

00365  
S  
29



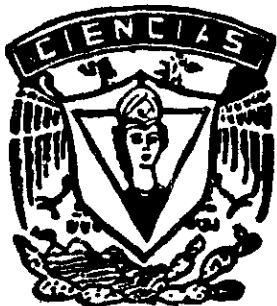
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ALGUNOS ASPECTOS IMPORTANTES  
EN GEOMETRIA ALGEBRAICA**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**  
P R E S E N T A  
**MAT. ANDRES DAVID MOLINA FONSECA**

DIRECTOR DE TESIS:  
**DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

1 9 9 9

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

275785



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

*Algunos aspectos importantes  
en Geometría Algebraica.*

Grassmanianas y otros objetos matemáticos.

---

U N A M

Para mi mejor amiga Gaby.

# INTRODUCCIÓN.

Una de las tendencias al hacer matemáticas es retomar algo que estudiaron algunos, buscar ligaduras y en el mejor de los casos crear una nueva teoría a partir de esto.

En este trabajo se pretende precisamente retomar algunos trabajos que incluyen desde matemática del siglo XIX a resultados relativamente recientes de la década de los ochentas.

En concreto se trata de estudiar la geometría de las Grassmanianas y relacionarlas con otros objetos matemáticos. Las Grassmanianas son ciertas variedades algebraicas que pueden pensarse como una generalización de los espacios proyectivos. Los otros objetos en cuestión son poliedros convexos y geometrías combinatorias o matroides.

Todos estos objetos han surgido como generalizaciones de otros más simples. De hecho podemos decir que, en parte, nacieron de la Geometría enumerativa, que trata con problemas de conteo de puntos, líneas, planos, etc., que cumplen con ciertas propiedades.

En nuestro primer acercamiento con las Grassmanianas, se abordará un poco el tipo de problemas que se planteó H. Schubert, que después despertó interés en varios matemáticos y que después de varios años dio como fruto el desarrollo de importantes herramientas matemáticas.

Los otros objetos, nacieron de forma similar, por ejemplo las Geometrías combinatorias y matroides, nacieron de considerar ciertas configuraciones proyectivas, es decir, conjuntos de puntos, líneas, etc., en un espacio proyectivo. Después originaron preguntas como ¿Cuándo esas configuraciones proyectivas son o no representables? Por el otro lado, los poliedros, también fueron estudiados a fondo cuando se obtuvieron algunos resultados de tipo topológico, combinatorio.

Después de estudiar un poco estos objetos y las relaciones que existen entre ellos, lo cual es central en esta tesis, se abordará un problema más como ejemplo de utilidad de esta herramienta. Este problema es el del dilogaritmo y la generalización a polilogaritmos.

También se incluyen algunos problemas abiertos, trabajos relacionados y algunas referencias para los lectores interesados.

*Agradecimientos.*

Aprovecho para agradecer a todos mis profesores, en particular a mis sinodales Dr. Marcelo Aguilar, Dr. Federico Sánchez, Dra. Laura Hidalgo, Dr. Herbert Kanarek, Dra. Rita Zuazua, M. en C. Matías Navarro y especialmente a mi Director de Tesis Dr. Javier Elizondo, que además de ayudarme en la dirección de este trabajo a sido un valioso e incondicional apoyo y guía en mis demás actividades académicas.

# Índice General

<b>1</b>	<b>MATROIDES Y GEOMETRÍAS COMBINATORIAS.</b>	<b>9</b>
1.1	Definiciones. . . . .	9
1.1.1	Familias de subconjuntos. . . . .	10
1.2	Ejemplos. . . . .	14
1.2.1	Subconjuntos de espacios proyectivos. . . . .	14
<b>2</b>	<b>GRASSMANIANAS Y VARIEDADES RELACIONADAS.</b>	<b>25</b>
2.1	Grassmanianas. . . . .	25
2.2	Subvariedades de Grassmanianas . . . . .	28
2.3	Un análogo del mapeo de Veronese . . . . .	29
2.4	Variedades de Fano . . . . .	30
<b>3</b>	<b>GEOMETRÍA EN GRASSMANIANAS.</b>	<b>33</b>
3.1	Estratos Grassmanianos y geometrías combinatorias. . . . .	33
3.1.1	Definiciones. . . . .	34
3.1.2	Estratos Grassmanianos. . . . .	35
3.1.3	Acción de un toro. . . . .	35
3.1.4	Notas sobre configuraciones proyectivas. . . . .	36
3.2	Mapeo Momento . . . . .	38
3.2.1	El Hipersimplejo. . . . .	39
3.2.2	Teorema de convexidad . . . . .	39
3.2.3	Segunda definición de estratificación. . . . .	40
3.3	Células de Schubert y estratos en las Grassmanianas. . . . .	40
3.3.1	Células de Schubert. . . . .	40
3.3.2	La tercera estratificación de las Grassmanianas. . . . .	41
3.4	Matroides y poliedros convexos. . . . .	43

3.4.1	Teorema (GGMS) . . . . .	43
3.4.2	Demostración ( $\Rightarrow$ ). . . . .	43
3.4.3	Demostración ( $\Leftarrow$ ). . . . .	45
3.4.4	El poliedro de Fano. . . . .	46
3.4.5	Topología de estratos. . . . .	47
3.4.6	Degeneración de matroides. . . . .	47
<b>4</b>	<b>UNA GENERALIZACIÓN DEL DILOGARITMO.</b>	<b>51</b>
4.1	Introducción histórica. . . . .	51
4.1.1	El Dilogaritmo. . . . .	51
4.1.2	El Complejo Tetraédrico. . . . .	52
4.1.3	Simplejos Grassmanianos. . . . .	53
4.2	Introducción. . . . .	54
4.2.1	Poliedros en Grassmanianas. . . . .	54
4.2.2	Los primeros simplejos Grassmanianos. . . . .	55
4.2.3	La relación con formas diferenciales . . . . .	57
4.3	Las formas de dilogaritmo generalizadas. . . . .	61
4.3.1	Definiciones. . . . .	61
4.3.2	Resultados Principales. . . . .	63
4.3.3	Ecuaciones funcionales. . . . .	64
4.4	Simplejos Grassmanianos. . . . .	65
4.4.1	Hipersimplejos . . . . .	65
4.4.2	Configuraciones Proyectivas. . . . .	66
4.4.3	Las cerraduras de $H^0$ -órbitas. . . . .	69
4.5	Formas diferenciales invariantes sobre variedades Grassmanianas . . . . .	77
4.5.1	Homología de Variedades Grassmanianas . . . . .	77
4.5.2	El caracter de Pontrjagin . . . . .	79
4.5.3	Demostración del Teorema de Anulación. . . . .	81



## Capítulo 1

# MATROIDES Y GEOMETRÍAS COMBINATORIAS.

En este capítulo se pretende introducir las definiciones axiomáticas básicas de la teoría de *matrices*, que serán utilizadas en esta tesis. También se estudiarán algunos ejemplos ilustrativos en la sección ( 1.2).

### 1.1 Definiciones.

**Definición 1.1.1.** Una familia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de un conjunto finito  $E$  es llamada una familia de *bases* para  $E$  si los siguientes axiomas se cumplen:

b1  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . (No trivialidad)

b2  $\mathcal{B}$  es una familia incomparable en  $E$ . (Incomparabilidad)

b3 Para cualesquiera dos subconjuntos  $X, Y \subseteq E$ ,  $X \subseteq Y$ , si existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tales que  $X \subseteq B_1$  y  $B_2 \subseteq Y$ , entonces existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ . (Axioma de base media).

**Definición 1.1.2.** Por una familia incomparable en  $E$  nos referimos a una familia de subconjuntos de  $E$  tal que si dos subconjuntos  $X, Y$  están en dicha familia y  $X \subseteq Y$  entonces  $X = Y$ .

Denotaremos con  $\mathcal{B}(E)$  a la colección de todas las familias de bases para  $E$ .

**Definición 1.1.3.** Una *matroide finita*  $M(E)$  en un conjunto finito  $E$  es un par  $(E, \mathcal{B})$ , donde  $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(E)$ .

**Ejemplo 1.1.4.** Consideremos un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y sea  $E$  un conjunto finito arbitrario de vectores en  $V$ . Entonces si  $\mathcal{B}$  es tomado como la familia de todos los subconjuntos maximales de  $E$  que son linealmente independientes en  $V$ , los axiomas anteriores pueden ser verificados fácilmente para  $\mathcal{B}$ ; así tenemos una matroide  $M_V(E)$ . Dicha matroide es una matroide vectorial.

**Definición 1.1.5.** Una matroide  $M(E)$  será *coordinatizable* si esta es isomorfa a una matriz vectorial.

### 1.1.1 Familias de subconjuntos.

**Definición 1.1.6.** Una familia *descendente* en  $E$  es una familia  $\mathcal{A}$  tal que para cualesquiera  $X, Y \subseteq E$ , si  $X \subseteq Y$  y  $Y \in \mathcal{A}$  entonces  $X \in \mathcal{A}$ . Dualmente una familia *ascendente* en  $E$  es una familia  $\mathcal{A}$  tal que para cualesquiera  $X, Y \subseteq E$ , si  $Y \subseteq X$  y  $Y \in \mathcal{A}$  entonces  $X \in \mathcal{A}$ .

**Definición 1.1.7.** Para cualquier familia de subconjuntos de  $E$  definimos el cono superior, el cono inferior, la familia máxima, la familia mínima y familia opuesta de  $\mathcal{A}$  como sigue:

- cono superior  $:= \mathcal{S}(\mathcal{A}) := \{X \subseteq E \mid \exists A \in \mathcal{A}, A \subseteq X\}$
- cono inferior  $:= \mathcal{J}(\mathcal{A}) := \{X \subseteq E \mid \exists A \in \mathcal{A}, X \subseteq A\}$
- familia máxima  $:= \mathcal{MA}(\mathcal{A}) := \{A \in \mathcal{A} \mid \exists A \text{ es maximal en } \mathcal{A}\}$
- familia mínima  $:= \mathcal{MJ}(\mathcal{A}) := \{A \in \mathcal{A} \mid \exists A \text{ es minimal en } \mathcal{A}\}$
- familia opuesta  $:= \mathcal{OP}(\mathcal{A}) := \{X \subseteq E \mid X \not\subseteq A\}$

Los conos superior e inferior de  $\mathcal{A}$  son siempre familias ascendentes y descendentes respectivamente. La familia máxima y la mínima de  $\mathcal{A}$  son ambas familias incomparables en  $E$ . Y la familia opuesta de  $\mathcal{A}$  es una familia descendente si  $\mathcal{A}$  es ascendente.

Ahora, sea  $M(E) := (E, \mathcal{B})$  una matroide finita.

**Definición 1.1.8.** Un subconjunto  $X \subseteq E$  es *independiente* en  $M(E)$  si  $X \in \mathcal{J} := \mathcal{J}(\mathcal{B})$  y es *generador* si  $X \in \mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathcal{B})$ . Denotamos como  $I(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{J}$  y como  $S(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{S}$ .

**Definición 1.1.9.** Un subconjunto  $X \subseteq E$  es *dependiente* en  $M(E)$  si  $X \in \mathcal{D} := \mathcal{OP}(\mathcal{J}(\mathcal{B}))$  y es *no-generador* si  $X \in \mathcal{N} := \mathcal{OP}(\mathcal{S}(\mathcal{B}))$ . Denotamos como  $D(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{D}$  y como  $N(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{N}$ .

**Definición 1.1.10.** Un subconjunto  $X \subseteq E$  es un *circuito* en  $M(E)$  si  $X \in \mathcal{C} := \mathcal{MJ}(\mathcal{OP}(\mathcal{J}(\mathcal{B})))$  y es un *hiperplano* en  $M(E)$  si  $X \in \mathcal{H} := \mathcal{MA}(\mathcal{OP}(\mathcal{J}(\mathcal{B})))$ . Denotamos como  $C(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{C}$  y como  $H(E)$  a la colección de todas las familias  $\mathcal{H}$ .

Estos conceptos son familiares en los ejemplos de matroides coordinatizables. En una matroide coordinatizable  $M_V(E)$ , los subconjuntos independientes y dependientes de  $E$  son subconjuntos linealmente dependientes y linealmente independientes de  $E$ . Los subconjuntos generadores son bases del espacio vectorial  $V$ , y finalmente los hiperplanos son hiperplanos de  $V$  intersectados con  $E$ , si tal intersección genera el hiperplano en cuestión.

Para cada matroide  $M(E)$  la familia de circuitos e hiperplanos son familias incomparables, las familias de conjuntos dependientes y generadores son familias ascendentes, y las familias de conjuntos independientes y no generadoras son familias descendentes.

Las siguientes proposiciones son probadas en [Whi86] y caracterizan a las colecciones antes definidas.

**Proposición 1.1.11.** Una familia  $\mathcal{S}$  pertenece a  $I(E)$ , esto es, es la familia de todos los conjuntos independientes para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

- i1  $\mathcal{J} \neq \emptyset$ .
- i2  $\mathcal{J}$  es una familia descendente.
- i3 Para toda  $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$ , si  $|I_1| < |I_2|$ , entonces existe  $x \in I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup x \in \mathcal{J}$ .

Dualmente, una familia  $\mathcal{S}$  pertenece a  $S(E)$ , esto es, es la familia de todos los conjuntos generadores para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

- s1  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .
- s2  $\mathcal{J}$  es una familia ascendente.
- s3 Para toda  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ , si  $|S_1| > |S_2|$ , entonces existe  $x \in S_1 - S_2$  tal que  $S_1 - x \in \mathcal{S}$ .

Nos referiremos a (i1), (i2), y (i3) como axiomas de independencia y (s1), (s2), y (s3) como axiomas de generación.

**Proposición 1.1.12.** Una familia  $\mathcal{D}$  pertenece a  $D(E)$ , esto es, es la familia de todos los conjuntos dependientes para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

d1  $\emptyset \notin \mathcal{D}$ .

d2  $\mathcal{D}$  es una familia ascendente.

d3 Para toda  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ , si  $D_1 \cap D_2 \notin \mathcal{D}$ , entonces para toda  $x \in E$ ,  $(D_1 \cup D_2) - x \in \mathcal{D}$ .

Dualmente, una familia  $\mathfrak{N}$  pertenece a  $N(E)$ , esto es, es la familia de todos los conjuntos no-generadores para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

n1  $E \notin \mathfrak{N}$ .

n2  $\mathfrak{N}$  es una familia descendente.

n3 Para toda  $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ , si  $N_1 \cup N_2 \notin \mathfrak{N}$ , entonces para toda  $x \in E$ ,  $(N_1 \cup N_2) \cup x \in \mathfrak{N}$ .

Nos referiremos a (d1), (d2), y (d3) como axiomas de dependencia y (n1), (n2), y (n3) como axiomas de no-generación.

Refiriéndonos a circuitos e hiperplanos tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1.1.13.** Una familia  $\mathcal{C}$  pertenece a  $C(E)$ , esto es, es la familia de todos los circuitos para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

c1  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

c2  $\mathcal{C}$  es una familia incomparable.

c3 Para toda  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , tal que  $C_1 \neq C_2$ , y para toda  $x \in E$ , entonces existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$ .

Dualmente, una familia  $\mathfrak{H}$  pertenece a  $H(E)$ , esto es, es la familia de todos los hiperplanos para una matroide  $M(E)$ , si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

h1  $E \notin \mathfrak{H}$ .

h2  $\mathfrak{H}$  es una familia incomparable.

h3 Para toda  $H_1, H_2 \in \mathfrak{H}$ , tal que  $H_1 \neq H_2$ , y para toda  $x \in E$ , entonces existe  $H_3 \in \mathfrak{H}$  tal que  $(H_1 \cap H_2) \cup x \subseteq H_3$ .

Nos referiremos a (c1), (c2), y (c3) como axiomas para circuitos y (h1), (h2), y (h3) como axiomas para hiperplanos.

Ahora, definamos el operador cerradura y el rango para una matroide,

**Definición 1.1.14.** Un *operador cerradura* sobre el conjunto finito  $E$  es un operador  $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  que satisface los siguientes:

cl1 Para toda  $X \subseteq E$ ,  $X \subseteq cl(X)$

cl2 Para toda  $X, Y \subseteq E$ , si  $X \subseteq Y$  entonces  $cl(X) \subseteq cl(Y)$ .

cl3 Para toda  $X \subseteq E$ ,  $cl[cl(X)] = cl(X)$

cl3 Para toda  $X \subseteq E$  y para toda  $y, z \in E$ , si  $y \in cl(X \cup z) - cl(X)$ , entonces  $z \in cl(X \cup y) - cl(X)$

**Definición 1.1.15.** Una *función rango* sobre  $E$  es una función  $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$  que satisface los siguientes:

r1  $r(\emptyset) = 0$ .

r2 Para toda  $X, Y \subseteq E$ , si  $X \subseteq Y$  entonces  $r(X) \leq r(Y)$ .

r3 Para toda  $X, Y \subseteq E$ ,  $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ .

Ahora estableceremos las condiciones que se tienen que aumentar para extender nuestros sistemas de axiomas a geometrías combinatorias. Las geometrías combinatorias son una restricción natural de la colección de matroides. Sobre las matroides vectoriales, ellas constituyen la clase en la cual en ningún par de vectores uno es múltiplo escalar del otro, y en donde el vector cero es excluido.

Si entonces, pasamos del espacio vectorial al correspondiente espacio proyectivo con el proceso usual de identificación de múltiples escalares, los elementos de una geometría combinatoria permanecen distintos. En general, las geometrías combinatorias son frecuentemente visualizadas como configuraciones geométricas.

**Definición 1.1.16.** Una matroide  $M(E) := (E, \mathcal{B})$  con  $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(E)$  es una *geometría combinatoria* si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes para la siguiente proposición. En tal caso  $M(E)$  usualmente se denota como  $G(E)$ .

**Proposición 1.1.17.** Sea  $M(E) := (E, \mathcal{B})$  con  $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(E)$ , una matroide sobre  $E$ , y sean  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{N}$ , y  $\mathcal{H}$  sus familias de circuitos, conjuntos dependientes, conjuntos independientes, conjuntos generadores, conjuntos no-generadores, e hiperplanos respectivamente. Y sean  $cl$  y  $r$  el operador cerradura y la función rango de  $M(E)$ . Entonces los siguientes son equivalentes:

c4 Si  $C \in \mathcal{C}$  entonces  $|C| \geq 3$ .

d4 Si  $D \in \mathcal{D}$  entonces  $|D| \geq 3$ .

i4 Para toda  $x, y \in E$ ,  $\{x, y\} \in \mathcal{J}$ .

b4 Para toda  $x, y \in E$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $\{x, y\} \subseteq B$ .

s4 Para toda  $x, y \in E$ , existe  $S \in \mathcal{M}(\mathcal{J})$  tal que  $\{x, y\} \subseteq S$ .

n4 Para toda  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  existe  $N \in \mathcal{M}(\mathcal{N})$  tal que  $x \in N, y \notin N$ .

h4 Para toda  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  existe  $H \in \mathcal{H}$  tal que  $x \in H, y \notin H$ .

cl5  $cl(\emptyset) = \emptyset$  y  $cl(x) = x$  para toda  $x \in E$ .

r4 Para toda  $X \subseteq E$ , si  $|X| \leq 2$ , entonces  $r(X) = |X|$ .

Hasta ahora sólo hemos considerado matroides finitas en las cuales el conjunto  $E$  es finito. Si ahora permitimos que  $E$  sea infinito, nuestra teoría permanece prácticamente igual si insistimos que las bases sean finitas.

## 1.2 Ejemplos.

### 1.2.1 Subconjuntos de espacios proyectivos.

El ejemplo más básico de una geometría combinatoria es la estructura de un conjunto arbitrario de puntos de un espacio proyectivo de dimensión finita.

Para comenzar, el espacio proyectivo tiene una estructura de planos, llamemosles puntos, líneas, planos, etcétera, y las relaciones de incidencia entre ellos. Cada  $n$ -plano (o simplemente plano cuando no haya confusión) tiene un rango igual a su dimensión proyectiva mas uno; puntos tienen rango 1, líneas tienen rango 2 y así sucesivamente. El rango de cualquier plano es entonces igual al número de puntos necesarios para determinar tal plano. Nuestra tarea inmediata es ver cómo esta estructura de planos puede ser inducida sobre un *subconjunto* del conjunto de puntos del espacio.

**Ejemplo 1.2.1.** Sea  $E \subseteq S$  un subconjunto del conjunto  $S$  de puntos en un espacio proyectivo. Cada plano proyectivo por si mismo consiste de un conjunto de puntos cuya intersección con  $E$  llamaremos un plano de la geometría combinatoria  $G(E)$  inducida en el conjunto  $E$ . ¿Cómo deberíamos asignar un rango a dicho plano? Digamos que un subconjunto  $A \subseteq E$  es la intersección de algún plano proyectivo con  $E$ . Entonces existe uno de esos planos proyectivos que es el menor tal que su intersección con  $E$  es  $A$ , y éste tiene un rango  $r(A)$  que le asignaremos al plano  $A$  en la geometría  $G(E)$ . En la figura ( 1.1) tenemos un esquema de

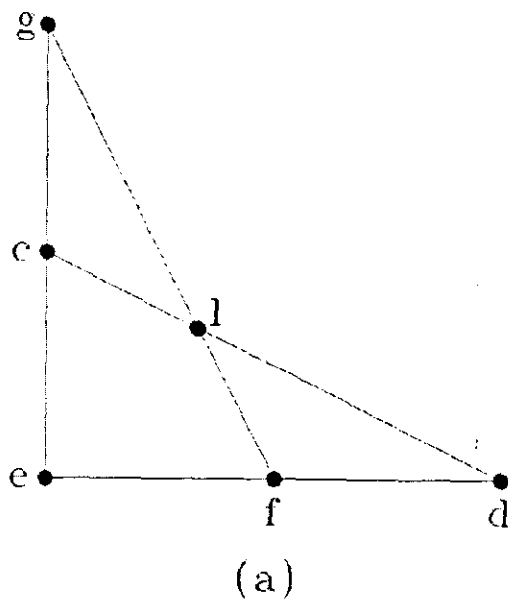


Figura 1.1: Una geometría de seis puntos.

una geometría combinatoria de seis puntos. Los planos y sus relaciones de incidencia están indicados en la latiz de la figura ( 1.2). Líneas rectas en el esquema indican aquellas líneas de la geometría que contienen más de 2 puntos, pero pares como  $dg$  también son líneas de la geometría combinatoria, y tienen rango 2.

Esta geometría es fácilmente vista como la geometría inducida sobre un conjunto de seis puntos en el plano proyectivo real (configuración proyectiva). En la figura ( 1.3) indicamos una elección de seis puntos. Aquí por ejemplo, la colinearidad de los puntos  $g, l, f$  es probada mediante el cálculo

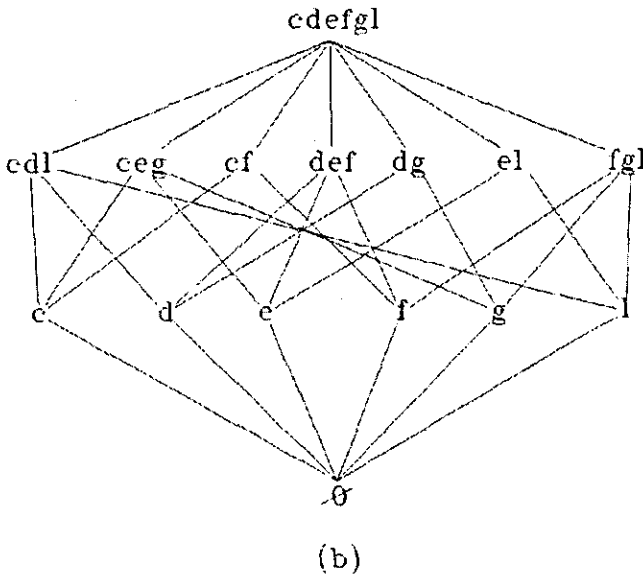


Figura 1.2:

$$-g + 3l = -1(0, 6, 1) + 3(2, 2, 1) = (6, 0, 2) \cong (3, 0, 1) = f$$

como las coordenadas difieren solamente por un común múltiplo escalar entonces nos referimos al mismo punto proyectivo.

La latiz de planos de una geometría combinatoria, tal como en la figura ( 1.2) es una latiz geométrica. La *unión* de dos planos es el menor plano que los contiene; la *intersección* de dos planos, es simplemente su intersección como conjuntos.

Las propiedades principales de las latices geométricas están resumidas en el siguiente enunciado: Si un plano  $A$  está contenido en un plano  $B$ , entonces tienen rangos consecutivos si y sólo si existe un punto  $p \notin A$  tal que  $Ap = B$ .

Puesto de otra forma, el conjunto de puntos que no están en un plano fijo  $A$  está particionado por inclusión en aquellos puntos que están en los planos de el próximo rango superior, que contiene a  $A$ .

Entonces, en una geometría combinatoria de rango  $\geq 3$ , los puntos que no están en una línea dada están particionados por inclusión en los planos que pasan por tal línea.

**Ejemplo 1.2.2.** En el cubo proyectivo de la figura ( 1.4), el conjunto  $abcefh$  de puntos que



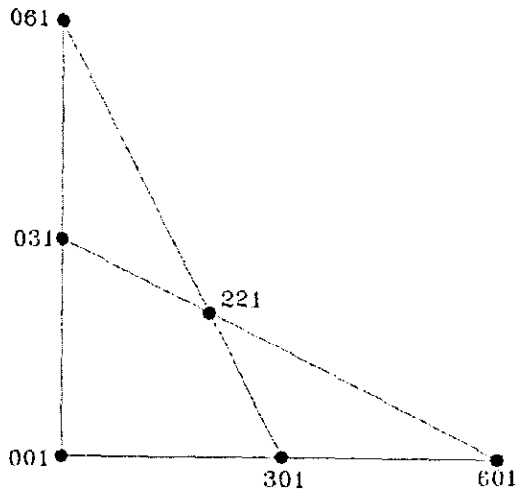


Figura 1.3:

no están en la línea  $dg$  está particionado en  $(af)$   $(b)$   $(ch)$   $(e)$  por inclusión en los planos  $adfg$ ,  $bdg$ ,  $cdgh$  y  $deg$ , respectivamente.

Hay diferencias significativas entre geometrías combinatorias en general y la geometría proyectiva que conocemos. En cualquier geometría combinatoria, líneas concurrentes deben ser coplanares, y planos que se intersectan en una línea deben ser coespaciales. En geometría proyectiva, también sabemos que líneas coplanares son concurrentes, y que planos coespaciales deben intersectarse en una línea. Esto no es cierto para geometrías combinatorias en general. Por ejemplo, las líneas coplanares  $cf$  y  $el$  no se intersectan en la geometría combinatoria de la figura (1.1). Si la figura (1.4) es construida como una geometría combinatoria, los planos coespaciales  $aceg$  y  $bdfh$  no se intersectan nunca. Una ligera modificación de la geometría de un conjunto de puntos en un espacio proyectivo puede producir una geometría que no puede ser realizada en un espacio proyectivo. Consideremos la figura (1.5), en donde se intenta sugerir un cubo proyectivo con seis caras planas y en donde el conjunto diagonal de los cuatro puntos  $aceg$  es coplanar, pero el conjunto diagonal no es coplanar. Si los ocho puntos estuvieran de esta manera en siete planos de cuatro puntos encontrados en un espacio proyectivo tendríamos la siguiente contradicción: Los planos  $bafe$ ,  $aceg$  y  $cbgf$  se intersectarían en algún punto  $p$ , un punto que entonces estaría sobre las tres líneas de intersección  $ae$ ,  $cg$  y  $bf$  de dichos planos.

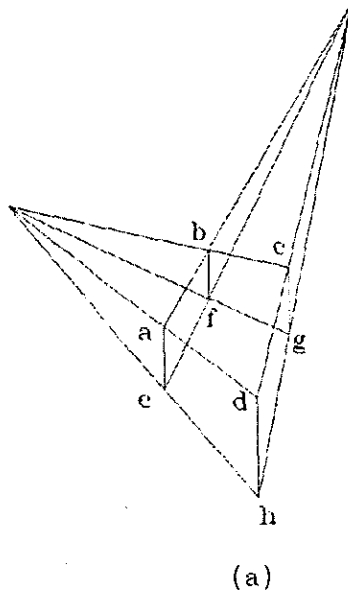


Figura 1.4: Un cubo proyectivo

Similarmente, las líneas  $ae$ ,  $cg$  y  $dh$  serían concurrentes y se intersectarían solamente en el mismo punto  $p$ . Entonces  $bf$  y  $dh$  serían concurrentes en  $p$  y tendrían que ser coplanares. El dibujo está diseñado para que parezca razonable que las líneas  $bf$  y  $dh$  no son coplanares. De hecho, en cualquier realización tridimensional de este particular dibujo plano, las líneas  $ac$  y  $eg$  tampoco son coplanares, y ninguno de los conjuntos diagonales  $aceg$  y  $bdfh$  son coplanares. Si el conjunto  $aceg$  fuera coplanar, las líneas  $ac$  y  $eg$  deberían intersectarse en la línea  $L$ , para tener un punto de intersección para el plano  $aceg$  con los planos de arriba y de abajo  $abcd$ ,  $efgh$  del cubo proyectivo.

De la discusión anterior podemos ver que hay un teorema de geometría proyectiva que dice que si uno de estos conjuntos diagonales es coplanar, también lo es el otro. Sin embargo, un conjunto de ocho puntos de rango 4, con ningunos 3 colineales, formando 7 planos de cuatro puntos  $abcd$ ,  $abef$ ,  $aceg$ ,  $adeh$ ,  $bcfg$ ,  $cdgh$ ,  $efgh$  y 28 planos de tres puntos forman una geometría combinatoria. Digamos que la geometría no es *proyectivamente coordinatizable*. No todos los conjuntos finitos de puntos de un espacio proyectivo de dimensión dos o tres pueden ser ilustrados con dibujos como los de las figuras anteriores. Cuando los puntos son

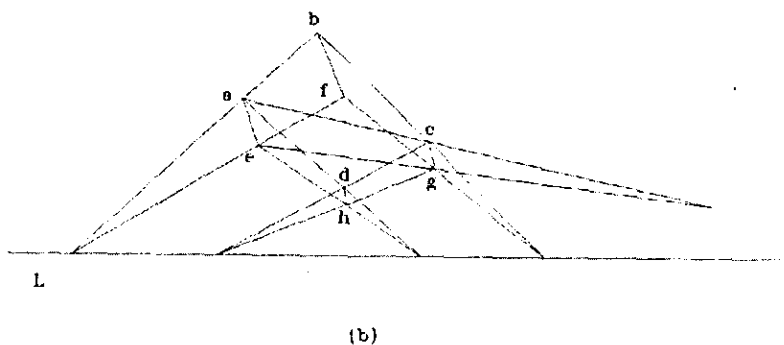


Figura 1.5: Una geometría no coordinatizable

escogidos de espacios proyectivos sobre campos finitos, frecuentemente nos vemos forzados a representar las líneas como curvas o los planos con cierta curvatura.

**Ejemplo 1.2.3.** La figura ( 1.7) muestra el plano proyectivo sobre  $\mathbb{Z}_3$ . Para probar esta afirmación, asignemos coordenadas a cada uno de los puntos en una base, digamos  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ ,  $d = (1, 0, 0)$ ,  $e = (1, 1, 1)$ . Como el punto  $i$  está también en la línea  $bd$ , la elección correcta es  $(1, 1, 0)$ , y los cuatro puntos sobre esas dos líneas, llamémosles  $l$  y  $m$ , deben ser  $(1, 1, 2)$  y  $(1, 2, 0)$ , respectivamente. Continuando de esta forma, podemos calcular fácilmente un conjunto completo de coordenadas para la geometría y entonces se verifica el isomorfismo al plano proyectivo establecido. En este caso,  $k = (0, 1, 1)$ ,  $c = (0, 2, 1)$ ,  $f = (2, 1, 1)$ ,  $j = (1, 0, 1)$ ,  $g = (1, 0, 2)$ , y  $h = (1, 2, 1)$ .

Si seleccionamos un hiperplano en un espacio proyectivo como el hiperplano al infinito, los puntos que no están en dicho hiperplano (un número finito) forman un espacio afín, una subgeometría de el espacio proyectivo. La figura ( 1.8) muestra que dicho espacio afín, obtenido quitando la línea  $ijklm$  del espacio proyectivo en la figura ( 1.7).

La geometría en la figura ( 1.6) es también una subgeometría de el plano proyectivo sobre  $\mathbb{Z}_3$ . La elección de las letras como etiquetas para estos puntos fue hecha de tal forma que se

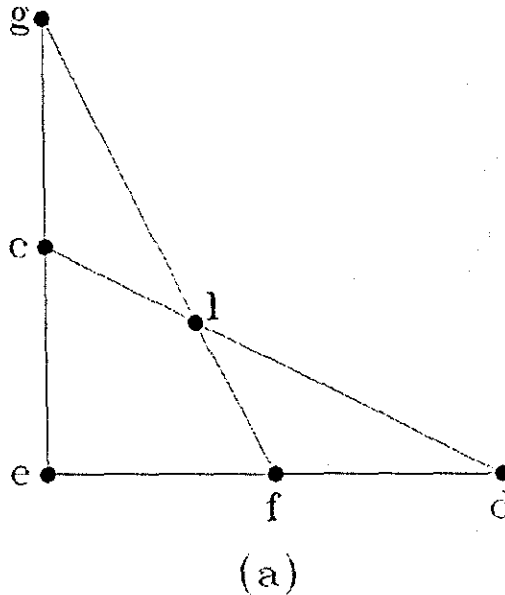


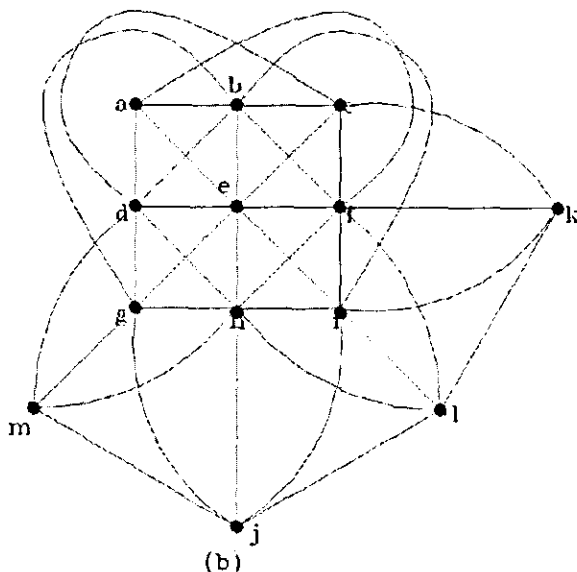
Figura 1.6: Una geometría de seis puntos

muestre el encaje siguiente:

Observemos que el rango de cualquiera de los subconjuntos de el conjunto  $cdefgl$  de puntos es el mismo si se mide en la subgeometría o en el espacio proyectivo completo  $ab\dots m$ .

La latiz de los planos del plano proyectivo sobre  $\mathbb{Z}_3$  de la figura ( 1.9) tiene una propiedad que no tienen todas las latices geométricas. La latiz de orden inverso también es una latiz geométrica. Así, dos planos de rango  $k$  tienen una unión de rango  $k + 1$ , su intersección tendrá rango  $k - 1$ . En particular, cualquiera dos hiperplanos distintos cubren su intersección. Dichas latices geométricas son modulares. Las subgeometrías (tomando un subconjunto de puntos y todas las uniones entre ellos) de geometrías modulares no necesariamente son modulares. Por ejemplo, las líneas  $le$  y  $cf$  se intersectan en el punto  $i$  de la figura ( 1.9) ó ( 1.7), pero no tienen ningún punto en común en la subgeometría. Las líneas paralelas  $ae$  y  $dh$  de la configuración afin de la figura ( 1.8) se intersectan en el punto  $l$  de la línea al infinito seleccionada en la figura ( 1.7).

La operación de *proyección central* en la teoría de geometría proyectiva, envuelve dos operaciones de latiz. Si una geometría  $G$  se proyecta de un centro  $C$  sobre  $S$ , usamos la operación

Figura 1.7: El plano proyectivo sobre  $\mathbb{Z}^3$ 

de latiz unir para crear de cada plano  $A$  de  $G$  el plano  $A \vee C$  y además usar la operación *intersectar* para encontrar la imagen  $(A \vee C) \wedge S$ . La primera de estas dos operaciones es una operación natural de latices geométricas, y crea una estructura cociente cuyos planos son ciertos planos de  $G$ . De hecho, si la subgeometría de la figura ( 1.6) es proyectada desde el punto  $j$  en el plano proyectivo, las distintas uniones de planos de  $G$  y  $j$  son exactamente  $j$ , las cuatro líneas por  $j$ , y el plano proyectivo. Los conjuntos de puntos de  $G$  que están en estos planos son el conjunto vacío,  $l$ ,  $cf$ ,  $e$ ,  $dg$ , y el conjunto completo. Éste es el conjunto de planos que forma el cociente de  $G$  asociado con esta proyección. Geométricamente, esta es una línea de cuatro puntos en la cual dos de los puntos están representados por pares de elementos.

Esta es la diferencia principal entre matroides y geometrías combinatorias, la estructura cociente que se hereda de una proyección, no es un geometría. La geometría cociente en este caso está basada en conjuntos de puntos de cuatro elementos o bien introduce un concepto en el que se admiten puntos múltiples e inclusive puntos vacíos, es decir puntos que están en la cerradura geométrica del conjunto vacío. Dicho concepto es el de matroide. La matroide

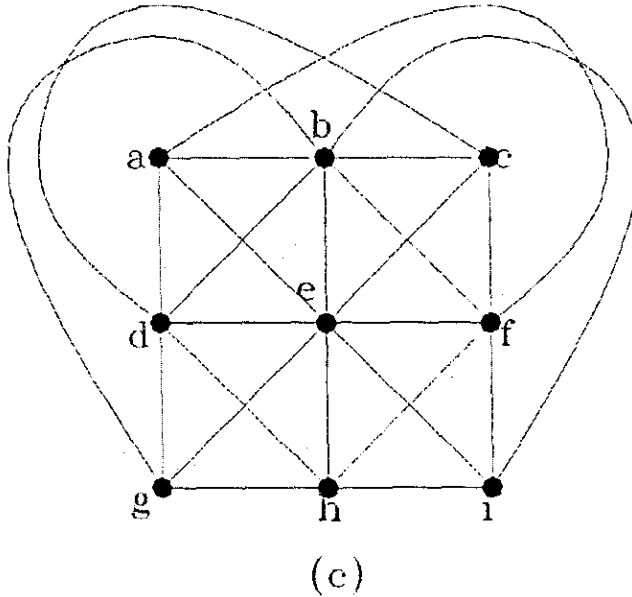


Figura 1.8: El plano afín sobre  $\mathbb{Z}^3$

cociente de la proyección en discusión no tiene puntos vacíos pero si proyectamos la misma subgeometría desde uno de sus propios puntos, tal punto resulta ser un punto vacío ó *loop* de la matroide cociente.

Ahora en una primera aproximación a relacionar matroides y Grassmanianas, mencionemos que durante el siglo diecinueve, Plücker y Grassman mostraron cómo dar las coordenadas de planos de un espacio proyectivo y así comenzaron el estudio de familias lineales de dichos planos.

**Ejemplo 1.2.4.** La idea fue representar cada plano de rango  $k$  que está en un espacio de rango  $n$  por medio de una matriz  $k \times n$  cuyos renglones son vectores que representan un conjunto independiente de puntos sobre un plano en cuestión. Después se puede observar que el conjunto de  $\binom{n}{k}$  determinantes de  $k \times k$  submatrices de esta matriz dependiente, salvo un múltiplo escalar común, sólo en el plano, no en el conjunto independiente de puntos escogidos para representar. De esta forma, cada  $k$ -plano de un espacio proyectivo de rango  $n$

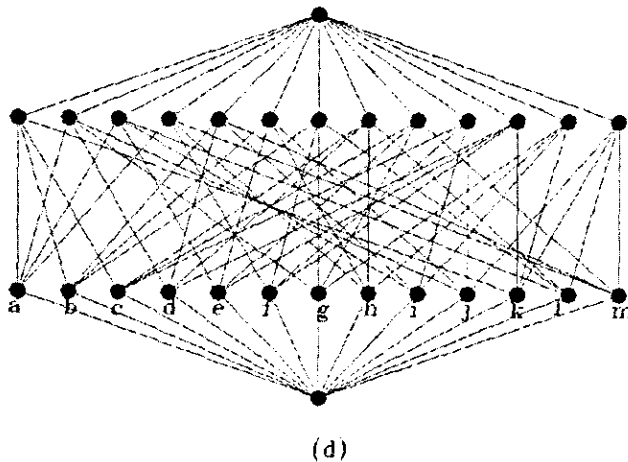


Figura 1.9: La latiz de planos del plano proyectivo sobre  $\mathbb{Z}^3$

es representado como un punto en un espacio proyectivo de rango  $\binom{n}{k}$ . Esto será precisado más adelante.

Como un ejemplo podemos ver la figura (1.10) para calcular las coordenadas de líneas en un espacio proyectivo real de dimensión 3. De hecho, la línea con ecuaciones  $x - y = 3$ ,  $x + z = 1$  contienen puntos finitos  $a = (4, 1, -3)$ ,  $b = (2, -1, -1)$ , con coordenadas proyectivas  $(4, 1, -3, 1)$ , y  $(2, -1, -1, 1)$ . La matriz  $2 \times 4$  de coordenadas da seis coordenadas de Plücker  $(d_{14}, d_{24}, \dots) = (2, 2, -2, -4, -2, -6) \cong (1, 1, -1, -2, -1, -3)$ . Las primeras tres coordenadas de Plücker dan un vector  $a - b$  sobre la línea; las últimas tres forman un vector  $a \times b$  perpendicular al plano que contiene ambos, la línea y el origen. Las seis coordenadas de Plücker de cualquier línea satisfacen la relación cuadrática siguiente

$$d_{14}d_{23} + d_{24}d_{31} + d_{34}d_{12} = 0$$

porque  $(a - b)(a \times b) = 0$ , entonces el conjunto de líneas con coordenadas forma una subgeometría del espacio proyectivo de dimensión 5 (rango 6) que consiste de todos los puntos sobre una superficie cuádrlica en tal espacio.

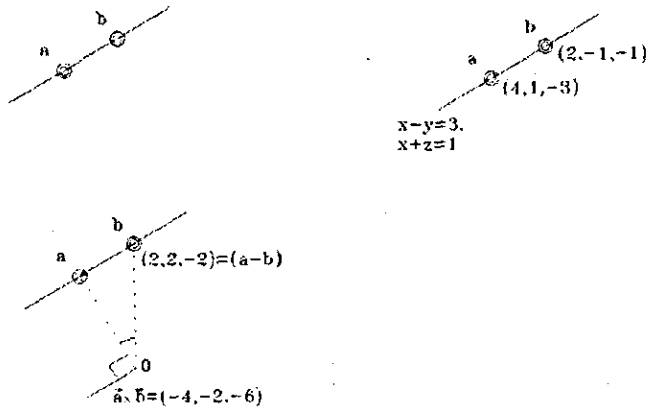


Figura 1.10: Coordenadas de Plücker

La geometría de líneas en un espacio de dimensión 3 tiene algunas otras notables propiedades. Un conjunto de tres líneas distintas es dependiente si y sólo si las líneas son coplanares y tienen un punto en común. Cuatro líneas son dependientes si y sólo si están en una familia de generadoras de una superficie cuádrica reglada.



## Capítulo 2

# GRASSMANIANAS Y VARIETADES RELACIONADAS.

### 2.1 Grassmanianas.

Las Grassmanianas son objetos fundamentales en geometría algebraica, éstas son simultáneamente objetos de interés por si mismas y objetos básicos en la construcción y estudio de otras variedades.

Como ya sabemos, un subespacio de dimensión  $n$  de  $\mathbb{C}^{n+m}$  es la misma cosa que un  $(n-1)$ -plano en el correspondiente espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{n+m-1}$ , entonces podemos pensar a  $G_n^m$  como el conjunto de dichos  $(n-1)$ -planos.

En muchos contextos las Grassmanianas son definidas inicialmente vía coordenadas o como cocientes de grupos; entonces es observado que ellas pueden ser encajados en un espacio proyectivo. Esto es directo: Si  $W \subset U$  es el subespacio lineal de dimensión  $n$  generado por los vectores  $u_1, \dots, u_n$ , podemos asociar a  $W$  el multivector

$$\lambda = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in \bigwedge^n(V)$$

$\lambda$  está determinada salvo escalares por  $W$ : si escogemos una base diferente, el correspondiente vector  $\lambda$  sería simplemente multiplicado por el determinante de la matriz de cambio de base. Entonces hemos definido un mapeo bien definido de conjuntos

$$\Psi : G_n^m(U) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^n U)$$

De hecho, ésta es una inclusión: para cualquier  $[w] = \Psi[W]$  en la imagen, podemos recuperar

el correspondiente subespacio  $W$  como el espacio de vectores  $v \in V$  tal que  $v \wedge w = 0 \in \bigwedge^{n+1} V$ . Esta inclusión es llamado el *Encaje de Plücker* de  $G_n^m(U)$ .

Las coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\bigwedge^n U)$  son llamadas *Coordenadas de Plücker* en  $G_n^m(U)$ . Explícitamente, si tomamos la identificación  $U \cong \mathbb{K}^{n+m}$  podemos representar el plano  $W$  por la matriz  $n \times n+m$   $M_w$  cuyas columnas son los vectores  $U_i$ : la matriz  $M_w$  es determinada salvo multiplicación por la izquierda por una matriz invertible  $n \times n$ . Las coordenadas de Plücker son entonces los menores maximales de la matriz  $M_w$ .

Hemos descrito la Grassmaniana  $G_n^m$  como un subconjunto de  $\mathbb{P}(\bigwedge^n U)$ ; deberíamos verificar ahora que ésta es de verdad una subvariedad. Esto es, caracterizar al subconjunto de vectores *totalmente descomponibles*  $w \in \bigwedge^n V$ , esto es, productos  $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$  de factores lineales. Comenzamos con una observación básica: dado un multivector  $w \in \bigwedge^n U$  y un vector  $u \in U$ , el vector  $u$  divide a  $w$ - es decir,  $w$  se puede expresar como  $U \wedge \varphi$  para alguna  $\varphi \in \bigwedge^{n-1} V$ -si sólo si el producto  $w \wedge v = 0$ . Más aun, un multivector  $w$  será totalmente descomponible si sólo si el espacio de vectores  $v$  que lo dividen es de dimensión  $n$ . Así,  $[w]$  estará en la grasmaniana si y sólo si el rango del mapeo

$$\begin{aligned} \varphi(w) &: V \rightarrow \bigwedge^{n+1} V \\ v &\rightarrow w \wedge v \end{aligned}$$

es  $m$ . Como el rango de  $\varphi(w)$  nunca es estrictamente menor que  $m$ , podemos decir que

$$[w] \in G_n^m(U) \Leftrightarrow \text{rank}(\varphi(w)) \leq m$$

Ahora el mapeo  $\bigwedge^{n+1} U \rightarrow \text{Hom}(U, \bigwedge^{n+1} U)$  que manda  $w$  a  $\varphi(w)$  es lineal, esto es, las entradas de la matriz  $\varphi(w) \in \text{Hom}(U, \bigwedge^{n+1} U)$  son coordenadas homogéneas en  $\mathbb{P}(\bigwedge^n U)$ ; podemos decir que  $G_n^m(U) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^n U)$  es la subvariedad definida por el anulamiento de los  $(m+1) \times (m+1)$ -menores de esta matriz.

Esta es la manera más simple de ver que  $G_n^m(U)$  es una subvariedad de  $\mathbb{P}(\bigwedge^n U)$ , pero los polinomios que obtenemos de esta forma están muy lejos de su forma más simple, en particular, éstos no generan el ideal homogéneo de  $G_n^m(U)$ . Para encontrar realmente los generadores del ideal, necesitamos invocar también la natural identificación de  $\bigwedge^n U$  con la potencia exterior  $\bigwedge^m U^*$  del espacio dual  $U^*$  (esto es natural sólo salvo escalares, pero está bien para nuestros propósitos). En particular, un elemento  $w \in \bigwedge^n$  correspondiente a

$w^* \in \bigwedge^m V^*$  da lugar en esta forma el mapeo

$$\begin{aligned} \Psi(w) &: V^* \rightarrow \bigwedge^{n+1} V^* \\ u^* &\mapsto v^* \wedge w^*; \end{aligned}$$

por el mismo argumento  $w$  será totalmente descomponible si y sólo si el mapeo  $\Psi(w)$  tiene rango a lo más  $n$ . Lo que es más, si  $w$  es totalmente descomponible, el núcleo del mapeo  $\Psi(w)$  -El subespacio  $W$  por si mismo será exactamente el anulador del núcleo de  $\Psi(w)$ ; equivalentemente, las imágenes de los mapeos transpuestos

$$\begin{aligned} {}^t\Psi(w) &: \bigwedge^{n+1} U^* \rightarrow U^* \\ {}^t\Psi(w) &: \bigwedge^{m+1} U \rightarrow U \end{aligned}$$

se anulan uno al otro. En síntesis, entonces, vemos que  $[w] \in G_n^m(U)$  si sólo si para todo  $\alpha \in \bigwedge^{n+1} U^*$  y  $\beta \in \bigwedge^{m+1} U$ , la contracción

$$\Xi_{\alpha,\beta}(w) = \langle {}^t\Psi(w)(\alpha), {}^t\Psi(w)(\beta) \rangle = 0$$

Las  $\Xi_{\alpha,\beta}(w)$  son entonces polinomios cuadráticos cuyo lugar de ceros común es la Grassmaniana  $G_n^m$ .

Estas son llamadas las *Relaciones de Plücker*, y en realidad generan el ideal homogéneo de  $G_n^m$ , cosa que no probaremos aquí.

Observemos en particular que la primera Grassmaniana no trivial - la primera que no es un espacio proyectivo- es  $G_2^2(U)$  y ésta es una hipersuperficie cuádrica en  $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{K}^4) \cong \mathbb{P}^5$ .

Podemos obtener otra vista de las Grassmanianas mirando a ciertos subconjuntos abiertos afines. Para describirlos primero intrínsecamente. sea  $\Gamma \in V$  un subespacio de dimensión  $m$ , que corresponde a un multivector  $w \in \bigwedge^m U = \bigwedge^n U^*$ . Podemos pensar a  $w$  como una forma lineal homogénea sobre  $\mathbb{P}(\bigwedge^n V)$ ; sea  $U \subset \mathbb{P}(\bigwedge^n U)$  el abierto afín donde  $w \neq 0$ . Entonces la intersección de  $G(\mathbb{K}, U)$  con  $U$  es simplemente el conjunto de subespacios  $\Lambda \subset U$  de dimensión  $n$  complementarios a  $\Gamma$ . Cualquiera de dichos espacios puede ser visto como la gráfica de un mapeo de  $V/\Gamma$  a  $\Gamma$  y viceversa, de tal forma que obtenemos una identificación

$$G_n^m(V) \cap U \cong \text{Hom}(V/\Gamma, \Gamma) \cong \mathbb{C}^{m(m)}$$

Para ver esto en coordenadas, identifiquemos  $V$  con  $\mathbb{C}^{n+m}$  y digamos que el subespacio  $\Gamma$  es generado por los últimos  $m$  vectores  $e_{n+1}, \dots, e_{n+m} \in \mathbb{C}^{n+m}$ . Entonces  $U \cap G_n^m$  es el

subconjunto de subespacios  $\Lambda$  tal que la matriz  $n \times n + m$   $M_\Lambda$  cuyo primer  $n \times n$  menor es distinto de cero. Se sigue que cualquier  $\Lambda \in G_n^m(U) \cap U$  es representado como el espacio de renglones de una única matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n,n+m} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

y viceversa. Las entradas  $a_{i,j}$  de esta matriz entonces dan una biyección de  $U \cap G_n^m(U)$  con  $\mathbb{C}^{n(m)}$ .

Notemos que las coordenadas afines de el conjunto abierto afín de  $G_n^m(U)$  son justamente los  $n \times n$  menores de esta matriz, los cuales son los menores de todos los tamaños de la matriz  $n \times m$   $(a_{i,j})$ . En particular, la expansión de cualquiera de estos determinantes a lo largo de cualquier renglón o columna da lugar a una relación cuadrática para cada uno de estos menores; así por ejemplo

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

es una relación para las coordenadas afines en  $\mathbb{P}(\wedge^n \mathbb{C}^{n+m})$  restringidas a  $G_n^m(U)$ . De esta forma, podemos escribir todas las Relaciones de Plücker explícitamente en coordenadas.

Hay finalmente, otra forma de describir las coordenadas afines de los subconjuntos abiertos  $U \cap G_n^m(U)$  de  $n$ -planos  $\Lambda$  complementarios a un  $(m)$ -plano dado  $\Gamma$ : tomamos vectores  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^{n+m}$  que, junto con  $\Gamma$  generen todo  $\mathbb{C}^{n+m}$  y tomamos

$$v_i(\Lambda) = \Lambda \cap (\Gamma + v_i).$$

Los vectores  $v_i$  entonces dan una base para  $\Lambda$ , para toda  $\Lambda \in U$ ; y la  $n$ -ada de vectores  $v_i(\Lambda) - v_i \in \Gamma$  da una identificación de  $U \cap G_n^m(U)$  con  $\Gamma^n$ .

## 2.2 Subvariedades de Grassmanianas

Para empezar, una inclusión de espacios vectoriales  $W \hookrightarrow V$  induce una inclusión de Grassmanianas  $G_n^m(W) \hookrightarrow G_n^m(V)$ ; asimismo, un mapeo  $V \rightarrow V/U$  al cociente de  $V$  por un subespacio  $U$  de dimensión  $l$  induce una inclusión  $G_{n-l}^{m-l}(V/U) \hookrightarrow G_n^m(U)$ . Más generalmente, si  $U \subset W \subset V$ , tenemos una inclusión  $G_{n-l}^{m-l}(W/V) \hookrightarrow G_n^m(V)$ .

Las imágenes de dichos mapeos se llaman subGrassmanianas y son subvariedades de  $G_n^m(U)$  (en términos del encaje de Plücker  $G_n^m(U) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^n V)$ , éstas no son más que la intersección de  $G_n^m(U)$  con subespacios lineales en  $\mathbb{P}(\wedge^n V)$ ).

Si vemos a las Grassmanianas como el conjunto de subespacios lineales en un espacio proyectivo  $\mathbb{P}V$ , las subGrassmanianas son simplemente los subconjuntos de planos contenidos en un subespacio fijo y/o que contienen a un subespacio fijo. También podemos considerar el subconjunto  $\Sigma(\Lambda) \subset G_n^m(\mathbb{P}V)$  (vista como conjunto de  $n$ -planos de  $\mathbb{P}V$ ) de  $n$ -planos que intersectan a un subespacio lineal dado  $\Lambda \in \mathbb{P}V$  de dimensión  $m$ , o más generalmente el subconjunto  $\Sigma_l(\Lambda)$  de  $n$ -planos que intersectan a un  $\Lambda$  dado en un subespacio de dimensión al menos  $l$ . Estas son nuevamente subvariedades de la grassmaniana;  $\Sigma_l(\Lambda)$  puede ser descrita como el lugar

$$\Sigma_l(\Lambda) = \left\{ [w] : w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{m-l+1} = 0 \quad \forall v_1, \dots, v_{m-l+1} \in \Lambda \right\}$$

de donde vemos en particular que éste, como las subGrassmanianas, es la intersección de la Grassmaniana con un subespacio lineal de  $\mathbb{P}(\wedge^n V)$ . Estas son casos especiales de una clase de subvariedades de  $G_n^m(\mathbb{P}U)$  llamadas Ciclos de Schubert.

También hay análogos para Grassmanianas de mapeos proyección sobre espacios proyectivos. Específicamente, supongamos que  $W \in V$  es un subespacio de codimensión  $l$  en el subespacio vectorial  $V$  de dimensión  $n+m$ . Para  $n \leq l$  tenemos un mapeo  $\pi : U \rightarrow G_n^m(U/W)$  definido en el abierto  $U \subset G_n^m(U)$  de  $n$ -planos que intersectan a  $W$  sólo en el (0) simplemente tomando la imagen; para  $n \geq 1$  tenemos un mapeo  $\eta : U' \rightarrow G_{n-l}^m(W)$  definido en el abierto  $U' \subset G_n^m(U)$  de planos transversales a  $W$  tomando intersección. Notemos que ambos mapeos pueden ser realizados, via los encajes de Plücker de ambos dominio y codominio, por una proyección lineal sobre el espacio proyectivo ambiente  $\mathbb{P}(\wedge^n U)$  -por ejemplo, el mapeo  $\pi$  es la restricción de  $G_n^m(U)$  del mapeo lineal  $\mathbb{P}(\wedge^n V) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^n(U/W))$  inducido por la proyección  $V \rightarrow U/W$ .

### 2.3 Un análogo del mapeo de Veronese

Existe un análogo del mapeo de Veronese para Grassmanianas. Sea  $S = \mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{n+m}]$  el anillo de coordenadas homogéneas del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{n+m}$ , y denotemos por  $S_d$  a la  $d$ -ésima parte graduada de  $S$ , esto es, el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $Z_0, \dots, Z_{n+m}$ . Ahora, para cualquier  $n$ -plano  $\Lambda \subset \mathbb{P}^{n+m}$ , sea  $I(\Lambda)$  su ideal homogéneo, y sea  $I(\Lambda)_d \subset S_d$  su  $d$ -ésima parte graduada. Entonces  $I(\Lambda)_d$  es un subespacio

de codimensión  $\binom{n+d}{d}$  en  $S_d$ , y entonces obtenemos un mapeo regular

$$U_d^* : \mathbb{G}_n^m \rightarrow G_{(n+m)'-n'}^n$$

donde  $(n+m)' = \binom{n+m+d}{d}$  y  $n' = \binom{n+m+d}{d} - \binom{n+d}{d}$

o dualmente un mapeo

$$U_d : \mathbb{G}_n^m \rightarrow G_{(n+m)''-n''}^n$$

donde  $n'' = \binom{n+d}{d}$

## 2.4 Variedades de Fano

Un tipo fundamental de subvariedad de la grassmaniana  $\mathbb{G}(n, n+m)$  es la variedad de Fano asociada a una variedad  $\chi \subset \mathbb{P}^{n+m}$ . Esto es simplemente la variedad de  $n$ -planos contenidos en  $\chi$ , esto es,

$$F_n(\chi) = \left\{ \Lambda : \Lambda \subset \chi \right\} \subset \mathbb{G}_n^m$$

Para ver que  $F_n(\chi)$  es en realidad una variedad, observemos primero que es suficiente hacer esto en el caso de que  $\chi$  es la hipersuperficie dada por el polinomio  $G(Z)$ : en general, la Variedad de Fano  $F_n(\chi)$  será la intersección en  $\mathbb{G}_n^m$  de las Variedades de Fano asociadas a las hipersuperficies que la contienen.

Para mostrar esto en este caso, trabajaremos localmente; restringiremos nuestra atención al abierto afín  $U \subset G_{(n+m+1)-(n+1)}^{(n+1)}$  de  $(n+1)$  planos  $\Lambda \in \mathbb{K}^{n+m+1}$  complementarios a un  $(m)$ -plano dado  $\Lambda_0$  y exhibiremos explícitamente ecuaciones para  $F_n(\chi) \cap U \subset U \cong \mathbb{C}^{(n+1)(m)}$ .

Comenzaremos escogiendo una base  $v_0(\Lambda), \dots, v_n(\Lambda)$  para cada  $\Lambda \in U$  tomando vectores  $v_0, \dots, v_n \in V$  que, junto con  $\Lambda_0$ , generan todo  $V$ , y tomando

$$v_i(\Lambda) = \Lambda \cap ((\Lambda)_0 + v_i)$$

como vimos en la discusión de Grassmanianas, la coordenadas de estos vectores son funciones regulares en  $U$ . Ahora, podemos ver el polinomio homogéneo  $G$  como un elemento de  $Sym^d(\mathbb{C}^{n+m+1})^* \subset ((\mathbb{C}^{n+m+1})^{\otimes d})^*$ , y tomando, para cada multi-índice  $I = \{i_1, \dots, i_d\}$ ,

$$a_I(\Lambda) = G(v_{i_1}(\Lambda), \dots, v_{i_d}(\Lambda))$$

(visto de otra forma, las  $a_I$  son los coeficientes de la restricción de  $G$  a  $\Lambda$ , escritos en términos de la base para  $\Lambda$  dual a la base  $\{v_0(\Lambda), \dots, v_n(\Lambda)\}$ ). Las  $a_I(\Lambda)$  entonces dan un sistema de polinomios que trazan a  $F_n(\chi)$  en  $U$ .

Para una versión intrínseca de este argumento, recordemos del ejemplo (2.3) que el mapeo que manda un  $n$ -plano  $\Lambda \subset \mathbb{P}^{n+m}$  a su  $d$ -ésima parte graduada  $I(\Lambda)_d$  de su ideal, vista como un subespacio del espacio  $S_d$  de polinomios homogéneos de grado  $d$ , es un mapeo regular

$$V_d^* : \mathbb{G}_n^m \rightarrow G_{N-l}^l$$

$$\text{donde } N = \binom{n+m+d}{d}, l = \binom{n+m+d}{d} - \binom{n+d}{d}$$

Ahora, el subconjunto  $\Phi \subset G_{N-l}^l$  de  $l$  planos en  $S_d$  que contienen al polinomio homogéneo  $G \in S_d$ , es una subvariedad, y podemos escribir

$$F_n(\chi) = (U_d^*)^{-1}(\Phi)$$

entonces  $F_n(\chi)$  es realmente una subvariedad de  $\mathbb{G}_n^m$  [Har92].

## Capítulo 3

# GEOMETRÍA EN GRASSMANIANAS.

### 3.1 Estratos Grassmanianos y geometrías combinatorias.

En este capítulo exploraremos una notable conexión entre la geometría de las Células de Schubert de Grassmanianas, la teoría de poliedros convexos y la teoría de geometrías combinatorias. Los resultados de esta parte fueron obtenidos simultáneamente e independientemente en Moscú por Gelfand y Serganova, y en París por Goresky y MacPherson.

Consideremos la Grassmaniana  $G_n^m$  de todos los subespacios de dimensión  $n$  de  $\mathbb{C}^{n+m}$ . Fijando una base estándar en  $\mathbb{C}^{n+m}$  obtenemos una acción del toro  $H = (\mathbb{C}^*)^{n+m}$  sobre  $G_n^m$  que es inducida por alargamiento de los ejes de coordenadas en  $\mathbb{C}^{n+m}$ . Así estudiaremos una interesante estratificación de las Grassmanianas.

Si entendemos la geometría de los estratos y el espacio cociente de dicha acción, podemos después abordar situaciones muy interesantes.

Una de éstas es entender el dilogaritmo y polilogaritmos y sus ecuaciones funcionales (problema que será tratado en esta tesis).

Por supuesto hay otras cosas que podrían ser tratadas como: Funciones hipergeométricas generalizadas y la función de la partición de Kostant; geometrías combinatorias asociadas a grupos de Lie y subgrupos parabólicos; construcciones de clases de Chern y Pontrjagin combinatorias; [GGL75, Mac77]; representabilidad de matroides; y estudio de  $\mathbb{K}$ -Teorías algebraicas. Sin embargo, estos problemas no son abordados en esta tesis.



Como veremos más adelante, las trayectorias de la acción de  $H$  sobre la Grassmaniana  $G_n^m$  corresponden a configuraciones proyectivas de  $n + m$  puntos en  $\mathbb{C}P^{n+m-1}$ .

La acción del toro da lugar a un mapeo momento  $\mu : G_n^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  con la propiedad de que cada trayectoria es un poliedro convexo.

Entonces un punto central es que las siguientes tres descomposiciones de Grassmanianas coinciden:

1. El conjunto de puntos en  $G_n^m$  tal que corresponde a una configuración proyectiva representa una geometría combinatoria fija.
2. La unión de órbitas de  $H = (\mathbb{C}^*)^{n+m}$  cuya proyección bajo  $\mu$  es un poliedro convexo fijo.
3. Una multintersección de trasladadas de Células de Schubert que son obtenidas por permutación de los ejes de coordenadas.

La equivalencia de (1) y (2) establece una correspondencia uno a uno entre geometrías combinatorias representables sobre  $\mathbb{C}$  y ciertos poliedros convexos.

De hecho en la sección 3.4 se mostrará que la correspondencia puede extenderse a todas las matroides y ciertos poliedros con restricciones sobre sus caras de dimensión 1. Dicha caracterización es equivalente a lo que se conoce como Axioma de Cambio de Steiner.

### 3.1.1 Definiciones.

**Definición 3.1.1.** Para este documento fijaremos vectores unitarios estándar  $e_1, e_2, \dots, e_{n+m}$  de  $\mathbb{C}^{n+m}$  y sea  $G_n^m$  la variedad Grassmaniana de subespacios de  $\mathbb{C}^{n+m}$  de dimensión  $(n)$ .

Para cada plano  $P \in G_n^m$  la proyección

$$\pi_P : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}/P$$

determina  $n + m$  vectores (algunos de los cuales pueden ser 0),  $\pi_P(e_1), \pi_P(e_2), \dots, \pi_P(e_{n+m})$  en el cociente  $\mathbb{C}^{n+m}/P \cong \mathbb{C}^m$ .

De esta forma obtenemos una matroide (o geometría combinatoria) representable sobre  $\mathbb{C}$  de rango  $m$  en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n + m\}$ , es decir, una "función rango" definida en subconjuntos  $J \subset \{1, 2, \dots, n + m\}$  que está dada por

$$\text{rk}(J) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{span}\{\pi_P(e_j) \mid j \in J\})$$

y que satisface los siguientes axiomas de matroides:

1.  $\text{rk}(\emptyset) = 0$
2.  $I \subseteq J \Rightarrow \text{rk}(I) \leq \text{rk}(J)$
3.  $\text{rk}(I \cup J) + \text{rk}(I \cap J) \leq \text{rk}(I) + \text{rk}(J)$

**Nota 3.1.2.** Dado cualquier espacio vectorial complejo  $V$  de dimensión  $m$  y cualesquiera  $n + m$  vectores  $v_1, v_2, \dots, v_{n+m}$  que generen a  $V$ , existe un plano  $P \in G_n^m$  y un isomorfismo  $F : \mathbb{C}^{n+m}/P \cong V$  tal que  $F(\pi_P(e_i)) = v_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . De hecho,  $F$  está inducido por el morfismo suprayectivo  $\tilde{F} : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow V$  que está definido por  $\tilde{F}(e_i) = v_i$ .

### 3.1.2 Estratos Grassmanianos.

**Definición 3.1.3.** Dos puntos  $P_1, P_2 \in G_n^m$ , se dicen estar en el mismo estrato Grassmaniano  $\Gamma$  de  $G_n^m$  si estos dan lugar a la misma matroide, es decir, si para cada subconjunto  $J \subset \{1, 2, \dots, n + m\}$  tenemos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{span}\{\pi_{P_1}(e_j) \mid j \in J\} = \dim_{\mathbb{C}} \text{span}\{\pi_{P_2}(e_j) \mid j \in J\}$$

### 3.1.3 Acción de un toro.

**Definición 3.1.4.** El toro algebraico  $H = (\mathbb{C}^*)^{n+m}$  actúa sobre  $\mathbb{C}^{n+m}$  expandiendo los ejes de coordenadas, es decir, si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}) \in H$  y si  $x \in \mathbb{C}^{n+m}$  entonces  $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_{n+m} x_{n+m})$ . La acción de cada  $\lambda \in H$  es lineal, por tanto manda subespacios a subespacios y por lo tanto induce una acción sobre  $G_n^m$ . Los puntos fijos de esta acción son fácilmente descritos: Para cada subconjunto de  $m$  elementos  $J \subset \{1, 2, \dots, n + m\}$  existen planos coordenados de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente:

$$R_J = \text{span}\{e_j \mid j \in J\}; R_J^\perp = \text{span}\{e_j \mid j \notin J\}$$

Es fácil ver que los puntos fijos de la acción de  $H$  en  $G_n^m$  son precisamente los  $(n)$ -planos coordenados  $R_J^\perp$  (para arbitrarios subconjuntos  $J$  de  $m$  elementos.)

**Nota 3.1.5.** La cerradura (en  $G_n^m$ ) de una órbita de  $H$  es una subvariedad algebraica normal de  $G_n^m$  la cual es  $H$ -estable y consiste de un número finito de  $H$ -órbitas, es decir, es una variedad tórica.

**Lema 3.1.6.** [D<sup>+</sup>85] Fijemos un punto  $P \in G_n^m$  y sea  $\Phi$  la matroide correspondiente. Denotemos con  $\overline{H \cdot P}$  a la cerradura (en  $G_n^m$ ) de la órbita de  $H$  que contiene a  $P$ . Entonces los

puntos fijos de  $H$  que están en  $\overline{H \cdot P}$  son precisamente aquellos  $(n)$ -planos coordenados  $R_J^\perp$  tales que  $J$  es una base (es decir, un subconjunto independiente maximal) de  $\Phi$ .

*Demostración.* Primero supongamos que  $J$  es una base de  $\Phi$ . Esto quiere decir que  $\{\pi_P(e_j) \mid j \in J\}$  son linealmente independientes en  $\mathbb{C}^{n+m}/P$ , es decir, que  $P \cap R_J = \{0\}$  donde

$$R_J = \text{span}\{e_j \mid j \in J\}$$

Entonces el plano  $P$  puede ser visto como la gráfica de una transformación lineal

$$f : R_J^\perp \rightarrow R_J$$

en el espacio producto  $\mathbb{C}^{n+m} = R_J^\perp \oplus R_J$ . Ahora consideremos la acción de  $\mathbb{C}^* \subset H$  sobre la Grassmaniana  $G_n^m$ , que es inducida por la siguiente acción sobre  $\mathbb{C}^{n+m}$ :

$$\lambda \cdot e_j = \begin{cases} \lambda e_j & \text{si } j \in J; \\ e_j & \text{si } j \notin J. \end{cases}$$

Se sigue que para cualquier plano  $P \in G_n^m$  la acción inducida satisface  $\lambda \cdot P = \text{graph}(\lambda f)$ , y por lo tanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda \cdot P) = \text{graph}(0) = R_J^\perp,$$

es decir, el plano coordenado  $R_J^\perp$  está en la cerradura de  $H \cdot P$ .

Por otra parte, supongamos que  $J$  no es una base de  $\Phi$ , pero supongamos que existe una sucesión  $\lambda_i \in H$  tal que  $\lambda_i \cdot P \rightarrow R_J^\perp$ . Entonces para  $i$  suficientemente grande tenemos

$$\lambda_i \cdot P \cap R_J = 0$$

como cualquier  $(n)$ -plano que esté suficientemente cerca de  $R_J^\perp$  será necesariamente transversal a  $R_J$ . Sin embargo, esto implica que  $J$  debe ser un conjunto independiente de  $\Phi$ , porque si éste fuera dependiente entonces  $\{\pi_P(e_j) \mid j \in J\}$  sería linealmente dependiente, lo cual querría decir que  $P \cap R_J \neq 0$ , y por tanto lo mismo sería cierto para  $\lambda \cdot P \cap R_J$   $\square$

### 3.1.4 Notas sobre configuraciones proyectivas.

Para toda  $r \geq m$ , denotemos como  $C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1})$  al conjunto de mapeos  $c : S \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$  de un subconjunto de  $r$  elementos  $S \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  a  $\mathbb{P}^{m-1}$ , cuya imagen  $c(S)$  genera  $\mathbb{P}^{m-1}$ . (Así, un elemento de  $C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1})$  son  $r$  puntos, no necesariamente distintos, y etiquetados por ciertos enteros entre 1 y  $n+m$ ). el grupo  $PGL_m(\mathbb{C})$  actúa sobre el espacio  $C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1})$ .

**Definición 3.1.7.** Una configuración proyectiva es un elemento del espacio cociente

$$C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1})/PGL_m(\mathbb{C}).$$

Fijemos un plano  $P \in G_n^m$  y denotemos con  $r$  al número de vectores distintos de cero en la colección  $\{\pi_P(e_i) \mid 1 \leq i \leq n+m\} \subset \mathbb{C}^{n+m}/P$ . Así obtenemos una configuración  $\Delta(P)$  de  $r$  puntos ordenados (que han sido etiquetados por  $r$  enteros entre 1 y  $n+m$ ) en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+m}/P) \cong \mathbb{P}^{m-1}$ . La siguiente proposición indica que podemos transformar las preguntas que envuelven la acción de  $PGL_m(\mathbb{C})$  en el espacio de  $r$ -adas ordenadas de puntos en  $\mathbb{P}^{m-1}$  en preguntas que envuelven la acción de el toro  $H = (\mathbb{C}^*)^{n+m}$  sobre  $G_n^m$ :

**Proposición 3.1.8.** La asociación  $\Delta$  induce una correspondencia uno a uno entre los espacios factor

$$G_n^m/H \text{ y } (\bigsqcup_{r=m}^{n+m} C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1}))/PGL_m(\mathbb{C})$$

**Nota 3.1.9.** Existe una topología natural (no Hausdorff) en cada uno de estos espacios.

*Demostración.* Repetiremos la idea esencial que hay detrás de la prueba en [ID82]. Escogamos un subconjunto de  $r$  elementos  $J \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$ , y sea  $\tilde{G}_J = \{P \in G_n^m \mid \pi_P(e_j) = 0 \Leftrightarrow j \in J\}$ . Es suficiente probar que  $\Delta$  induce una biyección

$$\tilde{\Delta}_J : \tilde{G}_J/H \rightarrow C_J(\mathbb{P}^{m-1})/PGL_m(\mathbb{C}),$$

donde  $C_J(\mathbb{P}^{m-1}) \subset C_r^{n+m}(\mathbb{P}^{m-1})$  denota el conjunto de  $r$ -adas de puntos en  $\mathbb{P}^{m-1}$  que generan  $\mathbb{P}^{m-1}$  y son etiquetados por los enteros en el conjunto  $J$ .

Cualquier elemento  $P \in \tilde{G}_J$  es el núcleo de un mapeo lineal suprayectivo  $\pi : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^m$  que está únicamente determinado salvo composición con elementos de  $GL_m(\mathbb{C})$  porque el mapeo inducido  $\mathbb{C}^{n+m}/P \rightarrow \mathbb{C}^m$  es un isomorfismo. Así  $P$  determina una única  $GL_m$ -clase de equivalencia de  $r$  vectores distintos de cero en  $\mathbb{C}^m$ . La acción de  $\Delta$  extiende estos vectores pero no cambia sus direcciones, entonces los puntos correspondientes en  $\mathbb{P}^{m-1}$  están bien definidos (módulo  $PGL_m$  equivalencia). Así,  $\tilde{\Delta}_J$  está bien definida y ya hemos notado en la sección (3.1.1) que esta es suprayectiva. Para ver que  $\tilde{\Delta}_J$  es inyectiva, supongamos que  $P_1, P_2 \in G_n^m$  son núcleos de morfismos suprayectivos  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^m$  y que  $\tilde{\Delta}_J(P_1) = \tilde{\Delta}_J(P_2)$ , es decir, que existe una transformación lineal invertible  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  tal que para cada  $j \in J$  existe  $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$  con  $F\pi_1(e_j) = \lambda_j\pi_2(e_j)$ . Si  $\Delta : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$  está dada por la matriz diagonal

$$\Delta_{ii} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } j \in J, \\ 1 & \text{si } j \notin J \end{cases}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}^k \\ \Delta \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{C}^k \end{array}$$

y por lo tanto  $\Delta(P_2) = P_1$ . □

## 3.2 Mapeo Momento

Asociado a la acción del toro  $H$  en la Grassmaniana  $G_n^m$  (3.1.3), existe un mapeo momento

$$\mu : G_n^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

el cual fue definido primero (en el caso de Grassmanianas) en [Mac77] y en [ID82], y posteriormente para acciones de grupo arbitrarias sobre variedades simplécticas.

En esta sección daremos una expresión explícita para el mapeo momento.

Un plano  $P \in G_n^m$  puede ser visto como el núcleo de un morfismo suprayectivo

$$F : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^m$$

que corresponde a una matriz  $M$  con  $n+m$  columnas y  $m$  renglones. Para cualquier subconjunto  $J \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  de cardinalidad  $m$ , obtenemos una matriz  $M(J)$  de dimensión  $m \times m$  que consiste de las columnas de  $M$  a las cuales  $J$  les da índice. Hay  $\binom{n+m}{m}$  dichos subconjuntos.

**Proposición 3.2.1.** Las coordenadas  $\mu_i : G_n^m \rightarrow \mathbb{R}$  del mapeo momento están dadas por

$$\mu_i(P) = \frac{\sum_{i \in J} |\det M(J)|^2}{\sum_J |\det M(J)|^2}$$

donde la suma en el numerador es sobre todos los subconjuntos  $J$  de  $m$  elementos que contienen al índice  $i$ , y donde la suma del denominador es sobre todos los subconjuntos  $J$  de  $m$ -elementos.

*Demostración.* La asociación  $P \rightarrow \{|\det M(J)|\}$  donde  $J$  varía sobre los subconjuntos de  $m$  elementos de  $\{1, 2, \dots, n+m\}$  da lugar al encaje de Plücker

$$G_n^m \rightarrow \mathbb{P} \binom{n+m}{m}$$

sobre el cual el mapeo momento es calculado como en [Kir84]. □

### 3.2.1 El Hipersimplejo.

Para cada  $P \in G_n^m$  tenemos  $0 \leq \mu_i(P) \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^{n+m} \mu_i(P) = m$ . Entonces la imagen del mapeo momento  $\mu$  es el hipersimplejo  $\Delta_n^m$  de [GGL75] y [ID82], es decir, el conjunto de todos los puntos  $x \in \mathbb{R}^{n+m}$  tales que  $0 \leq x_i \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^{n+m} x_i = m$ . El hipersimplejo  $\Delta_n^m$  es la cerradura convexa del complejo de los  $\binom{n+m}{m}$  vectores  $e(J) \in \mathbb{R}^{n+m}$  cuyos índices son designados por los subconjuntos de  $m$  elementos  $J \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  y están dados por

$$e(J)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J, \\ 0 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

### 3.2.2 Teorema de convexidad

**Teorema 3.2.2.** Denotemos con  $\overline{H \cdot P}$  la cerradura en  $G_n^m$  de la órbita del punto  $P$  bajo la acción de  $H = (\mathbb{C}^*)$ . Entonces la imagen  $\mu(\overline{H \cdot P})$  es la cerradura convexa de los puntos  $\mu(Q)$  donde  $Q$  varía sobre los puntos fijos en la cerradura  $\overline{H \cdot P}$ . (En otras palabras,  $\mu(\overline{H \cdot P})$  es la cerradura convexa de un cierto subconjunto de vértices del hipersimplejo.)

**Lema 3.2.3.** La preimagen de cada vértice del hipersimplejo es el punto  $H$ -fijo

$$\mu^{-1}(e(J)) = R_J^\perp.$$

*Demostración.* Por [Ati82] la preimagen  $\mu^{-1}(e(J))$  de cualquier vértice de  $\Delta_n^m$  consiste de un sólo punto fijo. Sin embargo el  $n$ -plano coordenado  $R_J^\perp$  puede ser representado como el núcleo de la matriz  $M : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^m$  tal que el menor  $M(J)$  es la identidad y las columnas restantes de  $M$  son todas cero.

Por lo tanto, para cada subconjunto  $K \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  de  $m$  elementos tenemos

$$\det M(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } K = J, \\ 0 & \text{si } K \neq J \end{cases}$$

y así

$$\mu_i(R_J^\perp) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J, \\ 0 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

lo que muestra que  $\mu(R_J^\perp) = e(J)$ . □

### 3.2.3 Segunda definición de estratificación.

Diremos que dos puntos  $P, Q \in G_n^m$  están en el mismo estrato de la segunda estratificación de  $G_n^m$  si la imagen bajo el mapeo momento de la cerradura de la  $H$ -trayectoria de  $P$  coincide con la imagen bajo el mapeo momento de la cerradura de la  $H$ -trayectoria de  $Q$ , es decir,

$$\mu(\overline{H \cdot P}) = \mu(\overline{H \cdot Q})$$

**Teorema 3.2.4.** La segunda estratificación de  $G_n^m$  coincide con la primera estratificación de  $G_n^m$  que fue definida en la sección ( 3.1.2).

**Corolario 3.2.5.** Hemos asignado a cada geometría combinatoria representable  $\Phi$ , un único poliedro convexo

$$\Delta(\Phi) = \text{cerradura}(\mu(\Gamma))$$

donde  $\Gamma$  es el estrato en  $G_n^m$  que corresponde a  $\Phi$ . Más aun, por el lema ( 3.1.6) y el ( 3.2.3) el poliedro  $\Delta(\Phi)$  tiene la descripción simple como la cerradura convexa de los vectores  $\{e(J) \mid J \text{ es una base de } \Phi\}$ .

*Demostración del teorema.* Si dos puntos  $P, Q \in G_n^m$  están en el mismo estrato  $\Gamma$  (definido como en la sección ( 3.1.2)), entonces determinan la misma matroide y por el lema ( 3.1.6) y el Teorema de Convexidad estos tienen las mismas bases, por tanto  $\mu(\overline{H \cdot P})$  y  $\mu(\overline{H \cdot Q})$  tienen la misma cerradura convexa de la misma colección de vectores, por lo tanto coinciden. Por otro lado, supongamos que  $P$  y  $Q$  tienen la propiedad de que  $\mu(\overline{H \cdot P}) = \mu(\overline{H \cdot Q})$ . Entonces las matroides correspondientes a  $P$  y  $Q$  están en el mismo estrato  $\Gamma$  de  $G_n^m$   $\square$

## 3.3 Células de Schubert y estratos en las Grassmanianas.

### 3.3.1 Células de Schubert.

El orden estándar  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+m}\}$  de la base estándar de  $\mathbb{C}^{n+m}$  da lugar a las banderas estándares

$$F^1 \subset F^2 \subset \dots \subset F^{n+m} = \mathbb{C}^{n+m}$$

donde  $F^i = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ .

**Definición 3.3.1.** Un *Símbolo de Schubert* es una sucesión de  $m$  números  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$  y determina la *Célula de Schubert*

$$\Omega[i_1 i_2 \dots i_m] = \{P \in G_n^m \mid \dim(P \cap F^{i_j-1}) < j, \dim(P \cap F^{i_j}) = j\},$$

es decir, los números  $i_j$  etiquetan los subespacios para los cuales la dimensión de la intersección con  $P$  aumenta.

Las Células de Schubert forman una descomposición de las Grassmanianas en células de dimensión par.

Ahora, sea  $\sigma \in \Sigma_{n+m}$  una permutación en  $\{1, 2, \dots, n+m\}$  y consideremos el nuevo orden  $\{e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n+m)}\}$  de los vectores base de  $\mathbb{C}^{n+m}$ . Esto da lugar a una bandera

$$F_\sigma^1 \subset F_\sigma^2 \subset \dots \subset F_\sigma^{n+m} = \mathbb{C}^{n+m}$$

donde  $F_\sigma^i = \text{span}\{e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(i)}\}$ .

Entonces obtenemos una nueva descomposición de la Grassmaniana en células de Schubert,

$$\Omega^\sigma[i_1 i_2 \dots i_m]$$

reemplazando  $F^i$  con  $F_\sigma^i$  en la definición anterior.

### 3.3.2 La tercera estratificación de las Grassmanianas.

Definimos la tercera estratificación de la Grassmaniana como el común refinamiento de las  $n!$  descomposiciones en Células de Schubert  $\Omega^\sigma[i_1 i_2 \dots i_m]$  donde  $\sigma$  puede variar sobre todas las permutaciones y  $i_1 i_2 \dots i_m$  puede variar sobre todos los Símbolos de Schubert.

**Teorema 3.3.2.** La tercera descomposición de las Grassmanianas coincide con la descomposición de  $G_n^m$  en los estratos de la sección (3.1.2).

*Demostración.* Si  $P \in \Omega^\sigma[i_1 i_2 \dots i_m]$  entonces la función rango  $r$  de la matroide correspondiente satisface

$$r(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m)) = m - j,$$

donde  $j$  está únicamente determinada por

$$i_j \leq m < i_{j+1}$$



porque  $\dim(F_\sigma^m/F_\sigma^m \cap P) = m - \dim(F_\sigma^m \cap P) = m - j$ . En otras palabras, tal función rango no está completamente determinada, sin embargo, su valor en los subconjuntos particulares  $\{\sigma(1)\}, \{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n+m)\}$  está determinado. Ahora un estrato en la tercera descomposición de  $G_n^m$  tiene la forma

$$S = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \Omega^\sigma[L_\sigma]$$

donde cada  $L_\sigma$  es algún símbolo de Schubert. (La mayoría de dichas intersecciones será vacía por supuesto, y un estrato dado puede tener varias representaciones.) Entonces un punto  $P \in S$  corresponde a una matroide cuya función rango está completamente determinada; porque si  $J \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  es cualquier subconjunto entonces uno puede encontrar una permutación  $\sigma$  tal que  $J = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(|J|)\}$ . Si  $L_\sigma = [i_1 i_2 \dots i_m]$ , entonces el valor de la función rango es

$$r(J) = |J| - j,$$

donde

$$i \leq |J| < i_{j+1}.$$

(La permutación  $\sigma$  no es única. Sin embargo, si otra permutación  $\gamma$  es encontrada tal que  $J = \{\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(|J|)\}$  y si el cálculo resultante para  $r(J)$  difiere del anterior, entonces esto implicaría que  $S = \emptyset$ .) Esto muestra que la intersección  $S$  está contenida en a lo más un estrato de la primera estratificación de la sección (3.1.2).

Por otro lado, supongamos que  $\Gamma$  es un estrato de la estratificación de la sección (3.1.2). Fijemos una permutación  $\sigma \in \Sigma_{n+m}$ . Para cada  $P \in \Gamma$  los rangos de los conjuntos  $\{\sigma(1)\}, \{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n+m)\}$  son determinados por la función rango  $r$  de la matroide asociada a  $\Gamma$ . Sin embargo,

$$r\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m)\} = \dim(F_\sigma^m/F_\sigma^m \cap P) = m - \dim(F_\sigma^m \cap P)$$

entonces las dimensiones  $\dim(F_\sigma^m \cap P)$  están bien determinadas por  $\Gamma$ . Esto significa que  $P$  está en una cierta Célula de Schubert de tipo  $\Omega^\sigma[L_\sigma]$  y el Símbolo de Schubert  $L_\sigma$  está determinado por la matroide asociada a  $\Gamma$ . Así  $\Gamma \subset \Omega^\sigma[L_\sigma]$ . Si permitimos que la permutación  $\sigma$  varíe, concluimos que cada estrato  $\Gamma$  está contenido en una única intersección,

$$\Gamma \subset \bigcap_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \Omega^\sigma[L_\sigma]$$

lo cual completa la demostración. □

## 3.4 Matroides y poliedros convexos.

### 3.4.1 Teorema (GGMS)

Podemos extender la correspondencia del corolario (3.2.5) a todas las matroides con ciertos poliedros convexos. Así, para cualquier matroide  $\Phi$  (de rango  $m$ ), definida sobre el conjunto  $\{1, 2, \dots, n+m\}$ , asociamos el poliedro convexo  $\Delta(\Phi)$ ,

$$\Delta(\Phi) = \text{cerradura convexa}\{e(I) \mid I \text{ es una base de } \Phi\}$$

En esta sección investigaremos cuáles poliedros pueden ocurrir.

**Definición 3.4.1.** Diremos que un poliedro convexo  $\Delta$  que está contenido en un hipersimplejo  $\Delta_n^m$  es un *poliedro matroide* si los vértices de  $\Delta$  están en un subconjunto de los vértices del hipersimplejo  $\Delta_n^m$  y si cada arista (es decir, cada cara de dimensión 1) de  $\Delta$  es una translación de uno de los vectores  $e_i - e_j$  para  $i \neq j$ .

**Teorema 3.4.2 (GGMS).** Supongamos que  $\Delta$  es un poliedro convexo que está contenido en el hipersimplejo  $\Delta_n^m$ . Entonces existe una matroide  $\Phi$  tal que  $\Delta = \Delta(\Phi)$  si y sólo si  $\Delta$  es un poliedro matroide, y en tal caso la matroide  $\Phi$  está únicamente determinada.

**Observación 3.4.3.**

1. Los vectores  $e_i - e_j$  son las "raíces" del grupo  $GL_{n+m}(\mathbb{C})$ .
2. Matroides isomorfas determinan poliedros congruentes.
3. El teorema implica, por ejemplo, que si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son matroides tales que  $\Delta(\Phi_1) \subset \Delta(\Phi_2)$  entonces las aristas (y los vértices) de  $\Delta(\Phi_1)$  son un subconjunto de las aristas (y los vértices) de  $\Delta(\Phi_2)$ .
4. La observación esencial en la prueba es que una arista la cual es una translación de  $e_i - e_j$  junta dos bases que están relacionadas por un Cambio de Steiner.

### 3.4.2 Demostración ( $\Rightarrow$ ).

Fijemos una matroide  $\Phi$ . para cada base  $B \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  de  $\Phi$  denotamos los vértices correspondientes de  $\Delta_n^m$  por  $e(B)$ , es decir,

$$e(B)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in B, \\ 0 & \text{si } i \notin B \end{cases}$$

Ahora supongamos que  $I$  y  $J$  son bases de la matroide  $\Phi$ , y que los vértices  $e(I)$  y  $e(J)$  están unidos por una arista en el conjunto convexo  $\Delta(\Phi)$ . Por reordenamiento de elementos de la matroide, podemos suponer que los vectores  $e(I)$  y  $e(J)$  difieren únicamente en las primeras  $2p$  coordenadas y que

$$\begin{aligned} e(I) &= (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \text{ otras}), \\ e(J) &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, \text{ otras}) \end{aligned}$$

(hay  $p$  unos y  $p$  ceros en cada caso).

Mostraremos que a menos de que  $p = 1$  el punto medio  $m = (1/2, 1/2, \dots, 1/2, \text{ otras})$  del segmento que une  $e(I)$  con  $e(J)$  es un convexo no trivial combinación de otros vértices de  $\Delta(\Phi)$  y por tanto este segmento no es una arista de  $\Delta(\Phi)$ .

Para esta discusión podemos ignorar las "otras" coordenadas, es decir, podemos tomar  $I = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  y  $J = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}$ . aplicaremos repetidamente el Axioma de Cambio de Steiner para estas dos bases.

Paso 1=1b Combinemos el elemento  $1 \in I$  con la base  $J$ , obteniendo una nueva base  $D$ , de  $\Phi$  la cual, por reordenamiento de elementos en  $J$ , se puede asumir que es

$$B_1 = B_{1b} = I - \{1\} + \{p+1\}$$

Paso 2a Combinemos el elemento  $p+1$  con la base  $I$ , obteniendo una de dos posibilidades (salvo un reordenamiento de los elementos  $\{2, 3, \dots, p\}$ ):  $B_{2a} = J - \{p+1\} + \{1\}$  ó  $B_{2a} = J - \{p+1\} + \{2\}$ .

En el primer caso tenemos

$$m = \frac{1}{2}[e(B_{2a}) + e(B_{1b})]$$

con lo que terminaríamos. Así, podemos asumir que

$$B_{2a} = J - \{p+1\} + \{2\}$$

es una base de  $\Phi$ . Continuando en esta forma, podemos probar que  $m$  no está sobre ninguna arista, o que podemos construir una sucesión de bases  $B_{1b}, B_{2a}, B_{2b}, B_{3a}, \dots$ , de  $\Phi$ . En el  $m$ -ésimo paso (parte a) cambiamos  $p+m-1 \in J$  con la base  $I$ , obteniendo una de  $m$  posibilidades (salvo un reordenamiento de los elementos  $\{e_m, e_{m+1}, \dots, e_p\}$ ),

$$B_{ma} = J - \{p+m-1\} + \{i\}$$

donde  $1 \leq i \leq m$ . Sin embargo, uno checa (por un directo pero engorroso cálculo) que si  $i \neq m$  entonces

$$m = \frac{1}{2^i} [e(B_{ma}) + e(B_{(m-1)b}) + e(B_{(m-1)a}) + \cdots + e(B_{(m-i)b})]$$

y que  $m$  no está en ninguna arista.

Esto sólo deja la posibilidad de que

$$B_{ma} = J - \{p + m + 1\} - \{m\}$$

es una base de  $\Phi$ . Similarmente el  $m$ -ésimo paso (parte b) da una base

$$B_{mb} = I - \{m\} + \{p + m\}.$$

Este proceso termina después de  $p$  pasos cuando cambiamos (en el paso  $(p + 1)$  parte a) el elemento  $2p \in J$  con la base  $I$ . Hay una de  $p$  posibilidades

$$B_{(p+1)a} = J - \{p\} + \text{uno de } \{1, 2, 3, \dots, p\}$$

y en cada caso el punto  $m$  puede ser escrito como un convexo no trivial combinación de vértices previos, como antes. Esto completa la prueba de que aristas de cualquier  $\Delta(\Phi)$  deben ser translaciones de vectores  $e_i - e_j$ .

### 3.4.3 Demostración ( $\Leftarrow$ ).

Supongamos que  $\Delta$  es una cerradura convexa de algunos vértices en el hipersimplejo  $\Delta_n^m$  y que cada arista de  $\Delta$  es una translación de algún vector  $e_i - e_j$ . Debemos mostrar que los vértices de  $\Delta$  constituyen la base de la matroide. Por [Whi86] esto es equivalente a verificar el Axioma de Cambio de Steiner: Si  $I$  y  $J$  son subconjuntos de  $m$  elementos de  $\{1, 2, \dots, n + m\}$  tal que  $e(I)$  y  $e(J)$  son vértices de  $\Delta$ , y si  $m \in I - J$ , entonces existe  $l \in J - I$  tal que el vector  $e(I - \{m\} + \{l\})$  es un vértice de  $\Delta$ . Por un reetiquetamiento de ejes de coordenadas en  $\mathbb{R}^{n+m}$ , podemos asumir que  $e(I)$  y  $e(J)$  difieren solamente en las primeras  $2p$  posiciones y que

$$\begin{aligned} e(I) &= (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \text{ otras}), \\ e(J) &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, \text{ otras}). \end{aligned}$$

Podemos asumir anticipadamente que las "otras" coordenadas están arregladas de tal forma que todos los 1's aparezcan antes de los 0's. De esta forma hemos dividido el conjunto

$\{1, 2, \dots, n + m\}$  en cuatro intervalos:  $A = \{1, 2, \dots, p\}$ ;  $B = \{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}$ ;  $C = \{2p + 1, 2p + 2, \dots, p + m\}$ ;  $D = \{p + m + 1, p + m + 2, \dots, n + m\}$  tal que  $I = A \cup C$ ,  $J = B \cup C$ , y  $m \in A$ .

Como  $\Delta$  es convexo, el segmento de línea que une a  $e(I)$  con  $e(J)$  está completamente contenido en el cono convexo que está generado por las aristas  $E_1, E_2, \dots, E_r$  el cual se deriva del vértice  $e(I)$ . Entonces hay números reales no negativos  $a_1, a_2, \dots, a_r$  tales que

$$e(J) \cdot e(I) = (-1, -1, \dots, -1; 1, 1, \dots, 1; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^r a_i E_i$$

(donde los punto y coma son usados para separar las coordenadas que están en  $A, B, C, D$ ). Por asunción, cada uno de dichos vectores aristas  $E$  que se derivan del vértice  $e(I)$  es de la forma  $e_l - e_m$ , para algunas  $l, m$  en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n + m\}$ . Como el vértice  $e(I) + E$  está en el hipersimplejo, el cual está contenido en la región  $0 \leq |x_i| \leq 1$ , para  $1 \leq i \leq n$ , debemos tener

$$l \in A \cup C \text{ y } m \in B \cup D$$

Por lo tanto, si dicho vector arista  $E = e_l - e_m$  aparece con coeficientes distintos de cero en la suma ( 3.4.3), entonces  $l \notin D$ , porque de otra forma esta daría un valor positivo a la coordenada  $x_l$ , la cual no podría ser cancelada por ningún otro término en la suma debido a la condición ( 3.4.3). Similarmente, debemos tener  $m \notin C$ . En conclusión, cada uno de los vectores  $E = e_l - e_m$  que aparecen con coeficientes distintos de cero en la suma ( 3.4.3), deben satisfacer  $l \in B$  y  $m \in A$ .

Ahora consideremos la coordenada particular  $m \in A$ . Como  $(e(J) - e(I))_m = -1$ , al menos uno de los vectores (digamos  $E_s$ ) en la suma ( 3.4.3) tiene  $-1$  en la  $m$ -ésima coordenada. Para este vector en particular tenemos

$$E_s = e_l - e_m \text{ y } l \in B \subset J - I$$

Así, el vértice de  $\Delta$  que está dado por

$$e(I) + E_s = e(I - \{m\} + \{l\})$$

verifica el Cambio de Steiner deseado.

### 3.4.4 El poliedro de Fano.

Asociado a la configuración de Fano (la cual no es representable sobre  $\mathbb{C}$ ), obtenemos un bonito y altamente simétrico poliedro convexo de dimensión 6 con 28 vértices, 126 aristas,

245 caras de dimensión dos, 238 caras de dimensión tres, 112 caras de dimensión cuatro y 21 caras de dimensión 5. El "grupo de simetría completo" de este poliedro es el grupo finito simple  $PGL_3(\mathbb{F}_2)$ . Este ejemplo tiene generalizaciones obvias a otros espacios proyectivos finitos. (Figura ( 3.1))

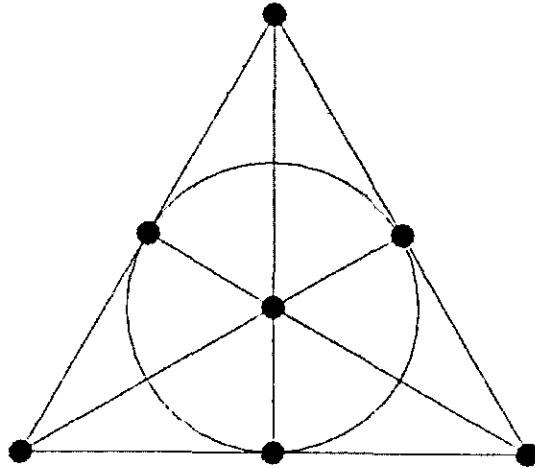


Figura 3.1:

### 3.4.5 Topología de estratos.

No sabemos cuando cada estrato  $\Gamma \subset G_n^m$  es no singular. No sabemos cuando cada estrato  $M$  es un  $K(\pi, 1)$  espacio.

### 3.4.6 Degeneración de matroides.

Si  $\Gamma \subset G_n^m$  es un estrato y si  $P \in \bar{\mu} - \mu$ , deberemos decir que la matroide correspondiente a  $\mu$  degenera a la matroide correspondiente a  $P$ . En este caso, tenemos para cualquier subconjunto  $J \subset \{1, 2, \dots, n+m\}$  la siguiente relación sobre sus correspondientes funciones rango

$$r_{\Gamma}(J) \leq r_P(J)$$

Sin embargo, la cerradura del estrato  $\mu$  no es necesariamente una unión de estratos  $\Gamma'$ , y puede por ejemplo contener un subconjunto propio de un estrato  $\mu'$ , como lo muestra el siguiente ejemplo: (Figura ( 3.2)) Un teorema en geometría proyectiva [DS65] menciona que

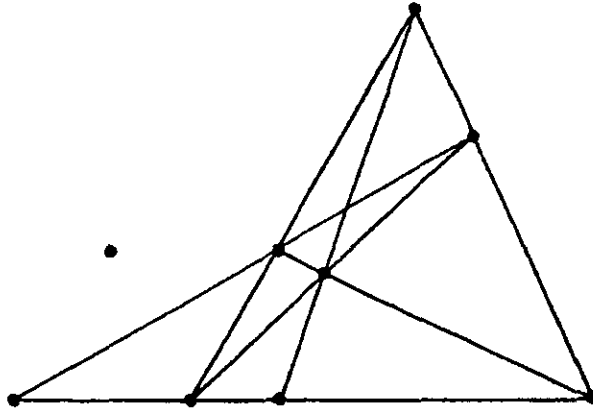


Figura 3.2:

los cuatro puntos A, B, C, D, son armónicos, es decir, la razón cruzada de (A,C;B,C) es -1. Sin embargo es posible degenerar la configuración anterior a la siguiente configuración: (Figura ( 3.3))

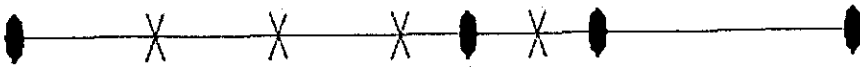


Figura 3.3:

pero al hacer esto obtendríamos sólo 8-adas de puntos tales que A, B, C, D, son armónicos. Para cualquier Grupo de Lie algebraico complejo  $G$  y subgrupo parabólico  $P$ , el mapeo momento asociado a la acción tórica,  $\mu : G/P \rightarrow \mathfrak{g}^*$  da lugar a una nueva geometría combinatoria y a un interesante poliedro convexo.

Con el siguiente ejemplo se trata de ilustrar la teoría y los resultados principales de este capítulo.

**Ejemplo 3.4.4.** Sea  $G_2^2$  la Grassmaniana de las líneas en  $\mathbb{P}^3$  o bien los planos por el origen en  $\mathbb{C}^4$ , y tomemos los cuatro vectores básicos  $e_1, e_2, e_3, e_4$ .

Sea  $P \in G_2^2$  un plano de la Grassmaniana,

$$\pi_P : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4/P \cong \mathbb{C}^2$$

determina cuatro vectores, por ejemplo si  $P_1 = \text{span}\{e_i, e_j\}$  tenemos que dos de los vectores básicos de  $\mathbb{C}^4$  serán mandados en los dos vectores básicos de  $\mathbb{C}^2$  y los otros dos serán mandados al cero. Así cada plano determina una matroide o geometría combinatoria de dos elementos.

Ahora, consideremos la acción del toro algebraico  $H = (\mathbb{C}^*)^4$  sobre  $\mathbb{C}^4$  definida como antes, por alargamiento de los ejes, es decir, si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4) \in H$  y si  $x \in \mathbb{C}^4$  entonces  $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_4 x_4)$ . Manda planos en planos y por lo tanto induce una acción en  $G_2^2$ .

Ahora si tomamos por ejemplo a  $J = \{3, 4\}$  entonces los puntos fijos de la acción son los planos que pasan por el origen de  $\mathbb{C}^4$  que tienen como básicos a un par  $\{e_i, e_j\}$  con  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Ahora, calculemos las coordenadas del mapeo momento para un plano en particular  $P \in G_2^2$ .  $P$  puede ser visto como el núcleo de un morfismo suprayectivo que corresponde a una matriz  $M$  de dimensión  $2 \times 4$  y si tomamos  $J \subset \{1, \dots, 4\}$ ,  $|J| = 2$  entonces la matriz correspondiente  $M(J)$  será una matriz de dimensión  $2 \times 2$ , ahora si utilizamos la ecuación dada por la proposición (3.2.1) para calcular las coordenadas del mapeo momento para unos planos en especial obtenemos lo siguiente: si  $P$  es un plano coordenado, la matriz  $M$  tiene como renglones dos vectores básicos de  $\mathbb{C}^4$ , por lo que obtendremos siempre  $M(J) = Id$  por lo que  $\mu_i(P) = 1/2$  para toda  $i = 1, \dots, 4$  entonces el poliedro que obtenemos es el mismo para los cuatro planos coordenados y dicho poliedro es el simplejo de dimensión 4.



## Capítulo 4

# UNA GENERALIZACIÓN DEL DILOGARITMO.

### 4.1 Introducción histórica.

#### 4.1.1 El Dilogaritmo.

La función dilogaritmo

$$\text{Li}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

fue considerada primero aparentemente por Leibnitz en 1696, después por Euler en 1779. Esta y transformaciones elementales de ella fueron estudiadas por varios matemáticos del siglo XIX; incluyendo a Legendre, Lobachevsky, Lindelof, Jonquiere, etc.

Cerca de los 80's se despertó nuevamente el interés en el dilogaritmo. El dilogaritmo fue usado en el estudio de la  $k$ -teoría algebraica por Bloch, Gross, y Beilinson. También fue relacionado a las integrales iteradas de Chen por Aomoto.

En el siguiente capítulo, interpretaremos  $\Phi(x)$  como el volumen de una cierta región en  $G_2^2$ . Esta relación fue conjeturada en un intento por reconciliar la demostración original de la fórmula combinatoria para la primera clase de Pontrjagin de Gabrielov, Gelfand y Losik [GGL75], con la demostración de MacPherson. La prueba original procedió por integraciones sucesivas;  $\Phi$  y sus propiedades fueron usadas. La prueba de MacPherson usó en lugar de eso geometría en variedades Grassmanianas.

La prueba original de la interpretación de  $\Phi(x)$  como un volumen fue obtenida por integración

directa. Una prueba posterior por Damiano, usa la teoría de webs.

La parte imaginaria de  $\Phi(k)$  aparece en la fórmula para el volumen de un tetraedro en el 3-espacio hiperbólico real cuyos vértices están en la línea proyectiva compleja al infinito y tiene razón cruzada  $k$ . En el artículo [ID82], se interpreta la parte real de  $\Phi(k)$  como un volumen en la Grassmaniana  $G_2^2$ . Como ambos el 3-espacio hiperbólico y la Grassmaniana  $G_2^2$  son espacios simétricos, debería haber una explicación conceptual para esta coincidencia. Pero no se de ninguna.

Desde la perspectiva de Gelfand y MacPherson, la propiedad clave del dilogaritmo es la ecuación funcional de (4.2.3) para la cual se dará una interpretación geométrica. Esta ecuación funcional tiene varias formas equivalentes que involucran cinco términos dilogarítmicos en dos variables más varios términos logarítmicos. Esto fue descubierto primero por Spence en 1809, después independientemente redescubierto por Abel, Gill, Kummer y otros.

Una interpretación moderna de esta ecuación funcional es como una ecuación abeliana para un web en particular (de cinco foliaciones de los 2-discos de líneas) llamado el web excepcional. Esto se debe a Bol. Damiano extendió esta teoría a dimensiones superiores en una forma relacionada a las formas del Dilogaritmo generalizadas.

Un resultado de Wigner relaciona la función  $\Phi$  con la primera clase de Pontrjagin. Existe una función continua  $\Phi'$  de la línea proyectiva real  $\mathbb{RP}^1$  a  $\mathbb{R}/\pi^2\mathbb{Z}$  tal que  $d\Phi' = d\Phi$ . Una clase de cohomología continua en  $H^3(SL_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}/\pi^2\mathbb{Z})$  es representada por la cocadena cuyo valor sobre  $x_0, \dots, x_3$  es  $\Phi'(k)$  donde  $k$  es la razón cruzada de las proyecciones de  $x_0, \dots, x_3$  a  $\mathbb{RP}^1$ . La ecuación funcional para  $\Phi$  da la condición de cociclo. La clase  $C$  se, mapea a la primera clase de Pontrjagin, por el homomorfismo conector de la sucesión coeficiente

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\pi^2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Una forma de relacionar  $d\Phi$  y la primera clase de Pontrjagin fue en [D<sup>+</sup>85].

#### 4.1.2 El Complejo Tetraédrico.

El estudio de familias algebraicas de líneas particulares en el 3-espacio fue muy desarrollada en el siglo XIX. Una familia tridimensional fue llamada un complejo. El grado de un complejo  $C$  fue definido como el grado del conjunto de líneas en  $C$  que pasan por un punto dado, considerado como una curva en el plano proyectivo de todas las líneas que pasan por un punto. (En términos moderno, esto aumenta a la clase de homología de la complejificación de  $C$  en el complejo Grassmaniano).

El complejo tetraédrico que será definido en el siguiente capítulo (La cerradura de Zariski de un simplejo Grassmaniano  $\Gamma_2^2$ ) fue primero considerado por Binet en 1911 como la familia de ejes de inercia de un cuerpo sólido. Éste fue estudiado por Charles, Plücker y Reye, junto con otros. Otras caracterizaciones fueron encontradas: Por ejemplo, la familia de los ejes de las elipses obtenidas como secciones planares de un elipsoide fijo, o la familia de líneas que unen a  $X$  y a  $T_x$  para una transformación proyectiva  $T$  fija.

El primer escrito de Lie sobre Grupos de Lie fue una nota en 1870 con Klein sobre  $H$  actuando sobre  $G_1^3, G_2^2, G_3^1$ . En ella, probaron que el complejo tetraédrico es la cerradura de una  $H$ -órbita en  $G_2^2$ . Ellos usaron lo que fue el mapeo exponencial y el hecho de que  $H$  es Abelian para probar hechos geométricos acerca de los complejos tetraédricos. Ellos vieron el hecho de que sus pruebas fueran más fáciles que las usuales como justificación para la nueva herramienta de grupos continuos.

La caracterización de Klein y Lie de complejos tetraédricos da paso a la generalización de ellos al espacio de  $k$ -planos en un  $N$  espacio proyectivo. El complejo tetraédrico generalizado es la cerradura de una  $H$ -órbita -En el lenguaje de Gelfand y MacPherson, la cerradura de Zariski de un simplejo Grassmaniano-.

La formulación teórica de Lie permite una generalización de todo lo contenido en [ID82] de  $PGL(n+m)$  a un grupo de Lie semi-simple arbitrario.

Sea  $G$  una forma real expandida de un grupo de Lie semi-simple, sea  $P$  un subgrupo parabólico, y sea  $H$  un subgrupo de Cartan expandido. Entonces los complejos tetraédricos en  $G_n^m$  se generalizan a cerraduras de  $H$ -órbitas en  $G/P$ .

### 4.1.3 Simplejos Grassmanianos.

Existe un generalización de los hipersimplejos  $\Delta_n^m$  del trabajo de Gabrielov, Gelfand, y Losik [GGL75], debido a que sus relaciones entre caras (4.4.1) son formalmente duales a las fórmulas para las derivadas exteriores de ciertas formas diferenciales  $S^{n-1, m-1}$  una de las cuales es esencialmente  $d\Phi$ . (Ver [GGL75] sec. 2; Y). El hecho de que  $\Delta_n^m$  es homeomorfo a la cerradura  $\Gamma_n^m$  de una  $H^0$ -órbita en  $G_n^m$  en una forma que manda la estructura de las caras de  $\Delta_n^m$  a la estructura de las órbitas de  $\Gamma_n^m$  (4.4.12) fue primero probada por MacPherson [Mac77] sec. 6. (En [Mac77] una estructura poliédrica sobre todas las cerraduras de  $H^0$ -órbitas, incluyendo las no genéricas, fue determinada).

## 4.2 Introducción.

### 4.2.1 Poliedros en Grassmanianas.

Sea  $G_n^m$  la Grassmaniana de los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Como ya vimos, podemos pensar a  $G_n^m$  como la variedad de los  $(n-1)$ -planos del proyectivo  $\mathbb{R}P^{n+m-1}$ .

Los simplejos forman una clase natural de poliedros en el espacio proyectivo  $G_1^m$ . Nos gustaría generalizar éstos a poliedros en las otras Grassmanianas  $G_n^m$ .

Una propiedad clave del  $m$ -simplejo en  $G_1^m$  es que su frontera es una unión de  $(m-1)$ -simplejos en  $G_1^{m-1}$  para varios encajes  $G_1^{m-1} \subset G_1^m$ . La otra Grassmaniana también tiene encajes similares de acuerdo con el siguiente patrón:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ G_3^1 \subset G_3^2 \subset \\ \cup \quad \cup \\ G_2^1 \subset G_2^2 \subset G_2^3 \dots \\ \cup \quad \cup \\ G_1^1 \subset G_1^2 \subset G_1^3 \dots \end{array}$$

(Las inclusiones horizontales son los subespacios en un hiperplano dado; las inclusiones verticales son los subespacios por un punto dado). Nos gustaría conocer las relaciones entre caras de nuestros simplejos generalizados similarmente con respecto a este patrón de encajes. Una ruta tentativa para la generalización podría ser observar que las subvariedades  $G_1^{m-1} \subset G_1^m$  pueden ser construidas por geodésicas. En el espacio proyectivo  $G_1^3$  de dimensión 3, si tenemos 3 segmentos de geodésicas dados formando un triángulo, cualquiera de los dos procedimientos para llenarlo con geodésicas (figura (4.1)) da el mismo 2-simplejo. En  $G_2^2$



Figura 4.1:

esto no es cierto: (figura ( 4.2)) Esto es simplemente porque  $G_1^m$  es un espacio simétrico



Figura 4.2:

de rango uno ( es decir, existe un invariante real de la posición relativa de dos puntos-la distancia-), mientras que  $G_2^2$  es un espacio simétrico de rango 2 ( existe un espacio de dimensión 2 de invariantes de la posición relativa de dos puntos).

#### 4.2.2 Los primeros simplejos Grassmanianos.

**Definición 4.2.1.** Sean  $e_1, e_2, \dots, e_{n+m}$  puntos en un espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^{n+m-1}$  de dimensión  $n + m - 1$  no totalmente contenido en un subespacio de dimensión  $n + m - 2$ . Sea  $H^0$  la componente conexa de la identidad del grupo de automorfismos proyectivos de  $\mathbb{RP}^{n+m-1}$  fijando todos los puntos  $e_i$ . Como  $H^0$  manda planos de dimensión  $n - 1$  a planos de dimensión  $n - 1$ , ésta actúa sobre  $G_n^m$ .

**Definición 4.2.2.** Un *simplejo Grassmaniano*  $\Gamma_n^m$  es la cerradura de una órbita genérica de  $H^0$ .

Los simplejos Grassmanianos son la generalización propuesta de los simplejos ordinarios en un espacio proyectivo. Ilustraremos la idea observando los casos  $\Gamma_1^2, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2$ .

Las órbitas genéricas distintas de  $H^0$  en  $G_1^2 = \mathbb{RP}^2$  son las regiones abiertas etiquetadas con I, II, III, IV. (figura ( 4.3)). Esto es porque el grupo de automorfismos proyectivos de  $\mathbb{RP}^2$  es transitivo sobre 4-triples de puntos en posición general.

La cerradura de la región I, un simplejo Grassmaniano  $\Gamma_1^2$ , es un 2-simplejo ordinario. Sus tres picos son cerraduras de órbitas no genéricas de  $H^0$ ; éstas son simplejos Grassmanianos  $\Gamma_1^1$ . Cada uno es la cerradura de una  $H^0$ -órbita genérica en  $G_1^1$  encajado como una de las tres líneas  $\widehat{e_i e_j}$ .

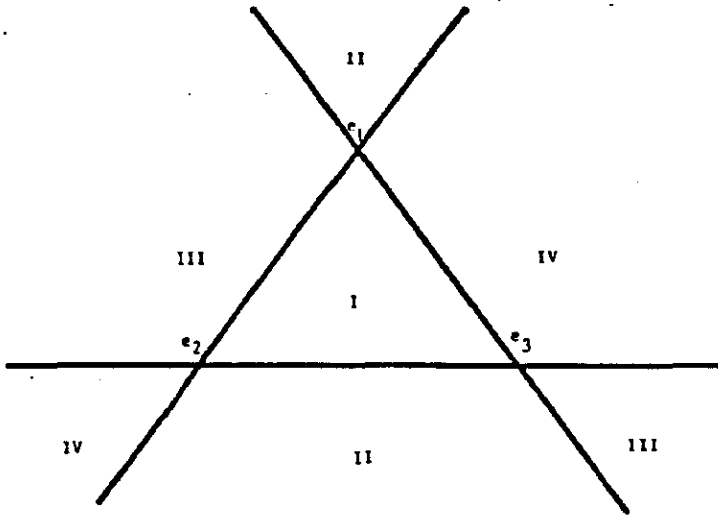


Figura 4.3:

La figura en  $G_2^1$ , el espacio de líneas en  $\mathbb{RP}^2$ , por dualidad es similar. Hay cuatro  $H^0$ -órbitas genéricas. Una es el conjunto de líneas que no intersectan la región sombreada en la figura (4.3)

Su cerradura (figura (4.4)), un simplejo Grassmaniano  $\Gamma_2^1$ , tiene tres picos-las tres familias de líneas dibujadas en la figura-. Estas son simplejos Grassmanianos  $\Gamma_1^1$ , en  $G_1^1$  encajado como la familia de todas las líneas que pasan por  $e_1, e_2$  ó  $e_3$ . La topología de la  $\Gamma_2^1$  puede ser vista de esta forma:

Considerémos  $G_2^2$ , el espacio de líneas  $l$  de un  $\mathbb{RP}^3$  con cuatro puntos fijos no coplanares  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Como  $H^0$  es de dimensión 3 y  $G_2^2$  es de dimensión 4, debemos encontrar una ecuación satisfecha por una  $H^0$ -órbita. Sea  $k(l)$  la razón cruzada de cuatro planos  $\widehat{e_1 l}, \dots, \widehat{e_4 l}$  tomados en el haz de planos que pasan por  $l$ . (figura(4.5)).

Como la razón cruzada es un invariante proyectivo,  $k(l)$  debe ser constante sobre una  $H^0$ -órbita, de lo cual resulta nuestra ecuación. La variedad de las líneas que satisfacen esta ecuación fue clásicamente llamada el *complejo tetraédrico*.

Mostraremos en la sección (4.4.12) que la topología de un simplejo Grassmaniano  $\Gamma_2^2$ , la cerradura de una  $H^0$ -órbita, es un octaedro sólido.(figura (4.6)).

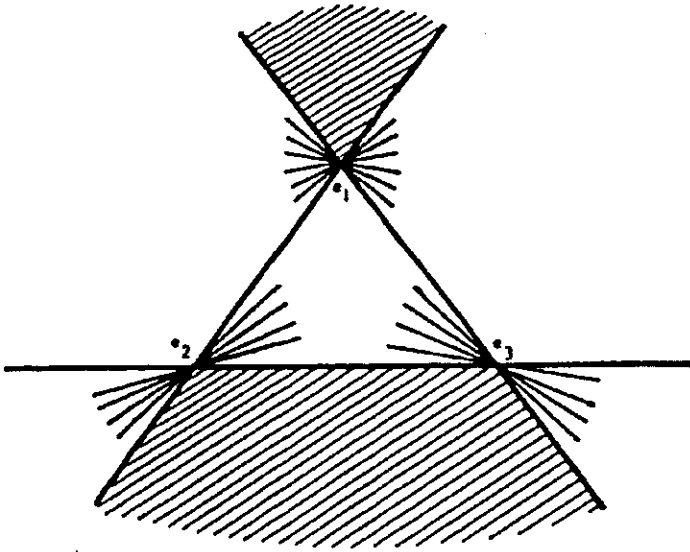


Figura 4.4:

En la figura ( 4.7) los seis vértices son las líneas  $\widehat{e_i e_j}$  como están marcadas.

Las cuatro caras sin sombrar son simplejos Grassmanianos  $\Gamma_2^1$ . Estas son cerraduras de  $H^0$ -orbitas genéricas en  $G_2^1$  encajadas de cuatro formas: como el conjunto de los planos  $\widehat{e_1 e_2 e_3}$ ,  $\widehat{e_1 e_2 e_4}$ ,  $\widehat{e_1 e_3 e_4}$ ,  $\widehat{e_2 e_3 e_4}$ .

Las cuatro caras sombreadas son simplejos Grassmanianos  $\Gamma_1^2$ . Estas son cerraduras de  $H^0$ -orbitas genéricas en  $G_2^1$ , encajadas de cuatro formas: como el conjunto de líneas que pasan por el punto  $e_1, e_2, e_3$  ó  $e_4$ . El encaje de la  $\Gamma_1^2$ , cuyos vértices son  $\widehat{e_1 e_2}$ ,  $\widehat{e_1 e_3}$  y  $\widehat{e_1 e_4}$  en la  $G_1^2$  de líneas por  $e_1$ , puede ser dibujado como sigue: (figura ( 4.8))

Entonces vemos que nuestro requerimiento para las relaciones entre las caras establecidas en ( 4.2.1) es satisfecha.

### 4.2.3 La relación con formas diferenciales

Considerando a  $G_2^2$  como los planos por el origen en  $\mathbb{R}^4$ , podemos ver que grupo ortogonal  $SO(4)$  actúa sobre  $G_2^2$ . Sea  $P_2^2$  la forma de volumen  $SO(4)$ -invariante de la unidad de masa en  $SO(4)$  y sean  $e_1, \dots, e_4$  las líneas ortogonales correspondientes en  $\mathbb{R}^4$ .

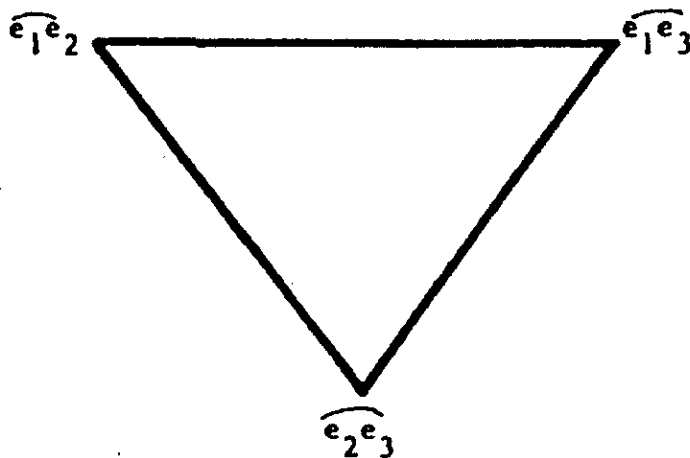


Figura 4.5:

Cada simplejo Grassmaniano  $\Gamma_2^2$  que sobre una hipersuperficie  $k(l) = x$ . Si variamos  $x$  continuamente entre 0 y 1, obtenemos una familia de hipersimplejos que varía continuamente, la cual denotaremos por  $\Gamma_2^2(x)$ . Sea  $\widehat{P}_2^2$  la integral de  $P_2^2$  sobre las fibras  $\Gamma_2^2(x)$ . Como  $P_2^2$  es una 4-forma y  $\Gamma_2^2(x)$  es de dimensión 3,  $\widehat{P}_2^2$  es una 1-forma. Integración.

$$\widehat{P}_2^2 = \frac{1}{8\pi^2} d\Phi(x)$$

donde  $\Phi(x) = (L_i(x) - L_i(1-x))$  y  $L_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2}$  es la función dilogaritmo clásica. De la geometría de (4.2.2) podemos ver que  $\Gamma_2^2(x_1)$  y  $\Gamma_2^2(x_2)$  tienen la misma frontera, por lo tanto su unión es una hipersuperficie cerrada como una almeja. La integración nos muestra que el volumen que ésta encierra es  $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ .

El dilogaritmo satisface una ecuación funcional en dos variables. Si extendemos  $\Phi$  de  $(0, 1)$  a  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  usando la simetría  $\Phi(x) = \Phi\left(\frac{1}{1-x}\right)$ , entonces esta ecuación funcional puede ser expresada como

$$\Phi\left(\frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right) - \Phi\left(\frac{(y-1)}{(x-1)}\right) + \Phi\left(\frac{y}{x}\right) - \Phi(y) + \Phi(x) = \frac{\pi^2}{6}$$



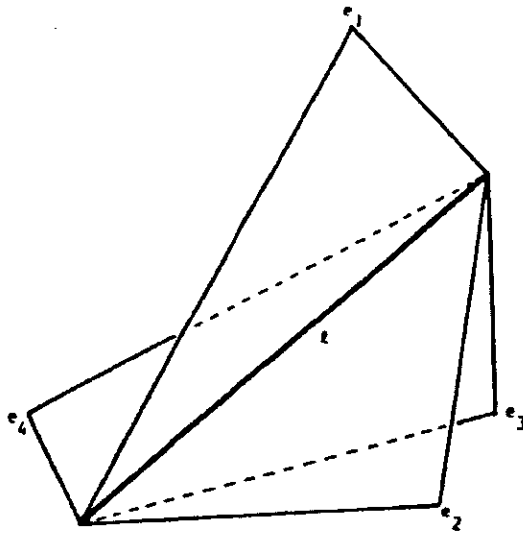


Figura 4.6:

para  $0 < x < y < 1$ . Nos gustaría derivar esta ecuación funcional de consideraciones geométricas sobre Grassmanianas.

Consideremos  $G_3^2$ , el espacio de planos  $\pi$  en un  $\mathbb{RP}^4$  con cinco puntos fijos de referencia  $e_1, \dots, e_5$  correspondientes a líneas ortogonales en  $\mathbb{R}^5$ . Un plano  $\pi$  determina 5 elementos  $\widehat{\pi e_1}, \dots, \widehat{\pi e_5}$  (omitimos  $\widehat{\pi e_i}$ ). Cualquiera dos de las  $k_i(\pi)$  determina los otros tres: por ejemplo, haciendo  $k_i(\pi) = u_i$ , si

$$u_4 = y \quad u_5 = x$$

entonces

$$u_1 = \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \quad u_2 = \frac{(y-1)}{(x-1)}, \quad u_3 = \frac{y}{x}$$

Cada simplejo Grassmaniano  $\Gamma_3^2$  está sobre una subvariedad  $k_5(\pi) = x$  y  $k_4(\pi) = y$ .

Si variamos  $x$  y  $y$  continuamente tal que  $0 < x < y < 1$ , obtenemos dos familias de parámetros de simplejos Grassmanianos los cuales denotaremos por  $\Gamma_3^2(x, y)$ .

Los simplejos Grassmanianos  $\Gamma_3^2(x, y)$  tienen cinco caras  $\Gamma_3^1$  las cuales no varían con  $x$  e  $y$ ,

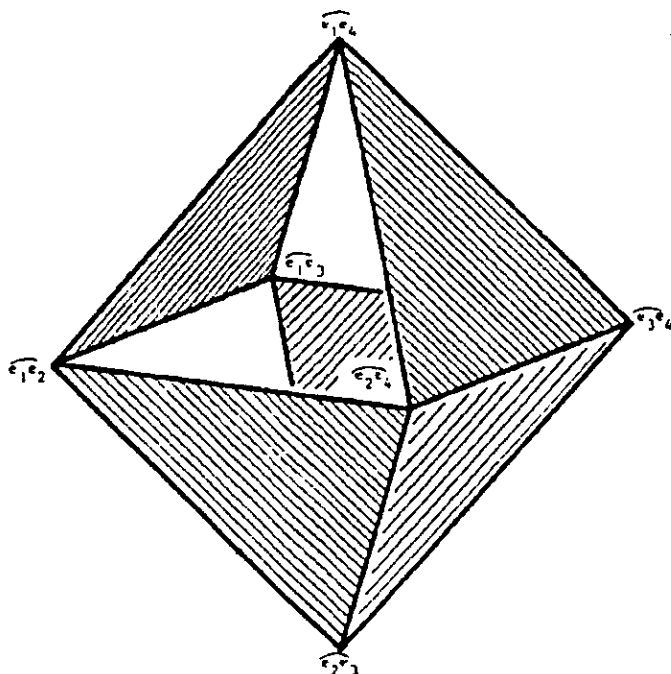


Figura 4.7:

y cinco caras  $F_1, \dots, F_5$  que sí. La cara  $F_i$  es un simplejo Grassmaniano  $\Gamma_2^2(u_i)$  que está en la Grassmaniana  $G_2^2$  de planos que contienen al punto de referencia  $e_i$ .

Ahora estudiamos la 4-forma  $P_3^2$  sobre  $G_3^2$ : la representativa armónica de la primera clase de Pontrjagin del haz tautológico. La forma  $P_3^2$  es cerrada y se restringe a la forma de volumen invariante sobre la Grassmaniana  $G_2^2$  de planos por  $e_i$ . Definimos  $\hat{P}_3^2$  como la integral de  $P_3^2$  sobre los simplejos Grassmanianos  $\Gamma_3^2(x, y)$ .

Esencialmente por el teorema de Stokes encontramos que  $d\hat{P}_3^2$  es la suma de las integrales de  $P_3^2$  sobre las caras  $F_i$ . Con señales que reflejan las orientaciones inducidas, obtenemos:

**Relación diferencial.**

$$d\hat{P}_3^2 = \sum_{i=1}^5 (-1)^i \hat{P}_2^2(u_i) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1}^5 (-1)^i d\Phi(u_i)$$

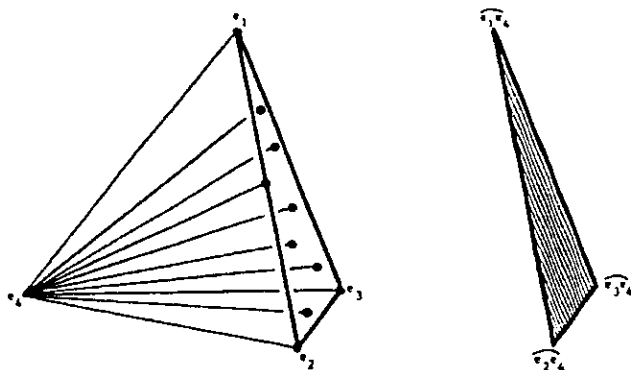


Figura 4.8:

Pero también tenemos un inesperado resultado que será probado en la sección (4.5).

**Teorema 4.2.3 (Teorema de anulamiento).** [Gelfand, MacPherson]

$P_3^2$  es idénticamente cero en  $\Gamma_3^2(x, y)$  para  $x$  y  $y$ . Por lo tanto,  $\widehat{P}_3^2$  es idénticamente cero, y así también  $d\widehat{P}_3^2$ . Entonces obtenemos

$$\sum_{i=1}^5 (-1)^i d\Phi(u_i) = 0$$

y así  $\sum_{i=1}^5 (-1)^i d\Phi(u_i)$  es una constante la cual evaluamos como  $\frac{\pi^2}{6}$  para valores especiales de  $x$  e  $y$ .

## 4.3 Las formas de dilogaritmo generalizadas.

### 4.3.1 Definiciones.

Considere la Grassmaniana  $G_n^m$  de todos los planos (sin orientar) que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Por abuso de notación, utilizaremos siempre el mismo símbolo usualmente  $\xi$  para un punto  $\xi \in G_n^m$  y para el  $n$ -plano  $\xi \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  correspondiente.

Un  $m$ -plano coordinado en  $\mathbb{R}^{n+m}$  es obtenido haciendo  $n$  de las coordenadas iguales a cero. Un  $n$ -plano es llamado genérico si éste intersecta a cada  $m$ -plano coordinado solamente en el origen. El símbolo  $\widetilde{G}_n^m$  denota los subconjuntos abiertos de  $G_n^m$  que consisten de  $n$ -planos genéricos.

El grupo proyectivo lineal  $PGL(n+m)$  es el grupo  $GL(n+m)$  de matrices reales invertibles  $(n+m) \times (n+m)$  dividido por múltiplos de la identidad.  $PGL(n+m)$  actúa sobre  $G_n^m$  porque los múltiplos de la identidad en  $GL(n+m)$  actúan trivialmente. El subgrupo de Cartán  $H \subset PGL(n+m)$  es la imagen de las matrices diagonales. Éste tiene dimensión  $n+m-1$ .

**Proposición 4.3.1.**  $H$  preserva  $\tilde{G}_n^m$  y actúa libremente sobre el.

Esta proposición será probada en (4.4.2).

**Definición 4.3.2.** El espacio cociente  $H \backslash \tilde{G}_n^m$  será denotado por  $C_n^m$  y el mapeo cociente por  $\pi$ .

Por la proposición,  $C_n^m$  es una variedad diferenciable de dimensión  $(n-1)(m-1)$ . En (4.4.2), será mostrado que este tiene una interpretación como el espacio de configuraciones de  $n+m$  puntos en el  $m-1$  espacio proyectivo.

También, las fibras de  $\pi$  se identifican con el grupo  $H$  de tal forma que pueden ser orientadas escogiendo una base ordenada para la álgebra de Lie de  $H$ .

Escogemos la base usual la cual es la imagen de  $E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n+m-1, n+m-1}$ , donde  $E_{i,j}$  son los elementos de matriz. Denotamos la orientación inducida de  $\pi$  por  $[\pi]$ .

Para cada  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n+m$ , hay mapeos naturales

$$\begin{array}{ccccc} G_{n-1}^m & \xleftarrow{\tilde{A}_k} & \tilde{G}_n^m & \xrightarrow{\tilde{B}_k} & \tilde{G}_n^{m-1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ C_{n-1}^m & \xleftarrow{\alpha_k} & C_n^m & \xrightarrow{\beta_k} & C_n^{m-1} \end{array}$$

Estos mapeos están definidos como sigue: Sea  $J_k : \mathbb{R}^{n+m-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  que manda  $(X_1, \dots, X_{n+m-1})$  a  $(X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_k, \dots, X_{n+m-1})$ . Sea  $P_{r_k} : \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m-1}$  que manda  $(X_1, \dots, X_{n+m})$  a  $(X_1, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{n+m})$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k(\xi) &= J_k^{-1}\xi \\ \tilde{B}_k(\xi) &= P_{r_k}\xi \end{aligned}$$

(donde las expresiones de la derecha definen planos en  $\mathbb{R}^{n+m-1}$ ).

Los mapeos  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son definidos por la conmutatividad requerida del diagrama. Esto tiene sentido porque  $\pi$  es suprayectivo y constante sobre las fibras de  $\pi \circ \tilde{A}_k$  o  $\pi \circ \tilde{B}_k$  como puede ser fácilmente verificado.

Si los espacios  $C_n^m$  son interpretados como configuraciones proyectivas de puntos, las interpretaciones correspondientes de  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  están dadas en la proposición ( 4.4.4).

Notemos que si  $n = 1$  entonces  $\tilde{A}_k$  y  $\alpha_k$  no están definidas; si  $m = 1$ ,  $\tilde{B}_k$  y  $\beta_k$  no están definidas.

### 4.3.2 Resultados Principales.

Consideremos una clase  $P$  de característica estable sobre haces vectoriales reales con valores en la  $l$ -ésima cohomología con coeficientes reales  $H^l(\cdot, \mathbb{R})$ . ( $P$  será un polinomio en las clases de Pontrjagin). En  $G_n^m$  hay una única forma diferencial cerrada  $SO(n+m, \mathbb{R})$ - invariante  $P_n^m$  que representa la clase de cohomología  $P(\xi)$  donde  $\xi$  es el haz tautológico sobre  $G_n^m$ . Denotamos la restricción de  $P_n^m$  a  $\tilde{G}_n^m$  otra vez con  $P_n^m$ .

**Definición 4.3.3.** El dialgoritmo generalizado forma  $\hat{P}_n^m$  está dado por  $\hat{P}_n^m = \pi_* P_n^m$ , donde  $\pi_*$  representa integración sobre la bibra con orientación de fibra  $[\pi]$ . La forma dilogaritmo generalizada  $\hat{P}_n^m$  es una  $(l - n - m + 1)$ -forma diferencial en  $C_n^m$ .

**Teorema 4.3.4 (La relación diferencial).** Si  $n > 1$  y  $m > 1$ ,

$$d\hat{P}_n^m = 2 \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \alpha_k^* \hat{P}_{n-1}^m - 2 \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \beta_k^* \hat{P}_n^{m-1}$$

El teorema será probado en la sección ( 4.4).

**Nota 4.3.5.** Si  $n = 1$  o  $m = 1$ , entonces  $\hat{P}_n^m$  es idénticamente cero porque el haz vectorial tautológico sobre  $G_1^m$  o  $G_n^1$  tiene clases características estables reales distintas de cero.

**Teorema 4.3.6 (Teorema de anulamiento).** [Gelfand, MacPherson] La forma de dilogaritmo generalizado  $\hat{P}_n^m$  se anula idénticamente si esta es una  $O$ -forma, es decir, si  $l = n+m-1$ .

Esto se sigue del siguiente teorema más fuerte que muestra que el integrando es cero en la integración sobre la fibra  $\pi_* P_n^m = \hat{P}_n^m$ .

**Teorema 4.3.7.** La restricción de  $P_n^m$  a cualquier  $H$ -órbita se anula idénticamente.

Esto será probado en ( 4.5.3).

### 4.3.3 Ecuaciones funcionales.

**Definición 4.3.8.** Llamamos a una forma de dilogaritmo generalizada  $\widehat{P}_n^m$  *principal* si  $\widehat{P}_{n+1}^m = 0$  y  $\widehat{P}_{n+1}^{m-1} = 0$  (para la misma clase característica  $P$ ) pero  $\widehat{P}_n^m$  no es idénticamente cero. Dualmente, llamamos  $\widehat{P}_n^m$  *coprincipal* si  $\widehat{P}_n^m = 0$  y  $\widehat{P}_{n-1}^{m+1} = 0$  pero  $\widehat{P}_n^m$  no es idénticamente cero.

Notemos que por ( 4.3.6) una forma de dilogaritmo generalizada tiene grado positivo. El siguiente resultado es un corolario inmediato de la relación diferencial ( 4.3.4).

#### Ecuación funcional.

Si  $\widehat{P}_n^m$  es principal, entonces

$$\sum_{k=1}^{n+m+1} (-1)^k \alpha_k^* \widehat{P}_n^m = 0$$

Dualmente, si  $\widehat{P}_n^m$  es coprincipal entonces

$$\sum_{k=1}^{n+m+1} (-1)^k \beta_k^* \widehat{P}_n^m = 0$$

Como las formas dilogaritmo generalizadas principales ( o coprincipales) son las que satisfacen una ecuación funcional interesante, es importante identificarlas. Esto no se puede en general, pero el teorema de anulamiento ( 4.3.6) garantiza un buen suplemento de éstas.

**Proposición 4.3.9.** Consideremos una clase característica estable  $P$  con valores en  $H^l(\cdot; \mathbb{R})$ . Si para algún par  $(n, m)$ ,  $\widehat{P}_n^m \neq 0$ , entonces existe un par  $(n, m)$  tal que  $\widehat{P}_n^m$  es principal y una par  $(n, m)$  tal que  $\widehat{P}_n^m$  es coprincipal.

( Hasta ahora como hemos visto, toda  $P \neq 0$  podría satisfacer la hipótesis de esta proposición. En cualquier caso, un abierto denso de  $P$  que satisface esto puede ser visto observando que  $\widehat{P}_n^m \neq 0$  cuando  $P_n^m$  es un múltiplo distinto de cero de la forma invariante de volumen sobre  $G_n^m$ .)

*Demostración.* En el  $n, m$  plano,  $\widehat{P}_n^m$  se anula si  $n+m = l+1$  por el teorema de anulamiento;  $\widehat{P}_n^m$  se anula si  $n = 1$  o si  $m = 1$  porque entonces  $C_n^m$  es un punto. Entonces  $\widehat{P}_n^m = 0$  a lo largo de la frontera de un triángulo. Comenzando en un punto  $(n, m)$  donde  $\widehat{P}_n^m \neq 0$ , en el interior del triángulo, construimos una trayectoria que pasa por los puntos donde  $\widehat{P}_n^m \neq 0$  tal que el

paso antes de  $(n, m)$  es  $(n, m + 1)$  o  $(n - 1, m + 1)$ . Un paso más lejos es imposible solamente cuando hemos alcanzado a un  $\widehat{P}_n^m$  principal; pero esto debe pasar porque correremos dentro de la frontera del triángulo.

Damiano probó que si  $P$  está en la  $i$ -ésima clase de Pontrjagin, entonces  $\widehat{P}_2^{2i}$  es principal.  $\square$

## 4.4 Simplejos Grassmanianos.

### 4.4.1 Hipersimplejos

**Definición 4.4.1.** El hipersimplejo  $\Delta_n^m$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  definido por las relaciones:

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_i \leq 1, \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n+m} t_i &= n, \end{aligned}$$

donde  $t_1, \dots, t_{n+m}$  son coordenadas en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

El hipersimplejo  $\Delta_n^m$  es un poliedro convexo de dimensión  $n + m - 1$  encajado en el espacio euclideo definido por  $t_1 + t_2 + \dots + t_{n+m} = n$ . Su frontera  $\partial\Delta_n^m$  es el subconjunto donde al menos una de las coordenadas  $t_i$  es 0 ó 1. Su interior denotado  $\Delta_n^m$ , es  $\Delta_n^m / \partial\Delta_n^m$ .

Para todos los enteros  $k$  tales que  $1 \leq i \leq n + m$ , hay mapeos naturales

$$\Delta_{n-1}^m \xleftrightarrow{a_k} \Delta_n^m \xleftrightarrow{b_k} \Delta_n^{m-1}$$

definidos por

$$\begin{aligned} a_k(t_1, \dots, t_{n+m-1}) &= (t_1, \dots, t_{k-1}, 1, t_k, \dots, t_{n+m-1}) \\ b_k(t_1, \dots, t_{n+m-1}) &= (t_1, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{n+m-1}) \end{aligned}$$

Las imágenes de estos mapeos son las caras de codimensión uno de  $\Delta_n^m$  como un poliedro; a menos que  $n = m = 1$ , tenemos

$$\partial\Delta_n^m = \bigcup_{k=1}^{n+m} \text{imagen}(a_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n+m} \text{imagen}(b_k).$$

Escogemos una orientación  $[\Delta_n^m]$  de  $\Delta_n^m$  dada por las coordenadas ordenadas  $(t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_{n+m} - t_{n+m-1})$ .  $[\Delta_n^m]$  puede ser interpretada como un generador en  $H_{n+m}(\Delta_n^m, \partial\Delta_n^m)$ . Así, tenemos la siguiente fórmula homológica de frontera.

**Proposición 4.4.2.** A menos que  $n = m = 1$ ,

$$\partial[\Delta_n^m] = \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k a_k \cdot [\Delta_n^m] - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k b_k \cdot [\Delta_n^{m-1}]$$

(donde si  $n = 1$  la primera suma es considerada cero y si  $m = 1$  la segunda suma es considerada cero).

Esta fórmula puede ser interpretada como calculando el morfismo conector para la tripleta  $(\Delta_n^m, \partial\Delta_n^m, C)$  donde  $c$  es la codimensión del 2-esqueleto de  $\Delta_n^m$ .

Notemos que la fórmula de (4.4.2) para  $\partial[\Delta_n^m]$  es similar a la fórmula de (4.3.4) para  $d\widehat{p}_n^m$ . Decimos que las  $\Delta_n^m$  son formalmente duales al  $\widehat{P}_n^m$ . De hecho el teorema (4.3.4) se sigue de la proposición (4.4.2) después de un encaje  $\Delta_n^m$  en  $G_n^m$  como un simplejo Grassmaniano.

#### 4.4.2 Configuraciones Projectivas.

Recordemos que por definición  $C_n^m = H \setminus \widetilde{G}_n^m$ , donde  $\widetilde{G}_n^m$  es la parte genérica de la Grassmaniana de  $n$ -planos en  $\mathbb{R}^{n+m}$  y  $H$  es el subgrupo de Cartán de  $PGL(n+m)$ , es decir, las matrices diagonales invertibles módulo múltiplos de la matriz identidad.

El espacio  $C_n^m$  es una variedad diferenciable porque  $H$  actúa libremente sobre  $\widetilde{G}_n^m$  por la proposición (4.3.1).

*Demostración.* De la proposición (4.3.1) Primero observemos que podemos pensar a  $G_n^m$  como las configuraciones de  $n+m$  vectores  $V_1, \dots, V_m$  en  $\mathbb{R}^m$  los cuales generan a  $\mathbb{R}^m$  como un espacio vectorial, módulo equivalencia por  $GL(m)$ . Para un punto dado en  $G_n^m$ , es decir, un subespacio  $\xi$  de dimensión  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$ , primero escogemos un epimorfismo de espacios vectoriales  $\varphi: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  con núcleo  $\xi$ . Entonces obtenemos una configuración con  $V_i = \varphi(e_i)$ , donde  $e_1, \dots, e_{n+m}$  es la base estándar de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Escogiendo otra  $\varphi$  cambiamos la configuración por un elemento de  $GL(m)$ .

Desde éste punto de vista,  $\widetilde{G}_n^m$  es el subconjunto de configuraciones definido por la condición de que para todos los subconjuntos  $S$  de  $m$  elementos de  $\{1, \dots, n+m\}$ , el conjunto  $\{V_i \mid i \in S\}$  forma una base de  $\mathbb{R}^m$ . La  $H$ -acción sobre  $G_n^m$  es expresada en la siguiente forma: el elemento diagonal de  $GL(n+m)$

$$h = \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{n+m} \end{bmatrix}$$



manda  $V_1, \dots, V_{n+m}$  a  $h_1 V_1, \dots, h_{n+m} V_{n+m}$ . Entonces si  $V_i \neq 0$  la acción de  $H$  manda  $V_i$  a la línea  $l_i$  que pasa por 0 y  $V_i$ .

Ahora, debemos probar que cualquier elemento diagonal  $h$  de  $GL(n+m)$  cuya acción sobre una configuración  $c$  en  $G_n^m$  hace pareja con un elemento  $\Psi$  de  $GL(m)$  debe ser un múltiplo de la identidad. Como  $n \geq 1$ , sabemos que  $c$  determina al menos  $m+1$  líneas  $l_i$  y como antes cualesquiera  $m$  de ellas generan  $\mathbb{R}^m$ . Como  $\Psi$  fija de estas líneas, su acción sobre la proyectivización  $\mathbb{R}P^{m-1}$  de  $\mathbb{R}P^m$  debe fijar los correspondientes  $m+1$  puntos, que están en posición general. Por lo tanto  $\Psi$  actúa trivialmente sobre  $\mathbb{R}P^{m-1}$ . Entonces  $\Psi$  debe ser un múltiplo  $k$  de la identidad. Como  $h_1 = h_2 = \dots = h_{n+m} = k$  entonces  $h$  es un múltiplo de la identidad.  $\square$

Sea  $C_1, \dots, C_{n+1}$  una configuración de  $n \times n$  puntos en el  $(m-1)$ -espacio proyectivo real; es decir,  $C_i \in \mathbb{R}P^{m-1}$  para cada  $i$ . La configuración es llamada *genérica* si para ningún subconjunto  $S$  de  $m$  elementos de  $\{1, 2, \dots, n+m\}$   $\{C_i \mid i \in S\}$  está en un subespacio proyectivo de dimensión  $m-2$ . El conjunto de configuraciones proyectivas forma una subvariedad abierta de  $(\mathbb{R}P^{m-1})^{n+m} = \mathbb{R}P^{m-1} \times \dots \times \mathbb{R}P^{m-1}$   $n+m$  veces. Dos dichas configuraciones proyectivas son equivalentes si existe un elemento que  $PGL(m)$  que manda uno al otro. El grupo  $PGL(m)$  actúa libremente sobre las configuraciones genéricas de  $n+m$  puntos porque un elemento de  $PGL(m)$  está determinado por su efecto sobre cualquiera  $m+1$  puntos independientes. Por lo tanto el espacio de clases de equivalencia de configuraciones genéricas de  $n+m$  puntos en  $\mathbb{R}P^{m-1}$  es una variedad diferenciable.

**Proposición 4.4.3.** El espacio  $C_n^m$  es naturalmente difeomorfo al espacio de clases de equivalencia de configuraciones genéricas de  $n+m$  puntos en  $\mathbb{R}P^{m-1}$ .

Esta proposición dice que la parte genérica de  $H \setminus G_n^m$  es naturalmente difeomorfa a la parte genérica de  $PGL(n+m) \setminus (\mathbb{R}P^{m-1})^{n+m}$ .

*Demostración.* Usaremos el modelo para  $G_n^m$  presentado en la prueba de (4.4.2). Consideremos el espacio  $S$  de las  $(n+m)$ -adas de líneas  $l_1, \dots, l_{n+m}$  que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^m$  tal que cualesquiera  $m$  de ellas generen  $\mathbb{R}^m$ . Afirmamos que  $GL(m) \setminus S = C_n^m$ . Dado un elemento de  $S$ , podemos elegir  $V_i$  como cualquier punto distinto de cero de  $l_i$  y cualesquiera dos de dichas elecciones están relacionadas por un elemento diagonal de  $GL(n+m)$ . Por otro lado, considerando cada línea  $l_i$  como punto en  $\mathbb{R}P^{m-1}$ , vemos que las clases de  $GL(m)$ -equivalencia en  $S$  son clases de  $PGL(m)$ -equivalencia de configuraciones geométricas de  $n+m$  puntos en  $\mathbb{R}P^{m-1}$ .  $\square$

**Nota 4.4.4.** Recordemos que en ( 4.3.1) las proyecciones  $\alpha_k : C_n^m \rightarrow C_{n-1}^{m-1}$  y  $\beta_k : C_n^m \rightarrow C_n^{m-1}$  fueron definidas pasando al espacio cociente de las proyecciones  $\tilde{A}_k : \tilde{G}_n^m \rightarrow \tilde{G}_{n-1}^{m-1}$  y  $\tilde{B}_k : \tilde{G}_n^m \rightarrow \tilde{G}_n^{m-1}$ , respectivamente.

**Proposición 4.4.5.** Interpretemos  $C_n^m$  como clases de equivalencia proyectivas de configuraciones genéricas de  $n + m$  puntos  $C_1, \dots, C_{n+m}$  en  $\mathbb{RP}^{m-1}$  como en ( 4.4.2).

Entonces

$$\alpha_i(C_1, \dots, C_{n+m}) = (C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_{n+m})$$

y

$$\beta_i(C_1, \dots, C_{n+m}) = (\varphi_k C_1, \dots, \varphi_k C_{k-1}, \varphi_k C_{k+1}, \dots, \varphi_k C_{n+m})$$

donde  $\varphi_k : \mathbb{RP}^{m-1} \setminus C_k \rightarrow \mathbb{RP}^{m-2}$  es cualquier identificación proyectiva de las líneas que pasan por  $C_k$  con  $\mathbb{RP}^{m-2}$ .

*Demostración.* Esta proposición resulta directa de la interpretación de  $\tilde{A}_k$  y  $\tilde{B}_k$  en el lenguaje de la prueba de ( 4.4.2)

$$\tilde{A}_k(V_1, \dots, V_{n+m}) = (V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_{n+m})$$

y

$$\tilde{B}_k(V_1, \dots, V_{n+m}) = (\varphi_k V_1, \dots, \varphi_k V_{k-1}, \varphi_k V_{k+1}, \dots, \varphi_k V_{n+m})$$

donde  $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m-1}$  es un epimorfismo lineal con  $V_k$  en su núcleo.  $\square$

**Definición 4.4.6.** El espacio de las configuraciones proyectivas aumentadas  $EC_n^m$ , es el espacio cociente  $H^0 \setminus \tilde{G}_n^m$ , donde  $H^0$  denota la componente conexa de la identidad de  $H$ .

Tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_n^m & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & EC_n^m \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho \\ & & C_n^m \end{array}$$

donde  $\rho$  es el cociente más lejano. El mapeo  $\rho$  es una proyección de un espacio cubriente de  $2^{n+m-1}$  hojas porque  $H = H^0 \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+m-1}$ .

Definimos los mapeos  $\bar{\alpha}_k$  y  $\bar{\beta}_k$  por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{G}_{n-1}^m & \xleftarrow{\tilde{A}_k} & \tilde{G}_n^m & \xrightarrow{\tilde{B}_k} & \tilde{G}_n^{m-1} \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \tilde{\pi} \\
 EC_{n-1}^m & \xleftarrow{\bar{\alpha}_k} & EC_n^m & \xrightarrow{\bar{\beta}_k} & EC_n^{m-1}
 \end{array}$$

Nota 4.4.7. Podemos interpretar a  $EC_n^m$  como las clases de equivalencia proyectiva de configuraciones genéricas de  $n + m$  puntos en  $\mathbb{R}P^{m-1}$  aumentado por un levantamiento de cada punto al espacio cubriente universal  $S^{m-1}$  de  $\mathbb{R}P^{m-1}$ . Dos de dichos levantamientos que difieren por una transformación cubriente de  $S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{m-1}$  son tomados como el mismo. Los mapeos  $\bar{\alpha}_k$  y  $\bar{\beta}_k$  tienen interpretaciones análogas a aquellas de  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  en (4.4.4).

### 4.4.3 Las cerraduras de $H^0$ -órbitas.

Recordemos que  $\tilde{\Delta}_n^m$  es el interior del hipersimplejo  $\tilde{\Delta}_n^m$ ; en coordenadas  $t_1, \dots, t_{n+m}$  es el conjunto

$$\begin{aligned}
 &0 < t_i < 1 \quad \forall i \\
 &\sum_{i=1}^{n+m} t_i = n
 \end{aligned}$$

El grupo  $H^0$  es la componente conexa de la identidad del subgrupo de Cartan  $H$  de  $PGL(n + m)$ , este tiene coordenadas  $h_1, \dots, h_{n+m}$ , las entradas de la matriz diagonal

$$h = \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{n+m} \end{bmatrix}$$

donde  $h_i > 0 \quad \forall i$  y  $h_1, \dots, h_{n+m}$  es equivalente a  $\lambda h_1, \dots, \lambda h_{n+m} \quad \forall \lambda > 0$ .

Definimos un mapeo  $\eta: \tilde{\Delta}_n^m \rightarrow H^0$  por las ecuaciones

$$h_i = \frac{t_i}{1 - t_i}.$$

**Proposición 4.4.8.**  $\eta$  es un difeomorfismo de  $\tilde{\Delta}_n^m$  en  $H^0$ .

*Demostración.* Definimos una función  $\lambda(h)$  implícitamente por la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{1}{\lambda(h) h_i + 1} = n$$

Esta definida en todas partes, es monovaluada y siempre es positiva porque para cada  $h$  la función de  $\lambda$ ,

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{1}{\lambda \cdot h_i + 1}$$

decrece estrictamente y monótonamente de  $n + m$  a 0 mientras  $\lambda$  va de 0 a  $\infty$ .

Ahora definimos  $\eta^{-1} : H^0 \rightarrow \tilde{\Delta}_n^m$  por

$$t_i = \frac{1}{\lambda(h) h_i + 1}.$$

La composición  $\eta^{-1} \circ \eta$  es la identidad por un cálculo directo, y  $\eta^{-1} \circ \eta$  es la identidad porque ésta multiplica todas las  $h_i$  por  $\lambda(h)$ .  $\square$

**Proposición 4.4.9.** El mapeo

$$\tilde{\Delta}_n^m \times \tilde{G}_n^m \rightarrow G_n^m,$$

que manda  $(t, \xi)$  a  $\eta(t) \cdot \xi$ , tiene una única extensión continua a un mapeo

$$\Delta_n^m \times \tilde{G}_n^m \rightarrow G_n^m.$$

(Denotamos la imagen de  $(t, \xi)$  bajo esta extensión con  $t \cdot \xi$ . Pensamos a  $\tilde{\Delta}_n^m$  "actuando" sobre  $\tilde{G}_n^m$  por una completación de la acción de  $H^0$ ).

*Demostración.* La unicidad es obvia porque  $\tilde{\Delta}_n^m$  es denso en  $\Delta_n^m$ . Para probar existencia, escribimos una fórmula para  $t \cdot \xi$  en términos de coordenadas de Plücker. Sea  $S \subset \{1, \dots, n+m\}$  un subconjunto con  $n$  elementos y sea  $\xi \in G_n^m$ . Entonces  $P(S, \xi)$  denotará la coordenada de Plücker del punto  $\xi$  correspondiente al subconjunto  $S$  de vectores base  $e_1, \dots, e_{n+m}$  en  $\mathbb{R}^{n+m}$ . La acción de  $H^0$  sobre  $G_n^m$  puede ser escrita como sigue

$$P(S, h(\xi)) = (\pi_{i \in S} h_i) P(S, \xi).$$

Ahora si  $t = (t_1, \dots, t_{n+m}) \in \tilde{\Delta}_n^m$ , tenemos

$$P(S, \eta(t) \xi) = \left( \pi_{i \in S} \frac{t_i}{1 - t_i} \right) P(S, \xi).$$

Como las  $P(S, \eta)$  son coordenadas homogéneas, podemos multiplicar la expresión de la derecha por el número

$$\pi_{i=1}^{n+m} 1 - t_i$$

y obtenemos

$$P(S, \eta(t)\xi) = (\pi_{i \in S t_i}) (\pi_{i \notin S 1 - t_i}) P(S, \xi) .$$

Esta última expresión claramente se extiende continuamente a todo  $\Delta_n^m$  (entonces da una fórmula de  $t \cdot \xi$ ). □

Nos gustaría expresar la compatibilidad de las acciones  $t \cdot \xi$  para las diferentes  $G_n^m$ .

**Definición 4.4.10.** Para toda  $k \in \{1, \dots, n + m\}$ , los mapas  $A_k$  y  $B_k$

$$G_{n-1}^m \xrightarrow{A_k} G_n^m \xleftarrow{B_k} G_n^{m-1}$$

son definidos como sigue: Si  $\xi$  es un plano de  $G_{n-1}^m$ , entonces  $A_k(\xi)$  es la imagen inversa de  $\xi$  por el mapeo  $P_{r_k} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m-1}$  que manda  $(X_1, \dots, X_{n+m})$  a  $(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{n+m})$ . Si  $\xi$  es un plano de  $G_n^{m-1}$ , entonces  $B_k(\xi)$  es la imagen de  $\xi$  por el mapeo  $J_k : \mathbb{R}^{n+m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  que manda  $(X_1, \dots, X_{n+m-1})$  a  $(X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_{n+m-1})$ .

**Proposición 4.4.11.** Si  $t \in \Delta_{n-1}^m$  y  $\xi \in \tilde{G}_n^m$  entonces  $(a_k t) \cdot \xi = A_k(t \cdot \tilde{A}_k \xi)$ . Si  $t \in \Delta_n^{m-1}$  y  $\xi \in G_n^m$  entonces  $(b_k t) \cdot \xi = B_k(t \cdot \tilde{B}_k \xi)$ .

*Demostración.* La igualdad se sigue de calcular las coordenadas de Plücker de ambos lados usando la fórmula de la prueba (4.4.9) para  $t \cdot \xi$ . □

**Teorema 4.4.12.** Supongamos que  $\xi \in \tilde{G}_n^m$ . Entonces la inclusión

$$\begin{aligned} j(\xi) & : \Delta_n^m \subset G_n^m , \\ t & \mapsto t \cdot \xi , \end{aligned}$$

es un homeomorfismo del hipersimplejo  $\Delta_n^m$  con la cerradura de la  $H^0$ -órbita de  $\xi$ . El mapeo  $j(\xi)$  manda el interior de  $\Delta_n^m$  de  $\Delta_n^m$  difeomorfamente en la órbita de  $\xi$  y manda interiores de caras ( de varias dimensiones) de  $\Delta_n^m$  difeomorfamente a otras órbitas.

Las caras de  $\Delta_n^m$  son mapeadas en subvariedades Grassmanianas. por ejemplo, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{n-1}^m & \xrightarrow{a_i} & \Delta_n^m & \xleftarrow{b_i} & \Delta_n^{m-1} \\ \downarrow j(A, \xi) & & \downarrow j(\xi) & & \downarrow j(B, \xi) \\ G_{n-1}^m & \xrightarrow{A_i} & G_n^m & \xleftarrow{B_i} & G_n^{m-1} \end{array}$$

**Definición 4.4.13.** La imagen de  $j(\xi)$  es llamada un simplejo Grassmaniano.

*Demostración.* Del teorema.

1. El mapeo  $j(\xi)$  da un difeomorfismo de  $\tilde{\Delta}_n^m$  a la  $H^0$ -órbita que pasa  $\xi$  por las Proposiciones ( 4.3.1) y ( 4.4.8).
2. El diagrama conmutativo se sigue de la proposición ( 4.4.11)
3. Esto permite probar que  $j(\xi)$  manda a interiores de caras de codimensión uno difeomorfamente es órbitas aplicando (1) a variedades Grassmanianas de menor dimensión.
4. Iterando pasos (2) (para diagramas conmutativos similares en menor dimensión) y (3) probamos que los interiores de todas las caras excepto los vértices son mapeados difeomorfamente en órbitas.
5. Podríamos verificar directamente que las órbitas mapeadas a interiores diferentes de caras son diferentes y que los vértices son mapeados a hiperplanos coordinados diferentes ( los cuales son puntos fijos de las  $H^0$ -acciones). Entonces  $j(\xi)$  es una inyección.
6. El mapeo es continuo por la proposición ( 4.4.9). Como  $\Delta_n^m$  es compacto, el mapeo es un homeomorfismo sobre la cerradura de la órbita por  $\xi$ .

□

**Nota 4.4.14.** Se sigue del teorema ( 4.4.12) que existe una  $H^0$ -acción natural sobre  $\Delta_n^m$ . Esta es determinada por continuidad por la  $H^0$  acción sobre  $\Delta_n^m$  dada por  $h \cdot t = \eta^{-1}(h \cdot \eta(t))$ . Los conjuntos cerrados invariantes son las uniones de las caras de  $\Delta_n^m$ .

### Prueba de la relación diferencial.

Situémonos en la situación de la sección ( 4.3.2): Hemos fijado una clase característica  $P$  y por lo tanto formas diferenciales  $P_n^m$  sobre cada  $G_n^m$  y formas diferenciales  $\hat{P}_n^m$  sobre cada  $C_n^m$ .

Probaremos el teorema ( 4.3.4) relacionando las formas  $\hat{P}_n^m$ .

Es más conveniente trabajar sobre el espacio de configuraciones proyectivas levantadas  $EC_n^m$  que sobre  $C_n^m$ . Recordemos de ( 4.4.6) el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_n^m & \xrightarrow{\pi} & EC_n^m \\ & \searrow \pi & \downarrow \rho \\ & & C_n^m \end{array}$$

Definimos a  $\overline{P}_n^m$  como  $\overline{\pi}_* P_n^m$ , donde  $\overline{\pi}_*$  es calculada con respecto a la orientación  $[\overline{\pi}_*]$ , que es la restricción de  $[\pi]$  de ( 4.3.1).

**Lema 4.4.15.** . El teorema ( 4.3.1) es equivalente a la fórmula

$$d\overline{P}_n^m = \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \overline{\alpha}_k^* \overline{P}_{n-1}^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \overline{\beta}_k^* \overline{P}_n^m$$

para  $n > 1$  y  $m > 1$ .

*Demostración.* Afirmamos que

$$\overline{P}_n^m = \frac{1}{2}^{n+m-1} \rho^* \widehat{P}_n^m .$$

Este hecho y la conmutatividad del siguiente diagrama implica que la fórmula del lema es  $\rho^*$  de la fórmula del teorema ( 4.3.4).

$$\begin{array}{ccccc} EC_{n-1}^m & \xleftarrow{\overline{\alpha}_k} & EC_n^m & \xrightarrow{\overline{\beta}_k} & EC_n^{m-1} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ C_{n-1}^m & \xleftarrow{\alpha_k} & C_n^m & \xrightarrow{\beta_k} & C_n^{m-1} \end{array}$$

Pero  $\rho^*$  es una inyección porque  $\rho$  es un mapeo \* cubriente. Así. el lema es consecuencia directa de esto.

Para demostrar la afirmación veamos lo siguiente. La forma  $\omega = \rho^* \widehat{P}_n^m$  es caracterizada por las dos siguientes propiedades:

1.  $\rho_* \omega = 2^{n+m-1} \widehat{P}_n^m$
2. Sea  $U$  cualquier abierto conexo en  $C_n^m$  tal que  $\pi^{-1}U$  se divide en una unión disjunta  $U_1 \cup U_2 \cup \dots$  de copias de  $U$ . Para cada  $i$  y  $j$ , si  $\varphi : U_i \rightarrow U_j$  es el difeomorfismo que satisface  $\rho \cdot \varphi = \rho$  en  $U_i$ , entonces  $\rho^*$  manda  $\omega|U_j$  a  $\omega|U_{ij}$ .

La forma  $2^{n+m-1}\bar{P}_n^m$  satisface (1) porque  $\rho_*\bar{P}_n^m = \rho_*\bar{\pi}_*P_n^m = (\rho \circ \bar{\pi})_*P_n^m = \pi_*P_n^m = \bar{P}_n^m$ . Para mostrar que satisface (2), escribimos  $H = H^0 \oplus F$ , donde  $F$  es la imagen en  $PGL(n+m)$  de las matrices diagonales cuyas entradas son todas  $\pm 1$ .

Dadas  $i$  y  $j$  existe un elemento  $f \in F$  que manda  $\bar{\pi}^{-1}U_i$  difeomorfamente a  $\pi^{-1}U_j$ .

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}U_i & \xrightarrow{f} & \pi^{-1}U_j \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ U_i & \xrightarrow{\phi} & U_j \end{array}$$

El mapeo  $f$  preserva la orientación  $[\bar{\pi}]$  porque  $H$  es abeliano, entonces  $\bar{\pi}_* \circ f_* = \phi_* \circ \bar{\pi}_*$ . Y  $f^*$  manda  $P_n^m|_{\pi^{-1}U_j}$  a  $P_n^m|_{\pi^{-1}U_i}$  porque  $f$  es una matriz ortogonal y  $P_n^m$  es invariante bajo  $O(n+m)$ .

(La  $O(n+m)$ -invarianza de  $P_n^m$ , la cual por construcción sólo se requiere que sea  $SO(n+m)$ -invariante, sera probada en la sección (4.5) corolario (4.5.9)). Entonces

$$\begin{aligned} \bar{P}_n^m|_{U_i} &= \bar{\pi}_*P_n^m|_{\bar{\pi}^{-1}U_i} = \bar{\pi}_*f^*P_n^m|_{\bar{\pi}^{-1}U_j} \\ &= \phi_*\bar{\pi}_*P_n^m|_{\bar{\pi}^{-1}U_j} = \phi_*\bar{P}_n^m|_{U_j}. \end{aligned}$$

Escojamos una sección suave  $s$  del haz de fibras  $G_n^m$  sobre  $EC_n^m$ .

$$\begin{array}{c} G_n^m \\ \bar{\pi} \left( \downarrow \right) s \\ EC_n^m \end{array}$$

Esto se puede hacer porque las fibras de  $\bar{\pi}$  son contractibles. (De hecho las fibras son  $H^0$ -órbitas,  $H^0$  actúa libremente por la proposición (4.3.1) y  $H^0$  es contractible).

Usando la sección  $s$ , definimos un mapeo

$$r : \Delta_n^m \times EC_n^m \rightarrow G_n^m$$

tal que

$$r(t, c) = t \cdot s(c) \quad ,$$

donde  $t \cdot s(c)$  es explicado en (4.4.9). □

**Lema 4.4.16.** El mapeo  $r$  manda  $\tilde{\Delta}_n^m \times EC_n^m \subset \Delta \times EC_n^m$  difeomorfamente a  $\tilde{G}_n^m$ .

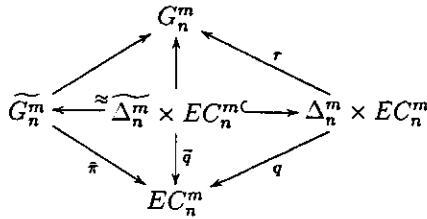
Esto es consecuencia directa de la proposición (4.4.8).



Lema 4.4.17. Sea  $q : \Delta_n^m \times EC_n^m \rightarrow EC_n^m$  la proyección en el segundo factor entonces

$$\overline{P}_n^m = q_* r^* P_n^m .$$

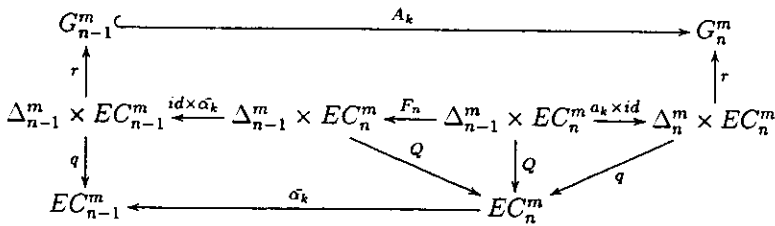
*Demostración.* El siguiente diagrama conmuta



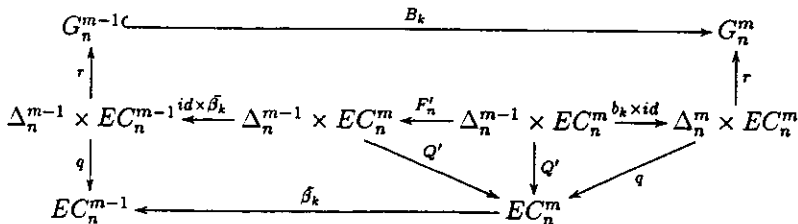
Por lo tanto  $\overline{P}_n^m$  es  $\tilde{q}_* r^* P_n^m$ . Pero  $\Delta_n^m \setminus \widetilde{\Delta}_n^m$  es de medida cero para la integración sobre la fibra  $q_*$  entonces  $\tilde{q}_*$  y  $q_*$  son la misma. □

Lema 4.4.18. Sea  $Q : \Delta_{n-1}^m \times EC_n^m \rightarrow EC_n^m$  la proyección al segundo factor y sea  $Q' : \Delta_{n-1}^{m-1} \times EC_n^m \rightarrow EC_n^m$  también la proyección al segundo factor.

Para cada  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n + m$ , existe un automorfismo  $F_k : \Delta_{n-1}^m \times EC_n^m \rightarrow EC_n^m$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:



Similarmente para cada  $k$  existe un  $F'_k$  tal que el siguiente diagrama conmuta:



*Demostración.* El siguiente diagrama no conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_n^m & \xrightarrow{\tilde{A}_k} & \tilde{G}_{n-1}^m \\ \uparrow s & & \uparrow s \\ EC_n^m & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_k} & EC_{n-1}^m \end{array}$$

(de hecho es imposible escoger las secciones  $s$  tal que conmute para toda  $k$ - un hecho de algún significado teórico para fórmulas combinatorias para clases de Pontrjagin, véase [ref, última pag. p 16]). Sin embargo, para algún mapeo  $\tilde{s}_k : EC_n^m \rightarrow \tilde{\Delta}_{n-1}^m$  tenemos  $s\tilde{\alpha}_k(c) = \tilde{s}_k(c) \cdot \tilde{A}_k s(c)$ . Sea  $F_k(t, c)$  la pareja  $(\tilde{s}_k(c)^t, c)$ , donde la acción de  $\tilde{\Delta}_{n-1}^m$  en  $\tilde{\Delta}_{n-1}^m$  es obtenida de la acción de  $\Delta_{n-1}^m$  sobre  $G_{n-1}^m$  vía el encaje del teorema (4.4.12). Entonces la conmutatividad del primer diagrama es consecuencia de la proposición (4.4.11). Observaciones similares se aplican al segundo diagrama.  $\square$

*Demostración.* De la relación diferencial, Teorema (4.3.4). Tenemos que:

$$\begin{aligned} dP_n^m &= d(q_* r^* P_n^m) \quad \text{por lema (4.4.17)} \\ &= q_* dr^* P_n^m + (q|\partial\Delta_n^m \times EC_n^m)_* r^* P_n^m \quad \text{por Teorema de Stokes} \\ &= (q|\partial\Delta_n^m \times EC_n^m)_* r^* P_n^m \quad \text{porque } P_n^m \text{ es cerrado} \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q_* (a_k \times id \cdot r)^* P_n^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q'_* (b_k \times id \cdot r)^* P_n^m \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q_* (id \times \bar{\alpha}_k \circ r \circ A_k)^* P_n^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q'_* (id \times \bar{\beta}_k \circ r \circ B_k)^* P_n^m \\ &\quad \text{por lema (4.4.18)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q_* (id \times \bar{\alpha}_k \circ r)^* P_{n-1}^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k Q'_* (id \times \bar{\beta}_k \circ r)^* P_n^{m-1} \\ &\quad \text{por estabilidad y naturalidad de } P \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \bar{\alpha}_k^* q_* r^* P_{n-1}^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \bar{\beta}_k^* q_* r^* P_n^{m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \bar{\alpha}_k^* \bar{P}_{n-1}^m - \sum_{k=1}^{n+m} (-1)^k \bar{\beta}_k^* P_n^{m-1} \end{aligned}$$

$\square$

## 4.5 Formas diferenciales invariantes sobre variedades Grassmanianas

### 4.5.1 Homología de Variedades Grassmanianas

En esta sección recordaremos algunos hechos bien conocidos acerca de variedades Grassmanianas  $G_n^m$ .

Para cualquier  $\xi \in G_n^m$ , denotamos por  $SO(n+m)$ , al subgrupo de isotropía de  $\xi$ , es decir, el subgrupo de  $SO(n+m)$  que consiste de los elementos que estabilizan a  $\xi$ . Si  $\theta \in SO(n+m)$ , entonces  $d\theta$  mapea  $T_\xi G_n^m$  (el espacio tangente a  $G_n^m$  en  $\xi$ ) en sí mismo; esto da una acción natural de  $SO(n+m)_\xi$  sobre  $T_\xi G_n^m$ .

**Proposición 4.5.1.** Para toda  $n, m, l$  los siguientes tres espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  son canónicamente isomorfos:

1. El  $l$ -ésimo grupo de cohomología de  $G_n^m$  con coeficientes reales,  $H^l(G_n^m, \mathbb{R})$ .
2. El espacio de  $l$ -formas diferenciales en  $G_n^m$  que son invariantes bajo la acción de  $SO(n+m)$ .
3. Para cualquier  $\xi \in G_n^m$ , las funciones alternantes  $l$ -lineales sobre  $T_\xi G_n^m$  que son invariantes bajo  $SO(n+m)_\xi$ .

Los mapeos que inducen estos isomorfismos son como sigue: El mapeo de (2) a (1) mandan una  $i$ -forma a su clase de cohomología de Rham. El mapeo de (2) a (3) está dado por la restricción de una  $i$ -forma de  $T_\xi G_n^m$ . Su inverso está dado por el siguiente procedimiento:

Dada una función alternante  $\varphi$   $l$ -lineal sobre  $T_\xi(G_n^m)$ , para evaluar la correspondiente forma en  $T_{\xi'}(G_n^m)$  aplicamos  $d\theta$  donde  $\theta \in SO(n+m)$  es cualquier elemento que mapea  $\xi'$  a  $\xi$ . El resultado es independiente de la elección de  $\theta$  por la  $SO(n+m)_\xi$ -invarianza de  $\varphi$ .

Para ver el isomorfismo de (1) a (2), ponemos una métrica riemanniana  $SO(n+m)$ -invariante sobre  $G_n^m$ . Esto puede ser hecho porque  $SO(n+m)$  es compacto. La  $SO(n+m)$ -invarianza de una  $i$ -forma será entonces equivalente a la invarianza bajo la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías riemannianas de  $G_n^m$ . Pero  $H^l(M, \mathbb{R})$  es el espacio de formas armónicas y  $G_n^m$  es compacto y es el espacio de formas invariantes y  $G_n^m$  es espacio simétrico.

Construcciones similares a estas dan isomorfos canónicos entre

1. Un cierto subgrupo de  $H^1(G_n^m; \mathbb{R})$ ,
2. El espacio de  $l$ -formas diferenciales sobre  $G_n^m$  que son invariantes bajo la acción de  $O(n+m)$ ;
3. Para cualquier  $\xi \in G_n^m$ , las funciones alternantes  $l$ -lineales sobre  $T_\xi G_n^m$  que son invariantes bajo  $O(n+m)_\xi$ .

**Nota 4.5.2.** No todas las  $l$ -formas  $SO(n+m)$ -invariantes son  $O(n+m)$ -invariantes, por ejemplo, las 1-formas  $SO(2)$ -invariantes sobre  $G_1^1$ .

Para cualquier  $\xi \in G_n^m$ , sea  $\xi^\perp$  el complemento ortogonal de  $\xi$  (considerado como un subespacio de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ). Entonces  $\mathbb{R}^{n+m}$  se identifica con  $\{\oplus\}^\perp$ .

Ahora definimos a las *coordenadas gráficas* centradas en  $\xi$ :

$$\text{graph}_\xi : \text{Hom}(\xi, \xi^\perp) \rightarrow G_n^m$$

como el mapeo que lleva un homomorfismo lineal  $L : \xi \rightarrow \xi^\perp$  a su gráfica  $\{(\varepsilon, L(\varepsilon))\}$  en  $\{\oplus\}^\perp = \mathbb{R}^{n+m}$ . éste es un difeomorfismo en una vecindad de  $\xi$ .

La diferencial  $d(\text{graph}_\xi)$  mapea  $T \circ \text{Hom}(\xi, \xi^\perp)$  a  $T_\xi G_n^m$ . Como  $\text{Hom}(\xi, \xi^\perp)$  es un espacio vectorial, podemos identificar  $T \circ \text{Hom}(\xi, \xi^\perp)$  con  $\text{Hom}(\xi, \xi^\perp)$  para obtener un isomorfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} & T_0 \text{Hom}(\xi, \xi^\perp) & \\ \swarrow \approx & & \searrow d(\text{graph}) \\ \text{Hom}(\xi, \xi^\perp) & \xrightarrow{\approx} & T_\xi G_n^m \end{array}$$

El subgrupo de isotropía  $O(n+m)_\xi$  es justamente el grupo de transformaciones ortogonales de  $\mathbb{R}^{n+m}$  que fijan a  $\xi \subset \mathbb{R}^{n+m}$  como un conjunto y por lo tanto fijan a  $\xi^\perp$ . Cualquier  $\bar{\theta} \in O(n+m)_\xi$  debe restringirse a mapeos lineales  $\theta : \xi \rightarrow \xi$  y  $\bar{\theta} : \xi^\perp \rightarrow \xi^\perp$ ,  $\theta, \bar{\theta}$  deben preservar las restricciones del producto interior sobre  $\mathbb{R}^{n+m}$  a  $\xi$  y  $\xi^\perp$ . Cualquiera de dichas parejas  $(\theta, \bar{\theta})$  da un elemento de  $O(n+m)$ .

**Proposición 4.5.3.** Escogiendo bases ortogonales en  $\xi$  y en  $\xi^\perp$ , la construcción anterior da un isomorfismo entre  $T_\xi G_n^m$  y matrices  $M \ n \times m$ , entre  $O(n+m)_\xi$  y  $\partial(n) \times O(m)$ , y entre la acción de  $O(n+m)_\xi$  sobre  $T_\xi G_n^m$  y la acción

$$(\theta, \bar{\theta}) : M \rightarrow \bar{\theta} \circ M \circ (\theta^{-1}).$$

Resumiendo tenemos el siguiente resultado. Para dar una  $l$ -forma diferencial  $O(n+m)$ -invariante sobre  $G_n^m$  es suficiente dar una función alternante  $i$ -lineal

$$\varphi({}^1M, {}^2M, \dots, {}^lM),$$

donde las  ${}^kM$  matrices  ${}^kM_i^j, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ , tal que

$$\varphi({}^1\bar{M}, {}^2\bar{M}, \dots, {}^l\bar{M}) = \varphi({}^1M, {}^2M, \dots, {}^lM)$$

siempre que  ${}^k\bar{M}_i^j = {}^kM_p^j \bar{\theta}_{p,i}$  para una matriz  $\bar{\theta} \ n \times n$  ortogonal ó siempre que  ${}^k\bar{M}_i^j = {}^kM_i^p \bar{\theta}_{p,j}$  para una matriz  $\bar{\theta} \ m \times m$  ortogonal.

De hecho, por (4.5.1) el resultado será independiente de la elección de las coordenadas ortogonales en  $\xi$  y en  $\xi^\perp$ .

### 4.5.2 El caracter de Pontrjagin

En esta sección construiremos una expresión particularmente simétrica para la forma diferencial  $SO(n+m)$ -invariante sobre  $G_n^m$  que representa al caracter de Pontrjagin de un haz tautológico sobre  $G_n^m$ .

Siguiendo a (4.5.3), definimos

$$Ph_1({}^1M, {}^2M, {}^3M, {}^4M) = ALT \ {}^1M_{i(1)}^{j(1)} \ {}^2M_{i(1)}^{j(2)} \ {}^3M_{i(2)}^{j(2)} \ {}^4M_{i(2)}^{j(1)}$$

$$Ph_i({}^1M, \dots, {}^lM) = ALT \ {}^1M_{i(1)}^{j(1)} \ {}^2M_{i(1)}^{j(2)} \ {}^3M_{i(2)}^{j(2)} \ \dots \ {}^{4l-1}M_{i(2l)}^{j(2l)} \ {}^{4l}M_{i(2l)}^{j(1)}$$

donde los símbolos  $i(1), i(2), \dots, j(1), \dots$  son índices separados y la convención de "índices repetidos=suma" es usada.

$ALT$  significa suma alternada:

$$ALT_\Psi({}^1M, \dots, {}^qM) = \sum_{\sigma} (-1)^{sign\sigma} \Psi(\sigma^{(1)}M, \dots, \sigma^{(q)}M)$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones  $\sigma$  de  $\{1, \dots, q\}$ . (Notemos que no dividimos por  $q!$  como es usual, en la definición de  $ALT$ ).

**Proposición 4.5.4.**  $Ph_i$  satisface la condición (4.5.1) y entonces define una  $4l$ -forma  $O(n+m)$ -invariante sobre  $G_n^m$  (que también denotaremos con  $Ph_i$ ).

*Demostración.* Si  $\theta$  es una matriz ortogonal  $n \times n$  entonces  $\left( {}^1M_{p(1)}^{j(1)} \theta_{p(1),i(1)}^2 \dots {}^1M_{q(1)}^{j(2)} \theta_{q(1),i(1)} \right) \dots \left( {}^{4l-1}M_{p(2l)}^{j(2l)} \theta_{p(2l),i(2l)} \dots {}^{4l}M_{q(2l)}^{j(1)} \theta_{q(2l),i(2l)} \right) = \left( {}^1M_{i(1)}^{j(1)} \dots {}^2M_{i(1)}^{j(2)} \right) \dots \left( {}^{4l-1}M_{i(2l)}^{j(2l)} \dots {}^{4l}M_{i(2l)}^{j(1)} \right)$  porque  $\theta$  preserva productos interiores. Una manipulación similar se aplica a una matriz  $m \times m$  ortogonal  $\bar{\theta}$ .

Ahora comenzamos a identificar  $Ph_l$  aplicando la descripción estándar de la cohomología de  $G_n^m$  en términos de clases características del haz tautológico. □

**Lema 4.5.5.**  $Ph_l$  corresponde (por (4.5.1)) a una clase característica estable en  $H^{4l}(G_n^m, \mathbb{R})$  del haz tautológico sobre  $G_n^m$  (que no depende de  $n$  o  $m$ ).

Esto resulta de aplicar el siguiente hecho. En el diagrama (ver (4.4.11))

$$H^{4l}(G_{n-1}^m) \xleftarrow{A_i^*} H^{4l}(G_n^m) \xrightarrow{B_i^*} H^{4l}(G_n^{m-1})$$

$A_i^*$  mapea  $Ph_l$  para  $G_n^m$  a  $Ph_l$  para  $G_{n-1}^m$  y  $B_i^*$  mapea  $Ph_l$  para  $G_n^m$  a  $Ph_l$  para  $G_n^{m-1}$ .

*Demostración.* Por la propiedad de invarianza de  $Ph_l$  (4.5.4), podemos verificar este hecho usando una elección especial de bases en  $\{y\}^\perp$ . Con las elecciones apropiadas, necesitamos verificar que  $Ph_l({}^1M, \dots, {}^{4l}M)$  no es cambiada si una línea final de ceros o una columna final de ceros es añadida a cada matriz  ${}^kM$ . □

**Lema 4.5.6.** La clase característica  $\widetilde{Ph}_l$  correspondiente a  $Ph_l$  es aditiva; es decir,  $\widetilde{Ph}_l(\xi \oplus \xi') = \widetilde{Ph}_l(\xi) + \widetilde{Ph}_l(\xi')$ .

Esto resulta del siguiente hecho:

Sea  $\varphi : G_n^m \times G_{n'}^{m'} \rightarrow G_{n+n'}^{m+m'}$  el mapeo que manda  $(\xi, \xi')$ . Entonces  $\varphi^*$  manda  $Ph_l$  para  $G_{n+n'}^{m+m'}$  a la suma de  $Ph_l$  para  $G_n^m$  y de  $Ph_l$  para  $G_{n'}^{m'}$  (jalado por las proyecciones apropiadas).

*Demostración.* Escogiendo bases apropiadas, tenemos ahora que

$$Ph_l({}^1M + {}^1\bar{M}, \dots, {}^{4l}M + {}^{4l}\bar{M}) = Ph_l({}^1M, \dots, {}^{4l}M) + Ph_l({}^1\bar{M}, \dots, {}^{4l}\bar{M})$$

donde  $M + \bar{M}$  es definida como la matriz

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix}.$$

Esto puede ser verificado observando que cualquier término en la expresión para  $Ph_l ({}^1M + {}^1\overline{M}, \dots, {}^lM + {}^l\overline{M})$  es cero a menos que éste sea un término en la expresión para  $Ph ({}^1M + 0, \dots, {}^lM + 0)$  o un término en la expresión para  $Ph (0 + {}^1\overline{M}, \dots, 0 + {}^l\overline{M})$ .  $\square$

**Lema 4.5.7.**  $Ph_l$  es distinto de cero. De hecho,  $Ph_l$  es un múltiplo distinto de cero de la forma de volumen en  $G_2^{2l}$ .

Las únicas clases características aditivas estables con valores en  $H^{4l}(\mathbb{R})$  son múltiplos de la parte de grado  $4l$  del caracter de Pontrjagin ( por el principio de división). Por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.8.** Existen coeficientes  $C_1, C_2,$ tales que el caracter de Pontrjagin es

$$C_1Ph_1 + C_2Ph_2 + \dots$$

(sería interesante evaluar la  $C_i$ .)

**Corolario 4.5.9.** Todas las formas diferenciales invariantes sobre  $G_n^m$  cuya clase de homología es una clase característica estable del haz tautológico son polinomios (con producto  $\wedge$ ) en las formas  $Ph_i$ . En particular estos son todos  $O(n+m)$ -invariantes.

*Demostración.* Cualquier clase característica estable con valores en cohomología reales es un polinomio en los términos de grado puro del caracter de Pontrjagin. Entonces un representante de éste  $SO(n+m)$ -invariante, está dado por el mismo polinomio en  $C_iPh_i$ . Pero hay un único representante  $SO(n+m)$ -invariante de éste.  $\square$

### 4.5.3 Demostración del Teorema de Anulación.

Primero resolveremos el siguiente problema en la geometría elemental: Sea  $u \in \mathbb{R}^{n+m}$  un vector unitario y sea  $\mathcal{L}_u^t = \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  una extensión sobre  $u$  por un factor de  $e^t$  (para una  $t$  pequeña).

Esto es,  $\mathcal{L}_u^t$  fija puntualmente a  $u^\perp$ , fija líneas paralelas a  $u$  como conjuntos, y multiplica distancias en estas líneas por  $e^t$ .

Supongámos que tenemos una descomposición ortogonal de  $\mathbb{R}^{n+m} = \{\oplus\}^\perp$ . Entonces, ¿ De qué función lineal  $L^t : \xi \rightarrow \xi$ ,  $\mathcal{L}_u^t$  es su gráfica aplicada a  $\xi$ ? El dibujo es el siguiente: (figura (4.9))

La fórmula para  $\mathcal{L}_u^t(\varepsilon)$  es  $\varepsilon + (e^t - 1)(\varepsilon \cdot u)u$ . Para encontrar la  $y$  tal que  $\mathcal{L}_u^t(y) = \varepsilon + L^t(\varepsilon)$  necesitamos resolver  $Pr_\xi \mathcal{L}_u^t y = \varepsilon$ , donde  $Pr_\xi$  es la proyección ortogonal sobre  $\xi$ . Supongámos

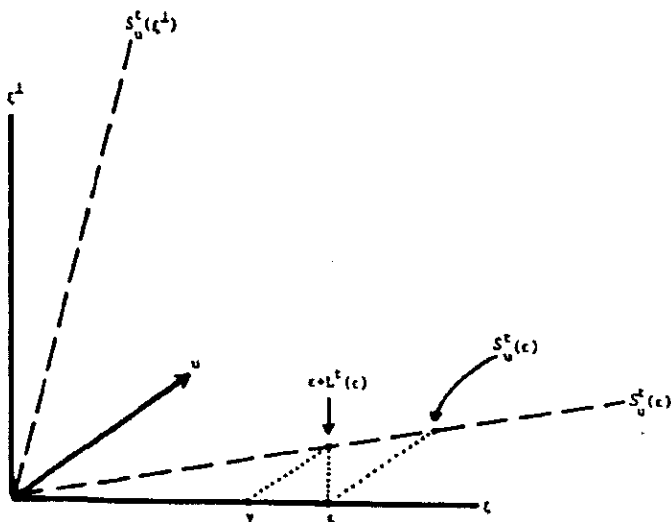


Figura 4.9:

que  $u = v + w$ , donde  $v \in \xi$  y  $w \in \xi^\perp$ . Entonces la fórmula para  $Pr_\xi \mathcal{L}_u^t y$  es  $y + (e^t - 1)(y \cdot v)v$  si  $y \in \xi$ .

Podemos resolverla y obtener

$$y = \varepsilon + \frac{1 - e^t}{(e^t - 1)v \cdot v + 1} (\varepsilon \cdot v)v$$

como podemos verificar por un cálculo directo.

Por lo tanto

$$L^t(\varepsilon) = \mathcal{L}_u^t y - \varepsilon = (e^t - 1) \left( \left[ \varepsilon + \frac{1 - e^t}{(e^t - 1)(v \cdot v) + 1} (\varepsilon \cdot v)v \right] \right) \cdot vw$$

La derivada de esta última expresión en  $t = 0$  es  $\frac{d}{dt} L^t(\varepsilon) |_{t=0} = (\varepsilon \cdot v)w$

$$\frac{d}{dt} L^t(\varepsilon) |_{t=0} = (\varepsilon \cdot v)w$$

Queremos identificar el espacio tangente a la  $H$ -órbita  $H\xi$  en  $\xi \in G_n^m$  como un subespacio de  $T_\xi G_n^m$  usando el modelo para  $T_\xi G_n^m$  como las matrices  $n \times m$  dadas en (4.5.3).



Sean  $e_1, e_2, \dots, e_{n+m}$  la base estándar para  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Sean  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  una base ortonormal para  $\xi$ , y sean  $\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n$  una base ortonormal para  $\xi^\perp$ . Definimos  ${}^kV_i$  y  ${}^kW^j$  con la relación

$$e_k = \sum_i {}^kV_i \varepsilon_i + \sum_j {}^kW^j \bar{\varepsilon}_j.$$

(Esto es,  ${}^kV_i$  (respectivamente  ${}^kW^j$ ) son las coordenadas con respecto a la base  $\{\bar{\varepsilon}_i\}$  (respectivamente  $\{\varepsilon_i\}$ ) de la proyección ortogonal de  $e_i$  en  $\xi$  (respectivamente  $\xi^\perp$ )).

Las  ${}^kV_i$  y las  ${}^kW^j$  satisfacen la relación

$$\sum_{i=1}^n {}^kV_i {}^{k'}V_i = - \sum_{j=1}^m {}^kW^j {}^{k'}W^j$$

porque

$$\begin{aligned} 0 + e_k \cdot e_{k'} &= \left( \sum_i {}^kV_i \varepsilon_i + \sum_j {}^kW^j \bar{\varepsilon}_j \right) \cdot \left( \sum_i {}^{k'}V_i \varepsilon_i + \sum_j {}^{k'}W^j \bar{\varepsilon}_j \right) \\ &= \sum_i {}^kV_i {}^{k'}V_i + \sum_j {}^kW^j {}^{k'}W^j \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{X}_k^t \subset H^\circ$  el elemento dado por  $h_i = 1$  para  $i \neq k$  y  $h_k = e^t$  con respecto a las coordenadas en  $H$  de (4.4.8). La matriz diagonal con  $e^t$  en la posición  $(k, k)$  y 1 en cualquier otra parte en la diagonal, actúa sobre  $\mathbb{R}^{n+m}$  por el alargamiento  $\mathcal{L}_{e^k}^t$ . Por lo tanto, por los resultados de la sección anterior, en coordenadas gráficas centradas en  $\xi$ ,  $\mathcal{X}_k^t(\xi)$  está dada por la ecuación (4.5.3), (4.5.3), y su  $t$  derivada en  $t = 0$  está dada por (4.5.3). Expresando (4.5.3) en la base  $\{\varepsilon_i\}$  y  $\{\bar{\varepsilon}_j\}$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{X}_k^t(\varepsilon_i) |_{t=0} = (\varepsilon_i \cdot {}^kV) {}^kW = {}^kV_i \sum {}^kW^j \bar{\varepsilon}_j$$

entonces tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.5.10.**  $T_\xi(H_\xi) \subset T_\xi(G_n^m)$  está generado por las transformaciones lineales

$${}^kM_i^j = {}^kV_i {}^kW^j$$

(ninguna suma sobre  $k$  es implicada).

Ahora probaremos el teorema (4.3.7) que implica el teorema de anulación. Debemos mostrar que para cualquier  $\xi$  y cualquier  $p$ -forma  $\omega$   $O(n+m)$ -invariante en  $G_n^m$ ,  $\omega$  se anula en

cualquier  $p$  vectores tangentes en  $T_\xi(H\xi) \subset T_\xi G_n^m$ . Como la  $Ph_\xi$  forma una base para el anillo de  $O(n+m)$ -formas invariantes (Corolario (4.4.14)), es suficiente mostrar que para estas formas  $Ph_\xi$ . Como las matrices  ${}^k M_i^j = {}^k V_i^h W^j$  forman una base para el espacio vectorial  $T_\xi(H\xi)$  (Proposición (4.5.10)), es suficiente mostrar esto para  $4l$  de estos vectores. Por un reordenamiento de  $e_k$ , podemos tomar a estos como  ${}^1 M_i^j, \dots, {}^{4l} M_i^j$ .

$$\begin{aligned} Ph_1({}^1 M, \dots, {}^{4l} M) &= \\ &= ALT ({}^1 V_{i(1)} {}^1 W^{j(1)}) ({}^2 V_{i(1)} {}^2 W^{j(2)}) \dots ({}^{4l-1} V_{i(2l)} {}^{4l-1} W^{j(2l)}) ({}^{4l} V_{i(2l)} {}^{4l} W^{j(1)}) \\ &= ALT ({}^1 W^{i(1)} {}^1 W^{j(1)}) ({}^2 W^{i(2)} {}^2 W^{j(2)}) \dots ({}^{4l-1} W^{i(2l)} {}^{4l-1} W^{j(2l)}) ({}^{4l} W^{i(2l)} {}^{4l} W^{j(1)}) \end{aligned}$$

por la ecuación (4.5.3). Pero esta última expresión es cero porque la función que es alternada es invariante bajo la permutación de los índices  $1, \dots, 4l$  dados por

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 4l-1 \rightarrow 4l \rightarrow 1$$

que es una permutación par.

## Bibliografia

- [Ati82] M. F. Atiyah. Convexity and commuting hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14:1-15, 1982.
- [D<sup>+</sup>85] Gelfand I. M. and MacPherson R. D. et al. Combinatorial geometries, convex polyhedra, and schubert cells. *Academic Press*, 1985.
- [DS65] Hilbert D. and Cohn-Vossen S. *Geometry and the Imagination*. Chelsea, New York, E.U., 1965.
- [GGL75] A. M. Gabrielov, I. M. Gelfand, and M. V. Losik. Combinatorial calculation of characteristic classes. *Funct. Anal. Appl.*, 9(2):12-28, 1975. No. 3 5-26.
- [GS82] V. Guillemin and S. Sternberg. Convexity properties of the moment map. *Invent. Math.*, 67:491-513, 1982.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, New York, E.U., 1977.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry*. Springer, New York, E.U., 1992.
- [HC70] Crapo H. H. and Rota G. C. *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*. MIT Press, Cambridge, Mass., E.U., 1970.
- [I.78] Danilov V. I. The geometry of toric varieties. *Russian Math Surveys, Traducido de Uspekhi Mat. Nauk.*, 33:85-134, 1978.
- [ID82] Gelfand I. and MacPherson R. D. Geometry in grassmanians and a generalization of the dilogarithm. *Advan. in Math*, 44:279-312, 1982.
- [JE81] *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, NY, EUA, 1981.

- [Kir84] F. Kirwan. *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*. Princeton University, Princeton, N.J., 1984.
- [LL72] Kleiman S. L. and Dan Laksov. Schubert calculus. *American Math. Monthly*, 79:1061-1082, 1972.
- [Mac77] R. D. MacPherson. The combinatorial formula of gabrielov, gelfand, and losik for the first pontrjagin class. *Sem. Bourbaki*, (497), 1976/77. Lectures Notes in Mathematics, No. 677, Springer-Verlag, 1978.
- [Wae37] B. L. Van Der Waerden. *Moderne Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1937.
- [Whi86] Neil White. *Theory of Matroids*. Cambridge U. P., Great Britain, 1986.

Instituto de Matemáticas  
Ciudad Universitaria, UNAM  
México D.F. 04510  
México

[molina@math.unam.mx](mailto:molina@math.unam.mx)