las coordenadas esféricas (r, θ, λ). Es más simple expresarlo por V= GM/R + r, donde R es una función de los coeficientes armónicos (Cnm, Snm) y de los parámetros definitorios de la posición del satélite (a,e,w,i, Ω, M). La ecuación del movimiento será por tanto:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(\frac{GM}{r}\right)\bar{r} + \mathrm{grad}\bar{r}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales o el correspondiente escalar de segundo orden puede transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden. Ese nuevo sistema llamado de Lagrange puede resolverse según dos vías: los métodos analíticos o los numéricos, que en la practica suelen combinarse; todos los desarrollos de esta integración se encuentran en las obras que traten la teoría de las perturbaciones en la mecánica celeste.

En el cálculo preciso de las efemérides (posiciones del satélite) no hay que despreciar otras fuerzas que actúan sobre el satélite y que son de dos tipos: las gravitacionales creadas por la atracción de otros cuerpos como la Tierra y las de origen no gravitacional como el rozamiento atmosférico y la presión de la radiación solar. solo dos cuerpos del sistema solar ejercen una notable influencia sobre los satélites artificiales terrestres:

la Luna y el Sol. Las perturbaciones ocasionadas por este potencial luni-solar pueden calcularse e incluirse en la función R junto a la influencia de las mareas terrestres u oceánicos. En cuanto al rozamiento atmosférico, que tenderá a frenar el satélite, dependerá de su velocidad y forma, aunque es despreciable para los de gran altura. Por otro lado existen interacciones electromagnéticas en la ionosfera que son difíciles de concretar, su efecto se traduce en una aceleración del satélite por la presión de los fotones que llegan a él, procedentes del Sol.

En la actualidad cuando se observa un satélite desde un conjunto de estaciones terrestres pueden calcularse sus efemérides con una precisión del metro para arcos cortos, correspondientes a algunas horas y del orden de 10 metros para arcos más largos, que correspondan a varios días. Los métodos que logran ese objetivo son los llamados orbitales que suelen dividirse en dinámicos y semidinámicos. Los primeros realizan un tratamiento global por integración numérica y pueden ser más o menos ajustados, por ejemplo pueden utilizar un cierto modelo gravitatorio o determinar igualmente los coeficientes armónicos apropiados: estos están reservados a los centros de cálculo potentes, permitiendo la edición de efemérides precisas. Los métodos semidinámicos que utilizan una órbita preliminar, se subdividen en dos grupos: los de punto aislado son los más simples pues la órbita aproximada la fracción de trayectoria que mejor se ajuste a la observada desde el suelo, durante un cierto lapso de tiempo. Todos estos métodos usan como incógnitas las coordenadas de las estaciones, cuya posición interesa conocer, más un cierto número de parámetros orbitales correctivos.

III.7.3) LAS TÉCNICAS DE LA GEODESIA ESPACIAL

Las técnicas de la Geodesia espacial pueden presentarse en tres grupos atendiendo a la cronología: las pertenecientes al pasado, en las que hay que situar a la Astronomía geodésica y a la fotografía sobre fondo estelar, las del pasado reciente, en la que se sitúa la Geodesia Doppler y las del presente, que comprenden la interferometría de muy larga base (V.L.B.I.), la telemetría láser y el sistema de posicionamiento global conocido por sus siglas G.P.S.

Ya se ha comentado como la astronomía geodésica puede considerarse como la técnica de Geodesia espacial más antigua, entre cuyos objetivos fundamentales figuran la determinación de la latitud, longitud, acimut de una dirección y conocimiento de la vertical del lugar (desviaciones de la vertical).

La separación entre las estaciones es función de la altitud del Satélite utilizado. La serie ECHO orbitando entre 1300 y 1900 Kms. permitió alcanzar distancias de alrededor de 1500 Kms. El Satélite PAGEOS, bastante más alto (4200 Kms) posibilitó los primeros enlaces intercontinentales.

Las técnicas apoyadas en los satélites crecieron al amparo del programa espacial americano y más concretamente por el incremento de las actividades de su ejército relacionadas con la flota de submarinos Polaris. El desarrollo del programa empezó en 1958, siendo en 1967 cuando se usaron por primera vez los satélites con fines no militares, desde entonces los sistemas geodésicos por satélite han ido encontrando aplicación en casi todas las áreas conectados con la representación precisa de nuestro planeta. Ciertamente los resultados que se obtienen son cada vez más exactos de ahí su utilidad para establecer nuevas redes geodésicas o para controlar las existentes. La primera generación de estas técnicas geodésicas se basó en el efecto Doppler usando los satélites de la serie TRANSIT.

Con este sistema los receptores situados en estaciones terrestres miden los cambios de frecuencia de las señales transmitidas desde los satélites que generalmente tienen órbitas polares alrededor de la Tierra con una altitud media de 1075 Kms. (fig.20)

Al principio operacional se basa en que desde el satélite se emite continuamente una señal de radio precisamente controlada. Cuando el transmisor se acerca al receptor la señal recibida tendrá una frecuencia mayor que la transmitida y análogamente, cuando el satélite se aleja de la estación la frecuencia de la señal recibida es menor que la transmitida, de modo que ambas coincidirán en el momento de mínima distancia. Ese cambio de frecuencia cuya magnitud es función de la distancia (estación-satélite) se mide con la unidad receptora de manera que mediante la frecuencia transmitida, la efemérides del satélite y al tiempo preciso de la observación puede calcularse la posición del receptor.

Se aplican distintos procedimientos en el proceso de localizar tal posición, entre los más utilizados están los métodos semidinámicos y de ellos los del punto aislado por su simplicidad. Los programas de cálculo son numerosos y fueron concebidos para su utilización en tiempo real, si así se desea. Ante buenas observaciones (elementos transmitidos que sean coherentes y con una altura sobre el horizonte suficiente para atenuar la refracción) y unas efemérides precisas se pueden determinar las coordenadas trirectangulares de la estación con una incertidumbre de 2 a 3 metros.

Ante el éxito del programa Doppler el Departamento de Defensa de EE.UU. desarrolló un nuevo sistema de navegación y posicionamiento, lanzándose en 1978 el primer NAVSTAR(Navigation Satellite Timing and Ranging). Este trajo consigo la segunda generación tecnológica de satélites artificiales para fines geodésicos que ha llegado a ser conocida con el nombre de "Global Positioning System" o más abreviadamente G.P.S. El programa está en pleno desarrollo si bien ha ganado ya, y continua haciéndolo, amplia aceptación entre los posibles usuarios.

Otra técnica geodésica que se está continuamente empleando en nuestros días es la Telemetría láser. Mediante ella puede calcularse de un modo muy preciso la distancia desde un punto de la Tierra al satélite que la órbita, la cual en un principio se determinaba mediante la emisión de ondas radio. Su principio es muy simple: un emisor láser envía una señal qué es reflejada por el satélite hacia un telescopio receptor acoplado al emisor.

La observación consiste en medir el tiempo de ida y vuelta para hallar la distancia buscada. Teóricamente son posibles dos configuraciones: la emisión y recepción en la estación terrestre o en el Satélite, si bien la experimentación ha sido casi únicamente con la primera y particularmente con los satélites Starlette y Lageos. Hasta la primera mitad de los años 1970 los emisores eran lasers de rubí que emitían impulsos de 20 nanosegundos cada segundo, permitiendo la medida de distancias con una precisión cercana al metro (los últimos resultados llegan al decímetro).

Sus aplicaciones a la Geodesia geométrica han sido la prolongación de triangulaciones, lográndose así enlaces entre islas y zonas continentales, entre otros objetivos. Asimismo se han obtenido resultados importantes en la determinación de parámetros relacionados con la rotación terrestre, en el estudio de las mareas, en los movimientos de la corteza y en el establecimiento del geoide marino. Otra aplicación igualmente espectacular de la telemetría láser es el estudio del Sistema Tierra-Luna, efectivamente tanto los rusos como los americanos colocaron sobre la Luna reflectores que han permitido conocer la distancia entre los centros de gravedad de los dos cuerpos con una aproximación de 10 centímetros.

III.7.4) EL SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)

Este sistema como el programa Doppler se basa en la observación de las señales transmitidas desde los satélites artificiales, que se registran en estaciones terrestres de posición desconocida; la cual se conoce tras hacer intervenir el tiempo invertido por la señal en recorrer la distancia emisor-receptor, que es asimismo determinada. Los satélites G.P.S. tienen órbitas casi circulares con una altitud media de 20,000 Kms. formando una constelación de 18. Esta constelación consta de seis tipos de órbitas con tres satélites en cada una de ellas.

La inclinación de las órbitas sobre el ecuador es de 55°, estando espaciado cada satélite con relación al de su misma órbita 120° su período orbital es de 12 horas sidéreas siendo visible para el observador durante 10 horas diarias. La geometría y dinámica de dicha constelación asegura que desde cualquier lugar de la Tierra, y en todo momento, sean visibles de cuatro a seis satélites.

Una vez que los satélites están orbitando cada uno de ellos emite continuamente señales con frecuencias de 1575. 42 MHz (Hz=ciclo/sg, MHz=10 c/sg) y 1227.60 MHz. Estas señales se modulan con una información codificada que permite al receptor del terreno medir el intervalo de tiempo invertido por las mismas en recorrer la distancia satélite-estación. Todas las frecuencias G.P.S. se derivan del código fundamental "C/A Code" cuya frecuencia es 10.23 MHZ, la cual se genera por un oscilador de alta precisión presente en el interior de cada satélite.

Los objetivos del G.P.S.son sobre: navegación y posicionamiento preciso, el cual es el que tiene mayor interés desde el punto de vista geodésico. El procedimiento para el cálculo de las coordenadas de un punto consiste fundamentalmente en medir las distancias desde las estaciones terrestres al satélite, cuya posición es conocida en el instante de la observación; conceptualmente este sistema es idéntico a la intersección inversa convencional realizada al medir distancias desde un punto de coordenadas desconocidas a vértices geodésicos previamente establecidos. La distancia se mide en el receptor colocado en la estación incógnita, basándose en el tiempo invertido por la señal en llegar desde el satélite y en la velocidad de propagación de la energía electromagnética a través de la atmósfera (300.000 Km/sg). El procedimiento general de obtener la distancia se conoce en la terminología G.P.S. como "ranging".

En determinación precisas de distancias. el procedimiento depende de la exacta sincronización de los relojes del satélite y del receptor terrestre así como de que la transmisión de los códigos sea verdaderamente simultánea. Como desde el satélite también

se emite su información orbital puede determinarse su posición en el instante en que fue observado, de modo que si se miden las distancias desde una estación a tres o más satélites podrá localizarse sin ambigüedad. Hay distintas técnicas de posicionamiento, de las cuales la puntual es la más simple. En efecto, supongamos (fig. 24). que se han medido las distancias r1,r2,r3,y r4 desde la estación o cuatro posiciones de un cierto satélite.
Supongamos asimismo que se conocen las coordenadas espaciales de dichas posiciones respecto de un sistema geodésico trirectangular, es decir:

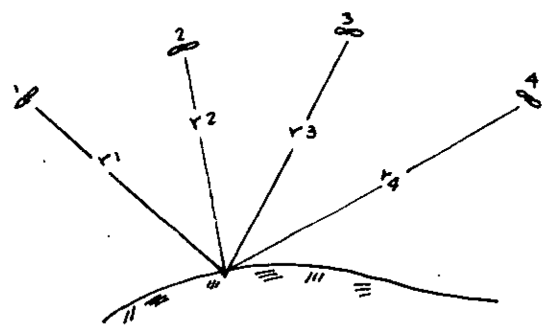


FIGURA 24

$$r_p^1 = \left[(X_1 - X_A) + (Y_1 - Y_A) + (Z_1 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_p^2 = \left[(X_2 - X_A) + (Y_2 - Y_A) + (Z_2 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_p^3 = \left[(X_3 - X_A) + (Y_3 - Y_A) + (Z_3 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_p^4 = \left[(X_4 - X_A) + (Y_4 - Y_A) + (Z_4 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

La estación A se localizará por sus coordenadas
Para cada uno de los Satélites de esa órbita (1,2 y 3) pueden escribirse las ecuaciones siguientes: (fig. 25), varias ecuaciones:

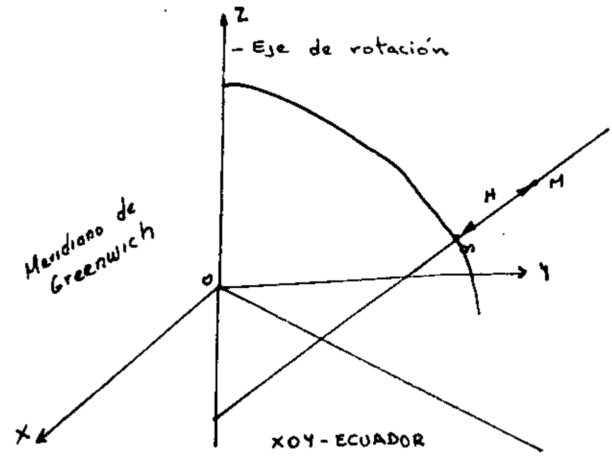


FIGURA 25

Resolviendo el sistema se obtiene la terna X Y Z , si bien al no tener en cuenta el estado del reloj las coordenadas serán aproximadas. Es por lo que si el estado es At y ha permanecido constante, a lo largo de la determinación, el error cometido en cada distancia será c. At, siendo c la velocidad de la señal transmitida, y las ecuaciones definitivas serán de la forma:

$$r_1 + \Delta r = \left[(X_1 - X_A)^2 + (Y_1 - Y_A)^2 + (Z_1 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 + \Delta r = \left[(X_2 - X_A)^2 + (Y_2 - Y_A)^2 + (Z_2 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_3 + \Delta r = \left[(X_3 - X_A)^2 + (Y_3 - Y_A)^2 + (Z_3 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_4 + \Delta r = \left[(X_4 - X_A)^2 + (Y_4 - Y_A)^2 + (Z_4 - Z_A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ecuaciones que pueden resolverse para hallar las incógnitas r, Xa, Ya, y Za. En la práctica el receptor permanecerá estacionado el tiempo suficiente para hacer repetidas determinaciones de distancias aproximadas a las posiciones de tantos satélites como sea posible. El sistema resultante tendrá muchos más ecuaciones que incógnitas y habrá que resolverlo por el método de mínimos cuadrados. En estos procesos suelen emplearse estaciones de control. que aseguran la ausencia de errores incompensables al calcular las ternas X1 Y1 Z1. Se demuestra que la relación entre esas coordenadas espaciales, las geográficas y las altitudes es la siguiente:

$X = (N + H)\ COS\ \varphi\ SEN\ \lambda$ e = excentricidad del elipsoide

$Y = (N + H)\ COS\ \varphi\ SEN\ \lambda$

$$\frac{\left(X^2 + Y^2\right)}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

$Z = (N (1 - e^2) + H)\ SEN\ \varphi$

Son varios los factores a tener en cuenta al planificar los trabajos de campo: una cuestión importante es la selección de las estaciones que han de ser normalmente accesibles a los vehículos que transporten el "hardware" G.P.S. Además las estaciones deben seleccionarse de manera que presenten una panorámica libre de obstáculos, como mínimo se recomienda que la visibilidad sea diáfana en todas las direcciones, a partir de una elevación de 15°, hasta el Cenit (los satélites presentan normalmente distancias cenitales inferiores a los 75°).

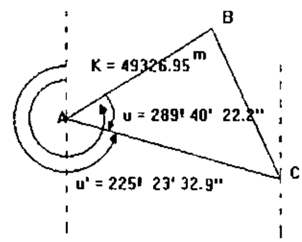
La preparación del programa de la observación es otra actividad importante en la planificación, esta consiste en determinar los satélites que serán visibles desde la estación durante un cierto período, para ello habrá que calcular aproximadamente los acimutes y elevaciones de los mismos. Existen programas al efecto que necesitan aparte de la hora de observación las coordenadas geográficas provisionales del receptor.

Se han realizado múltiples experiencias para contrastar la exactitud y eficiencia del G.P.S. con fines geodésicos y siempre con resultado positivo.

El futuro del G.P.S. en la práctica de la Geodesia e inclusive en la de la Topografía parece asegurado, es evidente que el sistema ha demostrado ya su posibilidad y capacidad para lograr una exactitud extremadamente alta. Aunque hasta ahora su aplicación más usual ha sido el control de redes geodésicas existentes o el establecimiento de algún polígono geodésico, también se ha usado en la práctica totalidad de los trabajos topográficos. El G.P.S. ha sido especialmente útil para resolver algunos problemas de posicionamiento difícil: sondeos hidrográficos, restos de neufragios y localizar plataformas petrolíferas en alta mar. Se espera que en un futuro muy próximo pueda lograrse el posicionamiento con una elevada exactitud en tiempo real, lo que hará que toda su metodología sea aplicable a replanteos de construcciones y a otros muchos usos. El costo del equipo ha disminuido sensiblemente y quizás pronto estará al alcance de la mayor parte de los profesionales de la Geodesia y topografía. Con sus muchas ventajas tales como velocidad, exactitud, la innecesaria intervisibilidad entre los puntos, su capacidad operativa diurna o nocturna y en cualquier tiempo, el G.P.S. puede ser en breve el método geodésico-topográfico convencional (salvo para levantamientos de escala muy grande).

IV.- SOLUCIÓN POR PROGRAMAS PARA CALCULADORA

PROGRAMA No.1
METODO DE PUISSANT
PARA ENCONTRAR LA LATITUD DEL VERTICE B



DATOS

		ϕ	λ
VERTICE A		(19° 53' 42.3",	+ 00° 23' 37.4")
(S) DISTANCIA $\overline{AB}$	=	49 326. 95 m	
(α) ACIMUT $\overline{AB}$	=	289° 40' 22.2 "	
AB	=	289 . 6728 °	

CONSTANTES LOGARITMICAS

A' = 8. 5097218 - 10
B' = 8. 5126714 - 10
C' = 1 . 4069381 - 10
D' = 2 . 6921687 - 10
E' = 5 . 6124421 - 20
e^2 = 7 . 8305018 - 10

ELIPSOIDE DE CLARKE
CONSTANTES DE CONVERSION

L1 = 2 . 302585

CONVERSION LOGARITMICA
LOG - Ln

Y = 0 . 0174533292
CONVERSION DE
GRADOS - RADIANES

FÓRMULAS

$$\delta\phi = -(h + CS\,\mathrm{sen}^2\alpha - EhS^2\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$
$$\Delta\phi = \delta\phi - (\delta\phi)^2 D$$
$$\phi = \phi + \Delta\phi$$

DONDE:

$$A = A'\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}$$
$$B = B'\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{3/2}$$
$$C = C'\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^2\tan\phi$$
$$E = E'(1 + 3\tan^2\phi)(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)$$
$$D = D'\left[\frac{\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi}{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi}\right]$$
$$h = BS\cos\alpha$$

NOTA: PARA TODOS LOS PROGRAMAS LAS CONSTANTES DE CONVERSION SON USADAS

```
10      REM " PROGRAMA No. 1, METODO DE PUISSANT"
20      CLS
30      INPUT "DAME LATITUD EN DECIMALES"; X
40      X = 19. 8951
50      INPUT "DAME LONGITUD EN DECIMALES"; L
60      L= . 3937
70      INPUT "DAME LA DISTANCIA EN METROS"; K
80      K= 49 326.95
90      INPUT "DAME EL ACIMUT EN DECIMALES" ; Z
100     Z= 289. 6728
110     REM "CONSTANTES LOGARITMICAS TABLA XXI"
120     B= 8.51250208 : C= 0.964846884 :
        D = 2.203642272 : E= 5.931353989
130     C1 = 0.017453292 : C2 =2.302585
140     W= 2* (LOG(ABS(COS(Z*C1) ) ) ) / C2
150     W1 = (LOG(K))/C2+B
160     H1=  W + W1
170     H= - 10 ^H1 + 1
180     PRINT " TERMINO No. 1 , h = "; H
190     S1 = 2* (LOG (K) )
200     S2 = S1 + C
210     R= 2* (LOG(ABS(SEN(Z*C1) ) ) ) / C2
220     T1 = S1 + S2 + R
230     T = 10^ T1
240     PRINT " TERMINO No. 2 " ; T
250     D1 =  E + H1 + S1 - ( R/2)
260     D2= 10^D1
270     PRINT "TERMINO No. 3 " ; D2
280     F1 = 2* LOG ( H + T + D2)/C2 + D
290     F = -  10^ F1 + 1
300     G = H + T + D2 - F
310     PRINT "DIFERENCIA DE LA LATITUD ENTRE LOS VERTICES A Y B
        ="; G
320     X=1  X  + (G/3600)
330     PRINT "LA LATITUD DEL VERTICE B=",X1
```

RESULTADOS DEL PROGRAMA 1

- DAME LA LATITUD EN DECIMALES?

  X = 19.8951

- DAME LA LONGITUD EN DECIMALES?

  L = 0.3937

- DAME LA DISTANCIA EN METROS

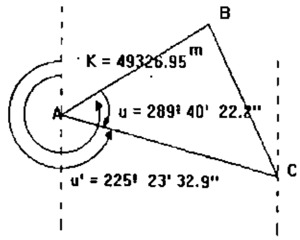
  K = 49 326.95

- DAME EL ACIMUT EN DECIMALES

  Z = 289.6728

- "TERMINO No. 1, h = " 540.46
- "TERMINO No. 2 = " 1.98
- "TERMINO No. 3 = " 0.004
- "DIFERENCIA DE LA LATITUD ENTRE LOS VERTICES A y B =" 542.44
- "LA LATITUD DEL VERTICE B=" 20.0457

PROGRAMA 2
ENCONTRAR LA LATITUD DEL VERTICE B



DATOS

		φ , λ
VERTICE A		(19° 53' 42.3" , + 00° 23' 37.4 ")
(K) DISTANCIA AB	=	49 326. 95 m
(u) ACIMUT AB	=	289° 40' 22.2 "
AB	=	289. 6728 °

ELIPSOIDE DE BESSEL **FORMULA** $\varphi' = \varphi + AK \cos u - BK^2 \operatorname{sen}^2 u$

CONSTANTE	**LOGARITMO**		**LETRA**
a	6. 8046434	=	A'
b	6. 8031892	=	B'
$(1 - e^2)$	9. 9970916 - 10	=	C'
$a (1 - e^2)$	6. 8017351	=	D'
sen 1"	4. 6855748 - 10	=	E'
e^2	7. 8244057 - 10	=	F'

DONDE:

$$A = \frac{1}{\rho \operatorname{sen} 1''}$$

$$B = \frac{0.5 \tan\varphi}{N \rho \operatorname{sen} 1''}$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{r^3}$$

$$r = \left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{1/2}$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{1/2}} \quad ; \quad N = \frac{a}{r}$$

FORMULA PARA PROGRAMAR

$$A = \frac{r^3}{D' E'}$$

$$B = \frac{r^4\, 0.5 \tan \varphi}{A' D' E'}$$

$$\rho = \frac{D'}{r^3}$$

```
10    REM " PROGRAMA No. 2, METODO DEL ING. COVARRUBIAS"
20    CLS
30    INPUT "DAME LATITUD EN DECIMALES"; X
40    X = 19. 8951
50    INPUT "DAME LONGITUD EN DECIMALES"; L
60    L= . 3937
70    INPUT "DAME LA DISTANCIA EN METROS"; K
80    K= 49 326.95
90    INPUT "DAME EL ACIMUT EN DECIMALES" ; Z
100   Z= 289. 6728
110   A= 6. 8046434 # : B= 6 . 8031892 # : C1= 9 . 9970916 # -10:
      D = 6 . 8017351 # : E= 4. 6855748 # -10 : F=7.8244057-10
120   C= .017453292 #
130   C2= 2.302585
140   W= F + 2* LOG(ABS(SIN(C*X) ) ) / C2
150   R= - 10 ^W + 1
160   A1= - D - E + LOG (R* SQR ( R ) ) / C2
170   A2 = 10 ^A1
180   PRINT "A=" ; A2
190   B1 = LOG ( R * R ) / C2 + LOG (ABS(.5 * TAN ( X*C ) ) ) / C2 - (A+D+E)
200   B2 = 10^B1
210   PRINT "B2 = " ;B2
220   T1 = A2 * K * COS (Z*C)
230   PRINT " T1 = "; T1
240   T2= B2* K^2* (SIN ( C*Z ) ) ^2
250   PRINT " T2= " ; T2
260   R3 = (X+ (T1 - T2) / 3600 )
270   PRINT "LATITUD DEL VERTICE B= " ; R3
280   G =C3 + LOG (K) / C2+ LOG (ABS(SIN (Z * C ) ) ) / C2 - LOG (ABS
      (COS (R3 * C ) ) ) / C2
290   G = G - 10
300   G1= - 10^G
310   PRINT " G1 = " ; G1
320   R2 = L - ( G1 / 3600 )
330   PRINT " LONGITUD DEL VERTICE B= " ; R2
340   PRINT " EL SIGNO NEGATIVO INDICA UNA POSICIÓN ORIENTAL
      RESPECTO AL MERIDIANO "
```

RESULTADOS PROGRAMA 2

- DAME LA LATITUD EN DECIMALES?

X = 19.851

- DAME LA LONGITUD EN DECIMALES?

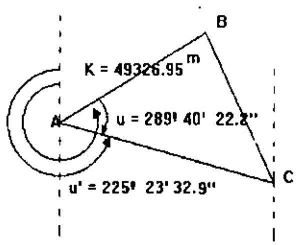
L = 0.3937

- DAME LA DISTANCIA EN METROS?

K = 49326.95

- " A = " 8.512186
- "B_2 = " 0.9646
- "T_1 = " 540.07'' (Akcos u)
- "T_2 =" 1.99 ($BK^2 sen^2$ u)
- "LATITUD DEL VERTICE B =" 20.044547
- "$\overline{61}$ = " 1598.51
- "LONGITUD DEL VERTICE B = - 0.05033 "

IV.1) COMPARACIÓN DE SOLUCIONES



DATOS

		φ	λ
VERTICE A		(19° 53' 42.3" ,	+ 00° 23' 37.4 ")
(S) DISTANCIA AB	=	49 326. 95 m	
(α) ACIMUT AB	=	289° 40' 22.2 "	

SOLUCIONES

1.- POR EL ING. COVARRUBIAS.

FORMULA

$$\varphi = \varphi + AK \cos u - BK^2 \operatorname{sen}^2 u$$

SOLUCIÓN:

φ_B = 20° 02' 40.37 " (Problema hecho en hoja 70)

λ_B = - 00° 03' 01.11 "

2.- POR ING. MEDINA PERALTA

FORMULAS

$$d\varphi = BK\cos A_2 + CK^2 \operatorname{sen}^2 Az - Ehk^2 \operatorname{sen}^2 Az$$

$$\varphi' = \varphi + Ak\cos Az - BK^2 \operatorname{sen}^2 Az$$

SOLUCIONES

φ_B = 20° 02' 44.33 "

λ_B = - 00° 03' 01.11 "

φ_B = 20° 02' 20.18 " (Método Expeditivo)

λ_B = - 00° 02' 57.43 "

3.- POR EL ING. RICARDO TOSCANO

$d\varphi = BK \cos Az + CK^2 \operatorname{sen}^2 Az + D(d\varphi)^2 - E\, d\varphi\, K^2 \operatorname{sen} Az$

SOLUCIONES

$\varphi_B = 20^\circ\ 02'\ 44.32''$

$\lambda_B = -\ 00^\circ\ 03'\ 03.20''$

4.- POR EL ING. HOSMER E ING. GANDARIAS

FORMULA

$\Delta p = P_{po}\, s \cos \alpha_1 + Q_{po}\, S^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \text{corrección}$

SOLUCIONES

$\varphi_B = 20^\circ\ 02'\ 40.31''$

$\lambda_B = -\ 00^\circ\ 02'\ 59.74''$

5.- POR EL ING. SALNUEVE

FORMULA

$\varphi' = PK \cos Z + Q\, K^2 \operatorname{sen}^2 Z$

SOLUCIONES

$\varphi_B = 20^\circ\ 02'\ 42.35''$

$\lambda_B = -\ 00^\circ\ 03'\ 01.26''$

6.- POR EL MAESTRO PUISSANT

FORMULA

$h = BS \cos \alpha$

$\delta\phi = -(h + CS^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - EhS^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$

$\Delta\phi = \delta\phi - (\delta\phi)^2 D$

$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\phi$

$\varphi_B = 20^\circ\ 02'\ 44.74''$

$\lambda_B = -\ 00^\circ\ 03'\ 01.11''$

7.- POR EL MAESTRO CLARKE

$$\Delta\phi = \frac{S}{R \operatorname{sen} 1''}$$

φ_B = 20° 02' 42.22"

$\propto^1$ = 109° 31' 24.70 "

λ_B = - 00° 03' 00.8 "

V.- CONCLUSIONES

Al realizar una comparación de resultados, en la obtención de las coordenadas geodésicas, entre los diferentes autores que conforman esta tesis, nos damos cuenta, que las soluciones dadas para un mismo problema, resultan poco diferentes entre si. Las diferencias estriban en las elipsoides adoptadas según sea el autor queda la solución al problema en cuestión. Aunque se observa que con excepción del "Método expeditivo " del Ing. Medina Peralta el cual da una solución aproximada, las soluciones de los otros autores difieren muy poco entre si.
Por la sencillez y claridad de los conceptos dados por el Ing. Francisco Díaz Covarrubias, supera por mucho los trabajos realizados con posterioridad a él y es su trabajo el que da las bases para la deducción obtenida por el Inf. Medina Peralta e Ing. Toscano. A diferencia del Maestro Salnueve, el cual nos da la obtención de las coordenadas geográficas de manera única. También se puede apreciar que los Ings. Hosmer y Gandarias nos dan soluciones precisas por procedimientos distintos a las del Ing. Díaz Covarrubias.

Los matemáticos a través de los años nos han legado bellisimas soluciones en la obtención, de las fórmulas para obtener las coordenadas geográficas de un vértice a partir de otro vértice conocido y es por ello que es tan importante repasar sus trabajos que en mucho han contribuido a las enseñanzas dadas en las aulas, donde se enseña esta materia (La Geodesia) y que han enriquecido nuestra comprensión de los que es, en si, esta materia.

Es indudable que con el progreso en las telecomunicaciones, la informática y la electrónica, la Geodesia conocida hasta entonces y después de estos avances, ha evolucionado de tal manera que las técnicas para solucionar problemas como el expuesto en esta tesis, a variado de manera considerable, siendo muy diferente, los métodos empleados en las solución al problema de la obtención de coordenadas geodésicas. En el sistema de Posicionamiento Global (GPS) por ejemplo, permite eliminar el problema de la intervisibilidad de los vértices geodésicos, como ya sea a dicho anteriormente y por ello a dado un gran impulso a la Geodesia Clásica.
En definitivo se vislumbra un futuro en donde los alcances tecnológicos aplicados a la Geodesia darán un gran impulso a los problemas que ha planteado por siempre esta materia y es difícil prever hasta donde se podrá avanzar, con los adelantos que se dan día con día.

BIBLIOGRAFÍA

- CURSO ELEMENTAL DE GEODESIA, PARA USO DE LOS ALUMNOS DEL COLEGIO NACIONAL DE MINERÍA POR EL C. TOMÁS RAMÓN DEL MORAL. MÉXICO. IMPRENTA DE GARCÍA TORRES 1852

- TRATADO ELEMENTAL DE TOPOGRAFÍA, GEODESIA Y ASTRONOMÍA PRÁCTICA POR EL ING. FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS, 1899.

- GEODESIA ELEMENTAL POR EL ING. RICARDO TOSCANO BARRAGÁN, DIRECCIÓN DE GEOGRAFÍA, METEOROLOGÍA E HIDROLOGÍA, MÉXICO 1936.

- GEODESY BY BRIGADIER G. BOMFORD. OXFORD. AT THE CLARENDON PRESS. 1952.

- GEODESIA, GEORGE LEONARD HOSMER. NEW YORK 1946.

- GEODESIA E HIDROGRAFÍA POR EL ING. VICENTE GANDARIAS. MADRID 1956

- GEODESIA POR JORGE WOLFANT 1991

- MANUAL DE TOPOGRAFÍA Y GEODESIA POR EL ING. MARIO RUIZ MORALES, PROYECTOS SUR DE EDICIONES 1991

- VARIOS AUTORES, CURSOS DE GEODESIA SUPERIOR. EDITORIAL INSTITUTO GEOGRÁFICO NACIONAL MADRID. ESPAÑA.

- APUNTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM ING. JOSÉ M. RUIZ GALINDO.

- APUNTES DE LA FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM, ING. GERMÁN GARCÍA GONZALEZ