

28  
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

PROPUESTA DE SERIES DE EJERCICIOS DE LA  
ASIGNATURA DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A

ERIKA GUADALUPE GOUJON OLVERA

DIRECTOR DE TESIS:  
ING. MIGUEL A. RODRIGUEZ VEGA



MEXICO. D. F.

1999

276144  
MH1972

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE INGENIERIA  
DIRECCION  
60-1-134/89

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTÓNOMA DE

MEXICO

Señorita

**ERIKA GUADALUPE GOUJON OLVERA**

Presente.

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. MIGUEL A. RODRIGUEZ VEGA** que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

**"PROPUESTA DE SERIES DE EJERCICIOS DE LA ASIGNATURA DE  
ESTRUCTURAS ISOSTATICAS"**

**INTRODUCCION**

- I. ANTECEDENTES**
- II. PRINCIPIOS DE EQUILIBRIO**
- III. ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS**
- IV. ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS**
- V. ELEMENTOS MECANICOS EN ARCOS**
- VI. ARMADURAS**
- VII. CABLES**
- VIII. CONCLUSIONES**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

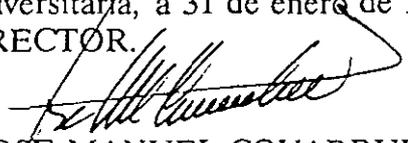
Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cd. Universitaria, a 31 de enero de 1994.

EL DIRECTOR.

  
ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/RCR\*nll

pl.

A TI MADRE

QUE TODA TU VIDA HAS A LUCHADO POR MI Y GRACIAS  
A TU EJEMPLO Y FORTALEZA PUEDO CAMINAR POR LA  
VIDA.

A USTEDES HIJOS DE MI ALMA

VIOLETA, JAVIER Y DARIO QUIENES SON MI RAZÓN DE VI-  
VIR E INSPIRACIÓN PARA SEGUIR ADELANTE.

A TI POR TODO LO QUE SIGNIFICAS PARA MI Y TU INVALUA-  
BLE AYUDA QUE SABRE RECOMPENSAR.

“SER AMADO PROFUNDAMENTE POR ALGUIEN LE DA A  
UNO LA FUERZA,  
EN TANTO QUE AMAR PROFUNDAMENTE A ALGUIEN LE DA  
A UNO EL VALOR.”

- LAOTSE

## AGRADECIMIENTOS

Antes que nada agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México el haberme admitido dentro de sus aulas y haberme formado profesional y personalmente.

Al Departamento de Estructuras de la Facultad de Ingeniería.

A mi director de tesis Ing. Miguel Ángel Rodríguez Vega por su confianza y dirección del trabajo de tesis, por haberme proporcionado el material y los conocimientos para poder realizar este trabajo.

Así como también al Ing. Javier Cortés por sus opiniones, asesoría y apoyo constantes.

Un reconocimiento especial al Ing. Alonso González Cano por su paciencia, amistad y asesoría en programas de cómputo.

A la M.I. Dora E. Ledesma Carrión por brindarme en los momentos más difíciles su confianza y apoyo a mi persona.

Finalmente, mi agradecimiento infinito a mi madre y hermana Josefina quienes con su amor y cariño me impulsaron a culminar este trabajo.

# INDICE

	Página
INTRODUCCION	
I ANTECEDENTES	3
1.1 DEFINICION DE ESTRUCTURA	
1.2 ESTRUCTURAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	
1.3 ASPECTOS CARACTERISTICOS ENTRE LAS ESTRUCTURAS	
II. PRINCIPIOS DE EQUILIBRIO	12
2.1 DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LAS FUERZAS	
2.2 SISTEMAS DE FUERZAS	
2.3 PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTATICA	
2.4 EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS	
2.5 ESTABILIDAD Y GRADO DE DETERMINACION	
2.6 DEFINICION DE ELEMENTOS MECANICOS	
2.7 RELACIONES ENTRE CARGA , FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE	
PROBLEMAS RESUELTOS (CALCULO DE REACCIONES)	29
III. ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS	49
PROBLEMAS RESUELTOS	
IV. ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS	116
PROBLEMAS RESUELTOS	
V. ELEMENTOS MECANICOS EN ARCOS	192
PROBLEMAS RESUELTOS	
VI ARMADURAS	219
PROBLEMAS RESUELTOS	
VII. CABLES	260
PROBLEMAS RESUELTOS	
VIII. CONCLUSIONES	271

## INTRODUCCION

El trabajo de tesis presentado, para sustentar este examen profesional de Ingeniero Civil, tiene por objeto el de ayudar a los alumnos que cursan la asignatura de Estructuras Isostáticas, en el aprendizaje de los temas incluidos en el programa vigente de la materia correspondiente a 1994. Se plantearon y resolvieron ejercicios típicos con diferentes grados de dificultad mediante métodos distintos.

La idea de desarrollar esta serie de ejercicios resueltos, surgió como una necesidad para que los alumnos adquieran una mayor habilidad en el manejo de las ecuaciones de equilibrio estático y relaciones entre ellas, así como también en el procedimiento de la comprensión y trazo de diagramas de elementos mecánicos.

En esta tesis se presentan diversos problemas resueltos con diferentes grados de dificultad, donde el alumno podrá aclarar ciertas dudas en el procedimiento de solución y además de complementar el conocimiento brindado por el profesor en el aula.

Este trabajo presenta un estudio enfocado a estructuras isostáticas, las cuales son de gran importancia debido a que existen en estructuras de diversas construcciones, considerando que todos los análisis de un sistema hiperestático están formados por sistemas isostáticos auxiliares e inmersos en las mismas.

Tanto en los Capítulos I y II se presentó un panorama general teórico de antecedentes acerca de las diferentes estructuras y sus características, sistemas de fuerzas, equilibrio de fuerzas y elementos mecánicos. Temas en los cuales el alumno profundiza en las materias de Estática y Estructuras Isostáticas.

En el Capítulo II de la tesis "Principios de equilibrio" se abordaron problemas donde se pretendió apoyar al alumno en la determinación de reacciones. Posteriormente en siguientes capítulos teniendo ya el conocimiento y la destreza para determinar estas reacciones, se prosiguió a desarrollar problemas donde el objetivo principal es el conocer diferentes métodos para determinar los siguientes elementos mecánicos : momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal para diferentes tipos de estructuras como : vigas, marcos, arcos , armaduras y finalmente se desarrollaron problemas de cables.

En el Capítulo III donde se desarrollaron problemas referidos a vigas, se presentaron los métodos de ecuaciones, suma de áreas y superposición, de manera que el alumno tuviera la oportunidad de apreciar las ventajas y desventajas que ofrece cada método dependiendo del tipo de carga y geometría de la estructura.

El mismo planteamiento se realizó en Capítulo IV "Elementos Mecánicos en Marcos " buscando nuevamente que el alumno desarrollara habilidades en la solución de estos problemas.

En el Capítulo V "Elementos Mecánicos en Arcos" se empleó únicamente el método de las ecuaciones, los problemas se fueron presentando incrementando el grado de dificultad gradualmente hasta llegar a un arco doble.

En el Capítulo VI "Armaduras" de manera similar que en los Capítulos III y IV se resolvieron los problemas propuestos por dos métodos alternativos de solución: método de los nudos y método de las secciones, para que así el alumno pueda decidir en base a la práctica cuando es más conveniente emplear cada método.

Finalmente en el Capítulo VII "Cables" se desarrollan los procedimientos de solución para diferentes problemas de cables según la configuración adquirida.

# I.- ANTECEDENTES

## I.1 DEFINICION DE ESTRUCTURA

El hablar de la palabra estructura invita a relacionarse con el campo de la Ingeniería.

Una estructura es un elemento o conjunto de elementos que al estar unidos entre sí forman un sistema estructural que resisten las cargas que actúan y las transmiten por medio de sus apoyos, a otro elemento firme con respecto a la estructura que recibe. Una estructura debe tener la capacidad de mantenerse sin cambios apreciables en su geometría durante la carga y descarga como por ejemplo en un puente.

Hay dos objetivos principales que deben siempre lograrse en una estructura:

1. Cumplir los requisitos de funcionalidad.
2. Soportar las cargas en condiciones seguras.

El estudio de las estructuras se remonta a épocas muy antiguas, por lo general se considera que inicia con los trabajos de Galileo Galilei a principios de siglo XVII. Anteriormente los constructores seguían reglas empíricas y rudimentarias, Galileo fue el primero que intentó explicar con una base racional, el comportamiento de algunos miembros o elementos sometidos a cargas. Estudió miembros en tensión y compresión y en particular las vigas que se empleaban en la construcción de cascos para embarcaciones. Desde luego se han logrado grandes avances desde entonces pero esto nos indica la importancia que tiene el conocer el comportamiento de un elemento en el que actúan fuerzas.

## I.2 ESTRUCTURAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

No existe realmente una estructura en el plano sin embargo para simplificar su estudio generalmente se consideran sistemas planos, aunque nunca son bidimensionales. Para fines prácticos el análisis estático de estructuras que se realizará en esta tesis, se estudiará en el plano (2D).

Una estructura plana es aquella, cuyos elementos geométricos, sistema de carga y apoyos están contenidos en un plano. Una estructura espacial es aquella, cuyos elementos geométricos no están contenidos dentro de un plano o cuando pudiendo estarlo, su sistema de carga o de apoyos no se ubiquen dentro de un mismo plano. Todos los análisis se basan en hipótesis a veces no muy de acuerdo con la realidad, pero es importante idealizar una estructura en tal forma que se pueda hacer un cálculo práctico y a partir de este, acercarse cada vez más la idealización a la realidad logrando tener una solución muy práctica.

1 Atendiendo a su geometría, en el plano podemos distinguir los siguientes tipos de estructuras (figura 1.1).

- Estructuras rectas
- Estructuras curvas
- Estructuras de superficie

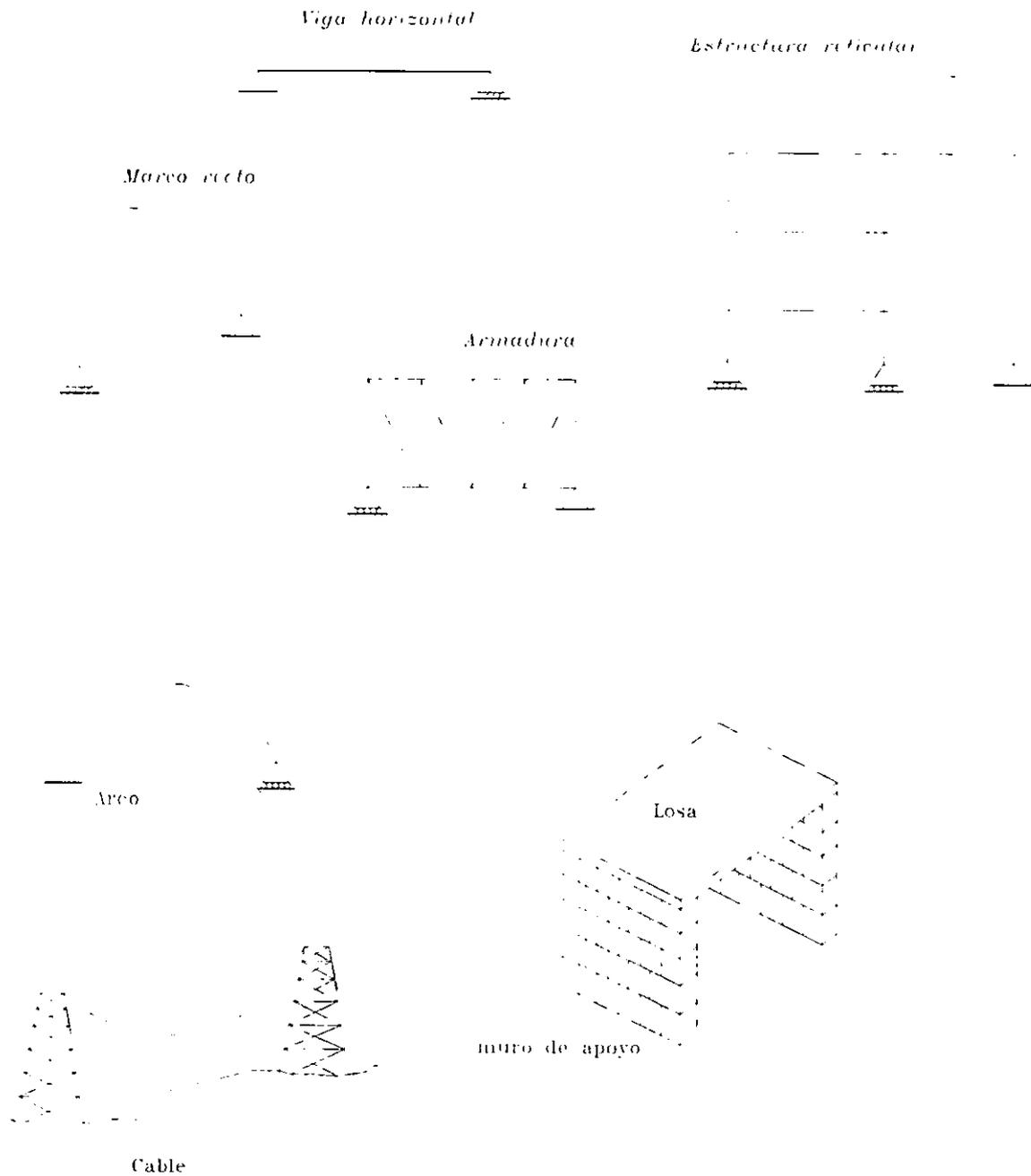


fig 1.1.

Las estructuras rectas pueden ser elementos horizontales, verticales, inclinados o también una combinación de estos. Las vigas son elementos horizontales o inclinados, en cambio las columnas son elementos generalmente verticales.

Es posible unir vigas y columnas y de esta manera conformar lo que se conoce como marco, ahora si se agrupan un conjunto de marcos se obtendrá una estructura. Existe la posibilidad de unir varias barras rectas articuladas de tal manera que formen una retícula llamada armadura.

Las estructuras curvas forman arcos y cables de diversas configuraciones. Los arcos pueden ser arcos circulares, elípticos, parabólicos, etc. Los cables también son estructuras curvas aunque pueden ser rectos, los cables presentan formas parabólicas, elípticas, y catenarias según el sistema de carga que soporten (figura 1.2).

Fundamentalmente las estructuras planas de superficie es decir placas son muros y losas. Los muros se alojan en planos verticales y las losas por lo general se presentan en planos horizontales.

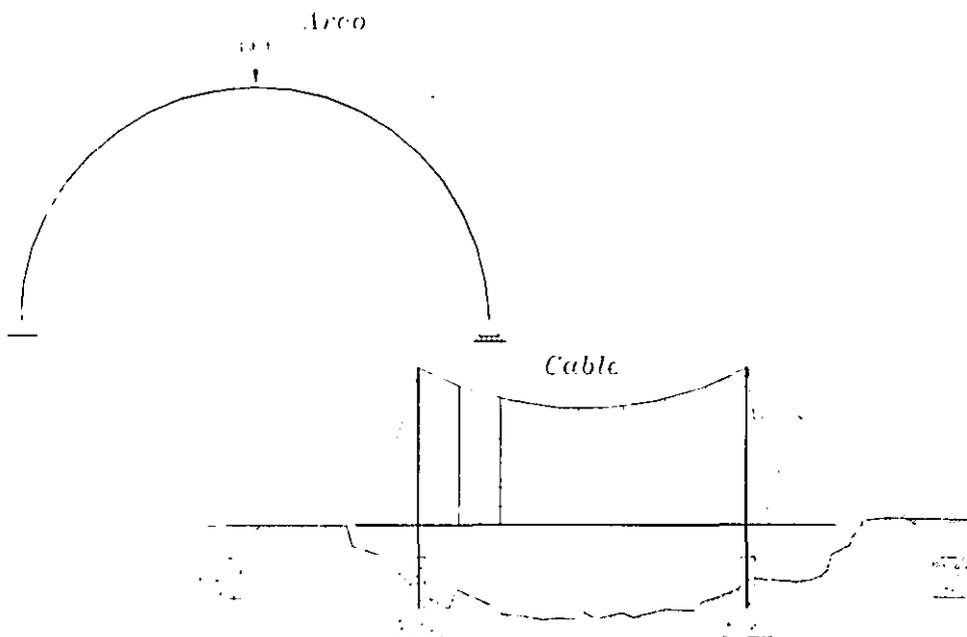


fig 1.2

A continuación se presenta un breve resumen de lo dicho anteriormente.

### ESTRUCTURAS RECTAS

- Vigas ( horizontales, inclinadas).
- Columnas (verticales, inclinadas).
- Marcos (rectos inclinados)
- Armaduras
- Cables rectilíneos

### ESTRUCTURAS CURVAS.

- Arcos (circulares, elípticos, parabólicos).
- Cables (parabólicos, elípticos, catenarias).

### ESTRUCTURAS DE SUPERFICIE

- Muros.
- Losas.

## **1.3 ASPECTOS CARACTERISTICOS ENTRE LAS ESTRUCTURAS.**

Entre las estructuras existen ciertas diferencias que las obligan a comportarse de distinta manera a continuación se presentan los principales aspectos:

1. La geometría que las distingue.
2. Las cargas que soportan.
3. La forma en que están apoyadas.

### 1.3.1 Geometría

La geometría de una estructura está en función del uso y finalidad a la que vaya estar destinada. Hay diferentes necesidades que satisfacer como son las siguientes:

- Cubrir un espacio como es el caso de un edificio o naves industriales.
- Salvar un claro como en el caso de los puentes.

- Contener empujes como en los tanques de almacenamiento y presas.
- Sostener cableados de torres de alta tensión.

### 1.3.2 Cargas

Se entiende por cargas a las fuerzas y momentos reales aplicados a una estructura basándose en consideraciones estáticas o dinámicas y de acuerdo con el tiempo de permanencia las cargas pueden clasificarse en:

- Carga muerta.

Es el peso de la estructura en si misma, es decir, son las fuerzas gravitacionales que actúan y tienen carácter permanente y se considera constante en magnitud y localización, por ejemplo los materiales empleados en la construcción de un edificio.

- Cargas vivas o móviles.

Son aquellas que pueden ser transportadas de un lugar a otro de la estructura, es decir, cargas gravitacionales que actúan en una estructura y que no tienen carácter permanente. Por ejemplo las personas y muebles que ocupan un edificio, el caso de una grúa viajera.

- Cargas en movimiento.

Son aquellas que se mueven continuamente en una estructura tales como trenes y camiones sobre un puente.

- Cargas accidentales.

Son las fuerzas que actúan en una estructura que no son gravitacionales y además no tienen carácter permanente. En este ámbito quedan incluidas las fuerzas producidas por el viento, sismo, etc.

Las cargas se pueden idealizar desde el punto de vista de su superficie de acción en cargas concentradas y cargas distribuidas o repartidas.

- Cargas concentradas.

Son aquellas que se consideran para su análisis aplicadas en un punto. Las unidades de estas cargas son unidades de fuerza ( $W$ ).

Por ejemplo en el caso de dos vigas A y B una apoyadas sobre la otra. Estas tienen un peso determinado por la acción de la gravedad, la viga A que sirve de apoyo a la viga B y se pueden representar en el plano y de forma esquemática para llevar a cabo su análisis.

- Cargas repartidas.

Cargas distribuidas o repartidas son aquellas que se consideran aplicadas a lo largo de un elemento, estas cargas estan dadas en unidades de longitud (W/L). Por ejemplo el peso de una viga A que se distribuya a lo largo de su eje.

Las cargas repartidas pueden ser uniformemente repartidas y no uniformemente repartidas de acuerdo a la ley de variacion que sigan. Existen cargas triangulares como en el caso de la presión hidrostática del agua en un tanque de almacenamiento o también el empuje de suelo sobre un muro. Hay cargas con una variación que no se conoce con exactitud como es el caso de una zapata de cimentación que transmite una carga al suelo cuya distribución se llama bulbo de presión ( ver figura 1.3).

### CARGAS CONCENTRADAS Y CARGAS REPARTIDAS

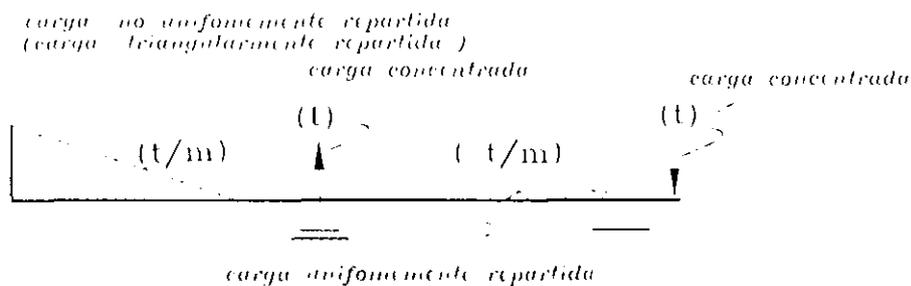


fig 1.3

Atendiendo a la forma en que actúan las cargas en una estructura se puede hablar de tres tipos:

- Cargas activas. Son las fuerzas que debe soportar una estructura en las que están incluidas las cargas vivas, cargas muertas y cargas accidentales.
- Cargas reactivas. Son aquellas con las cuales responden los apoyos de una estructura a las cargas activas para tener equilibrio un elemento o la estructura.
- Cargas internas. Son aquellas con las que responde una sección de un elemento para estar en equilibrio tanto con las cargas activas como las reactivas a la izquierda y derecha de dicha sección (ver figura 1.4).

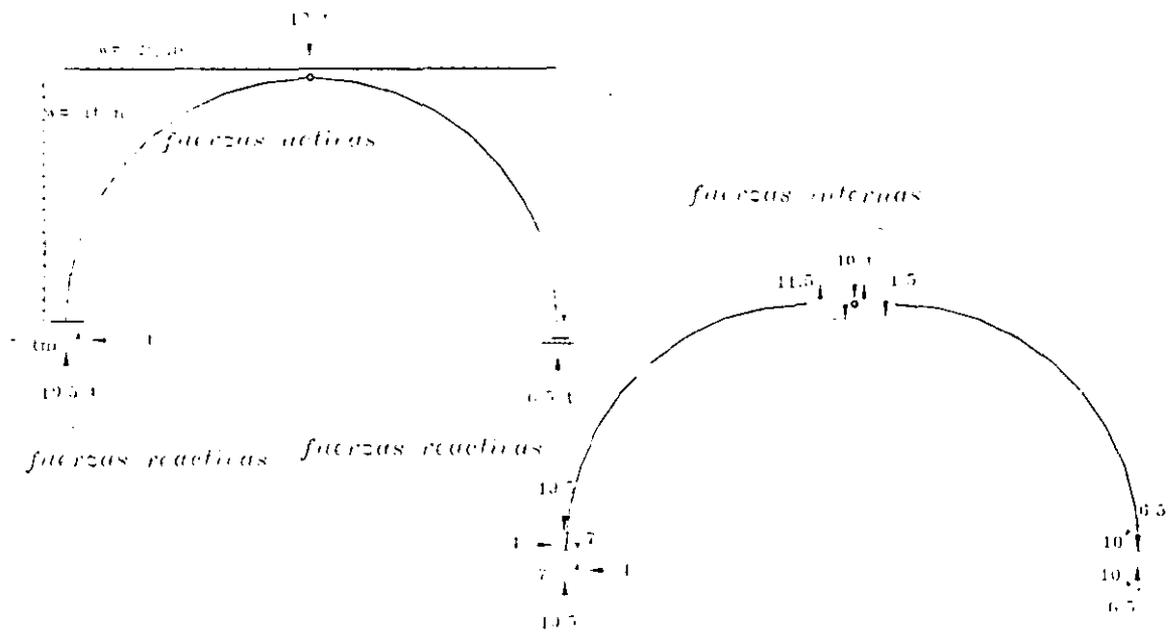


fig 1 4

### 1.3.3 Apoyos.

Las estructuras están sustentadas con restricciones completas de tal manera que no pueden moverse con plena libertad en el espacio. Tales restricciones están originadas por los apoyos que unen la estructura a alguna base fija.

Un apoyo es un dispositivo o forma de unión, mediante el cual se transmiten las fuerzas que actúan sobre un cuerpo a otro que le sirve de soporte. Estos elementos de soporte, es decir, los apoyos van a originar una serie de fuerzas externas para lograr un equilibrio de soporte, a estas fuerzas externas se les llamará reacciones y entre todas las reacciones conformarán un sistema en estado de equilibrio.

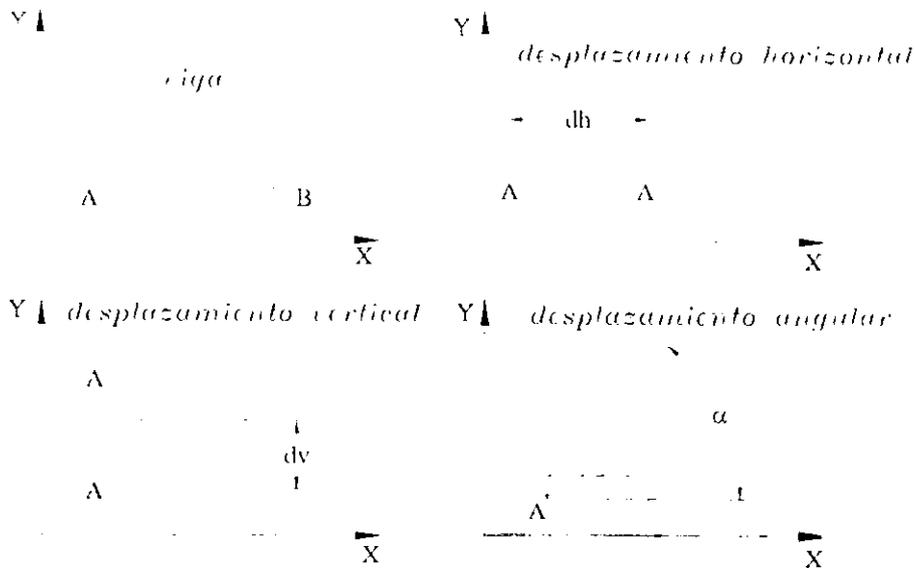
Para comprender mejor el comportamiento de cada uno de los apoyos, es necesario hablar de dos condiciones que los definen:

- Desplazamientos
- Grados de libertad

Cuando se habla de las posibles formas de desplazarse de un cuerpo en el plano, se distinguen tres tipos diferentes de desplazamiento (ver figura 1.5):

- lineal horizontal paralelo al eje X
- lineal vertical paralelo al eje Y
- angular ya que el cuerpo puede girar un cierto ángulo  $\alpha$  sobre un punto.

### DESPLAZAMIENTOS



Se entiende por grados de libertad al número de desplazamientos independientes que no están restringidos. Teniendo claros los conceptos de apoyo, desplazamiento y grado de libertad es posible hablar de los diferentes apoyos existentes en el plano:

- Apoyo libre (o de carrito).
- Apoyo fijo (o articulado).
- Apoyo de empotramiento.

Apoyo libre. Es el apoyo que responde con una reacción vertical a las cargas a que está sometido, con lo que restringe solamente el desplazamiento vertical, permitiendo giros en las barras (desplazamientos angulares) y desplazamientos horizontales. Por ejemplo, el caso de dos columnas que sostienen una viga por medio de ménsulas.



Apoyo fijo Es el apoyo que tiene dos grados de restricción por lo tanto se generan dos fuerzas reactivas que impiden los desplazamientos horizontales y verticales sólo permitiendo giros (desplazamientos angulares) por lo tanto existe un grado de libertad Como ejemplo el caso de dos barras inclinadas unidas por medio de un pasador que las atraviesa.



Apoyo de empotramiento. Es el apoyo que responde con tres reacciones y con ellas impide los desplazamientos en las direcciones vertical y horizontal así como una rotación o giro del apoyo. Por ejemplo un poste de luz apoyado en el suelo o en vigas sujetas por columnas que forman parte de un volado como los balcones.



# 11.- PRINCIPIOS DE EQUILIBRIO.

## 2.1 DEFINICION Y CARACTERISTICAS DE LAS FUERZAS.

La primera y más importante función de una estructura es la de soportar cargas sin mostrar distorsiones apreciables. Estas cargas son en realidad fuerzas, por esta razón a continuación se definirán aspectos importantes de los sistemas de fuerzas. Una fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro, puede jalar o empujar. Una fuerza tiene tres características, todas las cuales deben conocerse para definirla completamente, estas características son magnitud, dirección (incluyendo el sentido) y punto de aplicación.

La estática en el análisis estructural supone que todos los sistemas de fuerzas actúan sobre cuerpos rígidos, lo anterior invita a definir los siguientes conceptos.

- Partícula : es un cuerpo cuyas dimensiones son tan pequeñas, que las fuerzas que sobre él actúan pueden considerarse concentradas.
- Cuerpo rígido: es un cuerpo que posee masa y cuyas dimensiones permanecen constantes, aún cuando se le aplique un conjunto de fuerzas
- Fuerza. es la acción que un cuerpo ejerce sobre otro y que cambia o tiende a cambiar el estado de movimiento o reposo del cuerpo sobre el cual actúa. La fuerza es una cantidad vectorial y está representada gráficamente por un vector que consta de las siguientes características: magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

Para simplificar el problema de idealización en el análisis y diseño de una estructura, esta se concibe como una barra o un conjunto de barras donde estarán aplicadas las fuerzas.

- Barra: es un cuerpo cuyas dos dimensiones son mucho menores que la tercera, para representarla se acostumbra dibujar únicamente el eje longitudinal de la barra, considerándolo como el lugar geométrico de los centroides de cada una de las secciones transversales. Las barras según las características de su eje longitudinal se clasifican en:
  - barras de eje curvo
  - barras de eje recto.
- Sistema de barras: es un conjunto de barras y para el análisis mecánico de alguna barra, se requiere el análisis de las otras como el caso de las armaduras.

## 2.2 SISTEMAS DE FUERZAS.

Al conjunto de fuerzas que actúan simultáneamente sobre un cuerpo se les denomina sistema de fuerzas. Dos sistemas de fuerzas son equivalentes, si producen los mismos efectos externos al actuar sobre un cuerpo. Un sistema de fuerzas se puede sustituir por una fuerza equivalente llamada resultante y cuando esta tiene un valor igual a cero se dice que el sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio. Ya que los análisis que se realizarán en esta tesis se limitarán a estructuras en el plano, únicamente se trabajará con sistemas de fuerzas coplanares.

Se entiende por fuerzas coplanares aquellas cuyas líneas de acción están comprendidas en un mismo plano. Merecen destacarse dos casos especiales de sistemas de fuerzas coplanares en equilibrio:

- fuerzas concurrentes: son aquellas cuyas líneas de acción concurren en un mismo punto.
- fuerzas paralelas: son aquellas cuyas líneas de acción son paralelas, se consideran también colineales cuando estas líneas de acción coinciden.

El momento de una fuerza respecto a un punto, es el producto de esta fuerza por la distancia perpendicular desde el punto con respecto al cual se va a tomar el momento hasta la línea de acción de la fuerza. El tamaño del momento depende de la magnitud y dirección de la fuerza así también de la distancia al punto  $O$ .

El par de fuerza se genera cuando dos fuerzas  $F$  de igual magnitud y paralelas, actúan a una distancia  $d$ .

Transformación de pares es cuando un par de fuerzas puede transformarse sin que cambie ninguna de sus características. El par puede ser girado en su plano y puede ser trasladado paralelamente a sí mismo en su plano o planos paralelos a sí mismo.

En un par se puede variar simultáneamente la magnitud de las fuerzas y la separación entre ellos, siempre y cuando el producto de  $F \times d$  permanezca constante y no cambie su plano y el sentido del giro.

## 2.3 PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTÁTICA.

El estudio de los sistemas de fuerzas se fundamenta en cinco principios básicos que se muestran a continuación:

- Principio del paralelogramo.

Cuando actúan dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  sobre un cuerpo, el efecto que producen es equivalente al de una sola fuerza llamada resultante  $R$ . Las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  forman los lados de un paralelogramo cuya diagonal coincide con la dirección de la fuerza  $R$ .

En donde  $F_1$  y  $F_2$  son las fuerzas aplicadas en A y que forman un ángulo  $\alpha$  entre sí, y R es la resultante o diagonal del paralelogramo medido a la misma escala (figura 2.1).

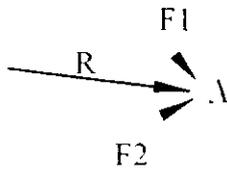


fig 2.1

- Principios de equilibrio.

Para que dos fuerzas estén en equilibrio es necesario y suficiente que sean iguales, colineales y de sentido contrario (figura 2.2).

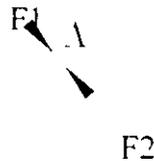


fig 2.2

- Principio de la acción y de la reacción.

Este principio es en realidad la tercera ley de Newton y se enuncia a continuación: "A toda acción corresponde una acción igual, colineal y de sentido contrario".

- Principio de adición de sistemas equilibrados

Los efectos externos que un sistema de fuerzas produce sobre un cuerpo no cambian si se le agrega o elimina cualquier otro sistema equilibrado (figura 2.3).

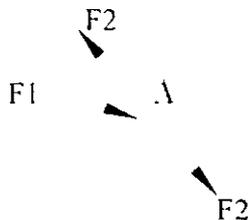


fig 2.3

- Principio de transmisibilidad

El principio de transmisibilidad establece que: “Los efectos externos producidos por una fuerza sobre un cuerpo rígido, no cambian si esta se aplica en cualquier punto de la línea de acción” (figura 2.4)

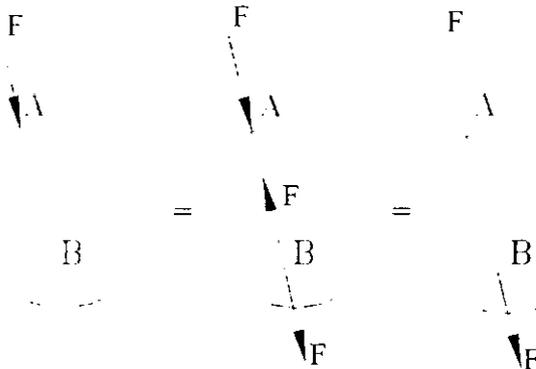


fig 2 4

A partir de los cinco principios explicados anteriormente, se derivan dos métodos muy utilizados en todos los análisis estáticos de las estructuras:

- Composición de fuerzas

Composición de fuerzas es el proceso mediante el cual se obtiene la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes mediante el proceso del paralelogramo o también utilizando el método de las proyecciones, el cual consiste en sustituir cada fuerza por sus proyecciones ortogonales y así obtener finalmente las dos fuerzas ortogonales componentes de la resultante

- Descomposición de fuerzas.

Descomposición de fuerzas al proceso mediante el cual se obtienen a partir de una fuerza, una o mas fuerzas concurrentes que produzcan los mismos efectos externos sobre el cuerpo.

## 2.4 EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

Se considera que un cuerpo esta en equilibrio cuando el sistema de fuerzas que actúa sobre el está equilibrado, lo anterior indica la importancia de conocer el equilibrio o no-equilibrio de un sistema actuando en un cuerpo.

Existen tres grupos de ecuaciones generales del equilibrio para un sistema plano, donde todas las fuerzas del sistema están alojados en un mismo plano que puede ser el X Y. Solamente hay dos proyecciones de fuerzas  $\Sigma F_x$  y  $\Sigma F_y$  y también sólo existen rotaciones en torno del eje ZZ.

Las tres ecuaciones generales de equilibrio que se consideran para un sistema general del plano son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Merecen destacarse dos casos especiales de sistemas de fuerzas coplanares en equilibrio: fuerzas concurrentes y fuerzas paralelas.

- Fuerzas concurrentes.

Si un sistema de fuerzas coplanares concurrentes está en equilibrio debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0$$

Otro conjunto de ecuaciones independientes necesarias y suficientes para el equilibrio de las fuerzas de un sistema de fuerzas concurrentes coplanares es:

$$F_y = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_a = 0$$

Siempre y cuando el punto a no esté colocado sobre la línea perpendicular y que pasa a través del punto de concurrencias de las fuerzas.

Un tercer conjunto de ecuaciones de equilibrio para un sistema de fuerzas coplanares concurrentes es:

$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_b = 0$$

Donde a y b son dos puntos cualesquiera en el plano de las fuerzas, teniendo en cuenta que la línea que pasa a través de a y b no concurra al punto de confluencia de las fuerzas.

- Fuerzas paralelas

Si un sistema de fuerzas paralelas coplanares está en equilibrio, las fuerzas del sistema deben satisfacer las ecuaciones:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_a = 0$$

en donde el eje y está en dirección de las fuerzas del sistema y a es cualquier punto en el plano.

Otro conjunto de ecuaciones independientes de equilibrio para un sistema de fuerzas paralelas coplanares está dado por:

$$\Sigma M_a = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_b = 0$$

en donde a y b son dos puntos cualesquiera en el plano, teniendo en cuenta que la línea que pasa por a y b no debe ser paralela a las fuerzas del sistema.

Hay dos casos de equilibrio que merecen especial atención

1 Elemento sometido a dos fuerzas.

En la figura 2.5 se muestra un cuerpo sometido a dos fuerzas externas aplicadas en a y b. Si el cuerpo se encuentra en equilibrio, las dos fuerzas no pueden tener una orientación arbitraria, como la indicada en la figura 2.5(a), sino que deben estar dirigidas a lo largo de ab, como indica la figura 2.1(b). Además, deben ser iguales en magnitud y de sentido opuesto. Esto puede probarse utilizando las ecuaciones  $\Sigma M_a = 0$  y  $\Sigma M_b = 0$ . Para que el momento respecto de a se anule, la fuerza  $F_b$  debe pasar por a. Similarmente, la fuerza  $F_a$  debe pasar por b. Ahora como  $\Sigma F = 0$ , fácilmente se deduce que  $F_a = -F_b$

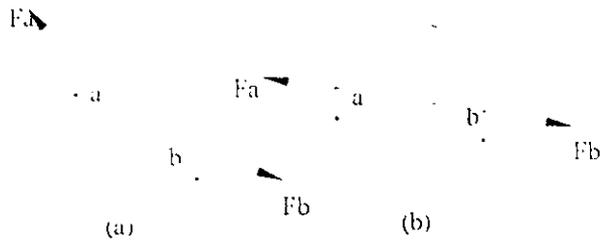


fig 2.5

2 Elemento sometido a tres fuerzas.

En la figura 2.6 se muestra un cuerpo sometido a la acción de tres fuerzas externas aplicadas en a, b y c. Si el sólido está en equilibrio, las fuerzas no pueden tener una orientación cualquiera como muestra la figura 2.6(a). Deben concurrir en un punto común O, como indica la figura 2.6(b); de otra manera el momento total respecto de la intersección de dos fuerzas cualesquiera no se anularía. Un caso límite se presenta cuando en punto O se desplaza a una distancia infinita de a, b y c. En este caso, las fuerzas  $F_a$ ,  $F_b$  y  $F_c$  son paralelas.

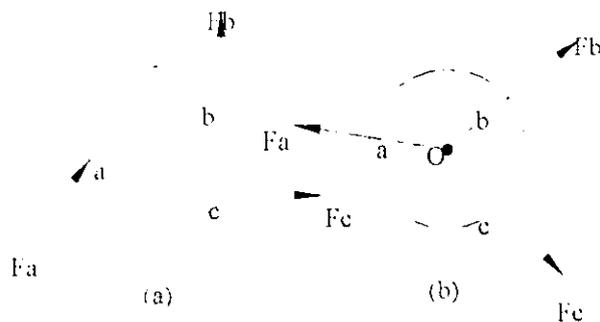


fig 2.6

## 2.5 ESTABILIDAD Y GRADO DE DETERMINACION.

La estabilidad y grado de determinación de las estructuras se analiza por el número y disposición de sus apoyos, elementos, uniones y reacciones. Puede hacerse por simple observación o por medio de fórmulas.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior las estructuras están sustentadas por apoyos que provocan restricciones o reacciones de tal manera que la estructura no puede moverse libremente en el espacio

Apoyandose en las ecuaciones del equilibrio de los sistemas de fuerzas y analizando la disposición de los apoyos se llega a tres casos de isostaticidad:

- Estructuras isostáticas.
- Estructuras hiperestáticas.
- Estructuras hipoestáticas.

Estructuras isostáticas.

Es cuando en una estructura existen tres reacciones desconocidas, mismo número de ecuaciones de equilibrio disponibles ( $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y=0$ ,  $\Sigma M=0$ ), y únicamente puede ser analizada mediante la aplicación de las ecuaciones de la estática (ver figura 2.7).

Número de reacciones = Número de ecuaciones

Estructura hiperestática.

Es cuando el número de reacciones supera al número de ecuaciones aportadas por la estática. Una estructura estáticamente indeterminada se resuelve mediante las ecuaciones de la estática junto con las proporcionadas por la geometría de la curva elástica, con el comportamiento lineal de la estructura. Las deformaciones elásticas de las estructuras no solamente dependen de las cargas aplicadas, sino que también son afectadas por las propiedades de los materiales (módulo de elasticidad  $E$ ) y por las propiedades geométricas de la sección (área de la sección  $A$ , momento de inercia  $I$ ) (ver figura 2.7).

Número de reacciones > Número de ecuaciones

Estructura hipoestática.

Es cuando en una estructura se cuenta con un número de incógnitas menor que las tres ecuaciones de la estática, son mecanismos que presentan inestabilidad y no tienen solución (ver figura 2.7).

Número de reacciones < Número de ecuaciones

Así, pues, las cargas, las propiedades de los materiales y las propiedades geométricas, intervienen en la solución de las estructuras hiperestáticas o estáticamente indeterminadas

mientras que solamente el factor carga es el predominante en el caso de estructuras estaticamente determinadas.

	NUMERO DE INCOGNITAS	NUMERO DE ECUACIONES	ESTATICIDAD
a	3	3	Isostática (viga simplemente apoyada)
b	5	3	Hiperestática de segundo grado (viga continua)
c	2	3	Inestable
d	3	3	Isostática (viga en voladizo)
e	6	3	Hiperestática de tercer grado (viga en voladizo con apoyo)
f	4	3	Hiperestática de primer grado (viga en voladizo con apoyo)
g	1	1	Isostática
h	7	3	Hiperestática de cuarto grado

fig 2.7

En ocasiones el hecho de que una estructura sea isostática no es suficiente para garantizar el equilibrio de esta. Existen dos posibilidades de inestabilidad como se explica a continuación:

- Equilibrio inestable
- Inestabilidad geométrica.

Equilibrio inestable.

Una estructura puede ser estable con cierta disposición de cargas, pero si no lo es bajo la acción de algún otro conjunto de cargas, entonces resulta inestabilidad en dicha estructura (ver figura 2.8)

Inestabilidad geométrica

La capacidad de una estructura para soportar adecuadamente las cargas aplicadas a ella no sólo depende del número de componentes de reacción, sino también de la disposición de estas. Es posible que una estructura tenga tantas componentes de reacción como ecuaciones disponibles, e incluso mayor número de aquéllas que de éstas, y que aún así sea inestable (ver figura 2.8).

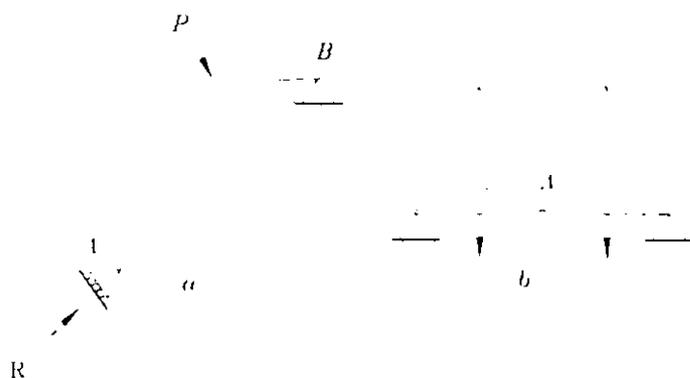


fig 2.8

El marco de la figura 2.8(a) tiene tres componentes de reacción y tres ecuaciones disponibles para su solución; sin embargo, un estudio de los momentos en B indicará que la estructura es inestable. La línea de acción de la reacción en A pasa por B, y a menos que la línea de acción de P pase por el mismo punto, la suma de momentos con respecto a B no puede anularse. No hay resistencia a la rotación con respecto a B, por lo que la estructura tenderá de inmediato a girar alrededor de este punto. Tal vez no se presente el colapso pero girará hasta que alcance una situación estable.

En la figura 2.8(b) se muestra otra estructura geoméricamente inestable. Hay cuatro ecuaciones disponibles para calcular las cuatro componentes de reacción. Después de un ligera deflexión vertical en A, la estructura probablemente alcanzará la estabilidad.

## 2.6 DEFINICION DE ELEMENTOS MECANICOS.

Una de las leyes fundamentales de la estática dice que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte del cuerpo también estará en equilibrio. Esta es la base de la solución de problemas de estática mediante el diagrama de "cuerpo libre".

Considérese la viga mostrada en la figura 2.9 se puede cortar esta viga en cualquier sección transversal dada, tal como la a-a. Para que la parte a la izquierda se mantenga en equilibrio es necesario que en dicha sección exista un sistema interno que equilibre a las reacciones y a las cargas que existan en la parte izquierda de la viga. A las fuerzas y momentos que logran este equilibrio se les denomina elementos mecánicos de la barra en la sección considerada.

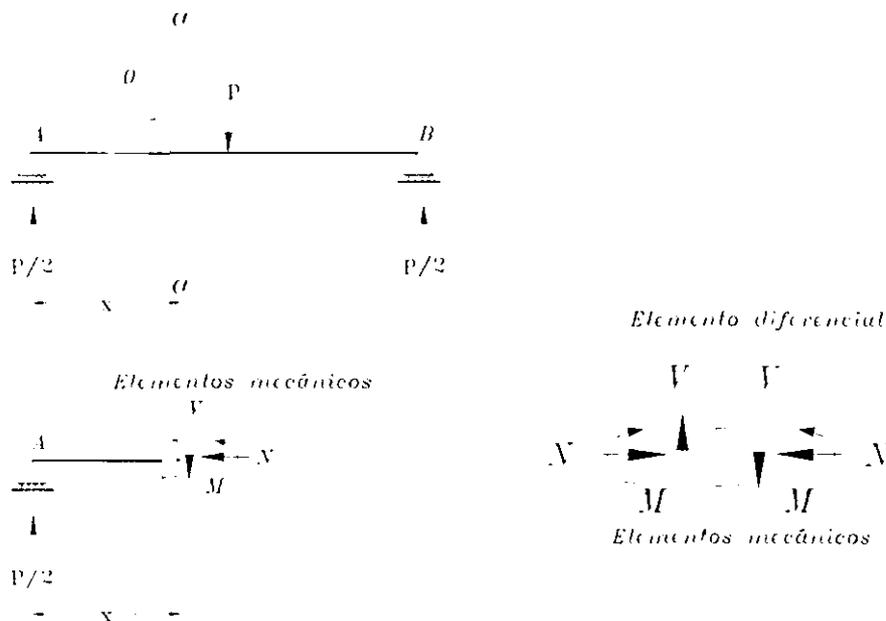


fig 2.9

Los elementos mecánicos en una sección de una barra están constituidos por una fuerza perpendicular al eje de la barra (fuerza cortante V), una fuerza coincidente con el eje (fuerza normal N) y un momento (momento flexionante M) que equilibran todas las fuerzas activas o reactivas que obran a la izquierda o a la derecha de la sección considerada (ver figura 2.9).

- Fuerza normal. Es igual a la suma de las proyecciones de todas las fuerzas activas y reactivas, en la dirección del eje de la barra, a la izquierda o a la derecha de la sección y

se le representa por  $N$  en la figura 2.9. La fuerza normal provoca tensión o compresión en la barra sobre la que actúa.

- **Fuerza cortante.** Es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas activas y reactivas sobre el plano de la sección, a la izquierda o a la derecha de la sección, y se le representa por  $V$  en la figura 2.9. La fuerza cortante también se llama fuerza tangencial, ya que su efecto tiende a deslizar entre sí una sección respecto a la otra en dirección perpendicular al eje longitudinal.
- **Momento flexionante.** Es igual a la suma de los momentos que producen las fuerzas activas y reactivas a la izquierda o a la derecha de la sección. Se representa con  $M$  en la figura 2.9. El momento flexionante se denomina así ya que su efecto tiende a flexionar la viga de manera que las fibras superiores al eje longitudinal de la viga se esfuerzan a compresión (o tensión) y las inferiores a tensión (o compresión).

#### Diagramas de elementos mecánicos.

El diagrama de un elemento mecánico determinado, es la representación gráfica del mismo, donde en cada sección de la viga (valor de la abscisa) se obtiene el valor del elemento mecánico (valor de la ordenada). Dentro del diagrama se acostumbra anotar el signo correspondiente, según la convención de signos establecida.

Es conveniente aclarar:

1. El diagrama de un elemento mecánico proporciona su valor en cada una de las secciones transversales de la barra del sistema estructural en estudio, aplicando sobre él una condición de carga de posición constante.
2. El marco de referencia no es necesariamente de ejes rectos ortogonales, pues para barras de eje curvo es más conveniente, en ocasiones, tomar el eje longitudinal del elemento como referencia para localizar las secciones, representando el valor del elemento mecánico según una perpendicular al eje de la barra para cada sección.
3. El utilizar los diagramas de elementos mecánicos es objetivo y práctico, ya que se obtienen gráficas convenientemente definidas, pues permiten sintetizar los resultados obtenidos analíticamente y tener una idea más general del trabajo del sistema estructural que se analiza.

## 2.7 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante.

Existen en cualquier sección de una viga cargada ciertas relaciones entre la carga, fuerza cortante y momento flexionante, que sirven de gran ayuda para la construcción de los diagramas de elementos mecánicos. A continuación se muestra en la figura 2.10 (a) una viga sometida a diferentes tipos de carga donde será fácil apreciar como influyen estas, en los elementos mecánicos

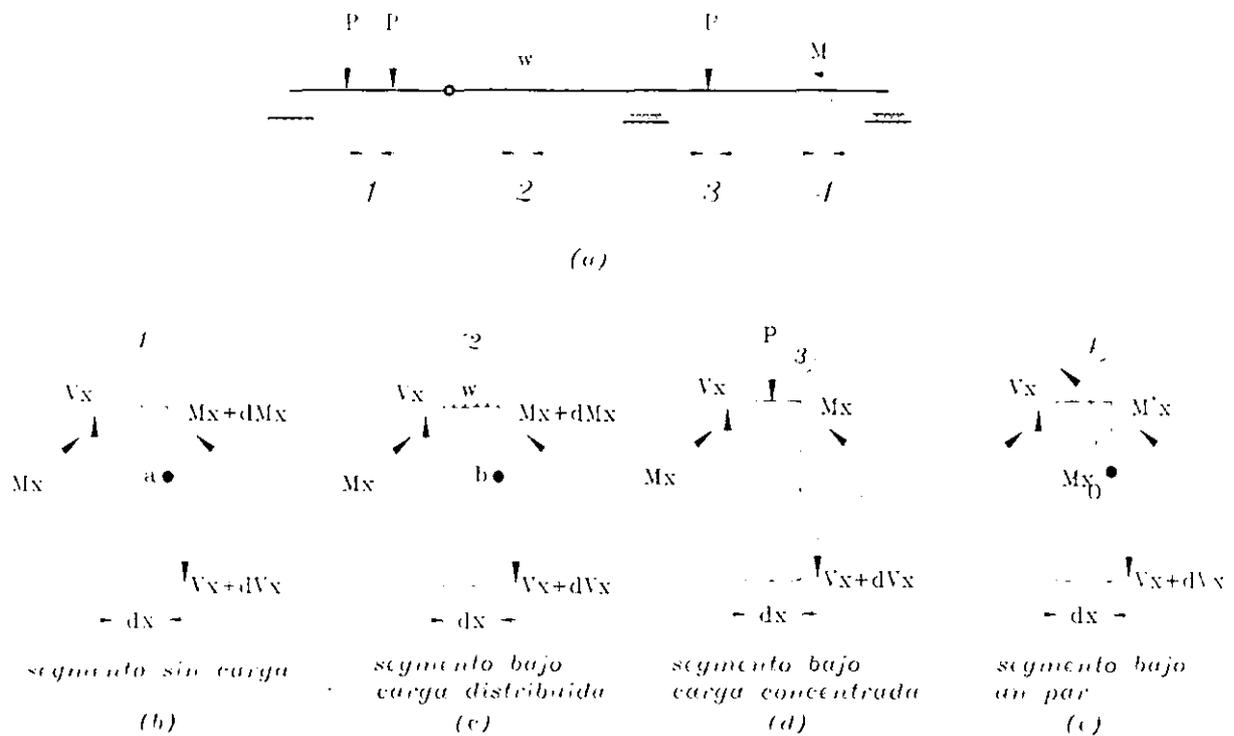


fig 2.10

1. Segmento sin carga.
2. Segmento bajo carga distribuida.
3. Segmento bajo carga concentrada.
4. Segmento bajo un momento concentrado.

Segmento sin carga:

De acuerdo con la figura 2.10 (b) un segmento entre dos cargas concentradas es un ejemplo de segmento sin carga. Considerando un elemento longitudinal entre dos secciones distantes  $dx$ , sobre la cara izquierda de este elemento, actúan la fuerza cortante y el momento flexionante representados por medio de  $V_x$  y  $M_x$ , y sobre la cara derecha por medio de  $V_x + dV_x$  y  $M_x + dM_x$ , en donde  $dV$  y  $dM$  representan la variación en la fuerza cortante y el momento flexionante en la distancia  $dx$ . Se supone que  $x$  crece de izquierda a derecha.

Como el elemento está en equilibrio, se tiene de  $\sum F_y=0$

$$V_x - (V_x + dV_x) = 0$$

esto es,

$$dV_x = 0$$

$$V_x = \text{constante} \text{ -----(1)}$$

También de  $\sum M_a=0$

$$M_x + V_x dx - (M_x + dM_x) = 0$$

Operando y aplicando la Ec. 1, se llega a

$$dM_x/dx = \text{constante} \text{ -----(2)}$$

La Ec. 1 establece que no tiene lugar ningún cambio en la fuerza cortante, y la Ec. 2 establece que la variación del momento flexionante en cualquier punto respecto a x es constante.

Segmento bajo carga distribuida:

Tomando un elemento separado del resto por dos secciones adyacentes distantes una cantidad  $dx$ , sometido a una carga distribuida, como se indica en la figura 2.10 (c) Supóngase una carga distribuida hacia abajo, en dirección positiva. De  $\sum F_y=0$ ,

$$V_x - (V_x + dV_x) - w_x dx = 0$$

$$dV_x = -w_x dx \text{ -----(3)}$$

de  $\sum M_b=0$ ,

$$M_x + V_x dx - w_x (dx)(dx/2) - (M_x + dM_x) = 0$$

Despreciando el pequeño término  $w_x(dx)(dx)/2$  y, simplificando, se encuentra

$$dM_x/dx = V_x \text{ -----(4)}$$

La Ec 3 establece que el grado de variación de la fuerza con respecto a x en cualquier punto es igual a la intensidad de la carga en ese punto pero con signo opuesto. La Ec. 4 establece que el grado de variación del momento flexionante con respecto a x en cualquier punto es igual a la fuerza cortante en ese punto.

Segmento bajo carga concentrada.

La figura representa un elemento sometido a una carga concentrada P. Se supone que P actúa en un punto. Como la distancia entre las dos secciones llega a ser infinitesimal, no habrá diferencia de momentos entre la sección inmediatamente a la izquierda de P y la

sección inmediatamente a la derecha de P. Sin embargo, si tiene lugar entre las dos secciones un cambio brusco de valor igual a P en la fuerza cortante, ya que  $\Sigma F_y = 0$ .

$$V'_x - P - V''_x = 0$$

o

$$V'_x = V''_x + P \text{ -----(5)}$$

Como se indicaba en la figura 2.10 (d).

La consecuencia, habrá un cambio brusco en la derivada  $dM_x/dx$  en el punto de aplicación de la carga concentrada.

Segmento bajo un momento concentrado.

En la figura 2.10(e) se muestra un elemento sometido a la acción de un momento concentrado M. Ahora M se supone que actúa en un punto. Como la distancia entre las dos secciones se convierte en infinitesimal, no habrá diferencia de fuerza cortante entre la sección inmediatamente a la izquierda de M y la sección inmediatamente a la derecha. Sin embargo, habrá un cambio brusco de momento igual a M entre las dos secciones, ya que  $\Sigma M_o = 0$

$$M'_x - M - M''_x = 0$$

o

$$M'_x = M''_x + M \text{ -----(6)}$$

Como se indica en la figura 2.10 (e).

La construcción de los diagramas de la fuerza cortante y momento flexionante se facilita con las relaciones previamente establecidas. Por ejemplo, la ecuación

$$dV'_x/dx = -w_x$$

Nos dice que la pendiente del diagrama de la fuerza cortante en cualquier punto es igual al valor negativo de la ordenada en ese punto del diagrama de cargas aplicadas a la viga.

Haciendo énfasis en los siguientes puntos:

- 1 Para un segmento sin carga, la pendiente del diagrama de la fuerza cortante es cero, esto es, es paralelo a eje de la viga. El diagrama de la fuerza cortante es entonces una línea recta paralela al eje de la viga.
- 2 Para un segmento bajo carga uniforme de intensidad  $w$ , la pendiente del diagrama de la fuerza cortante es constante. El diagrama es entonces una línea recta inclinada.
- 3 En el punto de aplicación de una carga concentrada, la intensidad de la carga es infinita, y la pendiente del diagrama de la fuerza cortante será entonces infinita, esta es, vertical respecto a eje de la viga. Habrá una discontinuidad en el diagrama de la fuerza cortante, y entre los dos lados adyacentes al punto cargado tendrá lugar un cambio brusco en el valor de la fuerza cortante igual a la fuerza aplicada.
4. Bajo carga distribuida la variación de la fuerza cortante entre las dos secciones distantes  $dx$  será

$$dV_x = -w_x dx$$

Así pues, la diferencia en las ordenadas del diagrama de la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  viene dada por

$$V_b - V_a = - \int_{Aa}^{Ab} w_x dx$$

$$= - (\text{área del diagrama de la carga entre } a \text{ y } b) \text{ -----(7)}$$

Supóngase que existen cargas concentradas adicionales  $\Sigma P$  actuando entre  $a$  y  $b$ . La diferencia de la fuerza cortante entre los dos puntos debe incluir el efecto debido a  $\Sigma P$ ; esto

$$V_b - V_a = - \int_{Aa}^{Ab} w_x dx - \Sigma P$$

$$= -(\text{área del diagrama de la carga entre } a \text{ y } b + \Sigma P) \text{ ---(8)}$$

en la cual  $\Sigma P$  se supone que actúa hacia abajo.

En forma similar, de la ecuación

$$dM_x/dx = V_x$$

La pendiente del diagrama del momento flexionante en cualquier punto es igual a la ordenada del diagrama de la fuerza cortante en ese punto. Debe recalcarse lo siguiente:

1. Si la fuerza cortante es constante en una porción de la viga, el diagrama del momento flexionante será una línea recta en ese tramo.
2. Si la fuerza cortante varía en cualquier forma en una porción de la viga, el diagrama del momento flexionante será una línea curva.
3. En un punto donde actúe una fuerza concentrada habrá un cambio brusco en la ordenada de la fuerza cortante, y, por lo tanto, un cambio brusco en la pendiente del diagrama del momento flexionante en ese punto. En efecto, el diagrama de momentos tendrá dos pendientes diferentes en ese punto.
4. Los momentos flexionantes máximos y mínimos tendrán lugar donde el diagrama de la fuerza cortante corte el eje x: el máximo donde la fuerza cortante cambie de positiva (a la izquierda) a negativa (a la derecha); el mínimo cuando suceda lo contrario.
5. Para un sistema de fuerzas concentradas el momento flexionante máximo se presentará bajo una de ellas, ya que el cambio en la fuerza cortante de positiva a negativa debe tener lugar en un punto donde esté aplicada una de las fuerzas concentradas.
6. Con referencia a la ecuación  $dM_x/dx = V_x$ , se encuentra que, bajo carga transversal, la variación en el momento flexionante entre dos secciones separadas por una distancia diferencial  $dx$  viene dada por

$$dM_x/dx = V_x$$

En consecuencia, la diferencia entre las ordenadas del momento flexionante en dos puntos cualesquiera a y b está dada por

$$M_b - M_a = \int_{x_a}^{x_b} V_x dx$$

$$= -(\text{área del diagrama de fuerza cortante entre a y b}) \quad \text{---(9)}$$

Si hay momento externos  $\Sigma M$  actuando entre a y b, entonces la diferencia de momentos entre los dos puntos debe incluir el efecto debido a estos pares: esto es,

$$M_b - M_a = \int_{V_a}^{V_b} V_x dx - \Sigma M$$

$$= -(\text{área del diagrama de fuerza cortante entre a y b}) - \Sigma M \quad \text{---(10)}$$

en la cual  $\Sigma M$  se ha supuesto que actúa en sentido antihorario.

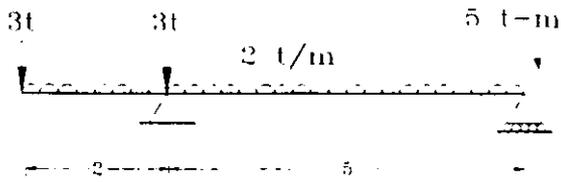
## CALCULO DE REACCIONES .

### PROBLEMAS RESUELTOS

Problema	1.1
Problema	1.2
Problema	1.3
Problema	1.4
Problema	1.5

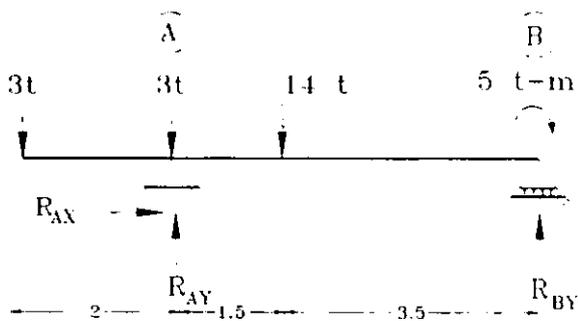
### Problema 1.1

Obtener las reacciones de la siguiente estructura.



Solución:

Como primer paso siempre es importante inspeccionar la estructura, en este caso se trata de una viga libremente apoyada con una carga uniformemente repartida, un momento concentrado en un apoyo y dos fuerzas puntuales concentradas. La estructura se encuentra sostenida por dos diferentes tipos de apoyo, el primero a la izquierda un apoyo fijo con articulación el cual indica que ahí van a existir dos reacciones desconocidas una en sentido vertical:  $R_{AY}$ , y otra en sentido horizontal:  $R_{AX}$  que actúan en el apoyo. El otro apoyo a la derecha, se trata de uno móvil y también con articulación pero en este caso sólo existirá una reacción vertical:  $R_{BY}$ .



### Revisión de la isostaticidad.

En este caso se tienen tres fuerzas reactivas es decir tres incógnitas:  $R_{ax}$ ,  $R_{ay}$  y  $R_{by}$  pero se cuenta con las tres ecuaciones que proporciona la estática por consiguiente la estructura es estáticamente determinada.

Número de ecuaciones = 3

Número de incógnitas = 3

Para solucionar el problema del sentido real de las reacciones, primero se les asignará un sentido supuesto, se resolverán los sistemas de ecuaciones que resultan de las sumas de fuerzas y entonces se corregirá el sentido supuesto, si en la solución se obtiene una reacción con signo negativo, lo que indicará que el sentido real de la reacción va en sentido contrario del supuesto.

Considerando un sistema de coordenadas globales y de acuerdo con la convención de signos planteadas anteriormente se aplican las tres ecuaciones de la estática.

#### Suma de fuerzas en el sentido X

Por inspección en la estructura no existe fuerza externa alguna en el sentido horizontal, por consiguiente la reacción  $R_{ax}$  no tiene que equilibrar a ninguna fuerza externa.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{ax} = 0$$

#### Suma de fuerzas en el sentido Y

En este caso existen dos fuerzas externas en sentido vertical concentradas y una fuerza uniformemente repartida, a la cual va a ser necesario transformarla en una fuerza resultante concentrada.

La fuerza resultante de una carga uniformemente repartida se obtiene multiplicando el valor de la carga por la distancia en la que esta actuando dicha carga, la fuerza resultante se ubicará exactamente a la mitad del intervalo considerado.

$$[\text{Carga uniforme}] [\text{distancia}] = [t / m] [m] = t$$

Para el ejemplo:

$$(2 \text{ t/m}) (7 \text{ m}) = 14 \text{ t}$$

Con los datos anteriores se prosigue a realizar la suma de fuerzas verticales:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-3 -3 -14 + R_{ay} + R_{by} = 0$$

simplificando

$$R_{ay} + R_{by} - 20 = 0 \quad \text{-----}(1)$$

Suma de momentos.

Conociendo de antemano que en alguno de los apoyos con articulación el momento es igual a cero, aprovechamos esa ventaja para realizar la sumatoria de momentos.

$$-3 ( 2 ) + 14 ( 1.5 ) + 5 - R_{by}( 5 ) = 0$$

$$20 - ( 5 ) R_{by} = 0 \quad \text{-----}(2)$$

Resolviendo las ecuaciones ( 1 ) y ( 2 )

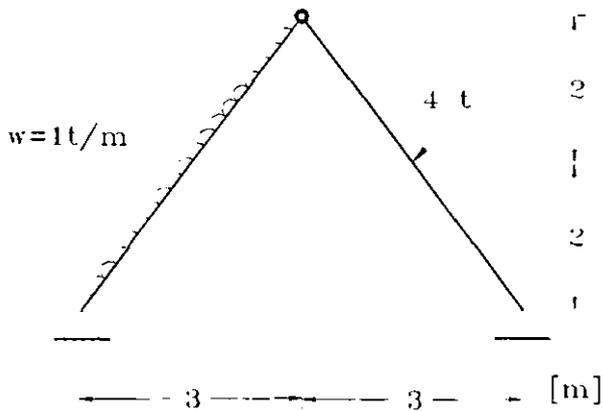
$$R_{by} = + 4 \text{ t}$$

$$R_{ay} = + 16 \text{ t}$$

por consiguiente los signos supuestos al principio para las reacciones fueron los correctos.

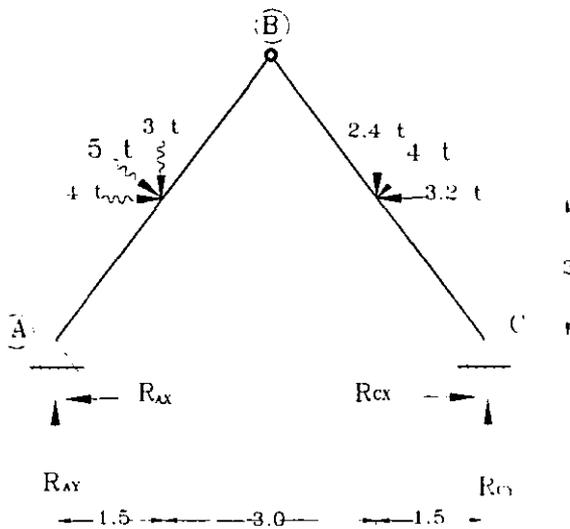
**Problema 1.2**

Obtener las reacciones de la siguiente estructura.



Solución

En este caso se tiene una estructura formada por dos barras AB y BC , de eje recto, inclinadas y unidas entre sí por una articulación . A esta estructura se le conoce como marco de capilla el cual se presenta en estructuras de tipo religioso o para proyectos donde se requiera dar un aspecto especial a la vista.



### Revisando la isostaticidad.

La estructura se encuentra sostenida por dos apoyos fijos con articulación por consiguiente existirán cuatro fuerzas reactivas desconocidas  $R_{ay}$ ,  $R_{ax}$ ,  $R_{by}$  y  $R_{bx}$ . Sin embargo se cuenta con una ecuación adicional proporcionada por la articulación entre las dos barras, ya que en este punto, la suma de momentos siempre será cero.

Número de reacciones = 4

Número de ecuaciones = 3

Número de articulaciones = 1

por lo tanto la estructura se considera isostáticamente determinada y estable.

### Revisando posibles mecanismos.

Es necesario revisar que la ubicación de una articulación no condicione a que se forme un mecanismo, si esto llegara a suceder, aunque la estructura sea isostáticamente determinada, será inestable. En el marco propuesto la posible formación de un mecanismo sería, si alguno de los apoyos se pudiera desplazar en el sentido horizontal, pero ese desplazamiento está restringido por consiguiente no hay formación de algún mecanismo.

### Revisión de fuerzas externas

En el problema hay dos tipos de fuerzas externas, una fuerza uniformemente distribuida a lo largo de la barra inclinada AB y otra fuerza concentrada en la barra BC. Hay que tomar en cuenta que la carga uniformemente distribuida obra perpendicularmente al eje longitudinal de la barra AB y será necesario determinar las componentes rectangulares de su fuerza resultante y también de la fuerza concentrada para trabajar con un sistema de ejes coordenadas globales.

Por trigonometría y siguiendo el procedimiento del problema 1.1 para obtener una fuerza resultante se tiene lo siguiente:

$$F = (1)(t/m)(5m) = 5t$$

$$F_y = F \cos \theta = 5(3/5) = 3t$$

$$F_x = F \sin \theta = 5(4/5) = 4t$$

De igual manera para obtener las proyecciones de la carga concentrada

$$F = 4t$$

$$F_y = F \cos \theta = 4(3/5) = 2.4t$$

$$F_x = F \sin \theta = 4(4/5) = 3.2t$$

### Suma de momentos.

Conociendo que el momento es igual a cero tanto en la articulación B como en cualquiera de los dos apoyos se tiene dos ecuaciones más:

Apoyo

$\Sigma M_A = 0$                        $R_{cx}$ ,  $R_{ay}$ ,  $R_{ax}$  se anulan ,ya que su brazo de palanca es igual a cero

$$+4 ( 2 ) + 3 ( 1.5 ) + 2.4 ( 4.5 ) - 3.2 ( 2 ) - R_{cy}( 6 ) = 0 \quad \text{-----}(1)$$

$$R_{cy} = +2.82 \text{ t}$$

Articulación

Realizando  $\Sigma M_B = 0$             ( a la derecha de la estructura)

$$+ 2.4 ( 1.5 ) + 3.2 ( 2 ) - R_{cy} ( 3 ) - R_{cx} ( 4 ) = 0 \quad \text{-----}(2)$$

sustituyendo  $R_{cy} = +2.82 \text{ t}$  y resolviendo

$$R_{cx} = +0.39 \text{ t}$$

Suma de fuerzas en el sentido X.

Con los datos anteriores se prosigue a realizar la suma de fuerzas horizontales

$$\Sigma F_x = 0$$

$$- R_{ax} + 4 - 3.2 + R_{cx} = 0 \quad \text{-----}(3)$$

$$R_{ax} = +1.19 \text{ t}$$

Suma de fuerzas en el sentido Y.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$+ R_{ay} - 3 - 2.4 + R_{cy} = 0 \quad \text{-----}(4)$$

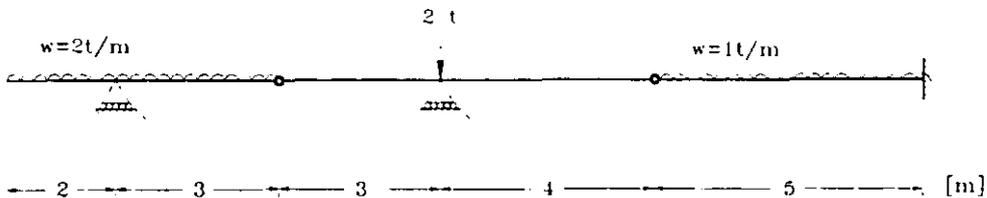
sustituyendo  $R_{cy} = +2.82 \text{ t}$  y resolviendo

$$R_{ay} = +2.58 \text{ t}$$

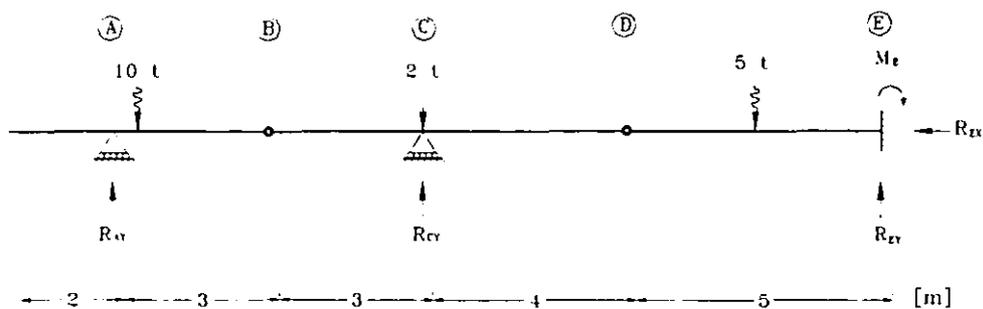
por consiguiente los signos supuestos al principio para las reacciones fueron los correctos.

### Problema 1.3

Obtener las reacciones de la siguiente estructura.



### Solución



Por inspección se trata de una viga continua que tiene más de dos apoyos, de tal suerte que no pueden ser calculadas sus reacciones por medio de la estática, por consiguiente para romper la hiperestaticidad es necesario la introducción dos articulaciones, a este tipo especial de viga se le denomina viga Gerber.

La viga cuenta con dos apoyos del tipo móvil con articulación que dan lugar a dos reacciones en sentido vertical  $R_{AY}$  y  $R_{CY}$ . El tercer apoyo es un empotramiento del cual se derivan una reacción en sentido vertical  $R_{EY}$  otra en sentido horizontal  $R_{EX}$  y un momento de empotramiento  $M_E$ .

El sistema de cargas consiste en dos cargas uniformemente distribuidas y una carga concentrada en un apoyo.

### Revisando la isostaticidad

Se tienen como incógnitas las 5 reacciones siguientes:  $R_{CY}$ ,  $R_{AY}$ ,  $R_{EY}$ ,  $M_E$  y  $R_{EX}$ . Se cuenta con las tres ecuaciones de la estática y además existen las dos ecuaciones adicionales debidas a las dos articulaciones. Por lo tanto la viga se considera isostática y externamente determinada.

### Revisando un posible mecanismo

Es difícil que se forme un mecanismo ya que no existe ninguna fuerza externa que pueda condicionar el desplazamiento en el sentido  $x$ , además el empotramiento restringe totalmente esta posibilidad.

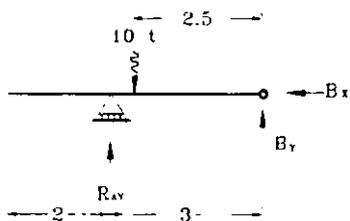
Las dos cargas distribuidas se concentrarán de acuerdo al procedimiento visto en problema 1.1

$$W_1 = 2 \text{ t/m} \quad (2 \text{ t/m})(5\text{m}) = 10 \text{ t}$$

$$W_2 = 1 \text{ t/m} \quad (1 \text{ t/m})(5\text{m}) = 5 \text{ t}$$

El procedimiento para encontrar el valor de las reacciones se llevará a cabo dividiendo la estructura en partes o intervalos a cada articulación, de antemano se sabe que las articulaciones no transmiten momentos flexionantes, es decir en ese punto  $M=0$  pero, si van a existir fuerzas internas equilibrantes que van a pasar al otro lado de la articulación en sentido contrario para que en ese punto la suma de fuerzas tanto horizontales como verticales sea igual a cero.

### Sección I



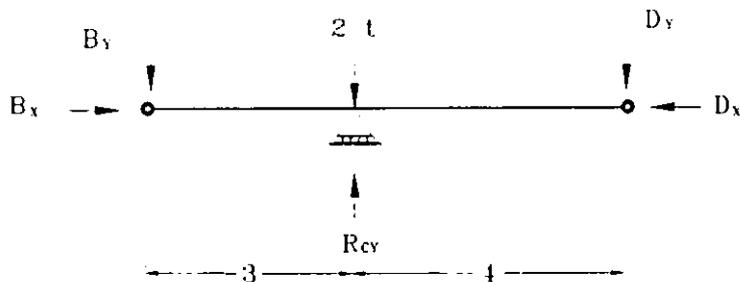
Considerando la parte derecha de la articulación B y haciendo  $M_B = 0$

$$R_{AY} (3) - 10 (2.5) = 0 \quad R_{AY} = 8.33 \text{ t}$$

Realizando  $\sum F_y = 0$  y sustituyendo el valor de  $R_{AY}$

$$R_{AY} - 10 + B_Y = 0 \quad B_Y = 1.67 \text{ t}$$

### Sección II



Para este tramo las fuerzas internas  $B_Y$  y  $B_X$  ya conocidas pasan en sentido contrario para mantener el equilibrio en la articulación.

Realizando  $\sum M_c = 0$

$$D_Y (4) - B_Y (3) = 0 \quad D_Y = 1.25 \text{ t}$$

por  $\sum F_y = 0$

$$- B_Y - 2 - D_Y + R_{CY} = 0 \quad R_{CY} = 4.92 \text{ t}$$

### Sección III

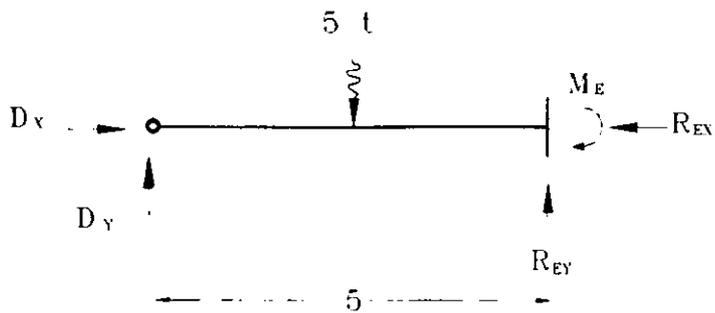
En este caso el intervalo se considera a partir de la articulación D a la derecha.

Haciendo  $\sum F_y = 0$

$$D_Y - 5 + R_{EY} = 0 \quad R_{EY} = +3.75 \text{ T}$$

Por  $\sum M_D = 0$  a la derecha

$$5 (2.5) - R_{EY} (5) + M_E = 0 \quad M_E = +6.25 \text{ T}$$



Como comprobación se puede realizar  $\sum M_E = 0$  de toda la estructura sin considerar la fuerzas internas, únicamente las reacciones cuyos valores se calcularon anteriormente.

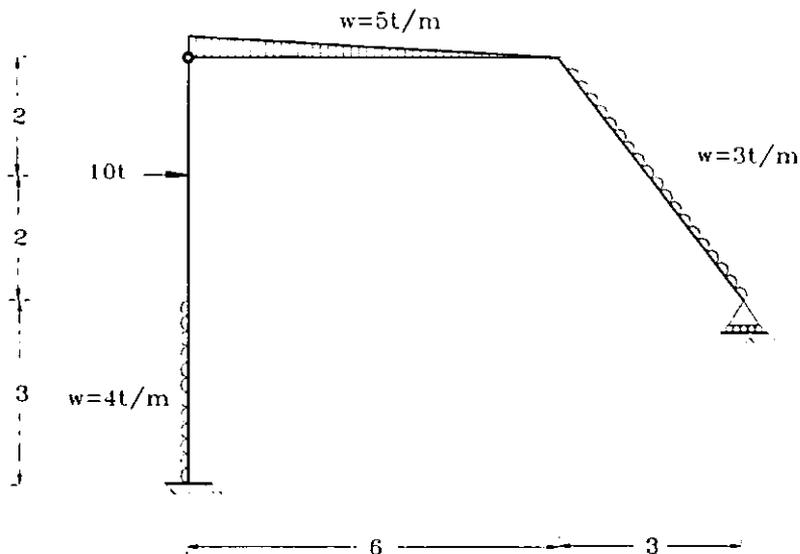
$$R_{AY}(15) - 10(14.5) - 2(9) + R_{CY}(9) - 5(2.5) + M_E = 0$$

sustituyendo valores

$$8.33(15) - 10(14.5) - 2(9) + 4.92(9) - 5(2.5) + 6.25 = 0$$

### Problema 1.4

Obtener las reacciones de la siguiente estructura.



#### Solución.

Se trata de un marco formado por varias barras de eje recto, una de sus barras se encuentra inclinada y las otras dos están unidas por una articulación. La estructura cuenta con un apoyo del tipo móvil con articulación y otro de empotramiento los cuales se encuentran a desnivel. Revisando las cargas que actúan en la estructura, hay una carga triangularmente distribuida, otra carga uniformemente distribuida sobre la barra inclinada y finalmente una carga concentrada.

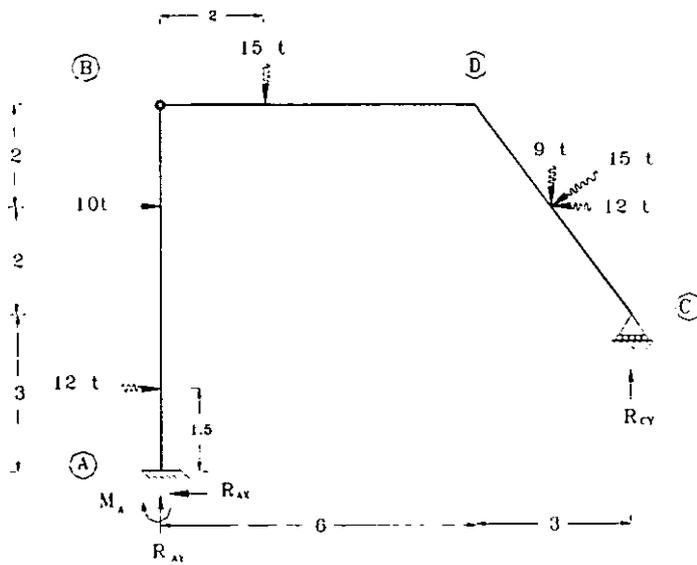
#### Revisando la isostaticidad de la estructura.

Debido al apoyo de empotramiento hay tres reacciones:  $M_A$ ,  $R_{AX}$  y  $R_{AY}$ . Considerando el apoyo móvil con articulación existe una cuarta reacción  $R_{CY}$ , por lo tanto el número total de incógnitas es cuatro. La estática nos proporciona tres ecuaciones y añadiendo la otra ecuación debida a la articulación se cuenta con cuatro ecuaciones por lo tanto la estructura es isostáticamente determinada.

Número de incógnitas = 4      ( $M_A$ ,  $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$  y  $R_{CY}$ )

Número de ecuaciones = 3

Número de articulaciones = 1



### Revisión de un posible mecanismo.

Debido al empuje horizontal de la proyección de la carga uniformemente repartida sobre la barra inclinada podría empujar al apoyo móvil en dicha dirección, pero ya que existe el otro apoyo de empotramiento se restringe a la estructura y por consiguiente no es posible la formación de un mecanismo.

En este problema se cuenta con una carga triangularmente distribuida la cual será necesario reemplazarla por una carga concentrada (resultante) que tenga la misma magnitud que las fuerzas totales hacia abajo, y este localizada en el centro de gravedad de las carga distribuida como se indica a continuación:

La carga distribuida varía uniformemente desde 5 t/m hasta 0 t/m sobre una distancia de 6m, la resultante de la carga distribuida es el área bajo este triángulo.

$$R = (W_1 L) / 2 = (5 \text{ t/m})(6 \text{ m}) / 2 = 15 \text{ t}$$

La resultante se localiza en el centro de gravedad del triángulo correspondiente a la distribución de la carga o sea a 2 m a partir de la articulación a la derecha.

Para concentrar la carga uniformemente distribuida en la barra inclinada se realizará el procedimiento del problema 1.1.

$$R = W_2 L = (3 \text{ t/m})(5 \text{ m}) = 15 \text{ t}$$

la carga concentrada queda ubicada a la mitad de la barra.

por trigonometría:

$$R_x = 15 \operatorname{sen}\theta = 15 (4/5) = 12 \text{ t}$$

$$R_y = 15 \operatorname{cos}\theta = 15 (3/5) = 9 \text{ t}$$

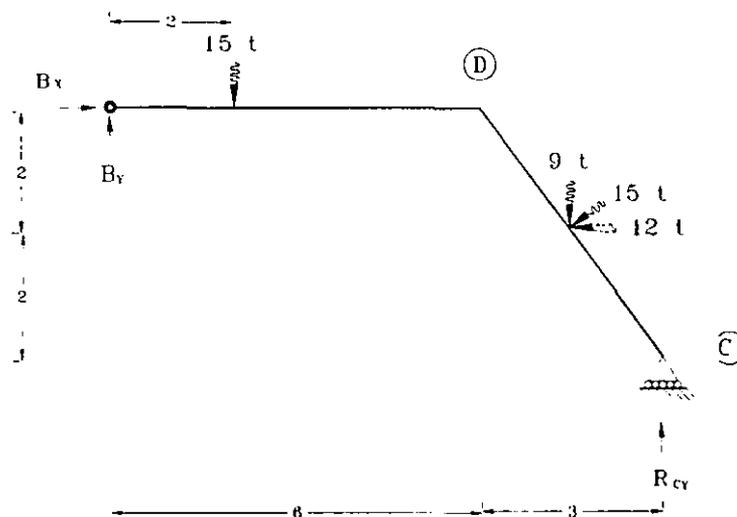
La resultante de la carga uniformemente distribuida que actúa en la barra vertical será la siguiente:

$$R = W_1 L = (4\text{t/m})(3\text{m}) = 12 \text{ t}$$

Este problema se presta para resolverlo por dos procedimientos alternos ya sea dividiendo la estructura en intervalos o trabajando con la estructura por completo.

Solución por intervalos.

La estructura se dividirá en dos intervalos utilizando la articulación como inicio y final del intervalo. Se iniciará el análisis al lado derecho de la articulación ya que en ese intervalo únicamente hay una incógnita  $R_{cy}$ .



Por  $\Sigma M_B = 0$  a la derecha se puede encontrar el valor de la reacción  $R_{cy}$ .

$$15(2) + 9(7.5) + 12(2) - R_{cy}(9) = 0$$

$$R_{cy} = 13.5 \text{ t}$$

Trabajando con toda la estructura

$$\text{Por } \Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} - 15 - 9 + R_{cy} = 0$$

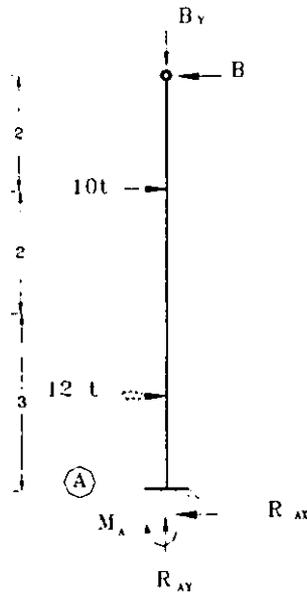
$$R_{Ay} - 15 - 9 + 13.5 = 0$$

$$R_{Ay} = 10.5 \text{ t}$$

Haciendo  $\Sigma F_X = 0$

$$-R_{AX} + 12 - 10 - 12 = 0$$

$$R_{AX} = 10 \text{ t}$$



Tomando momentos respecto el apoyo C  $\Sigma M_C = 0$

$$+ R_{AY}(9) + M_A + R_{AX}(3) - 12(1.5) + 10(2) - 15(7) - 9(1.5) - 12(2) = 0$$

$$+ 10.5(9) + M_A + 10(3) - 12(1.5) + 10(2) - 15(7) - 9(1.5) - 12(2) = 0 \quad M_A = +16 \text{ tm}$$

Otra manera de resolver el problema es dividiendo la estructura en intervalos iniciando por la parte derecha de la articulación:

Por  $\Sigma M_B = 0$  a la derecha se puede encontrar el valor de la reacción  $R_{CY}$ .

$$15(2) + 9(7.5) + 12(2) - R_{CY}(9) = 0$$

$$R_{CY} = 13.5 \text{ t}$$

Para encontrar el valor de la reacción interna  $B_Y$  se realizará  $\Sigma F_Y = 0$  en el intervalo

$$R_{AY} - 15 - 9 + B_Y = 0$$

$$13.5 - 15 - 9 + B_Y = 0$$

$$B_Y = 10.5 \text{ t}$$

Realizando  $\Sigma F_X = 0$  en el intervalo se determina el valor de la fuerza interna  $B_X$  la cual pasará al otro lado del intervalo en sentido contrario.

$$B_X - 12 = 0$$

$$B_X = 12 \text{ t}$$

Cambiando al intervalo I para el análisis de la estructura se realizará  $\Sigma F_x=0$  de la articulación hacia el empotramiento.

$$- R_{AX} + 10 + 12 - 12 = 0$$

$$R_{AX} = 10 \text{ t}$$

Por  $\Sigma M_B=0$  en el intervalo I la única incógnita es el momento  $M_A$  ya que la reacción  $R_{AY}$  aunque es también desconocida lo produce momento ya que no tiene brazo de palanca.

$$-10(2) - 12(5.5) + 7 R_{AX} + M_A = 0$$

$$-10(2) - 12(5.5) + 7(10) + M_A = 0$$

$$M_A = 16 \text{ tm}$$

De  $\Sigma F_y=0$  en el intervalo I

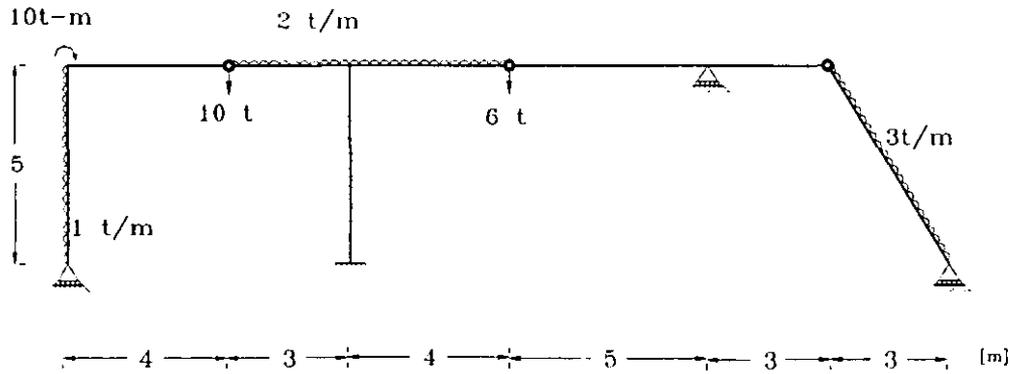
$$R_{AY} - 10.5 = 0$$

$$R_{AY} = 10.5 \text{ t}$$

En conclusión se llega al mismo resultado por los dos métodos, sin embargo en algunos casos la estructura requiere ser analizada por intervalos por la cantidad de articulaciones e incógnitas en el problema.

### Problema 1.5

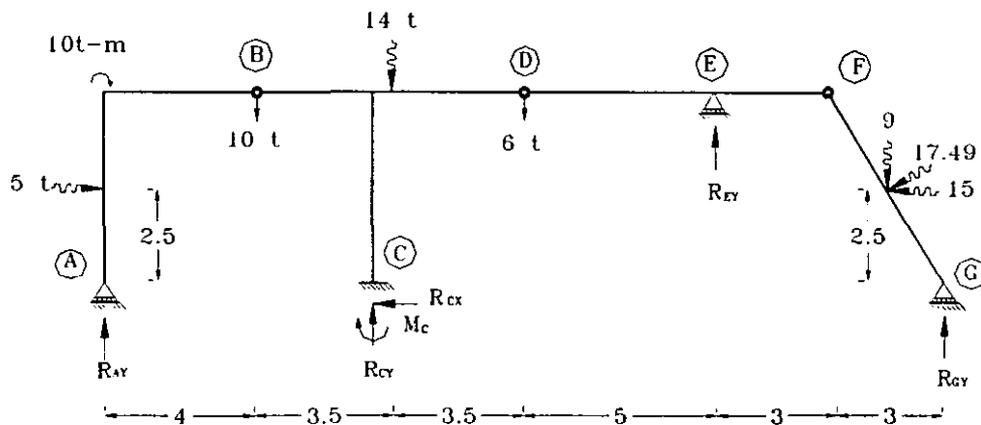
Encontrar las reacciones de la siguiente estructura.



### Solución.

Se trata de un marco con cuatro apoyos, un apoyo de empotramiento y tres apoyos del tipo móvil con articulación. La estructura cuenta con tres articulaciones y en lo que se refiere a las cargas, hay un momento concentrado en una de los nudos del marco, dos cargas concentradas en las articulaciones y tres cargas uniformemente distribuidas.

En este caso la solución más práctica de resolver el problema, será dividiendo el marco en intervalos y de esta manera no tener que trabajar con tantas incógnitas y ecuaciones al mismo tiempo.



### Revisión de la isostaticidad.

Se tienen de incógnitas seis reacciones:  $R_{AY}$ ,  $R_{CY}$ ,  $R_{CX}$ ,  $M_C$ ,  $R_{EY}$  y  $R_{GY}$ .

Se cuenta con las tres ecuaciones de la estática más tres ecuaciones adicionales debidas a las tres articulaciones, por consiguiente la estructura se considera isostática y externamente determinada.

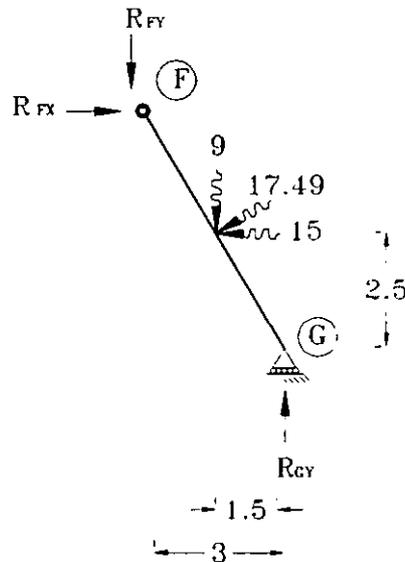
### Revisión de un posible mecanismo.

Debido a la presencia de articulaciones es necesario revisar que no se forme ningún mecanismo ya que entonces la estructura sería inestable. La única fuerza en el sentido  $x$  (horizontal) que puede condicionar esta situación es la proyección de la carga concentrada en la barra inclinada pero el empotramiento evita la posibilidad de un mecanismo.

### Solución por intervalos.

Se iniciará el análisis por los intervalos que impliquen el menor número de incógnitas (los intervalos de los extremos) y se trabajará finalmente con el intervalo del centro conociendo con anticipación los valores de las fuerzas internas.

### Intervalo F-G



Lo primero a realizar es concentrar la carga uniformemente repartida. Siguiendo el procedimiento de los problemas anteriores se tiene lo siguiente:

$$F_3 = W_3 L_3 = 3(5.83) = 17.49 \text{ t}$$

$$F_{3X} = 17.49 \sin(26.23) = 7.5 \text{ t}$$

$$F_{3Y} = 17.49 \cos(26.23) = 15.7 \text{ t}$$

Realizando sumatoria de momentos en la articulación a la derecha

$$\Sigma M_F = 0$$

$$9(1.5) + 15(2.5) - R_{GY}(3) = 0 \quad R_{GY} = 17 \text{ t}$$

Para encontrar las fuerzas internas en el intervalo se realizará:

$$\Sigma F_X = 0$$

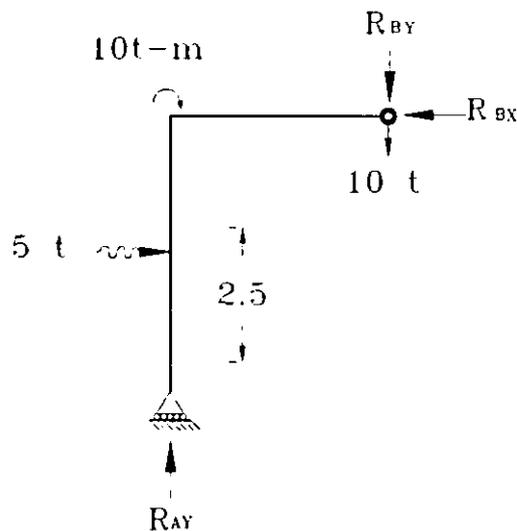
$$R_{FX} - 15 = 0 \quad R_{FX} = 15 \text{ t}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{GY} - 9 - R_{FY} = 0$$

$$17 - 9 - R_{FY} = 0 \quad R_{FY} = 8 \text{ t}$$

Intervalo A- B



En este intervalo se tiene una carga concentrada en la articulación B, la cual se considerará una sola vez su valor en los intervalos donde aparezca, habiéndola tomado en cuenta ya no será posible volverla a considerar en otro intervalo siguiente.

Se obtiene el valor de la fuerza resultante de la carga uniformemente distribuida.

$$F_1 = W_1 L_1 = 1(5) = 5 \text{ t}$$

$\Sigma M_B = 0$  a la izquierda de la articulación

$$R_{AY}(4) - 5(2.5) + 10 = 0$$

$$R_{AY} = 0.625 \text{ t}$$

Encontrando el valor de las fuerzas internas en la articulación:

$$\Sigma F_X = 0$$

$$5 - R_{BX} = 0$$

$$R_{BX} = 5 \text{ t}$$

En este intervalo no se considerará la fuerza concentrada en la articulación B por lo tanto:

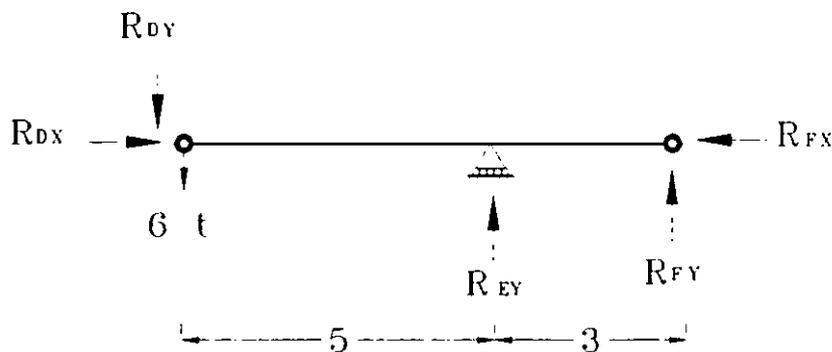
$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{AY} - R_{BY} = 0$$

$$0.625 - R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = 0.625 \text{ t}$$

Intervalo D-F



Conociendo las fuerzas internas en la articulación F y sin considerar la fuerza concentrada en la articulación D se procede de la siguiente manera:

Por  $\Sigma M_D = 0$  a la derecha de la articulación.

$$- R_{EY} (5) - R_{FY} (8) = 0$$

$$- R_{EY} (5) - 8 (8) = 0$$

$$R_{EY} = -12.8 \text{ t } (\downarrow)$$

el signo negativo implica cambiar el sentido supuesto de la reacción.

A continuación se obtienen los valores de las fuerzas internas en la articulación D.

$$\Sigma F_X = 0$$

$$R_{DX} - 15 = 0$$

$$R_{DX} = 15 \text{ t}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

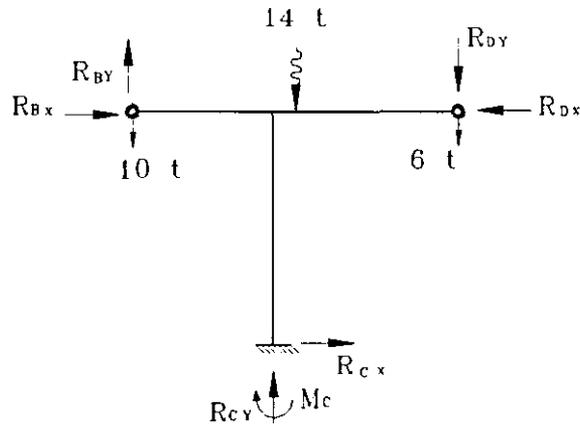
$$- R_{DY} - R_{EY} + 8 = 0$$

$$- R_{DY} - 12.8 + 8 = 0$$

$$R_{DY} = -4.8 \text{ t } (\uparrow)$$

debido al signo negativo en el resultado, se cambia el sentido supuesto de la fuerza.

## Intervalo B-D



En este último intervalo se considerarán las fuerzas concentradas en las articulaciones B y D para el cálculo de las reacciones, y se trabajará con las fuerzas internas determinadas anteriormente.

Se obtiene la fuerza concentrada de la carga uniformemente distribuida

$$F_2 = W_2 L_2 = 2 ( 7 ) = 14 \text{ t}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{Cy} - 10 - 6 - 14 + 0.625 - 4.8 = 0$$

$$R_{Cy} = 34.18 \text{ t}$$

$$\Sigma F_X = 0$$

$$5 - 15 + R_{Cx} = 0$$

$$R_{Cx} = 10 \text{ t}$$

$$\text{Por } \Sigma M_B = 0$$

$$14(3.5) + 4.8 ( 7 ) + 6(7) - 34.18(3) - 10(5) + M_c = 0$$

$$M_c = 27.94 \text{ t}$$

Para comprobar se realiza en el apoyo A  $\Sigma M_A = 0$  de toda la estructura:

$$5(2.5) + 10 + 10(14) - 34.18(7) + 27.9 + \\ + 14(7.5) + 6(11) + 12.8(16) + 9(20.5) - 15(2.5) - 17(22) = 0$$

Lo que indica que la estructura esta en equilibrio.

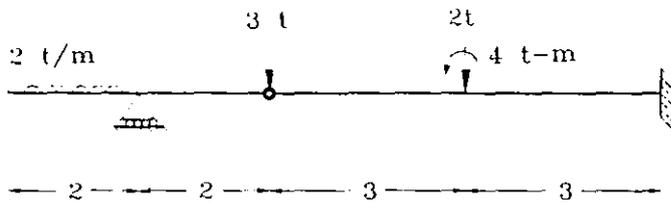
### III.- ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS.

#### PROBLEMAS RESUELTOS

Problema	2.1
Problema	2.2
Problema	2.3
Problema	2.4
Problema	2.5
Problema	2.6
Problema	2.7
Problema	2.8
Problema	2.9
Problema	2.10
Problema	2.11
Problema	2.12
Problema	2.13
Problema	2.14

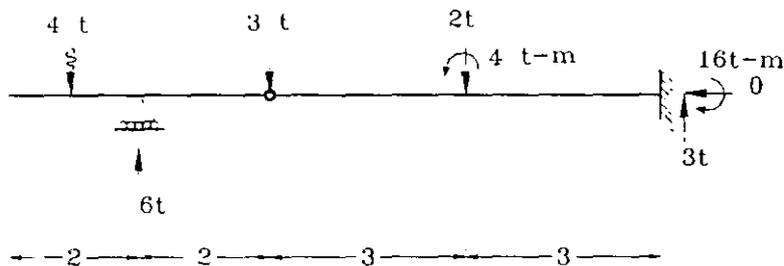
### Problema 2.1

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



### Intervalos de validez de las funciones.

Para definir los intervalos es importante observar a las cargas y geometría de la estructura. De acuerdo con las consideraciones ya establecidas para la definición de intervalos y realizando el análisis de izquierda a derecha se tienen los siguientes:

- $0 \leq x < 2$
- $2 \leq x < 4$
- $4 \leq x < 6$
- $6 \leq x < 10$

$$0 \leq x < 2$$

En este tramo existe una carga uniformemente distribuida por consiguiente el intervalo inicia donde principia la carga y termina donde finaliza esta.

$$2 \leq x < 4$$

El inicio del intervalo queda definido por el límite superior del intervalo anterior para tener una continuidad en el análisis, pero además se tiene una carga (reacción) justamente en este punto. El intervalo termina donde se encuentra nuevamente otra carga.

$$4 \leq x < 7$$

El intervalo inicia donde existe una carga concentrada y termina donde hay un momento y una carga concentrados.

$$7 \leq x < 10$$

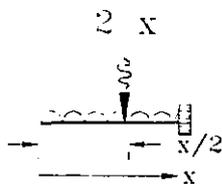
Este es el último intervalo el cual finaliza una cantidad diferencial antes que termine la estructura.

### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos .

#### Observaciones.

- Se dibujará la sección de cada intervalo con sus cargas reales es decir se tendrá un diagrama de cuerpo libre.
- Al dibujar la sección del siguiente intervalo es importante incluir la sección anterior y plantear nuevamente las funciones.
- Para evaluar la fuerza cortante y momento flexionante se encuentra la resultante de todas las fuerzas verticales y momentos, es decir se realiza una  $\sum Fy$  a la izquierda del punto de interés antes del límite establecido.

$$\underline{0 \leq x < 2}$$



La carga distribuida que actúa en este intervalo se reemplaza por su resultante en función de  $x$ , por equilibrio se tiene:

$$V(x) = -2x$$

$$M(x) = -2x(x/2)$$

$$N(x) = 0$$

$M(x)$  por tratarse de una ecuación de segundo grado, la relación es parabólica.

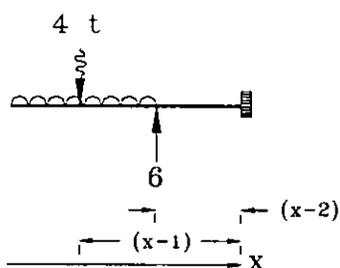
$$\underline{2 \leq x < 4}$$

En este intervalo la carga uniformemente repartida se reemplaza por su resultante en su posición final, la cual ya no va a depender de  $x$ , pero si es necesario expresar los brazos de palanca de las fuerzas en función de  $x$ .

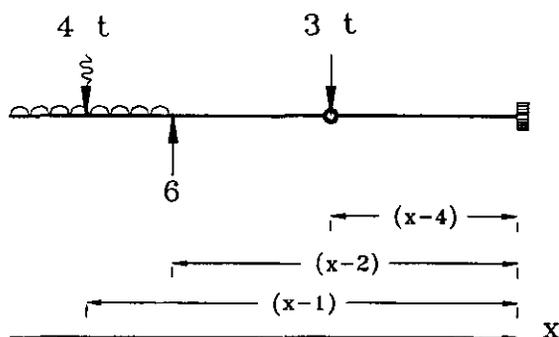
$$V(x) = -4 + 6 = 2$$

$$M(x) = -4(x-1) + 6(x-2)$$

$$N(x) = 0$$



$$\underline{4 \leq x < 7}$$



Se considera el intervalo anterior y los brazos de palanca de las nuevas fuerzas consideradas en este intervalo se definen en función de x.

$$V(x) = -4 + 6 - 3 = -1$$

$$M(x) = -4(x-1) + 6(x-2) - 3(x-4)$$

$$N(x) = 0$$

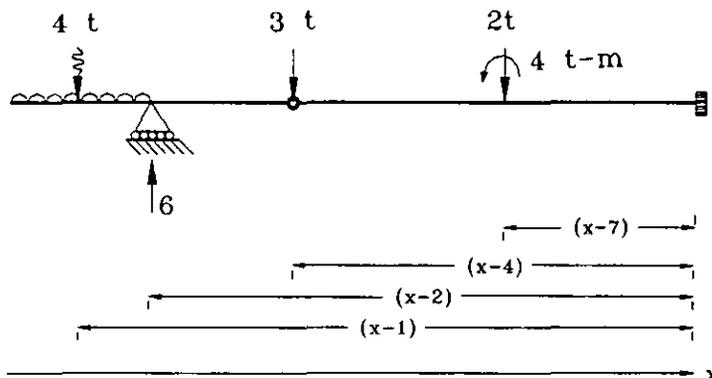
$$7 \leq x < 10$$

Siguiendo el procedimiento del intervalo anterior se tienen las siguientes ecuaciones.

$$V(x) = -4 + 6 - 3 - 2 = -3$$

$$M(x) = -4(x-1) + 6(x-2) - 3(x-4) - 2(x-7) - 4$$

$$N(x) = 0$$

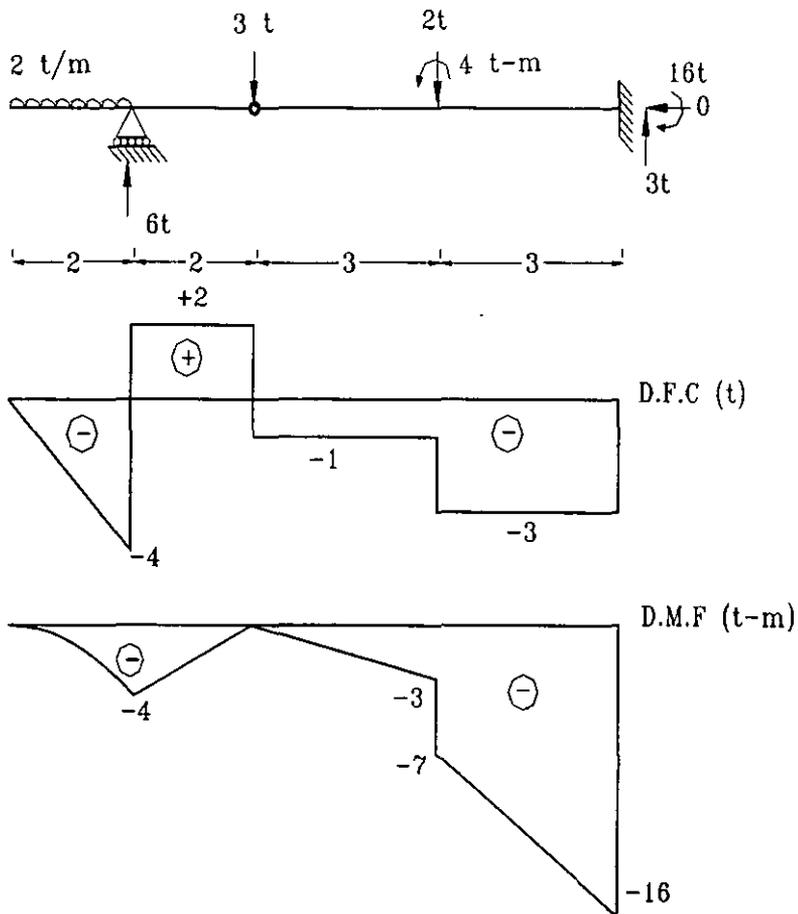


Sustituyendo para diferentes valores de "x" en las funciones de elementos mecánicos

Intervalo	X	V(X)	M(X)
$0 \leq x < 2$	0	0	0
	1	-2	-1
	2	-4	-4
$2 \leq x < 4$	2	+2	-4
	3	+2	-2
	4	+2	0

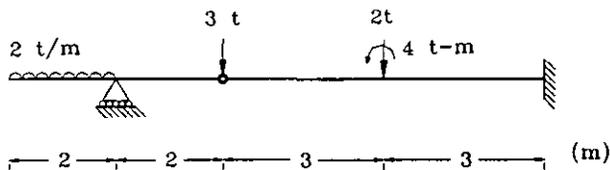
$4 \leq x < 7$	4	-1	0
	5	-1	-1
	6	-1	-2
	7	-1	-3
$7 \leq x < 10$	7	-3	-7
	8	-3	-10
	9	-3	-13

Graficando respectivamente se tiene:



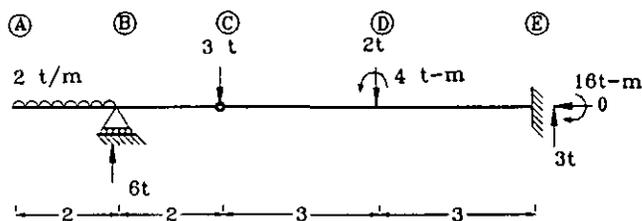
## Problema 2.2

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la siguiente estructura empleando el método de suma de áreas.



### Solución.

El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



Como se pudo observar en el método de ecuaciones, se presentará un cambio en los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes donde exista una variación en la carga. Por este motivo se tendrán que determinar los puntos de interés para el análisis.

### Ubicación de puntos de análisis.

Se escogerá como punto de análisis aquel donde exista una carga concentrada (ya sea fuerza, reacción o momento) y en el inicio y final de una carga uniformemente distribuida sin importar su ley de variación.

Inspeccionando la estructura, en los puntos A, B, C y D existen cambios significativos en las cargas como se explica a continuación:

- |           |  |
|-----------|--|
| A y B     | Inicio y final de una carga uniformemente distribuida. |
| B, C, y D | Cargas puntuales.                                      |
| D         | Momento y fuerza concentrada.                          |
| E         | Apoyo (momento y fuerza concentradas).                 |

- Para obtener el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se realizará un análisis de fuerzas a la izquierda y derecha del punto en cuestión. El procedimiento se repetirá tantas veces como puntos de análisis existan.

Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

***Intervalo A-B***

$$V_i = 0$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = 0 - 4 = -4$$

***Intervalo B-C***

$$V_i = V_{DAB} + F_B = -4 + 6 = +2$$

$$V_d = V_i + F_{BC} = 2 + 0 = +2$$

***Intervalo C-D***

$$V_i = V_{DBC} + F_C = +2 - 3 = -1$$

$$V_d = V_i + F_{CD} = -1 + 0 = -1$$

***Intervalo D-E***

$$V_i = V_{DCD} + F_D = -1 - 2 = -3$$

$$V_d = V_i + F_{DE} = -3 + 0 = -3$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo :

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciará un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

Las áreas se calcularán de acuerdo al diagrama de fuerzas cortantes que se muestra al final del ejemplo.

### Areas.

Intervalo	A-B	B-C	C-D	D-E
Figura	Triángulo	Rectángulo	Rectángulo	Rectángulo
Area	$2(-4)/2 = -4$	$2(2) = 4$	$-1(3) = -3$	$3(-3) = -9$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A$  = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_{AD}$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

#### **Intervalo A-B**

$$M_i = M_A = 0$$

$$M_D = M_i + A_{A-B} = 0 + (-4) = -4$$

#### **Intervalo B-C**

$$M_i = M_{DAB} + M_B = -4 + 0 = -4$$

$$M_D = M_i + A_{B-C} = -4 + 4 = 0$$

#### **Intervalo C-D**

$$M_i = M_{DBC} + M_C = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_i + A_{C-D} = 0 + (-3) = -3$$

#### **Intervalo D-E**

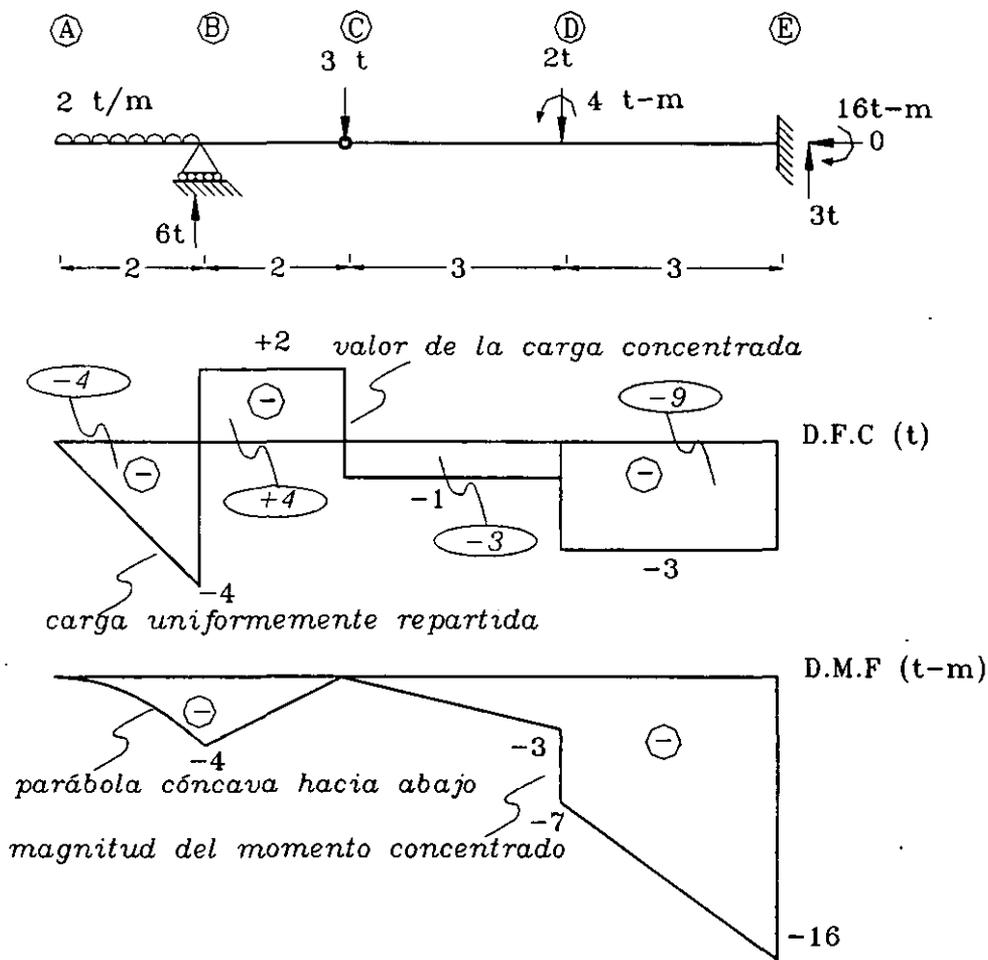
$$M_i = M_{DCD} + M_D = -3 - 4 = -7$$

$$M_D = M_i + A_{D-E} = -7 - 9 = -16$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

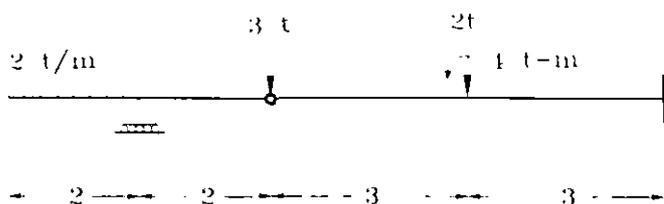
Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

En el tramo A-B debido a la carga uniformemente repartida existirá una parábola de segundo grado cóncava hacia abajo ya que el área del diagrama de fuerzas cortantes en este tramo se va incrementando negativamente.



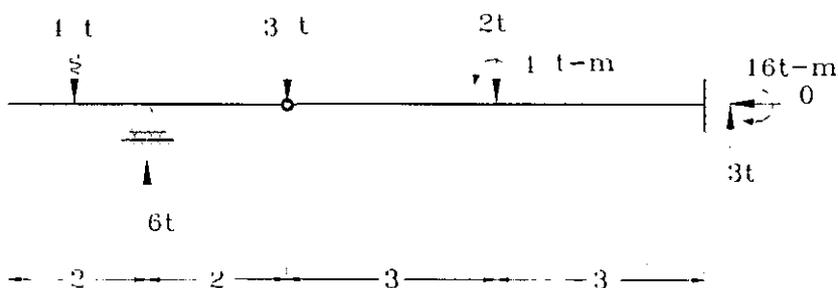
### Problema 2.3

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



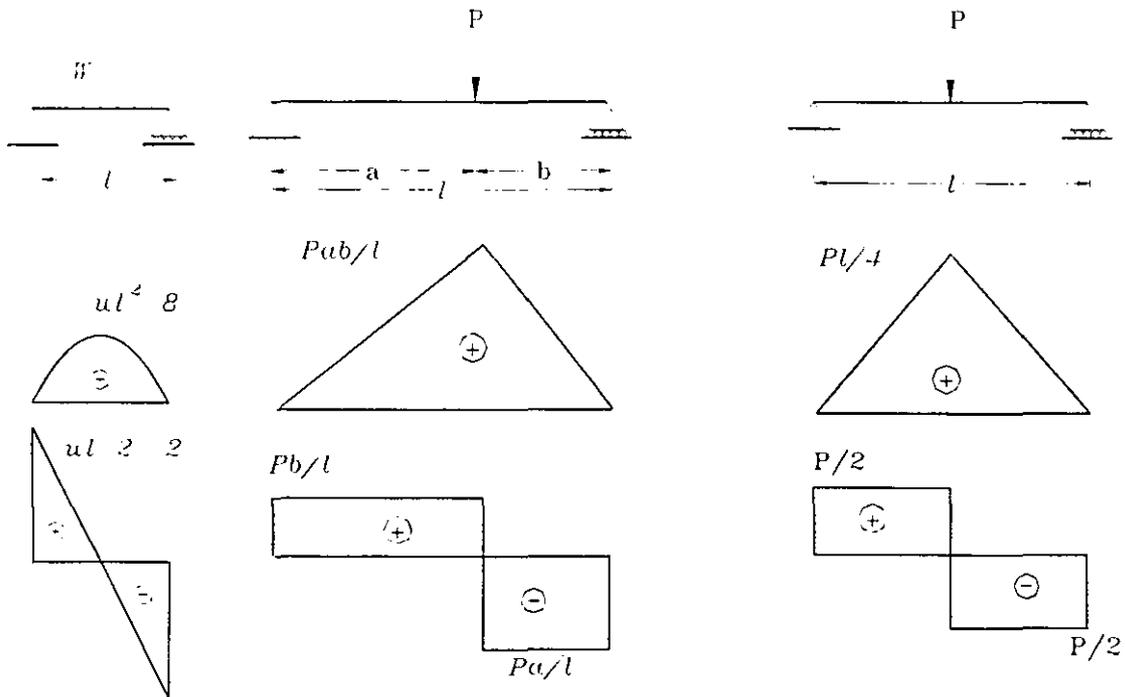
El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Se obtendrán dos tipos de diagramas de momentos y cortantes, los primeros debido a cargas sobre las barras y los segundos debidos a momentos flexionantes en los extremos de dichas barras.

Finalmente se graficarán los diagramas tomando en cuenta ciertas consideraciones para poder superponer los efectos de las cargas sobre las barras y los momentos flexionantes en los extremos de estas.

### Elección de intervalos o vigas simplemente apoyadas.

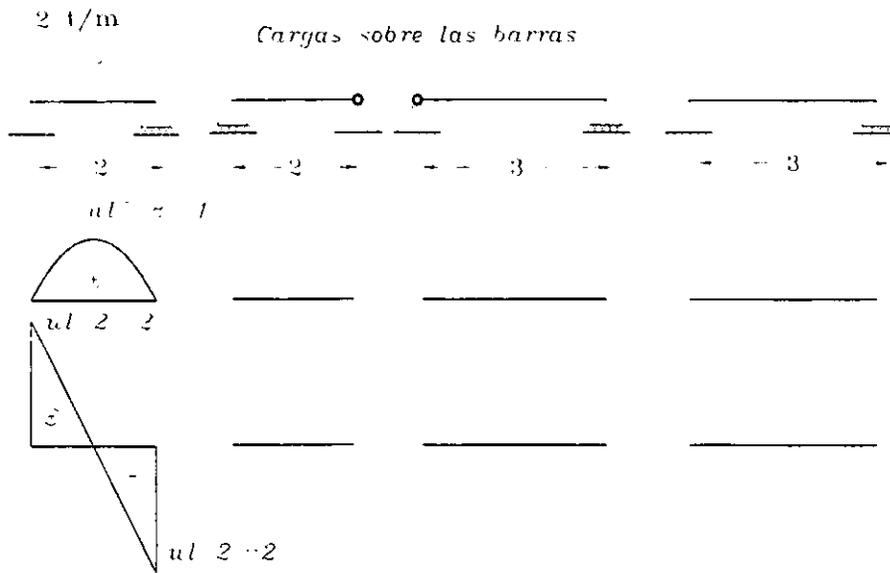
Para definir los intervalos es importante echar un vistazo a las cargas y geometría de la estructura. La estructura se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de tres casos generales que a continuación se muestran.



### Cálculo de momentos y cortantes debidos a los casos generales.

Para resolver el problema se dividió la viga en cuatro vigas simplemente apoyadas y solamente se pudo hacer coincidir la primera con el caso general de carga uniforme repartida.

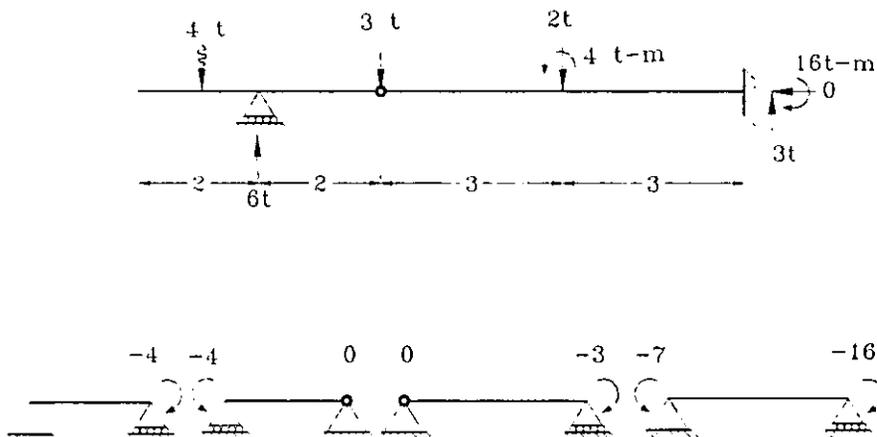
En la viga se tienen dos cargas puntuales que aparentemente se podrían adaptar a algún caso, pero una de las cargas puntuales se encuentra sobre una articulación y la otra esta acompañada de un momento concentrado, lo que no permite que coincida con alguno de los casos generales.



Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas. El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.

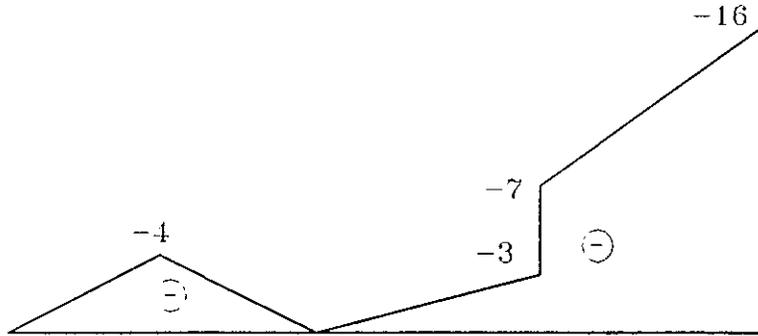
*Momentos en los extremos de las barras*



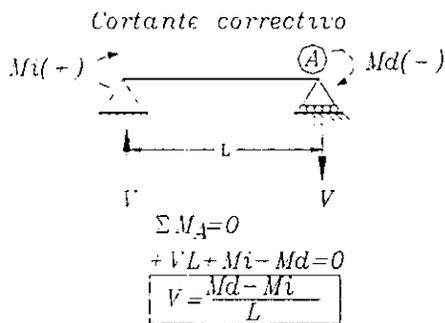
A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos flexionantes debido a los momentos en los nudos o extremos de las vigas simplemente apoyadas, este diagrama también recibirá el nombre de diagrama de momentos correctivos.

El trazo se realizará uniendo con líneas rectas los valores determinados anteriormente, se definirá una línea de referencia y los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.

Diagrama de momentos correctivos



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

$$V_1 = [(-4) - 0] / 2 = -2$$

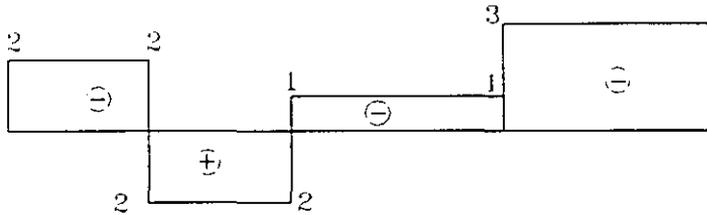
$$V_2 = [0 - (-4)] / 2 = +2$$

$$V_3 = [(-3) - 0] / 3 = -1$$

$$V_4 = [(-16) - (-7) - 0] / 3 = -3$$

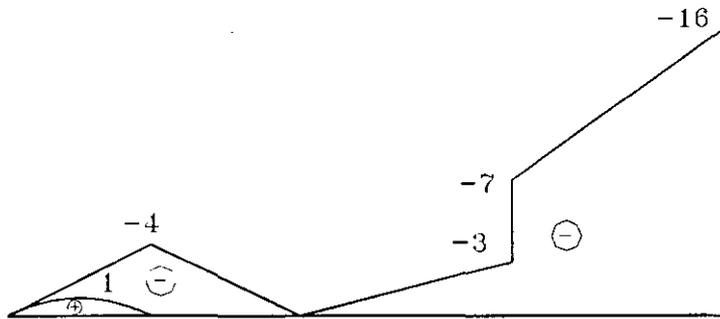
Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

Diagrama de cortantes correctivos

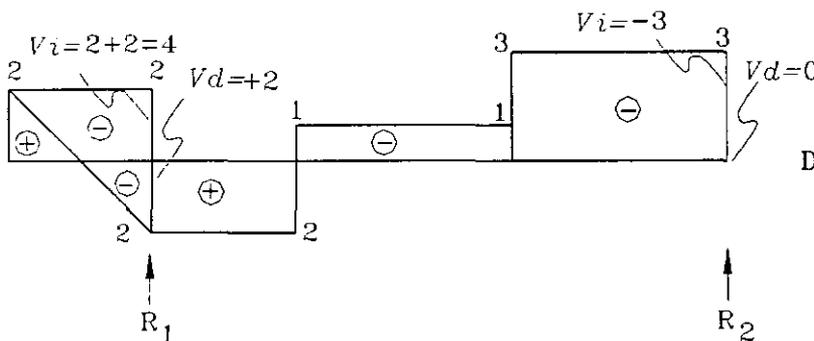


Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.



D.M.F (T-m)



D.F.C (t)

### Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:

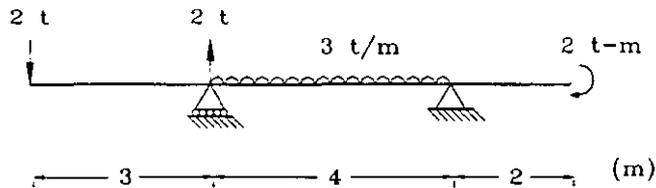
$$R = Vd - Vi - F$$

$$R1 = 2 - (-4) = 6$$

$$R2 = 0 - (-3) = 3$$

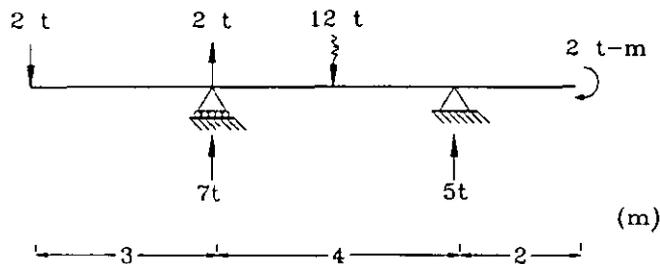
## Problema 2-4

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



## Solución

Cálculo de reacciones.



Las reacciones se obtuvieron siguiendo un método análogo al del capítulo anterior.

Establecer intervalos de validez de las funciones.

Para definir los intervalos es necesario inspeccionar el tipo de cargas que actúan en la estructura. A continuación se explica brevemente los motivos para definir cada intervalo.

$$0 \leq x < 3$$

$$3 \leq x < 7$$

$$7 \leq x < 9$$

$$0 \leq x < 3$$

El inicio de este intervalo queda definido por la fuerza concentrada en  $x=0$  considerando también que es donde principia la estructura.

$$3 \leq x < 7$$

El intervalo queda establecido por la presencia de tres fuerzas en  $x=3$ : una carga, una reacción y el inicio de una carga uniformemente distribuida que termina en  $x=7$ .

$$7 \leq x < 9$$

En este intervalo cuando  $x=7$  existe una reacción lo que da pauta para definir el inicio del intervalo, además en  $x=9$  hay un momento concentrado por lo tanto en este punto finaliza.

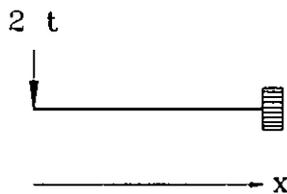
### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

Observaciones:

- Mídase  $x$  desde el inicio de la estructura.
- El análisis se realizará de izquierda a derecha.
- Se dibujará la sección de cada intervalo con sus cargas reales y se tendrá un diagrama de cuerpo libre.
- Se plantearán las ecuaciones de equilibrio para obtener los valores de cortante y momento en función de  $x$ .
- Al dibujar la sección del siguiente intervalo es importante incluir la sección anterior y plantear nuevamente las funciones.

$$0 \leq x < 3$$

Únicamente hay una carga concentrada la cual no tiene ley de variación que dependa de la distancia  $x$ , solamente interesa dejar expresado el brazo de palanca del momento en función de  $x$ .



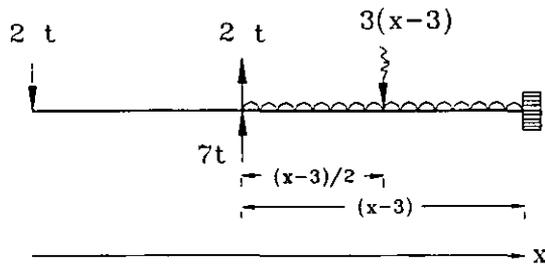
$$V(x) = -2$$

$$M(x) = -2x$$

$$N(x) = 0$$

$$3 \leq x < 7$$

En este intervalo existe una carga distribuida cuya ley de variación depende de la distancia  $x$ , por lo tanto se reemplaza por una carga resultante concentrada donde se involucre la variable  $x$ .



$$F = \text{carga (distancia)} = 3(x-3)$$

considerando las fuerzas del intervalo anterior

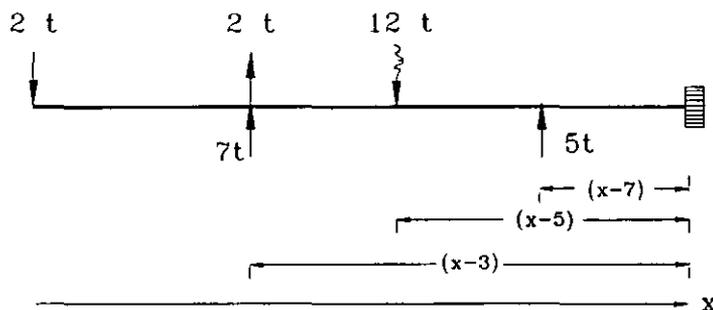
$$V(x) = -2 + 2 + 7 - 3(x-3)$$

$$M(x) = -2x + (2+7)(x-3) - 3(x-3)(x-3)/2$$

$$N(x) = 0$$

$$7 \leq x < 9$$

Nuevamente se consideran las cargas del intervalo anterior y se obtiene el valor de la fuerza resultante concentrada, pero como no esta ubicada dentro del intervalo, de interés, no se expresa en función de x.



$$V(x) = -2 + 2 + 7 - 12 + 5$$

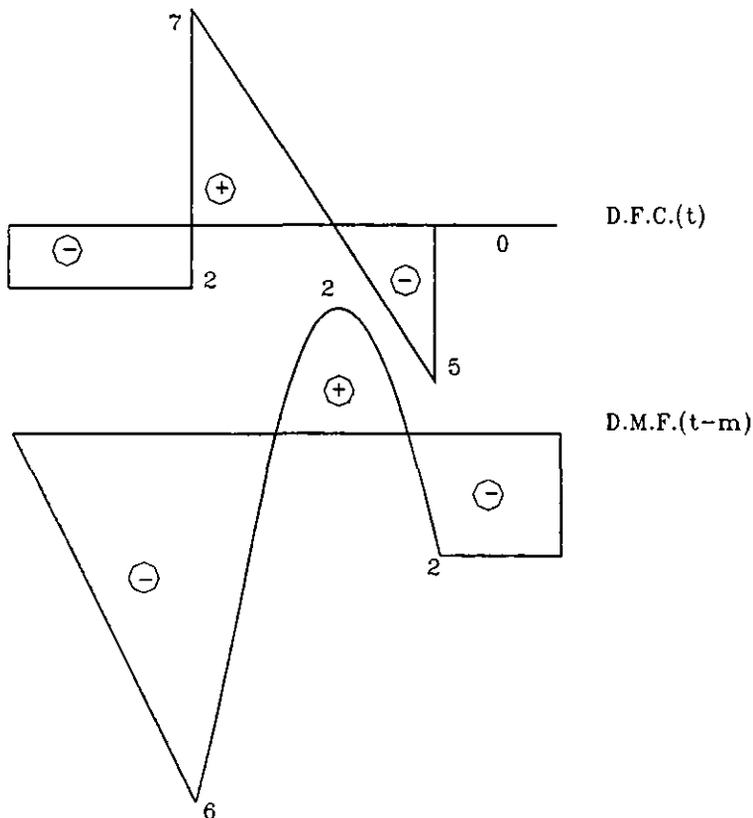
$$M(x) = -2x + (2+7)(x-3) - 12(x-5) + 5(x-7)$$

$$N(x) = 0$$

A continuación se prosigue a tabular las funciones para diferentes valores de  $x$ .

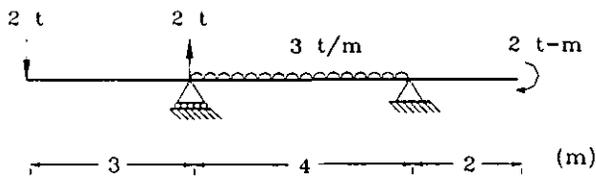
Intervalo	$x$	$V(x)$	$M(x)$
$0 \leq x < 3$	0	-2	0
	1	-2	-2
	2	-2	-4
	3	-2	-6
$3 \leq x < 7$	3	+7	-6
	4	+4	-0.5
	5	+1	+2
	6	-2	+1.5
	7	-5	-2
$7 \leq x < 9$	7	0	-2
	8	0	-2
	9	0	-2

Con los valores de la tabla se dibujan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



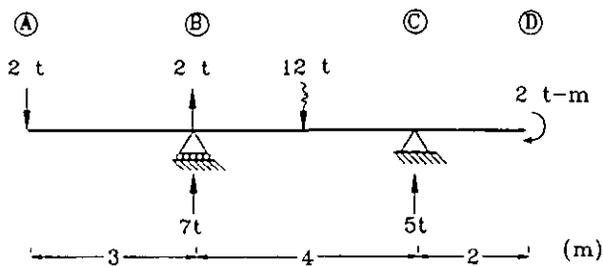
## Problema 2.5

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la siguiente estructura empleando el método de suma de áreas.



### Solución.

El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



Como se pudo observar en el método de ecuaciones, se presentará un cambio en los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes donde exista una variación en la carga. Por este motivo se tendrán que determinar los puntos de interés para el análisis.

### Ubicación de puntos de análisis.

Se escogerá como punto de análisis aquel donde exista una carga concentrada (ya sea fuerza, reacción o momento) y en el inicio y final de una carga uniformemente distribuida sin importar su ley de variación.

Inspeccionando la estructura, en los puntos A, B, C y D existen cambios significativos en las cargas como se explica a continuación:

- |       |  |
|-------|--|
| A y B | Cargas puntuales.                                      |
| B y C | Inicio y final de una carga uniformemente distribuida. |
| D     | Momento concentrado.                                   |

- Para obtener el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se realizará un análisis de fuerzas a la izquierda y derecha del punto en cuestión. El procedimiento se repetirá tantas veces como puntos de análisis existan.

### Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del punto de será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

#### *Intervalo A-B*

$$V_i = -2$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = -2 + 0 = -2$$

#### *Intervalo B-C*

$$V_i = V_{DAB} + F_B = -2 + 9 = +7$$

$$V_d = V_i + F_{BC} = +7 - 12 = -5$$

#### *Intervalo C-D*

$$V_i = V_{DBC} + F_C = -5 + 5 = 0$$

$$V_d = V_i + F_{CD} = 0 + 0 = 0$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciará un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

**Sin carga :** La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

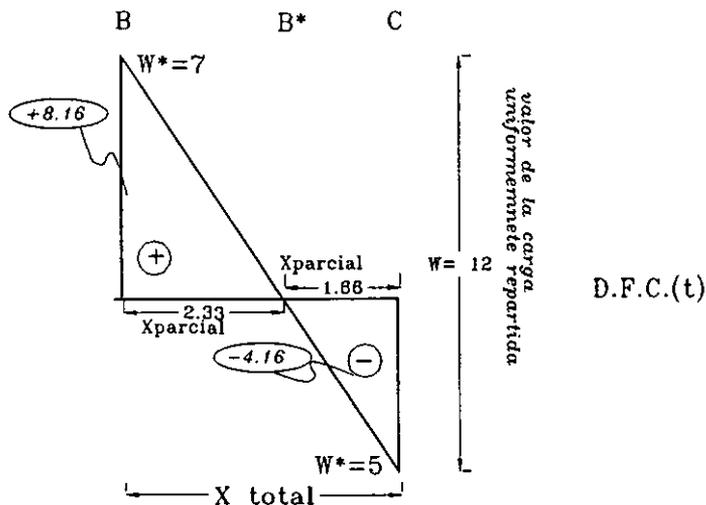
### Areas.

Para obtener el área correspondiente al tramo  $B-C$  en el diagrama de fuerza cortante se tienen dos triángulos  $B-B^*$  y  $B^*-C$  los cuales son semejantes; luego,

$$W_{\text{total}} : X_{\text{total}}$$

$$W^* : X_{\text{parcial}}$$

$$\therefore X_{\text{parcial}} = W^*(X_{\text{total}}) / W_{\text{total}}$$



sustituyendo los valores en la siguiente relación:

$$12 : 4$$

$$7 : X_{\text{parcial}}$$

$$X_1 = 7(4)/12 = 2.33\text{m}$$

$$X_2 = 5(4)/12 = 1.66\text{m}$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Intervalo	A-B	B-B*	B*-C	C-D
Figura	Rectángulo	Triángulo (sup.)	Triángulo (inf.)	Rectángulo
Area	$-2(+3) = -6$	$7(2.33)/2 = +8.16$	$-5(1.66)/2 = -4.15$	0

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A$  = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_{AD}$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

#### **Intervalo A-B**

$$M_i = M_A = 0$$

$$M_D = M_i + A_{A-B} = 0 + (-6) = -6$$

#### **Intervalo B- B\***

$$M_i = M_{DAB} + M_{B^*} = -6 + 0 = -6$$

$$M_D = M_i + A_{B-B^*} = -6 + 8.16 = +2.16$$

#### **Intervalo B\*-C**

$$M_i = M_{DB^*} + M_C = 2.16 + 0 = +2.16$$

$$M_D = M_i + A_{B^*-C} = 2.16 + (-4.15) = -2$$

#### **Intervalo C-D**

$$M_i = M_{DB^*-C} + M_D = -2 + 0 = -2$$

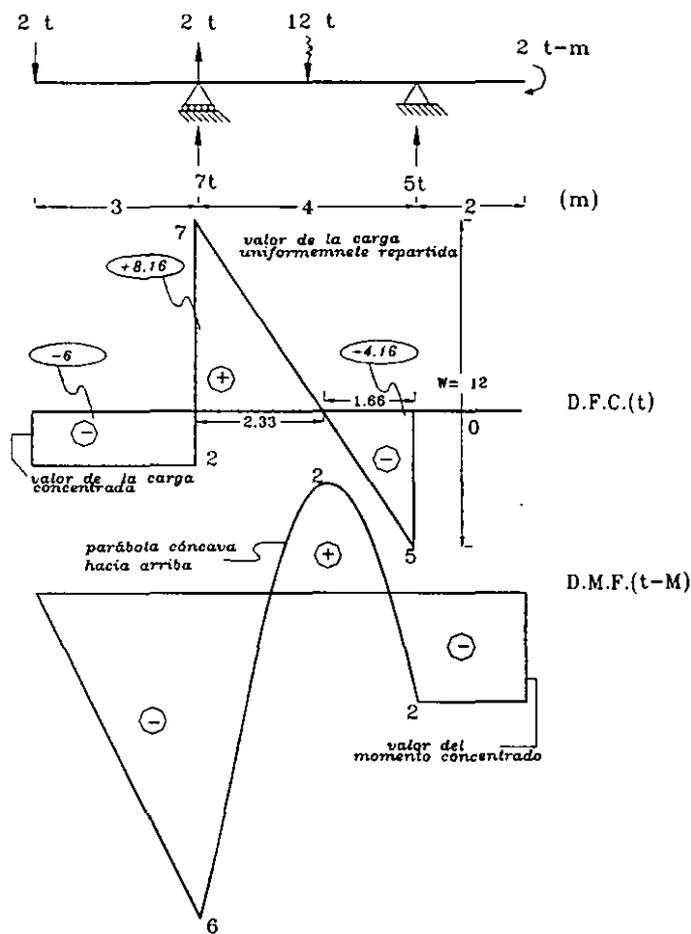
$$M_D = M_i + A_{C-D} = -2 + 0 = -2$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomarán en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

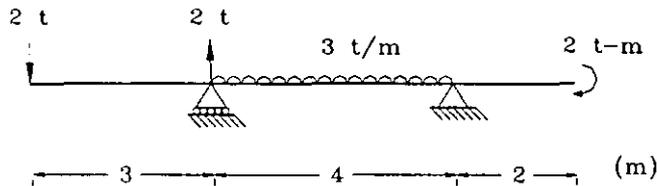
En el tramo B-C debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado cóncava hacia arriba ya que el área del diagrama de fuerzas cortantes en este tramo se va incrementando positivamente.

A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.



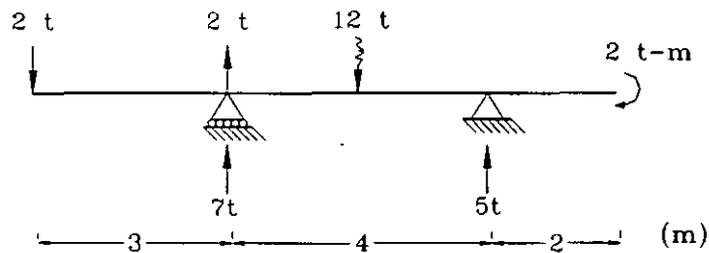
## Problema 2.6

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



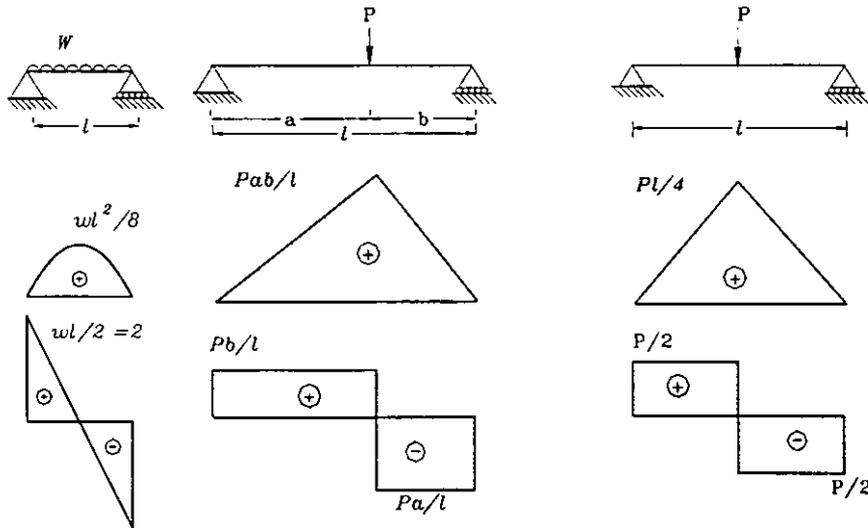
El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Se obtendrán dos tipos de diagramas de momentos y cortantes, los primeros debido a cargas sobre las barras y los segundos debidos a momentos flexionantes en los extremos de dichas barras.

Finalmente se graficarán los diagramas tomando en cuenta ciertas consideraciones para poder superponer los efectos de las cargas sobre las barras y los momentos flexionantes en los extremos de estas.

Elección de intervalos o vigas simplemente apoyadas.

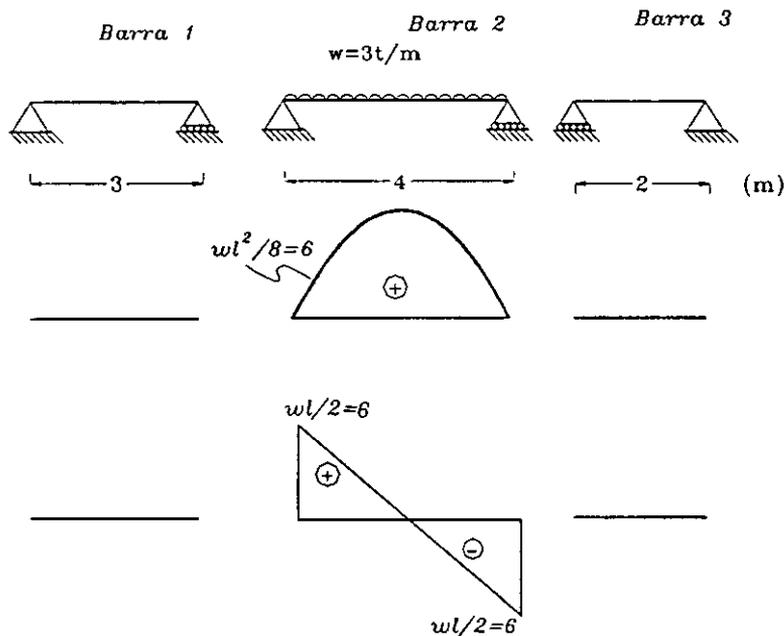
Para definir los intervalos es importante echar un vistazo a las cargas y geometría de la estructura. La estructura se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de tres casos generales que a continuación se muestran.



Cálculo de momentos y cortantes debidos a los casos generales.

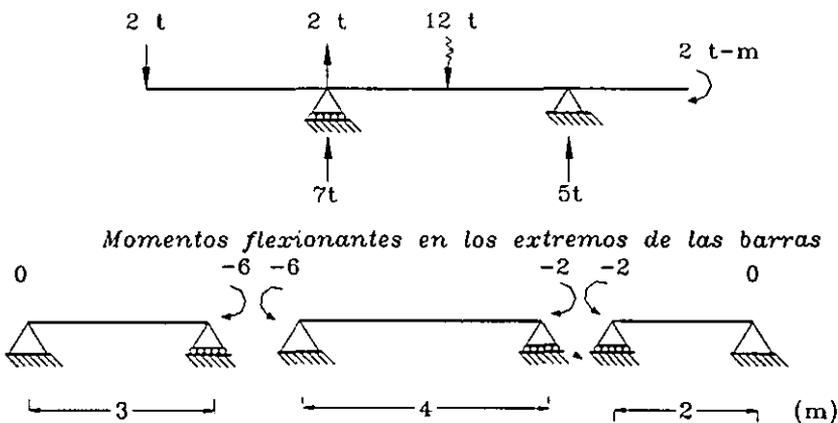
Para resolver el problema se dividió la viga en tres vigas simplemente apoyadas y solamente se pudo hacer coincidir la segunda con el caso general de carga uniformemente repartida.

*Cargas sobre las barras (casos generales)*



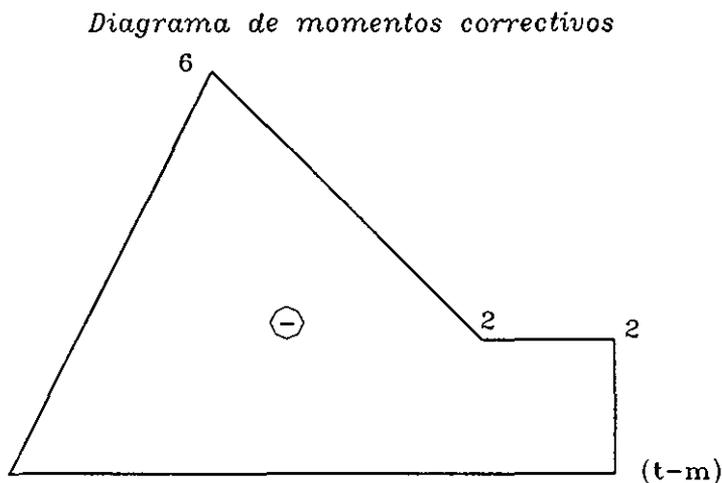
### Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas. El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.

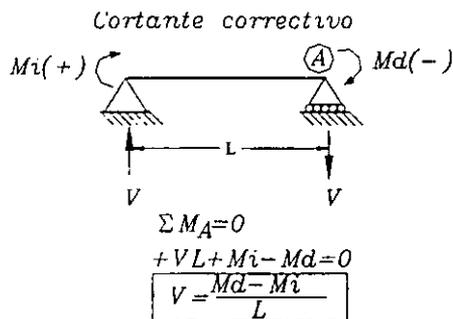


A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos flexionantes debido a los momentos en los nudos o extremos de las vigas simplemente apoyadas, este diagrama también recibirá el nombre de diagrama de momentos correctivos.

El trazo se realizará uniendo con líneas rectas los valores determinados anteriormente, se definirá una línea de referencia y los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

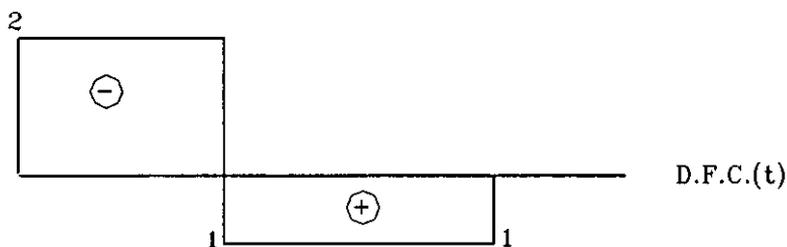
$$V_1 = [(6) - 0] / 3 = -2$$

$$V_2 = [-2 - (-6)] / 4 = +1$$

$$V_3 = [(-2) - (-2)] / 2 = 0$$

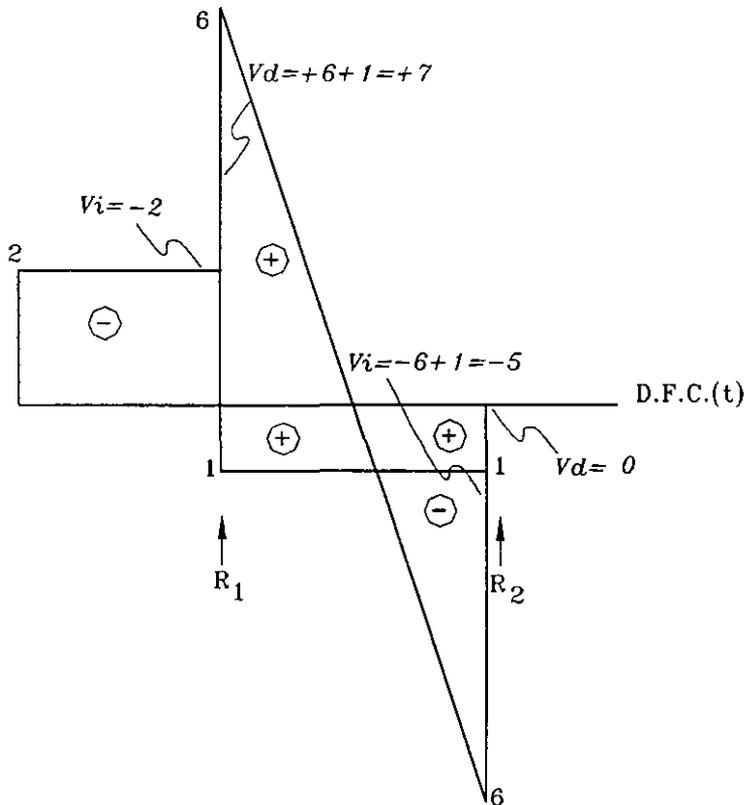
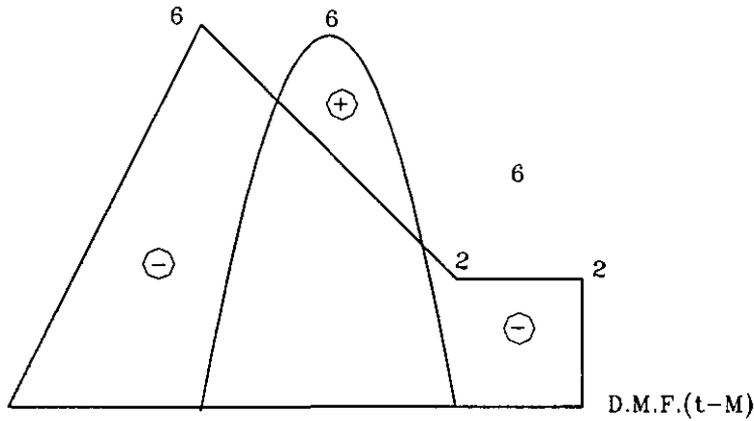
Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

*Diagrama de momentos correctivos*



Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

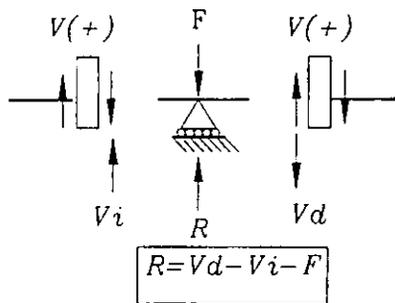
Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.



### Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:

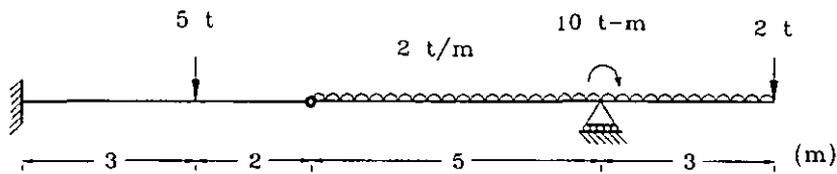


$$R_1 = 7 - (-2) + (-2) = 7$$

$$R_2 = 0 - (-5) - 0 = +5$$

## Problema 2.7

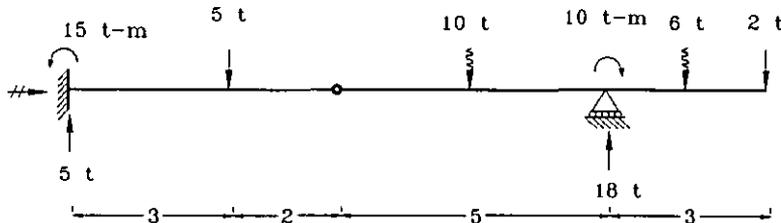
Calcular y gráficar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución.

#### Cálculo de reacciones

Las reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento similar con capítulo anterior



#### Establecer los intervalos de validez de las funciones

Es importante inspeccionar la ubicación y tipo de cargas que tiene la estructura para definir los límites de los intervalos.

Intervalos propuestos:

$$0 \leq x < 3$$

$$3 \leq x < 5$$

$$5 \leq x < 10$$

$$10 \leq x < 13$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$0 \leq x < 3$$

El intervalo inicia en  $x=0$  donde existen cargas concentradas debidas al empotramiento y termina en  $x=3$ .

$$3 \leq x < 5$$

El inicio del intervalo queda definido por la carga en  $x=3$  y finaliza en  $x=5$  ya que es donde inicia una nueva carga uniformemente repartida

$$5 \leq x < 10$$

El intervalo principia en  $x=5$  pero termina antes de finalizar la carga uniformemente repartida, debido a que en  $x=10$  esta ubicado un momento concentrado.

$$10 \leq x < 13$$

El intervalo inicia en  $x=10$  debido al momento concentrado y termina en  $x=13$

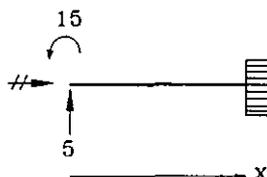
### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

Observaciones:

- Mídase  $x$  desde el inicio de la estructura.
- El análisis se realizará de izquierda a derecha.
- Se dibujará la sección de cada intervalo con sus cargas reales y se tendrá un diagrama de cuerpo libre.
- Se plantearán las ecuaciones de equilibrio para obtener los valores de cortante y momento en función de  $x$ .
- Al dibujar la sección del siguiente intervalo es importante incluir la sección anterior y plantear nuevamente las funciones.

$$0 \leq x < 3$$

Se realiza una  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M$  considerando los brazos de palanca en función de  $x$ .



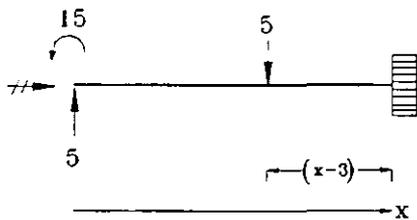
$$V(x) = 5$$

$$M(x) = -15 + 5x$$

$$N(x) = 0$$

$$3 \leq x < 5$$

Se considera el intervalo anterior y se realiza una  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M$  considerando los brazos de palanca en función de  $x$ .



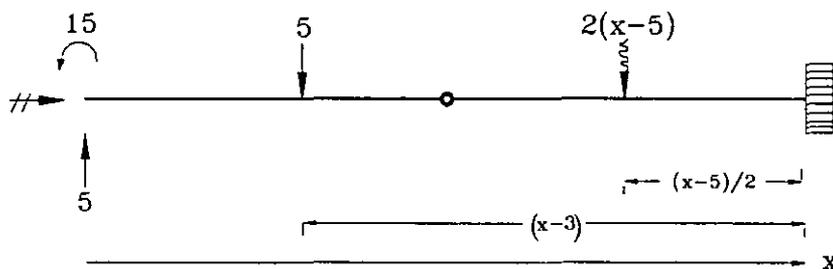
$$V(x) = 5 - 5 = 0$$

$$M(x) = -15 + 5x - 5(x-3)$$

$$N(x) = 0$$

$$5 \leq x < 10$$

En este intervalo existe una carga uniformemente distribuida la cual se reemplaza por una carga resultante concentrada en función de  $x$ .



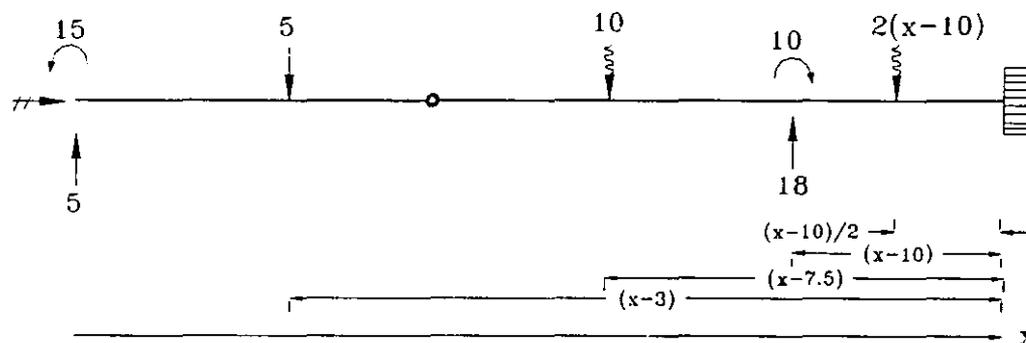
$$V(x) = 5 - 5 - 2(x-5)$$

$$M(x) = -15 + 5x - 5(x-3) - 2(x-5)(x-5)/2$$

$$N(x) = 0$$

$$10 \leq x < 13$$

En este intervalo se reemplaza la primera parte de la carga uniformemente distribuida por una carga resultante concentrada pero no en función de  $x$ , sin embargo la parte de la carga que está dentro del intervalo estará concentrada en función de  $x$ .



$$V(x) = 5 - 5 - 10 + 18 - 2(x-10)$$

$$M(x) = -15 + 5x - 5(x-3) - 10(x-7.5) + 10 + 18(x-10) - 2(x-10)(x-10)/2$$

$$N(x) = 0$$

Habiendo planteado las funciones de los elementos mecánicos se prosigue a su tabulación.

Intervalo	x	V(x)	M(x)
$0 \leq x < 3$	0	+5	-15
	1	+5	-10
	2	+5	-5
	3	+5	0
$3 \leq x < 5$	3	0	0
	4	0	0
	5	0	0
$5 \leq x < 10$	5	0	0
	6	-2	-1
	7	-4	-4
	8	-6	-9
	9	-8	-16
	10	-10	-25
$10 \leq x < 13$	10	+8	-15
	11	+6	-8
	12	+4	-3
	13	+2	0

Finalmente con los resultados de la tabulación se dibujan los diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerzas cortantes

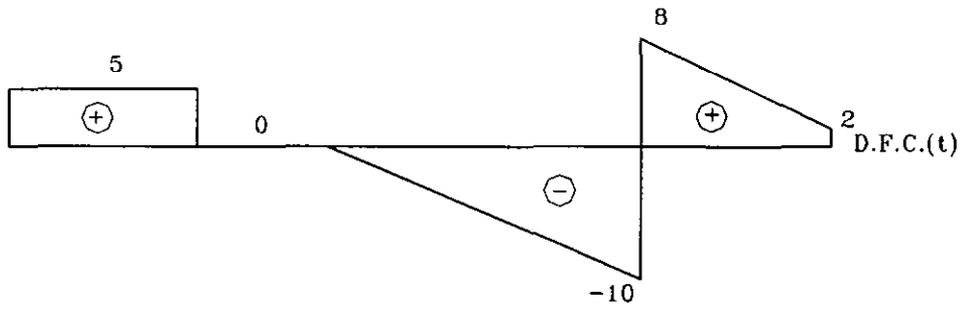
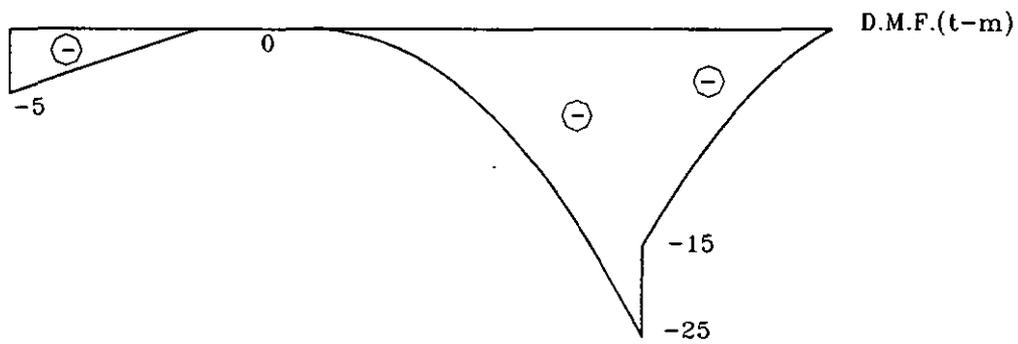
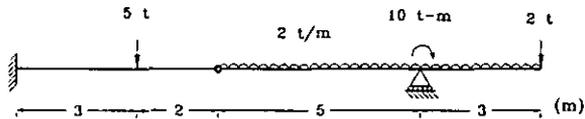


Diagrama de momentos flexionantes

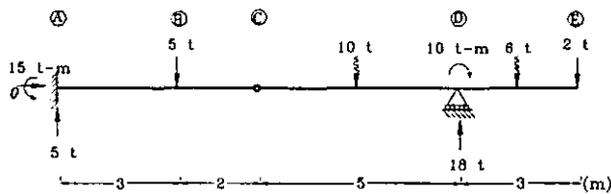


## Problema 2.8

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la siguiente estructura empleando el método de suma de áreas.



### Solución.



El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

Como se pudo observar en el método de ecuaciones, se presentará un cambio en los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes donde exista una variación en la carga. Por este motivo se tendrán que determinar los puntos de interés para el análisis.

### Ubicación de puntos de análisis.

Se escogerá como punto de análisis aquel donde exista una carga concentrada (ya sea fuerza, reacción o momento) y en el inicio y final de una carga uniformemente distribuida sin importar su ley de variación.

Inspeccionando la estructura, en los puntos A, B, C, D y E existen cambios significativos en las cargas como se explica a continuación:

- |             |  |
|-------------|--|
| A, B, D y E | Cargas puntuales.                                      |
| C, D y E    | Inicio y final de una carga uniformemente distribuida. |
| A y D       | Momento concentrado.                                   |

- Para obtener el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se realizará un análisis de fuerzas a la izquierda y derecha del punto en cuestión. El procedimiento se repetirá tantas veces como puntos de análisis existan.

### Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

#### ***Intervalo A-B***

$$V_i = 5$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = 5+0 = 5$$

#### ***Intervalo B-C***

$$V_i = V_{DAB} + F_B = 5-5 = 0$$

$$V_d = V_i + F_{BC} = 2+0 = +2$$

#### ***Intervalo C-D***

$$V_i = V_{DBC} + F_C = 0$$

$$V_d = V_i + F_{CD} = 0-10 = -10$$

#### ***Intervalo D-E***

$$V_i = V_{DCD} + F_D = -10+18 = 8$$

$$V_d = V_i + F_{DE} = 8-6 = 2$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciará un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

**Sin carga :** La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

### Areas.

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Intervalo	A-B	B-C	C-D	D-E
Figura	Rectángulo	-----	Triángulo	Trapezio
Area	$+5(3) = +15$	-----	$-10(5)/2 = -25$	$(8+2)(3)/2 = +15$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el digrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A =$  momento en el punto A

$M_i =$  momento a la izquierda del intervalo

$M_{Ad} =$  momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B} =$  Area calculada entre el punto A y B.

#### **Intervalo A-B**

$$M_i = M_A = -15$$

$$M_D = M_i + A_{A-B} = -15 + 15 = 0$$

#### **Intervalo B-C**

$$M_i = M_{DAB} + M_B = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_i + A_{B-C} = 0 + 0 = 0$$

#### **Intervalo C-D**

$$M_i = M_{DBC} + M_C = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_i + A_{C-D} = 0 + (-25) = -25$$

#### **Intervalo D-E**

$$M_i = M_{DCD} + M_D = -25 + 10 = -15$$

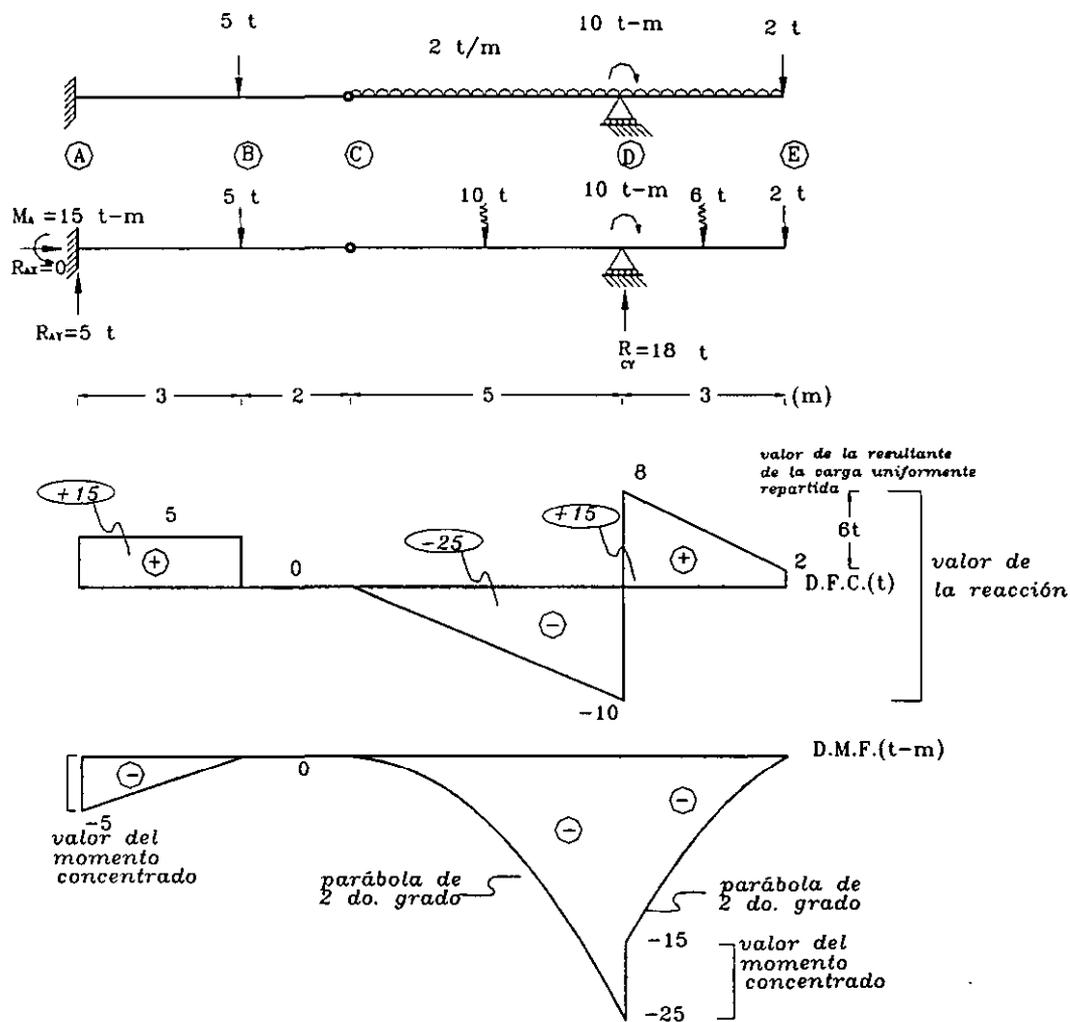
$$M_D = M_i + A_{D-E} = -15 + 15 = 0$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomarán en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

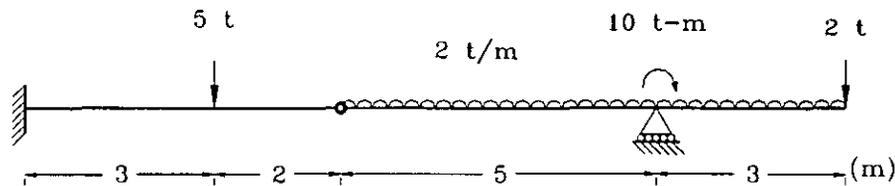
En el tramo C-D y D-E debido a la carga uniformemente repartida se trazarán dos parábolas de segundo grado unidas por un tramo vertical que corresponde al valor del momento concentrado.

A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.



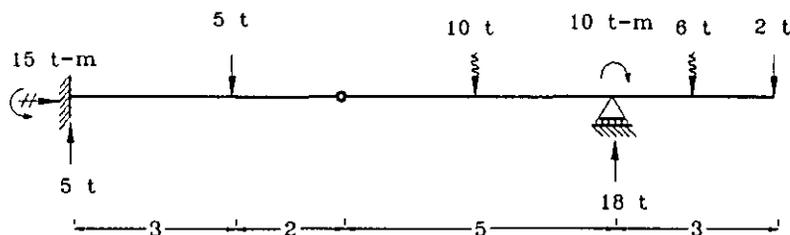
## Problema 2.9

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



## Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



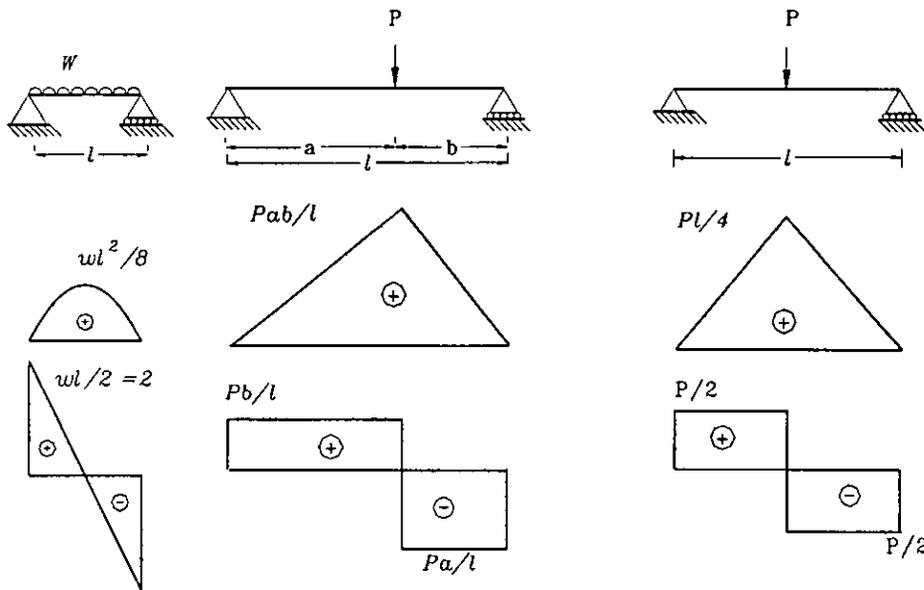
El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Se obtendrán dos tipos de diagramas para momentos y cortantes, los primeros debido a cargas sobre las barras y los segundos debidos a momentos flexionantes en los extremos de dichas barras.

Finalmente se graficarán los diagramas tomando en cuenta ciertas consideraciones para poder superponer los efectos de las cargas sobre las barras y los momentos flexionantes en los extremos de estas.

Elección de intervalos o vigas simplemente apoyadas.

Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura. La estructura se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de tres casos generales que a continuación se muestran.

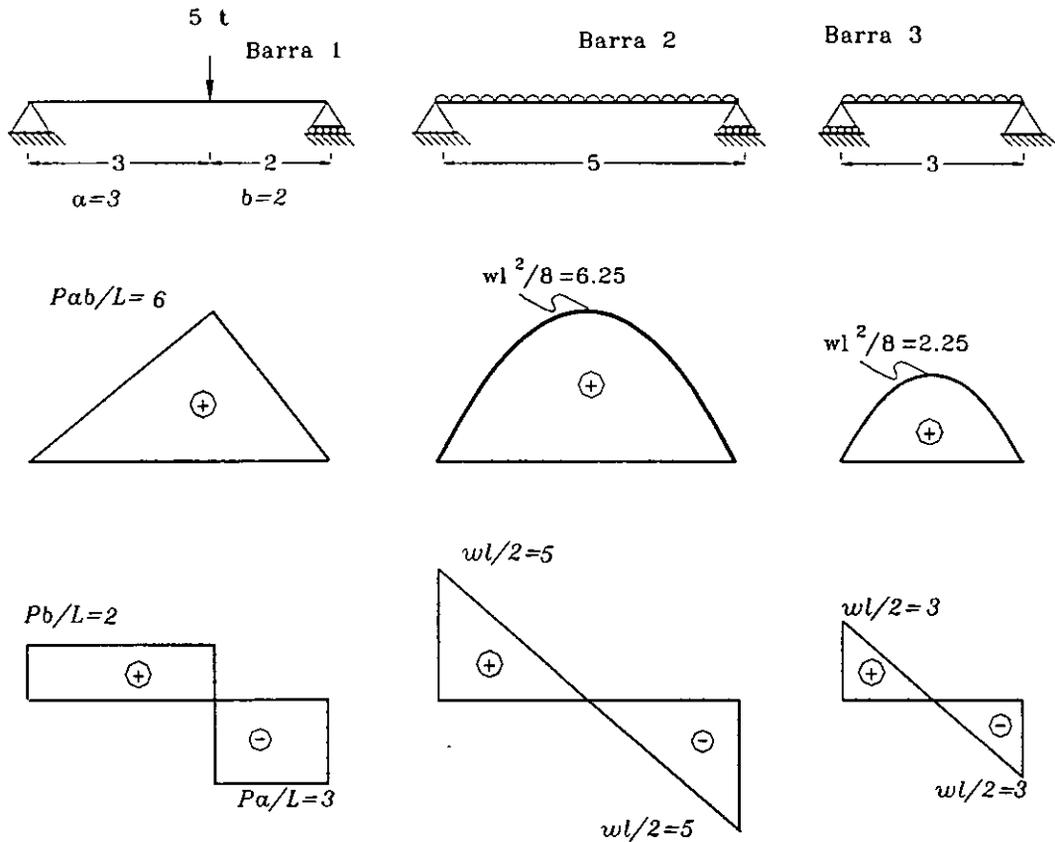


Definición de vigas simplemente apoyadas.

Para resolver el problema se dividió la viga en tres vigas simplemente apoyadas, se pudo coincidir con dos de los casos generales tanto en la carga uniformemente repartida y la carga excéntrica concentrada.

Cálculo de momentos y cortantes debidos a los casos generales.

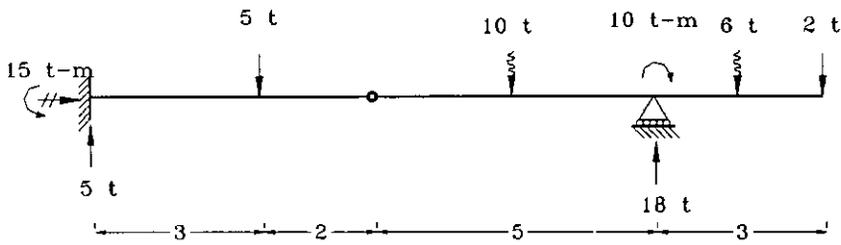
Cargas sobre las barras (casos generales)



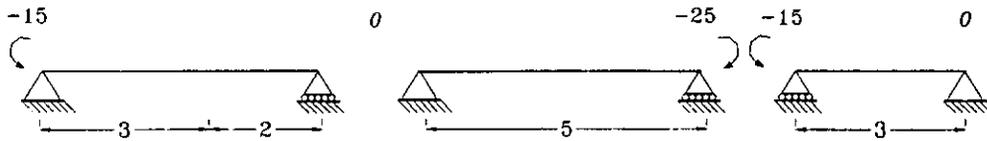
Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas.

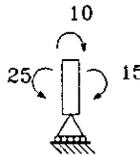
El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.



*Momentos flexionantes en los extremos de las barras*



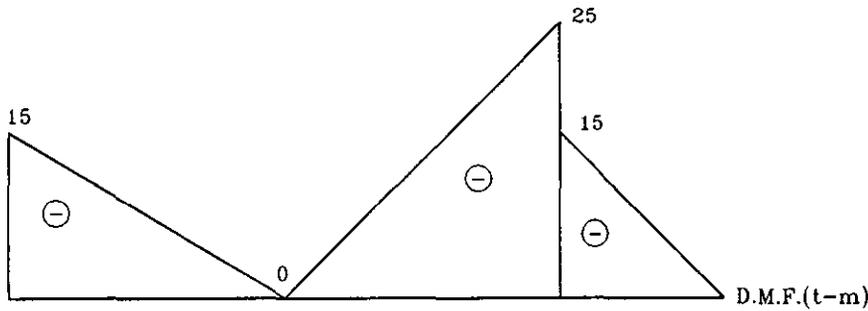
Donde existe un momento concentrado se calcula el momento flexionante antes y después del momento concentrado.



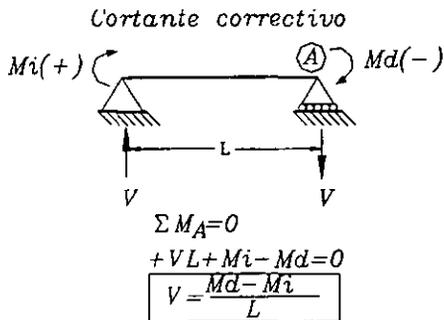
A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos flexionantes debido a los momentos en los nudos o extremos de las vigas simplemente apoyadas, este diagrama también recibirá el nombre de diagrama de momentos correctivos.

El trazo se realizará uniendo con líneas rectas los valores determinados anteriormente, se definirá una línea de referencia y los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.

Diagrama de momentos correctivos



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

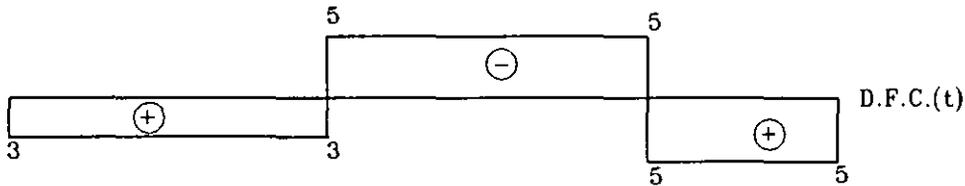
$$V_1 = [0 - (-15)] / 5 = -3$$

$$V_2 = [-25 - 0] / 5 = -5$$

$$V_3 = [0 - (-15)] / 3 = 5$$

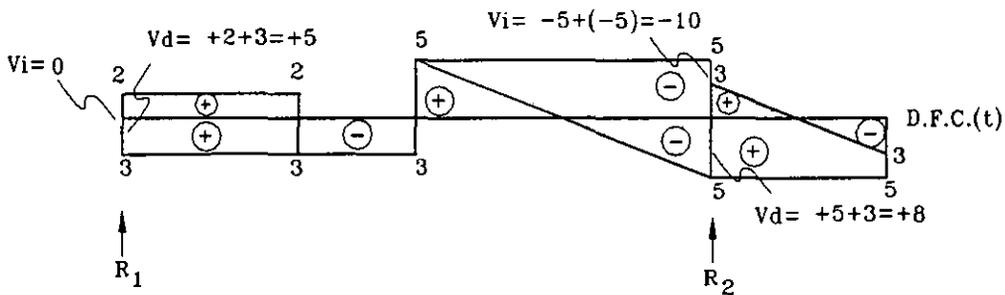
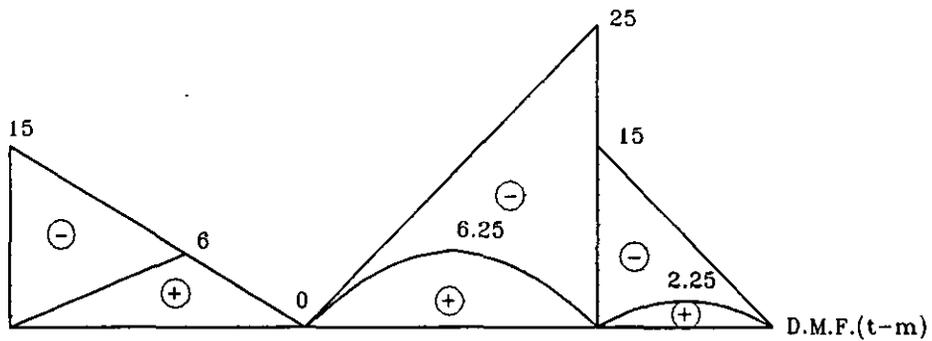
Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

Diagrama de cortantes correctivos



Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

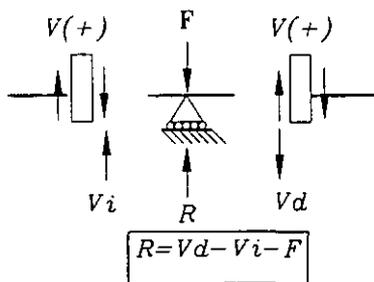
Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.



## Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:

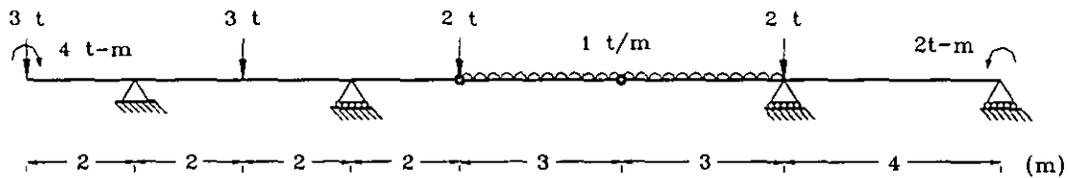


$$R_1 = 5 - 0 = 5$$

$$R_2 = 8 - (-10) = 18$$

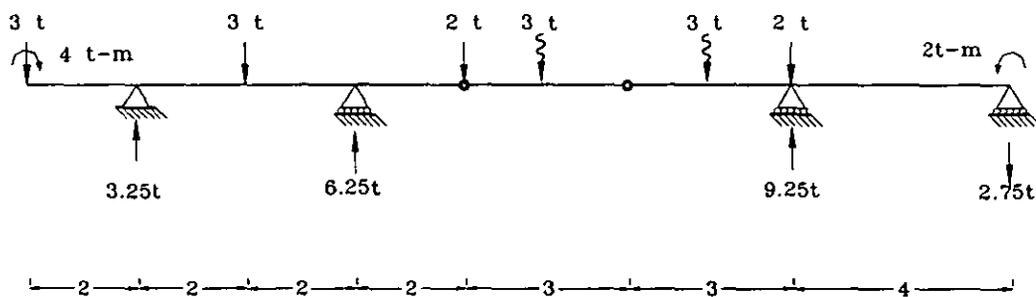
### Problema 2.10

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución.

El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



### Establecer intervalos de validez de las funciones.

En este problema se dividirá la estructura en dos partes y se analizará la primera parte de izquierda a derecha y la segunda de derecha a izquierda, de esta manera el planteamiento de las ecuaciones no se volverá tan repetitivo. Siguiendo un procedimiento análogo al de los

problemas anteriores, donde exista un cambio de carga se procederá a definir el inicio de un nuevo intervalo.

Intervalos para el análisis de izquierda a derecha.

$$0 \leq x < 2$$

$$2 \leq x < 4$$

$$4 \leq x < 6$$

$$6 \leq x < 8$$

Intervalos para el análisis de derecha a izquierda.

$$0 \leq x < 4$$

$$4 \leq x < 7$$

$$7 \leq x < 10$$

### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

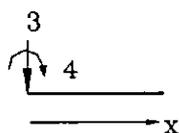
Observaciones:

- Mídase  $x$  desde el inicio de la estructura.
- El análisis se realizará de izquierda a derecha en la primera parte y de derecha a izquierda en la segunda parte.
- Se dibujará la sección de cada intervalo con sus cargas reales y se tendrá un diagrama de cuerpo libre.
- Se plantearán las ecuaciones de equilibrio para obtener los valores de cortante y momento en función de  $x$ .
- Al dibujar la sección del siguiente intervalo es importante incluir la sección anterior y plantear nuevamente las funciones.
- Cuando se lleva cabo el análisis de derecha a izquierda se antepone un signo negativo a las funciones de cortante y momento.

### Análisis de izquierda a derecha.

$$0 \leq x < 2$$

Se realiza una  $\Sigma F_y$  y una  $\Sigma M$  de la parte considerada planteando los brazos de palanca del momento en función de  $x$ .



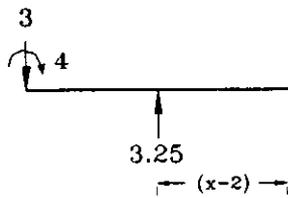
$$V(x) = -3$$

$$M(x) = +4 - 3x$$

$$N(x) = 0$$

$$2 \leq x < 4$$

Considerando la parte del intervalo anterior se tienen la siguiente ecuaciones:

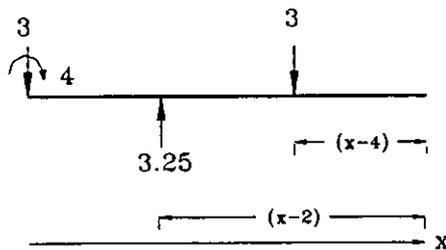


$$V(x) = -3 + 3.25$$

$$M(x) = +4 - 3x + 3.25(x-2)$$

$$N(x) = 0$$

$$4 \leq x < 6$$

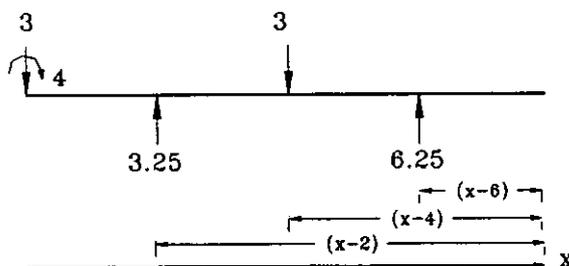


$$V(x) = -3 + 3.25 - 3$$

$$M(x) = +4 - 3x + 3.25(x-2) - 3(x-4)$$

$$N(x) = 0$$

$$6 \leq x < 8$$



$$V(x) = -3 + 3.25 - 3 + 6.25$$

$$M(x) = +4 - 3x + 3.25(x-2) - 3(x-4) + 6.25(x-6)$$

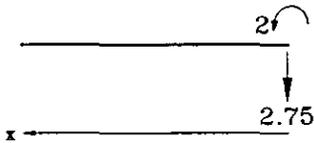
$$N(x) = 0$$

Análisis de derecha a izquierda.

\*Observación importante.

Siempre se tendrá que anteponer un signo negativo en las ecuaciones de momento y cortante cuando se realice el análisis en este sentido.

$$0 \leq x < 4$$

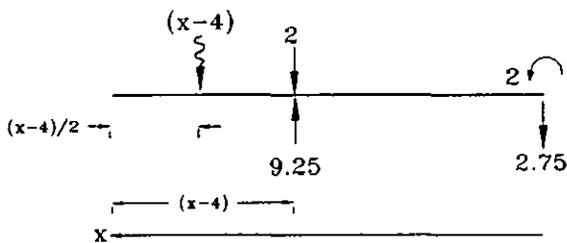


$$V(x) = -(-2.75)$$

$$M(x) = -(-2 + 2.75x)$$

$$N(x) = 0$$

$$4 \leq x < 7$$



En este intervalo existe una carga uniformemente distribuida la cual se reemplaza por una carga resultante concentrada en función de x.

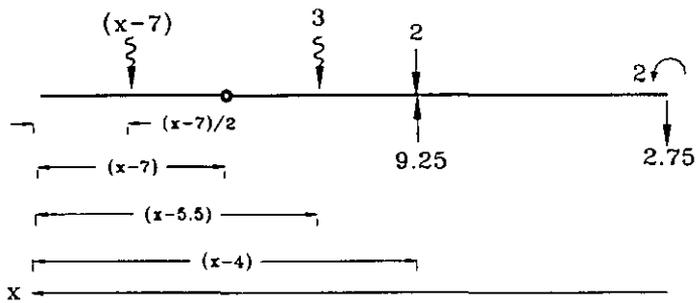
$$V(x) = -\{-2.75 + 9.25 - 2 - (x-4)\}$$

$$M(x) = -\{-2 + 2.75x - 9.25(x-4) + 2(x-4) + (x-4)(x-4)/2\}$$

$$N(x) = 0$$

$$7 \leq x < 10$$

La parte de la carga uniformemente distribuida del intervalo anterior se concentra pero ya no en función de x.



$$V(x) = - \{ -2.75 + 9.25 - 2 - 3 - (x-7) \}$$

$$M(x) = - \{ -2 + 2.75x - 9.25(x-4) + 2(x-4) + 3(x-5.5) + (x-7)(x-7)/2 \}$$

$$N(x) = 0$$

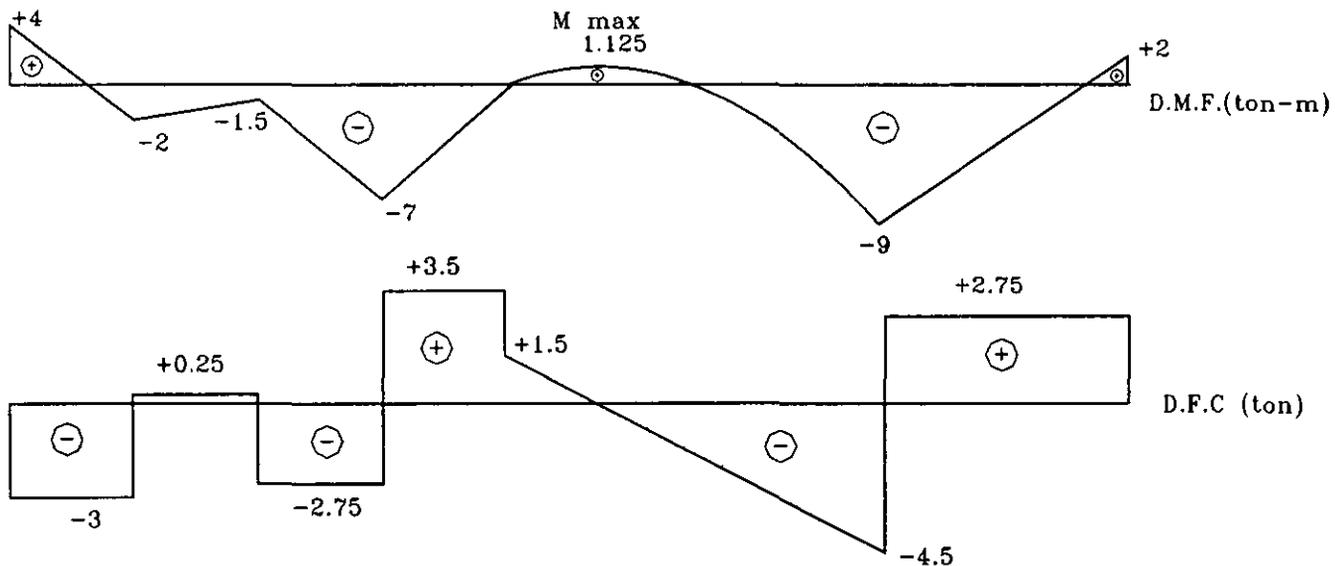
Sustituyendo para diferentes valores de "x" las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	x	V(x)	M(x)
$0 \leq x < 2$	0	-3	+4
	1	-3	+1
	2	-3	-2
$2 \leq x < 4$	2	0.25	-2
	3	0.25	-1.75
	4	0.25	-1.5
$4 \leq x < 6$	4	-2.75	-1.5
	5	-2.75	-4.25
	6	-2.75	-7
$6 \leq x < 8$	6	+3.5	-7
	7	+3.5	-3.5
	8	+3.5	0

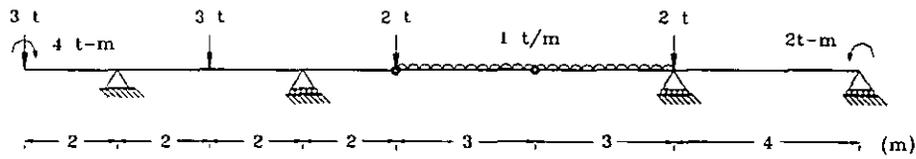
Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	x	V(x)	M(x)
$0 \leq x < 4$	0	2.75	2
	1	2.75	-0.75
	2	2.75	-3.5
	3	2.75	-6.25
	4	2.75	-9
$4 \leq x < 7$	4	-4.5	-9
	5	-3.5	-5
	6	-2.5	-2
	7	-1.5	0
$7 \leq x < 10$ Mmax	7	-1.5	0
	8	-0.5	1
	8.5	0	1.125
	9	+0.5	1
	10	+1.5	0

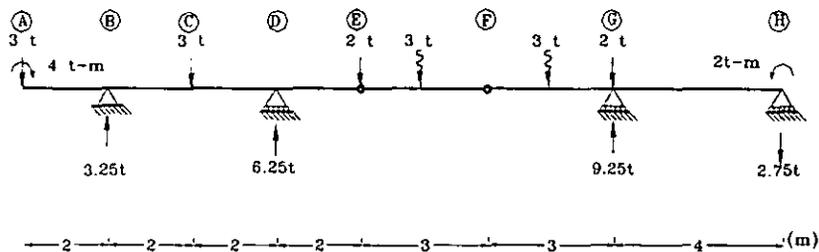


## Problema 2.11

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la siguiente estructura empleando el método de suma de áreas.



## Solución.



El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

Como se pudo observar en el método de ecuaciones, se presentará un cambio en los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes donde exista una variación en la carga. Por este motivo se tendrán que determinar los puntos de interés para el análisis.

### Ubicación de puntos de análisis.

Se escogerá como punto de análisis aquel donde exista una carga concentrada ( ya sea fuerza, reacción o momento) y en el inicio y final de una carga uniformemente distribuida sin importar su ley de variación.

Inspeccionando la estructura, en los puntos A, B, C, D, E, F, G y H existen cambios significativos en las cargas como se explica a continuación:

A, B, C, D, E, H y G	Cargas puntuales.
E y G	Inicio y final de una carga uniformemente distribuida.
A y H	Momento concentrado.

- Para obtener el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se realizará un análisis de fuerzas a la izquierda y derecha del punto en cuestión. El procedimiento se repetirá tantas veces como puntos de análisis existan.

### Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

#### ***Intervalo A-B***

$$V_i = -3$$
$$V_d = V_i + F_{AB} = -3 + 0 = -3$$

#### ***Intervalo B-C***

$$V_i = V_{DAB} + F_B = -3 + 3.25 = +0.25$$
$$V_d = V_i + F_{BC} = 0.25 + 0 = +0.25$$

#### ***Intervalo C-D***

$$V_i = V_{DBC} + F_C = +0.25 - 3 = -2.75$$
$$V_d = V_i + F_{CD} = -2.75 + 0 = -2.75$$

#### ***Intervalo D-E***

$$V_i = V_{DCD} + F_D = -2.75 + 6.25 = 3.5$$
$$V_d = V_i + F_{DE} = -3.5 + 0 = -3.5$$

#### ***Intervalo E-F***

$$V_i = V_{DDE} + F_E = 3.5 - 2 = +1.5$$
$$V_d = V_i + F_{EF} = 1.5 - 3 = -1.5$$

#### ***Intervalo F-G***

$$V_i = V_{DEF} + F_F = -1.5 + 0 = -1.5$$
$$V_d = V_i + F_{FG} = -1.5 - 3 = -4.5$$

### Intervalo G-H

$$V_I = V_{DFG} + FG = -4.5 + 9.25 - 2 = 2.75$$

$$V_D = V_I + F_{GH} = 2.75 + 0 = 2.75$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciará un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

**Sin carga :** La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

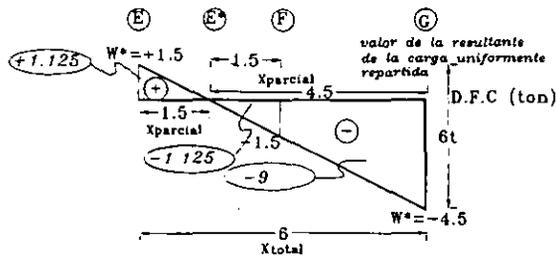
### Áreas.

Para obtener el área correspondiente al tramo E-G en el diagrama de fuerza cortante se tienen dos triángulos E-E\* y E\*-G los cuales son semejantes luego,

$$W_{total} : X_{total}$$

$$W^* : X_{parcial}$$

$$\therefore X_{parcial} = W^*(X_{total}) / W_{total}$$



sustituyendo los valores en la siguiente relación:

$$6 : 6$$

$$1.5 : X_{\text{parcial}}$$

$$X_1 = 1.5(6)/6 = 1.5\text{m}$$

$$X_2 = 4.5(6)/6 = 4.5\text{m}$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Intervalo	A-B	B-C	C-D	D-E
Figura	Rectángulo	Rectángulo	Rectángulo	Rectángulo
Area	$2(-3) = -6$	$2(+0.25) = +0.5$	$2(-2.75) = -5.5$	$2(+3.5) = +7$

Intervalo	E-E*	E*-F	F-G	G-H
Figura	Triángulo (sup.)	Triángulo (inf.)	Trapecio	Rectángulo
Area	$1.5(+1.5)/2 = 1.125$	$1.5(-1.5)/2 = -1.125$	$3(-1.5-4.5)/2 = -9$	$4(+2.75) = +11$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

MA= momento en el punto A

MI= momento del intervalo a la izquierda

MAD= momento del intervalo a la derecha

AA-B = Area calculada entre el punto A y B.

***Intervalo A-B***

$$M_I = M_A = +4$$

$$M_D = M_I + A_{A-B} = +4 - 6 = -2$$

***Intervalo B-C***

$$M_I = M_{DAB} + M_B = -2 + 0 = -2$$

$$M_D = M_I + A_{B-C} = -2 + 0.5 = -1.5$$

***Intervalo C-D***

$$M_I = M_{DBC} + M_C = -1.5 + 0 = -1.5$$

$$M_D = M_I + A_{C-D} = -1.5 + (-5.5) = -7$$

***Intervalo D-E***

$$M_I = M_{DCD} + M_D = -7 + 0 = -7$$

$$M_D = M_I + A_{D-E} = -7 + 7 = 0$$

***Intervalo E-E\****

$$M_I = M_{DDE} + M_E = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_I + A_{E-E^*} = 0 + 1.125 = +1.125$$

***Intervalo E\*-F***

$$M_I = M_{DEE^*} + M_{E^*} = 1.125 + 0 = 1.125$$

$$M_D = M_I + A_{E^*-F} = 1.125 - 1.125 = 0$$

***Intervalo F-G***

$$M_I = M_{DE^*F} + M_F = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_I + A_{F-G} = 0 - 9 = -9$$

***Intervalo G-H***

$$M_I = M_{DFG} + M_G = -9 + 0 = -9$$

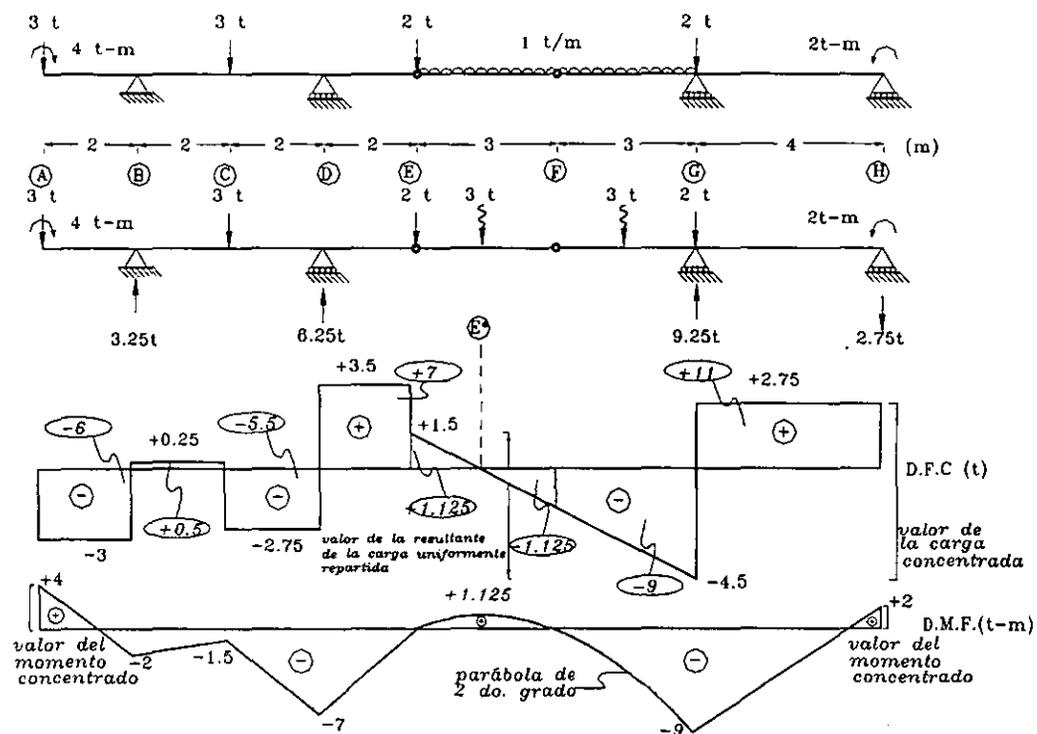
$$M_D = M_I + A_{G-H} = -9 + 11 = +2$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomarán en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

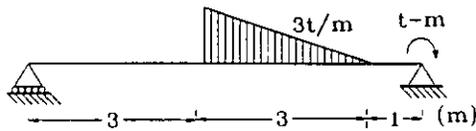
En el tramo E-F debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado cóncava hacia arriba ya que el área del diagrama de fuerzas cortantes en este tramo se va incrementando positivamente.

A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.



### Problema 2.13

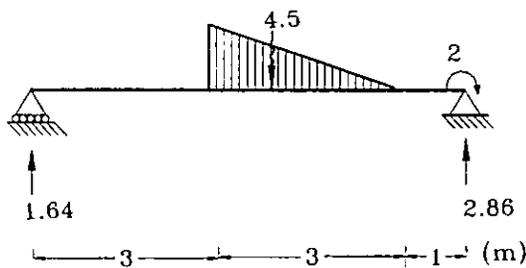
Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución

#### Cálculo de reacciones

Las reacciones se obtuvieron de acuerdo al método expuesto en el capítulo anterior.



#### Establecer los intervalos de validez de las funciones.

Basándose en que el inicio y final de un intervalo se define donde principia y finaliza una carga uniformemente repartida sin importar su ley de variación tratándose en este caso de una carga triangular, quedan establecidos tres intervalos.

Intervalos de izquierda a derecha.

$$0 \leq x < 3$$

$$3 \leq x < 6$$

Intervalos de derecha a izquierda.

$$0 \leq x < 1$$

#### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

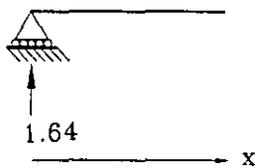
Observaciones:

- Mídase  $x$  desde el inicio de la estructura.
- Por facilidad de cálculo la estructura se dividirá en dos partes y el análisis se realizará de izquierda a derecha en la primera parte y de derecha a izquierda en la segunda.
- Se dibujará la sección de cada intervalo con sus cargas reales y se tendrá un diagrama de cuerpo libre.

- Se plantearán las ecuaciones de equilibrio para obtener los valores de cortante y momento en función de  $x$ .
- Al dibujar la sección del siguiente intervalo es importante incluir la sección anterior y plantear nuevamente las funciones.

Análisis de izquierda a derecha.

$$0 \leq x < 3$$

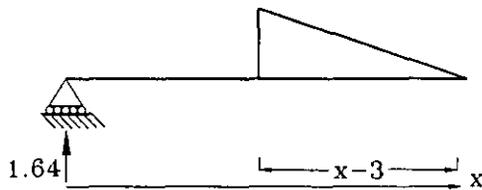


$$V(x) = +1.64$$

$$M(x) = +1.64x$$

$$N(x) = 0$$

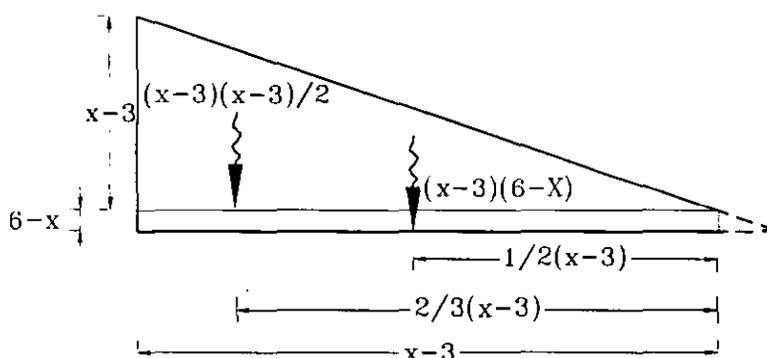
$$3 \leq x < 6$$



Por tratarse de una carga triangular, al remplazarla por su carga resultante concentrada será necesario tomar las siguientes consideraciones:

- En teoría la carga resultante concentrada es igual a el área del triángulo que forma la carga triangular, pero esto no sucede en realidad, porque el intervalo en su límite superior es abierto y siempre se formará un trapecio conforme varíe la distancia  $x$ .

- Por facilidad de cálculo este trapecio se descompondrá en dos figuras, un triángulo y un rectángulo, y para obtener los brazos de palanca, se ubicarán sus respectivos centroides en función de  $x$ .



$$V(x) = +1.64 - (x-3)(x-3)/2 - (x-3)(6-x)$$

$$M(x) = +1.64x - \left\{ \frac{(x-3)(x-3)}{2} \right\} \left\{ \frac{2}{3}(x-3) \right\} - (x-3)(6-x)(x-3)/2$$

$$N(x) = 0$$

La función de cortante por tratarse de una ecuación de segundo grado, implica que el diagrama corresponderá a una parábola de segundo grado.

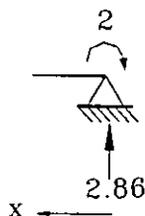
La función de momento por tratarse de una ecuación cúbica, implica que el diagrama corresponderá a una parábola de tercer grado.

Análisis de derecha a izquierda.

\*Observación importante.

Siempre se tendrá que anteponer un signo negativo en las ecuaciones de momento y cortante cuando se realice el análisis en este sentido.

$$0 \leq x < 1$$



$$V(x) = - (+2.86)$$

$$M(x) = - (+2 - 2.86x)$$

$$N(x) = 0$$

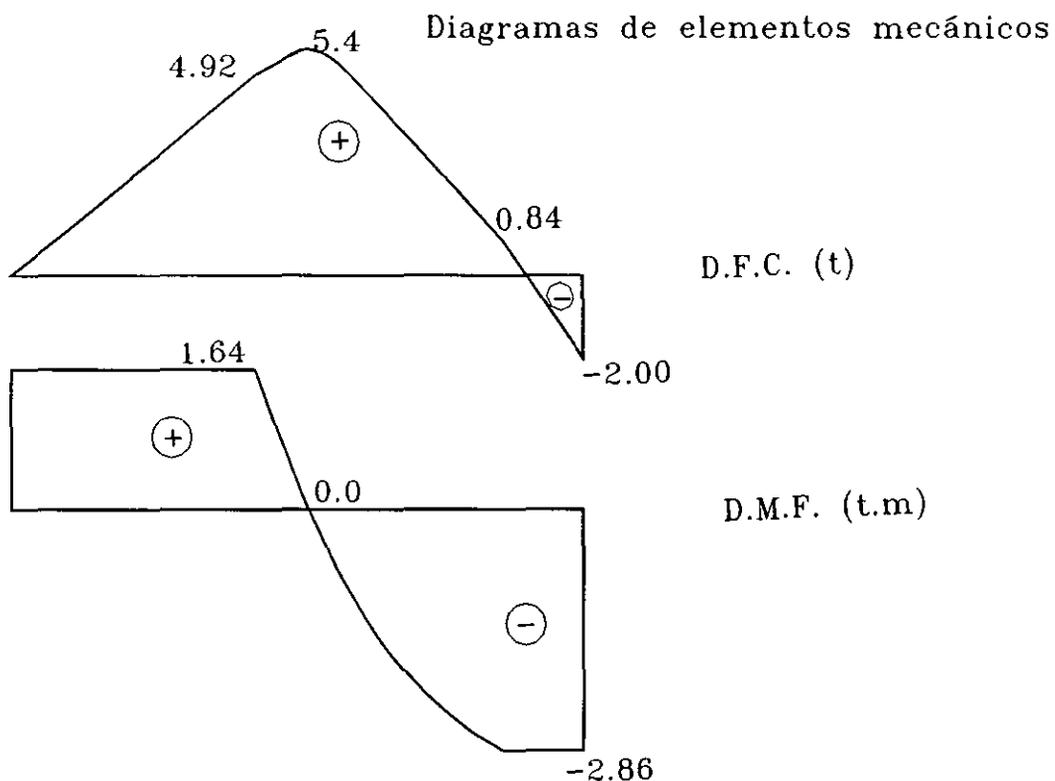
Sustituyendo para diferentes valores de "x" en las funciones de elementos mecánicos y graficando respectivamente se tiene:

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	x	V(x)	M(x)
$0 \leq x < 3$	0	1.64	0
	1	1.64	1.64
	2	1.64	3.28
	3	1.64	4.92
$3 \leq x < 6$ Mmax	3	1.64	+4.92
	3.5	0.265	+5.39
	3.6	0.0	+5.40
	3.7	-0.215	+5.39
	4	-0.86	+5.23
	5	-2.36	+3.53
	6	-2.86	+0.84

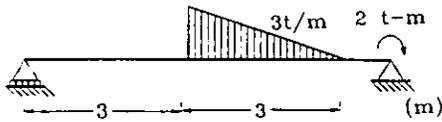
Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	x	V(x)	M(x)
$0 \leq x < 1$	0	-2.86	-2
	1	-2.86	0.84

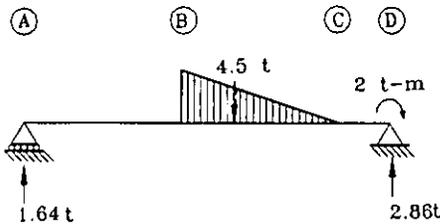


### Problema 2.14

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la siguiente estructura empleando el método de suma de áreas.



### Solución.



El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

Como se pudo observar en el método de ecuaciones, se presentará un cambio en los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes donde exista una variación en la carga. Por este motivo se tendrán que determinar los puntos de interés para el análisis.

### Ubicación de puntos de análisis.

Se escogerá como punto de análisis aquel donde exista una carga concentrada ( ya sea fuerza, reacción o momento) y en el inicio y final de una carga uniformemente distribuida sin importar su ley de variación.

Inspeccionando la estructura, en los puntos A, B, C y D existen cambios significativos en las cargas como se explica a continuación:

- |       |   |
|-------|---|
| B y C | Inicio y final de una carga triangular distribuida. |
| A y D | Cargas puntuales.                                   |
| D     | Momento concentrado.                                |

- Para obtener el diagrama de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, se realizará un análisis de fuerzas a la izquierda y derecha del punto en cuestión. El procedimiento se repetirá tantas veces como puntos de análisis existan.

### Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

#### *Intervalo A-B*

$$V_i = 1.64$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = 1.64 + 0 = 1.64$$

#### *Intervalo B-C*

$$V_i = V_{DAB} + F_B = 1.64 + 0 = 1.64$$

$$V_d = V_i + F_{BC} = 1.64 - 4.5 = -2.86$$

#### *Intervalo C-D*

$$V_i = V_{DBC} + F_C = -2.86 + 0 = -2.86$$

$$V_d = V_i + F_{CD} = -2.86 + 0 = -2.86$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo :

Carga triangularmente distribuida

Carga concentrada: Siempre propiciara un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada intervalo su área correspondiente.

Para obtener el área correspondiente al intervalo B-C se tendrá que integrar la ecuación de fuerza cortante obtenida en el ejemplo 2-13, debido a que se trata de una parábola de segundo grado que cruza el eje en un punto desconocido.

El área a evaluar se encuentra comprendida en el intervalo  $3 \leq x < 6$  pero se desconoce en que punto se presenta el momento máximo, por consiguiente es necesario igualar la ecuación de fuerza cortante a cero y despejar el valor de  $x$ .

$$V(x) = +1.64 - (x-3)(x-3)/2 - (x-3)(6-x) = 0 \quad x = 3.6m$$

El área total del intervalo se dividirá en dos áreas parciales por lo que se integrará la ecuación de fuerza cortante en los límites de 3m a 3.6m y de 3.6m a 6m.

$$\text{Area} = \int_3^{3.6} V(x) + \int_{3.6}^6 V(x)$$

$$\int_3^{3.6} V(x) = \int_3^{3.6} [1.64 - (x-3)(x-3)/2 - (x-3)(6-x)] dx = 0.48$$

$$\int_{3.6}^6 V(x) = \int_{3.6}^6 [1.64 - (x-3)(x-3)/2 - (x-3)(6-x)] dx = -4.56$$

La función de cortante por tratarse de una ecuación de segundo grado, implica que el diagrama corresponderá a una parábola de segundo grado.

Las áreas se calcularán de acuerdo al diagrama de fuerzas cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Areas.

Intervalo	A-B	B-B*	B* - C	C-D
Figura	Rectángulo	Parábola	Parábola	Rectángulo
Area	$3(+1.64) = +4.92$	+0.48	-4.56	$1(-2.86) = -2.86$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente:

$M_A$  = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_D$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

***Intervalo A-B***

$$M_i = M_A = 0$$

$$M_D = M_i + A_{A-B} = 0 + (4.92) = 4.92$$

***Intervalo B-B\****

$$M_i = M_{DAB} + M_B = 4.92 + 0 = 4.92$$

$$M_D = M_i + A_{B-B^*} = 4.92 + 0.48 = 5.4$$

***Intervalo B\*-C***

$$M_i = M_{DBB^*} + M_{B^*} = 5.4 + 0 = 5.4$$

$$M_D = M_i + A_{C-D} = 5.4 + (-4.56) = 0.84$$

***Intervalo C-D***

$$M_i = M_{DB^*C} + M_C = 0.84 + 0 = 0.84$$

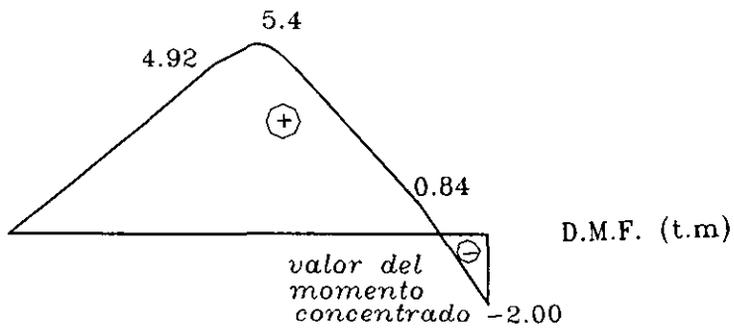
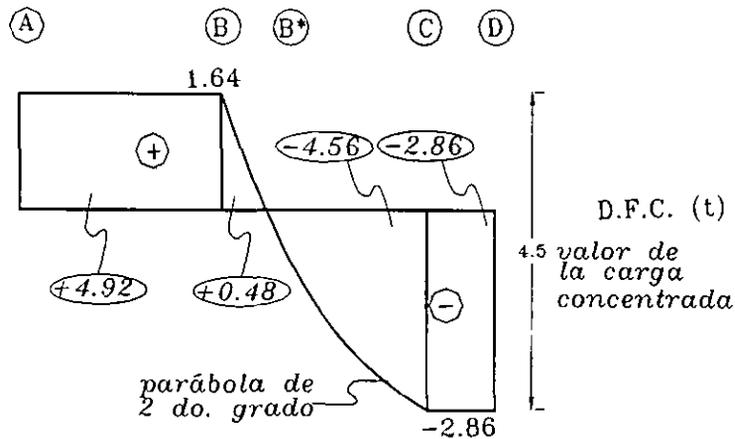
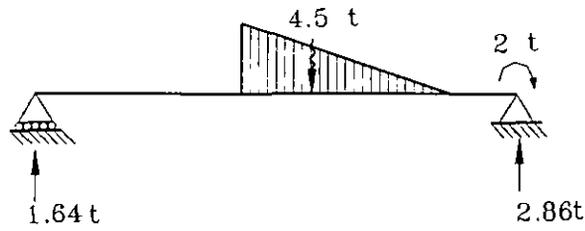
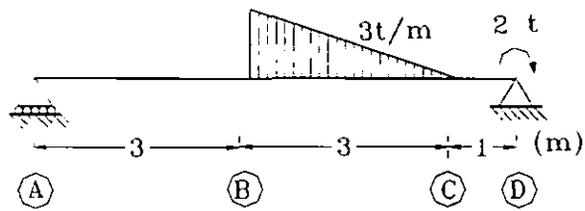
$$M_D = M_i + A_{C-D} = 0.84 + (-2.86) = -2.02$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

En el tramo B-C debido a la carga triangularmente repartida existirá una parábola de tercer grado.

A continuación se presentan los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes:



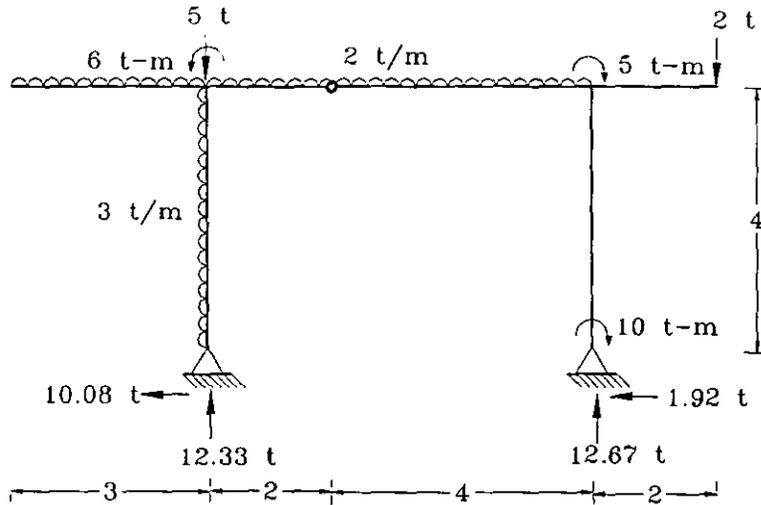
## IV.- ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS.

### PROBLEMAS RESUELTOS

Problema	3.1
Problema	3.2
Problema	3.3
Problema	3.4
Problema	3.5
Problema	3.6
Problema	3.7
Problema	3.8
Problema	3.9
Problema	3.10
Problema	3.11
Problema	3.12

### Problema 3.1

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución.

#### Cálculo de reacciones.

Las reacciones se obtuvieron de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

#### Definición de intervalos.

Los intervalos se definirán de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- En el caso de un marco será importante definir un intervalo donde dos barras con diferente dirección se intercepten.
- Donde inicie y finalice una carga uniformemente repartida no importando su ley de variación.
- Donde exista una fuerza concentrada ya sea carga o momento.

El análisis se realizará en dos direcciones por facilidad de cálculo.

Intervalos de izquierda a derecha.

$0 \leq x < 3$  (Barra horizontal)

$3 \leq x < 9$

$0 \leq x < 4$  (Barra vertical)

$0 \leq x < 4$  (Barra vertical)

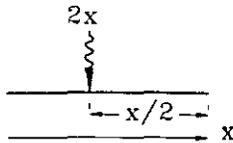
Intervalos de derecha a izquierda.

$0 \leq x < 2$  (Barra horizontal)

#### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

$0 \leq x < 3$

(barra horizontal)



La carga uniformemente distribuida que actúa en este intervalo se sustituye por una equivalente concentrada en función de  $x$ .

$$V(x) = -2x$$

$$M(x) = -2x(x/2)$$

$$N(x) = 0$$

$$0 \leq x < 4$$

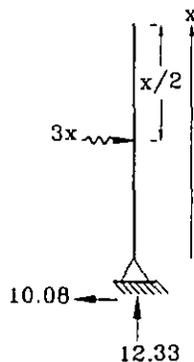
(barra vertical)

En este intervalo los ejes locales se ubicarán sobre la barra vertical con origen en el extremo inferior y la carga uniformemente repartida se sustituye por una concentrada en función de  $x$ .

$$V(x) = +10.08 - 3x$$

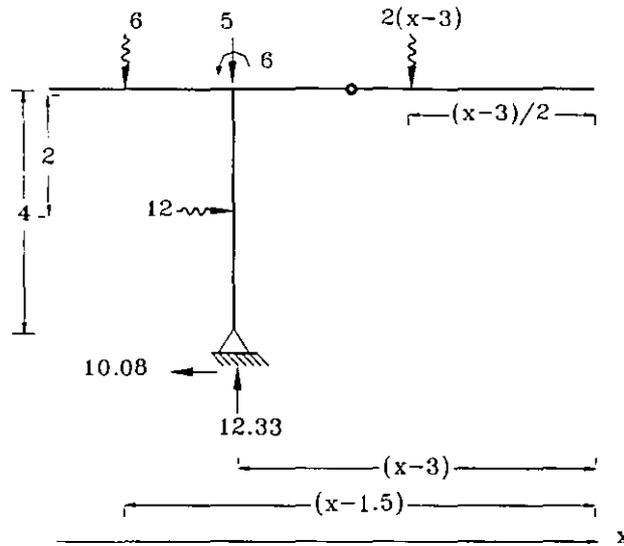
$$M(x) = +10.08x - 3x(x/2)$$

$$N(x) = -12.33 \text{ (compresión)}$$



$$3 \leq x < 9$$

En este caso para plantear la función de momento flexionante, únicamente se considerarán los brazos de palanca en función de  $x$  cuando coincidan con la dirección  $x$  de los ejes locales, a diferencia de los brazos de palanca perpendiculares al eje  $x$  que se multiplicarán por la fuerza sin involucrar la variable  $x$ .



$$V(x) = -6 + 12.33 - 5 - 2(x-3)$$

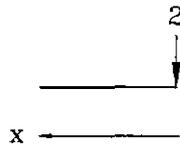
$$M(x) = +12.33(x-3) - 12(2) - 6(x-1.5) - 5(x-3) - 6 - 2(x-3)(x-3)/2 + 10.08(4)$$

$$N(x) = -10.08 + 12 = +1.92 \text{ (efecto de compresión)}$$

Resolviendo la estructura de derecha a izquierda.

Es necesario anteponer un signo negativo a la ecuaciones de elementos mecánicos cuando se realiza el análisis en esta dirección.

$0 \leq x < 2$   
(barra horizontal)

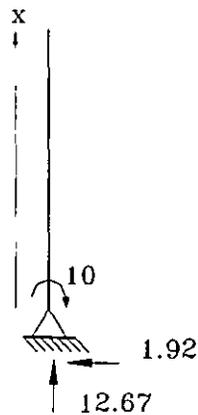


$$V(x) = -(-2)$$

$$M(x) = -(+2x)$$

$$N(x) = 0$$

$0 \leq x < 4$  En ejes locales de la barra.  
(barra vertical)



$V(x) = +1.92$   
 $M(x) = +10 + 1.92x$   
 $N(x) = 12.67$  (efecto de compresión)

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
$0 \leq x < 3$ barra horizontal	0	0	0	0
	1	-2	-1	0
	3	-4	-4	0
	2	-6	-9	0
$0 \leq x < 4$ barra vertical	0	+10.08	0	-12.33
	1	+7.08	+8.58	-12.33
	2	+4.08	+14.16	-12.33
	3	+1.08	+16.74	-12.33
	4	-1.92	+16.32	-12.33
$3 \leq x < 9$	3	+1.33	+1.32	-1.92
	4	-.067	+1.65	-1.92
	5	-2.67	0.0	-1.92
	6	-4.67	-3.69	-1.92
	7	-6.67	-9.36	-1.92
	8	-8.67	-17.03	-1.92
	9	-10.67	-26.7	-1.92

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 2 barra horizontal	0	+2	0	0
	1	+2	-2	0
	2	+2	-4	0
0 ≤ x < 4 barra vertical	0	+1.92	+10	+12.67
	2	+1.92	+13.84	+12.67
	4	+1.92	+17.68	+12.67

A continuación se presentan los diagramas de elementos mecánicos:

Diagrama de fuerzas cortantes

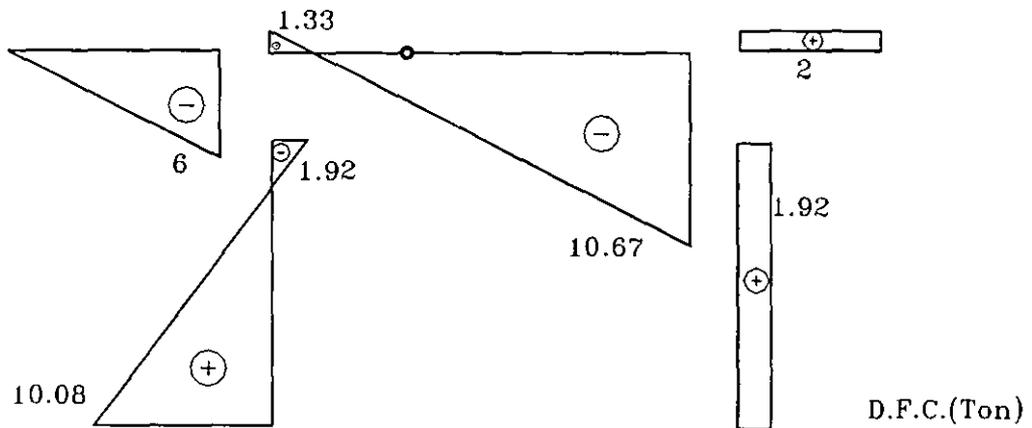


Diagrama de momentos flexionantes

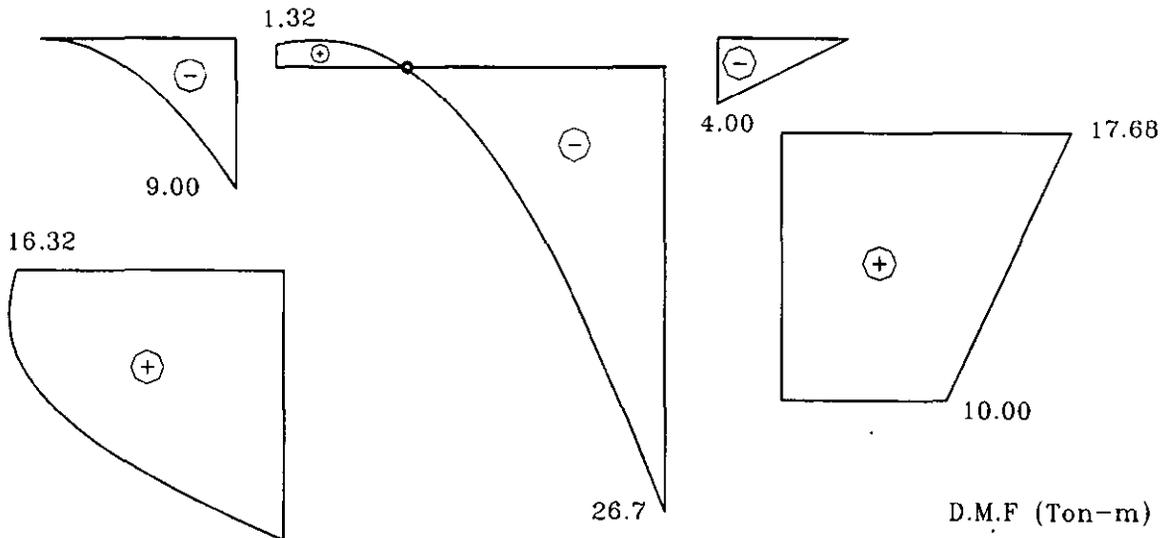
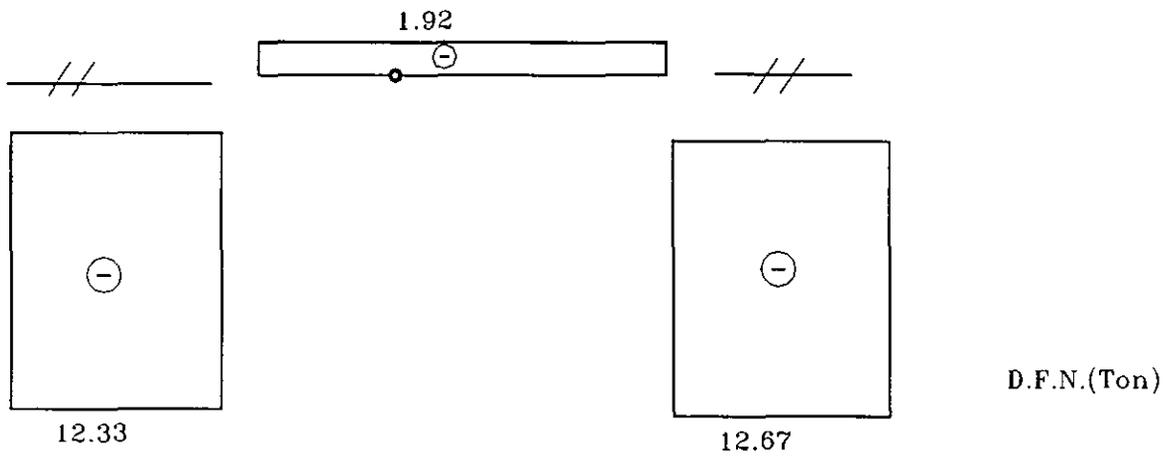
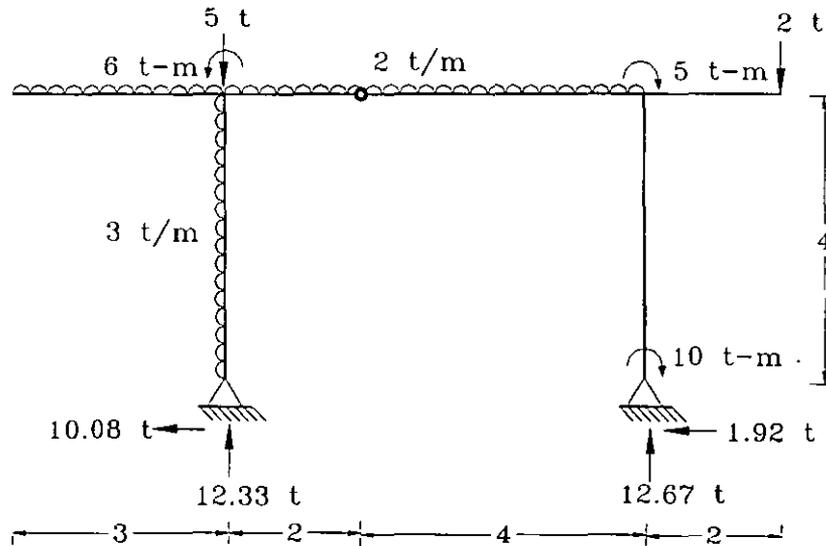


Diagrama de fuerzas normales



### Problema 3.2

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco empleando el método de suma de áreas.



Solución.

Cálculo de reacciones y definición de barras y nudos.

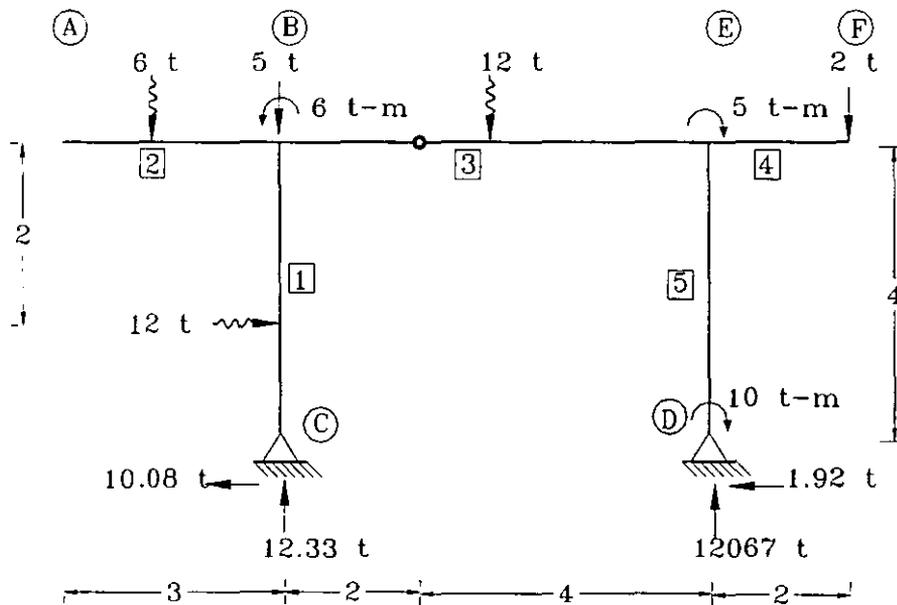




Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha de la estructura.

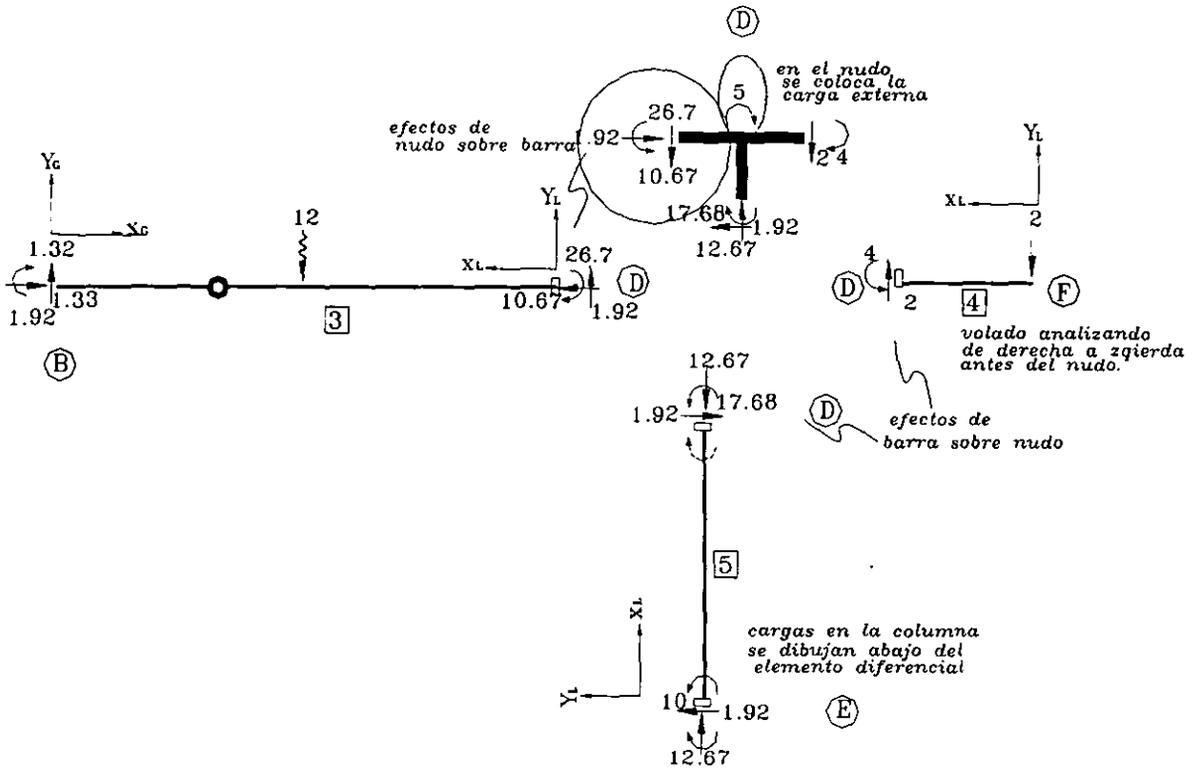


Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

**Barra 1 (C-B)**

$V_i = 10.08$   
 $V_d = V_i + F_{CB} = 10.08 - 12 = -1.92$

**Barra 2 (A-B)**

$V_i = 0$   
 $V_d = V_i + F_{AB} = 0 - 6 = -6$

**Barra 3 (B-D) efectos de nudo sobre barra**

$V_i = 1.33$   
 $V_d = V_i + F_{BD} = 1.33 - 12 = -10.67$

**Barra 4 (F-D) cambio de signo análisis de derecha a izquierda**

$V_i = -(-2) = +2$   
 $V_d = V_i + F_{FD} = +2 + 0 = +2$

### Barra5 (E-D)

$$V_I = +1.92$$

$$V_D = +1.92 + 0 = +1.92$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada intervalo de este:

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciara un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

**Sin carga :** La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

### Areas.

Para obtener el área correspondiente a los tramos donde se existan cargas uniformemente distribuidas se realizará el procedimiento mostrado en el problema 2.5, utilizando el diagrama de fuerzas cortantes para obtener los triángulos semejantes y sus respectivas dimensiones.

*Barra 1*

$$X_1 = 10.08(4)/(10.08+1.92)=3.36$$

$$X_2 = 1.92(4)/(10.08+1.92) = 0.64$$

*Barra 3*

$$X_1 = 1.33(6)/(1.33+10.67)=0.665$$

$$X_2 = 10.67(6)/(1.33+10.67) = 5.335$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Intervalo	<i>Barra 1(C-C*)</i>	<i>Barra 1(C*-B)</i>	<i>Barra2(A-B)</i>
Figura	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo
Area	$+10.08(3.36)/2=16.93$	$0.64(-1.92)/2= -0.614$	$3(-6)/2 = -9$

Intervalo	<i>Barra 3(B-B*)</i>	<i>Barra 3(B*-D)</i>	<i>Barra 4(F-D)</i>	<i>Barra 5(E-D)</i>
Figura	Triángulo 1	Triángulo 2	Rectángulo	Rectángulo
Area	$+0.665(1.33)/2=0.442$	$5.33(-10.67)/2=-28.46$	$2(+2)=4$	$4(+1.92)=+7.68$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A$  = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_{AD}$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

**Barra 1 (C-C\*)**

$$M_I = M_C = 0$$

$$M_D = M_I + A_{CC^*} = 0 + 16.93 = 16.93$$

**Barra 1 (C\*-B)**

$$M_I = M_{DCC^*} + M_{C^*} = 16.93 + 0 = 16.93$$

$$M_D = M_I + A_{C^*B} = 16.93 - 0.614 = 16.31$$

**Barra 2 (A-B)**

$$M_I = M_A = 0$$

$$M_D = M_I + A_{A-B} = 0 - 9 = -9$$

**Barra 4 (F-D)**

$$M_I = M_F = 0$$

$$M_D = M_I + A_{F-D} = 0 + 4 = 4$$

**Barra 3 (B-B\*)**

$$M_I = M_B = 1.32$$

$$M_D = M_I + A_{B-B^*} = 1.32 + 0.442 = 1.762$$

**Barra 3 (B\*-D)**

$$M_I = M_{DBB^*} + M_{B^*} = 1.762 + 0 = 1.762$$

$$M_D = M_I + A_{B^*D} = 1.762 + (-28.46) = -26.7$$

**Barra 5 (E-D)**

$$M_I = M_E = 10$$

$$M_D = M_I + A_{E-D} = 10 + 7.68 = 17.68$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

En el tramo C-B, A-B y B-D debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado. A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.

A continuación se presentan los diagramas de fuerzas cortantes, momentos flexionantes y fuerzas axiales además de las áreas correspondientes para el cálculo de los momentos flexionantes.

Diagrama de fuerzas cortantes.

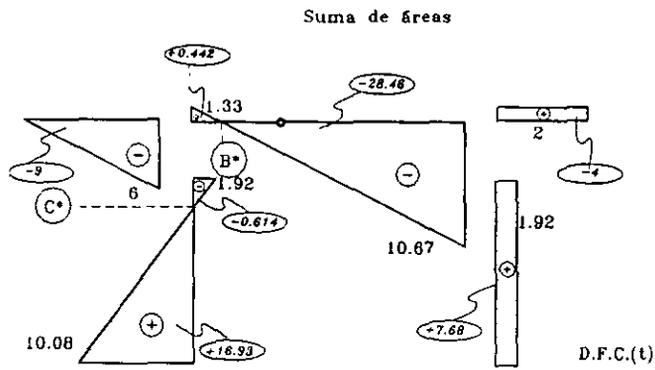


Diagrama de fuerzas axiales.

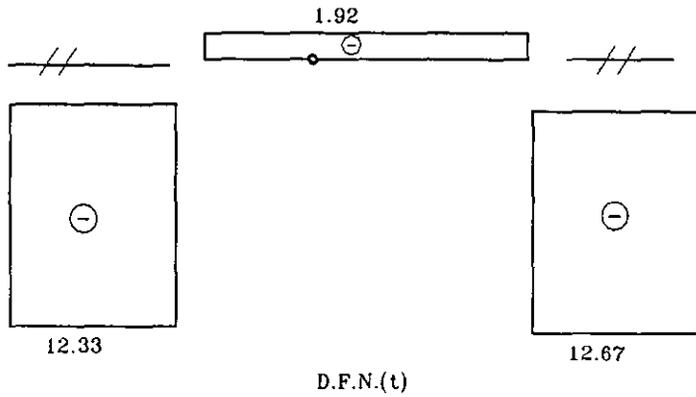
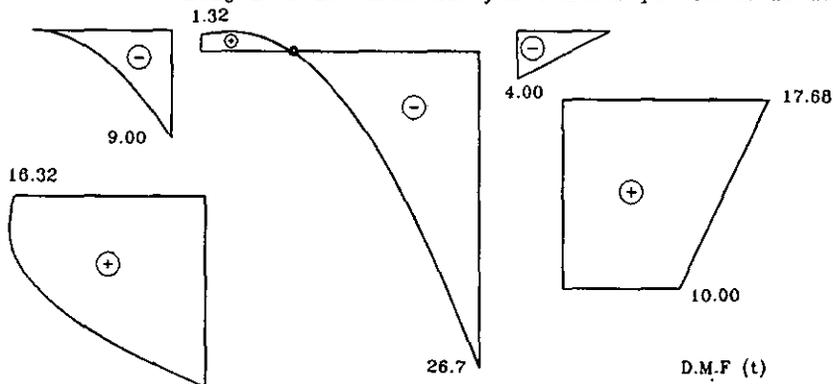
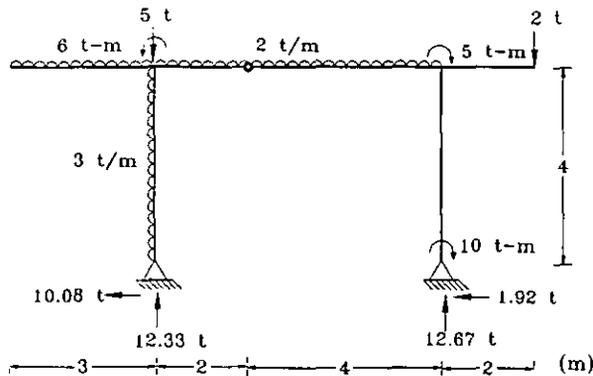


Diagrama de momentos flexionantes por suma de áreas.



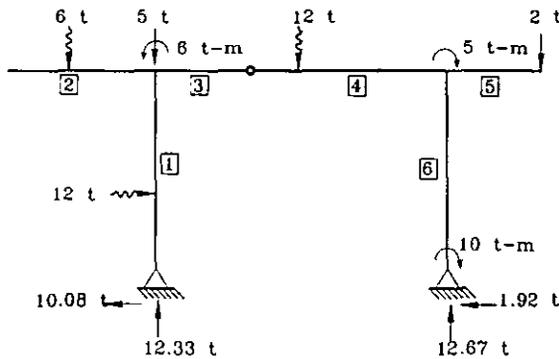
### Problema 3.3

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

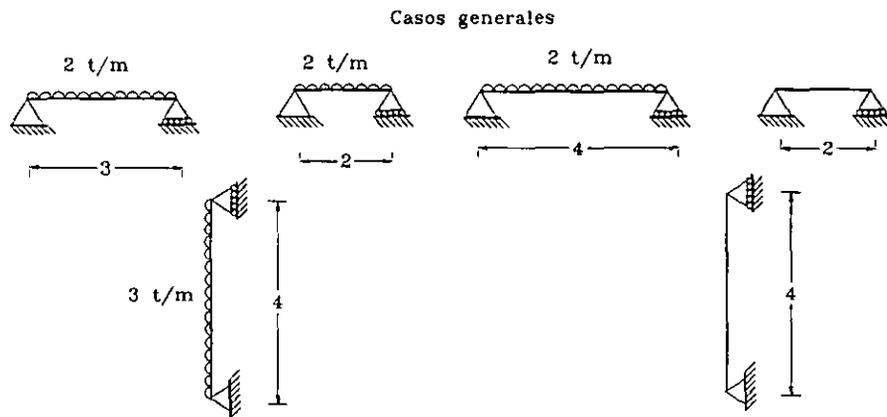
Se obtendrán dos tipos de diagramas para momentos y cortantes, los primeros debido a cargas sobre las barras y los segundos debidos a momentos flexionantes en los extremos de dichas barras.

Finalmente se graficarán los diagramas tomando en cuenta ciertas consideraciones para poder superponer los efectos de las cargas sobre las barras y los momentos flexionantes en los extremos de estas.

## Elección de intervalos o vigas simplemente apoyadas.

Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura. El marco se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de tres casos generales que se han estado manejando en los problemas anteriores de superposición.

## Definición de vigas simplemente apoyadas (casos generales), cálculo de diagramas de momentos y cortantes.



*Diagramas de momentos debido a los casos generales.*

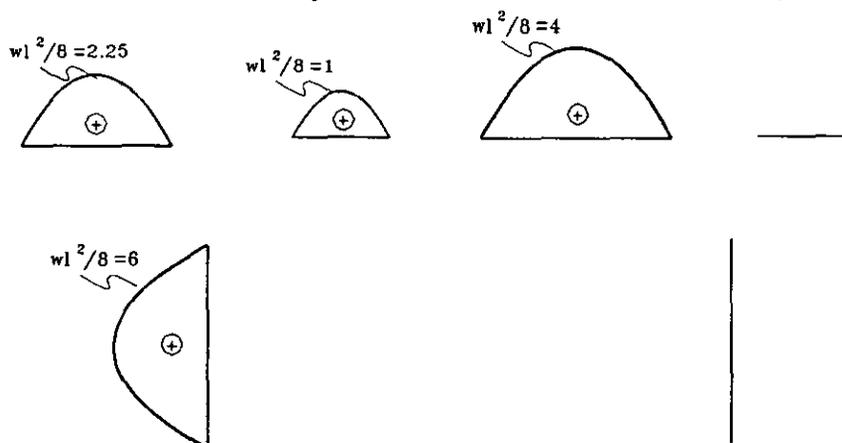
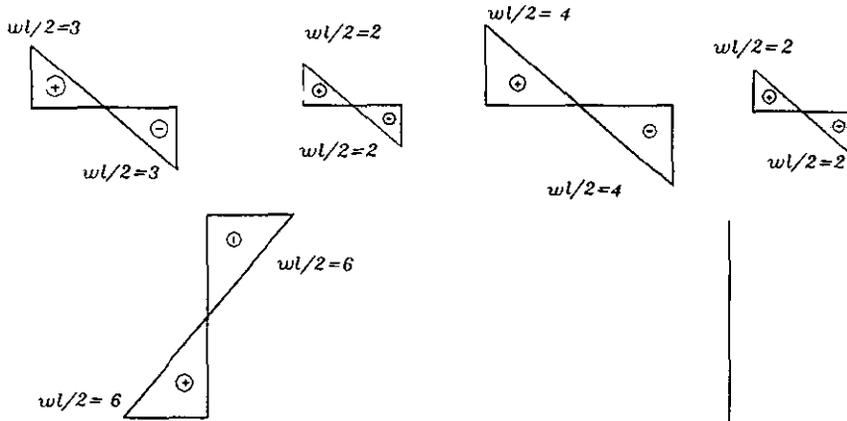


Diagrama de cortantes debido a los casos generales.



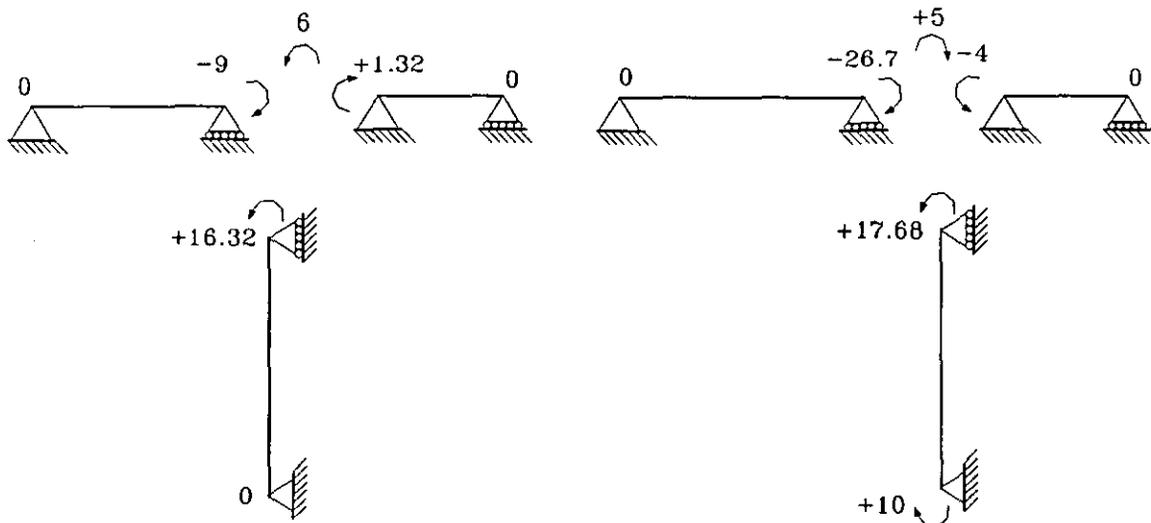
Para resolver el problema se dividió la viga en seis vigas simplemente apoyadas, se pudo coincidir con el caso general de la carga uniformemente repartida .

Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

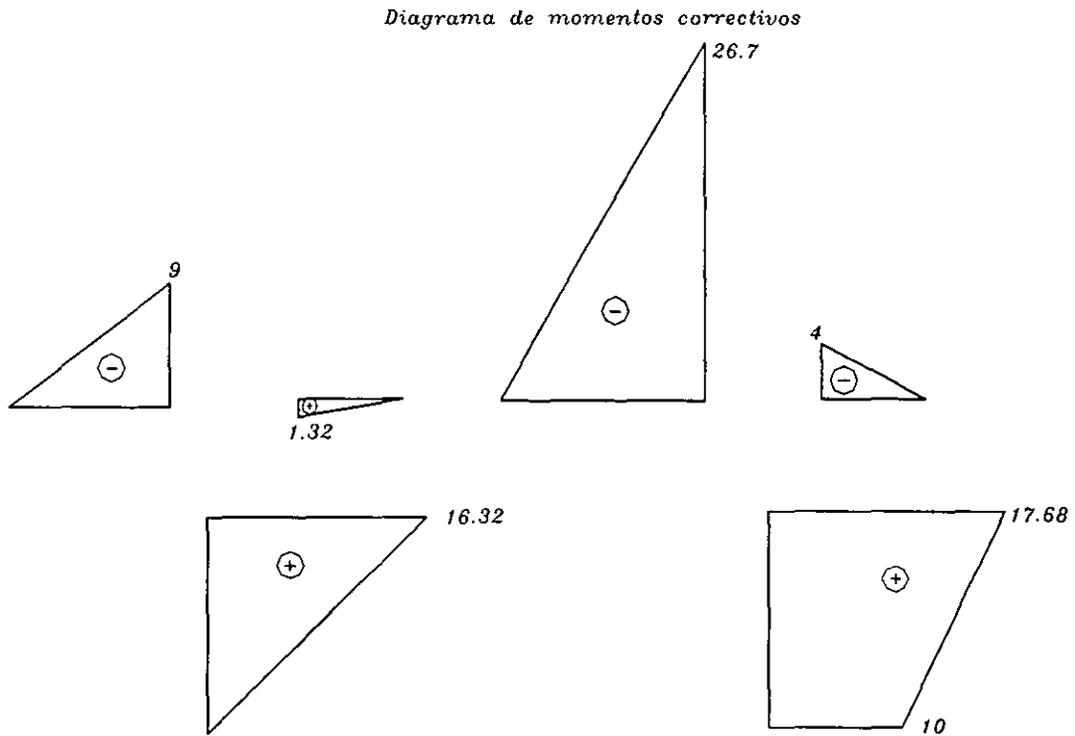
El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas.

El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.

Momentos flexionantes en los extremos de la barras



A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos correctivos, los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:

*Cortante correctivo*

Diagrama de un elemento de longitud  $L$  con momentos  $M_i(+)$  y  $M_d(-)$  en sus extremos y fuerzas cortantes  $V$  en los apoyos.

$$\sum M_A = 0$$

$$+VL + M_i - M_d = 0$$

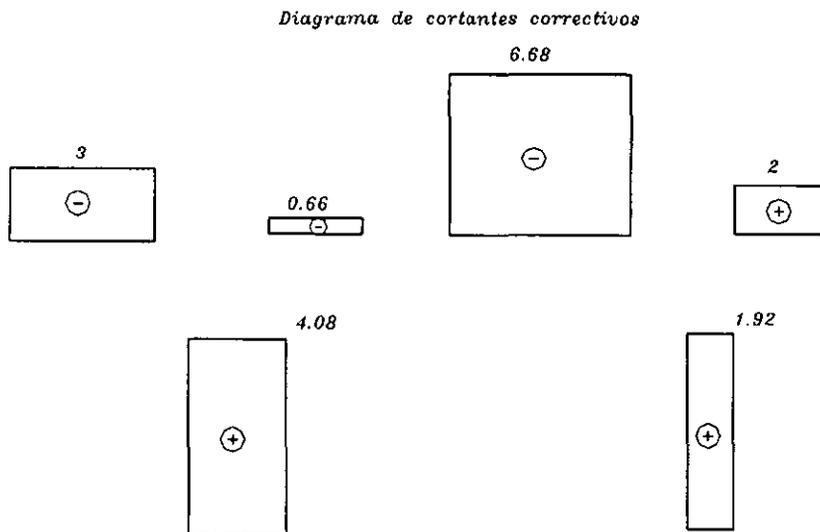
$$\boxed{V = \frac{M_d - M_i}{L}}$$

Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

$$V_1 = [+16.32 - 0]/4 = 4.08 \quad V_3 = [0 - (+1.32)]/2 = -0.66 \quad V_5 = [0 - (-4)]/2 = +2$$

$$V_2 = [-9 - 0]/3 = -3 \quad V_4 = [-26 - 0]/4 = -6.68 \quad V_6 = [17.68 - 10]/4 = +1.92$$

Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.



### Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.

Diagrama de momentos flexionantes

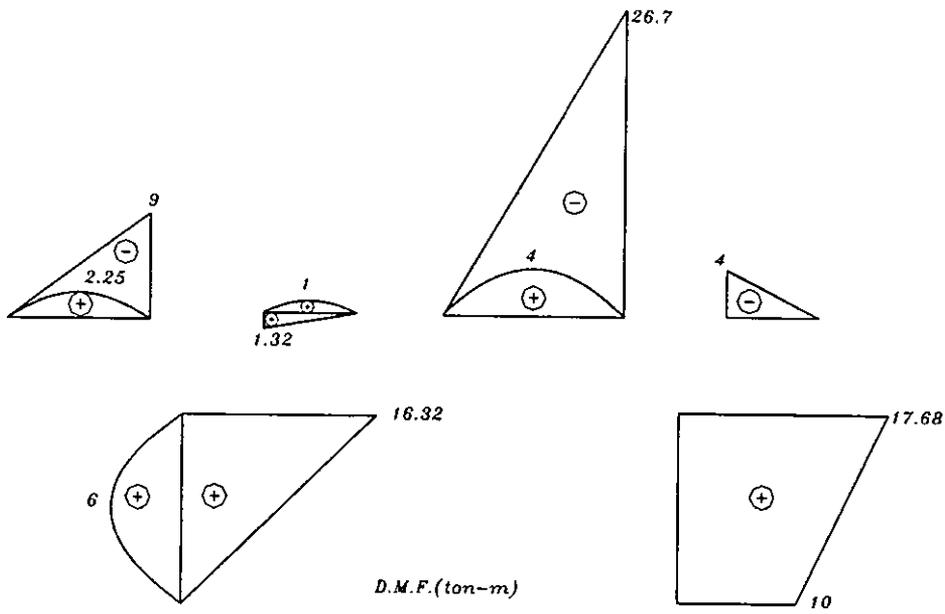
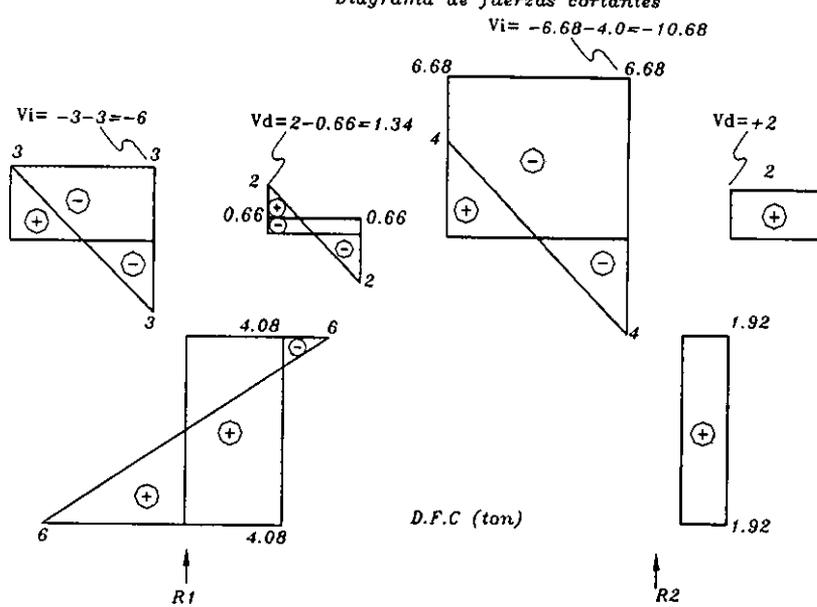


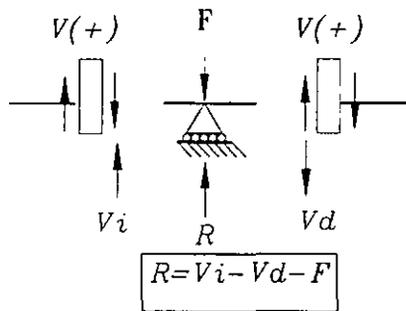
Diagrama de fuerzas cortantes



### Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:

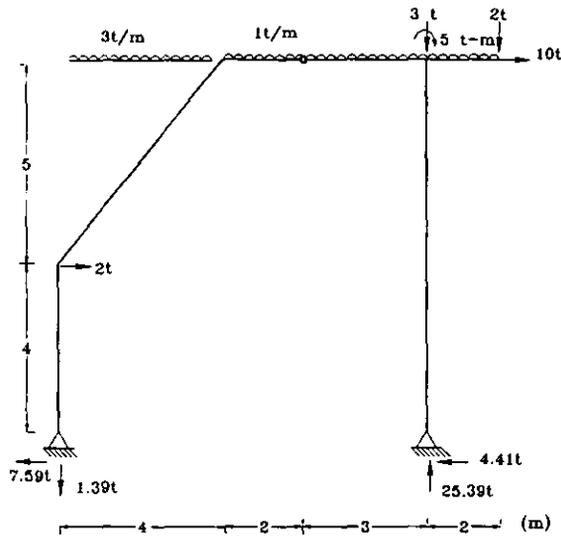


$$R_1 = 1.34 - (-6) - (-5) = 12.34$$

$$R_2 = +2 - (-10.68) = 12.68$$

### Problema 3.4

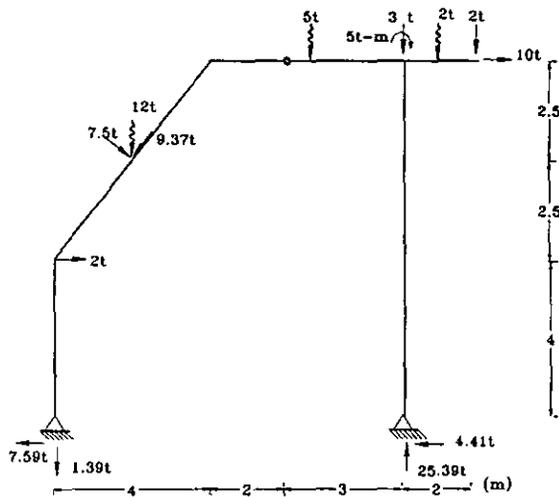
Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución.

#### Cálculo de reacciones.

Las reacciones se obtuvieron de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



#### Definición de intervalos.

Los intervalos se definirán de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- En el caso de un marco será importante definir un intervalo donde dos barras con diferente dirección se intercepten.
- Donde inicie y finalice una carga uniformemente repartida no importando su ley de variación.
- Donde exista una fuerza concentrada ya sea carga o momento.

El análisis se realizará en dos direcciones por facilidad de cálculo.

Intervalos de izquierda a derecha.

$0 \leq x < 4$  (Barra vertical)

$0 \leq x < 6.41$  (Barra inclinada)

$0 \leq x < 9$  (Barra vertical)

Intervalos de derecha a izquierda.

$0 \leq x < 2$  (Barra horizontal)

$2 \leq x < 7$  (Barra horizontal)

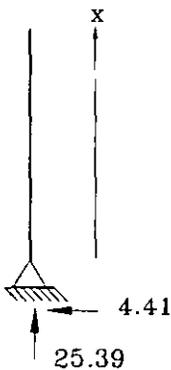
### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de derecha a izquierda (será necesario anteponer un signo negativo a las funciones de elementos mecánicos).

$0 \leq x < 9$

(Barra vertical)

En este intervalo los ejes locales se ubicarán sobre la barra vertical, con el origen en el extremo inferior.



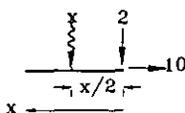
$$V(x) = 4.41$$

$$M(x) = 4.41x$$

$$N(x) = +25.39 \text{ (efecto de compresión)}$$

$0 \leq x < 2$

(Barra horizontal)



La carga uniformemente distribuida que actúa en este intervalo se sustituye por una resultante concentrada en función de  $x$ .

En este intervalo los ejes locales se ubicarán sobre la barra horizontal

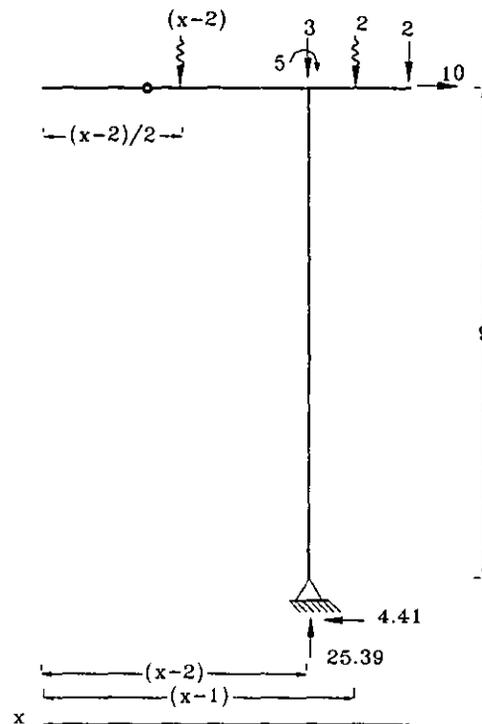
$$V(x) = -(-2 - x)$$

$$M(x) = -\{2x + x(x/2)\}$$

$$N(x) = -(-10)$$

$$2 \leq x < 7$$

(Barra horizontal)



En este caso para plantear la función de momento flexionante, únicamente se considerarán los brazos de palanca en función de  $x$  cuando coincidan con la dirección  $x$  de los ejes locales, a diferencia de los brazos de palanca perpendiculares al eje  $x$  que se multiplicarán por la fuerza sin involucrar la variable  $x$ .

$$V(x) = -\{-2 - 2 + 25.39 - 3 - (x-2)\}$$

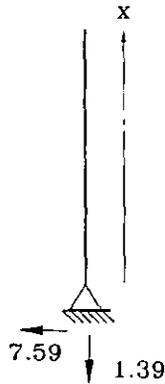
$$M(x) = -\{2x + 2(x-1) + 3(x-2) - 25.39(x-2) + 5 + (x-2)(x-2)/2 + 4.41(9)\}$$

$$N(x) = -(-10 + 4.41)$$

Análisis de izquierda a derecha

$$0 \leq x < 4$$

(Barra vertical)

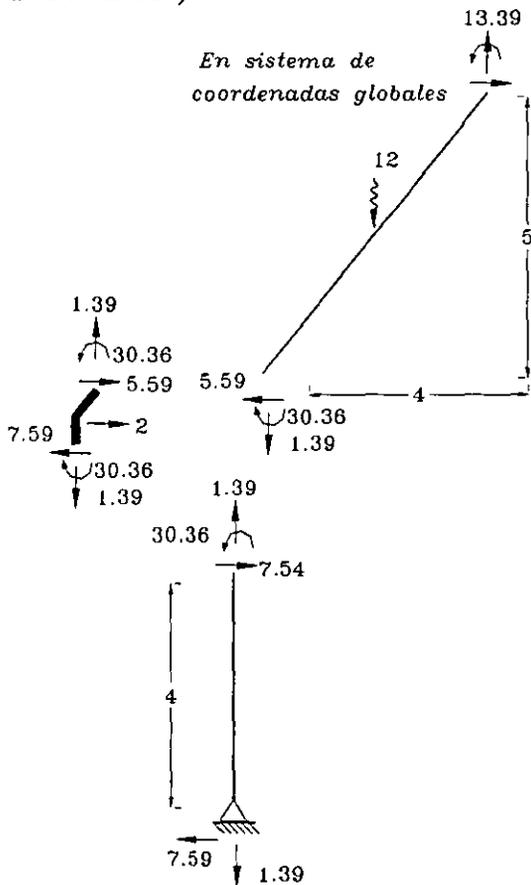


$$V(x) = +7.59$$

$$M(x) = +7.59x$$

$$N(x) = -1.39 \text{ (efecto de tensión)}$$

$0 \leq x < 6.41$   
(Barra inclinada)

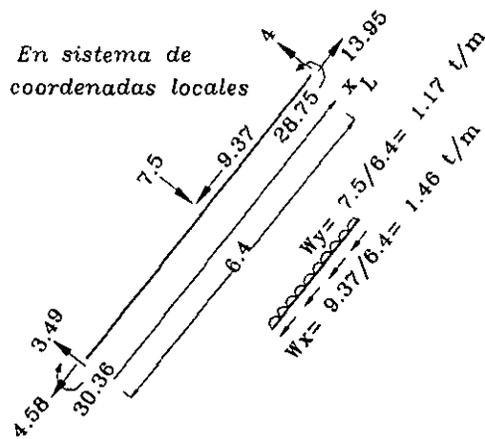


MATRIZ DE TRANSFORMACIONES  
DE COORD. GLOBALES A LOCALES

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad \text{coord. globales}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.78 \\ -0.78 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.59 & 0 \\ 1.39 & 13.39 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.58 & -9.37 \\ 3.49 & -7.49 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13.95 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \text{coord. locales}$$



$$V(x) = 3.49 - W_y (xL) = 3.49 - 1.17 xL$$

$$M(x) = 30.36 + 3.49 xL - W_y (xL) (xL/2) = 30.36 + 3.49 xL - 1.17 xL (xL/2)$$

$$N(x) = -4.58 - W_x (xL) = -4.58 - 1.46 (xL)$$

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 4 barra vertical	0	+7.57	0	+1.39
	1	+7.57	+7.57	+1.39
	3	+7.57	+15.14	+1.39
	2	+7.57	+22.71	+1.39
	4	+7.57	+30.28	+1.39
0 ≤ x < 6.41 barra inclinada	0	+3.49	+3.028	-4.58
	1	+2.32	+33.26	-6.04
	2	+1.15	+34.98	-7.5
	3	-0.02	+35.52	-8.96
	4	-1.19	+34.88	-10.42
	5	-2.36	+33.06	-11.88
	6.41	-4.01	+28.76	-13.94

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 9 barra vertical	0	+4.41	0	-25.39
	1	+4.41	+4.4	-25.39
	2	+4.41	+8.82	-25.39
	3	+4.41	+13.23	-25.39
	4	+4.41	+17.64	-25.39
	5	+4.41	+22.05	-25.39
	6	+4.41	+26.46	-25.39
	7	+4.41	+30.87	-25.39
	8	+4.41	+35.28	-25.39
9	+4.41	+39.69	-25.39	
0 ≤ x < 2 barra horizontal	0	-2	0	+10
	1	-3	-2.5	+10
	2	-4	-6	+10
2 ≤ x < 7 barra horizontal	2	-18.39	-50.69	+6
	3	-17.39	-32.8	+6
	4	-16.39	-15.91	+6
	5	-15.39	0	+6
	6	-14.39	+14.87	+6
	7	-13.39	+28.76	+6

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerzas cortantes.

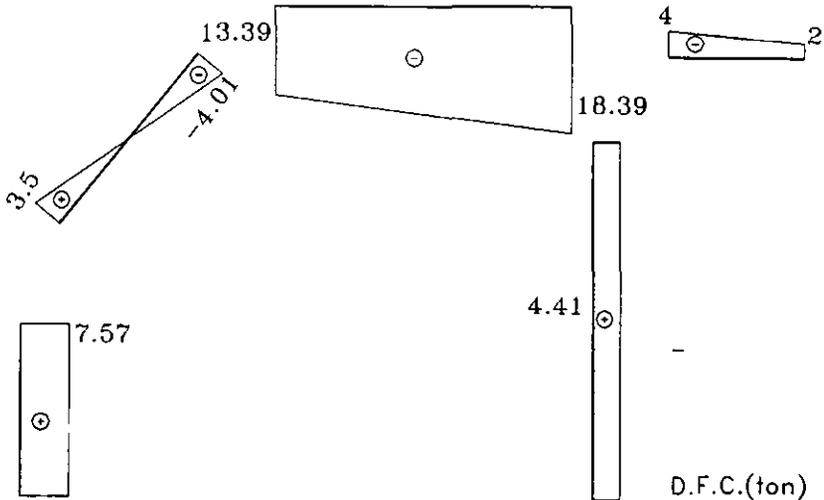
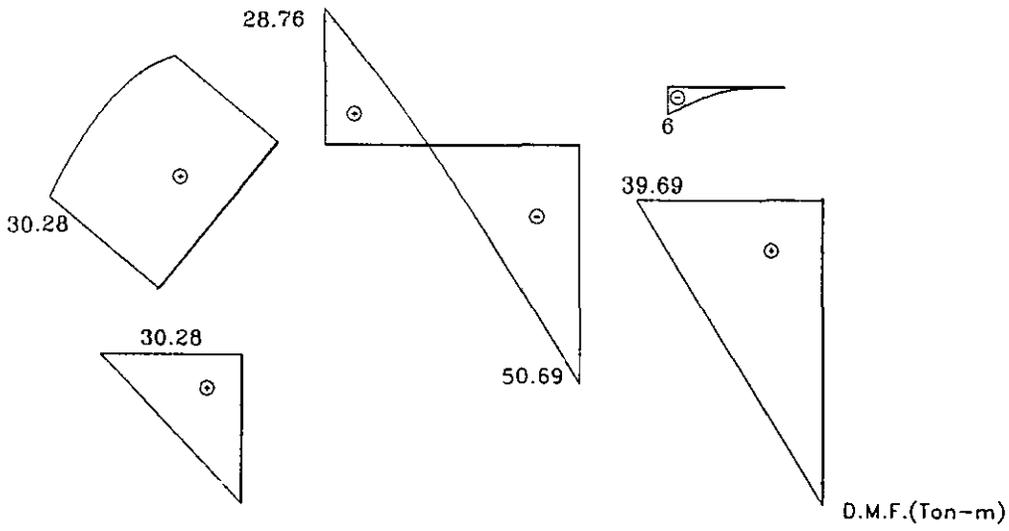
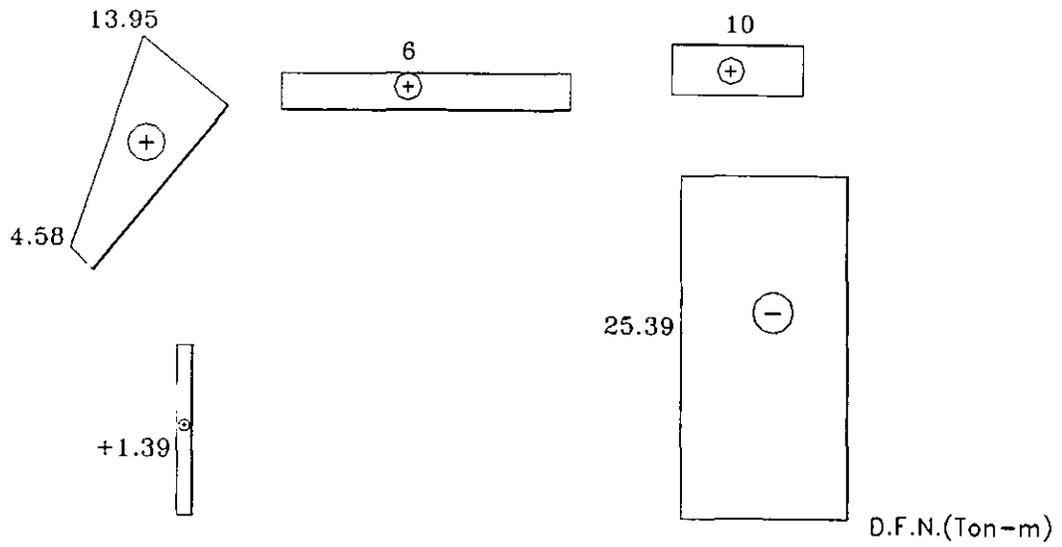


Diagrama de momentos flexionantes.

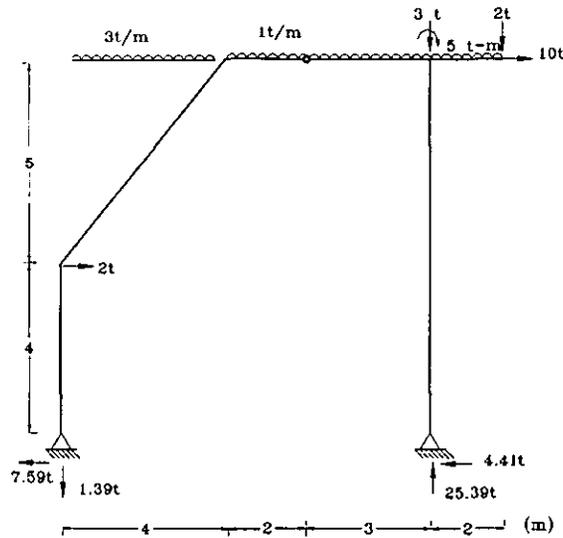


# Diagrama de fuerzas normales



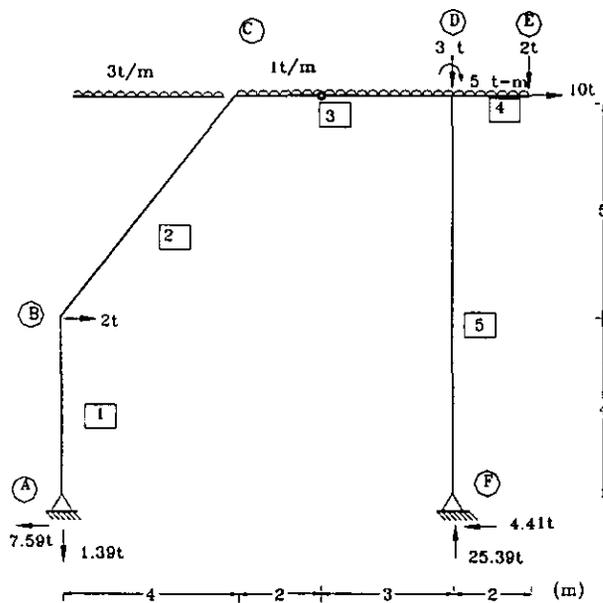
### Problema 3.5

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco empleando el método de suma de áreas.



Solución.

Cálculo de reacciones y definición de barras y nudos.



El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



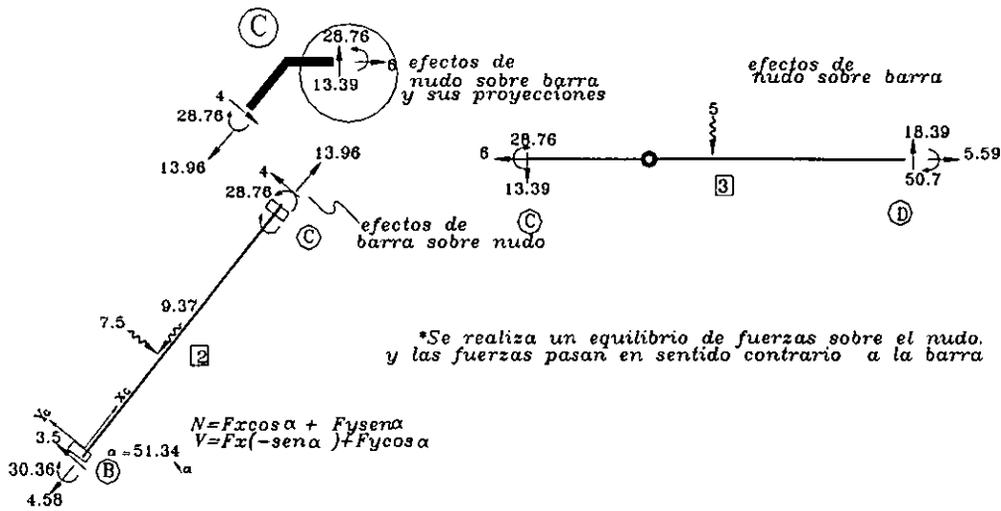
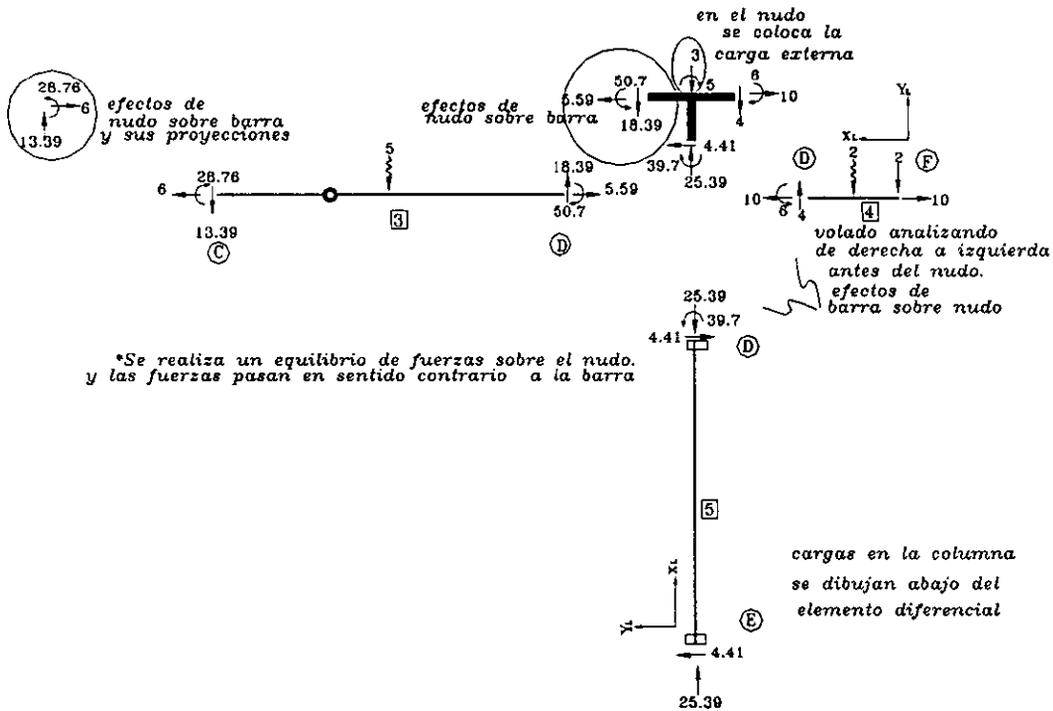


Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha y central de la estructura.



Los efectos de una barra (Fuerzas equilibrantes) pasarán al nudo con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Los efectos de un nudo sobre una barra pasarán a la barra con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Para obtener los elementos mecánicos se realizará una sumatoria de fuerzas paralelas en el sentido de la barra para el efecto de axial, se realizará una sumatoria de fuerzas perpendiculares al eje de la barra para el efecto de cortante y para obtener el momento se realizará una sumatoria de momentos cortando antes del nudo considerado.

Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

***Barra 1( A-B)***

$$V_i = 7.59$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = 7.59 + 0 = 7.59$$

***Barra 2( B-C)***

$$V_i = V_{DAB} + F_B = 7.59 - 2 = +5.59 \text{ (coord. globales)}$$

$$= +3.5 \text{ (coord. locales)}$$

$$V_d = V_i + F_{BC} = 3.5 - 7.5 = -4 \text{ (coord. locales)}$$

***Barra 3( C-D)por equilibrio de fzas. en el nudo C***

$$V_i = V_{DBC} + F_C = -13.39 + 0 = -13.39$$

$$V_d = V_i + F_{CD} = -13.39 - 5 = -18.39$$

***Barra 4( D-E)de izq. a der.***

$$V_i = F_D = -(-2) = +2$$

$$V_d = V_i + F_{DE} = -(-2 - 2) = 4$$

***Barra 5( E-D)por equilibrio de fzas. en el nudo D***

$$V_i = + F_E = +4.41 = +4.41$$

$$V_d = V_i + F_{ED} = +4.41 + 0 = +4.41$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

**Carga uniformemente distribuida:** El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

**Carga concentrada:** Siempre propiciara un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

**Sin carga :** La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

### Areas.

Para obtener el área correspondiente a los tramos donde se existan cargas uniformemente distribuidas se realizará el procedimiento mostrado en el problema 2.5, utilizando el diagrama de fuerzas cortantes para obtener los triángulos semejantes y sus respectivas dimensiones.

### *Barra2*

$$X_1 = 3.5(6.4)/(3.5+4)=2.99$$

$$X_2 = 4(6.4)/(3.5+4) =3.41$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Intrevalo	<i>Barra 1(A-B)</i>	<i>Barra2(B-B*)</i>	<i>Barra2(B*-C)</i>
Figura	Rectángulo	Triángulo	Triángulo
Area	$4(+7.59)=+30.36$	$2.99(+3.5)/2 =+5.23$	$3.41(-4)/2 =-6.82$

Intervalo	<i>Barra 3(C-D)</i>	<i>Barra 4(F-D)</i>	<i>Barra 5(E-D)</i>
Figura	Trapezio	Trapezio	Rectángulo
Area	$(-13.39-18.39)5/2=-79.45$	$(+4+2)2/2=6$	$9(+4.41)=+39.69$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A$  = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_{AD}$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

***Barra 1 (A-B)***

$$M_i = M_A = 0$$

$$M_D = M_i + A_{A-B} = 0 + 30.36 = 30.36$$

***Barra 2 (B-B\*)***

$$M_i = M_{DAB} + M_B = 30.36 + 0 = +30.36$$

$$M_D = M_i + A_{B-B^*} = 30.36 + 5.23 = 35.59$$

***Barra 2 (B\*-C)***

$$M_i = M_{DBB^*} + M_{B^*} = 35.59 + 0 = +35.59$$

$$M_D = M_i + A_{B^*-C} = 35.59 + (-6.82) = 28.77$$

***Barra 3 (C-D)***

$$M_i = M_{DB^*C} + M_C = 28.77 + 0 = 28.77$$

$$M_D = M_i + A_{C-D} = 28.77 - 79.45 = -50.68$$

***Barra 4 (F-D)***

$$M_i = M_F = 0$$

$$M_D = M_i + A_{F-D} = 0 + 6 = 6$$

***Barra 5 (E-D)***

$$M_i = M_E = 0$$

$$M_D = M_i + A_{E-D} = 0 + 39.69 = +39.69$$

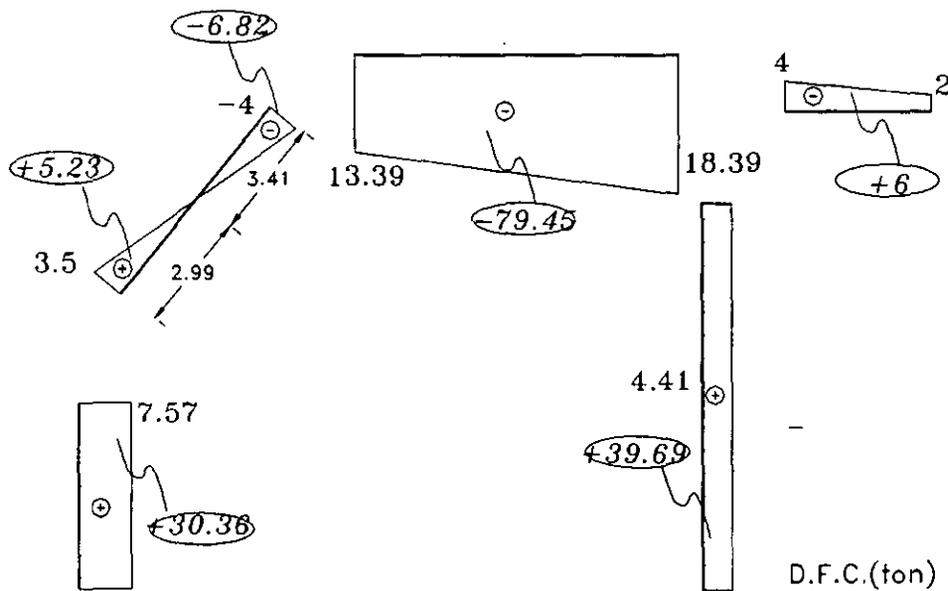
Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra.

En el tramo C-B, D-F y C-D debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado. A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerzas cortantes.



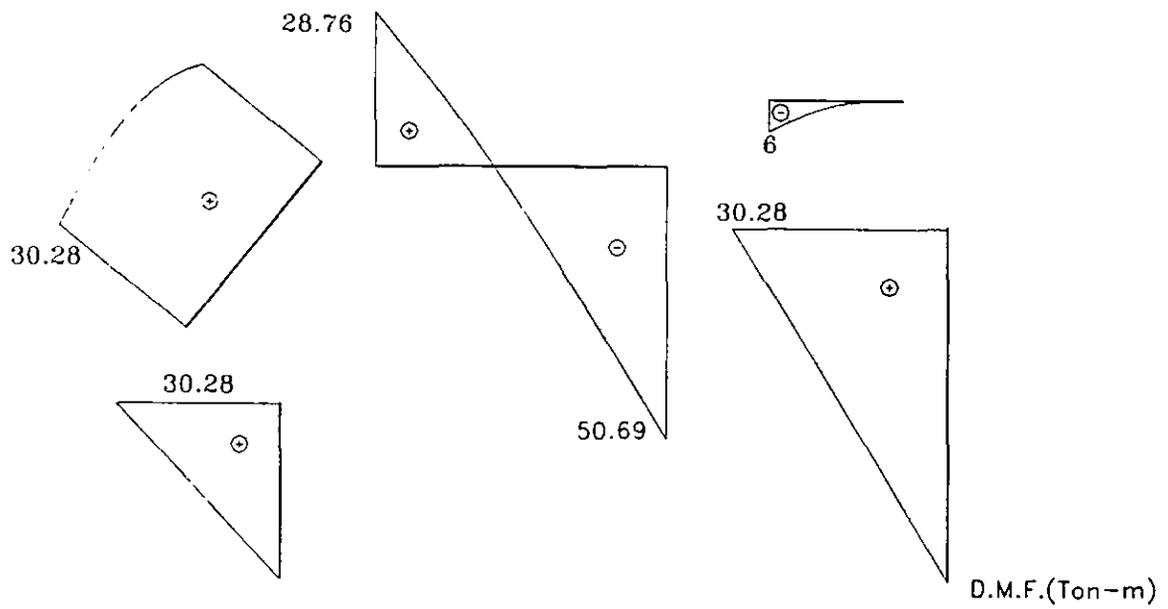
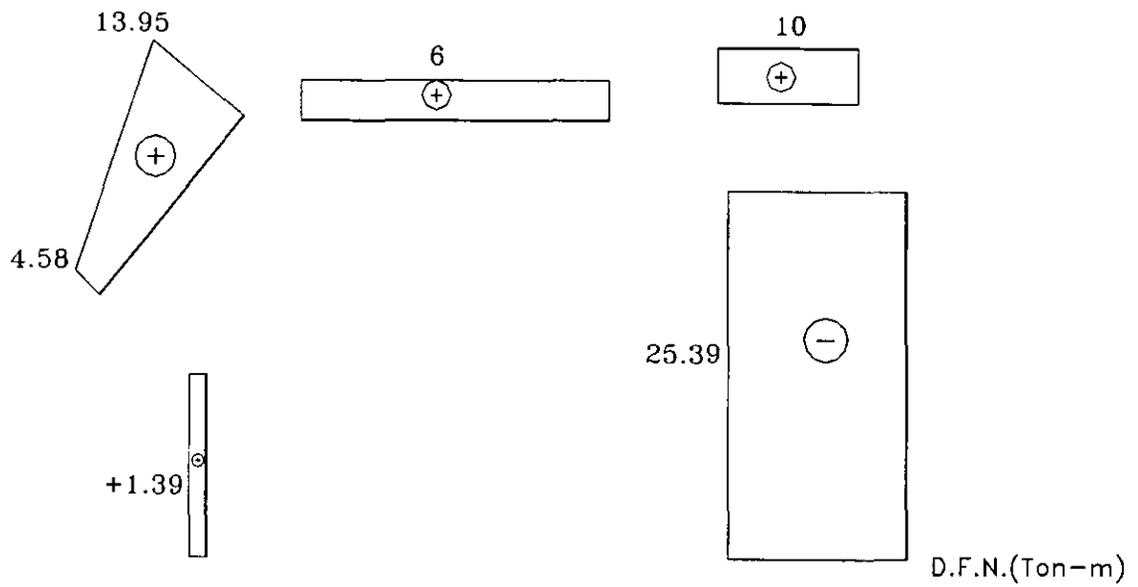
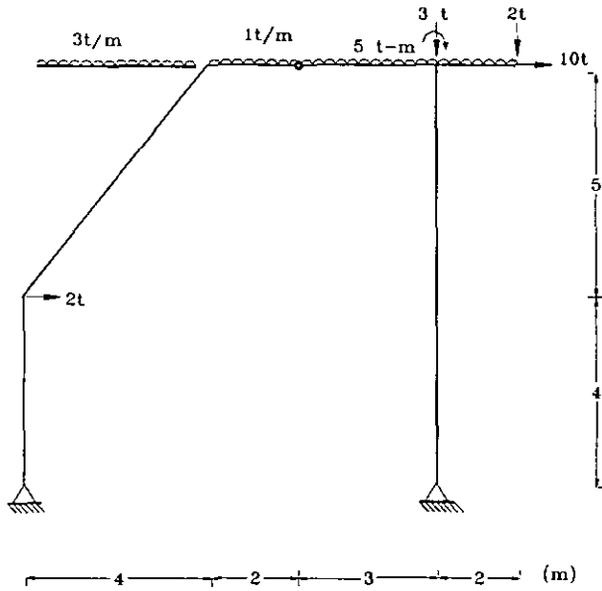


Diagrama de fuerzas normales.



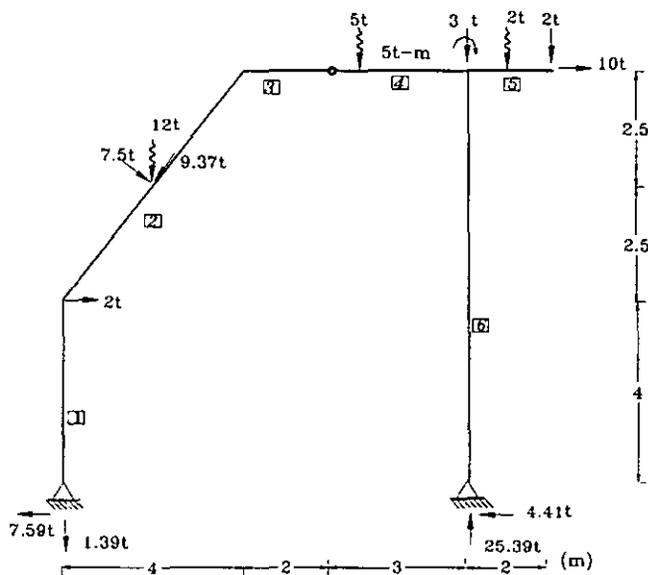
### Problema 3.6

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuyas reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Se obtendrán dos tipos de diagramas para momentos y cortantes, los primeros debido a cargas sobre las barras y los segundos debidos a momentos flexionantes en los extremos de dichas barras.

Finalmente se graficarán los diagramas tomando en cuenta ciertas consideraciones para poder superponer los efectos de las cargas sobre las barras y los momentos flexionantes en los extremos de estas.

Definición de vigas simplemente apoyadas (casos generales) y cálculo de diagramas de momentos y cortantes.

Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura. El marco se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de los tres casos generales que se han estado manejando en los problemas anteriores de superposición.

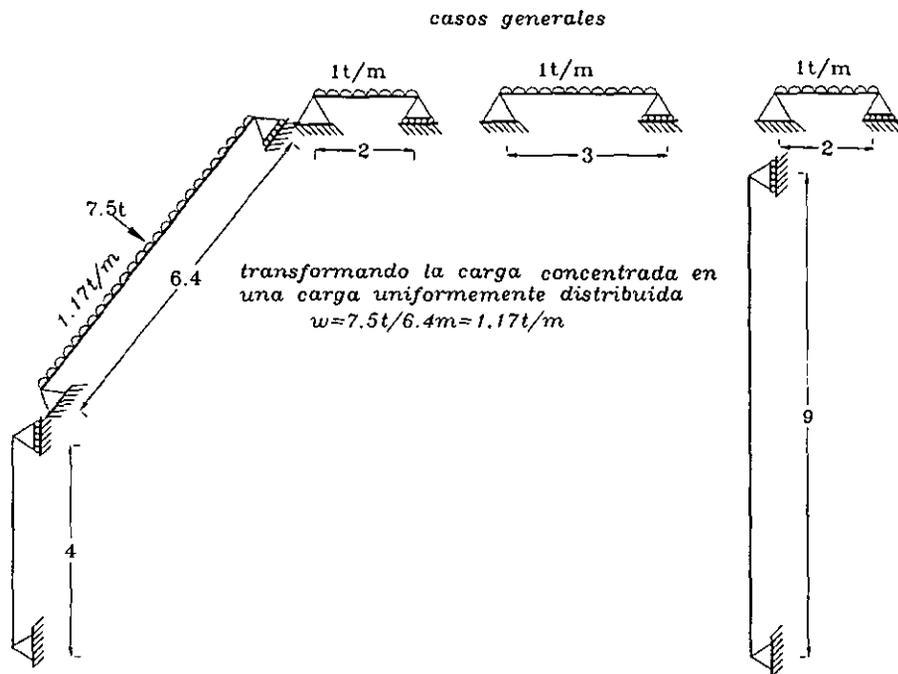


diagrama de momentos generales

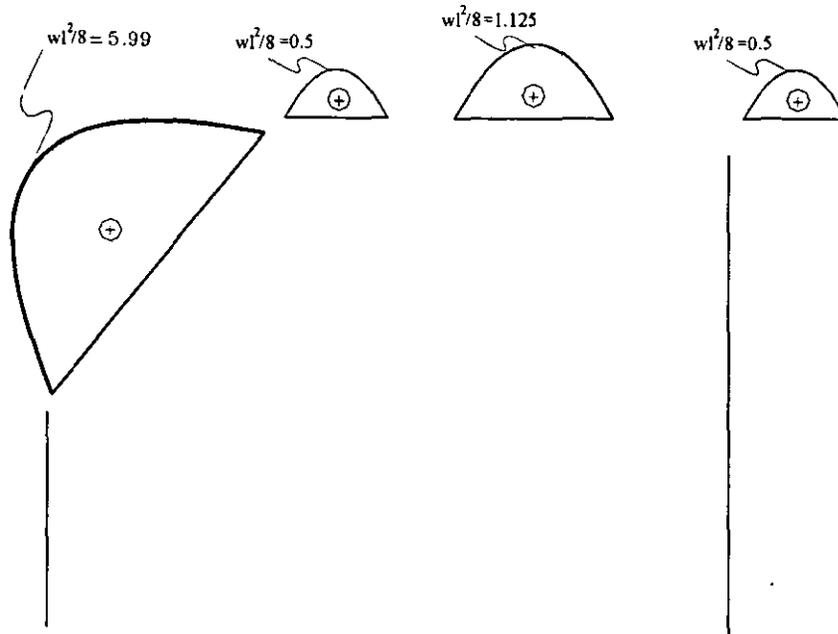
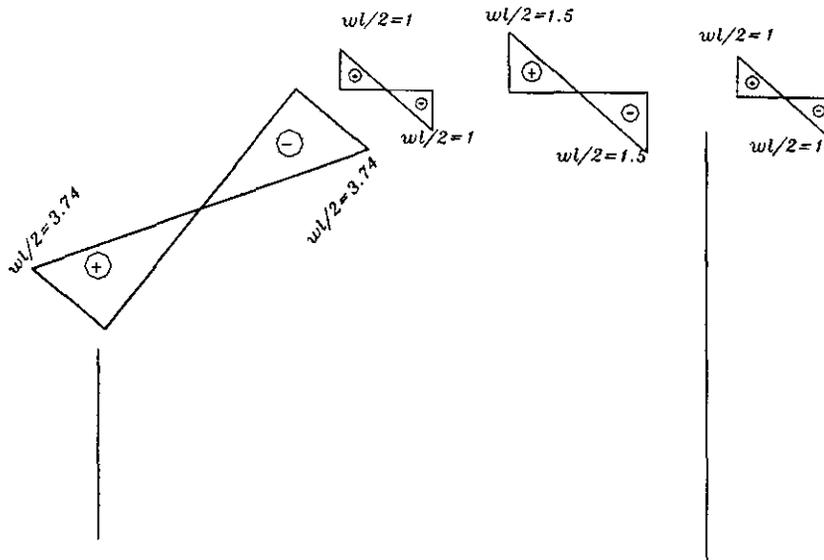


diagrama de cortantes generales

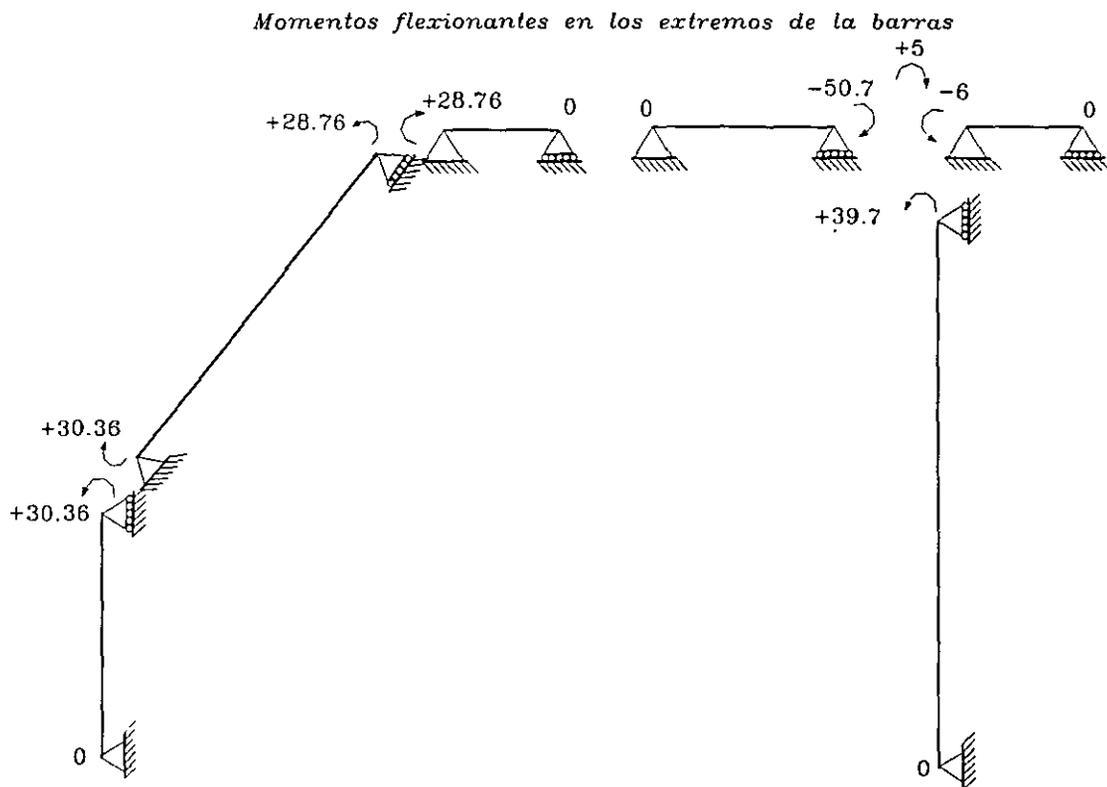


Para resolver el problema se dividió la viga en seis vigas simplemente apoyadas, se pudo coincidir con el caso general de la carga uniformemente repartida .

### Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

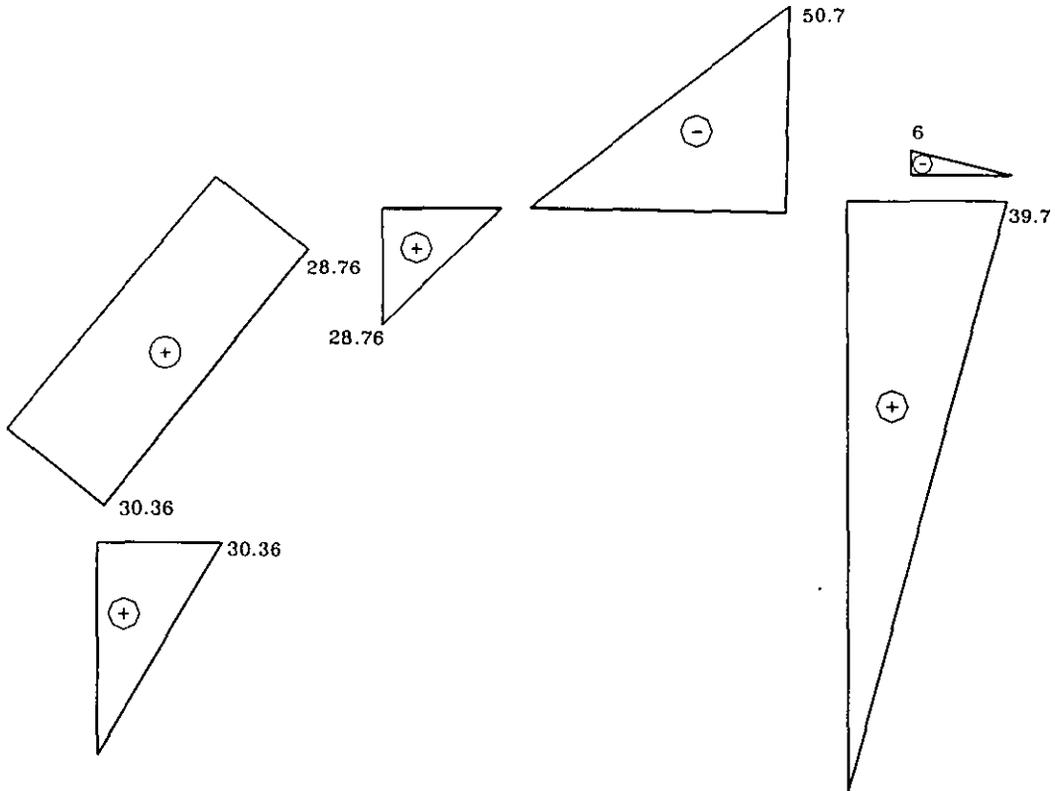
El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas.

El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.

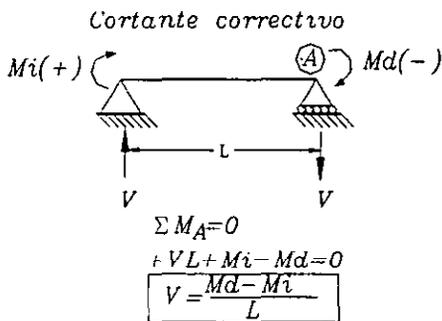


A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos correctivos, los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.

Diagrama de momentos correctivos



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

$$V_1 = [+30.36 - 0]/4 = 7.59$$

$$V_3 = [0 - (-28.76)]/2 = -14.38$$

$$V_5 = [0 - (-6)]/2 = +3$$

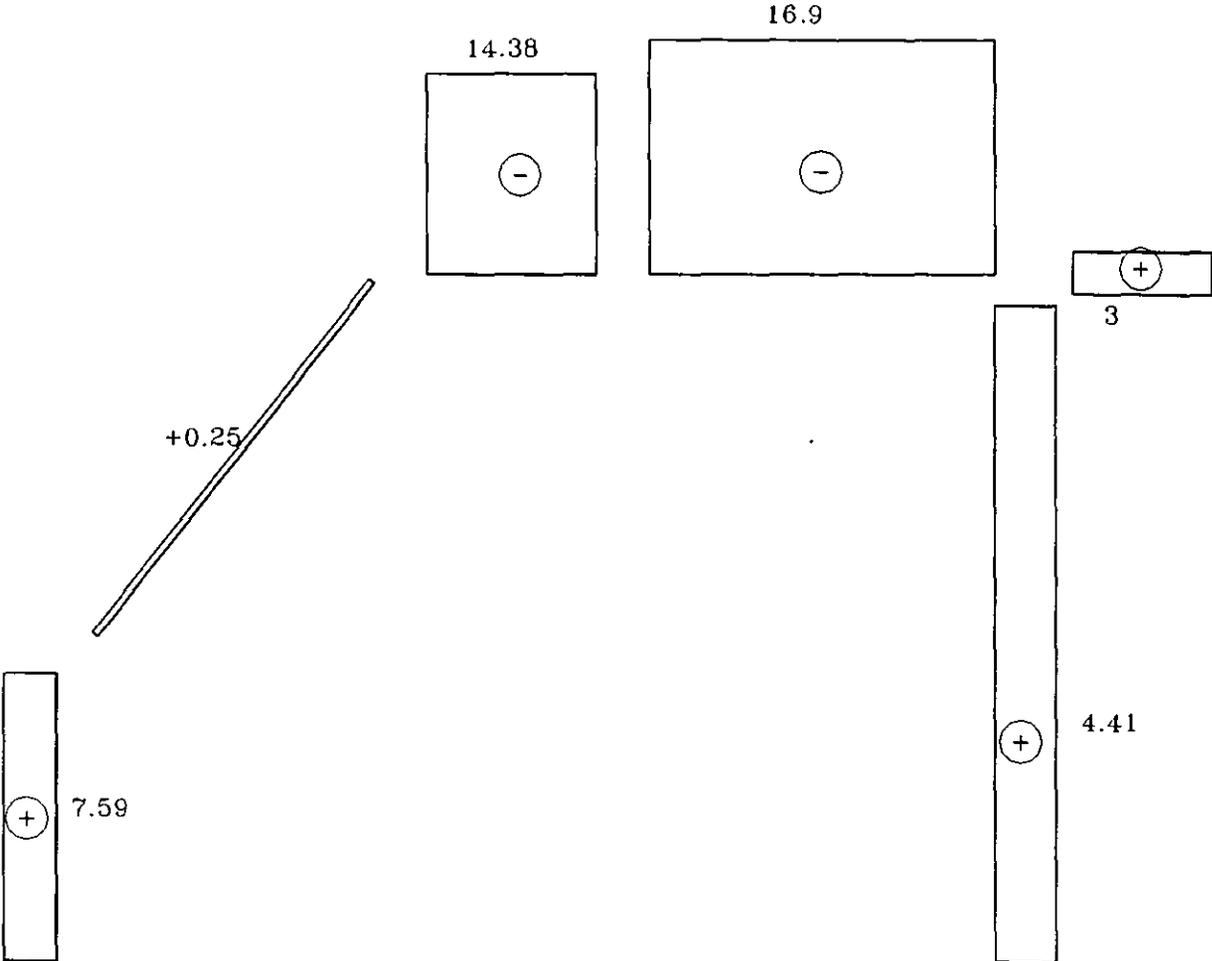
$$V_2 = [28.76 - (30.36)]/6.4 = -0.25$$

$$V_4 = [-50.7 - 0]/3 = -16.9$$

$$V_6 = [39.7 - 0]/9 = +4.41$$

Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

*Diagrama de cortantes correctivos*

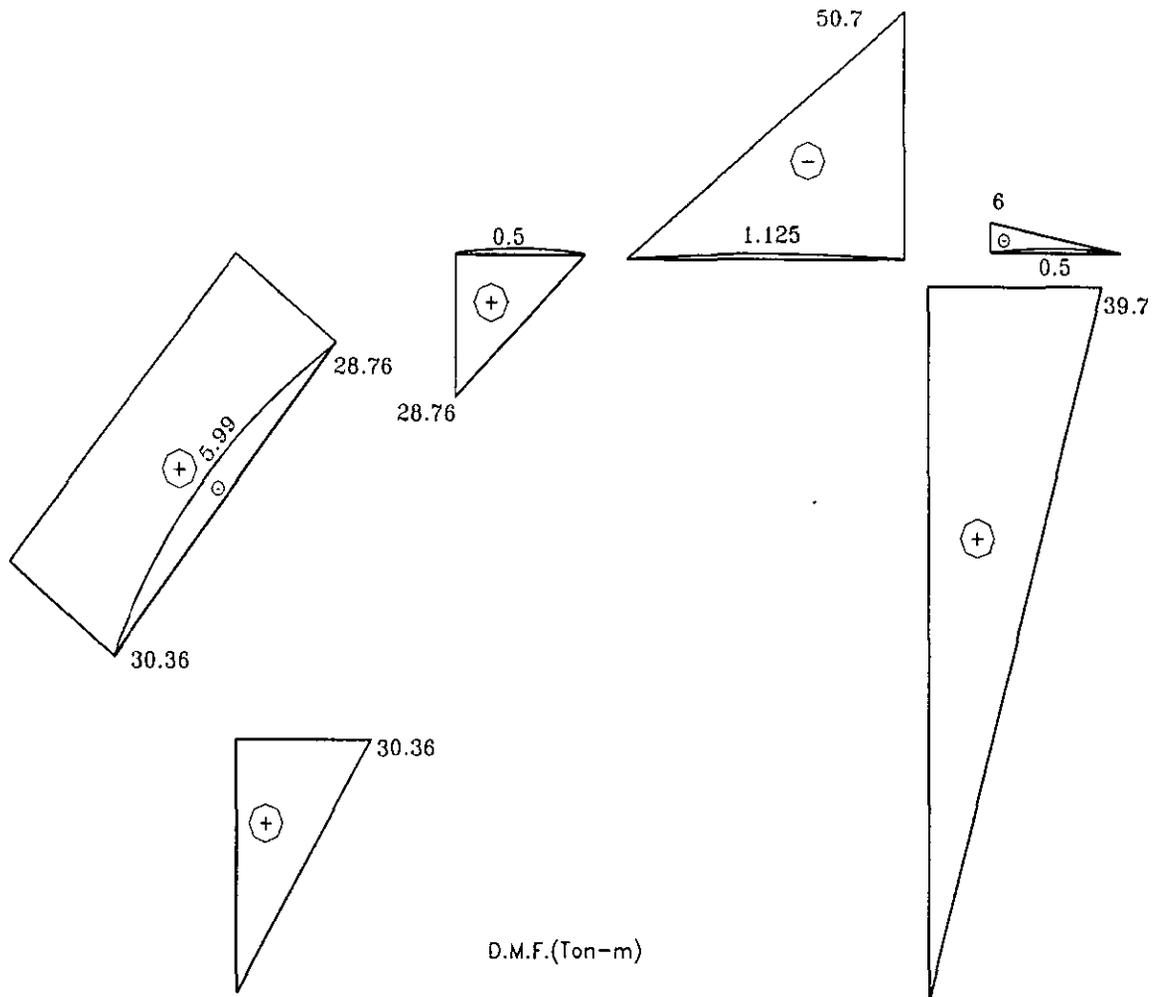


Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno

sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.

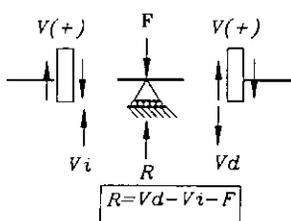
*Diagrama final de momentos flexionantes*



Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

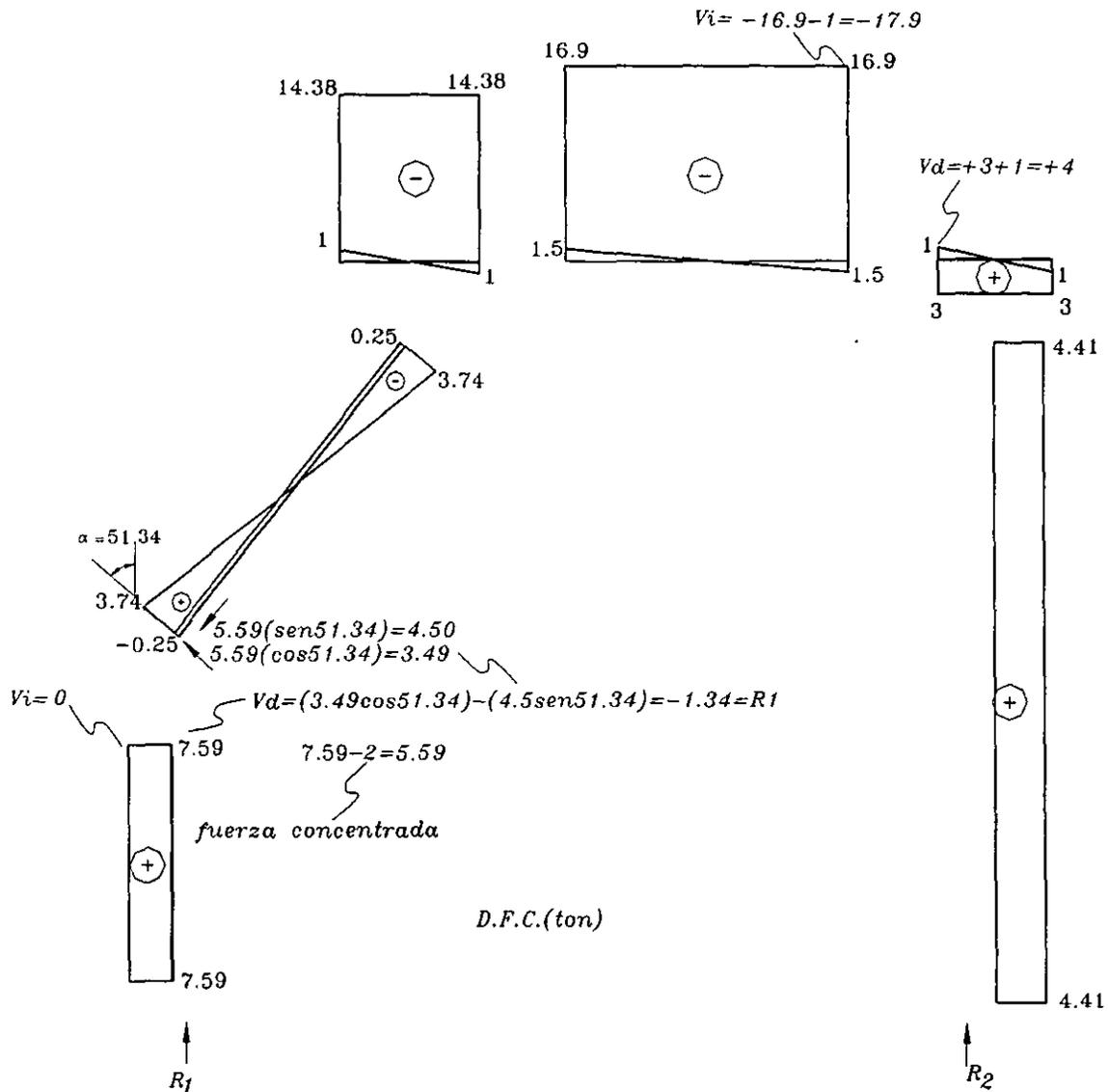
Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:



$R_1$  se calcula realizando una proyección del valor del diagrama de fuerzas cortantes de la barra 1 tal como se muestra en el diagrama final de fuerzas cortantes.

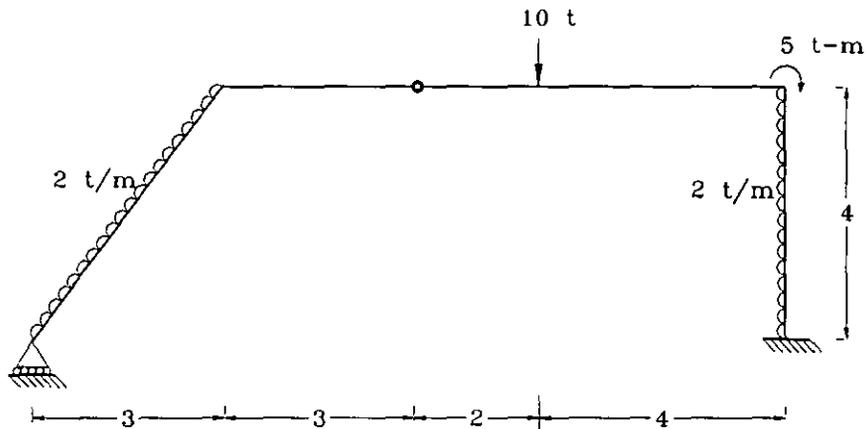
$$R_2 = 4 - (-17.9) - (-3) = 24.9 \text{ ton}$$

Diagrama final de fuerzas cortantes



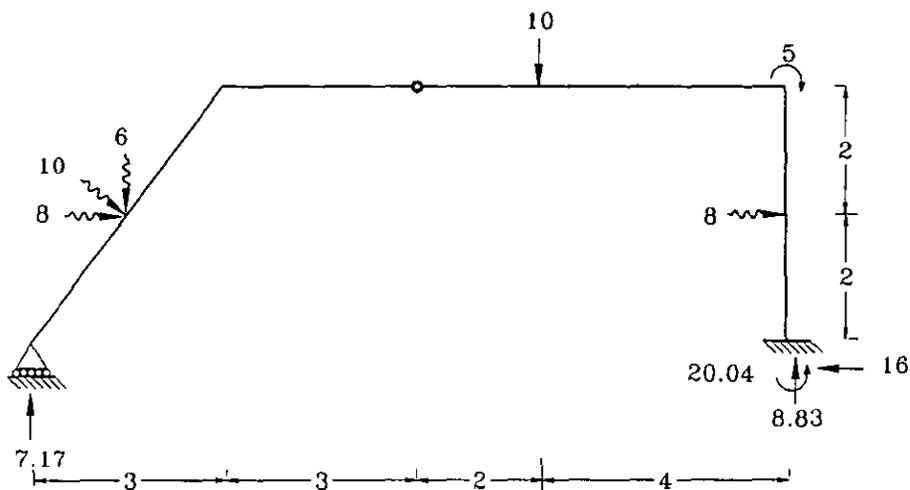
### Problema 3.7

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones.



### Solución.

#### Cálculo de reacciones.



Las reacciones se obtuvieron de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

#### Definición de intervalos.

Los intervalos se definirán de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- En el caso de un marco será importante definir un intervalo donde dos barras con diferente dirección se intercepten.

- Donde inicie y finalice una carga uniformemente repartida no importando su ley de variación.
- Donde exista una fuerza concentrada ya sea carga o momento.

El análisis se realizará en dos direcciones por facilidad de cálculo.

Intervalos de izquierda a derecha.

$0 \leq x < 5$  (Barra inclinada)

$0 \leq x < 4$  (Barra vertical)

Intervalos de derecha a izquierda.

$0 \leq x < 4$  (Barra horizontal)

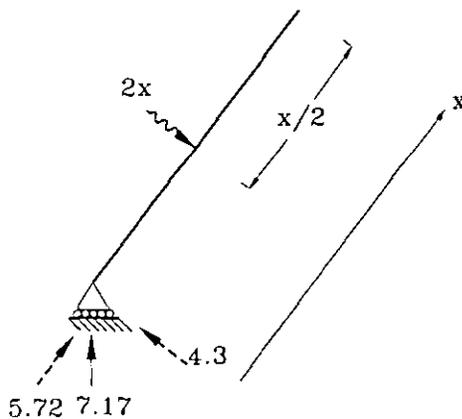
$4 \leq x < 9$  (Barra horizontal)

### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

$0 \leq x < 5$

(barra inclinada)

Por tratarse de una barra inclinada es necesario obtener las proyecciones de la reacción, respecto a los ejes locales, posteriormente la carga uniformemente distribuida que actúa en este intervalo se sustituye por una equivalente concentrada en función de  $x$ .



$$V(x) = +4.3 - 2x$$

$$M(x) = +4.3x - 2x(x/2)$$

$$N(x) = +5.72 \text{ (efecto de compresión)}$$

$0 \leq x < 4$

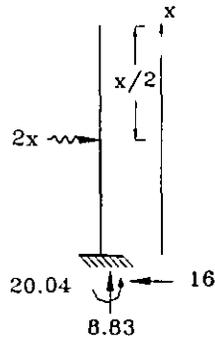
(barra vertical)

En este intervalo los ejes locales se ubicarán sobre la barra vertical y la carga uniformemente repartida se sustituye por una concentrada en función de  $x$ .

$$V(x) = +16 - 2x$$

$$M(x) = +16x - 2x(x/2) - 20.04$$

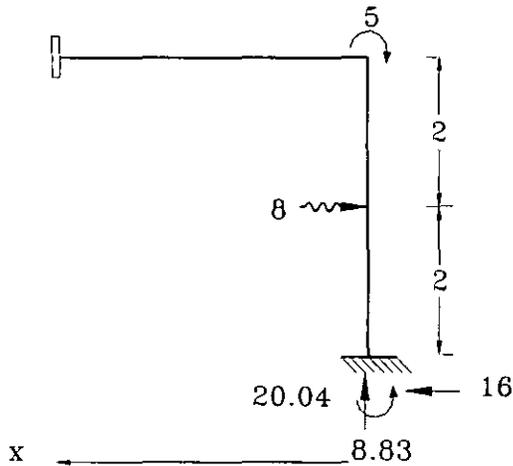
$$N(x) = +8.83 \text{ (efecto de compresión)}$$



**Análisis de derecha a izquierda**

Es necesario anteponer un signo negativo a la ecuaciones de elementos mecánicos cuando se realiza el análisis en esta dirección.

$0 \leq x < 4$  (de derecha a izquierda)  
(barra horizontal)



$$V(x) = -(+8.33)$$

$$M(x) = -(-8.83x + 16(4) - 8(2) - 20.04 + 5)$$

$$N(x) = -(-16) = +16$$

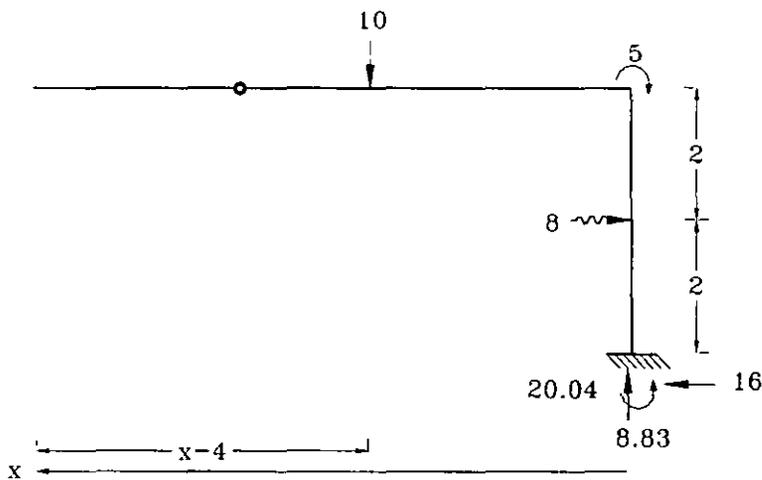
$4 \leq x < 9$  (de derecha a izquierda)  
(barra horizontal)

En este caso para plantear la función de momento flexionante, únicamente se considerarán los brazos de palanca en función de x cuando coincidan con la dirección x de los ejes locales, a diferencia de los brazos de palanca perpendiculares al eje x que se multiplicarán por la fuerza sin involucrar la variable x.

$$V(x) = -(+8.33 - 10)$$

$$M(x) = -(-8.83x + 16(4) - 8(2) - 20.04 + 5 + 10(x-4))$$

$$N(x) = -(+16-8) = +8$$



Tabulación de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de izquierda a derecha.

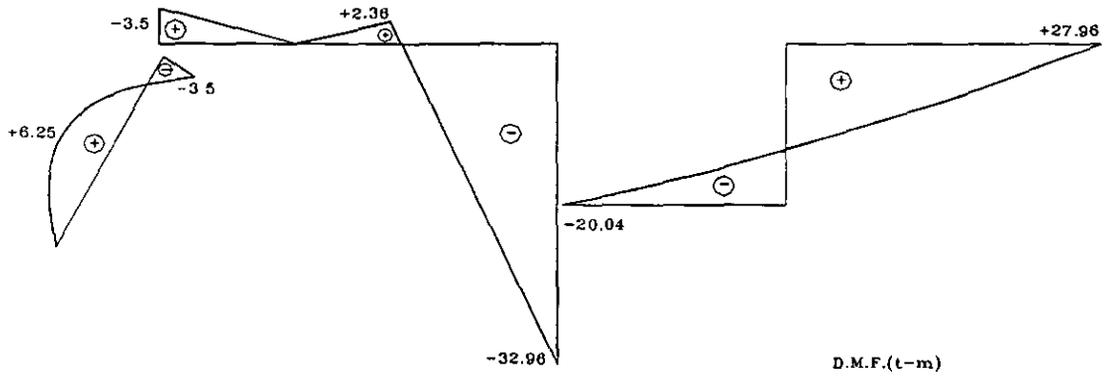
Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 5 barra inclinada	0	+4.3	0	+5.7
	1	+2.3	+3.33	+5.7
	2	+0.3	+4.66	+5.7
	3	-1.7	+3.99	+5.7
	4	-3.7	+1.32	+5.7
	5	-5.7	-3.5	+5.7
0 ≤ x < 4 barra vertical	0	+16	-20.04	+8.83
	1	+14	-5.04	+8.83
	2	+12	+7.96	+8.83
	3	+10	+18.96	+8.83
	4	+8	+27.96	+8.83

Análisis de derecha a izquierda.

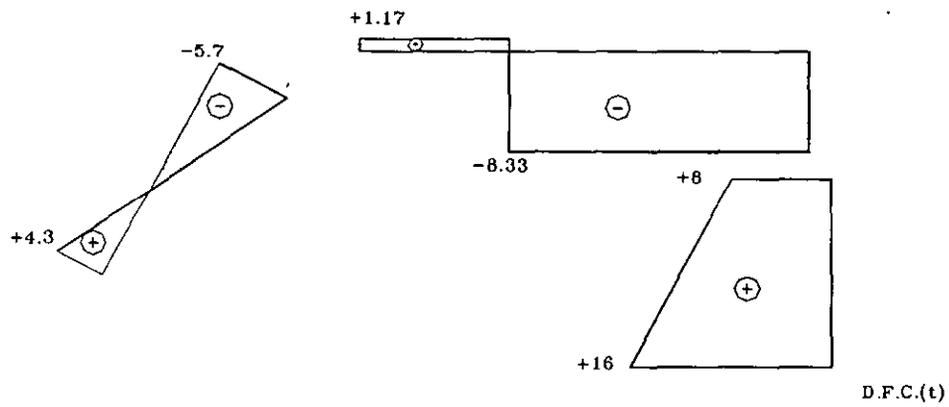
Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 4 barra horizontal	0	-8.33	-32.96	+16
	1	-8.33	-24.63	+16
	2	-8.33	-16.3	+16
	3	-8.33	-7.97	+16
	4	-8.33	+2.36	+16
4 ≤ x < 9 barra horizontal	4	+1.17	+2.36	+8
	5	+1.17	+1.19	+8
	6	+1.17	0	+8
	7	+1.17	-1.15	+8
	8	+1.17	-2.32	+8
	9	+1.17	-3.49	+8

Diagramas de elementos mecánicos.

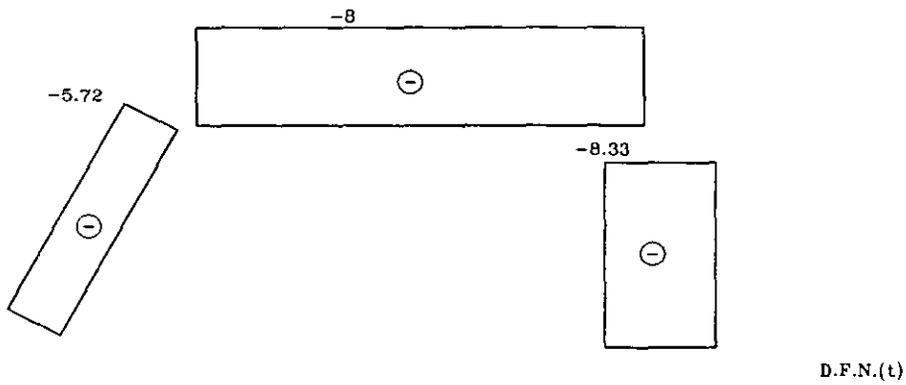
*Diagrama de momentos flexionates*



*Diagrama de fuerzas cortantes*

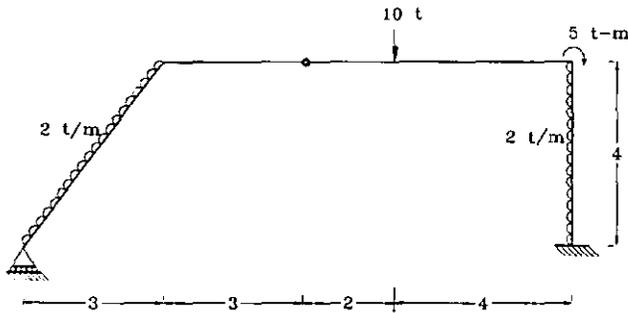


*Diagrama de fuerzas normales*



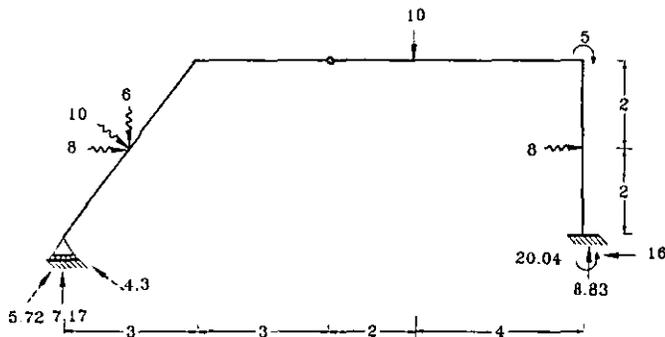
### Problema 3.8

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco empleando el método de suma de áreas.



### Solución.

#### Cálculo de reacciones y definición de barras y nudos.



El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

Los marcos se resuelven planteando diagramas de cuerpo libre tanto de las barras como de los nudos donde concurren dichas barras, por lo tanto es muy importante inspeccionar la estructura y definir los siguientes aspectos:

- La nomenclatura adecuada para diferenciar las barras y los nudos de interés.
- Se considerará como nudo de interés, aquel donde concurren dos o más barras (nudos B, C y D).
- Plantear los diagramas de cuerpo libre de cada barra y nudo para realizar una suma algebraica de fuerzas y verificar el equilibrio en cada elemento.

Diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la estructura

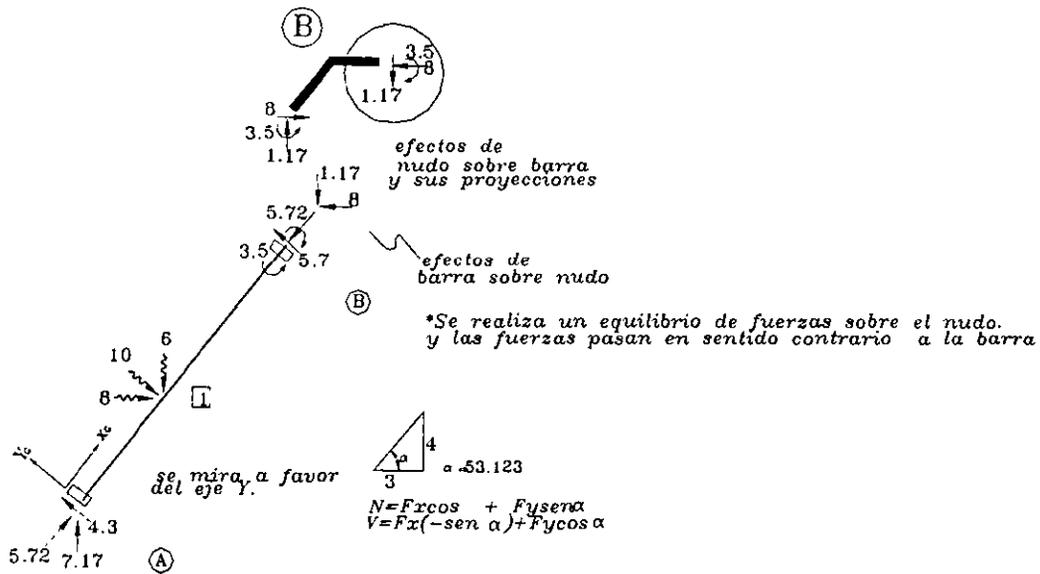
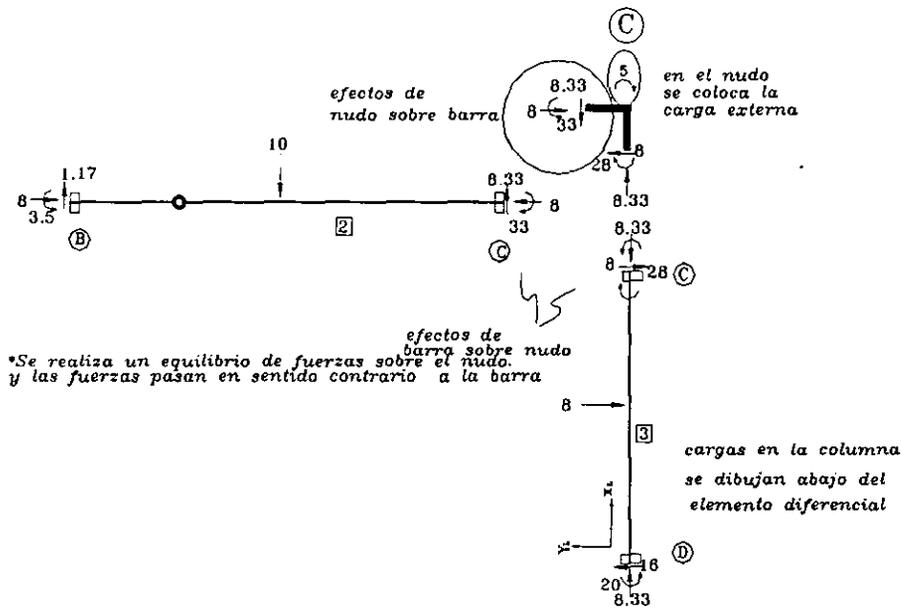


Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha y central de la estructura.



Los efectos de una barra (Fuerzas equilibrantes) pasarán al nudo con la misma magnitud pero en sentido contrario.

Los efectos de una barra (Fuerzas equilibrantes) pasarán al nudo con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Los efectos de un nudo sobre una barra pasarán a la barra con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Para obtener los elementos mecánicos se realizará una sumatoria de fuerzas paralelas en el sentido de la barra para efecto de axial, se realizará una sumatoria de fuerzas perpendiculares al eje de la barra para efecto de cortante y para obtener el momento se realizará una sumatoria de momentos cortando antes del nudo considerado.

### Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

#### **Barra 1 (A-B)**

$$V_i = 4.3$$

$$V_d = V_i + F_{AB} = 4.3 + (-10) = -5.7$$

#### **Barra 2 (B-B\*) (Realizando previamente equilibrio de fuerzas en el nudo B)**

$$V_i = 1.17$$

$$V_d = V_i + F_{BB^*} = 1.17 + 0 = 1.17$$

#### **Barra 2 (B\*-C)**

$$V_i = 1.17$$

$$V_d = V_i + F_{B^*C} = 1.17 + (-10) = -8.83$$

#### **Barra 3 (D-C) cambio de signo análisis de derecha a izquierda**

$$V_i = 16$$

$$V_d = V_i + F_{DC} = 16 - 8 = 8$$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

Carga uniformemente distribuida: El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

Carga concentrada: Siempre propiciara un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

Sin carga : La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

### Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

### Areas.

Para obtener el área correspondiente a los tramos donde se existan cargas uniformemente distribuidas se realizará el procedimiento mostrado en el problema 2.5, utilizando el diagrama de fuerzas cortantes para obtener los triángulos semejantes y sus respectivas dimensiones.

#### *Barra 1*

$$X_1 = 4.3(5)/(4.3+5.7) = 2.15$$

$$X_2 = 5.7(5)/(4.3+5.7) = 2.85$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Tramo	<i>Barra 1 (A-A*)</i>	<i>Barra 1 (A*-B)</i>	<i>Barra 2 (B-B*)</i>
Figura	Triángulo	Triángulo	Rectángulo
Area	$2.15(+4.3)/2 = +4.623$	$2.85(-5.7)/2 = -8.123$	$5(+1.17) = +5.8$

Tramo	<i>Barra 2 (B*-C)</i>	<i>Barra 3 (D-C)</i>
Figura	Rectángulo	Trapezio
Area	$4(-8.83) = -35.32$	$(+16+8)4/2 = +48$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente:

$M_A$  = momento en el punto A

$M_I$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_D$  = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Área calculada entre el punto A y B.

**Barra 1 (A-A\*)**

$M_I = M_A = 0$

$M_D = M_I + A_{CC*} = 0 + 4.623 = 4.62$

**Barra 1 (A\*-B)**

$M_I = M_{DAA*} + M_{A*} = 4.62 + 0 = +4.62$

$M_D = M_I + A_{C*B} = 4.62 + (-8.12) = -3.5$

**Barra 2 (B-B\*)**

$M_I = M_B = -3.5$

$M_D = M_I + A_{A-B} = -3.5 + 5.8 = +2.3$

**Barra 2 (B\*-C)**

$M_I = M_{DDB*} + M_{B*} = +2.3 + 0 = +2.3$

$M_D = M_I + A_{B*-C} = +2.3 + (-35.32) = -33$

**Barra 3 (D-C)**

$M_I = M_D = -20$

$M_D = M_I + A_{D-C} = -20 + 48 = +28$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra. En el tramo A-B y C-D debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado. A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerzas cortantes

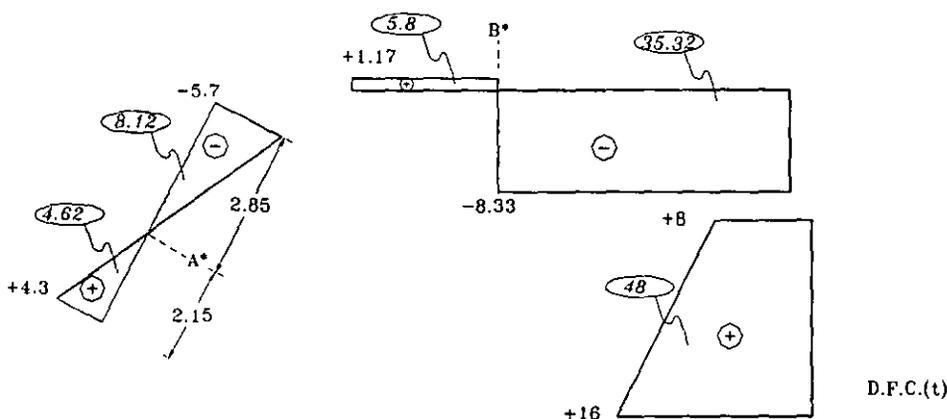


Diagrama de momentos flexionantes.

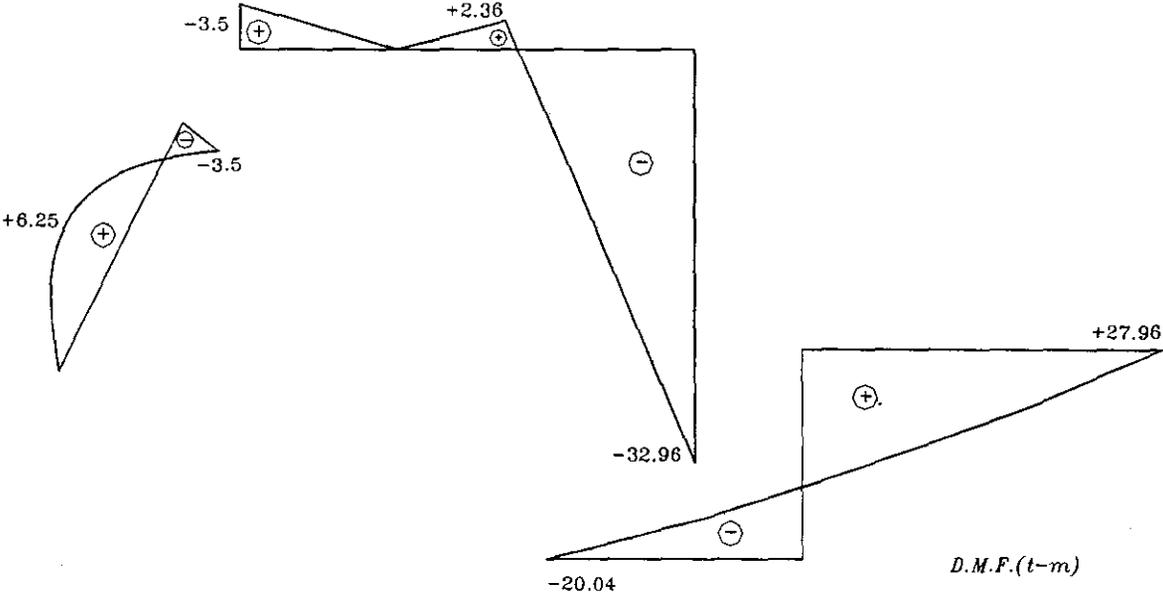
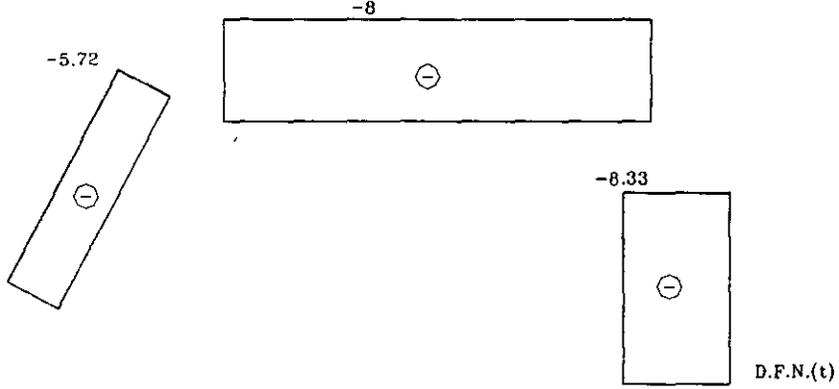
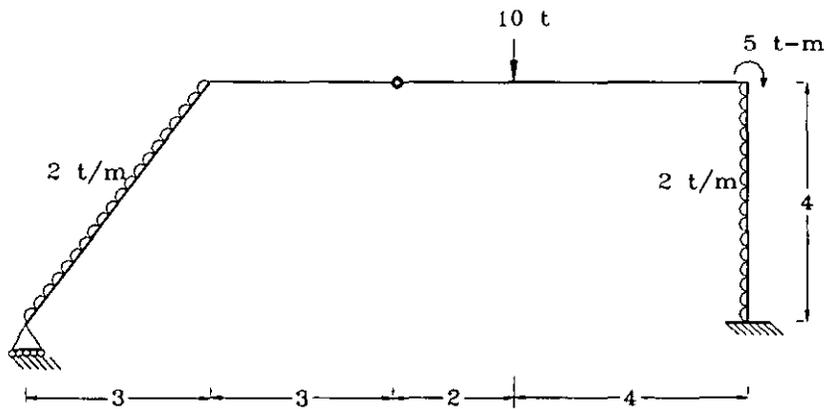


Diagrama de fuerzas normales.



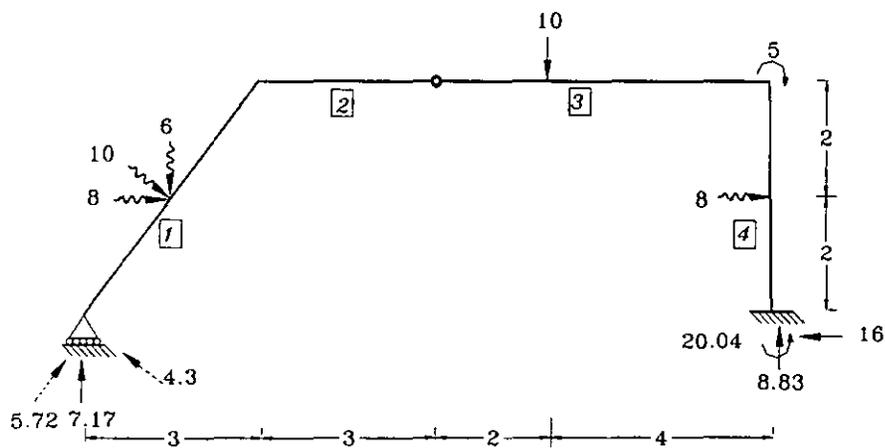
### Problema 3.9

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



### Solución

Se trata de una viga estáticamente determinada cuyas reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.

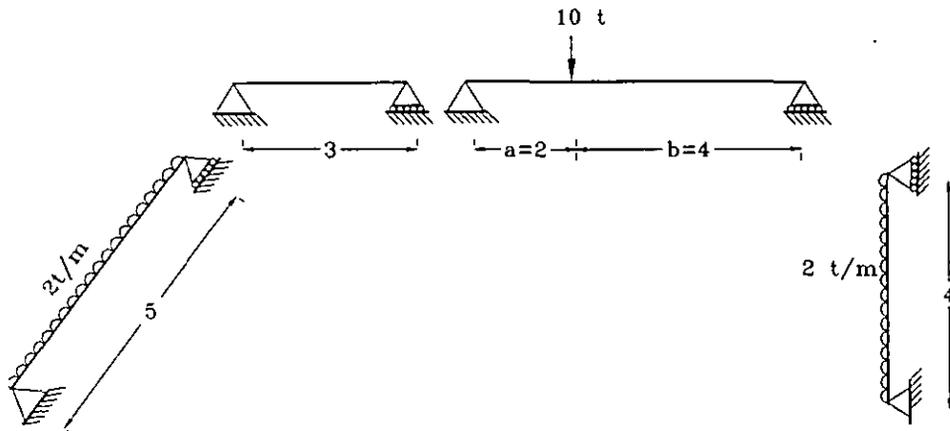


El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Definición de vigas simplemente apoyadas (casos generales) y cálculo de diagramas de momentos y cortantes.

Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura. El marco se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de los tres casos generales que se han estado manejando en los problemas anteriores de superposición.

*casos generales*



*diagrama de momentos generales*

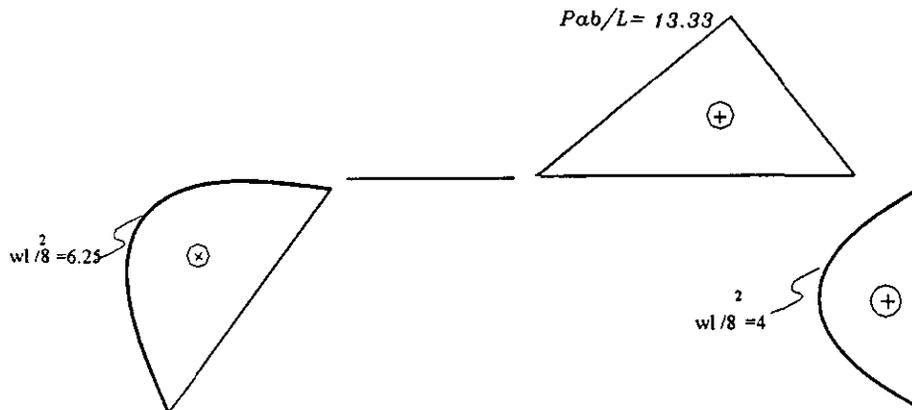
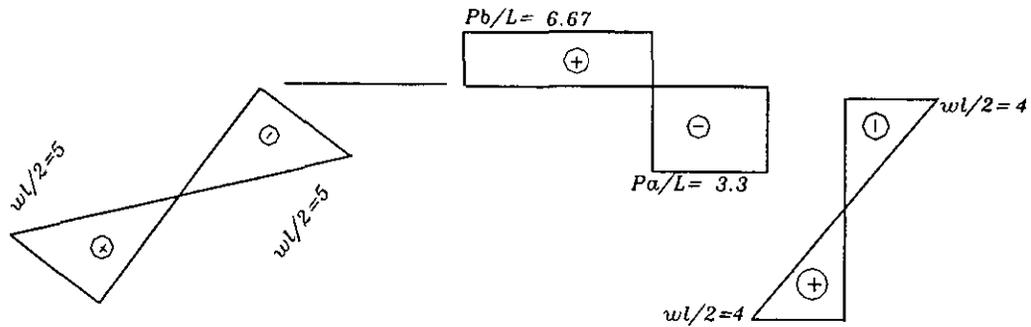


diagrama de cortantes generales

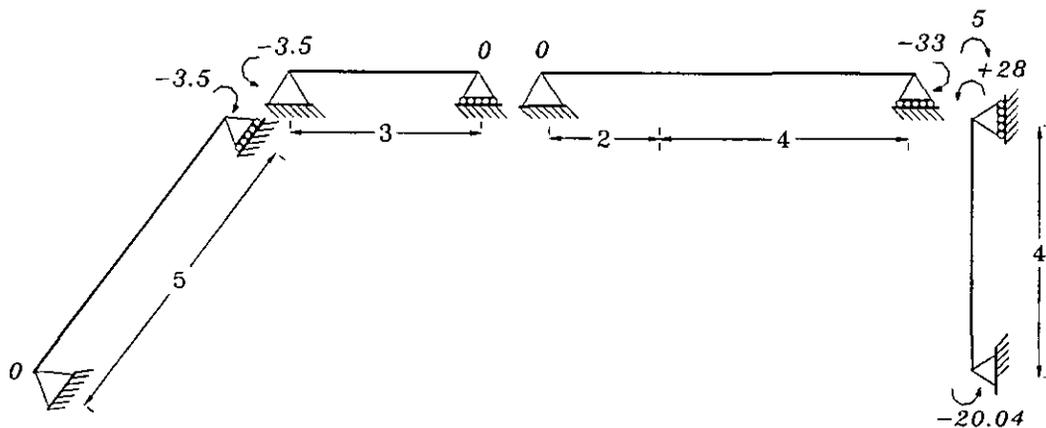


Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando un  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas.

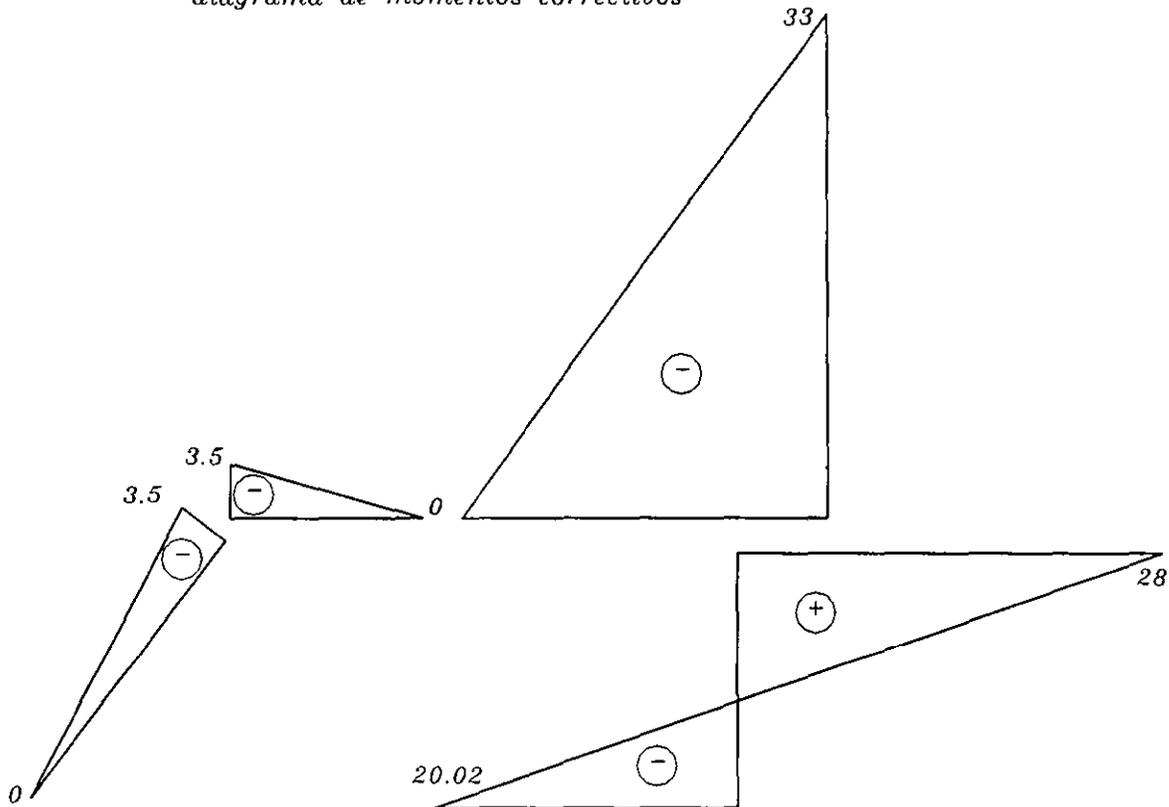
El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.

Momentos flexionantes en los extremos de la barras

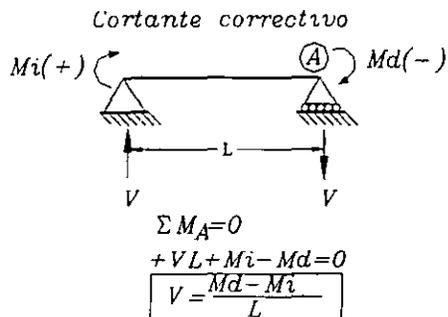


A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos correctivos, los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.

diagrama de momentos correctivos



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

$$V_1 = [-3.5 - 0] / 5 = -0.7$$

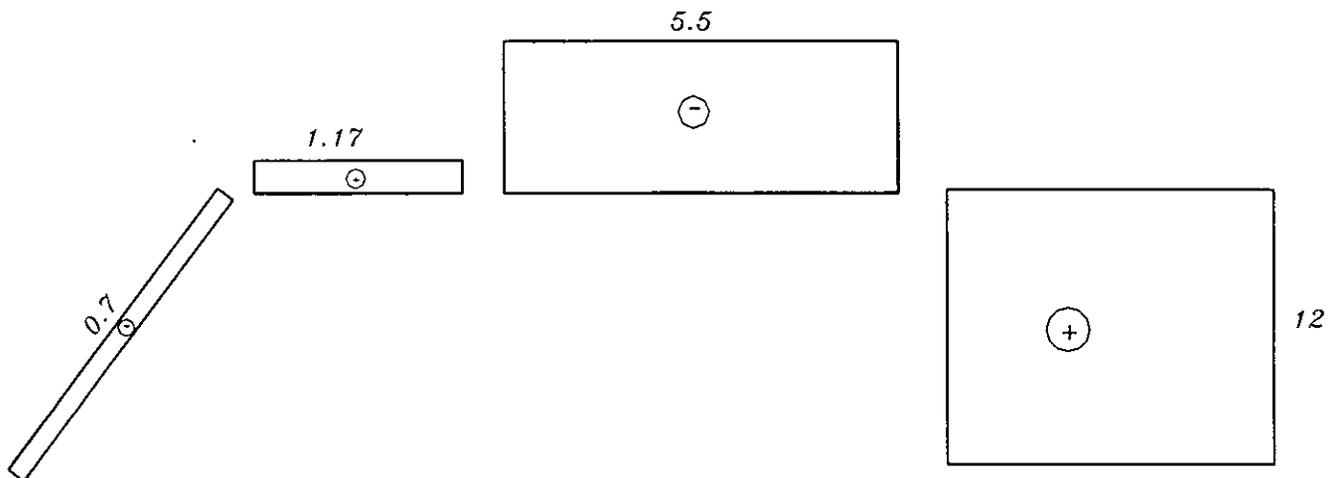
$$V_3 = [-33 - 0] / 6 = -5.5$$

$$V_2 = [0 - (-3.5)] / 3 = +1.17$$

$$V_4 = [28 - 20] / 4 = +12$$

Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

*diagrama de cortantes correctivos*



### Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.

diagrama final de momentos flexionantes

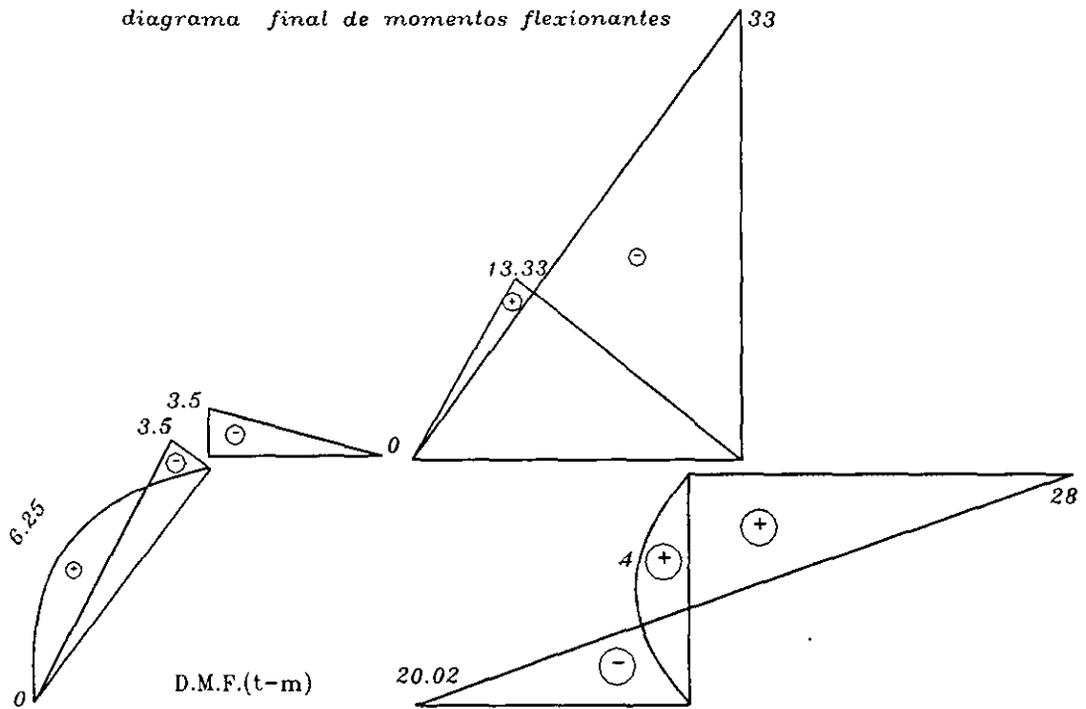
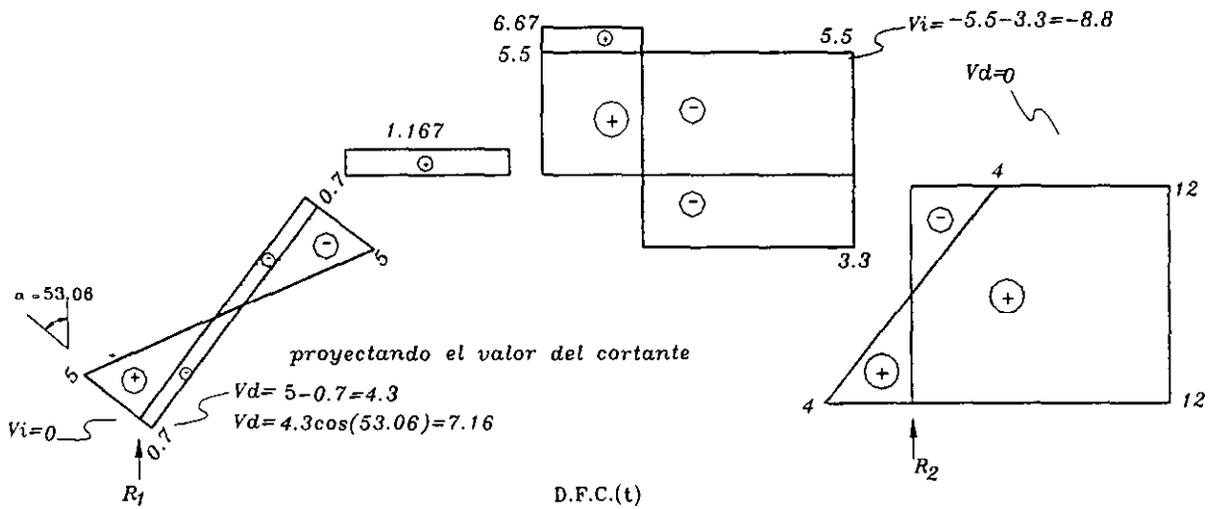


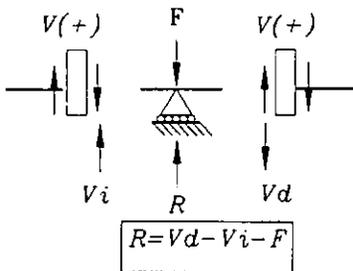
diagrama final de fuerzas cortantes



### Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:



R<sub>1</sub> se calcula realizando una proyección del valor del diagrama de fuerzas cortantes de la barra tal como se muestra en el diagrama final de fuerzas cortantes.

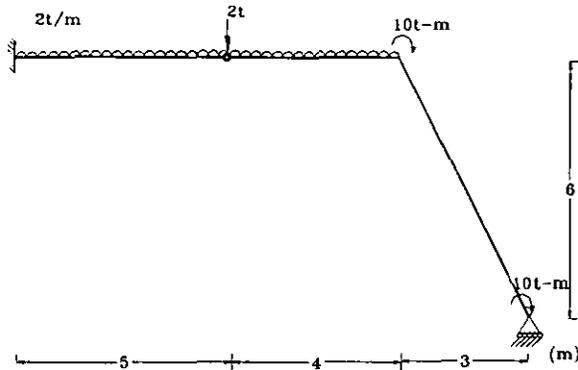
$$R_1 = 7.17 - 0 = 7.16 \text{ ton}$$

$$R_2 = 0 - (-8.8) = 8.8 \text{ ton}$$

### Problema 3.10

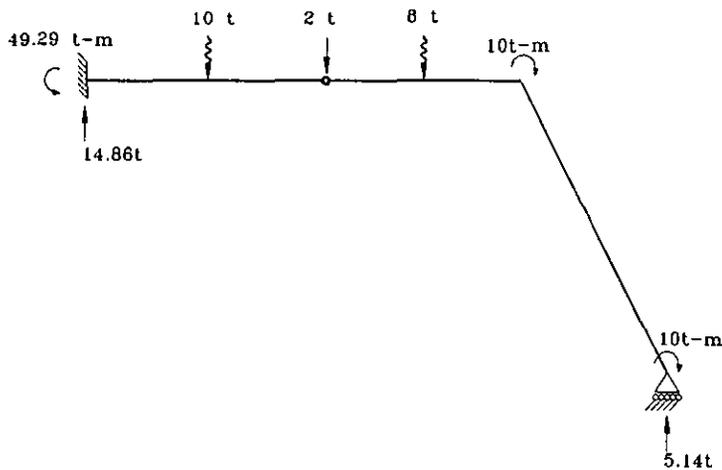
Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de ecuaciones

Solución.



### Cálculo de reacciones.

Las reacciones se obtuvieron de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.



### Definición de intervalos.

Los intervalos se definirán de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- En el caso de un marco será importante definir un intervalo donde dos barras con diferente dirección se intercepten. Donde inicie y finalice una carga uniformemente repartida no importando su ley de variación. Donde exista una fuerza concentrada ya sea carga o momento.

El análisis se realizará en dos direcciones por facilidad de cálculo.

Intervalos de izquierda a derecha.  
 $0 \leq x < 5$  (barra horizontal)  
 $5 \leq x < 9$  (barra horizontal)

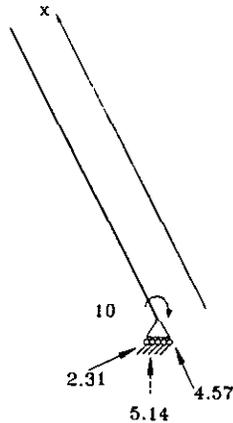
Intervalos de derecha a izquierda.  
 $0 \leq x < 6.71$  (Barra inclinada)

Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de derecha a izquierda

$0 \leq x < 6.71$

(barra inclinada)



Por tratarse de una barra inclinada es necesario obtener las proyecciones de la reacción debido al sentido en que se realiza el análisis se antepone un signo negativo.

$$V(x) = -(+2.31)$$

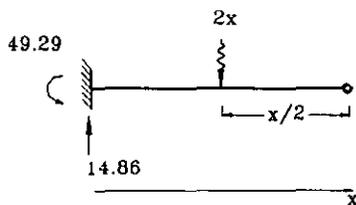
$$M(x) = -(-2.31x + 10)$$

$$N(x) = -4.57$$

Análisis de izquierda a derecha

$0 \leq x < 5$

(barra horizontal)



La carga uniformemente repartida se sustituye por una concentrada en función de x.

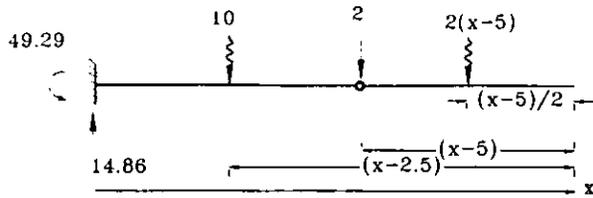
$$V(x) = +14.86 - 2x$$

$$M(x) = +14.86x - 49.29 - 2x(x/2)$$

$$N(x) = 0$$

$5 \leq x < 9$

(barra horizontal)



$$V(x) = +14.86 - 10 - 2 - 2(x-5)$$

$$M(x) = -49.29 + 14.86x - 10(x-2.5) - 2(x-5) - 2(x-5)(x-5)/2$$

$$N(x) = 0$$

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos.

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 5 barra horizontal	0	+14.86	-49.29	0
	1	+12.86	-35.43	0
	2	+10.86	-23.57	0
	3	+8.86	-13.71	0
	4	+6.86	-5.85	0
	5	+4.86	0	0
5 ≤ x < 9 barra horizontal	5	+2.86	0	0
	6	+0.86	+1.87	0
	7	-1.14	+1.73	0
	8	-3.14	-0.41	0
	9	-5.14	-4.55	0

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	x	V(x)	M(x)	N(x)
0 ≤ x < 6.71 barra inclinada	0	-2.31	-10	-4.57
	1	-2.31	-7.69	-4.57
	2	-2.31	-5.38	-4.57
	3	-2.31	-3.07	-4.57
	4	-2.31	-0.76	-4.57
	5	-2.31	-1.55	-4.57
	6.71	-2.31	+5.45	-4.57

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de momentos flexionantes.

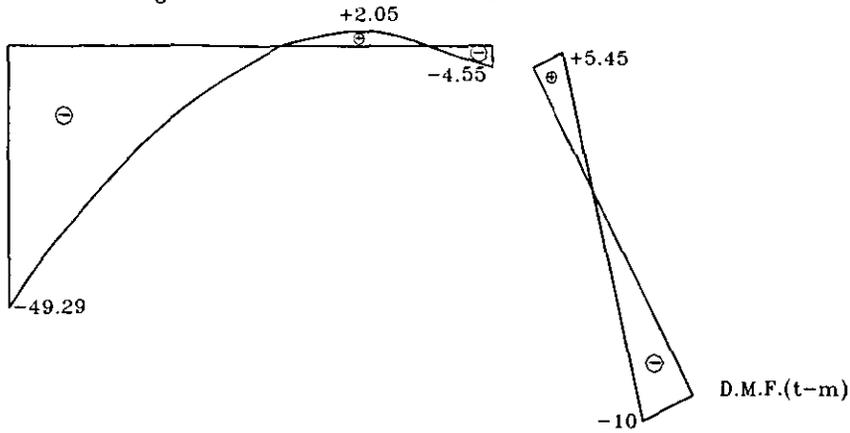


Diagrama de fuerzas cortantes.

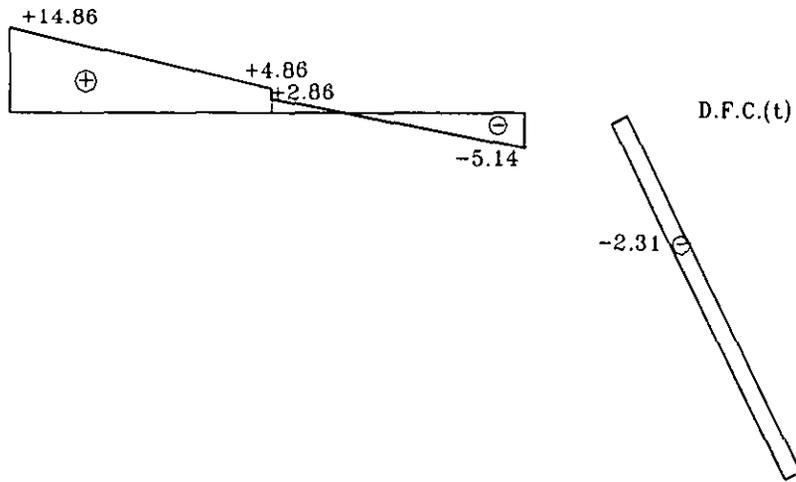
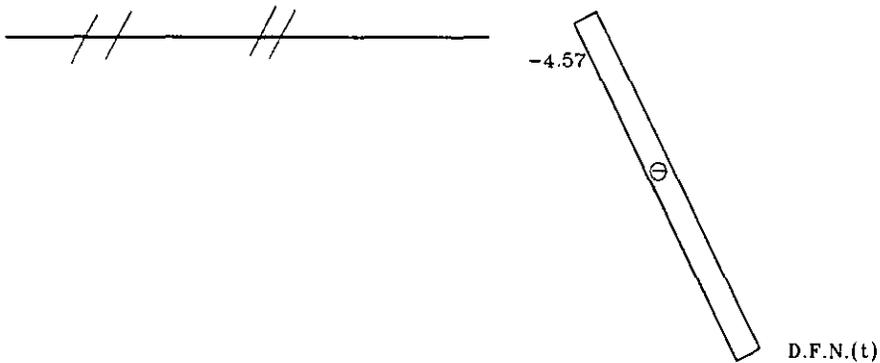
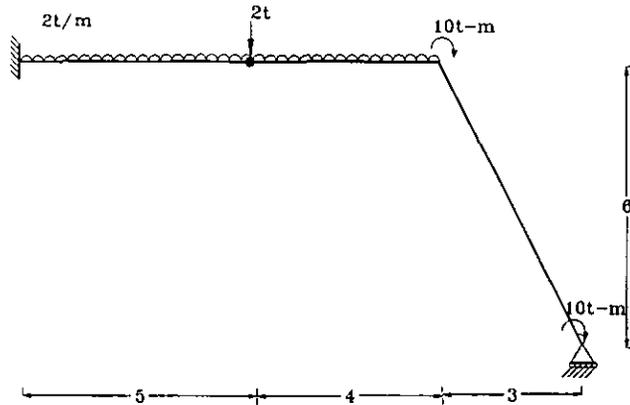


Diagrama de fuerzas normales.



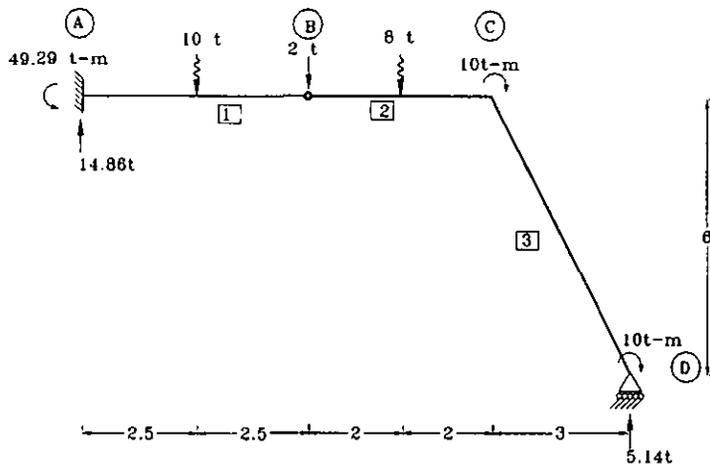
### Problema 3.11

Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco empleando el método de suma de áreas.



Solución.

Cálculo de reacciones y definición de barras y nudos.

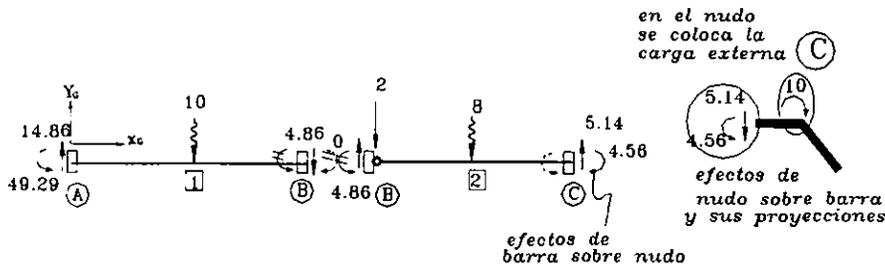


El cálculo de reacciones se realizó de acuerdo al procedimiento mostrado en el capítulo anterior.

Los marcos se resuelven planteando diagramas de cuerpo libre tanto de las barras como de los nudos donde concurren dichas barras, por lo tanto es muy importante inspeccionar la estructura y definir los siguientes aspectos:

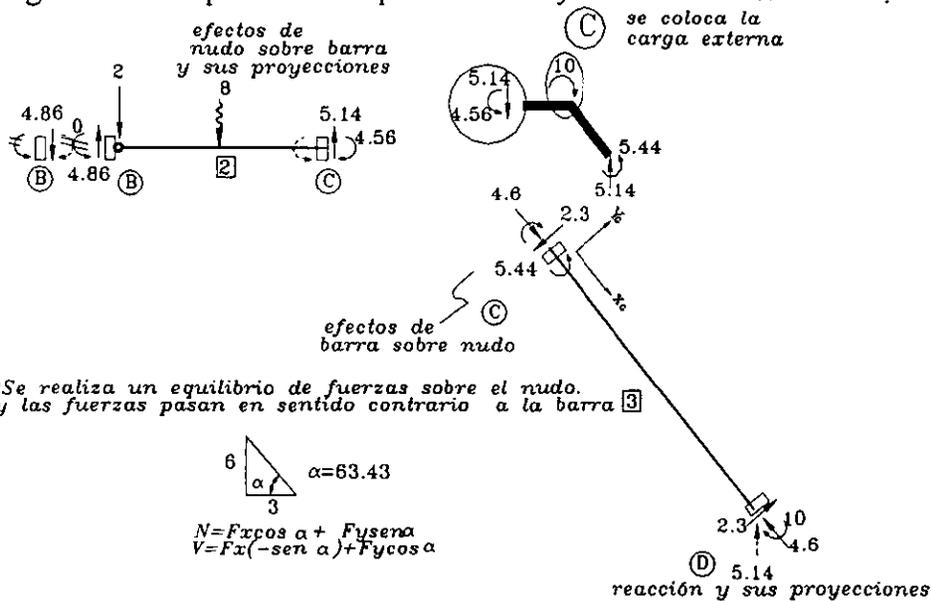
- La nomenclatura adecuada para diferenciar las barras y los nudos de interés.
- Se considerará como nudo de interés, aquel donde concurren dos o más barras (nudo C).
- Plantear los diagramas de cuerpo libre de cada barra y nudo para realizar una suma algebraica de fuerzas y verificar el equilibrio en cada elemento.

Diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda de la estructura



\*Se realiza un equilibrio de fuerzas sobre el nudo, y las fuerzas pasan en sentido contrario a la barra

Diagrama de cuerpo libre de la parte derecha y central de la estructura.



Los efectos de una barra (Fuerzas equilibrantes) pasarán al nudo con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Los efectos de un nudo sobre una barra pasarán a la barra con la misma magnitud pero con sentido contrario.

Para obtener los elementos mecánicos se realizará una sumatoria de fuerzas paralelas en el sentido de la barra para efecto de axial, se realizará una sumatoria de fuerzas perpendiculares al eje de la barra para efecto de cortante y para obtener el momento se realizará una sumatoria de momentos cortando antes del nudo considerado.

Diagrama de fuerzas cortantes.

El procedimiento para determinar la fuerza cortante a la izquierda y derecha del intervalo será el siguiente:

$V_i$  (cortante a la izquierda) = Cortante acumulado de izquierda a derecha + Carga en el punto actual.

$V_d$  (cortante a la derecha) = Cortante acumulado a la izquierda + Carga en el intervalo de análisis.

**Barra 1 (A-B)**

$V_i = F_A = +14.86$

$V_D = V_i + F_{AB} = 14.86 + (-10) = +4.86$

**Barra 2 (B-C)**

$V_i = V_{DAB} + F_B = +4.86 - 2 = +2.86$

$V_D = V_i + F_{BC} = +2.86 + (-8) = -5.14$

**Barra3 (D-C) cambio de signo análisis de derecha a izquierda**

$V_i = F_D = -(+2.3) = -2.3$

$V_D = V_i + F_{BD} = -(+2.3 + 0) = -2.3$

Con los valores obtenidos para cada punto de análisis, se traza a continuación el diagrama de fuerzas cortantes tomando en cuenta las siguientes consideraciones para las pendientes de cada tramo de este:

Carga uniformemente distribuida: El diagrama es un segmento rectilíneo inclinado cuyo valor de la pendiente es igual al valor de la carga uniformemente repartida en el sentido de la carga.

Carga concentrada: Siempre propiciará un cambio brusco en la pendiente del diagrama de fuerza cortante, el cambio total de la fuerza cortante será igual al valor de la fuerza aplicada en dicho punto y la pendiente del diagrama será perpendicular al eje de la barra.

Sin carga : La forma del diagrama de fuerzas cortantes es una línea paralela al eje de la barra.

Tipo de carga	Diagrama de Momento flexionante	Diagrama de Fuerza cortante
Fuerza concentrada	Discontinuo	Línea recta perpendicular al eje.
Momento concentrado	Línea recta perpendicular al eje.	Sin cambio
Sin carga	Lineal	Constante paralela al eje.
Uniforme repartida	Parabólico de 2do grado	Lineal
Uniforme triangular	Parabólico de 3er grado	Parabólico de 2do grado

Diagrama de momentos flexionantes.

Recordando que el área bajo el diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio del momento flexionante entre los mismos puntos. A continuación se especifica para cada tramo su área correspondiente.

Areas.

Para obtener el área correspondiente a los tramos donde se existan cargas uniformemente distribuidas se realizará el procedimiento mostrado en el problema 2.5, utilizando el diagrama de fuerzas cortantes para obtener los triángulos semejantes y sus respectivas dimensiones.

*Barra1*

$$X_1 = 2.86(4)/(2.86+5.14)=1.43m$$

$$X_2 = 5.14(4)/(2.86+5.14) =2.57m$$

Para el cálculo de las áreas ver el diagrama de cortantes que se muestra al final del ejemplo.

Tramo	<i>Barra1 (A-B)</i>	<i>Barra2 (B-B*)</i>	<i>Barra 2 (B*-C)</i>	<i>Barra3 (D-C)</i>
Figura	Trapezio	Triángulo	Triángulo	Rectángulo
Area	$5(14.86+4.86)/2=49.3$	$1.43(+2.86)/2=2.045$	$2.57(-5.14)/2=-6.605$	$6.71(-2.3) = -15.43$

Con los valores calculados para el área de cada tramo, se prosigue a trazar el diagrama de momentos flexionantes llevando a cabo en cada punto el siguiente equilibrio de fuerzas:

Donde cada término significa lo siguiente

$M_A$ = momento en el punto A

$M_i$  = momento del intervalo a la izquierda

$M_{AD}$ = momento del intervalo a la derecha

$A_{A-B}$  = Area calculada entre el punto A y B.

***Barra 1 (A-B)***

$$M_i = M_A = -49.29$$

$$M_D = M_i + A_{CC^*} = -49.29 + 49.29 = 0$$

***Barra 2 (B-B\*)***

$$M_i = M_{DAB} + M_B = 0 + 0 = 0$$

$$M_D = M_i + A_{BB^*} = 0 + 2.045 = +2.045$$

***Barra2 (B\*-C)***

$$M_i = M_{DBB^*} + M_{B^*} = +2.045 + 0 = +2.045$$

$$M_D = M_i + A_{B^*-C} = +2.045 + (-6.605) = -4.56$$

***Barra 4 (C-D) por equilibrio en el nudo c***

$$M_i = M_C = +5.44$$

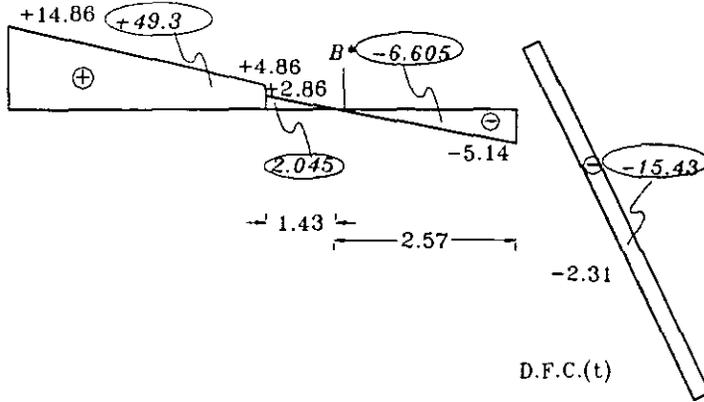
$$M_D = M_i + A_{D-C} = +5.44 + (-15.43) = -10$$

Para trazar el diagrama de momentos flexionantes se tomaran en cuenta las consideraciones mostradas en la tabla para definir la forma del diagrama.

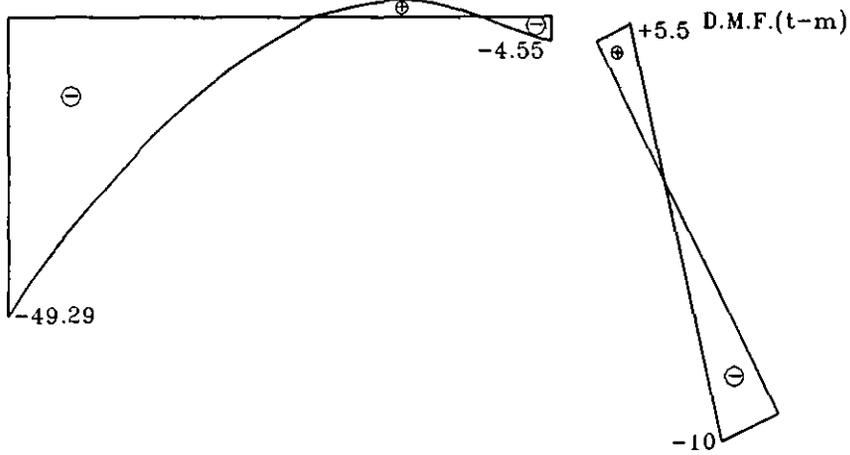
Momento concentrado: El diagrama de momento flexionante cambia bruscamente con un valor igual al momento concentrado y la pendiente es una línea recta perpendicular al eje de la barra. En el tramo A-B y B-C debido a la carga uniformemente repartida, se trazará una parábola de segundo grado. A continuación se muestran los diagramas de fuerzas cortantes con las áreas correspondientes para cada tramo y el diagrama de momentos flexionantes.

Diagramas de elementos mecánicos.

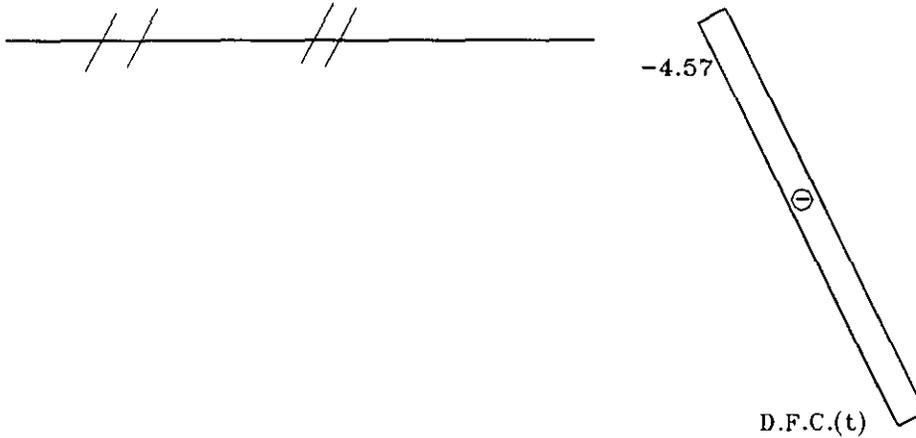
*Diagrama de fuerzas cortantes.*



*Diagrama de momentos flexionantes*

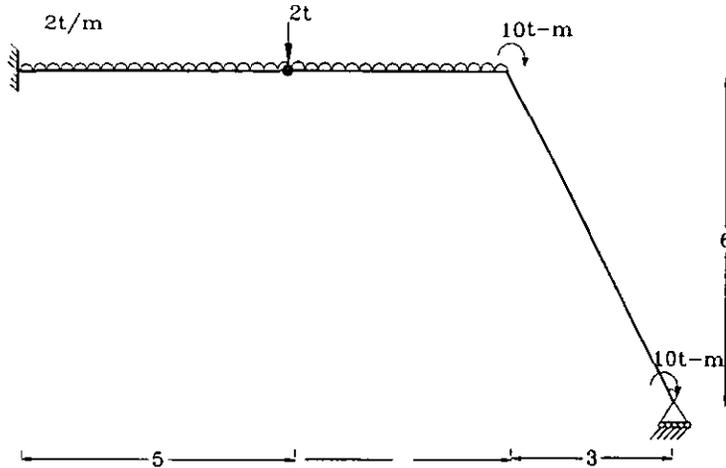


*Diagrama de fuerzas normales*



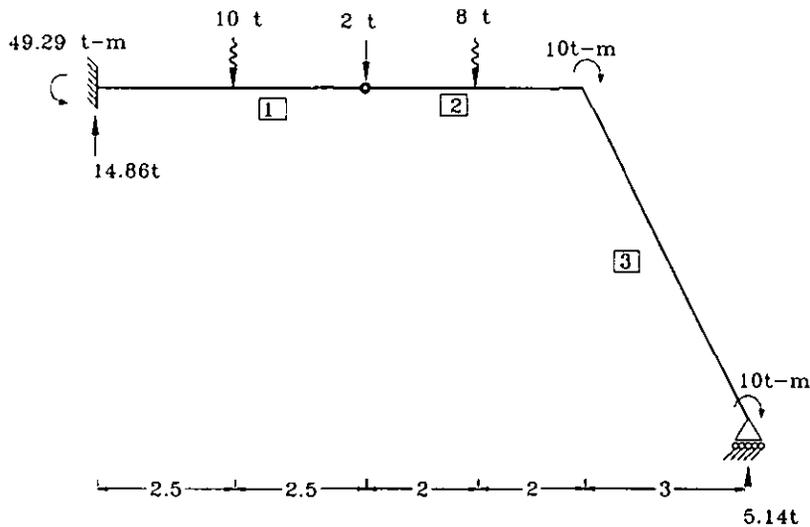
### Problema 3.12

Calcular y graficar los elementos mecánicos de la siguiente estructura por el método de superposición.



### Solución

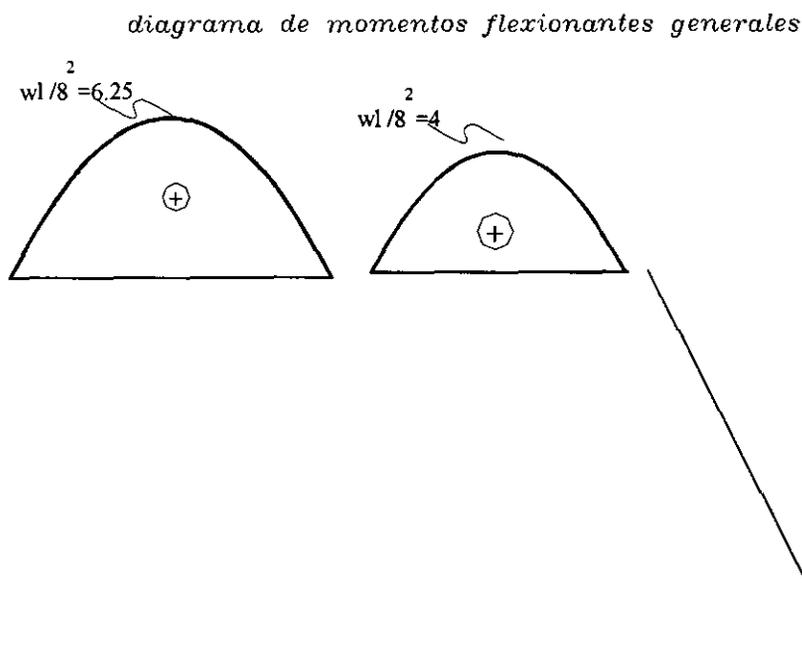
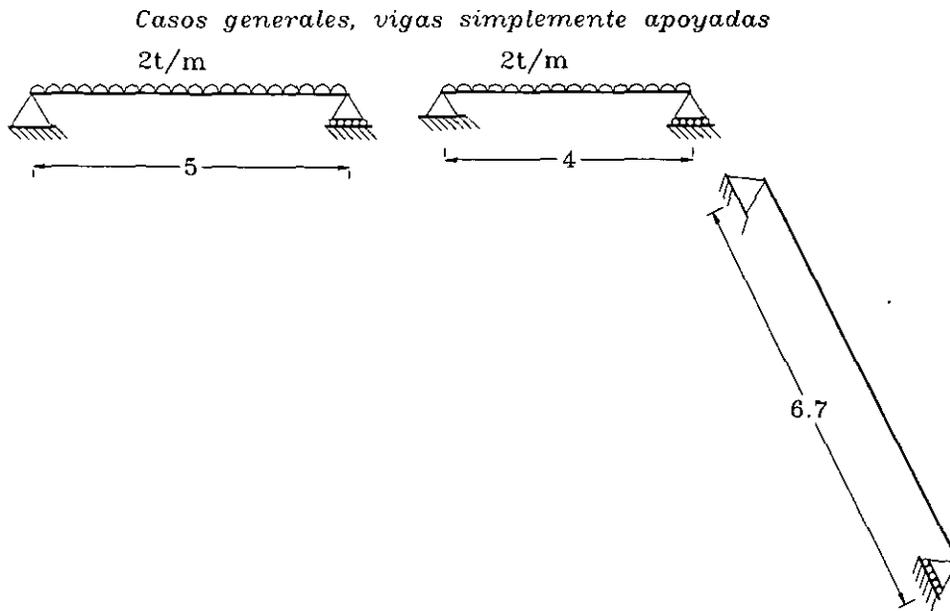
Se trata de una viga estáticamente determinada cuyas reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo anterior.



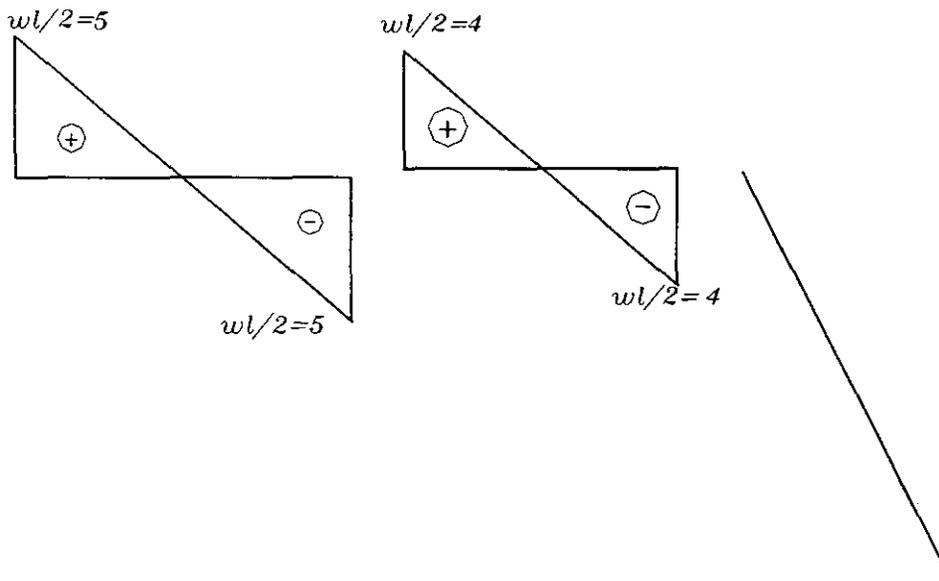
El método de superposición se basa en el principio de causas y efectos que se presentan en una estructura, sumándolos en forma individual y que dan por resultado el mismo diagrama si se consideraran simultáneamente.

Definición de vigas simplemente apoyadas (casos generales) y cálculo de diagramas de momentos y cortantes.

Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura. El marco se dividirá en vigas simplemente apoyadas, buscando que coincidan con alguno de los tres casos generales que se han estado manejando en los problemas anteriores de superposición.



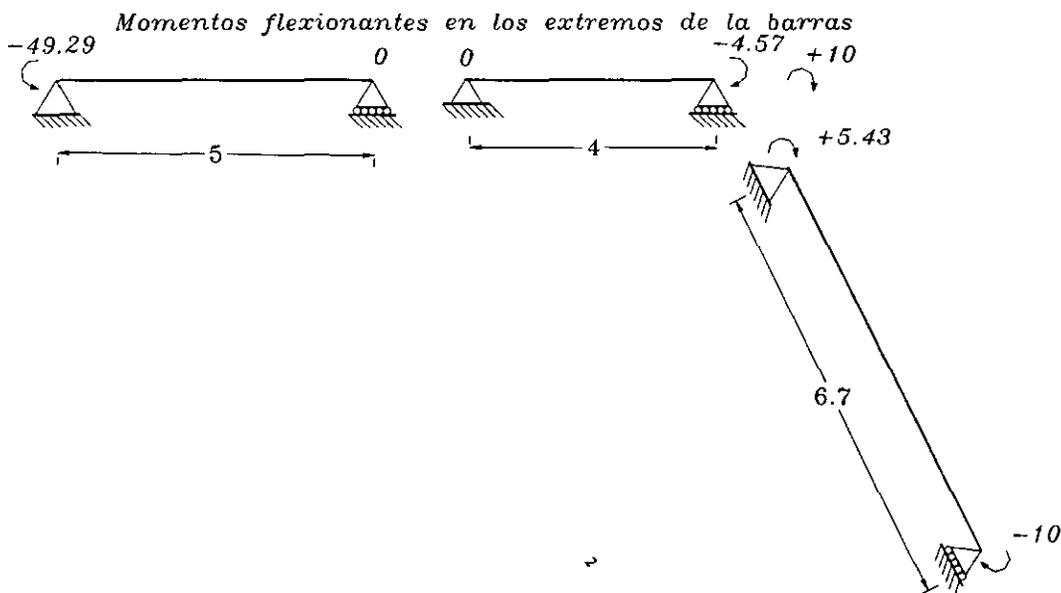
*diagrama de cortantes generales*



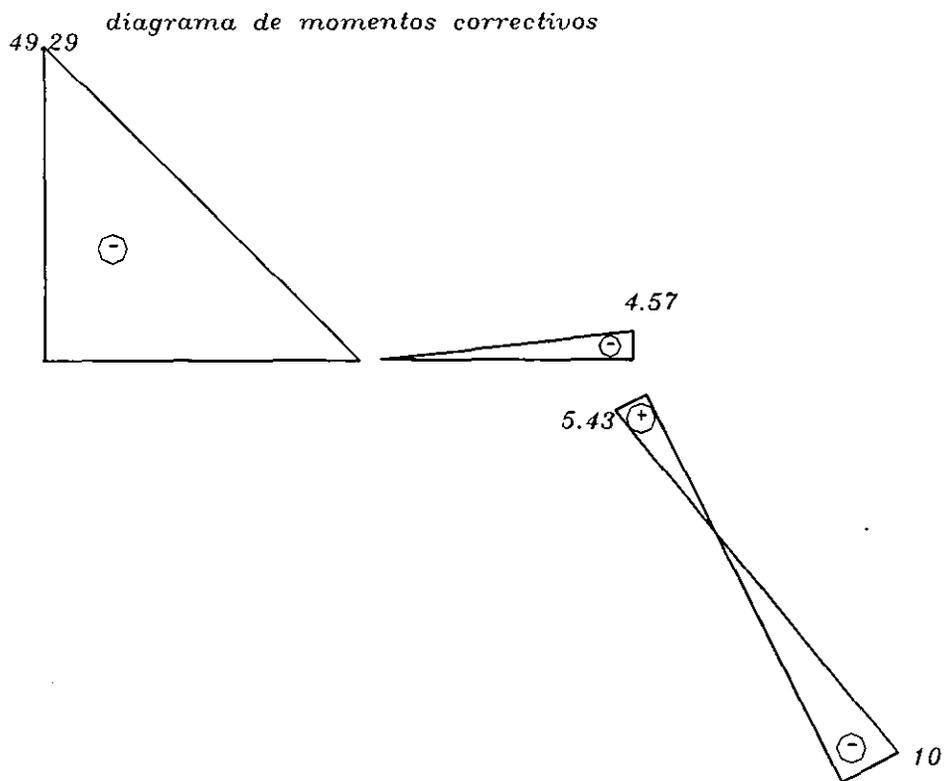
Calculo de los momentos flexionantes en los extremos de las barras.

El siguiente paso a seguir es obtener los valores de los momentos flexionantes en los extremos de las barras determinadas anteriormente, esto se logra realizando una  $\Sigma M$  hasta el punto en cuestión, es decir hasta cada punto extremo de las vigas simplemente apoyadas.

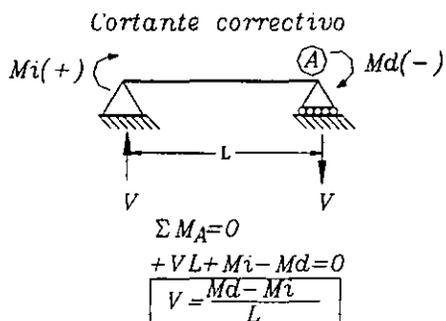
El signo del momento flexionante obedecerá al efecto que este provocando, se considerará positivo cuando provoque un efecto de tensión y será negativo cuando provoque un efecto de compresión.



A partir de estos valores se construirá un diagrama de momentos correctivos, los valores positivos se graficarán en la parte inferior de la línea de referencia y los negativos en la parte superior de dicha línea.



A partir de los valores graficados en el diagrama de momentos correctivos se obtendrán los valores para el diagrama de cortantes correctivos empleando la siguiente expresión:



Aplicando la expresión anterior a los valores de los momentos correctivos se tiene lo siguiente:

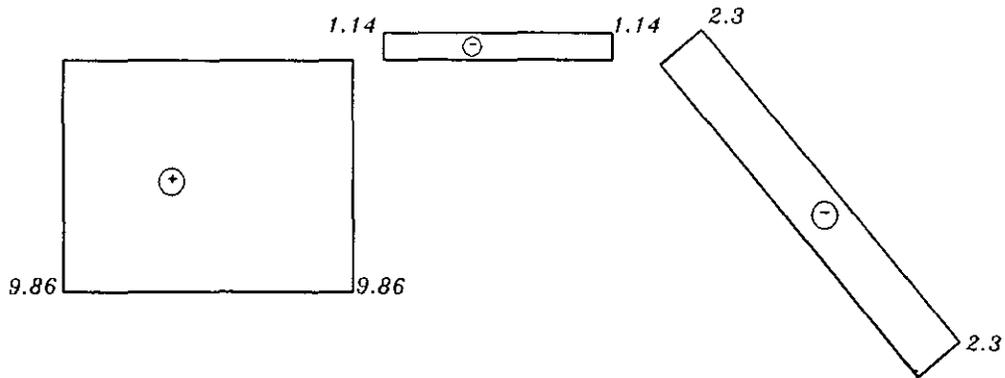
$$V_1 = [0 - (-49.29)] / 5 = 9.86$$

$$V_3 = [-10 - (+5.43)] / 6.708 = -2.3$$

$$V_2 = [-4.57 - 0] / 4 = -1.14$$

Estos valores se grafican al igual que el diagrama de momentos correctivos, los valores se unirán con líneas rectas ubicando arriba de la línea de referencia los valores negativos y abajo los valores positivos.

*diagrama de cortantes correctivos*



Superposición de diagramas correctivos y casos generales.

Finalmente teniendo los diagramas de momentos y cortantes correspondientes a los casos generales y casos correctivos se grafican los dos simultáneamente superponiéndolos uno sobre el otro, y los diagramas finales serán la suma algebraica de los diagramas anteriores respectivamente.

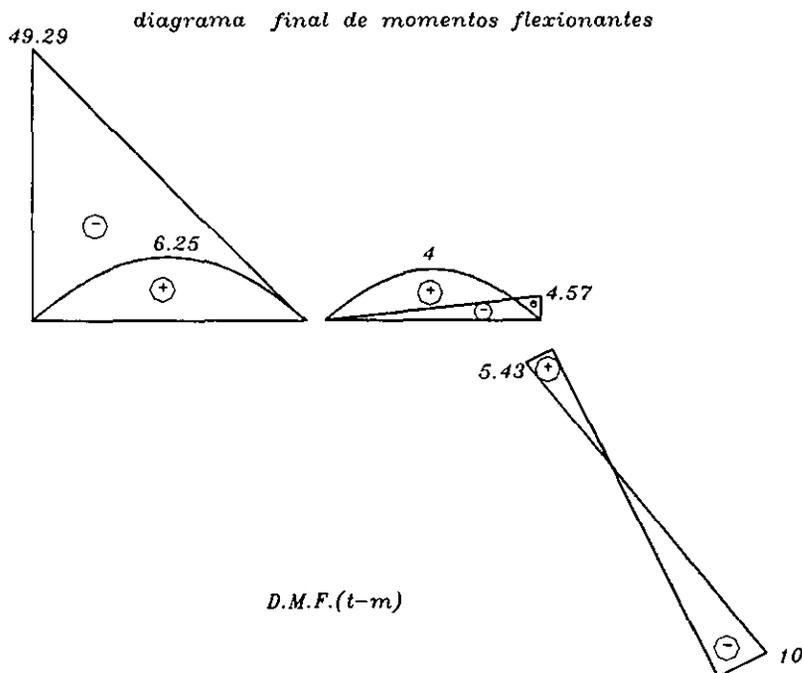
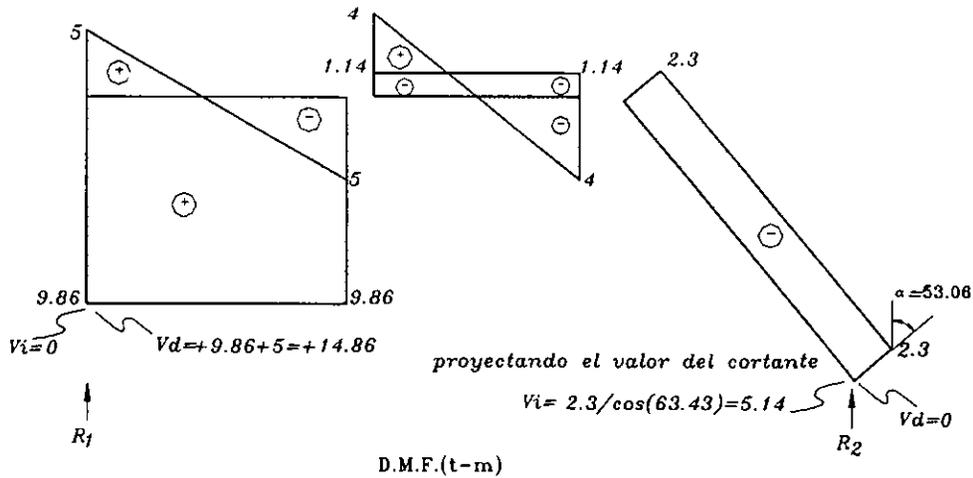


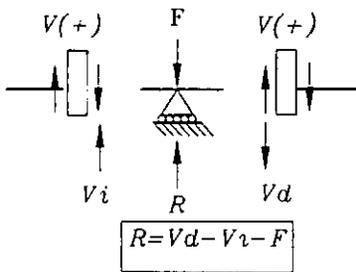
diagrama final de fuerzas cortantes



### Cálculo de reacciones.

Para obtener el valor de las reacciones, es necesario calcular del diagrama de fuerzas cortantes finales las alturas reales o sea los cortantes reales a ambos lados del punto donde se encuentre la reacción.

Esto también se puede realizar aplicando la siguiente expresión:



$$\underline{R_1} = 14.86 - 0 = 14.86 \text{ ton}$$

R2 se calcula realizando una proyección del valor del diagrama de fuerzas cortantes de la barra tal como se muestra en el diagrama final de fuerzas cortantes.

$$\underline{R_2} = 0 - (-5.14) = 5.14 \text{ ton}$$

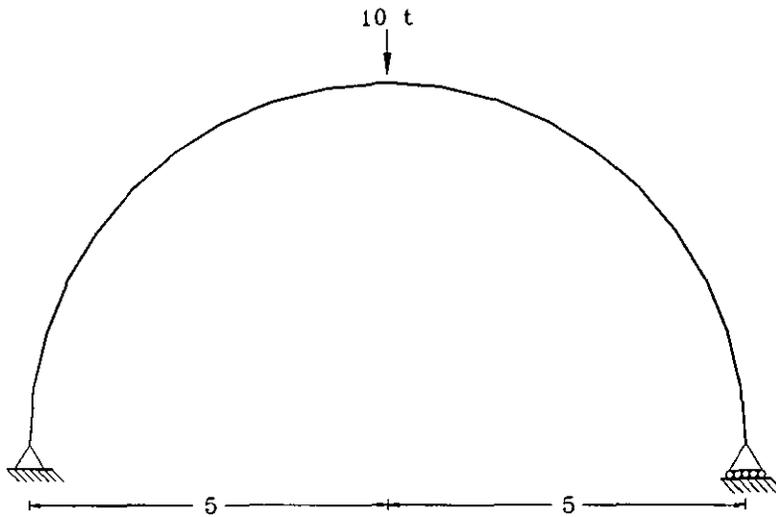
## **V.- ELEMENTOS MECANICOS EN ARCOS.**

### PROBLEMAS RESUELTOS

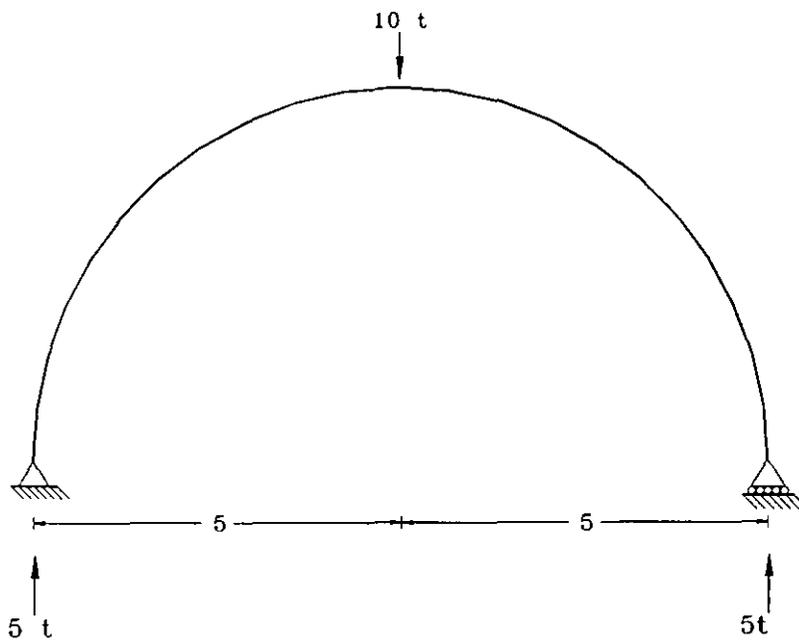
- Problema 5.1
- Problema 5.2
- Problema 5.3
- Problema 5.4

### Problema 5.1

Calcular y graficar los elementos mecánicos del siguiente arco por el método de ecuaciones.



### Solución



Se trata de un arco estáticamente determinada cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo 2.

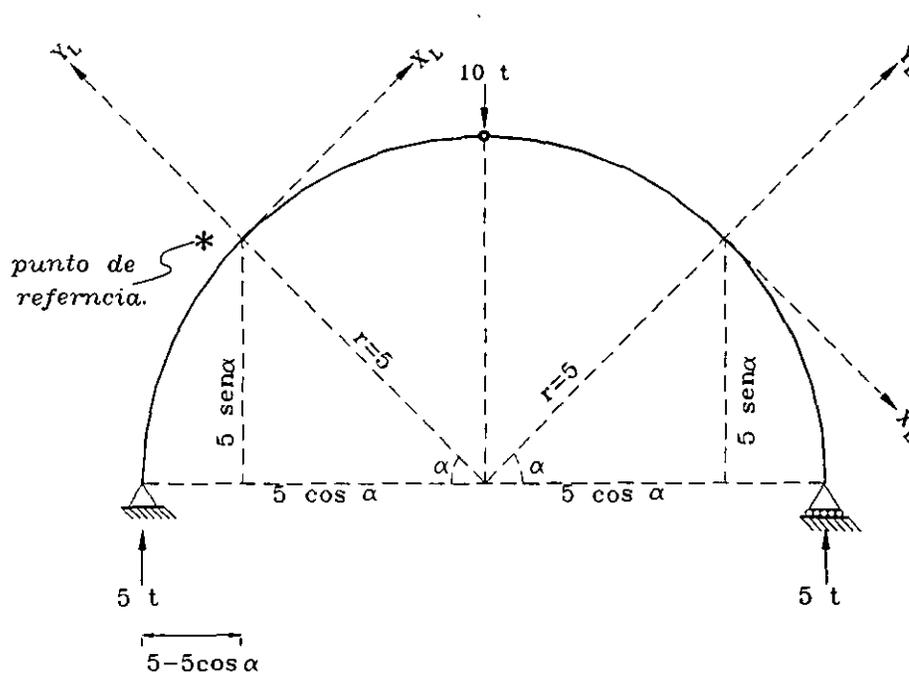
### Observaciones preliminares.

- Debido a que se trata de un arco circular es importante ubicar un sistema de referencia con el origen en el extremo izquierdo del arco.
- Se plantearán unos ejes locales y un punto de referencia para realizar el análisis, para cada punto de referencia cambiará la posición de los ejes locales los cuales a su vez también cambiarán con el eje curvo del arco.
- En cada punto de referencia se buscarán las fuerzas tangenciales a ese punto, y las colineales al centro del arco.
- En una estructura de eje curvo punto a punto cambia la dirección de la fuerza cortante y fuerza normal por ello se deben de definir una función que represente el efecto de la fuerza normal y la fuerza cortante.

### Intervalos de validez de las funciones.

#### Consideraciones.

- Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura.
- Se considera un intervalo hasta el punto donde hay una fuerza concentrada.
- Empieza y finaliza un intervalo donde inicia y termina una carga uniformemente repartida.
- Las cargas que se deben considerar para cada intervalo son las que están a la izquierda y abajo del punto de referencia, ya sean concentradas o uniformemente repartidas en su parte proporcional o tributaria.



De acuerdo con las consideraciones ya establecidas para la definición de intervalos y realizando el análisis de izquierda a derecha se tiene el siguiente:

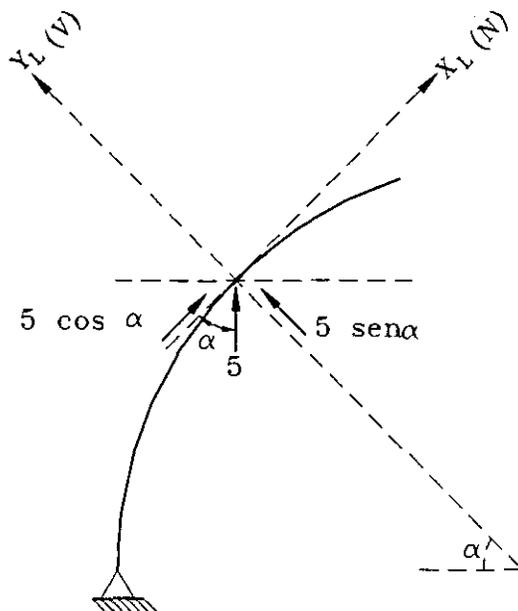
$$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$

La única fuerza concentrada esta ubicada cuando  $\alpha = 90^\circ$  por lo tanto hasta este punto se considera el intervalo.

### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos .

- Se dibujará un diagrama de cuerpo libre del punto de interés con sus cargas reales.
- Para evaluar la fuerza cortante y fuerza axial, se acumulan las fuerzas de bajo hacia arriba y posteriormente se proyectan sobre los ejes locales.

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de izquierda a derecha)



$$V(x) = 5 \operatorname{sen} \alpha$$

$$N(x) = 5 \operatorname{cos} \alpha$$

$$M(x) = 5 (5 - 5 \operatorname{cos} \alpha)$$

Nota.

Debido a que la estructura es simétrica únicamente se realiza el análisis para la primera mitad del arco, pero en el caso de la fuerza cortante al ir girando los ejes locales con el eje circular, el signo de este elemento mecánico cambia de sentido.

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos

Intervalo	$\alpha$	V( $\alpha$ )	N( $\alpha$ )	M( $\alpha$ )
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	0°	0	-5	0
	15°	1.29	-4.83	.85
	30°	2.5	-4.33	3.35
	45°	3.53	-3.53	7.32
	60°	4.33	-2.5	12.5
	75°	4.83	-1.29	18.53
	90°	5	0	25

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerza cortante.

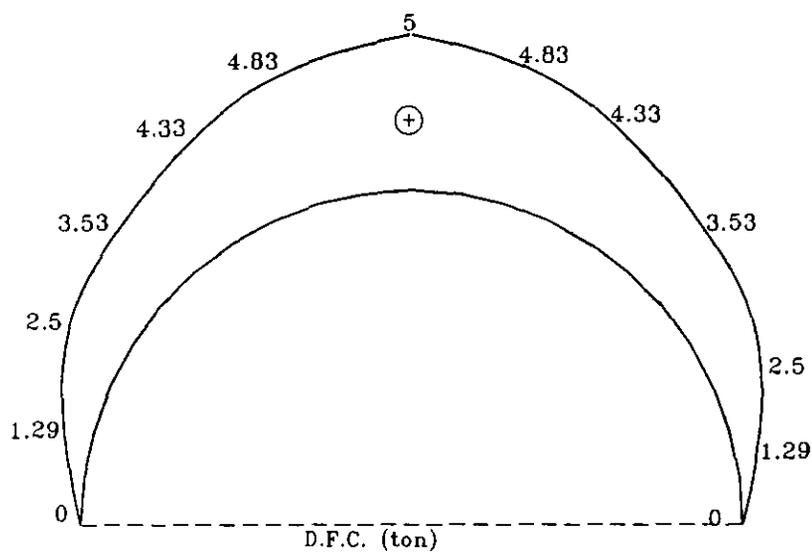


Diagrama de momentos flexionantes.

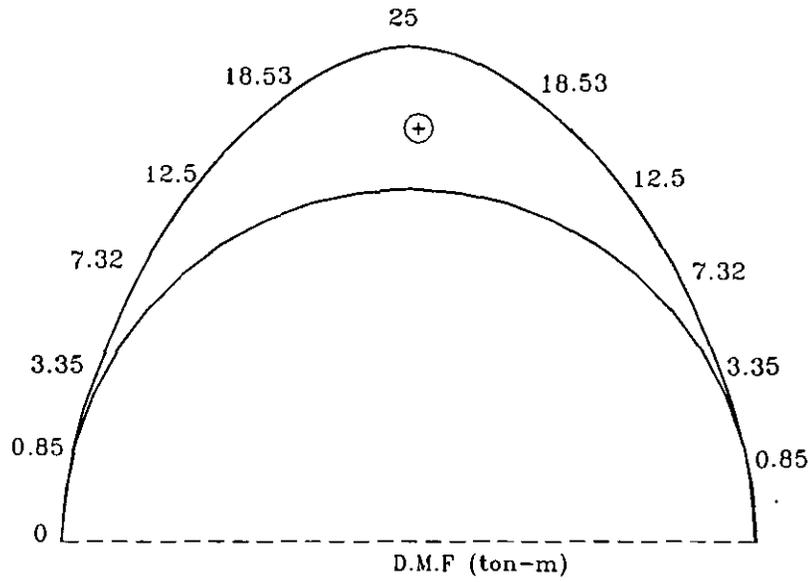


Diagrama de fuerzas normales.

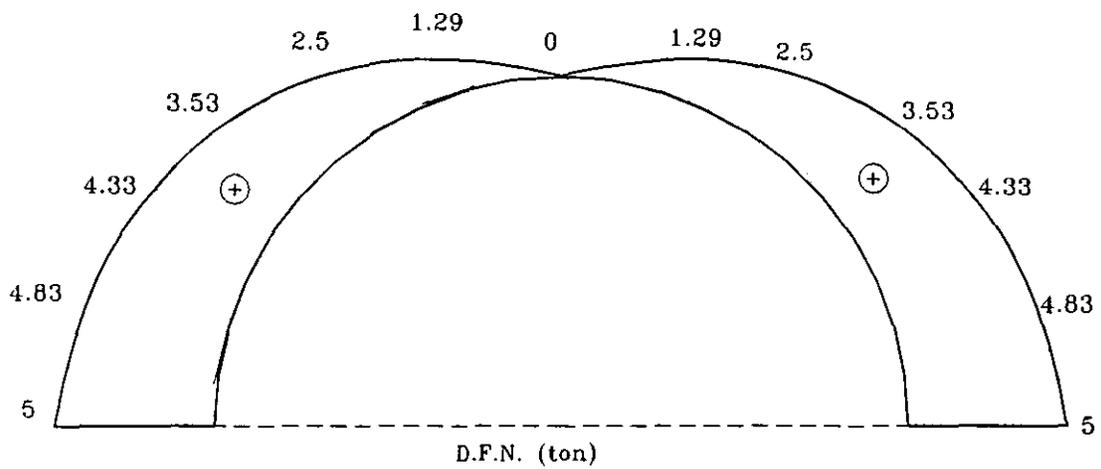
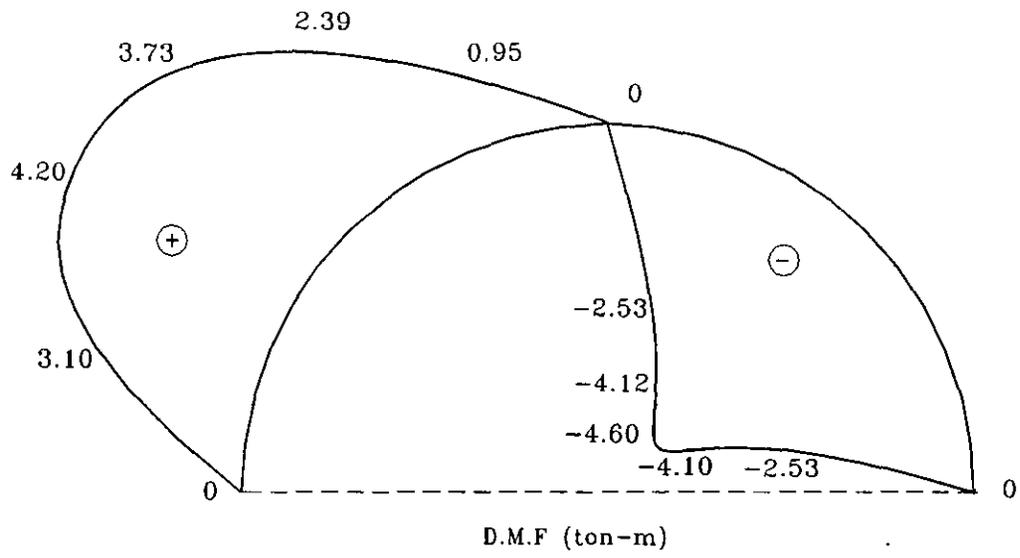
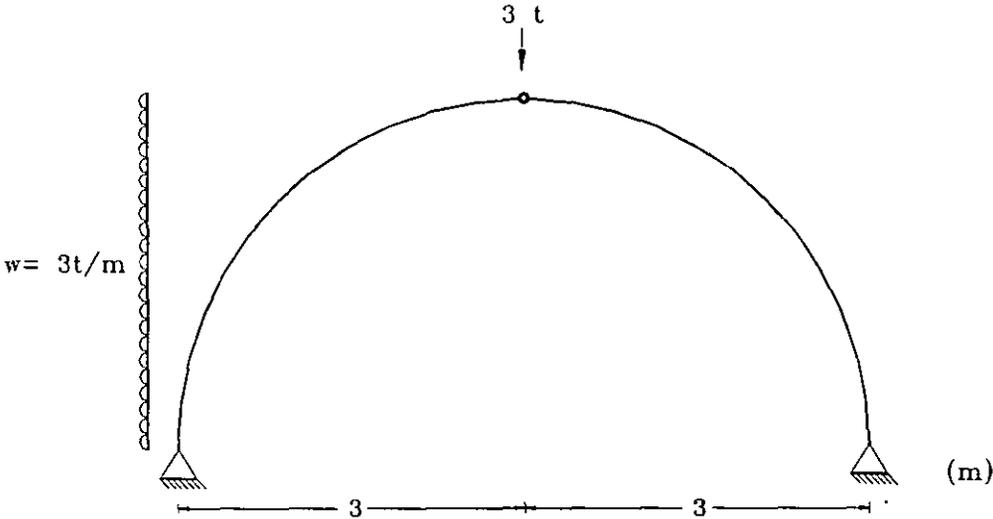


Diagrama de momentos flexionantes

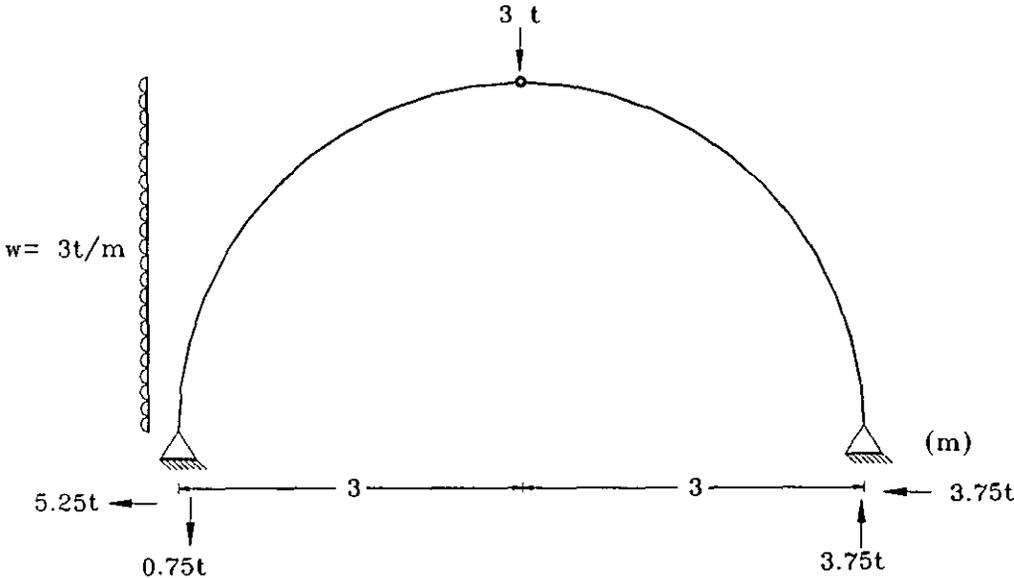


**Problema 5.2**

Calcular y graficar los elementos mecánicos del siguiente arco por el método de ecuaciones.



Solución



Se trata de un arco estáticamente indeterminado cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo 2.

### Observaciones preliminares.

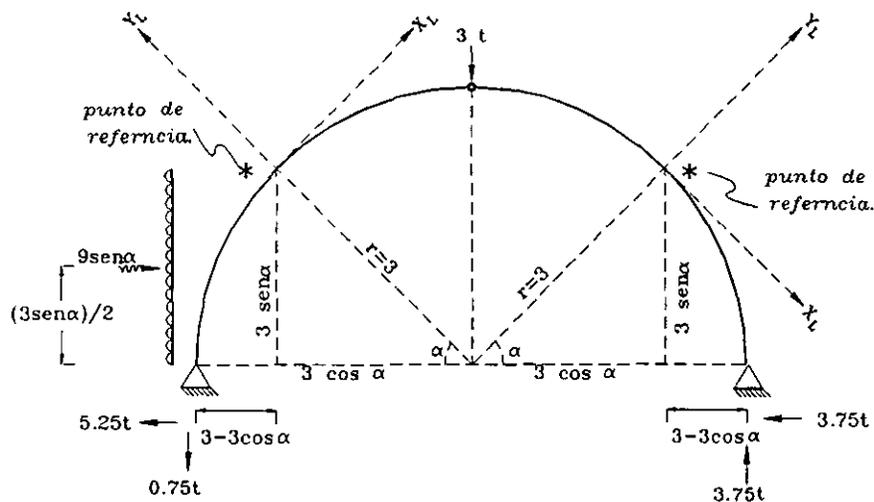
- Debido a que se trata de un arco circular es importante ubicar un sistema de referencia con el origen en el extremo izquierdo del arco.
- Se plantearán unos ejes locales y un punto de referencia para realizar el análisis, para cada punto de referencia cambiará la posición de los ejes locales los cuales a su vez también cambiarán con el eje curvo del arco.
- En cada punto de referencia se buscarán las fuerzas tangenciales a ese punto, y las colineales al centro del arco.
- En una estructura de eje curvo punto a punto cambia la dirección de la fuerza cortante y fuerza normal por ello se deben de definir una función que represente el efecto de la fuerza normal y la fuerza cortante.

### Intervalos de validez de las funciones.

#### Consideraciones.

- Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura.
- Se considera un intervalo hasta el punto donde hay una fuerza concentrada.
- Empieza y finaliza un intervalo donde inicia y termina una carga uniformemente repartida.
- Las cargas que se deben considerar para cada intervalo son las que están a la izquierda y abajo del punto de referencia, ya sean concentradas o uniformemente repartidas en su parte proporcional o tributaria.

Obtención de la parte proporcional de la carga uniformemente repartida hasta el punto de interés.



De acuerdo con las consideraciones ya establecidas para la definición de intervalos se tiene los siguientes:

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de izquierda a derecha)

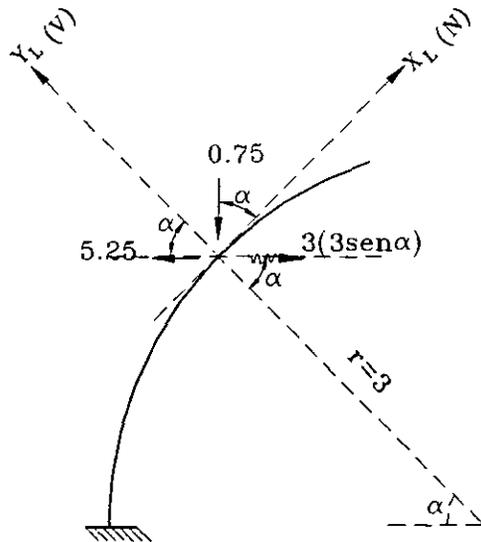
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de derecha a izquierda)

Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos .

- Se dibujará un diagrama de cuerpo libre del punto de interés con sus cargas reales.
- Para evaluar la fuerza cortante y fuerza axial, se acumulan las fuerzas de bajo hacia arriba y posteriormente se proyectan sobre los ejes locales.

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de izquierda a derecha)

Definiendo las fuerzas que van a participar en este intervalo y haciendo un diagrama de cuerpo libre del punto de interés se tiene lo siguiente:



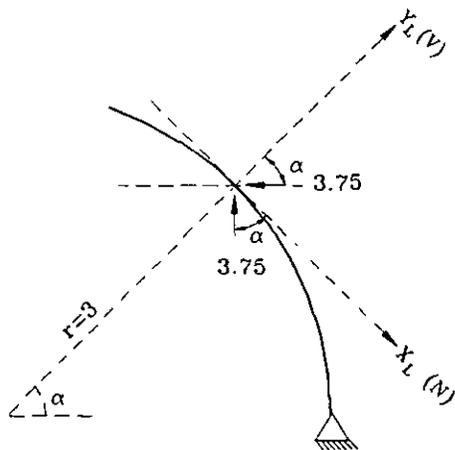
Proyectando las fuerzas sobre los ejes locales.

$$M(x) = 5.25(3 \text{ sen}\alpha) - 0.75(3 - 3\text{cos}\alpha) - 3(3 \text{ sen}\alpha)(3 \text{ sen}\alpha)/2$$

$$V(x) = 5.25 \text{ cos}\alpha - 0.75 \text{ sen}\alpha - 3(3 \text{ sen}\alpha)\text{cos}\alpha$$

$$N(x) = - 5.25 \text{ sen}\alpha - 0.75 \text{ cos}\alpha + 3(3 \text{ sen}\alpha)\text{sen}\alpha$$

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Realizando el análisis de derecha a izquierda)



Nota.

Se debe anteponer un signo negativo a las ecuaciones ya que el análisis se esta realizando de derecha a izquierda.

$$M(x) = -[ 3.75(3 \operatorname{sen}\alpha) - 3.75(3-3\operatorname{cos}\alpha)]$$

$$V(x) = -[-3.75 \operatorname{cos} \alpha + 3.75 \operatorname{sen} \alpha ]$$

$$N(x) = -[-3.75 \operatorname{cos} \alpha - 3.75 \operatorname{sen} \alpha ]$$

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$M(\alpha)$	$N(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	5.25	0	-0.75
	$15^\circ$	2.41	3.1	-1.48
	$30^\circ$	0.08	4.2	-1.02
	$45^\circ$	-1.48	3.73	+0.26
	$60^\circ$	-2.03	2.39	+1.83
	$75^\circ$	-1.68	0.95	+3.13
	$90^\circ$	-0.75	0	+3.75

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$M(\alpha)$	$N(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	+3.75	0	3.75
	$15^\circ$	+2.65	-2.53	4.6
	$30^\circ$	+1.37	-4.12	5.1
	$45^\circ$	0	-4.6	5.3
	$60^\circ$	-1.37	-4.1	5.1
	$75^\circ$	-2.65	-2.53	4.6
	$90^\circ$	-3.75	0	3.75

Diagramas de elementos mecánicos.

*Diagrama de momentos flexionantes*

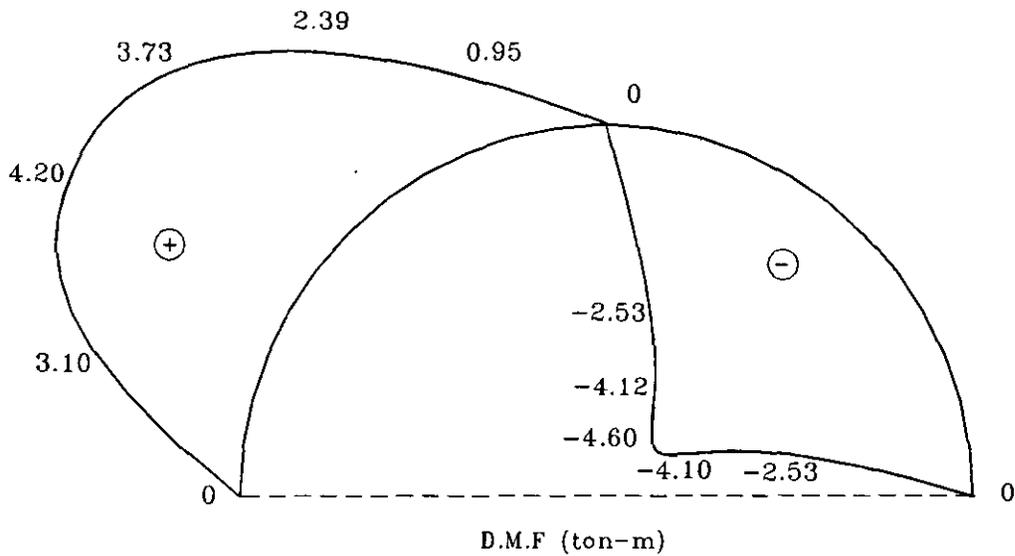


Diagrama de fuerzas cortantes

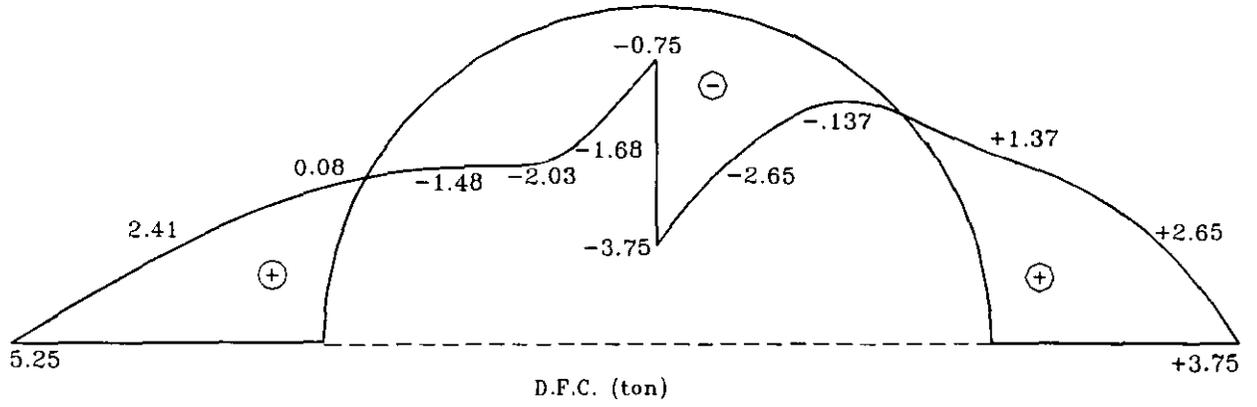
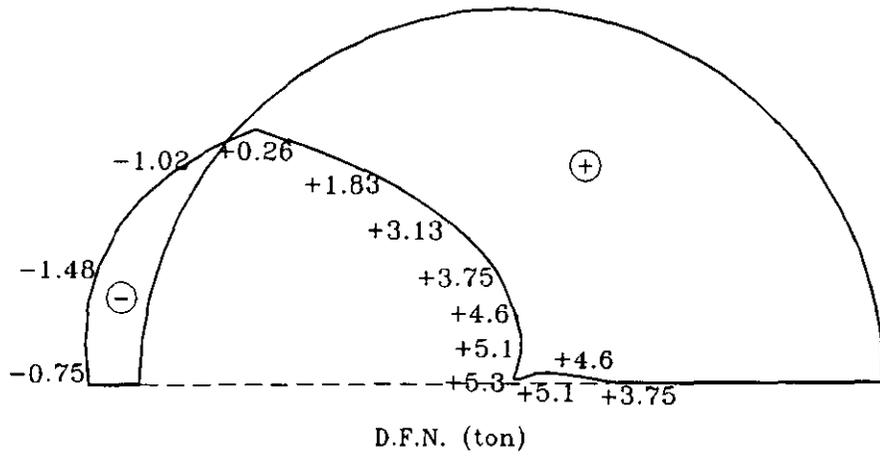
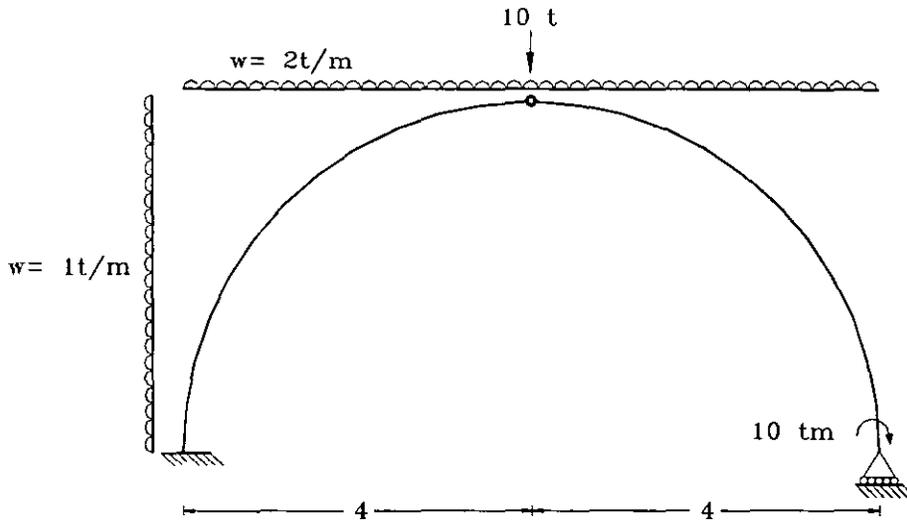


Diagrama de fuerzas normales

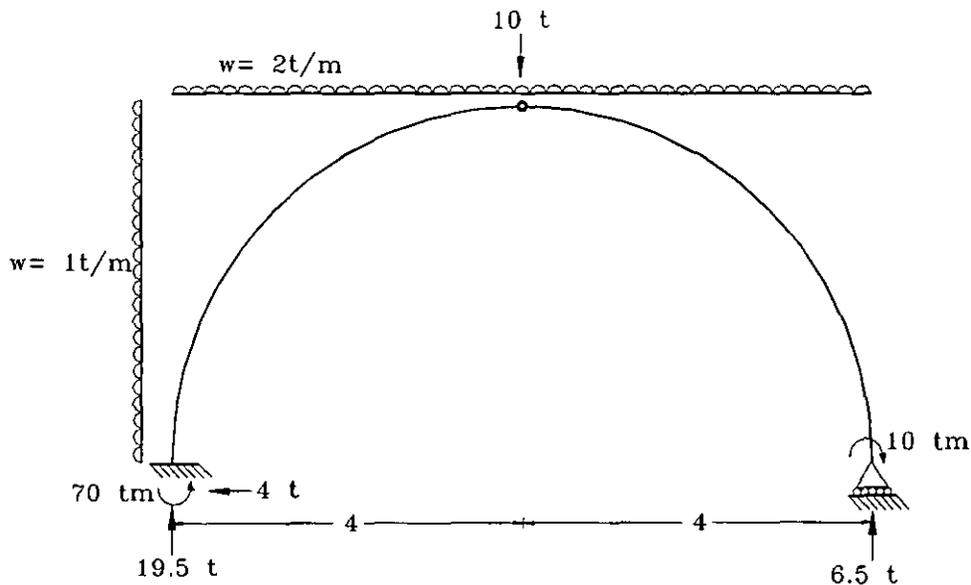


### Problema 5.3

Calcular y graficar los elementos mecánicos del siguiente arco por el método de ecuaciones.



### Solución



Se trata de un arco estáticamente determinado cuya reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo 2.

### Observaciones preliminares.

- Debido a que se trata de un arco circular es importante ubicar un sistema de referencia con el origen en el extremo izquierdo del arco.
- Se plantearán unos ejes locales y un punto de referencia para realizar el análisis, para cada punto de referencia cambiará la posición de los ejes locales los cuales a su vez también cambiarán con el eje curvo del arco.

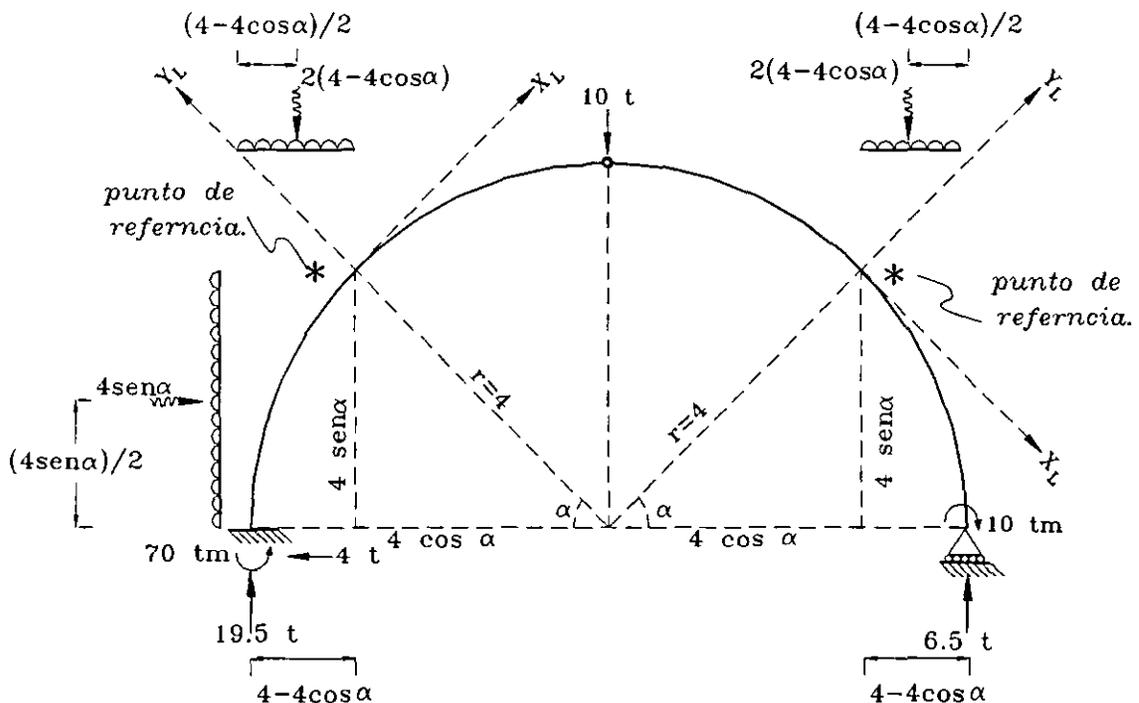
- En cada punto de referencia se buscarán las fuerzas tangenciales a ese punto, y las colineales al centro del arco.
- En una estructura de eje curvo punto a punto cambia la dirección de la fuerza cortante y fuerza normal por ello se deben de definir una función que represente el efecto de la fuerza normal y la fuerza cortante.

Intervalos de validez de las funciones.

Consideraciones.

- Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura.
- Se considera un intervalo hasta el punto donde hay una fuerza concentrada.
- Empieza y finaliza un intervalo donde inicia y termina una carga uniformemente repartida.
- Las cargas que se deben considerar para cada intervalo son las que están a la izquierda y abajo del punto de referencia, ya sean concentradas o uniformemente repartidas en su parte proporcional o tributaria.

Obtención de la parte proporcional de la carga uniformemente repartida hasta el punto de interés.



De acuerdo con las consideraciones ya establecidas para la definición de intervalos y realizando el análisis de izquierda a derecha se tiene el siguiente:

$$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$

Las fuerzas uniformemente distribuidas inician en  $\alpha = 0^\circ$  y terminan en  $\alpha = 90^\circ$  de esta forma el primer intervalo queda definido.

Realizando el análisis de derecha a izquierda se tiene el intervalo de:

$$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$

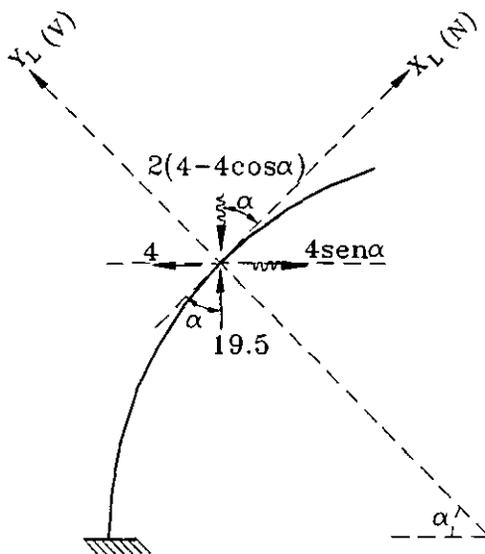
considerando el momento concentrado en el apoyo y además existe una parte de la carga uniformemente distribuida.

### Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos.

- Se dibujará un diagrama de cuerpo libre del punto de interés con sus cargas reales.
- Para evaluar la fuerza cortante y fuerza axial, se acumulan las fuerzas de bajo hacia arriba y posteriormente se proyectan sobre los ejes locales.

$$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \quad (\text{Análisis de izquierda a derecha})$$

Definiendo las fuerzas que van a participar en este intervalo y haciendo un diagrama de cuerpo libre del punto de interés se tiene lo siguiente:



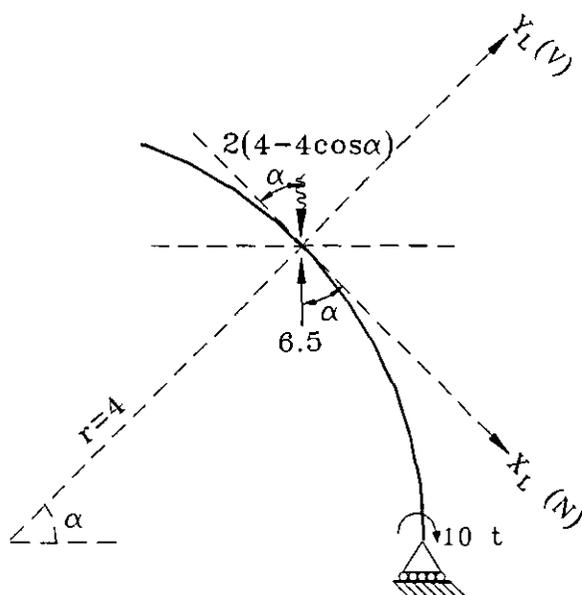
Proyectando las fuerzas sobre los ejes locales.

$$V(x) = 19.5 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{cos} \alpha - 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

$$N(x) = 19.5 \operatorname{cos} \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha - 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) \operatorname{cos} \alpha$$

$$M(x) = 19.5 (4-4\operatorname{cos} \alpha) + 4(4 \operatorname{sen} \alpha) - 70 - 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) (4-4\operatorname{cos} \alpha) / 2 - 4 \operatorname{sen} \alpha (4 \operatorname{sen} \alpha) / 2$$

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Realizando el análisis de derecha a izquierda)



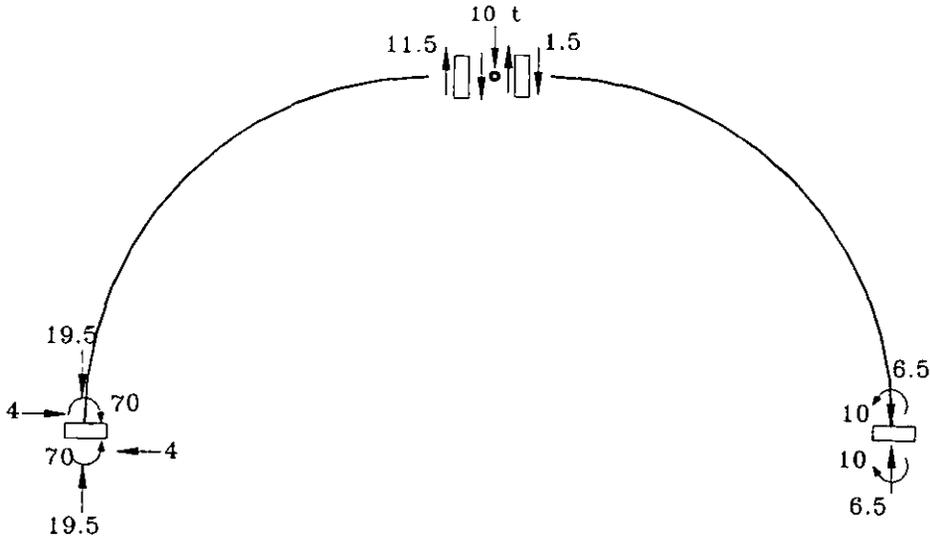
Nota.

Se debe anteponer un signo negativo a las ecuaciones ya que el análisis se esta realizando de derecha a izquierda.

$$V(x) = - [6.5 \operatorname{sen} \alpha - 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} \alpha ]$$

$$N(x) = - [-6.5 \operatorname{cos} \alpha + 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) \operatorname{cos} \alpha]$$

$$M(x) = - [-6.5 (4-4\operatorname{cos} \alpha) + 10 + 2(4-4\operatorname{cos} \alpha) (4-4\operatorname{cos} \alpha) / 2 ]$$



Tabulación de las funciones de elementos mecánicos

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$N(\alpha)$	$M(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	4	19.5	-70
	$15^\circ$	7.33	17.86	-63
	$30^\circ$	10.95	14.95	-53
	$45^\circ$	12.96	11.3	-41
	$60^\circ$	13.69	7.28	-27
	$75^\circ$	13.15	3.38	-12
	$90^\circ$	11.5	0	0

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$N(\alpha)$	$M(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	0	+6.5	-10
	$15^\circ$	-1.61	+6.0	-9.13
	$30^\circ$	-2.71	+4.7	-6.8
	$45^\circ$	-2.94	+2.9	-3.8
	$60^\circ$	-2.16	+1.25	-1
	$75^\circ$	-0.55	+0.15	-0.48
	$90^\circ$	+1.5	0	0

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerza cortante.

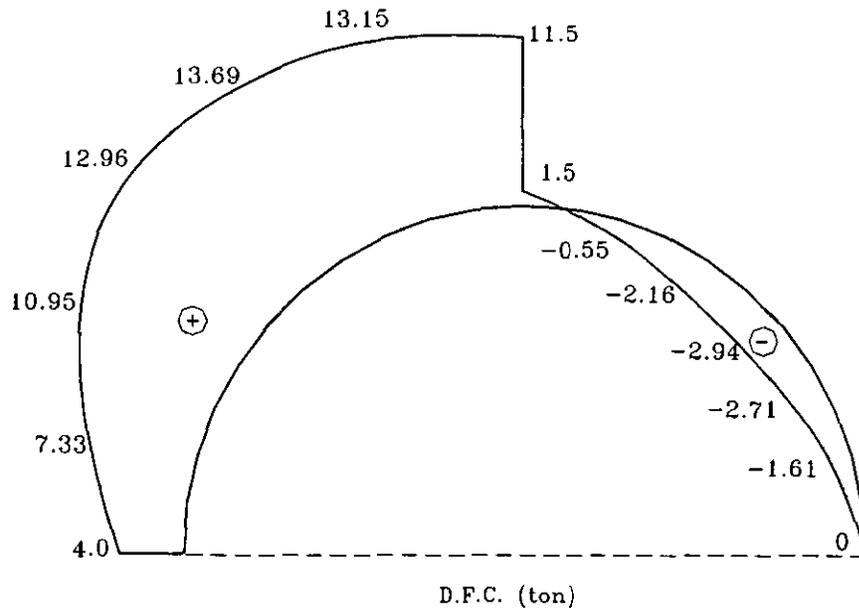


Diagrama de momentos flexionantes.

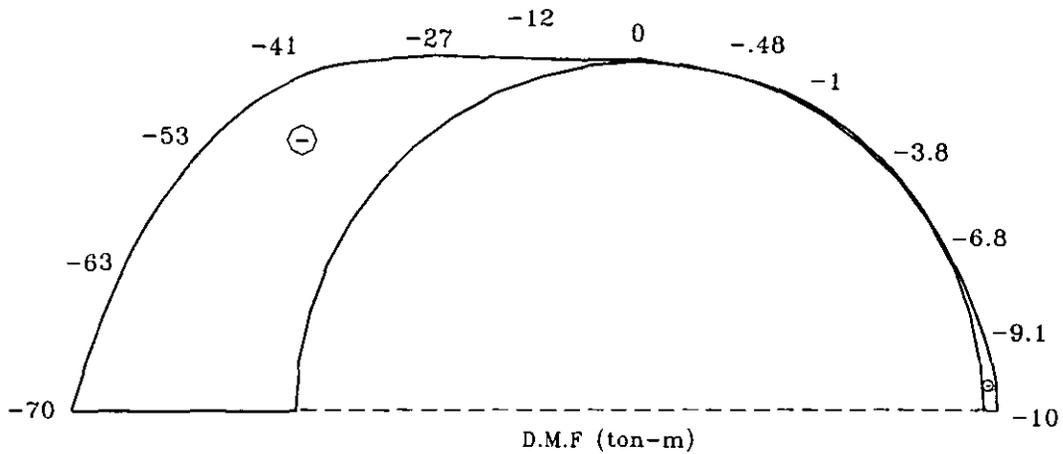
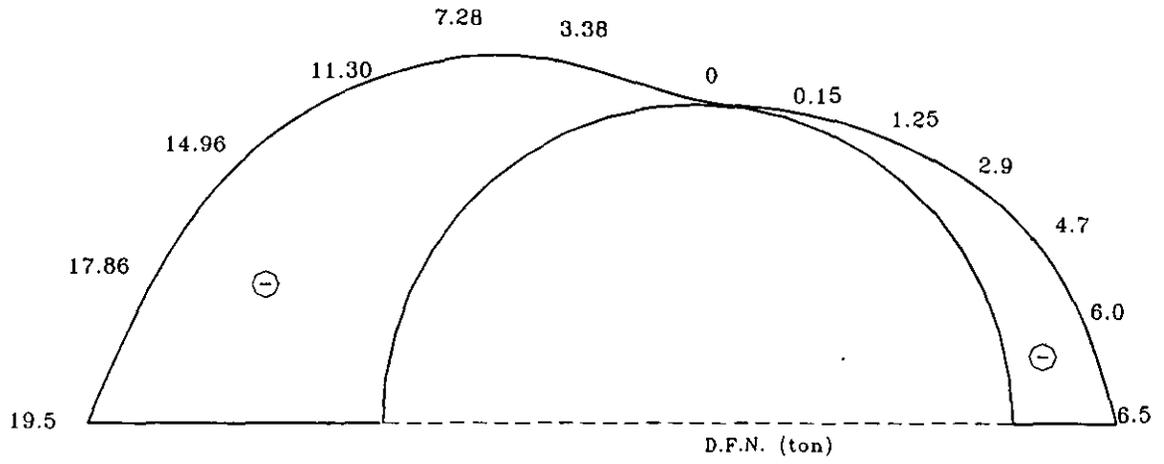
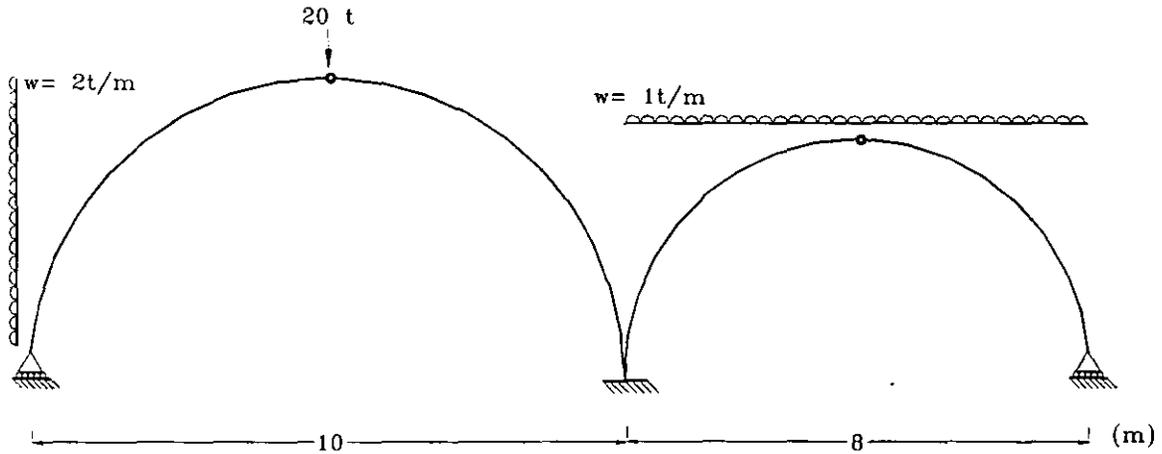


Diagrama de fuerzas normales.

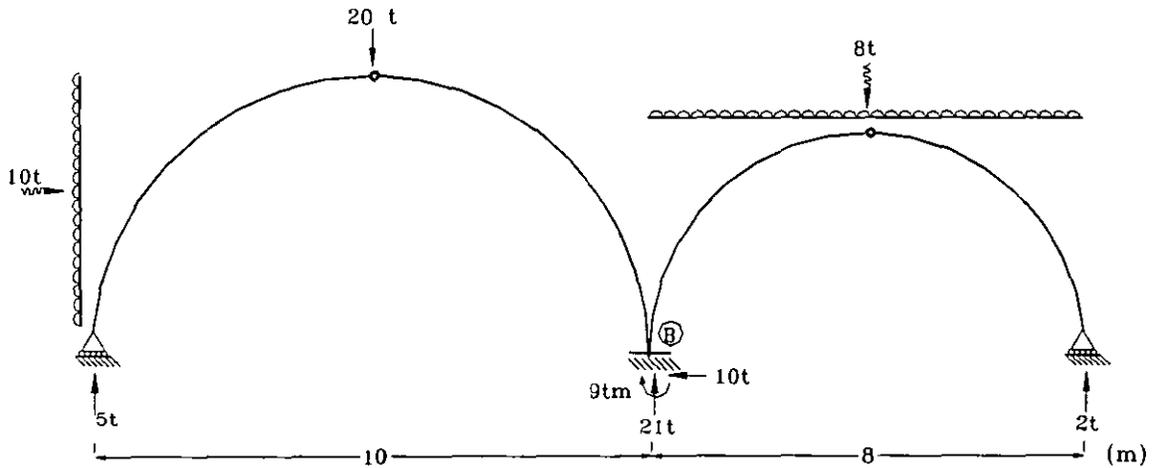


### Problema 5.4

Calcular y graficar los elementos mecánicos del siguiente arco por el método de ecuaciones.



### Solución



Se trata de un arco doble estáticamente determinado cuyas reacciones se calcularon siguiendo un procedimiento análogo al capítulo 2.

### Observaciones preliminares.

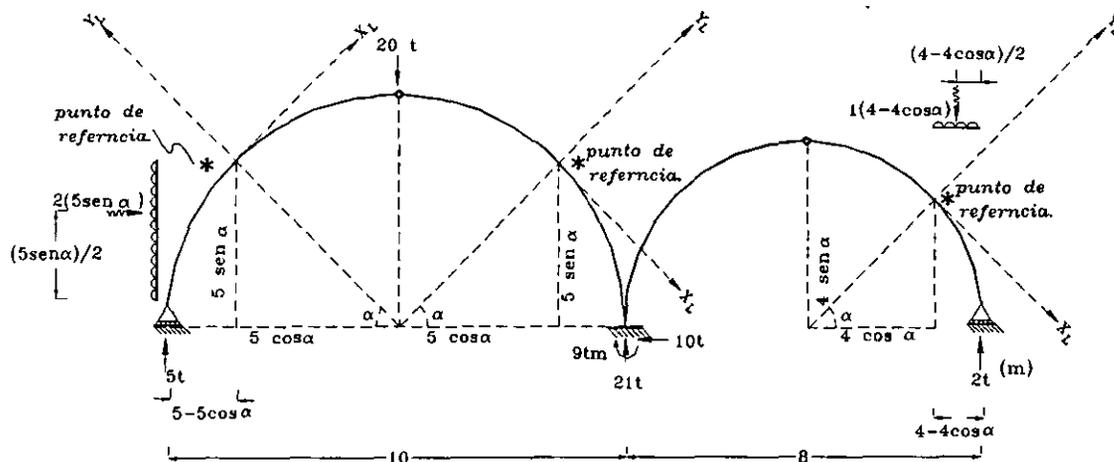
- Debido a que se trata de un arco circular es importante ubicar un sistema de referencia con el origen en el extremo izquierdo del arco.
- Se plantearán unos ejes locales y un punto de referencia para realizar el análisis, para cada punto de referencia cambiará la posición de los ejes locales los cuales a su vez también cambiarán con el eje curvo del arco.
- En cada punto de referencia se buscarán las fuerzas tangenciales a ese punto, y las colineales al centro del arco.
- En una estructura de eje curvo punto a punto cambia la dirección de la fuerza cortante y fuerza normal por ello se deben de definir una función que represente el efecto de la fuerza normal y la fuerza cortante.

### Intervalos de validez de las funciones.

#### Consideraciones.

- Para definir los intervalos es importante observar las cargas y geometría de la estructura.
- Se considera un intervalo hasta el punto donde hay una fuerza concentrada.
- Empieza y finaliza un intervalo donde inicia y termina una carga uniformemente repartida.
- Las cargas que se deben considerar para cada intervalo son las que están a la izquierda y abajo del punto de referencia, ya sean concentradas o uniformemente repartidas en su parte proporcional o tributaria.

Obtención de la parte proporcional de las cargas uniformemente repartidas hasta los puntos de interés.



De acuerdo con las consideraciones ya establecidas para la definición de intervalos se tienen los siguientes:

Primer arco

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (izquierda a derecha)

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (derecha a izquierda)

Segundo arco

$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$

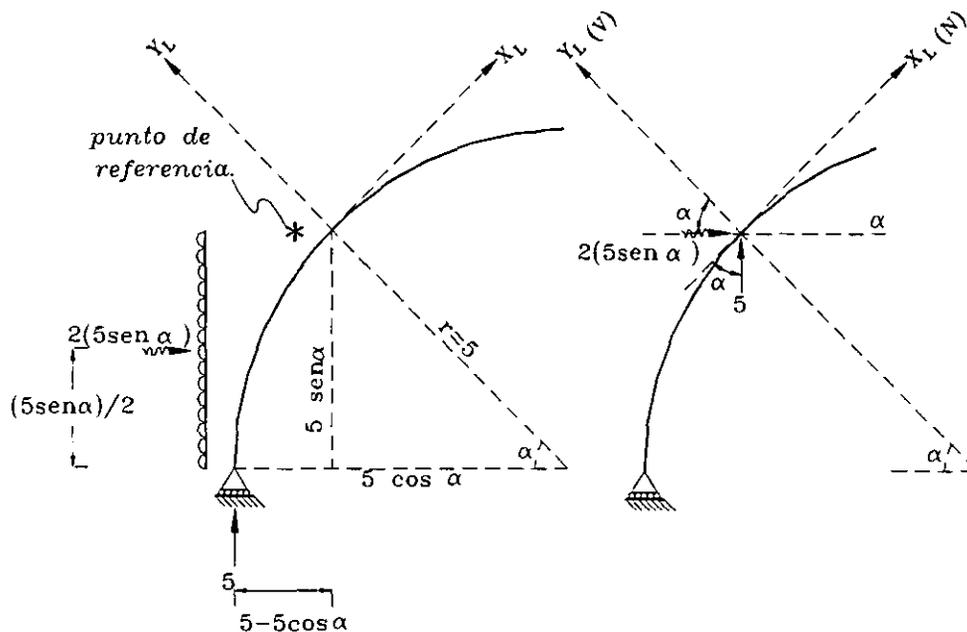
Planteamiento de las funciones de elementos mecánicos .

- Se dibujará un diagrama de cuerpo libre del punto de interés con sus cargas reales.
- Para evaluar la fuerza cortante y fuerza axial, se acumulan las fuerzas de bajo hacia arriba y posteriormente se proyectan sobre los ejes locales.

Primer arco

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de izquierda a derecha)

Definiendo las fuerzas que van a participar en este intervalo y haciendo un diagrama de cuerpo libre del punto de interés se tiene lo siguiente:



Proyectando las fuerzas sobre los ejes locales.

$$V(x) = 5 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{cos} \alpha - 2(5 \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{cos} \alpha$$

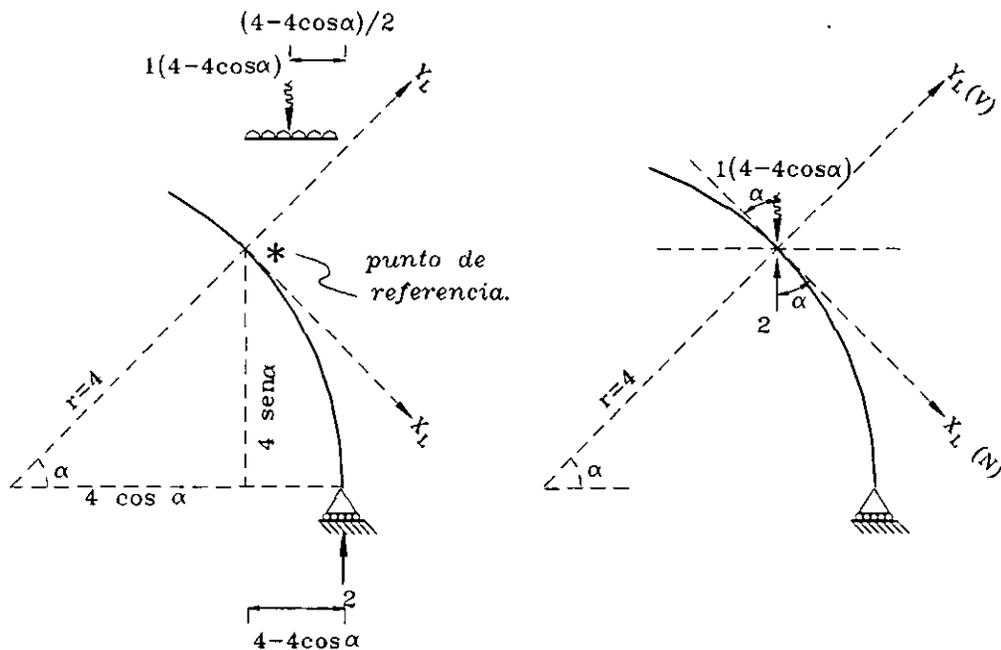
$$N(x) = 5 \operatorname{cos} \alpha + 2(5 \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha$$

$$M(x) = 5(5 - 5 \operatorname{cos} \alpha) - 2(5 \operatorname{sen} \alpha)(5 \operatorname{sen} \alpha) / 2$$

Para calcular las ecuaciones de elementos mecánicos del primer arco de derecha a izquierda en el intervalo de  $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ , es necesario conocer las fuerzas internas en el nudo B, por lo tanto primero se tendrán que calcular las fuerzas internas en el segundo arco en el nudo B y realizar un equilibrio de fuerzas en dicho punto.

Segundo arco

$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$  (Realizando el análisis de izquierda a derecha)



Nota.

Se debe anteponer un signo negativo a las ecuaciones ya que el análisis se está realizando de derecha a izquierda.

$$M(x) = - [-2(4-4 \operatorname{cos} \alpha) + (4-4 \operatorname{cos} \alpha)(4-4 \operatorname{cos} \alpha) / 2]$$

$$V(x) = - [2 \operatorname{sen} \alpha - (4-4 \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} \alpha]$$

$$N(x) = - [-2 \operatorname{cos} \alpha + (4-4 \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{cos} \alpha]$$

De acuerdo con las ecuaciones de elementos mecánicos para el segundo arco se obtienen los valores para  $\alpha = 180^\circ$

$$M(180^\circ) = 16\text{tm}$$

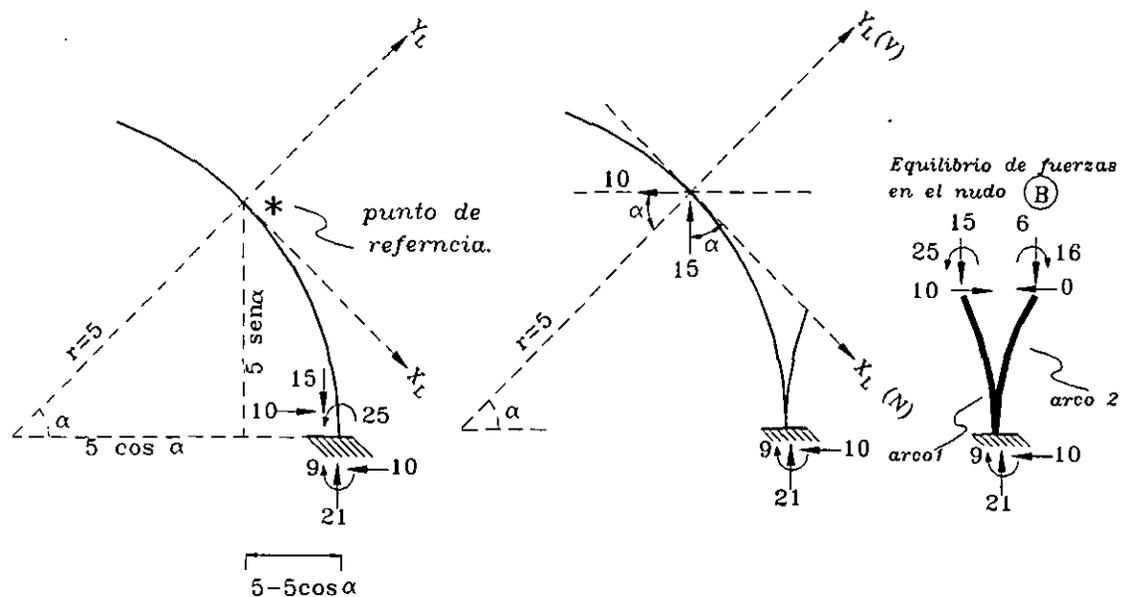
$$V(180^\circ) = 0$$

$$N(180^\circ) = -6t$$

Con estos valores se realiza un equilibrio de fuerzas en el nudo B y así se obtienen las fuerzas internas para el primer arco.

Primer arco

$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$  (Análisis de derecha a izquierda)



Nota.

Se debe anteponer un signo negativo a las ecuaciones ya que el análisis se está realizando de derecha a izquierda.

$$M(x) = - [-10(5-5\cos\alpha) + 25 + 10(5 \operatorname{sen}\alpha) ]$$

$$V(x) = - [15 \operatorname{sen}\alpha - 10\cos\alpha]$$

$$N(x) = - [-15\cos\alpha - 10 \operatorname{sen}\alpha]$$

Tabulación de las funciones de elementos mecánicos

Primer arco

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$N(\alpha)$	$M(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	0	5	0
	$15^\circ$	-1.2	5.5	-0.82
	$30^\circ$	-1.8	6.8	-2.9
	$45^\circ$	-1.5	8.5	-5.17
	$60^\circ$	0	10	-6.25
	$75^\circ$	2.3	10.6	-4.8
	$90^\circ$	5	10	0

Primer arco

Análisis de derecha a izquierda.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$N(\alpha)$	$M(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$0^\circ$	+10	+15	-25
	$15^\circ$	+5.8	+24.1	-35.4
	$30^\circ$	+1.16	+17.9	-39.9
	$45^\circ$	-3.53	+21.6	-38.4
	$60^\circ$	-7.99	+16.16	-30.8
	$75^\circ$	-11.9	+13.5	-17.7
	$90^\circ$	-15	+10	0

## Segundo arco

Análisis de izquierda a derecha.

Intervalo	$\alpha$	$V(\alpha)$	$N(\alpha)$	$M(\alpha)$
$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$	$0^\circ$	0	+2.0	0
	$15^\circ$	-0.48	+1.8	+0.26
	$30^\circ$	-0.73	+1.27	+0.9
	$45^\circ$	-0.58	+0.59	+1.7
	$60^\circ$	0	0	+2.0
	$75^\circ$	+0.93	-0.25	+1.5
	$90^\circ$	+2.0	0	0
	$105^\circ$	+2.93	+0.78	-2.6
	$120^\circ$	+3.46	+2.0	-6
	$135^\circ$	+3.41	+3.41	-9.6
	$150^\circ$	+2.73	+4.73	-12.93
	$165^\circ$	+1.52	+5.66	-15.17
	$180^\circ$	0	+6.0	-16.0

Diagramas de elementos mecánicos.

Diagrama de fuerzas cortantes

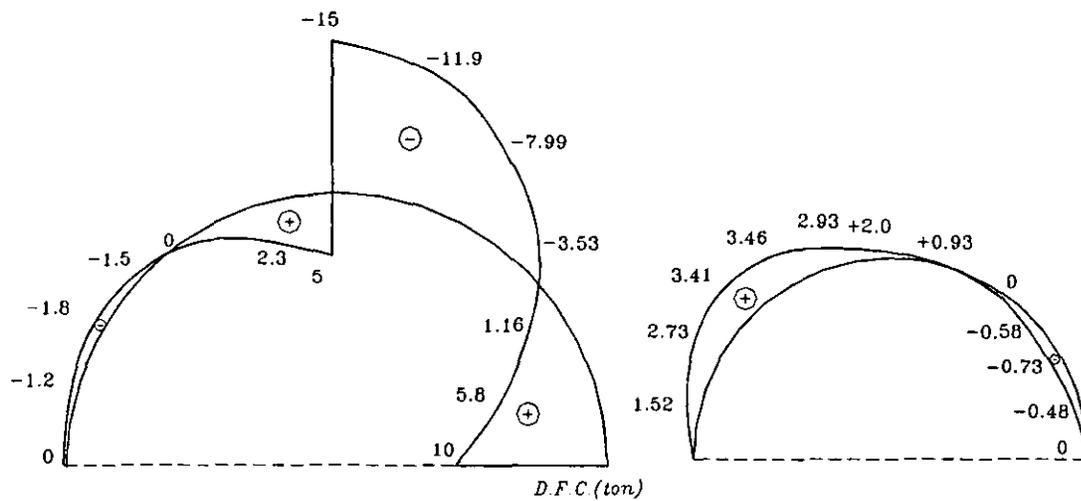


Diagrama de momentos flexionantes

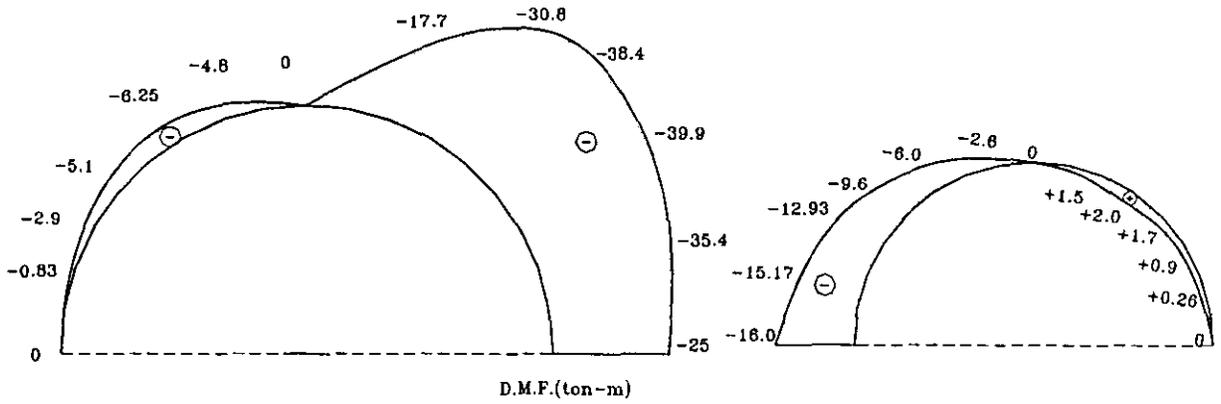
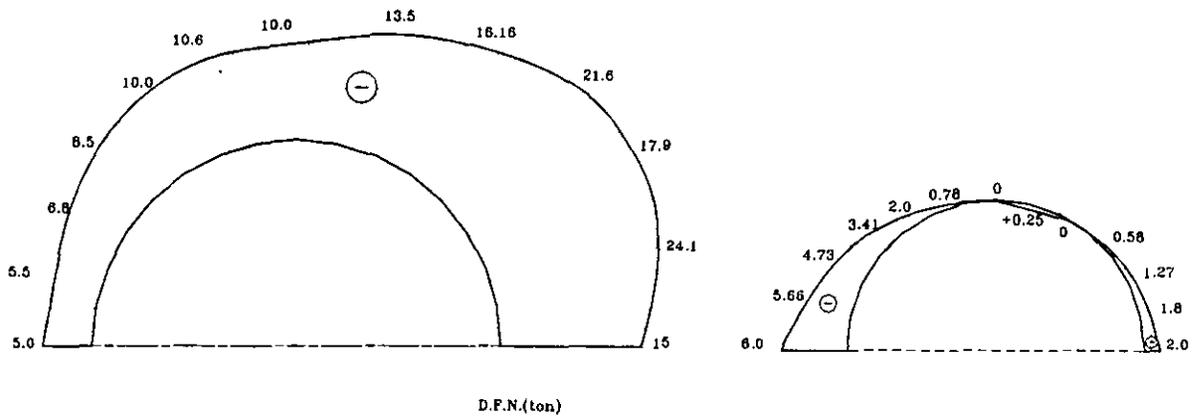


Diagrama de fuerzas normales



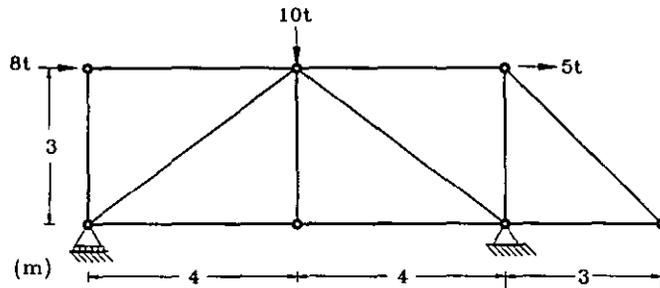
## **VI.- ARMADURAS.**

### **PROBLEMAS RESUELTOS**

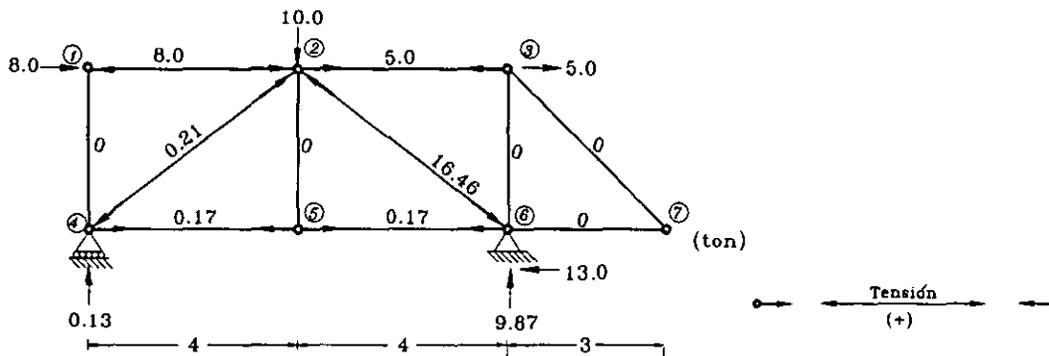
- Problema 6.1
- Problema 6.2
- Problema 6.3
- Problema 6.4
- Problema 6.5
- Problema 6.6
- Problema 6.7
- Problema 6.8

### Problema 6.1

Calcular las fuerzas axiales de la siguiente armadura por el método de los nudos.



### Solución.



### Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 3$$

$$N \text{ barras} = 11$$

$$2N \text{ nudos} = 2(7)$$

$$3 + 11 = 2(7)$$

14=14 se considera una armadura isostática, estable y externamente determinada.

### Calculo de reacciones

$$\Sigma M_A = 0$$

$$8(3) + 10(4) + 5(3) - 8 R_{6y} = 0$$

$$R_{6y} = 9.87 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.87 - 10 + R_{4y} = 0$$

$$R_{4y} = 0.13 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

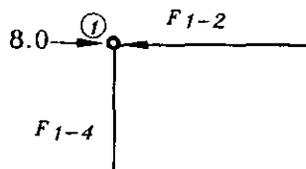
$$8 + 5 - R_{6x} = 0$$

$$R_{6x} = 13 \text{ ton}$$

### Diagramas de cuerpo libre.

- Se realizan diagramas de cuerpo libre de cada nudo, considerando cargas y barras.
- Se inician los diagramas de cuerpo libre en los nudos que tengan por lo menos dos incógnitas.
- Si no se sabe el valor de una fuerza, se supone el sentido y si el signo resulta contrario se corrige cambiándola de sentido.
- Se plantea una  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  en cada nudo.

### Nudo 1



$$\Sigma F_x = 0$$

$$8 - F_{1-2} = 0$$

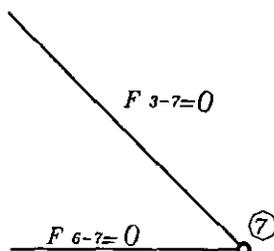
$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{1-2} = 8$$

$$F_{1-4} = 0$$

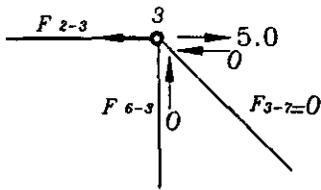
Aplicando una de las reglas para solución rápida de armaduras se tiene lo siguiente:  
Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales, la tercera que en este caso es la barra 1-4 se anula.

### Nudo 7



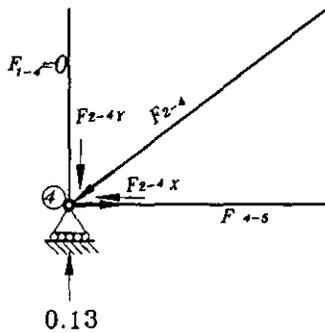
En este nudo concurren dos fuerzas y no existe fuerza externa por lo tanto las barras no trabajan y valen cero.

Nudo 3



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ 5 - F_{2-3} &= 0 & F_{2-3} &= 5 \\ \Sigma F_y &= 0 & F_{6-3} &= 0 \end{aligned}$$

Nudo 4



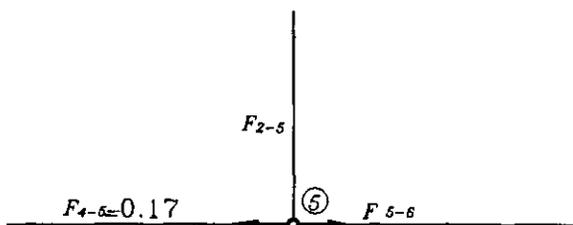
$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ -F_{2-4y} + 0.13 &= 0 & F_{2-4y} &= 0.13 \end{aligned}$$

Es necesario proyectar la fuerza  $F_{2-4}$  y para obtener el valor de la fuerza inclinada y así después por equilibrio de fuerzas calcular la fuerza de la barra  $F_{4-5}$ .

$$\begin{aligned} F_{2-4} &= F_{2-4y} / \sin 36.87 = 0.13 / 0.6 = 0.21 \\ F_{2-4x} &= F_{2-4} \cos 36.87 = 0.21(0.8) = 0.17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ -F_{2-4x} + F_{4-5} &= 0 & F_{4-5} &= 0.17 \end{aligned}$$

Nudo 5



Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales la tercera se anula por lo tanto la fuerza  $F_{2-5} = 0$

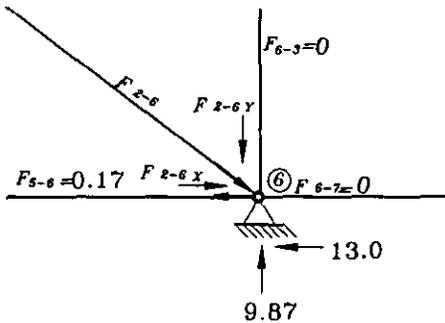
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{4-5} + F_{5-6} = 0$$

$$-0.17 + F_{5-6} = 0$$

$$F_{5-6} = 0.17$$

### Nudo 6



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{2-6y} + 9.27 = 0$$

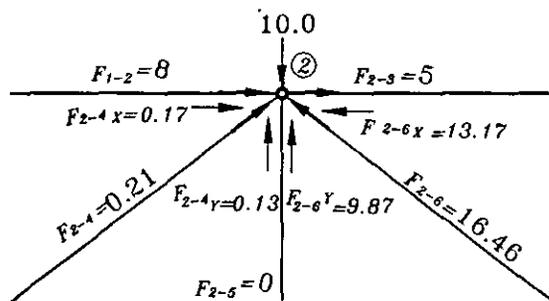
$$F_{2-6y} = 9.87$$

Es necesario proyectar la fuerza  $F_{2-6y}$  para obtener el valor de la fuerza inclinada.

$$F_{2-6} = F_{2-6y} / \sin 36.87 = 9.87 / 0.6 = 16.45$$

$$F_{2-6x} = F_{2-6} \cos 36.87 = 16.45(0.8) = 13.17$$

### Nudo 2



El nudo 2 ayudará a comprobar que los cálculos anteriores estén correctos.

$$\Sigma F_x = 0$$

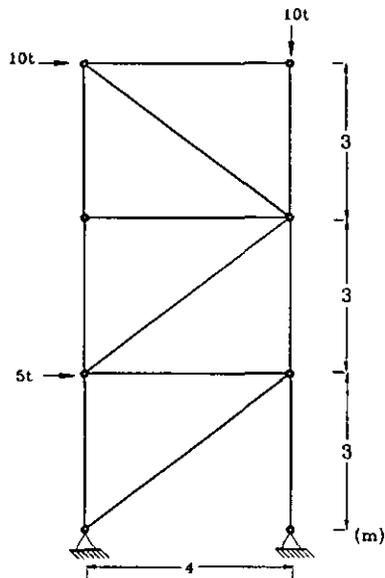
$$+8 + 5 + 0.17 - 13.17 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

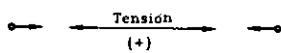
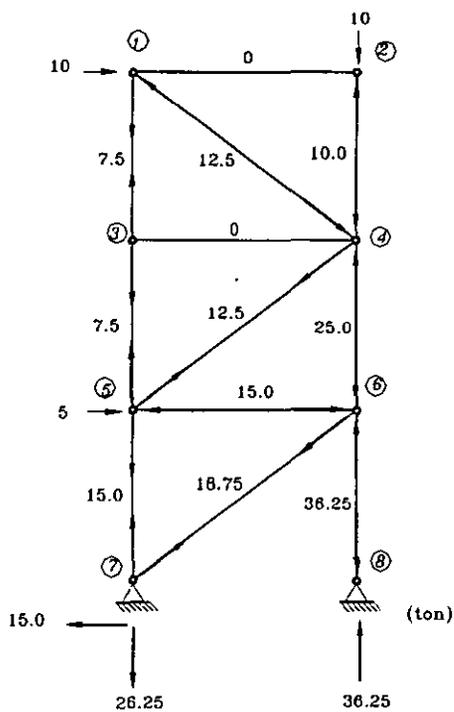
$$-10 + 0.13 + 9.87 = 0$$

## Problema 6.2

Calcular las fuerzas axiales de la siguiente armadura utilizando el método de los nudos.



Solución.



### Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 12$$

$$2N \text{ nudos} = 2(8)$$

$$4 + 12 = 2(8)$$

16=16 se considera una armadura isostática, estable y externamente determinada.

### Calculo de reacciones

Considerando únicamente las fuerzas externas.

$$\Sigma M_8 = 0$$

$$10(4) + 10(9) + 5(3) - 4 R_{7y} = 0$$

$$R_{7y} = 36.25 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$36.25 - 10 + R_{8y} = 0$$

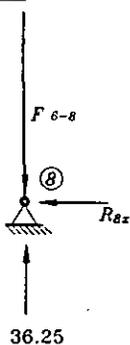
$$R_{8y} = 26.25 \text{ ton}$$

Las reacciones horizontales se calcularán a partir del equilibrio de fuerzas de los diagramas de cuerpo libre de los nudos 7 y 8.

### Diagramas de cuerpo libre.

- Se realizan diagramas de cuerpo libre de cada nudo, considerando cargas y barras.
- Se inician los diagramas de cuerpo libre en los nudos que tengan por lo menos dos incógnitas.
- Si no se sabe el valor de una fuerza, se supone el sentido y si el signo resulta contrario se corrige cambiándola de sentido.
- Se plantea una  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  en cada nudo.

#### Nudo 8



$$\Sigma F_x = 0$$

$$0 - R_{8x} = 0$$

$$R_{8x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$36.25 - F_{6-8} = 0$$

$$F_{6-8} = 36.25$$

Aplicando una de las reglas para solución rápida de armaduras se tiene lo siguiente:

Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales, la tercera que en este caso es la Reacción  $R_{8x}$  se anula.

Conociendo la reacción  $R_{8x} = 0$  ahora si es posible obtener la reacción  $R_{7x}$ .

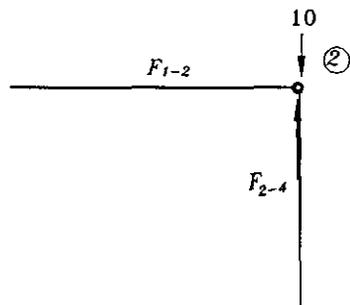
Considerando únicamente las fuerzas externas.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$10 + 5 - R_{7x} = 0$$

$$R_{7x} = 15 \text{ ton}$$

### Nudo 2



Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales, la tercera que en este caso es la fuerza  $F_{1-2}$  se anula.

Por otro lado, cuando en un nudo existe una fuerza externa paralela a una barra concurrente y no participan otras fuerzas externas, la barra asume el valor de la fuerza externa con el efecto que corresponda barra  $F_{2-4} = 10$ .

$$F_{1-2} = 0$$

$$F_{2-4} = 10$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-10 + F_{2-4} = 0$$

$$F_{2-4} = 10$$

### Nudo 1

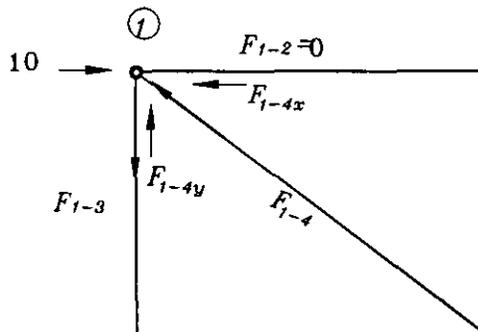
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{1-4x} + 10 = 0$$

$$F_{1-4x} = 10$$

$$F_{1-4} = F_{1-4x} / \cos 36.87 = 10 / 0.8 = 12.5$$

$$F_{1-4y} = F_{1-4} \sin 36.87 = 12.5(0.6) = 7.5$$



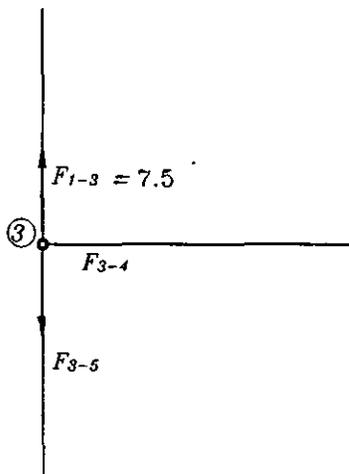
$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{1-4y} - F_{1-3} = 0$$

$$7.5 - F_{1-3} = 0$$

$$F_{1-3} = 7.5$$

### Nudo 3



Nuevamente aplicando las reglas de solución rápida de armaduras se tiene lo siguiente:

Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales, la tercera que en este caso es la fuerza  $F_{3-4}$  se anula.

Por otro lado, cuando en un nudo existe una fuerza externa paralela a una barra concurrente y no participan otras fuerzas externas, la barra asume el valor de la fuerza externa con el efecto que corresponda barra  $F_{3-5} = 7.5$ .

Realizando el equilibrio de fuerzas en el nudo se tiene los siguiente:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{3-5} + F_{1-3} = 0$$

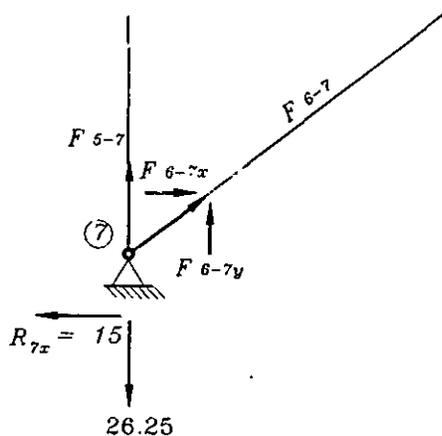
$$7.5 - F_{3-5} = 0 \quad F_{3-5} = 7.5$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{3-4} + 0 = 0$$

$$F_{3-4} = 0$$

### Nudo 7



$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{6-7x} - 15 = 0$$

$$F_{6-7x} = 15$$

$$F_{6-7} = F_{6-7x} / \cos 36.87 = 15 / 0.8 = 18.75$$

$$F_{6-7y} = F_{6-7} \sin 36.87 = 18.75(0.6) = 11.25$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{6-7y} + F_{5-7} - 26.25 = 0$$

$$11.25 + F_{5-7} - 26.25 = 0$$

$$F_{5-7} = 15$$

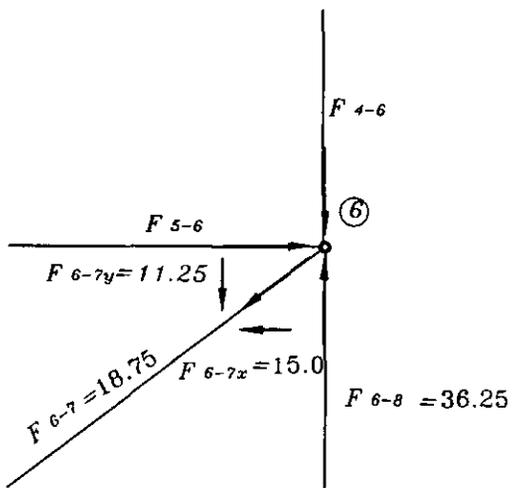
### Nudo 6

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{6-7y} + F_{6-8} - F_{4-6} = 0$$

$$-11.25 + 36.25 - F_{4-6} = 0$$

$$F_{4-6} = 25$$



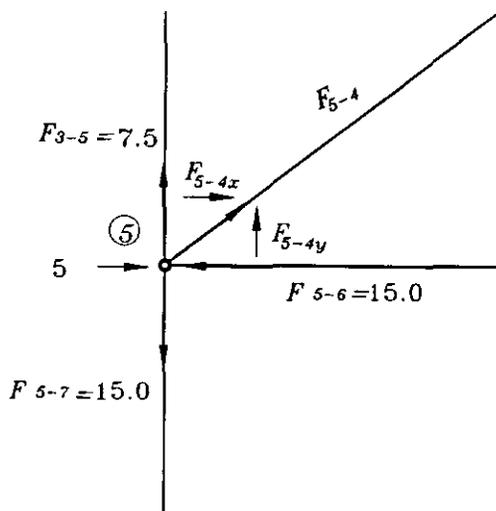
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{6-7x} + F_{5-6} = 0$$

$$-15 + F_{5-6} = 0$$

$$F_{5-6} = 15$$

### Nudo 5



$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{4-5x} - F_{5-6} + 5 = 0$$

$$+F_{4-5x} + 5 - 15 = 0$$

$$F_{4-5x} = 10$$

$$\Sigma F_y = 0$$

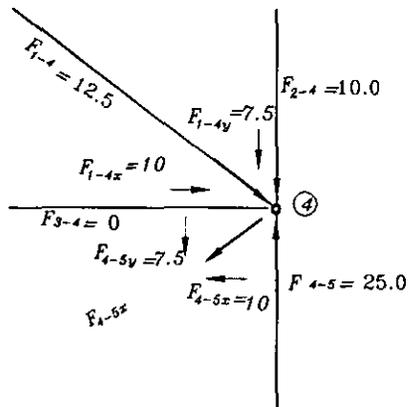
$$+F_{5-4y} + F_{3-5} - F_{5-7} = 0$$

$$+F_{5-4y} + 7.5 - 15 = 0$$

$$F_{5-4y} = 7.5$$

#### Nudo 4

El nudo 4 ayudará a comprobar que los cálculos anteriores estén correctos.



$$\Sigma F_x = 0$$

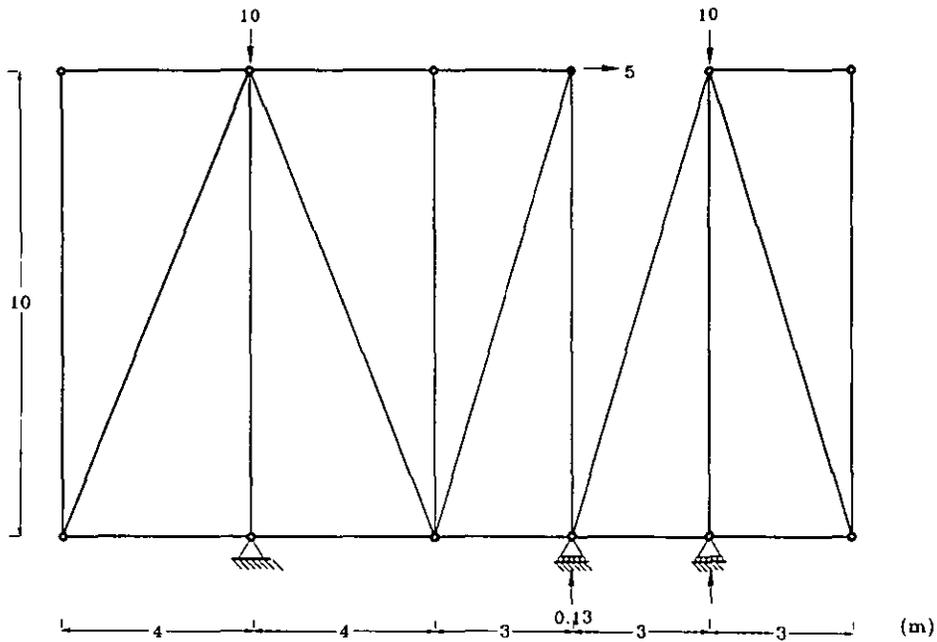
$$+10 - 10 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

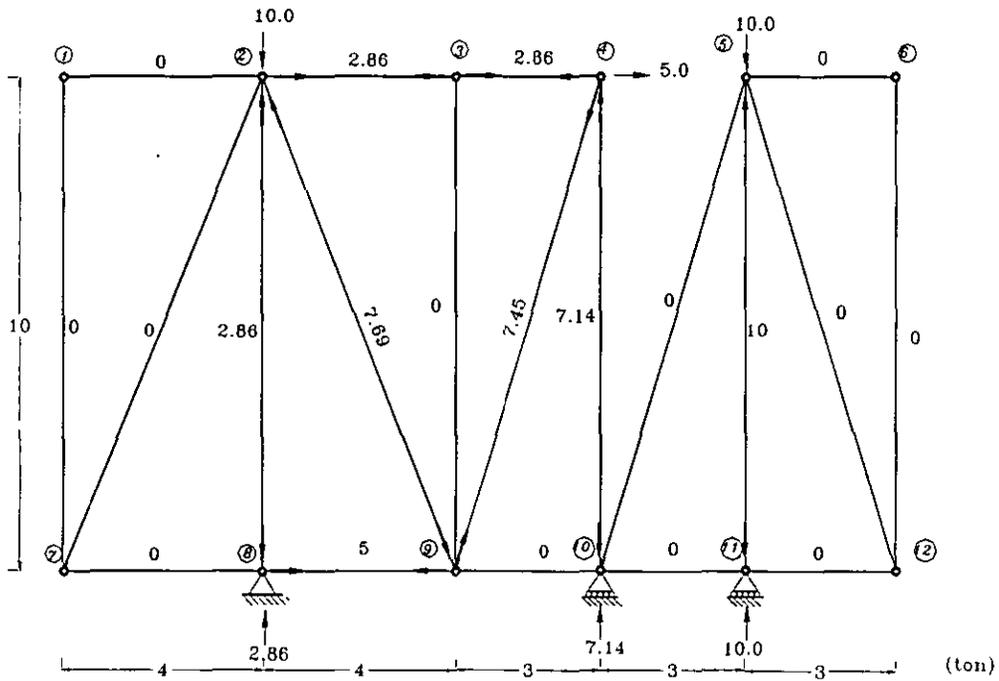
$$+7.5 + 7.5 + 10 - 25 = 0$$

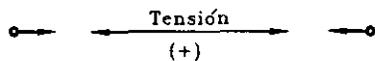
**Problema 6.3**

Calcular las fuerzas axiales de la siguiente armadura utilizando el método de los nudos.



**Solución.**





### Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad.

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 20$$

$$2N \text{ nudos} = 2(12)$$

$$4 + 20 = 2(12)$$

$24=24$  se considera una armadura isostática ,estable y externamente determinada.

### Calculo de reacciones

En este caso se dificulta un poco el realizar  $\Sigma M = 0$  en los apoyos, por lo tanto dos de las reacciones se calcularán a partir del equilibrio de fuerzas de los nudos 10 y 11, para posteriormente en el nudo 10 se realizar una  $\Sigma M_{10} = 0$  y en encontrar el valor de las reacciones en el apoyo del nudo 8.

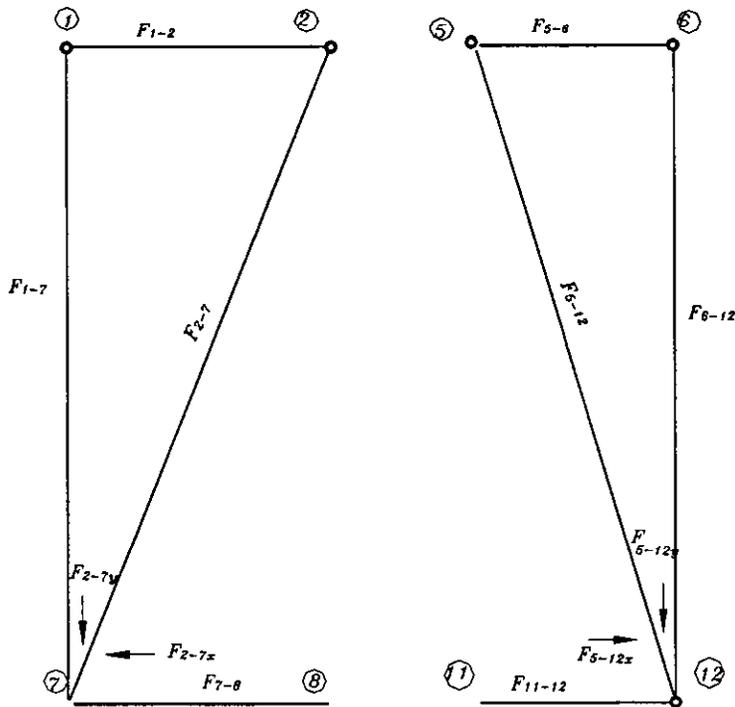
### Diagramas de cuerpo libre.

- Se realizan diagramas de cuerpo libre de cada nudo, considerando cargas y barras.
- Se inician los diagramas de cuerpo libre en los nudos que tengan por lo menos dos incógnitas.
- Si no se sabe el valor de una fuerza, se supone el sentido y si el signo resulta contrario se corrige cambiándola de sentido.
- Se plantea una  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  en cada nudo.

### Nudos 1, 7, 6 y 12

Aplicando las reglas para determinar que barras no trabajan se tiene lo siguiente:

Las barras F1-2, F1-7 y F7-8 se anulan ya que cuando en el nudo 1 y 7 concurren dos barras y no existe carga por lo tanto estas barras no trabajan. El mismo caso se tiene en el otro extremo de la armadura en los nudos 6 y 12 por lo que las barras F5-6, F6-12 y F11-12 también se anulan.



Nudo 1

$\Sigma F_x = 0$

$F_{1-2} = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$F_{1-7} = 0$

Nudo 7

$\Sigma F_y = 0$

$F_{2-7y} = 0$

Si  $F_{2-7y} = 0$  entonces al proyectar

$F_{2-7} = 0$  y  $F_{2-7x} = 0$

$\Sigma F_x = 0$

$F_{7-8} = 0$

El mismo procedimiento se realiza con los nudos 6 y 12 por lo que resulta:

$F_{5-6} = 0$  ,  $F_{6-12} = 0$  ,  $F_{6-12x} = 0$  ,  $F_{6-12y} = 0$  y  $F_{11-12} = 0$

### Nudo 5

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{5-12x} + F_{5-10x} = 0$$

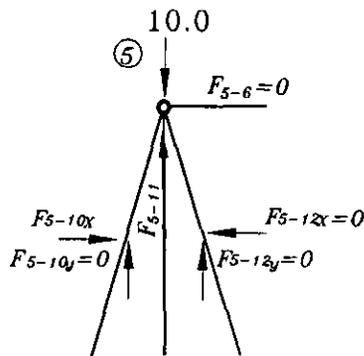
$$0 + F_{5-10x} = 0$$

$$F_{5-10x} = 0$$

Proyectando la fuerza  $F_{5-10x}$  para obtener el valor de la barra diagonal  $F_{5-10}$  es evidente que esta es igual a cero.

Por lo tanto

$$F_{5-10} = 0$$



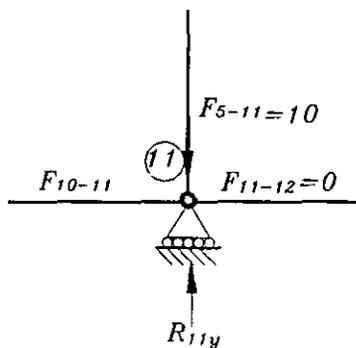
$$\Sigma F_y = 0$$

$$+F_{5-12y} + F_{5-11} + F_{5-10y} - 10 = 0$$

$$0 + F_{5-11} + 0 - 10 = 0$$

$$F_{5-11} = 10$$

### Nudo 11



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{11-12} + F_{10-11} = 0$$

$$0 + F_{10-11} = 0$$

$$F_{10-11} = 0$$

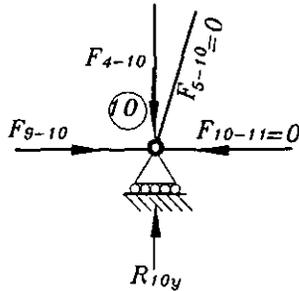
$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{5-11} + R_{11y} = 0$$

$$-10 + R_{11y} = 0$$

$$R_{11y} = 10$$

### Nudo 10



En el nudo 10 se tiene como incógnita a una de las reacciones ( $R_{10y}$ ), y como ya se conoce el valor de  $R_{11y} = 10$  es posible hacer  $\Sigma M_8 = 0$  en el nudo 8.

Considerando las fuerzas externas únicamente:

$$\Sigma M_8 = 0$$

$$-7(R_{10y}) - 10(R_{11y}) + 10(5) + 10(10) = 0$$

$$-7(R_{10y}) - 10(10) + 10(5) + 10(10) = 0$$

$$R_{10y} = +7.14$$

Ahora conocida la reacción  $R_{10y} = +7.14$  es posible hacer equilibrio de fuerzas en el nudo 10

$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{9-10} - F_{10-11} = 0$$

$$0 + F_{9-10} = 0$$

$$F_{9-10} = 0$$

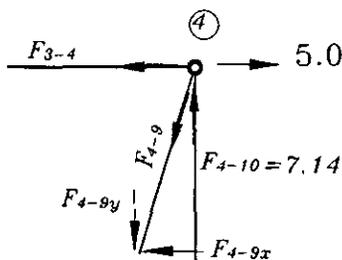
$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{4-10} + R_{10y} = 0$$

$$+7.14 - F_{4-10} = 0$$

$$F_{4-10} = 7.14$$

### Nudo 4



$$\Sigma F_y = 0$$

$$+F_{4-10} - F_{4-9y} = 0$$

$$7.14 - F_{4-9y} = 0$$

$$F_{4-9y} = 7.14$$

Para obtener la fuerza  $F_{4-9}$  es necesario obtener la proyección de  $F_{4-9y}$

$$\theta = 73.299$$

$$F_{4-9} = F_{4-9y} / \text{sen } 73.299 = 7.14 / 0.958$$

$$F_{4-9} = 7.45$$

$$F_{4-9x} = F_{4-9} (\cos 73.299) = 7.45(0.287)$$

$$F_{4-9x} = 2.14$$

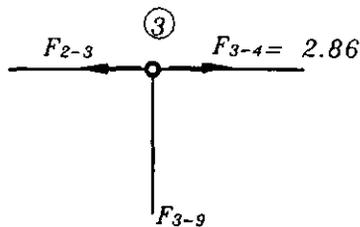
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{4-9x} + 5 - F_{3-4} = 0$$

$$-2.14 + 5 - F_{3-4} = 0$$

$$F_{3-4} = 2.86$$

### Nudo 3



$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{3-4} - F_{2-3} = 0$$

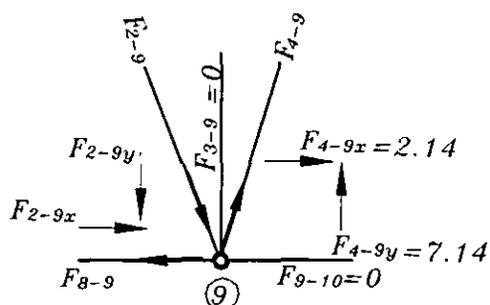
$$+2.86 - F_{2-3} = 0$$

$$F_{2-3} = 2.86$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{3-9} = 0$$

### Nudo 9



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-F_{2-9} + F_{4-9y} + F_{3-9} = 0$$

$$7.14 - F_{2-9y} + 0 = 0$$

$$F_{2-9y} = 7.14$$

Para obtener la fuerza  $F_{2-9}$  es necesario obtener la proyección de  $F_{2-9y}$

$$\theta = 68.199$$

$$F_{2-9} = F_{2-9y} / \text{sen } 68.199 = 7.14 / 0.928$$

$$F_{2-9} = 7.694$$

$$F_{2-9x} = F_{2-9} (\cos 68.199) = 7.694(0.371)$$

$$F_{2-9x} = 2.86$$

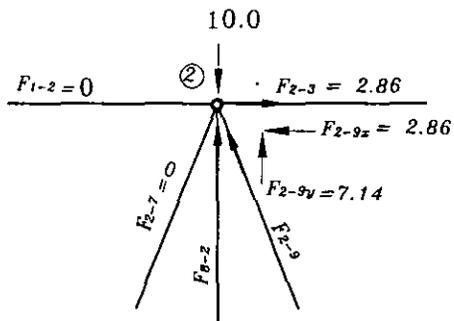
$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{2-9x} - F_{8-9} - F_{9-10} + F_{4-9x} = 0$$

$$2.86 - 0 + 2.14 - F_{8-9} = 0$$

$$F_{8-9} = 5$$

### Nudo 2



$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{1-2} + F_{2-3} - F_{2-9x} = 0$$

$$2.86 + 0 - 2.86 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$+ F_{2-9y} - 10 = 0$$
$$7.14 - 10 + F_{8-2} = 0$$

$$F_{8-2} = 2.86$$

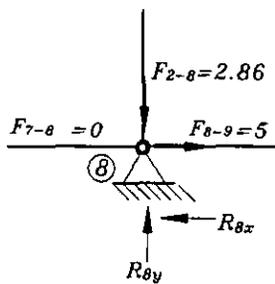
### Nudo 8

En el nudo 8 se calcularán las reacciones a partir del equilibrio de fuerzas en este.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-F_{7-8} + F_{8-9} - R_{8x} = 0$$
$$0 + 5 - R_{8x} = 0$$

$$R_{8x} = 5$$



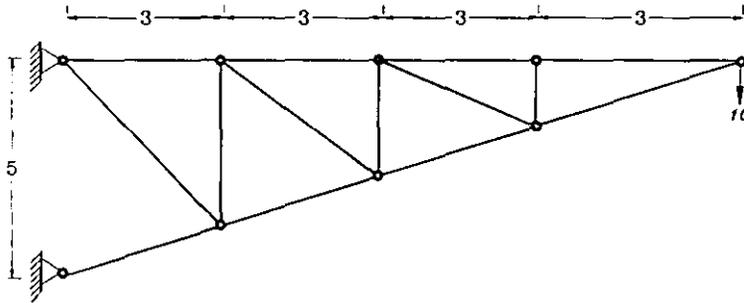
$$\Sigma F_y = 0$$

$$- F_{2-8} + R_{8y} = 0$$
$$- 2.86 + R_{8y} = 0$$

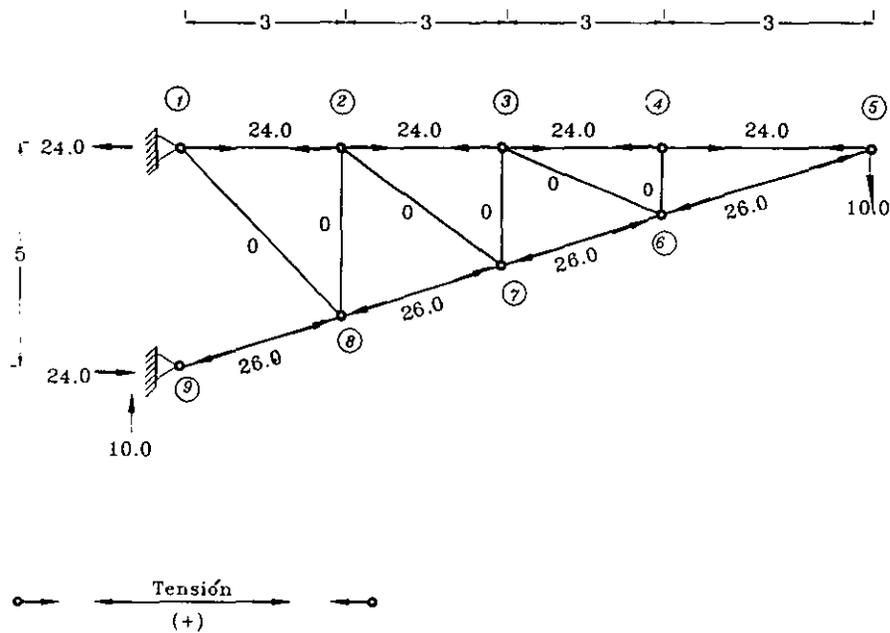
$$R_{8y} = 2.86$$

### Problema 6.4

Calcular las fuerzas axiales de la siguiente armadura empleando el método de los nudos.



Solución.



Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 14$$

$$2N \text{ nudos} = 2(9)$$

$$4 + 14 = 2(9)$$

18=18 se considera una armadura isostática, estable y externamente determinada.

### Calculo de reacciones

$$\Sigma M_1 = 0$$

$$10(12) - 5 R_{9x} = 0$$

$$R_{9x} = 24 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$- R_{11x} + R_{9x} = 0$$

$$- R_{11x} + 24 = 0$$

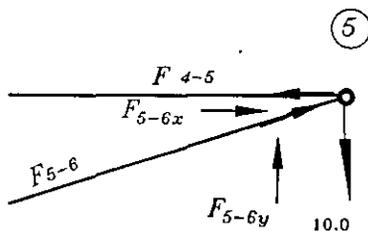
$$R_{11x} = 24 \text{ ton}$$

Las reacciones  $R_{9y}$  y  $R_{11y}$  se calcularán a partir del equilibrio de fuerzas en los nudos 9 y 11.

### Diagramas de cuerpo libre.

- Se realizan diagramas de cuerpo libre de cada nudo, considerando cargas y barras.
- Se inician los diagramas de cuerpo libre en los nudos que tengan por lo menos dos incógnitas.
- Si no se sabe el valor de una fuerza, se supone el sentido y si el signo resulta contrario se corrige cambiándola de sentido.
- Se plantea una  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  en cada nudo.

### Nudo 5



$$\Sigma F_y = 0$$

$$+F_{5-6y} - 10 = 0$$

$$F_{5-6y} = 10$$

Es necesario proyectar la fuerza para obtener el valor de la barra diagonal.

$$F_{5-6} = F_{5-6y} / \text{sen} 22.636 = 10 / 0.385 = 26$$

$$F_{5-6x} = F_{5-6} \cos 22.636 = 26(0.923) = 24$$

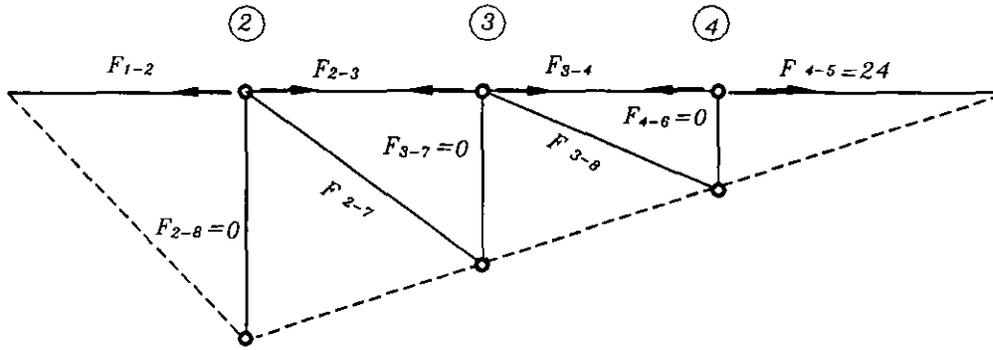
$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{5-6} - F_{4-5} = 0$$

$$24 - F_{4-5} = 0$$

$$F_{4-5} = 24$$

Aplicando una de las reglas para solución rápida de armaduras se tiene lo siguiente para los nudos 2,3 y 4.



Cuando en un nudo concurren tres fuerzas y dos de ellas son colineales, la tercera que en este caso son las barras  $F_{4-6}$ ,  $F_{3-7}$  y  $F_{2-8}$  se anulan.

Como las barras verticales son iguales a cero, las proyecciones verticales de las barras inclinadas es cero y por consiguiente estas también, de esta forma se ahorra mucho trabajo de estar calculando para cada nudo el equilibrio de fuerzas.

Por lo tanto se tienen los siguientes resultados:

$$F_{4-6} = 0, F_{3-7} = 0, F_{2-8} = 0, F_{2-7} = 0 \text{ y } F_{3-8} = 0$$

#### Nudo 4

$$\Sigma F_x = 0$$

$$+F_{4-5} - F_{3-4} = 0$$

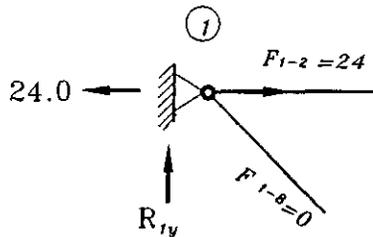
$$24 - F_{3-4} = 0$$

$$F_{3-4} = 24$$

Realizando el siguiente procedimiento para los nudos 1, 2 y 3

$$F_{2-3} = 24 \text{ y } F_{1-2} = 24$$

Nudo 1

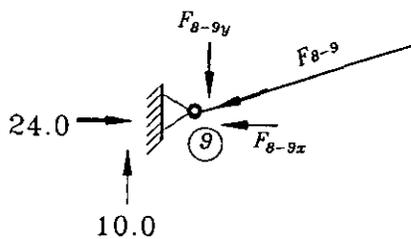


$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ +F_{1-8y} + R_{1y} &= 0 \\ 0 + R_{1y} &= 0 \qquad R_{1y} = 0 \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de la reacción  $R_{9y}$  es necesario hacer  $\Sigma F_y = 0$  de toda la estructura

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ +R_{9y} - R_{1y} - 10 &= 0 \qquad R_{9y} = 10 \end{aligned}$$

Nudo 9



$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ +F_{8-9y} + 10 &= 0 \qquad F_{8-9y} = 10 \end{aligned}$$

Es necesario proyectar la fuerza para obtener el valor de la barra diagonal.

$$F_{8-9} = F_{8-9y} / \sin 22.636 = 10 / 0.385 = 26$$

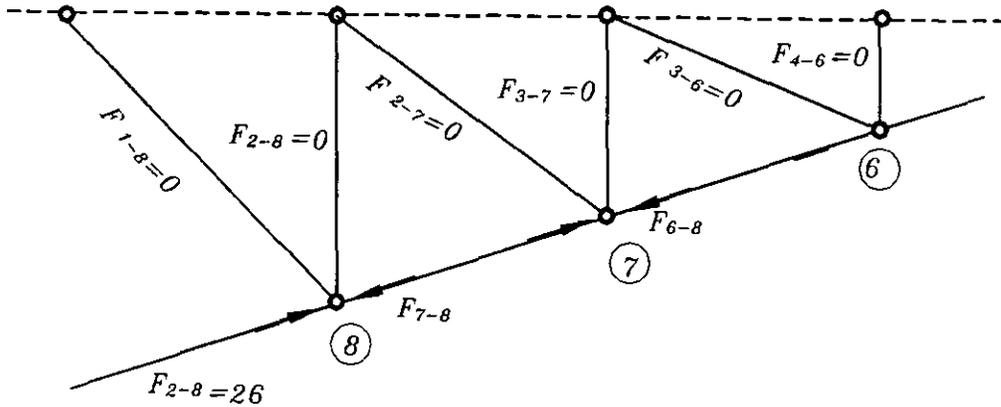
$$F_{8-9x} = F_{8-9} \cos 22.636 = 26(0.923) = 24$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{8-9} \times -24 = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

Nuevamente para simplificar el trabajo de cálculo, aplicando las reglas para solución rápida de armaduras en los nudos 8, 7 y se tiene lo siguiente:



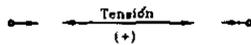
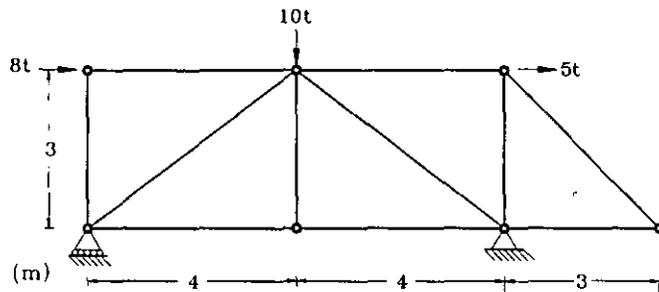
Las barras  $F_{2-8}$ ,  $F_{7-8}$  y  $F_{6-8}$  son paralelas entre sí, concurrentes con otras barras que no trabajan y no existen fuerzas externas, por lo tanto la barra  $F_{7-8}$  asume el valor de la barra  $F_{2-8}$  y lo mismo sucede con la barra  $F_{6-8}$  que asume el valor de la barra  $F_{7-8}$ .

De lo anterior se tienen los siguientes resultados:

$$F_{2-8}=26, F_{7-8}=26 \text{ y } F_{6-8}=26.$$

### Problema 6.5

Calcular las fuerza axial de las barras 2-3 y 4-5 de la siguiente armadura por el método de las secciones.



#### Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 3$$

$$N \text{ barras} = 11$$

$$2N \text{ nudos} = 2(7)$$

$$3 + 11 = 2(7)$$

14=14 se considera una armadura isostática ,estable y externamente determinada.

#### Calculo de reacciones

$$\Sigma M_4 = 0$$

$$8(3) + 10(4) + 5(3) - 8 R_{6y} = 0$$

$$R_{6y} = 9.87 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$9.87 - 10 + R_{4y} = 0$$

$$R_{4y} = 0.13 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

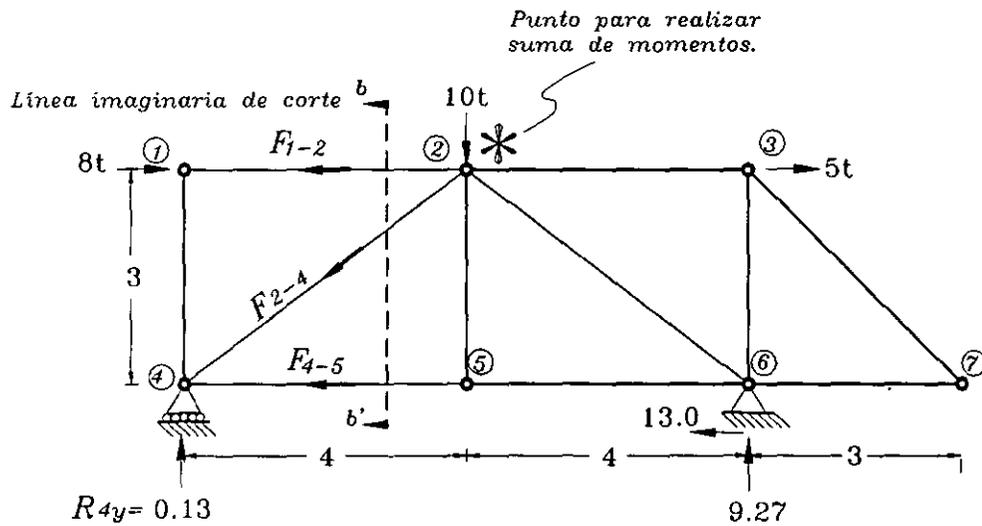
$$8 + 5 - R_{6x} = 0$$

$$R_{6x} = 13 \text{ ton}$$



barras y no pueden producir momentos las barras 2-1, 2-4, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 4-5

Las únicas fuerzas externas que intervienen son las reacciones  $R_{4y} = 0.13$  y fuerza externa de 8 ubicada en el nudo 1.



$\Sigma M_6 = 0$  (a la izquierda de la línea imaginaria)

$$+F_{4-5}(3) + R_{4y}(4) = 0$$

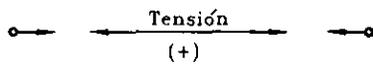
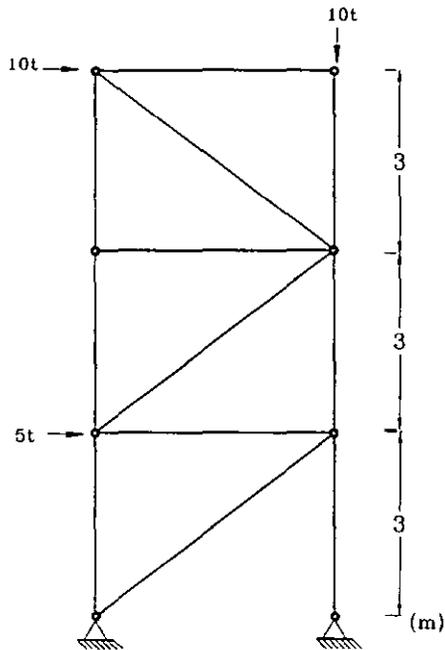
$$+F_{4-5}(3) + 0.13(4) = 0$$

$$F_{4-5} = 0.17 \text{ ton}$$

el resto de la arma dura se puede seguir resolviendo utilizando el método de los nudos de manera análoga al problema 6.1.

### Problema 6.6

Calcular las fuerzas axiales de la barras 1-3, 6-8 y 6-7 de la siguiente armadura utilizando el método de los nudos.



Solución.

Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 12$$

$$2N \text{ nudos} = 2(8)$$

$$4 + 12 = 2(8)$$

16=16 se considera una armadura isostática ,estable y externamente determinada.

### Calculo de reacciones

Considerando únicamente las fuerzas externas.

$$\Sigma M_8 = 0$$

$$10(4) + 10(9) + 5(3) - 4 R_{7y} = 0$$

$$R_{7y} = 36.25 \text{ ton}$$

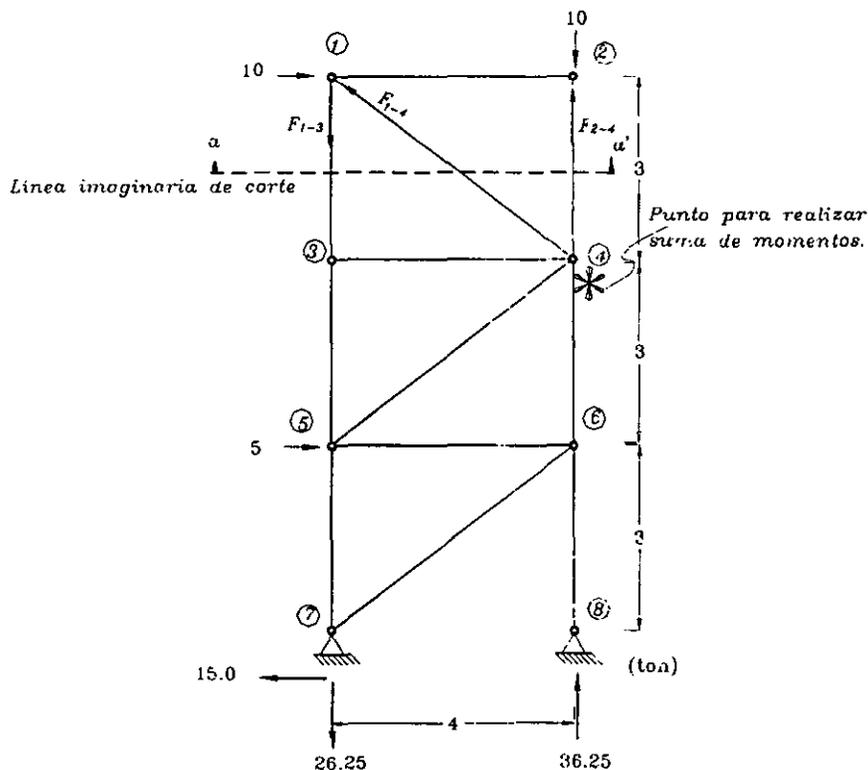
$$\Sigma F_y = 0$$

$$36.25 - 10 + R_{8y} = 0$$

$$R_{8y} = 26.25 \text{ ton}$$

El objetivo principal de este método consiste en conocer el valor de una barra sin resolver toda la armadura, se traza una línea imaginaria que pase por un nudo o que corte a una o más barras las cuales se considerarán incógnitas. Se escogerá un nudo en la armadura para realizar suma de momentos, interviniendo exclusivamente las barras cortadas y las fuerzas externas del otro lado de la línea imaginaria de corte.

### Calculo de la fuerza axial en la barra 1-3



Para obtener el valor de la barra 1-3 se traza la línea imaginaria a-a' que corta a las barras 1-3, 1-4 y 2-4. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 4 donde no pueden producir momento

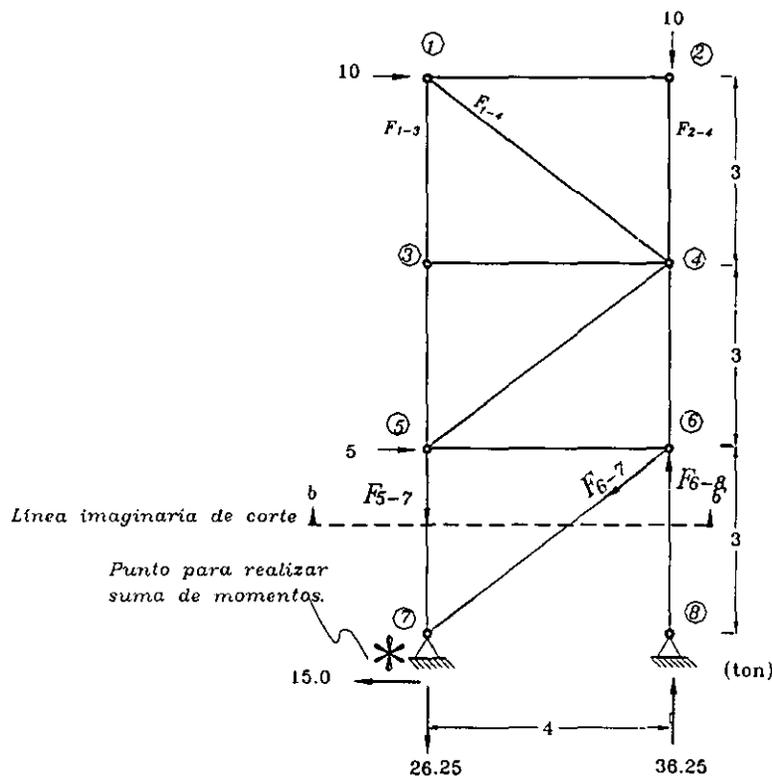
las fuerzas en las barras 1-4 y 2-4, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 1-3. La única fuerza externa que interviene es la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 1, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.

$$\Sigma M_4 = 0 \quad (\text{arriba de la línea imaginaria})$$

$$10(3) - F_{1-3}(4) = 0$$

$$F_{1-3} = 7.5 \text{ ton}$$

Calculo de la fuerza axial en la barra 6-8



Para obtener el valor de la barra 6-8 se traza la línea imaginaria b - b' que corta a las barras 5-7, 6-7 y 6-8. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 7 donde no pueden producir momento las fuerzas en las barras 5-7 y 6-7, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 6-8. Las fuerzas externas que intervienen son la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 1 otra fuerza de 10 ton ubicada en el nudo 2 y finalmente otra de 5 ton en el nudo 5, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.

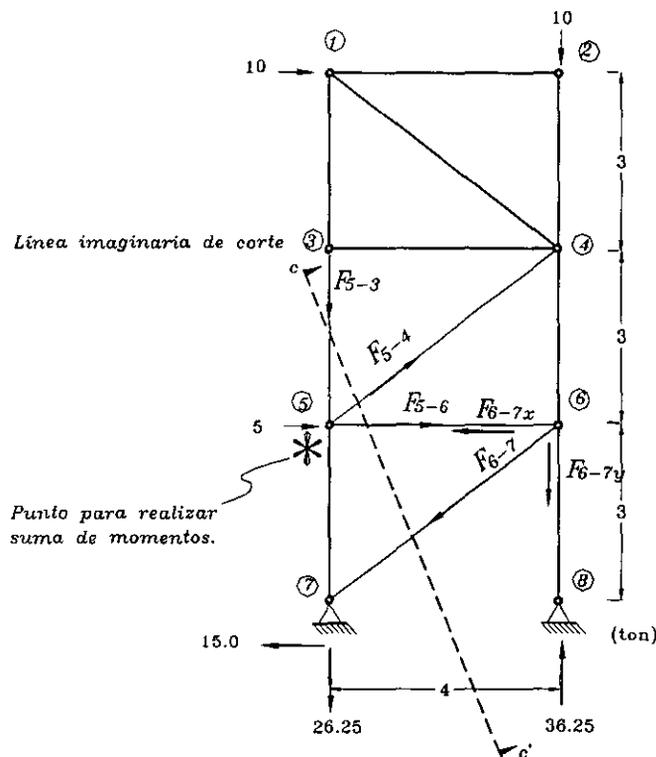
$$\Sigma M_7 = 0 \quad (\text{arriba de la línea imaginaria})$$

$$10(9) + 10(4) + 5(3) - F_{6-8}(4) = 0$$

$$F_{6-8} = 36.25 \text{ ton}$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 6-7

Para obtener el valor de la barra 6-8 se traza la línea imaginaria c-c' que corta a las barras 5-3,5-4 ,5-6 y 6-7. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 5 donde no pueden producir momento las fuerzas en las barras 5-3,5-4 y 5-6, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 6-7. Las fuerzas externas que intervienen son la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 1, otra fuerza de 10 ton ubicada en el nudo 2 y finalmente una de 5 ton en el nudo 5 pero en este caso si interviene la reacción  $R_{8y} = 36.25$ , las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.



$\Sigma M_s = 0$  (a la derecha de la línea imaginaria)

$$10(6) + 10(4) - F_{6-7y}(4) - 36.25(4) = 0$$

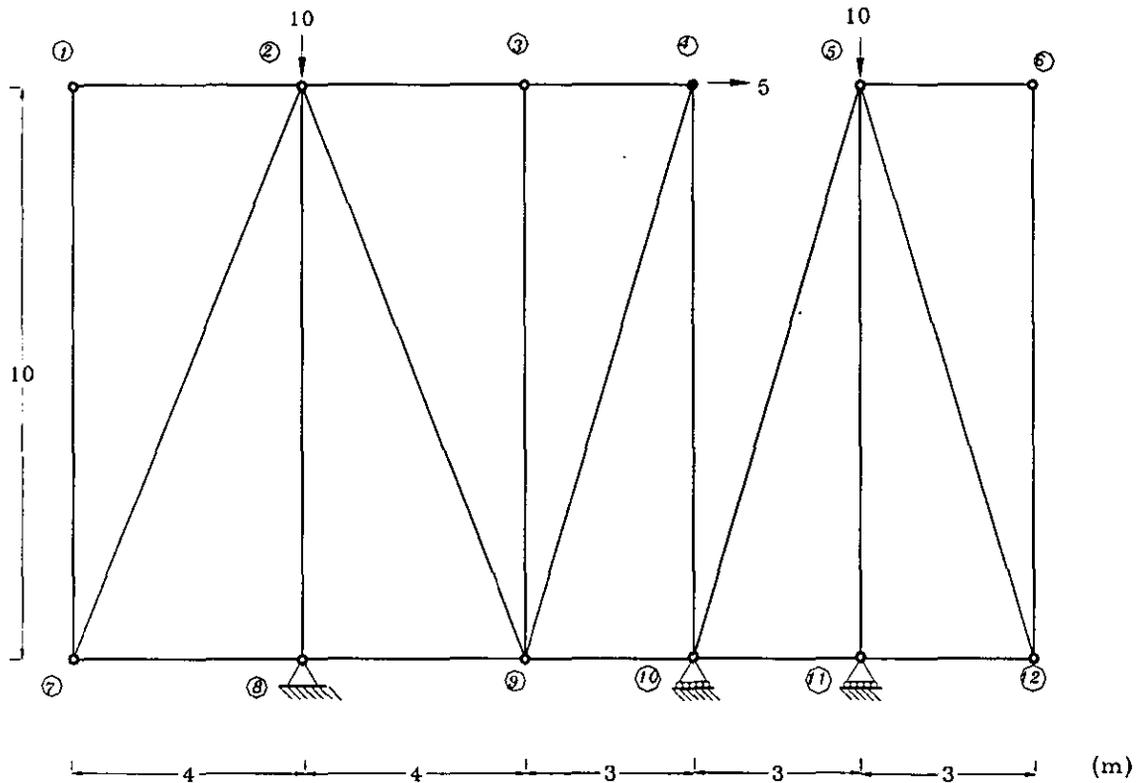
$$10(6) + 10(4) - (F_{6-7} \text{ sen } 36.87)(4) - 36.25(4) = 0$$

$$F_{6-7} = 18.75 \text{ ton}$$

El resto de la armadura se puede seguir resolviendo de manera análoga al problema 6.2 utilizando el método de los nudos.

**Problema 6.7**

Calcular las fuerza axial de las barras 5-11, 3-4, 2-3 y 4-10 de la siguiente armadura por el método de las secciones.



**Solución.**

Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 20$$

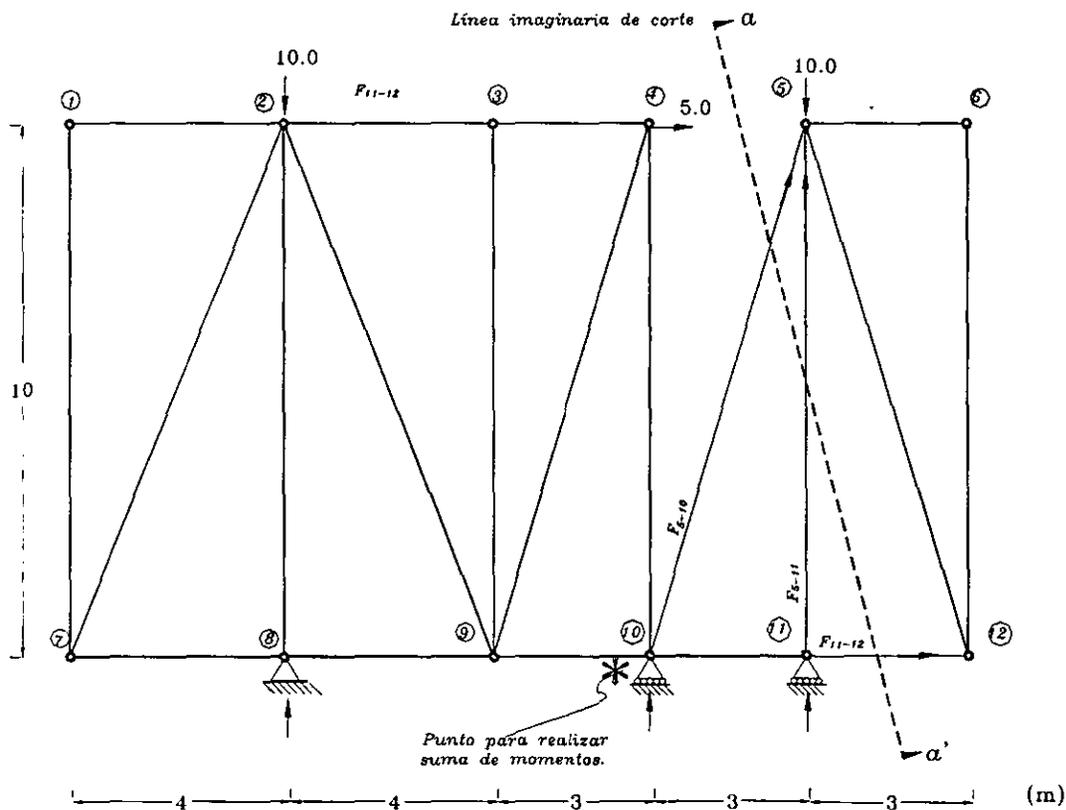
$$2N \text{ nudos} = 2(12)$$

$$4 + 20 = 2(12)$$

24=24 se considera una armadura isostática, estable y externamente determinada.

El objetivo principal de este método consiste en conocer el valor de una barra sin resolver toda la armadura, se traza una línea imaginaria que pase por un nudo o que corte a una o más barras las cuales se considerarán incógnitas. Se escogerá un nudo en la armadura para realizar suma de momentos, interviniendo exclusivamente las barras cortadas y las fuerzas externas del otro lado de la línea imaginaria de corte.

### Calculo de la fuerza axial en la barra 5-11



Para obtener el valor de la barra 5-11 se traza la línea imaginaria a-a' que corta a las barras 5-10 5-11 y 11-12. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 10 donde no pueden producir momento las fuerzas en las barras 10-5 y 11-12, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 5-11. La única fuerza externa que interviene es la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 5, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.

$$\Sigma M_{10} = 0 \quad (\text{a la derecha de la línea imaginaria})$$

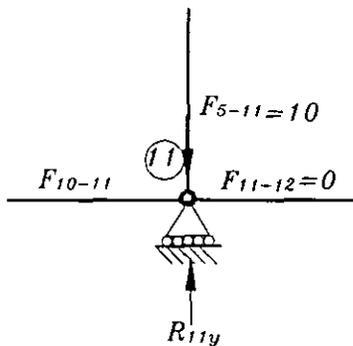
$$10(3) - F_{5-11}(3) = 0$$

$$F_{5-7} = 10 \text{ ton}$$

Calculo de las reacciones  $R_{11y}$ ,  $R_{8y}$ ,  $R_{8x}$  y  $R_{10y}$ .

La reacción  $R_{11y}$  a partir de un equilibrio de fuerzas en el nudo 11 como se muestra a continuación:

La única fuerza en el sentido Y son  $F_{5-11} = 10$  y  $R_{11y}$



Realizando  $\Sigma F_y = 0$

$$- F_{5-11} + R_{11y} = 0$$

$$-10 + R_{11y} = 0$$

$$R_{11y} = 10$$

Para obtener el valor de la reacción  $R_{10y}$  se realiza una  $\Sigma M = 0$  en el nudo 8

Considerando las fuerzas externas únicamente:

$$\Sigma M_8 = 0$$

$$-7(R_{10y}) - 10(R_{11y}) + 10(5) + 10(10) = 0$$

$$-7(R_{10y}) - 10(10) + 10(5) + 10(10) = 0$$

$$R_{10y} = +7.14$$

Realizando  $\Sigma F_y = 0$  de toda la estructura para encontrar el valor de la reacción  $R_{8y}$

$$R_{11y} + R_{10y} - 10 - 10 + R_{8y} = 0$$

$$10 + 7.14 - 10 - 10 + R_{8y} = 0$$

$$R_{8y} = 2.86$$

Realizando  $\Sigma F_x = 0$  de toda la estructura para encontrar el valor de la reacción  $R_{8x}$

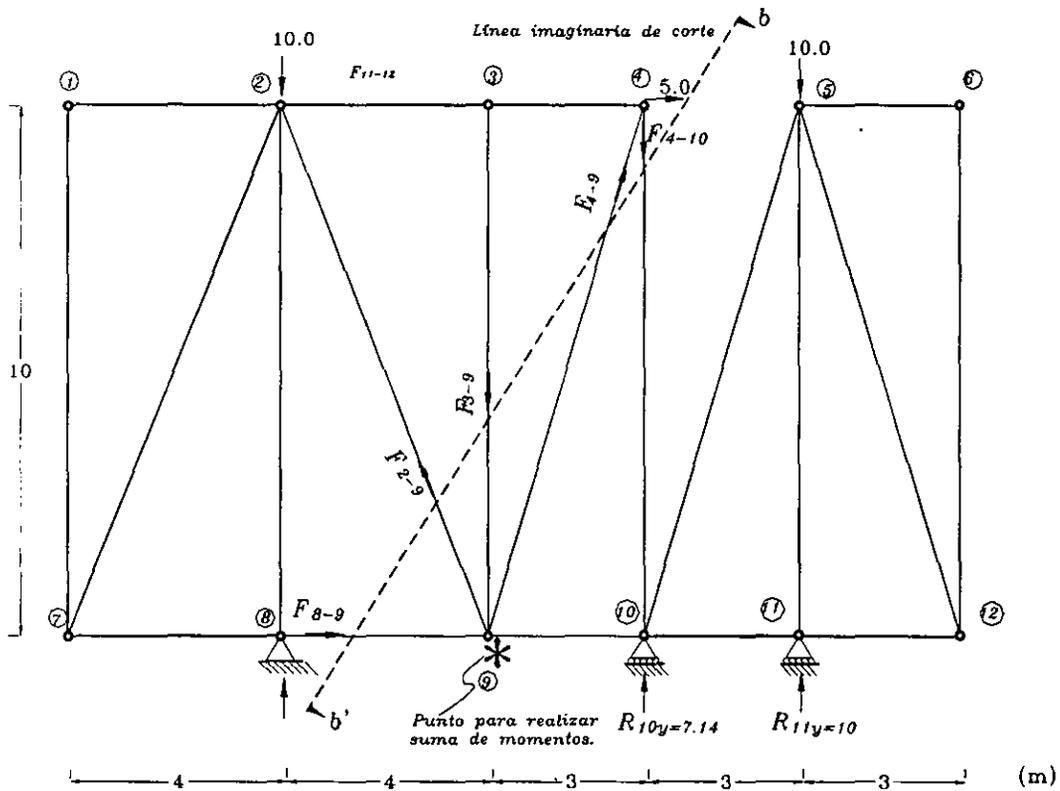
$$R_{8x} - 5 = 0$$

$$R_{8x} = 5$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 4-10

Para obtener el valor de la barra 4-10 se traza la línea imaginaria b-b' que corta a las barras 8-9, 2-9, 4-9, 3-9 y 4-10. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 9 donde concurren varias de estas barras y no pueden producir momentos las barras 8-9, 2-9, 3-9 y 4-9, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 4-10.

Las únicas fuerzas externas que intervienen son las reacciones  $R_{11y} = 10$ ,  $R_{10y} = 7.14$  y las fuerza externa de 10 ubicada en el nudo 5.



$$\Sigma M_9 = 0 \quad (\text{a la derecha de la línea imaginaria})$$

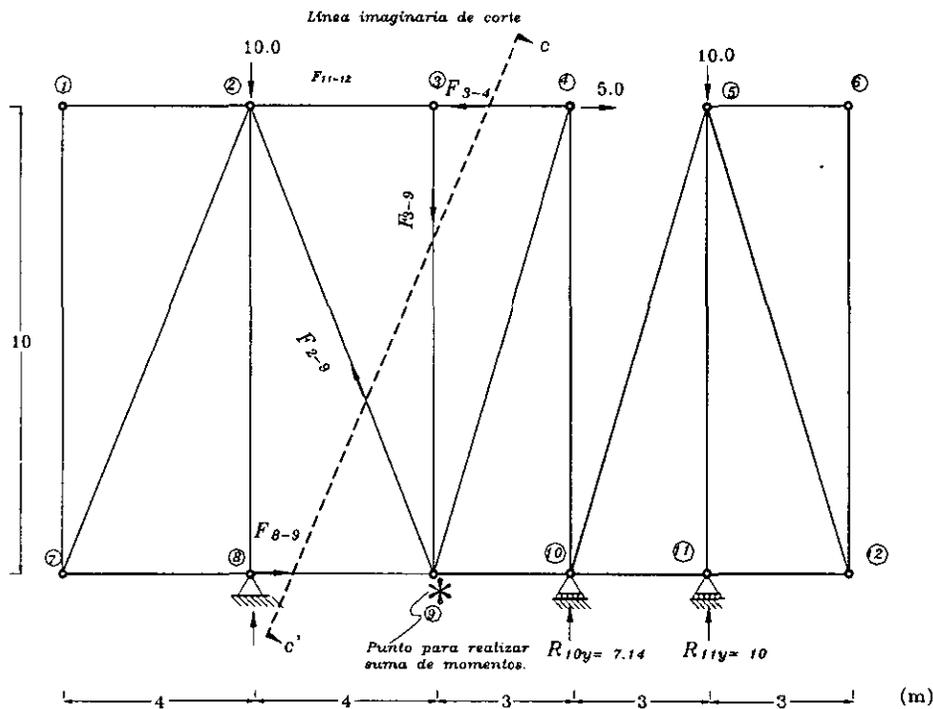
$$F_{4-10}(3) + 10(6) - 10(6) - 7.14(3) = 0$$

$$F_{4-10} = 7.14$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 3-4

Para obtener el valor de la barra 3-4 se traza la línea imaginaria c-c' que corta a las barras 8-9, 2-9, 4-9, 3-9 y 3-4. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 9 nuevamente donde concurren varias de estas barras y no pueden producir momentos las barras 8-9, 2-9 y 3-9 quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 3-4.

Las únicas fuerzas externas que intervienen son las reacciones  $R_{11y} = 10$ ,  $R_{10y} = 7.14$  y las fuerzas externas de 10 ton ubicada en el nudo 5 junto con la de 5 ton ubicada en el nudo 4.



$$\Sigma M_9 = 0 \quad (\text{a la derecha de la línea imaginaria})$$

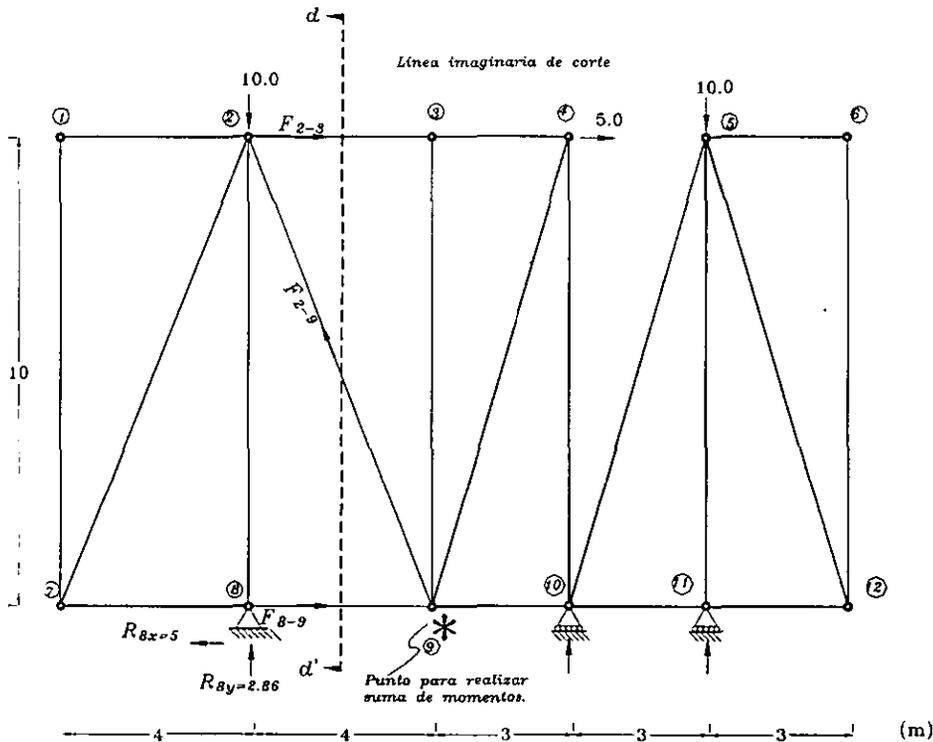
$$-F_{3-4}(10) + 10(6) - 10(6) - 7.14(3) + 5(10) = 0$$

$$F_{3-4} = 2.86$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 2-3

Para obtener el valor de la barra 2-3 se traza la línea imaginaria d-d' que corta a las barras 8-9, 2-9 y 2-3. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 9 donde concurren varias de estas barras y no pueden producir momentos las barras 8-9 y 2-9 quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 2-3

Las únicas fuerzas externas que intervienen son las reacciones  $R_{8y} = 2.86$  y  $R_{8x} = 5$  y la fuerza externa de 10 ton ubicada en el nudo 2.



$\Sigma M_9=0$  (a la izquierda de la línea imaginaria)

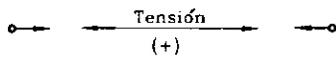
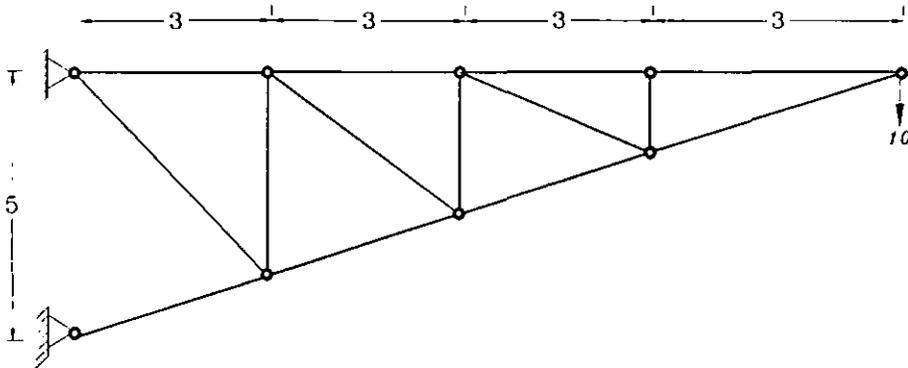
$$+F_{2-3}(10) - 10(4) + 2.86(4) = 0$$

$$F_{3-4} = 2.86$$

El resto de la armadura se puede continuar resolviendo combinando el método de los nudos de manera análoga al problema 6.3.

### Problema 6.8

Calcular las fuerzas axiales de la barras 4-5, 6-5 y 2-3 de la siguiente armadura utilizando el método de las secciones.



### Solución.

#### Revisión de la isostaticidad.

Para que sea una armadura estable es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$N \text{ barras} + N \text{ reacciones} = 2N \text{ nudos}$$

$$N \text{ reacciones} = 4$$

$$N \text{ barras} = 14$$

$$2N \text{ nudos} = 2(9)$$

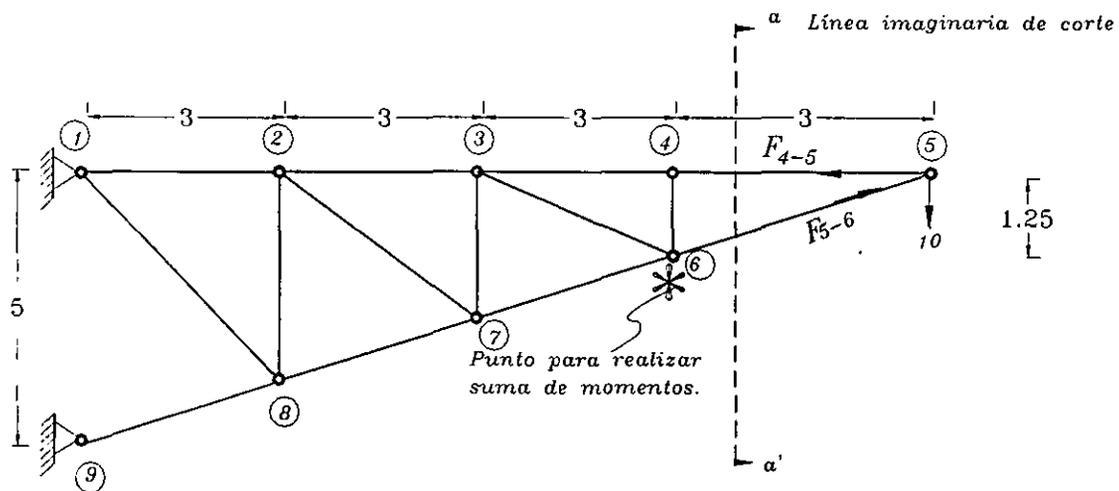
$$4 + 14 = 2(9)$$

$18=18$  se considera una armadura isostática ,estable y externamente determinada.

El objetivo principal de este método consiste en conocer el valor de una barra sin resolver toda la armadura, se traza una línea imaginaria que pase por un nudo o que corte a una o más barras las cuales se considerarán incógnitas. Se escogerá un nudo en la armadura para realizar suma de momentos, interviniendo exclusivamente las barras cortadas y las fuerzas externas del otro lado de la línea imaginaria de corte.

### Calculo de la fuerza axial en la barra 4-5

Para obtener el valor de la barra 4-5 se traza la línea imaginaria a-a' que corta a las barras 4-5 y 5-6. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 6 donde no pueden producir momento la fuerza en la barra 5-6, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 4-5. La única fuerza externa que interviene es la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 5, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.



$$\Sigma M_6 = 0 \quad (\text{a la derecha de la línea imaginaria})$$
$$10(3) - F_{4-5}(1.25) = 0$$

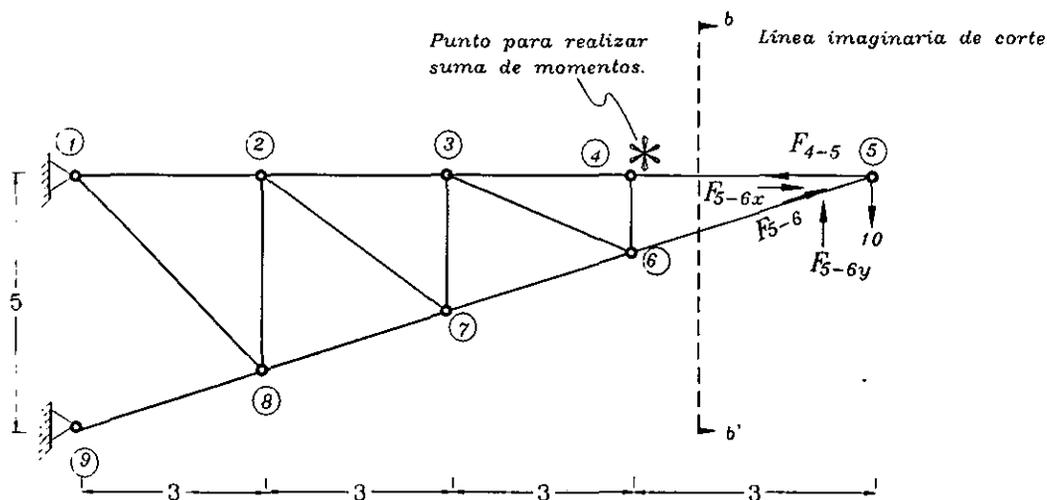
$$F_{4-5} = 24 \text{ ton}$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 5-6

Para obtener el valor de la barra 5-6 se emplea la misma línea imaginaria b-b' que corta a las barras 4-5 y 5-6. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 4 donde no pueden producir momento la fuerza en la barra 5-4, quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 5-6.

La única fuerza externa que interviene es la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 5, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.

La barra 5-6 por ser una barra inclinada se proyectará tanto en x como en y para el cálculo de esta.



$\Sigma M_5 = 0$  (a la derecha de la línea imaginaria)

$$10(3) - F_{5-6y}(3) = 0$$

$$10(3) - F_{5-6}(\text{sen } 22.636)(3) = 0$$

$$F_{5-6} = 26 \text{ ton}$$

### Calculo de la fuerza axial en la barra 1-2

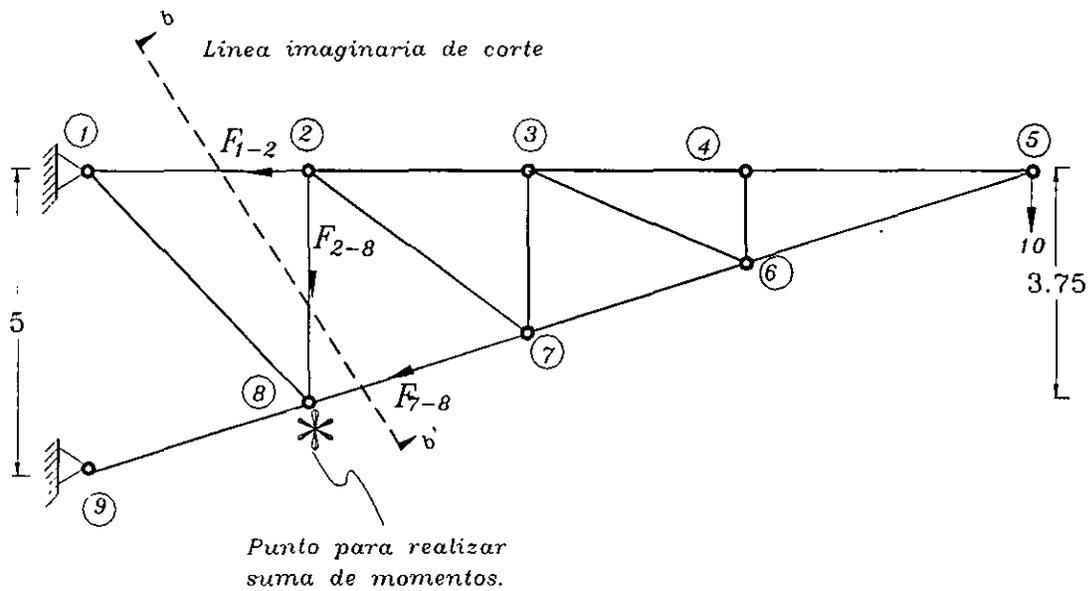
Para obtener el valor de la barra 1-2 se emplea la misma línea imaginaria c-c' que corta a las barras 2-8, 8-7 y 1-2. Para realizar la  $\Sigma M$  se escoge el nudo 8 donde no pueden producir momento la fuerzas en las barras 2-8 y 8-7 quedando únicamente como incógnita la fuerza en la barra 1-2.

La única fuerza externa que interviene es la que tiene un valor de 10 ton y está ubicada en el nudo 5, las demás fuerzas externas quedan al otro lado de la línea imaginaria y no se les considera en el cálculo.

$\Sigma M_8 = 0$  (a la derecha de la línea imaginaria)

$$10(9) - F_{1-2}(3.75) = 0$$

$$F_{1-2} = 24 \text{ ton}$$



El resto de la armadura se puede seguir resolviendo de manera análoga al problema 6.2 utilizando el método de los nudos.

## VII.- CABLES.

### PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 7.1

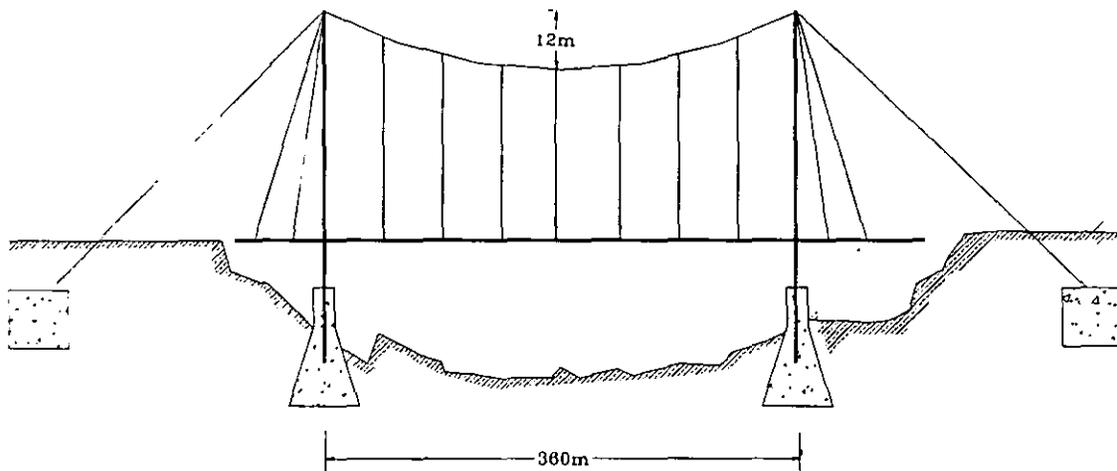
Problema 7.2

Problema 7.3

## Problema 7.1

### Cable parabólico.

El cable de un puente colgante soporta una carga de 2 ton/m repartida uniformemente en forma horizontal. El claro es de 360m, la flecha es de 12m y los apoyos están al mismo nivel. Calcula la máxima tensión que soporta el cable y el ángulo que forma con la horizontal en dicho punto.



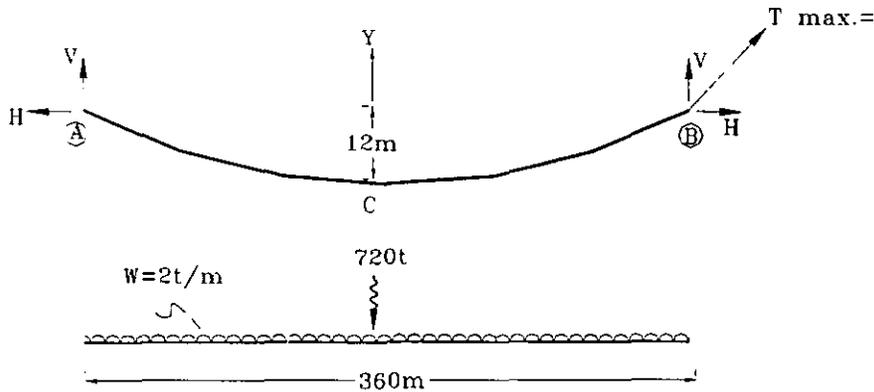
### Solución.

Como primer paso para resolver un problema de cables, es identificar la configuración que va adoptar el cable en función del tipo de carga al que va estar sometido.

En el caso de este problema, el cable A-B sostiene una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal.

Los cables de los puentes colgantes pueden considerarse cables parabólicos, ya que el peso del cable es pequeño comparado con el peso de la calzada.

En primer lugar se plantea el diagrama de cuerpo libre del cable y a continuación se calculan las reacciones, considerando que la estructura es simétrica:



Considerando que un cable es flexible y por lo tanto no resiste la flexión, en cualquier sección transversal el momento flexionante será nulo. Lo mismo sucederá con la fuerza cortante, de tal manera que el único elemento mecánico que se presenta es la fuerza normal de tensión (positiva).

### Puntos de análisis.

Se consideran punto de interés los extremos del cable (A y B), así como C el punto más bajo este.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$- 360 (V) + 720 (360/2) = 0$$

$$V = 360t$$

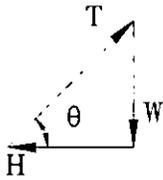
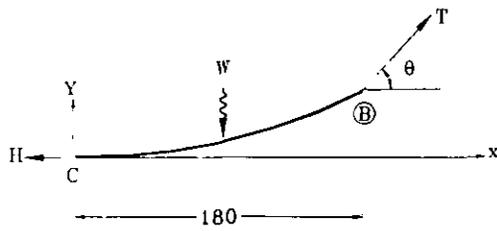
$$\Sigma M_C = 0 \quad (\text{Considerando únicamente la parte derecha del cable})$$

$$+H(12) + 2(180)(180)/2 - 180(V) = 0$$

$$+H(12) + 2(180)(180)/2 - 180(360) = 0$$

$$H = 2700t$$

De la teoría desarrollada para cables parabólicos, se obtienen las siguientes expresiones a partir del triángulo de fuerzas siguiente:



$$T = \sqrt{H^2 + W^2}$$

$$T = \sqrt{(2700)^2 + (360)^2} = 2723.9t$$

Donde T es el valor de la tensión máxima en el cable.

Para obtener el valor de la pendiente de la fuerza de tensión, del triángulo de fuerzas se tiene lo siguiente:

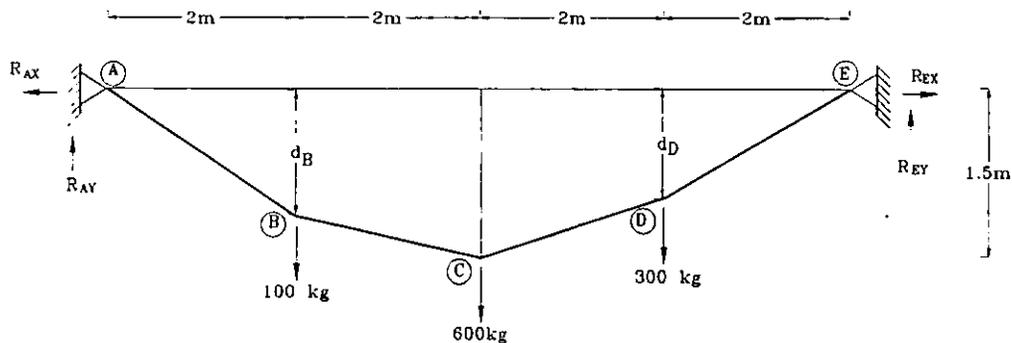
$$\tan \theta = W/H$$

$$\tan \theta = (360) / (2700) = 0.133 \quad \theta = 7.567^\circ$$

## Problema 7.2

### Cable de elementos rectilíneos

Calcula las tensiones que soporta cada tramo del cable de elementos rectilíneos y cuales son las distancias  $d_B$  y  $d_D$ .



### Solución.

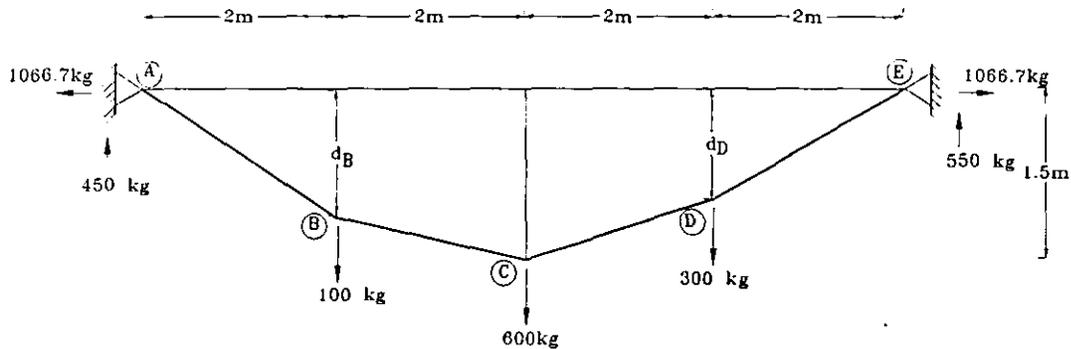
Como primer paso para resolver un problema de cables, es identificar la configuración que va adoptar el cable en función del tipo de carga al que va estar sometido.

En este problema se resolverá un cable que soporta cargas concentradas en sus nudos, por lo cual su geometría es una poligonal.

El cable A, B, C, D, E sostiene tres cargas concentradas en los nodos B, C y D de 100, 600 y 300 kg respectivamente y cuyos apoyos se encuentran al mismo nivel.

Considerando que un cable es flexible y por lo tanto no resiste la flexión, en cualquier sección transversal el momento flexionante será nulo. Lo mismo sucederá con la fuerza cortante, de tal manera que el único elemento mecánico que se presenta es la fuerza normal de tensión (positiva).

En primer lugar se plantea el diagrama de cuerpo libre del cable y a continuación se calculan las reacciones.



$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \\ 100(2) + 600(4) + 300(6) - R_{EY}(8) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{EY} = 550 \text{ kg}$$

$\Sigma M_C = 0$  (Considerando únicamente la parte derecha del cable)

$$\begin{aligned} 300(2) - R_{EY}(4) + R_{EX}(1.5) = 0 \\ 300(2) - 550(4) + R_{EX}(1.5) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{EX} = 1066.7 \text{ kg}$$

Por  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma F_x = 0$  se encuentran el resto de las reacciones.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \\ -R_{AX} - R_{EX} = 0 \end{aligned}$$

$$R_{EX} = R_{AX} = 1066.7 \text{ kg}$$

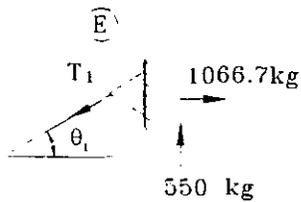
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \\ R_{AY} - 100 - 600 - 300 + R_{EY} = 0 \\ R_{AY} - 100 - 600 - 300 + 550 = 0 \end{aligned}$$

$$R_{AY} = 450 \text{ kg}$$

Una vez calculadas las reacciones, se forma un sistema de ecuaciones en cada nodo a partir de su diagrama de cuerpo libre.

Nodo E

Observando el diagrama de cuerpo libre se realiza una sumatoria de fuerzas y a partir de esta se obtienen los valores de  $\theta_1$  y  $T_1$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_1 \cos \theta_1 = 1066.7$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 \sin \theta_1 = 550$$

Despejando  $T_1$  de las dos ecuaciones anteriores e igualando se tiene lo siguiente:

$$1066.67 / \cos \theta_1 = 550 / \sin \theta_1$$

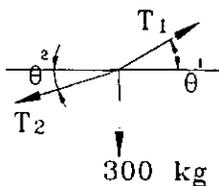
$$\sin \theta_1 / \cos \theta_1 = 550 / 1066.67 \quad \text{pero} \quad \sin \theta_1 / \cos \theta_1 = \tan \theta_1$$

Resolviendo

$$\theta_1 = 27.27^\circ \quad \text{y} \quad T_1 = 1200.1 \text{ kg}$$

Nodo D

A partir del diagrama de cuerpo libre se realiza una sumatoria de fuerzas y se obtienen los valores de  $\theta_2$  y  $T_2$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$1200.1(\cos 27.27) = T_2 \cos \theta_2$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 \sin \theta_1 - 300 - T_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$1200.1(\sin 27.27) - 300 = T_2 \sin \theta_2$$

Despejando  $T_2$  de las dos ecuaciones anteriores e igualando se tiene lo siguiente:

$$\sin \theta_2 / \cos \theta_2 = 249.98 / 1066.66$$

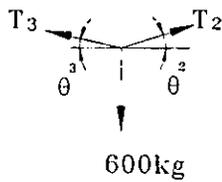
$$\text{pero} \quad \sin \theta_2 / \cos \theta_2 = \tan \theta_2$$

Resolviendo

$$\theta_2 = 13.092^\circ \quad \text{y} \quad T_2 = 1095.57\text{kg}$$

Nodo C

Observando el diagrama de cuerpo libre se realiza una sumatoria de fuerzas y a partir de esta se obtienen los valores de  $\theta_3$  y  $T_3$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_2 \cos \theta_2 - T_3 \cos \theta_3 = 0$$

$$1095.57(\cos 13.192) = T_3 \cos \theta_3$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_2 \sin \theta_2 - 600 + T_3 \sin \theta_3 = 0$$

$$-(1095.57(\sin 13.192) - 600) = T_3 \sin \theta_3$$

Despejando  $T_3$  de las dos ecuaciones anteriores e igualando se tiene lo siguiente:

$$\sin \theta_3 / \cos \theta_3 = 349.975 / 1066.66$$

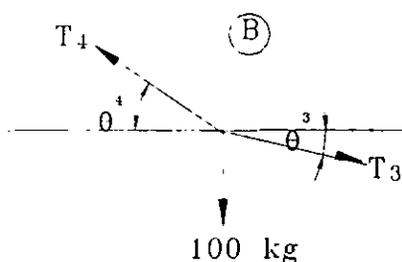
$$\text{pero} \quad \sin \theta_3 / \cos \theta_3 = \tan \theta_3$$

Resolviendo

$$\theta_3 = 18.159^\circ \quad \text{y} \quad T_3 = 1122.57\text{kg}$$

Nodo B

Observando el diagrama de cuerpo libre se realiza una sumatoria de fuerzas y a partir de esta se obtienen los valores de  $\theta_4$  y  $T_4$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-T_3 \cos \theta_3 + T_4 \cos \theta_4 = 0$$

$$-1122.57(\cos 18.159) = T_4 \cos \theta_4$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$+T_4 \sin \theta_4 - 100 - T_3 \sin \theta_3 = 0$$

$$-(-1122.57(\sin 18.159) - 100) = T_4 \sin \theta_4$$

Despejando  $T_3$  de las dos ecuaciones anteriores e igualando se tiene lo siguiente:

$$\sin \theta_3 / \cos \theta_3 = 449.855 / 1066.66$$

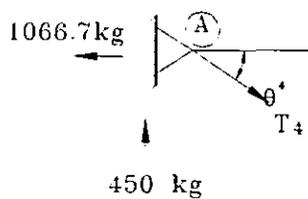
$$\text{pero } \sin \theta_4 / \cos \theta_4 = \tan \theta_4$$

Resolviendo

$$\theta_4 = 22.88^\circ \quad \text{y} \quad T_4 = 1157.03 \text{ kg}$$

Nodo A

Observando el diagrama de cuerpo libre se realiza una sumatoria de fuerzas y a partir de esta se obtienen los valores de  $\theta_4$  y  $T_4$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$+T_4 \cos \theta_4 = 1066.7$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$+T_4 \sin \theta_4 = 450$$

Despejando  $T_3$  de las dos ecuaciones anteriores e igualando se tiene lo siguiente:

$$\sin \theta_3 / \cos \theta_3 = 450 / 1066.66$$

$$\text{pero } \sin \theta_4 / \cos \theta_4 = \tan \theta_4$$

Resolviendo

$$\theta_4 = 22.88^\circ \quad \text{y} \quad T_4 = 1157.7 \text{ kg}$$

Para encontrar los valores de las distancias  $d_B$  y  $d_D$  se emplearan los valores de los ángulos  $\theta_+$  y  $\theta_1$ .

$$\tan \theta_1 = d_D / 2 \qquad d_D = 1.031\text{m}$$

$$\tan \theta_+ = d_B / 2 \qquad d_B = 0.844\text{m}$$

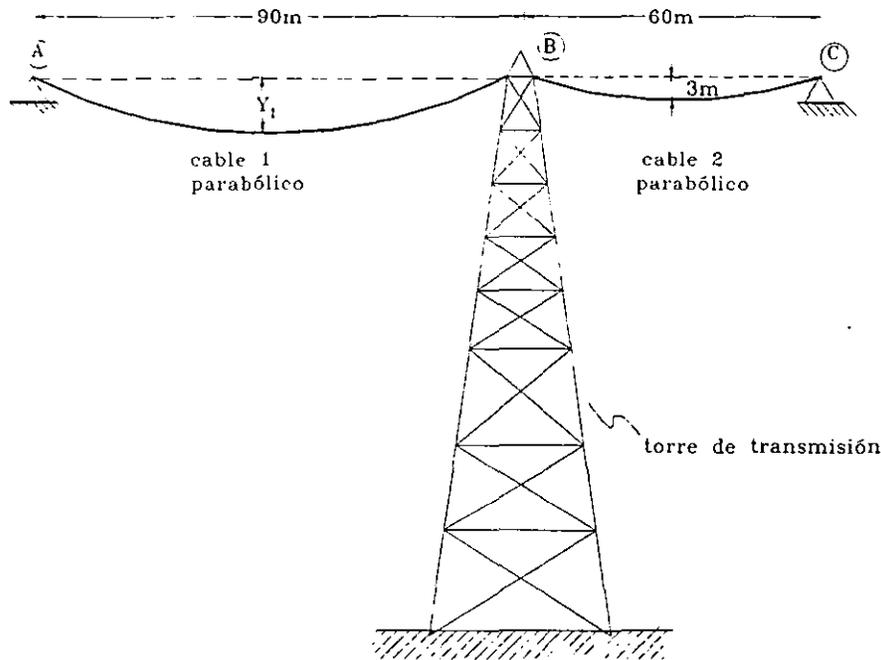
$$\tan \theta = W/H$$

$$\tan \theta = (360) / (2700) = 0.133 \qquad \theta = 7.567^\circ$$

### Problema 7.3

#### Cable Parabólico

Dos cables del mismo calibre se fijan a una torre de transmisión en B. Calcula la flecha en el cable A-B para que las reacciones horizontales de la torre central sean iguales y no provocar ningún efecto en esa dirección.



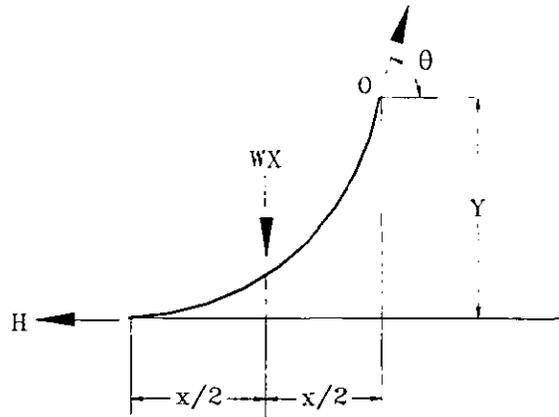
#### Solución.

De acuerdo con los datos del problema se trata de dos cables parabólicos del mismo calibre por consiguiente se considera que el peso de los cables por unidad de longitud es el mismo.

Considerando que un cable es flexible y por lo tanto no resiste la flexión, en cualquier sección transversal el momento flexionante será nulo. Lo mismo sucederá con la fuerza cortante, de tal manera que el único elemento mecánico que se presenta es la fuerza normal de tensión (positiva).

Para obtener la ecuación de la parábola del cable, de manera generalizada se realiza el siguiente procedimiento:

En primer lugar se plantea el diagrama de cuerpo libre de una parte del cable y se realiza una suma de momentos respecto al punto O.

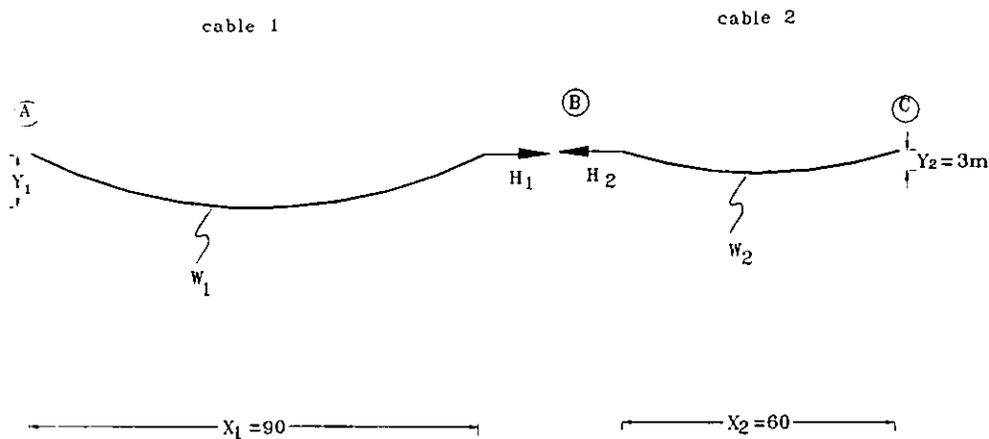


$$\Sigma M_O = 0 \quad wx(x/2) - HY = 0$$

despejando a Y

$$Y = wx^2 / 2H$$

Aplicando la expresión anterior para cada uno de los cables e igualando la fuerza horizontal de estos se despeja el valor de Y<sub>1</sub> (valor de la flecha desconocida).



$$H_1 = W_1(X_1) (X_1) / 2Y_1$$

$$H_2 = W_2(X_2) (X_2) / 2Y_2$$

igualando H<sub>1</sub> y H<sub>2</sub>

$$W_1(X_1) (X_1) / 2Y_1 = W_2(X_2) (X_2) / 2Y_2$$

pero W<sub>1</sub>=W<sub>2</sub> simplificando y despejando Y<sub>1</sub>

$$Y_1 = Y_2(X_1) (X_1) / (X_2) (X_2) = 3(90/2)(90/2) / (60/2)(60/2) = \underline{6.75m \text{ valor de la flecha}}$$

## VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo, a través de los problemas expuestos, se remarca la importancia que tiene para la formación del alumno, que aprenda en forma manual diferentes métodos de solución para el cálculo, interpretación y trazo de diagramas de elementos mecánicos, como son: fuerza cortante, momento flexionante y fuerza normal en el plano.

Es importante remarcar que el conocimiento y manejo de los elementos mecánicos, es trascendente en los cursos posteriores de estructuras, ya que al conocer las fuerzas reactivas internas (elementos mecánicos) en un elemento estructural debido a las distintas solicitaciones de carga a que está sometido, dichos resultados en combinación con otros procesos de análisis (mecánica de materiales) se utilizan para diseñar elementos estructurales con diferentes materiales tales como: concreto, acero, madera y otros más.

Gracias al desarrollo que ha tenido la industria de la computación, en la actualidad se cuenta con una gran variedad de herramientas auxiliares para la obtención de elementos mecánicos de estructuras en general tanto en 2D como en 3D. Sin embargo, es primordial tener el criterio suficiente para interpretar los resultados arrojados por estos paquetes de análisis, y así evitar que con una interpretación errónea se llegue a un mal diseño estructural lo cual repercutirá tanto en los costos como en la seguridad misma de la estructura.

Es necesario hacer énfasis en que una de las mejores maneras de que el alumno puede desarrollar experiencia y un criterio para la comprensión de los resultados obtenidos de los paquetes de computación para el cálculo de elementos mecánicos, es a través de un conocimiento previo logrado por medio de la solución manual de problemas, aplicando los conceptos teóricos del equilibrio para estructuras en general.

## BIBLIOGRAFIA

Apuntes de Estructuras Isostáticas.

Luis Herrejón de la Torre M. Depto. Estructuras UNAM.

Análisis Estructural.

Jack C. McCormac

Antecedentes de Mecánica.

Representaciones y Servicios de Ingeniería.

Aplicaciones de la Estática.

Antonio Murrieta Necochea. Edit. Limusa

Estática para Ingenieros.

Hibeller. Edit Limusa.

Estructuras Isostáticas.

Lizarraga. Edit. Mc Graw Hill

Mecánica de materiales.

Timoshenko-Gere. Edit. Hispano Americana.

Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática

Berr y Johnston. Edit. Mc Graw Hill

Resistencia de Materiales.

Fitzgerald. Edit. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.

Teoría Elemental de las Estructuras.

Yuang Yiu Sie. Edit. Prentice/Hall