00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios de Posgrado

NUMERO HETEROCROMATICO LINEAL EN GRAFICAS

T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

p r e s e n t a

JUAN JOSE MONTELLANO BALLESTEROS

Director de Tesis: Mat. Víctor Neumann Lara

1999

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

27 1751.

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y hermanos

A Lorena

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi asesor Victor Neumann por su ayuda, apoyo y paciencia en la realización de esta tesis; a mis sinodales Hortensia Galeana, Bernardo Llano, Paco Larrión, Lalo Rivera, Jorge Arocha y Javier Bracho por sus muestras de apoyo y sus acertados comentarios; y al Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M. por el apoyo recibido durante estos años.

Finalmente, quiero agradecer a Lorena por su invaluable apoyo.

A todos, muchas gracias.

ÍNDICE

Introducción	**2**
Las 2-transversales segmentadas	**8**
Ramos en gráficas	**14**
Estrellas en gráficas completas	**33**
Libros en 3-gráficas	**75**
Las digráficas selectivas	**93**
Completas en gráficas completas	**116**
Ciclos en gráficas completas	**142**
Bibliografía	**182**

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En el año de 1973 aparecen las primeras publicaciones sobre lo que será denominado *problemas tipo anti-Ramsey* ([7], [12] y [14]), que a grandes rasgos podemos plantear como problemas de búsqueda de condiciones para asegurar la existencia, en estructuras coloreadas, de subestructuras en las cuales no se repita ningún color.

A partir de este momento surgen diversas ramas de estudio alrededor de este tema desde muy variadas perspectivas, siendo un par de estas ramas de investigación las que en particular resultarán relevantes para este trabajo. La primera es el estudio de los problemas anti-Ramsey a partir de la siguiente óptica:

Dada una hipergráfica H, cuál es el mínimo número de colores tal que para toda coloración de los vértices de H con tal número de colores, existe una hiperarista de H con todos sus vértices de distinto color.

Este parámetro es introducido por C. Berge, según nos comenta F. Sterboul en [14]. Trabajos al respecto los encontramos en [14], [15] y [16].

La otra rama que nos atañe es una serie de estudios que buscan responder cuál es el mínimo número de colores, dada una gráfica G, tal que para toda coloración de las aristas de la gráfica completa con ese número de colores, aparece alguna subgráfica isomorfa a G con todas sus aristas de colores distintos ([1], [7], [9] y [13]). En la mayoría de estos estudios, que por lo general se denominaron de *gráficas totalmente multicoloreadas*, existe la motivación de revelar la relación de estos problemas con los problemas tipo Turán, razón por la cual las coloraciones son siempre sobre la gráfica completa.

Años después, y de manera independiente, en [2] se redescubre el parámetro introducido por Berge bajo el nombre de *número heterocromático*.y, de igual

forma, en la dirección de atacar este problema, en [11] es introducido el concepto de *número heterocromático lineal*, el cual será el eje central de este trabajo, y que se define de la siguiente manera: dada una gráfica G y una clase de gráficas $\mathbf{C}$, el número heterocromatico lineal de la gráfica G con respecto a la clase $\mathbf{C}$ es el mínimo número c tal que para toda coloración de las aristas de G con c colores exista una subgráfica de G isomorfa a un elemento de $\mathbf{C}$ con todas sus aristas de distinto color.

La relación entre el número heterocromático de una hipergráfica H y el número heterocromático lineal de una gráfica G con respecto a una clase $\mathbf{C}$ se hace evidente si pensamos en la hipergráfica H cuyos vértices son las aristas de la gráfica G, y las hiperaristas estan definidas como los conjuntos de aristas de las subgráficas de G que sean isomorfas a elementos de $\mathbf{C}$.

La semejanza entre los problemas de las gráficas totalmente coloreadas y del número heterocromático lineal es bastante clara, aunque este último es un concepto más amplio. De ahí que varios de los trabajos que fueron planteados e investigados en términos de las gráficas totalmente coloreadas son retomados en esta tesis, siendo finalmente resueltos o dando una mayor aproximación al resultado (capítulos 4, 7 y 8).

En el desarrollo de esta investigación que, como ya se mencionó, estaba dirigida a atacar problemas del número heterocromático lineal, surgió otro concepto que igualmente concierne al problema del número heterocromático de una hipergráfica, el cual denominamos *número heterocromático lineal interno* y que se define de la siguiente manera: dada una gráfica G y un conjunto $\mathbf{D}$ de subgráficas de G, el número heterocromático lineal interno de G con respecto a $\mathbf{D}$ es el mínimo número tal que para toda coloración de las aristas de G con ese número de colores existe al menos un elemento de $\mathbf{D}$ con todas sus aristas de distinto color.

Obsérvese que este concepto no equivale al de número heterocromático lineal, pues un conjunto $\mathbf{D}$ de subgráficas de G no necesariamente puede ser definido como el conjunto de subgráficas de G isomorfas a los elementos de alguna clase de gráficas $\mathbf{C}$. Resultados de este tipo los encontramos en el capítulo 3 de esta tesis.

Igualmente, el desarrollo de este trabajo llevó a extender el concepto de número heterocromático lineal y lineal interno para ser definido sobre hipergráficas, esto es, la coloración se hace sobre las hiperaristas de una hipergráfica, y se buscan algún tipo de subhipergráficas de la misma cuyas hiperaristas esten coloreadas todas de distintos colores. Un caso de este tipo de problemas se presenta en el capítulo 5.

Así, en su versión final este trabajo aborda problemas tanto del número heterocromático lineal como lineal interno de gráficas e hipergráficas.

En los capítulos 2 y 6 se presentan distintas herramientas y conceptos tales como las *2-transversales segmentadas* y las *digráficas selectivas*, que permiten atacar problemas del número heterocromático tanto lineal como lineal interno, y con los cuales se analizaron distintos problemas obteniendo los siguientes resultados:

Se determina el número heterocromático lineal interno de cualquier gráfica G cuya valencia mínima sea al menos 2, con respecto a la familia de ramos de la gráfica, siendo un *ramo* una subgráfica de G sin vértices aislados y cuyo conjunto de aristas es el conjunto de aristas incidentes a un vértice (Capítulo 3).

Se investiga el número heterocromático lineal de la gráfica completa de orden n con respecto a la clase de gráficas cuyo único elemento es la estrella de q aristas. En dependencia de los valores de q y n se determina el valor del número heterocromático lineal o se acota en un rango de 1 (Capítulo 4).

En el capítulo 5 tenemos lo siguiente: dada una 3-gráfica H (una hipergráfica tal que todas sus hiperaristas constan de 3 vértices), un *libro* de H es una 3-subgráfica de H sin vértices aislados y cuyo conjunto de hiperaristas es el conjunto de hiperaristas que contienen a una arista del 1-esqueleto de la 3-gráfica H. En este capítulo se acota superiormente el número heterocromático lineal interno de cualquier 3-gráfica H tal que todos sus libros contengan cuando menos 2 hiperaristas, con respecto al conjunto de libros de H. Así mismo, se aborda el problema del número heterocromático lineal de la 3-gráfica completa de orden n con respecto a la clase de 3-gráficas cuyo único elemento es el libro de $n-2$ hiperaristas, y en dependencia del valor de n se determina el valor del número heterocromático lineal o se acota en un rango no mayor a $2n$.

En el capítulo 7 se determina el número heterocromático lineal de la gráfica completa de orden n con respecto a la clase que consta de la gráfica completa de orden q como único elemento.

Finalmente en el capítulo 8 se investiga el número heterocromático lineal de la gráfica completa de orden n con respecto a la clase cuyo único elemento es el ciclo de orden q. En dependencia de los valores de q y n se determina el valor del número heterocromático lineal o se acota en un rango no mayor a $\binom{q}{2}$.

1.1 Terminología

En esta sección introducimos la terminología que será usada en el presente trabajo.

Dada una hipergráfica H, como $V(H)$ y $E(H)$ denotaremos al conjunto de vértices e hiperaristas de H, respectivamente.

Dada una coloración Γ de los vértices de H, diremos que Γ es una *q-coloración* si asigna exactamente q colores al conjunto de vértices de H, y dada una hiperarista no vacía e de H, diremos que e es *Γ-heterocromática* (o *heterocromática* simplemente, si no existiera ambigüedad) si bajo la coloración Γ en el conjunto de vértices de e no se repite ningún color.

En estos términos, la definición del número heterocromático de una hipergráfica H, que denotaremos como $hc(H)$, es como sigue:

Definición 1.1 *El número heterocromático de una hipergráfica H es el mínimo número $hc(H)$ tal que para toda $hc(H)$-coloración del conjunto de vértices de H, existe al menos una hiperarista heterocromática.*

Dada una gráfica G, como $V(G)$ y $E(G)$ denotaremos al conjunto de vértices y aristas de la gráfica G, respectivamente.

Para cada $x \in V(G)$, $d_G(x)$ será la valencia del vértice x en G y $\delta(G)$ la valencia mínima en G.

Así mismo, para cada $x \in V(G)$, $N_G(x)$ y $N_G[x]$ denotarán la vecindad abierta y vecindad cerrada, respectivamente, del vértice x en G.

Dado $B \subseteq V(G)$, $G[B]$ denotará la subgráfica de G inducida por el conjunto de vértices B y $G \setminus B$ denotará a la subgráfica de G inducida por el conjunto de vértices $V(G) \setminus B$.

Así mismo, dado $S \subseteq E(G)$, denotaremos como $G[S]$ a la subgráfica de G sin vértices aislados cuyo conjunto de aristas es justamente S y como $G \setminus S$ a la subgráfica de G resultante de borrar de G las aristas de S.

Dados $x, y \in V(G)$ tales que $\{x, y\} \notin E(G)$, $G + xy$ denotará a la supergráfica de G resultante de pegar la arista $\{x, y\}$ a la gráfica G.

Dada una coloración Γ de las aristas de G, diremos que Γ es una *q-coloración* si asigna exactamente q colores al conjunto de aristas de G, y dada G' una subgráfica de G, diremos que G' es *Γ-heterocromática* (o *heterocromática* simplemente) si bajo la coloración Γ en el conjunto de aristas de G' no se repite ningún color.

Cuando resulte importante resaltar que nos estamos refiriendo a la gráfica G con sus aristas coloreadas por Γ, y no sólo a la gráfica G independiente de Γ, escribiremos $[G,\Gamma]$ en lugar de G. Así mismo, dada G' una subgráfica de G, escribiremos $[G',\Gamma]$ en lugar de G' en el mismo sentido que para G.

Además, denotaremos como $\Gamma_{G'}$ a la coloración definida por la restricción de Γ a $E(G')$. Así obsérvese que $[G',\Gamma] = [G',\Gamma_{G'}]$.

Dada una clase de gráficas $\mathbf{C}$, al conjunto de subgráficas de G isomorfas a algún elemento de $\mathbf{C}$ lo denotaremos como $\mathbf{C}(G)$.

En estos términos, la definición del número heterocromático lineal de la gráfica G con respecto a la clase $\mathbf{C}$, que denotaremos como $H(G,\mathbf{C})$, es como sigue:

Si $\mathbf{C}(G)$ no es vacío entonces

Definición 1.2 *El número heterocromático lineal de G con respecto a la clase de gráficas $\mathbf{C}$ es el mínimo número $H(G,\mathbf{C})$ tal que para toda $H(G,\mathbf{C})$-coloración de las aristas de G, existe al menos un elemento de $\mathbf{C}(G)$ heterocromático.*

Al conjunto de las coloraciones Γ de $E(G)$ libres de elementos de $\mathbf{C}(G)$ heterocromáticos lo denotaremos como $\mathbf{C}(G,\mathbf{C})$, y al conjunto de coloraciones de $\mathbf{C}(G,\mathbf{C})$ que sean $(H(G,\mathbf{C})-1)$-coloraciones, es decir, coloraciones libres de elementos de $\mathbf{C}(G)$ heterocromáticos que asignen efectivamente el máximo número de colores posible, lo denotaremos como $\mathbf{C}^*(G,\mathbf{C})$.

Si la clase de gráficas $\mathbf{C}$ consta de un único elemento G', por comodidad denotaremos al número heterocromático lineal de la gráfica G con respecto a $\mathbf{C}$ como $H(G,G')$, y a $\mathbf{C}(G,\mathbf{C})$ y $\mathbf{C}^*(G,\mathbf{C})$ como $\mathbf{C}(G,G')$ y $\mathbf{C}^*(G,G')$, respectivamente.

Así mismo, dado un conjunto no vacío $\mathbf{D}$ de subgráficas de G, la definición del número heterocromático lineal interno de G con respecto a $\mathbf{D}$, que denotaremos como $h(G,\mathbf{D})$, se presenta como

Definición 1.3 *El número heterocromático lineal interno de G con respecto a $\mathbf{D}$ es el mínimo número $h(G,\mathbf{D})$ tal que para toda $h(G,\mathbf{D})$-coloración de las aristas de G, existe al menos un elemento de $\mathbf{D}$ heterocromático.*

De manera análoga, dado un conjunto $\mathbf{D}$ de subgráficas de G, al conjunto de coloraciones Γ de $E(G)$ libres de elementos de $\mathbf{D}$ heterocromáticos lo

denotaremos como $\mathbf{C}(G,\mathbf{D})$, y al conjunto de coloraciones de $\mathbf{C}(G,\mathbf{D})$ que sean $(h(G,\mathbf{D})-1)$-coloraciones lo denotaremos como $\mathbf{C}^{*}(G,\mathbf{D})$.

En los casos del número heterocromático lineal y lineal interno definido sobre hipergráficas, estos conceptos se extienden de manera natural.

Dada una digráfica D, denotaremos como $V(D)$ y $F(D)$ a los vértices y flechas de D, respectivamente.

Denotaremos como $\mathbf{g}[D]$ a la gráfica resultante de sustituir las flechas de la digráfica D por aristas, y en caso que aparecieran aristas múltiples, sustituir cada una de ellas por una arista simple. A esta gráfica la denominaremos *gráfica subyacente* de la digráfica D.

Para cada $x \in V(D)$, $d_D^+(x), d_D^-(x), N_D^+(x)$ y $N_D^-(x)$ denotarán la exvalencia, invalencia, exvecindad abierta e invecindad abierta del vértice x en la digráfica D, respectivamente. Además sea

$$d_D^*(x) = |\{y \in V(D) : \overrightarrow{yx} \in F(D) \text{ y } \overrightarrow{xy} \notin F(D)\}|.$$

Finalmente, dados dos enteros positivos n y q, $re(n,q)$ denotará el residuo de n módulo q.

Capítulo 2

LAS 2-TRANSVERSALES SEGMENTADAS

En este capítulo presentamos el concepto de 2-transversal segmentada, el cual fue introducido en [11], y que estará presente en los próximos capítulos de este trabajo.

Iniciamos exponiéndolo en términos de coloraciones de vértices en hipergráficas y del número heterocromático de hipergráficas, que es de donde surge de manera natural, para después traducirlo a coloraciones de aristas y del número heterocromático tanto lineal como lineal interno, que es en la forma en que será útil para este trabajo.

2.1 Las 2-transversales segmentadas

Sea H una hipergráfica tal que $E(H)$ es no vacío.

Definición 2.1 *Una 2-transversal segmentada* $\mathbf{S}$ *de la hipergráfica* H *es una familia*

$$\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $V(H)$ *tal que*

i) Para toda $S_i \in \mathbf{S}$, $|S_i| \geq 2$.

ii) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, *si* $i \neq j$ *entonces*

$$S_i \cap S_j = \emptyset.$$

iii) Para toda $e \in E(H)$ *existe* $S_i \in \mathbf{S}$ *tal que* $|e \cap S_i| \geq 2$.

Para cada hipergráfica H sea

$$\lambda(H) = min\left\{\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}(|S_i|) - |\mathbf{S}| : \mathbf{S} \text{ es una 2-transversal segmentada de } H\right\}.$$

En [11] se demuestra que

Teorema 2.1 *Sea H una hipergráfica tal que $E(H)$ es no vacío. Entonces*

$$hc(H) = |V(H)| - \lambda(H) + 1.$$

Prueba. Sea n un entero y Γ una n-coloración de los vértices de H libre de aristas heterocromáticas.

Por un lado, si Γ es libre de aristas heterocromáticas entonces la familia

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de las clases cromáticas no singulares de Γ es una 2-transversal segmentada de H.

Por otro lado,

$$n = |V(H)| - \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}(|S_i|) + |\mathbf{S}|,$$

por tanto el máximo valor posible de n es $|V(H)| - \lambda(H)$ y se sigue el resultado. ■

2.2 Las 2-transversales y los números heterocromáticos lineal y lineal interno

Sea G una gráfica y $\mathbf{F}$ un conjunto de subgráficas de G.

Definición 2.2 *Una 2-transversal segmentada* $\mathbf{S}$ *del par* $(G,\mathbf{F})$ *es una familia*

$$\{S_1,...,S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(G)$ *tal que*

i) Para toda $S_i \in \mathbf{S}$, $|S_i| \geq 2$.
ii) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, *si* $i \neq j$ *entonces* $S_i \cap S_j = \emptyset$.
iii) Dada $G' \in \mathbf{F}$, *existe* $S_i \in \mathbf{S}$ *tal que* $|E(G') \cap S_i| \geq 2$.

Al conjunto de 2-transversales segmentadas del par $(G,\mathbf{F})$ lo denotaremos como

$$\mathbf{T}(G,\mathbf{F}).$$

Para cada familia

$$\mathbf{S} = \{S_1,...,S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(G)$ ajenos 2 a 2 definimos

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}(|S_i|) - |\mathbf{S}|.$$

Ahora sea

$$\lambda(G,\mathbf{F}) = min\{\mathbb{J}(\mathbf{S}) : \mathbf{S} \in \mathbf{T}(G,\mathbf{F})\}.$$

Lema 2.1 *Sea* G *una gráfica,* $\mathbf{F}$ *un conjunto de subgráficas de* G *y* c *el mínimo número tal que para cada* c*-coloración de* $E(G)$, *existe al menos un elemento de* $\mathbf{F}$ *heterocromático. Entonces*

$$c = |E(G)| - \lambda(G,\mathbf{F}) + 1.$$

Prueba. Primero definamos la hipergráfica H como sigue:

$V(H) = E(G)$

y

$E(H) = \{E(G') : G' \in \mathbf{F}\}$.

Obsérvese que dada la definición de H, tenemos que

$$c = hc(H) \quad \text{y} \quad |V(H)| = |E(G)|.$$

Así pues, por el teorema 2.1 vemos que para probar este lema sólo resta mostrar que

$$\lambda(G, \mathbf{F}) = \lambda(H),$$

lo cual se sigue de que, nuevamente por la definición de H, $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{F})$ si y sólo si $\mathbf{S}$ es una 2-transversal segmentada de la hipergráfica H. ■

Corolario 2.1 *Sea G una gráfica y $\mathbf{C}$ una clase de gráficas. Entonces*

$$H(G, \mathbf{C}) = |E(G)| - \lambda(G, \mathbf{C}(G)) + 1.$$

Prueba. Considérese a $\mathbf{C}(G)$ como el conjunto $\mathbf{F}$ del lema 2.1, y el resultado se sigue de las definiciones. ■

Corolario 2.2 *Sea G una gráfica y $\mathbf{D}$ un conjunto de subgráficas de G. Entonces*

$$h(G, \mathbf{D}) = |E(G)| - \lambda(G, \mathbf{D}) + 1.$$

Prueba. Se sigue igualmente del lema 2.1 y de las definiciones. ■

A partir de estos corolarios podemos ver que la búsqueda de los números heterocromáticos $H(G, \mathbf{C})$ y $h(G, \mathbf{D})$ es equivalente a la búsqueda de los valores $\lambda(G, \mathbf{C}(G))$ y $\lambda(G, \mathbf{D})$ respectivamente. Este hecho será usado frecuentemente en los próximos capítulos.

2.2.1 Sobre familias de subconjuntos de aristas

Sea G una gráfica y

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

una familia de subconjuntos no vacíos de $E(G)$ ajenos 2 a 2.

Lema 2.2 *Para cada* $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ *se cumple que*

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') \leq \mathbb{J}(\mathbf{S}).$$

Prueba. Sea, sin pérdida de generalidad,

$$\mathbf{S}' = \{S_1, ..., S_k\}$$

con $1 \leq k \leq |\mathbf{S}|$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\mathbf{S}) &= \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i| - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (|S_i| - 1) + \sum_{i=k+1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i| - 1) \\ &= \mathbb{J}(\mathbf{S}') + \sum_{i=k+1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i| - 1) \geq \mathbb{J}(\mathbf{S}') \end{aligned}$$

y se sigue el resultado. ■

Sea $\mathbf{F}$ un conjunto de subgráficas de G.

Definición 2.3 *Una pretransversal* $\mathbf{S}$ *del par* $(G, \mathbf{F})$ *es una familia*

$$\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(G)$ *tal que*

i) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, *si* $i \neq j$ *entonces*

$$S_i \cap S_j = \emptyset.$$

ii) Dada $G' \in \mathbf{F}$, *existe* $S_i \in \mathbf{S}$ *tal que*

$$|E(G') \cap S_i| \geq 2.$$

Lema 2.3 *Sea* $\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$ *una pretransversal del par* $(G, \mathbf{F})$. *Entonces existe* $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ *tal que*

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(G, \mathbf{F}) \quad y \quad \mathbb{J}(\mathbf{S}') \leq \mathbb{J}(\mathbf{S}).$$

Prueba. Sea

$$\mathbf{S}'' = \{S_i \in \mathbf{S} : |S_i| = 1\}.$$

Claramente

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \mathbf{S}'') \in \mathbf{T}(G, \mathbf{F})$$

y como $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$, por el lema 2.2 se sigue el resultado. ■

Lema 2.4 *Sea* $\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{F})$. *Entonces para cada par* $S_i, S_j \in \mathbf{S}$

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \{S_i, S_j\}) \cup \{S_i \cup S_j\} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{F}).$$

Prueba. Se sigue de las definiciones. ■

En este capítulo definimos el concepto de 2-transversal segmentada para parejas de gráficas y conjuntos de subgráficas de las mismas. Se hizo de esta manera pues será así como más la utilicemos en el presente trabajo. Sin embargo, este concepto es claramente generalizable a parejas formadas por hipergráficas y subhipergráficas, y todos los resultados de este capítulo se demuestran de manera análoga para este caso.

Capítulo 3

RAMOS EN GRÁFICAS

Dada una gráfica G, consideremos a la familia $\mathbf{L}(G)$ de subgráficas de G compuesta por los siguientes elementos:

Para cada $x \in V(G)$ sea

$$L(x) = (V(L(x)), E(L(x)))$$

la subgráfica de G formada por el conjunto de aristas incidentes a x, es decir,

$V(L(x)) = N_G[x]$

y

$E(L(x)) = \{e \in E(G) : x \in e\}$.

Así pues,

$$\mathbf{L}(G) = \{L(x)\}_{x \in V(G)}.$$

A los elementos de esta familia los denominaremos *ramos*.

En este capítulo se probará que para cualquier gráfica G tal que $\delta(G) \geq 2$, el número heterocromático lineal interno de G con respecto a $\mathbf{L}(G)$, que denotamos como $h(G, \mathbf{L}(G))$, es igual a

$$\phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1$$

donde $\phi(G)$ es el máximo número de ciclos ajenos 2 a 2 en vértices en G.

Esto nos permitirá determinar, para toda gráfica G que sea q-regular con $q \geq 2$, el número heterocromático de G con respecto a la clase $\mathbf{C} = \{K_{1,q}\}$, el cual denotaremos como $H(G, K_{1,q})$.

3.1 El número heterocromático $h(G, \mathbf{L}(G))$.

3.1.1 La cota inferior

Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$. Entonces

Lema 3.1 $h(G, \mathbf{L}(G)) \geq \phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1$.

Prueba. Esta prueba se llevará a cabo exhibiendo una c-coloración de $E(G)$ con

$$c = \phi(G) + |E(G)| - |V(G)|,$$

que es libre de elementos de $\mathbf{L}(G)$ heterocromáticos. Para esto, primero definiremos una familia de subgráficas de G de la manera siguiente:

Sean $m = \phi(G)$ y

$$\{C^1, ..., C^m\}$$

una familia máxima de ciclos ajenos dos a dos en vértices en G, donde para cada $1 \leq i \leq m$,

$$C^i = (V(C^i), E(C^i)).$$

Ahora sean

$$V_m = \bigcup_{i=1}^{m} V(C^i)$$

y G_m la subgráfica de G inducida por el conjunto de vértices $V(G) \setminus V_m$. Obsérvese que G_m es un bosque.

Ahora iteremos el siguiente proceso:

Paso 1. Sea

$$P^{m+1} = (V(P^{m+1}), E(P^{m+1}))$$

una trayectoria maximal en G_m (tal vez vacía) donde

$$V(P^{m+1}) = \{p_1^{m+1}, ..., p_{r_{m+1}}^{m+1}\}$$

y

$$E(P^{m+1}) = \{\{p_i^{m+1}, p_{i+1}^{m+1}\} : 1 \leq i \leq r_{m+1} - 1\}.$$

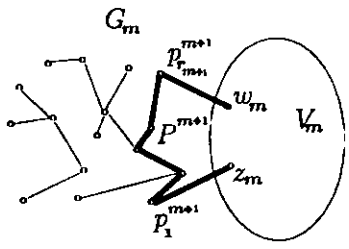
Si $V(P^{m+1})$ no es vacío, dado que $\delta(G) \geq 2$ y G_m es un bosque, existen dos aristas distintas

$$\{p_1^{m+1}, z_m\}, \{p_{r_{m+1}}^{m+1}, w_m\} \in E(G)$$

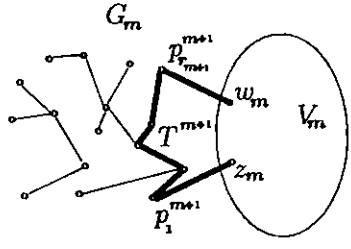
tales que

$$z_m, w_m \in V_m.$$

(Dibujo 3.1a).



Dibujo 3.1a



Dibujo 3.1b

Obsérvese que z_m y w_m no son necesariamente vértices distintos.
Definamos entonces la subgráfica de G

$$T^{m+1} = \left(V\left(T^{m+1}\right), E\left(T^{m+1}\right)\right)$$

donde

$$E\left(T^{m+1}\right) = E\left(P^{m+1}\right) \cup \left\{\left\{p_1^{m+1},\ z_m\right\}, \left\{p_{r_{m+1}}^{m+1},\ w_m\right\}\right\}$$

y

$$V\left(T^{m+1}\right) = V\left(P^{m+1}\right) \cup \{z_m,\ w_m\} \text{ (Dibujo 3.1b).}$$

Nótese que T^{m+1} puede ser un ciclo o una trayectoria en G.
Ahora sean

$$V_{m+1} = V_m \cup V\left(P^{m+1}\right)$$

y G_{m+1} la subgráfica de G inducida por $V(G) \setminus V_{m+1}$.

Paso k+1. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 1$.

Sea

$$P^{m+k+1} = \left(V\left(P^{m+k+1}\right), E\left(P^{m+k+1}\right)\right)$$

una trayectoria maximal en G_{m+k} (tal vez vacía) donde

$$V\left(P^{m+k+1}\right) = \left\{p_1^{m+k+1}, \ldots, p_{r_{m+k+1}}^{m+k+1}\right\}$$

y

$$E\left(P^{m+k+1}\right) = \left\{\left\{p_i^{m+k+1}, p_{i+1}^{m+k+1}\right\} : 1 \leq i \leq r_{m+k+1} - 1\right\}.$$

De igual manera que en el paso 1, si $V\left(P^{m+k+1}\right)$ no es vacío existen dos aristas distintas

$$\left\{p_1^{m+k+1},\ z_{m+k}\right\}, \left\{p_{r_{m+k+1}}^{m+k+1},\ w_{m+k}\right\} \in E(G)$$

con

$$z_{m+k}, w_{m+k} \in V_{m+k}.$$

Obsérvese nuevamente que z_{m+k} y w_{m+k} no son vértices necesariamente diferentes.

Definamos así la subgráfica de G

$$T^{m+k+1} = \left(V\left(T^{m+k+1}\right), E\left(T^{m+k+1}\right)\right)$$

donde

$$E\left(T^{m+k+1}\right) = E\left(P^{m+k+1}\right) \cup \left\{\left\{p_1^{m+k+1},\ z_{m+k}\right\}, \left\{p_{r_{m+k+1}}^{m+k+1},\ w_{m+k}\right\}\right\}$$

y

$$V\left(T^{m+k+1}\right) = V\left(P^{m+k+1}\right) \cup \left\{z_{m+k},\ w_{m+k}\right\}.$$

Una vez más, T^{m+k+1} es un ciclo o una trayectoria en G.

Sean ahora

$$V_{m+k+1} = V_{m+k} \cup V\left(P^{m+k+1}\right)$$

y G_{m+k+1} la subgráfica de G inducida por $V(G) \setminus V_{m+k+1}$. □

Dado que $|V(G)|$ es finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_n = V(G)$$

y este proceso termina, siendo la última trayectoria maximal no vacía

$$P^n = \left(V\left(P^n\right), E\left(P^n\right)\right),$$

la cual esta en la subgráfica G_{n-1} inducida por $V(G) \setminus V_{n-1}$.

Ahora bien, por construcción

$$\left\{V\left(C^1\right), ..., V\left(C^m\right), V\left(P^{m+1}\right), ..., V\left(P^n\right)\right\}$$

es una partición de $V(G)$. Así pues

$$\sum_{k=1}^{m} |V(C^k)| + \sum_{k=m+1}^{n} |V(P^k)| = |V(G)|.$$

Por otro lado, igualmente por construcción,

$$\{C^1, ..., C^m, T^{m+1}, ..., T^n\}$$

es una familia de subgráficas de G ajenas dos a dos en aristas y claramente:
a) Para $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq m$,

$$|E(C^k)| = |V(C^k)|;$$

y
b) Para $k \in \mathbb{N}$ tal que $m+1 \leq k \leq n$,

$$|E(T^k)| = |V(P^k)| + 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m} |E(C^k)| + \sum_{k=m+1}^{n} |E(T^k)| \qquad (3.1) \\ = & \sum_{k=1}^{m} |V(C^k)| + \sum_{k=m+1}^{n} (|V(P^k)| + 1) \\ = & \sum_{k=1}^{m} |V(C^k)| + \sum_{k=m+1}^{n} |V(P^k)| + (n-m) \\ = & |V(G)| + (n-m) \end{aligned}$$

Ahora, con base en la familia

$$\{C^1, ..., C^m, T^{m+1}, ..., T^n\},$$

definiremos la coloración buscada de $E(G)$.

Sea

$$\Gamma : E(G) \to \{1, ..., |E(G)| - |V(G)| + m\}$$

una coloración de $E(G)$ tal que:

a) Para $k \in \mathbf{N}$ tal que $1 \leq k \leq m$,

$$\Gamma\left[E\left(C^k\right)\right] = k.$$

b) Para $k \in \mathbf{N}$ tal que $m+1 \leq k \leq n$,

$$\Gamma\left[E\left(T^k\right)\right] = k.$$

c) Para las

$$|E(G)| - \left(\sum_{k=1}^{m}\left|E\left(C^k\right)\right| + \sum_{k=m+1}^{n}\left|E\left(T^k\right)\right|\right)$$

aristas restantes, que por (3.1) son

$$|E(G)| - (|V(G)| + (n-m)),$$

Γ les asigna, uno a uno, los colores restantes.

Ahora veremos que Γ es una coloración de $E(G)$ libre de elementos de $\mathbf{L}(G)$ heterocromáticos.

Ya que

$$\left\{V\left(C^1\right), ..., V\left(C^m\right), V\left(P^{m+1}\right), ..., V\left(P^n\right)\right\}$$

es una partición de $V(G)$, dada $x \in V(G)$ tenemos dos casos posibles.

Caso 1. Existe $k \in \mathbf{N}$, donde $1 \leq k \leq m$, tal que $x \in V\left(C^k\right)$.

En tal caso,

$$\left|E(L(x)) \cap E\left(C^k\right)\right| = 2$$

pues C^k es un ciclo y por tanto existen 2 aristas en $L(x)$ de color k, y así $L(x)$ no es heterocromático.

Caso 2. Existe $k \in \mathbf{N}$, donde $m+1 \leq k \leq n$, tal que $x \in V\left(P^k\right)$.

En este caso, dado que

$$E\left(P^k\right) = \left\{\left\{p_i^k, p_{i+1}^k\right\} : 1 \leq i \leq r_k - 1\right\}$$

y

$$E\left(T^k\right) = E\left(P^k\right) \cup \left\{\left\{p_1^k,\ z_{k-1}\right\}, \left\{p_{r_k}^k,\ w_{k-1}\right\}\right\}$$

con $z_{k-1}, w_{k-1} \in V_{k-1}$, entonces

$$\left|E\left(L\left(x\right)\right) \cap E\left(T^{k}\right)\right| = 2$$

y por tanto existen 2 aristas en $L\left(x\right)$ de color k, y así $L\left(x\right)$ no es heterocromático.

Así pues, Γ es una c-coloración de $E\left(G\right)$ con

$$c = m + \left|E\left(G\right)\right| - \left|V\left(G\right)\right| = \phi\left(G\right) + \left|E\left(G\right)\right| - \left|V\left(G\right)\right|,$$

que es libre de elementos de $\mathbf{L}\left(G\right)$ heterocromáticos y entonces

$$h\left(G, \mathbf{L}\left(G\right)\right) > \phi\left(G\right) + \left|E\left(G\right)\right| - \left|V\left(G\right)\right|$$

de donde se sigue el resultado. ■

3.1.2 La cota superior

Las 2-transversales segmentadas

Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$.

Por definición, una 2-transversal segmentada de G con respecto a $\mathbf{L}(G)$ es una familia

$$\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(G)$ tal que

i) Para cada $S_i \in \mathbf{S}$, $|S_i| \geq 2$;

ii) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, si $i \neq j$ entonces $S_i \cap S_j = \emptyset$;

iii) Para cada subgráfica $G' \in \mathbf{L}(G)$,existe $S_i \in \mathbf{S}$ tal que

$$|S_i \cap E(G')| \geq 2.$$

Al conjunto de 2-transversales segmentadas del par $(G, \mathbf{L}(G))$ lo denotaremos como $\mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G))$, y sea

$$\lambda(G, \mathbf{L}(G)) = min\{\mathbb{J}(\mathbf{S}) : \mathbf{S} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G))\}.$$

Dada $\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G))$, denotaremos como $\mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ a la familia de subgráficas de G

$$\{G[S_1], ..., G[S_{|\mathbf{S}|}]\},$$

y para cada $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ definamos:

$$Q(G[S_i]) = \{x \in V(G[S_i]) : d_{G[S_i]}(x) \geq 2\}$$

y

$$A(G[S_i]) = \begin{cases} Q(G[S_i]) & \text{si } i = 1; \\ Q(G[S_i]) \setminus \bigcup_{j<i} A(G[S_j]) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De estas definiciones es importante resaltar que

Observación 3.1 *Para cada* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$,

$$Q(G[S_i]) = \{x \in V(G) : |E(G[S_i]) \cap E(L(x))| \geq 2\};$$

y

Observación 3.2 *Por definición,*

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\right\} = \left\{E\left(G\left[S_1\right]\right), ..., E\left(G\left[S_{|\mathbf{S}|}\right]\right)\right\}.$$

En lo que sigue sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$ y

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\right\} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}\left(G\right)\right).$$

Propiedades de las 2-transversales

Lema 3.2 $\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} |A\left(G\left[S_i\right]\right)| = |V\left(G\right)|.$

Prueba. Como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}\left(G\right)\right)$, entonces para cada $x \in V\left(G\right)$ existe $S_i \in \mathbf{S}$ tal que

$$|S_i \cap E\left(L\left(x\right)\right)| \geq 2$$

y por ende

$$|E\left(G\left[S_i\right]\right) \cap E\left(L\left(x\right)\right)| \geq 2.$$

Así, para cada $x \in V\left(G\right)$ existe $i \in \mathbf{N}$ tal que $x \in Q\left(G\left[S_i\right]\right)$ (observación 3.1), y por tanto

$$\bigcup_{i=1}^{|\mathbf{S}|} Q\left(G\left[S_i\right]\right) = V\left(G\right)$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 3.3 *Para todo* $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$ *con* $1 \leq i \leq |\mathbf{S}|$ *se cumple que*

$$|E\left(G\left[S_i\right]\right)| \geq |Q\left(G\left[S_i\right]\right)|.$$

Prueba. Sea $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$. Por definición

$$Q\left(G\left[S_i\right]\right) \subseteq V\left(G\left[S_i\right]\right),$$

y entonces

$$|E(G[S_i])| = \sum_{x \in V(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right)$$

$$= \sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right) + \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right)$$

$$= \sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) + |Q(G[S_i])| + \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right).$$

Como para toda $x \in Q(G[S_i])$ se cumple que $d_{G[S_i]}(x) \geq 2$, entonces

$$\sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) + \sum_{x \in (V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i]))} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right) \geq 0$$

y de ahí que

$$|E(G[S_i])| \geq |Q(G[S_i])|.$$

■

Las 2-transversales óptimas

Aquí analizaremos a los elementos de $\mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G))$ que son óptimos, es decir, aquellos

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G))$$

tales que

$$\mathbf{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| = \lambda(G, \mathbf{L}(G)).$$

Al conjunto de estas 2-transversales lo denotaremos como $\mathbf{T}^*(G, \mathbf{L}(G))$.

Lema 3.4 *Si* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*(G, \mathbf{L}(G))$ *entonces para toda* $1 \leq i \leq |\mathbf{S}|$ *se cumple que* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ *es una gráfica conexa.*

Prueba. Probaremos este resultado por reducción al absurdo.

Primero nótese (observación 3.2) que

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} = \{E(G[S_1]), ..., E(G[S_{|\mathbf{S}|}])\}.$$

Sean $G[S_t] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ no conexa y

$$G_t^1, ..., G_t^r$$

las $r \geq 2$ componentes conexas de $G[S_t]$, donde para cada $j \in \mathbf{N}$ tal que $1 \leq j \leq r$,

$$G_t^j = (V(G_t^j), E(G_t^j)).$$

Claramente, para cada $x \in V(G)$, si

$$|E(G[S_t]) \cap E(L(x))| \geq 2$$

entonces existe G_t^i con $1 \leq i \leq r$ tal que

$$|E(G_t^i) \cap E(L(x))| \geq 2.$$

Entonces

$$\mathbf{S}' = \left\{ \begin{array}{c} E(G[S_1]), ..., E(G[S_{t-1}]), E(G_t^1), ..., \\ E(G_t^r), E(G[S_{t+1}]), ..., E(G[S_{|\mathbf{S}|}]) \end{array} \right\}$$

es una pretransversal del par $(G, \mathbf{L}(G))$ tal que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') < \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

pues $|\mathbf{S}'| > |\mathbf{S}|$.

Así, por el lema 2.3, sabemos que existe $\mathbf{S}'' \subseteq \mathbf{S}'$ tal que

$$\mathbf{S}'' \in \mathbf{T}(G, \mathbf{L}(G)) \quad \text{y} \quad \mathbb{J}(\mathbf{S}'') \leq \mathbb{J}(\mathbf{S}')$$

por lo que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}'') < \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

y sigue el resultado. ■

Lema 3.5 *Sea* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^{*}(G, \mathbf{L}(G))$ *y* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ *para algún* $i \in \mathbf{N}$ *con* $1 \leq i \leq |\mathbf{S}|$. *Si*

$$|E(G[S_i])| = |Q(G[S_i])|$$

entonces $G[S_i]$ *es un ciclo.*

Prueba. Sea $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ y supongamos que

$$|E(G[S_i])| = |Q(G[S_i])|.$$

Dado que

$$Q(G[S_i]) \subseteq V(G[S_i]),$$

entonces

$$|E(G[S_i])| = \sum_{x \in V(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right)$$

$$= \sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right) + \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right)$$

$$= \sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) + |Q(G[S_i])| + \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right)$$

y como

$$|E(G[S_i])| = |Q(G[S_i])|,$$

entonces

$$\sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) + \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right) = 0.$$

Ahora bien, para toda $x \in Q(G[S_i])$ se cumple que $d_{G[S_i]}(x) \geq 2$, por lo tanto

$$\sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) \geq 0$$

y así

$$\sum_{x \in Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x) - 2}{2} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i])} \left(\frac{d_{G[S_i]}(x)}{2} \right) = 0.$$

Como $G[S_i]$ no tiene vértices aislados, entonces la segunda igualdad nos dice que

$$V(G[S_i]) \setminus Q(G[S_i]) = \emptyset,$$

y por tanto

$$V(G[S_i]) = Q(G[S_i]).$$

Por otro lado, de la primera igualdad se implica que para cada $x \in Q(G[S_i])$ se tiene que $d_{G[S_i]}(x) = 2$, y dado que

$$V(G[S_i]) = Q(G[S_i]),$$

entonces para cada $x \in V(G[S_i])$

$$d_{G[S_i]}(x) = 2.$$

Finalmente, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*(G, \mathbf{L}(G))$ entonces por el lema 3.4 se sigue que $G[S_i]$ es conexa y por tanto, $G[S_i]$ es un ciclo. ■

Lema 3.6 *Sea* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*(G, \mathbf{L}(G))$. *Entonces*

$$|\{S_i \in \mathbf{S} : |E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|\}| \leq \phi(G).$$

Prueba. Sea $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ tal que

$$|E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|.$$

Por definición de $Q(G[S_i])$ y $A(G[S_i])$, es claro que

$$|Q(G[S_i])| \geq |A(G[S_i])|.$$

Así, si

$$|E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|$$

entonces aplicando el lema 3.3 tenemos que

$$|E(G[S_i])| = |Q(G[S_i])| = |A(G[S_i])|.$$

Ahora bien, si

$$|E(G[S_i])| = |Q(G[S_i])|,$$

por el lema 3.5 sabemos que $G[S_i]$ es un ciclo, y si $G[S_i]$ es un ciclo, entonces para cada $x \in V(G[S_i])$ se tiene que $d_{G[S_i]}(x) = 2$, y por tanto

$$Q(G[S_i]) = V(G[S_i]).$$

Ahora bien, como

$$|Q(G[S_i])| = |A(G[S_i])|$$

entonces

$$A(G[S_i]) = Q(G[S_i])$$

y así

$$A(G[S_i]) = V(G[S_i]).$$

De lo anterior se sigue entonces que para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$ tales que

$$|E(G[S_i])| = |A(G[S_i])| \quad \text{y} \quad |E(G[S_j])| = |A(G[S_j])|$$

se tiene que

$$G[S_i] \text{ y } G[S_j] \text{ son ciclos,}$$

y que

$$A(G[S_i]) = V(G[S_i]) \quad \text{y} \quad A(G[S_j]) = V(G[S_j]).$$

Como por definición

$$A(G[S_i]) \cap A(G[S_j]) = \emptyset,$$

entonces

$$V(G[S_i]) \cap V(G[S_j]) = \emptyset$$

y así $G[S_i]$ y $G[S_j]$ son ciclos ajenos en vértices.

De todo lo anterior vemos que

$$\{S_i \in \mathbf{S} : |E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|\}$$

es un conjunto de ciclos ajenos en vértices 2 a 2 en G y concluimos que

$$|\{S_i \in \mathbf{S} : |E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|\}| \leq \phi(G)$$

■

Teorema 3.1 *Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$. Entonces*

$$h(G, \mathbf{L}(G)) = \phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Prueba. Por el lema 3.1 sabemos que

$$h(G, \mathbf{L}(G)) \geq \phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Así pues, para demostrar el teorema basta probar que

$$h(G, \mathbf{L}(G)) \leq \phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Por el corolario 2.2 sabemos que

$$h(G, \mathbf{L}(G)) = |E(G)| - \lambda(G, \mathbf{L}(G)) + 1$$

y entonces, probar el teorema es equivalente a demostrar que

$$\lambda(G, \mathbf{L}(G)) \geq |V(G)| - \phi(G). \tag{3.2}$$

Sea pues

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}^*(G, \mathbf{L}(G)).$$

Por definición, para cada $S_i \in \mathbf{S}$ tenemos que $S_i = E(G[S_i])$ por lo que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| \\ = & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|E(G[S_i])|) - |\mathbf{S}|. \end{aligned}$$

Por otro lado, por el lema 3.2 vemos que

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|A(G[S_i])|)$$

y entonces se sigue que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| - |V(G)| \\
= & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|E(G[S_i])|) - |\mathbf{S}| - \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|A(G[S_i])|) \\
= & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|E(G[S_i])| - 1) - \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|A(G[S_i])|) \\
= & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|E(G[S_i])| - |A(G_i)| - 1).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, obsérvese que cada sumando

$$(|E(G[S_i])| - |A(G[S_i])| - 1)$$

será negativo si y sólo si

$$|E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|,$$

pues tanto $|E(G[S_i])|$ como $|A(G[S_i])|$ son enteros. Entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| - |V(G)| \\
= & \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|E(G[S_i])| - |A(G[S_i])| - 1) \\
\geq & -|\{S_i \in \mathbf{S} : |E(G[S_i])| = |A(G[S_i])|\}|,
\end{aligned}
$$

y como por el lema 3.6 sabemos que

$$|\{S_i \in \mathbf{S} : |E(G[S_i])| = |A(G_i)|\}| \leq \phi(G),$$

se sigue entonces que

$$\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| - |V(G)| \geq -\phi(G)$$

y así

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| \geq |V(G)| - \phi(G)$$

de donde se implica (3.2) y como consecuencia el teorema. ■

Algunas implicaciones de teorema 3.1

Teorema 3.2 *Sea G una gráfica q-regular con $q \geq 2$. Entonces*

$$H(G, K_{1,q}) = \phi(G) + |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Prueba. Sólo obsérvese que dado que G es una gráfica q-regular, la clase de subgráficas de G tales que son isomorfas a $K_{1,q}$ es igual a la familia

$$\mathbf{L}(G) = \{L(x)\}_{x \in V(G)},$$

y así

$$H(G, K_{1,q}) = h(G, \mathbf{L}(G))$$

de donde el resultado se sigue del teorema 3.1. ■

En [20] se prueba que

Teorema 3.3 *Sean n y k enteros tales que $k \geq 0$ y $n \geq 3(k+1)$. Sea G una gráfica de orden n con grado mínimo $\left\lceil \frac{n+k}{2} \right\rceil$. Entonces G contiene $k+1$ ciclos independientes que cubren a todos los vértices de G, de los cuales k de ellos son triángulos.*

■

Ahora bien, para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple que

$$n \geq 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor,$$

entonces

Teorema 3.4 *Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$, tal que $\delta(G) \geq \left\lceil \frac{n+\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1}{2} \right\rceil$. Entonces*

$$h(G, \mathbf{L}(G)) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - n + |E(G)| + 1.$$

Prueba. Del teorema 3.3 se sigue que

$$\phi(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor,$$

y claramente

$$\phi(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

pues cada ciclo independiente contiene al menos 3 vértices. Así

$$\phi(G) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

y del teorema 3.1 se sigue el resultado. ■

Sea G una gráfica plana tal que $\delta(G) \geq 2$, y denotemos como $\mathbf{Ca}(G)$ al conjunto de caras de G.

Entonces

Teorema 3.5 $h(G, \mathbf{L}(G)) = \phi(G) + |\mathbf{Ca}(G)| - 1$.

Prueba. Sólo nótese que dado que G es plana, entonces

$$|E(G)| - |V(G)| = |\mathbf{Ca}(G)| - 2,$$

y con el teorema 3.1 se sigue el resultado. ■

Para cada $C \in \mathbf{Ca}(G)$, sea $E(C)$ el conjunto de aristas de la frontera de C; y sea $h(G, \mathbf{Ca}(G))$ el mínimo número tal que para toda $h(G, \mathbf{Ca}(G))$-coloración de $E(G)$, existe $C \in \mathbf{Ca}(G)$ tal que $E(C)$ es heterocromático.

Si $E(C)$ es heterocromático diremos que C es heterocromático.

Teorema 3.6 *Sea* $G^* = (V(G^*), E(G^*))$ *la gráfica dual de* G. *Si* G^* *es una gráfica simple y* $\delta(G^*) \geq 2$ *entonces*

$$h(G, \mathbf{Ca}(G)) = \phi(G^*) + |V(G)| - 1.$$

Prueba. Obsérvese que dada cualquier coloración de $E(G)$, y por tanto de $E(G^*)$, existe un elemento de $\mathbf{Ca}(G)$ heterocromático si y sólo si existe un elemento de $\mathbf{L}(G^*)$ heterocromático. Así

$$h(G, \mathbf{Ca}(G)) = h(G^*, \mathbf{L}(G^*)).$$

Y como G^* es plana, entonces por el teorema 3.5 vemos que

$$\begin{aligned} h(G, \mathbf{Ca}(G)) &= \phi(G^*) + |\mathbf{Ca}(G^*)| - 1 \\ &= \phi(G^*) + |V(G)| - 1 \end{aligned}$$

y se llega al resultado. ■

Capítulo 4

ESTRELLAS EN GRÁFICAS COMPLETAS

Dado $m \in \mathbb{N}$, denotaremos como

$$K_m = (V(K_m), E(K_m))$$

a la gráfica completa de orden m, y como

$$K_{1,m} = (V(K_{1,m}), E(K_{1,m}))$$

a la estrella de m aristas.

Dados $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$, denotemos como $H(K_n, K_{1,q})$ al número heterocromático de K_n con respecto a la clase $\mathbf{C} = \{K_{1,q}\}$.

En este capítulo demostraremos que para todo par $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$

$$g(n,q) \leq H(K_n, K_{1,q}) \leq \begin{cases} g(n,q) & \text{si } n \text{ ó } q \text{ es par ó } \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} < \frac{1}{2}; \\ g(n,q)+1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde

$$g(n,q) = \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor + 1.$$

4.1 El número heterocromático $H(K_n, K_{1,q})$

4.1.1 La cota inferior

Lema 4.1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$. Entonces*

$$H(K_n, K_{1,q}) \geq g(n,q).$$

Prueba. Probaremos este lema exhibiendo una c-coloración de $E(K_n)$ con

$$c = g(n,q) - 1 = \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor,$$

que es libre de copias de $K_{1,q}$ heterocromáticas.

Para esto, antes de dar la coloración construiremos una familia de subgráficas de K_n.

Primero consideremos a

$$\left\{V_1, ..., V_{\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor}\right\},$$

una partición de los vértices de K_n definida como sigue:

Para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left(\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor - 1\right)$ sea

$$|V_i| = n - q + 2;$$

y

$$\left|V_{\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor}\right| = n - q + 2 + re(n, n-q+2).$$

Ahora para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$, denotemos como G_i a la subgráfica de K_n tal que

$V(G_i) = V_i$

y

a) Para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left(\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor - 1\right)$,

$$G_i \cong K_{n-q+2}$$

b) $G_{\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor}$ es regular de grado $n-q+1$ si n ó q es par; y regular de grado $n-q+1$ excepto por un vértice de grado $n-q+2$ si n y q son impares.

Nótese pues, que para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$ y para cada $x \in V(G_i)$ sucede que

$$d_{G_i}(x) = n - q + 1,$$

salvo si n y q son impares, en cuyo caso existe un único vértice de valencia $n - q + 2$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor} (|E(G_i)|) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor} \left(\sum_{x \in V(G_i)} \frac{d_{G_i}(x)}{2} \right) = \left\lceil \frac{n(n-q+1)}{2} \right\rceil. \quad (4.1)$$

Ahora consideremos la coloración de $E(K_n)$

$$\Gamma : E(K_n) \to \left\{ 1, 2, ..., \left(\left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor \right) \right\}$$

definida como sigue:

a) Para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$,

$$\Gamma[E(G_i)] = i.$$

b) Para las aristas restantes, que por (4.1) son

$$\binom{n}{2} - \left\lceil \frac{n(n-q+1)}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor,$$

Γ les asigna, una a una, los

$$\left(\left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor$$

colores restantes.

Veremos que Γ es una coloración libre de copias de $K_{1,q}$ heterocromáticas. Sea G una subgráfica de K_n tal que $G \cong K_{1,q}$. Para fijar ideas, sea

$$E(G) = \{\{x, y_k\}\}_{k=1}^{q}$$

y

$$V(G) = \{x, y_1, ..., y_q\}.$$

Ahora bien, para alguna $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$ debe ocurrir que $x \in V(G_i)$, y por tanto

$$d_{G_i}(x) \geq n - q + 1.$$

Sea entonces

$$\{\{x, z_k\}\}_{k=1}^{n-q+1} \subseteq E(G_i)$$

con

$$\{x, z_1, ..., z_{n-q+1}\} \subseteq V(G_i),$$

la estrella con centro en x y $n - q + 1$ aristas contenidas en G_i.

Obsérvese que como

$$n - q + 1 + q = n + 1,$$

entonces

$$\left|\{\{x, y_k\}\}_{k=1}^{q} \cap \{\{x, z_k\}\}_{k=1}^{n-q+1}\right| \geq 2$$

y luego

$$|E(G) \cap E(G_i)| \geq 2.$$

Es decir, en $E(G)$ existen dos aristas de color i, y por tanto, no es heterocromática.

Así,

$$H(K_n, K_{1,q}) > \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$$

de donde se sigue el resultado. ■

4.1.2 La cota superior

Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$ y

$$K_n = (V(K_n), E(K_n))$$

la gráfica completa de orden n.

Dada $\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\}$ una familia de subconjuntos de $E(K_n)$ no singulares disjuntos 2 a 2, denotamos como **Graf** $(\mathbf{S})$ a la familia de subgráficas

$$\{G[S_1], ..., G[S_{|\mathbf{S}|}]\}$$

y como $G(\mathbf{S})$ a la subgrafica de K_n definida como

$$E(G(\mathbf{S})) = \bigcup_{i=1}^{|\mathbf{S}|} E(G[S_i])$$

y

$$V(G(\mathbf{S})) = V(K_n).$$

Por último, para cada $x \in V(G(\mathbf{S}))$, sea

$$\mathbf{G_S}[x] = \{G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S}) : x \in V(G[S_i])\}.$$

De estas definiciones es importante resaltar que

Observación 4.1 .

i) $\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\} = \{E(G[S_1]), ..., E(G[S_{|\mathbf{S}|}])\}$.

ii) $\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) = |E(G(\mathbf{S}))|$.

iii) $|\mathbf{S}| = |\mathbf{Graf}(\mathbf{S})|$.

Las 2-transversales segmentadas

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$ y sea $\mathbf{C}$ la clase de gráficas cuyo único elemento es $K_{1,q}$. Por definición, una 2-transversal segmentada del par $(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ es una familia

$$\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(K_n)$ tal que

i) Para cada $S_i \in \mathbf{S}$, $|S_i| \geq 2$;
ii) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, si $i \neq j$ entonces $S_i \cap S_j = \emptyset$;
iii) Dada $G \in \mathbf{C}(K_n)$ existe $S_i \in \mathbf{S}$ tal que $|S_i \cap E(G)| \geq 2$.

Al conjunto de 2-transversales segmentadas del par $(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ lo denotaremos como

$$\mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_{1,q})),$$

y además sea

$$\lambda(K_n, \mathbf{C}(K_n)) = min\{\mathbb{J}(\mathbf{S}) : \mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))\}.$$

Lema 4.2 *Sean $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$; $\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\}$ una familia de subconjuntos de $E(K_n)$ no singulares disjuntos 2 a 2. $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ si y sólo si para cada $x \in V(G(\mathbf{S}))$ se cumple que*

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]|.$$

Prueba.
$\Rightarrow$) Supongamos que existe $x \in V(G(\mathbf{S}))$ tal que

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \leq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| - 1.$$

Entonces existe un conjunto de aristas $\{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{t}$ con

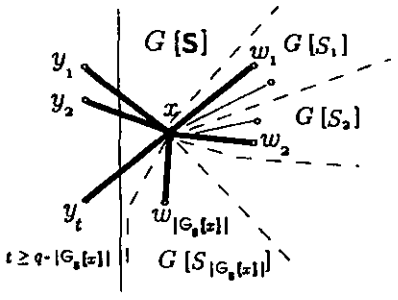
$$t \geq q - |\mathbf{G_S}[x]|$$

que no estan contenidas en $E(G(\mathbf{S}))$ y que son adyacentes al vértice x.

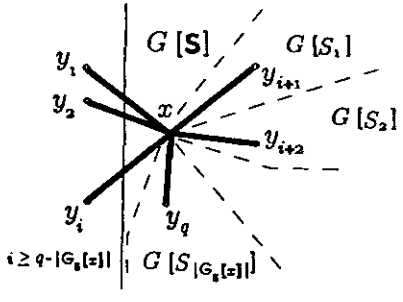
Ahora, para cada $G[S_i] \in \mathbf{G_S}[x]$ escojamos una arista $\{x, w_i\} \in E(G[S_i])$, con x como extremo. Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$\mathbf{G_S}[x] = \{G[S_1], G[S_2], ..., G[S_{|\mathbf{G_S}[x]|}]\}.$$

(Dibujo 4.1a)



Dibujo 4.1a



Dibujo 4.1b

Como $t \geq q - |\mathbf{G_S}[x]|$ entonces el conjunto de aristas

$$\{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{t} \cup \{\{x, w_i\}\}_{i=1}^{|\mathbf{G_S}[x]|}$$

es o contiene una subgráfica G isomorfa a $K_{1,q}$, donde el centro de la estrella G es x.

Además, por como se escogieron el conjunto de aristas $\{\{x, w_i\}\}_{i=1}^{|\mathbf{G_S}[x]|}$, tenemos que para toda $i \in \mathbf{N}$ tal que $1 \leq i \leq |\mathbf{S}|$ sucede que

$$|E(G[S_i]) \cap E(G)| \leq 1,$$

y entonces se sigue que para toda $S_i \in \mathbf{S}$

$$|S_i \cap E(G)| \leq 1$$

lo cual implica que $\mathbf{S} \notin \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\mathbf{S} \notin \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$. Esto por definición es equivalente a que existe una subgráfica $G \in \mathbf{C}(K_n)$ tal que para cada $S_i \in \mathbf{S}$ sucede que

$$|S_i \cap E(G)| \leq 1.$$

Para fijar ideas, supongamos que

$$E(G) = \{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{q}$$

y

$$V(G) = \{x, y_1, ..., y_q\}.$$

Como para cada $S_i \in \mathbf{S}$ tenemos que

$$|S_i \cap E(G)| \leq 1$$

entonces:

a) Para cada $G[S_i] \in \mathbf{G_S}[x]$

$$|E(G[S_i]) \cap \{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{q}| \leq 1.$$

b) Para cada $G[S_i] \notin \mathbf{G_S}[x]$

$$|E(G[S_i]) \cap \{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{q}| = 0.$$

Por lo tanto

$$|\{\{x, y_i\}\}_{i=1}^{q} \cap E(G(\mathbf{S}))| \leq |\mathbf{G_S}[x]|.$$

(Dibujo 4.2b).

Así, el número de aristas adyacentes a x que no están en $E(G(\mathbf{S}))$ es mayor o igual a $q - |\mathbf{G_S}[x]|$, es decir

$$n - 1 - d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq q - |\mathbf{G_S}[x]|$$

de donde se sigue el resultado. ■

Las 2-transversales segmentadas óptimas

En esta sección centraremos nuestra atención en el conjunto de 2-transversales

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$$

tales que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| = \lambda(K_n, \mathbf{C}(K_n)).$$

A este conjunto de 2-transversales segmentadas lo denotaremos como

$$\mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n)).$$

Lema 4.3 *Sean* $n, q \in \mathbb{N}$ *tales que* $n > q \geq 2$ *y* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$. *Si* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ *entonces toda* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ *es una gráfica conexa.*

Prueba. Probaremos este resultado por reducción al absurdo.

Primero nótese (observación 4.1 *i*)) que

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} = \{E(G[S_1]), ..., E(G[S_{|\mathbf{S}|}])\}.$$

Sean $G[S_t] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ no conexa y

$$G_t^1, ..., G_t^r$$

las $r \geq 2$ componentes conexas de $G[S_t]$, donde para cada $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j \leq r$,

$$G_t^j = (V(G_t^j), E(G_t^j)).$$

Claramente, para cada gráfica $G \in \mathbf{C}(K_n)$,si

$$|E(G[S_t]) \cap E(G)| \geq 2$$

entonces existe G_t^i con $1 \leq i \leq r$ tal que

$$|E(G_t^i) \cap E(G)| \geq 2.$$

Por tanto

$$\mathbf{S}' = \left\{ \begin{array}{c} E(G[S_1]), ..., E(G[S_{t-1}]), E(G_t^1), ..., \\ E(G_t^r), E(G[S_{t+1}]), ..., E(G[S_{|\mathbf{S}|}]) \end{array} \right\}$$

es una pretransversal del par $(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ tal que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') < \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

pues $|\mathbf{S}'| > |\mathbf{S}|$.

Así, por el lema 2.3, sabemos que existe $\mathbf{S}'' \subseteq \mathbf{S}'$ tal que

$$\mathbf{S}'' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n)) \quad \text{y} \quad \mathbb{J}(\mathbf{S}'') \leq \mathbb{J}(\mathbf{S}')$$

por lo que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}'') < \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

y sigue el resultado. ■

Las 2-transversales segmentadas óptimas de cardinal mínimo

Ahora centraremos nuestra atención en el subconjunto de $\mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ formado por las 2-transversales cuyo número de segmentos $|\mathbf{S}|$, sea mínimo. En otras palabras, fijaremos nuestra atención en el conjunto

$$\{\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n)) : \text{para toda } \mathbf{S}' \in \mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n)), |\mathbf{S}| \leq |\mathbf{S}'|\}.$$

A este conjunto de 2-transversales segmentadas lo denotaremos como

$$\mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n)).$$

En lo que resta de esta sección, sean $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$ y

$$\mathbf{S} = \{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}^*(K_n, \mathbf{C}(K_n));$$

Lema 4.4 *Si* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ *entonces cada* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ *es una subgráfica inducida de* $G(\mathbf{S})$.

Prueba. Supongamos que el resultado es falso. Sea $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ y sean, sin pérdida de generalidad, $G[S_1], G[S_2] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ tales que existen $x, y \in V(G(\mathbf{S}))$ donde

$$\{x, y\} \in E(G[S_2]) \quad \text{y} \quad x, y \in V(G[S_1]),$$

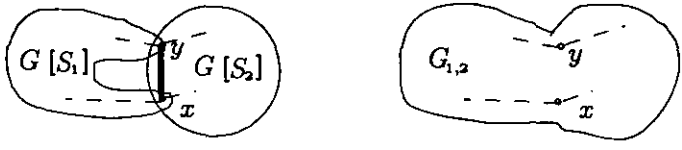
es decir, que $G[S_1]$ no es inducida en $G(\mathbf{S})$.

Sea $G_{1,2}$ la subgráfica de $G(\mathbf{S})$ definida como:

$$E(G_{1,2}) = (E(G[S_1]) \cup E(G[S_2])) \setminus \{\{x, y\}\}$$

y

$$V(G_{1,2}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,2})} e \quad \text{(Dibujo 4.2).}$$



Dibujo 4.2

Ahora sea

$$\mathbf{S}' = \left\{E\left(G_{1,2}\right), E\left(G\left[S_3\right]\right), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

y

$$G\left(\mathbf{S}'\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right).$$

Obsérvese que como

$$\left|E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)\right| = \left|E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right| + 1 \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}| = |\mathbf{S}'| + 1,$$

entonces (observación 4.1 *ii*))

$$\mathbb{J}\left(\mathbf{S}'\right) = \mathbb{J}\left(\mathbf{S}\right)$$

y

$$|\mathbf{S}'| < |\mathbf{S}|.$$

Así, si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right),$$

tendríamos entonces que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}^*\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$ y se seguiría que

$$\mathbf{S} \notin \mathbf{T}^*_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right),$$

demostrando así este lema.

A continuación veremos que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$.

La argumentación siguiente será usada constantemente en las demostraciones de los próximos lemas, por lo que en esas demostraciones sólamente haremos referencia a ésta.

Primero obsérvese que por el lema 2.4, la familia

$$\mathbf{S}'' = \left\{\left(E\left(G\left[S_1\right]\right) \cup E\left(G\left[S_2\right]\right)\right), E\left(G\left[S_3\right]\right), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

es un elemento de $\mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$. Ahora sea

$$G\left(\mathbf{S}''\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}''\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}''\right)\right)\right).$$

Por el lema 4.2 vemos que para toda $z \in V\left(G\left(\mathbf{S}''\right)\right)$ se cumple que

$$d_{G(\mathbf{S}'')}\left(z\right) \geq n - q + \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}''}\left[z\right]\right|,$$

y como la única diferencia entre $\mathbf{S}'$ y $\mathbf{S}''$ es la arista $\{x,y\}$ se sigue entonces que en $G(\mathbf{S}')$

$$\text{Para toda } z \in V(G(\mathbf{S}')) \setminus \{x,y\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[z]|. \quad (4.2)$$

Entonces, a la luz del lema 4.2, para probar que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ sólo resta ver qué sucede con los vértices x e y.

Hasta aquí llega la argumentación que repetiremos constantemente.

Ahora bien, como

$$E(G(\mathbf{S})) \setminus \{\{x,y\}\} = E(G(\mathbf{S}'))$$

se sigue que

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 \quad \text{y} \quad d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1.$$

Por otro lado, como

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \{E(G[S_1]), E(G[S_2])\}) \cup E(G_{1,2})$$

y

$$\{x,y\} \subseteq (V(G[S_1]) \cap V(G[S_2])) \quad \text{y} \quad x,y \in V(G_{1,2})$$

entonces

$$|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]| - 1 = |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[x]| \quad \text{y} \quad |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]| - 1 = |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[y]|.$$

Por tanto, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ tenemos entonces (lema 4.2) que

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]| \quad \text{y} \quad d_{G(\mathbf{S})}(y) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]|,$$

y así

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]| - 1 = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[x]|$$

y

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[y]|.$$

Así, con (4.2) vemos que para todo $z \in V(G(\mathbf{S}'))$

$$d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[z]|$$

y por tanto (lema 4.2) $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$. ■

Lema 4.5 *Si* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ *entonces para cada* $x \in V(G(\mathbf{S}))$ *tal que* $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$ *se cumple que*

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]|.$$

Prueba. Demostraremos este resultado por reducción al absurdo.

Supongamos que $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ y sea $x \in V(G(\mathbf{S}))$ tal que $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$ y

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1.$$

Como $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$, sean pues, sin pérdida de generalidad,

$$G[S_1], G[S_2] \in \mathbf{G_S}[x], \quad \{x,y\} \in E(G[S_1]) \quad \text{y} \quad \{x,w\} \in E(G[S_2]).$$

Caso 1. y es adyacente a w en $G(\mathbf{S})$.

Como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, entonces por el lema 4.4 sabemos que tanto $G[S_1]$ como $G[S_2]$ son gráficas inducidas en $G(\mathbf{S})$, por lo que

$$\{y,w\} \notin E(G[S_1]) \cup E(G[S_2]).$$

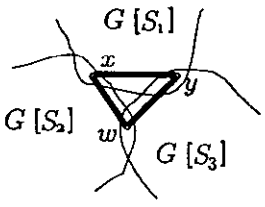
Sea pues $S_3 \in \mathbf{S}$ tal que

$$\{y,w\} \in E(G[S_3]).$$

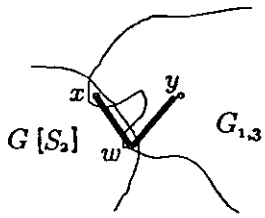
Nuevamente, como $G[S_1]$ es una gráfica inducida en $G(\mathbf{S})$, y dado que

$$\{x,y\} \in E(G[S_1]) \quad \text{y} \quad \{w,y\} \in E(G[S_3]),$$

entonces $x \notin V(G[S_3])$ (Dibujo 4.3a).



Dibujo 4.3a



Dibujo 4.3b

Así, sea $G_{1,3}$ la subgráfica de $G(\mathbf{S})$ definida como:

$E(G_{1,3}) = (E(G[S_1]) \cup E(G[S_3])) \setminus \{x, y\}$

y

$V(G_{1,3}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,3})} e$ (Dibujo 4.3.b).

Ahora sea

$$\mathbf{S}' = \left\{E(G_{1,3}), E(G[S_2]), E(G[S_4]), ..., E\left(G\left[S_{|\mathbf{S}|}\right]\right)\right\}$$

y

$$G(\mathbf{S}') = (V(G(\mathbf{S}')), E(G(\mathbf{S}'))).$$

Obsérvese que como

$$|E(G(\mathbf{S}))| = |E(G(\mathbf{S}'))| + 1 \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}| = |\mathbf{S}'| + 1,$$

entonces (observación 4.1 *ii*))

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') = \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

y

$$|\mathbf{S}'| < |\mathbf{S}|.$$

Así, si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$$

tendríamos que $\mathbf{S} \notin \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, terminando con este caso.

Ahora bien, de manera análoga que en la prueba del lema 4.4, vemos que

$$\text{Para toda } z \in V(G(\mathbf{S}')) \setminus \{x, y\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[z]|, \quad (4.3)$$

y como

$$E(G(\mathbf{S})) \setminus \{\{x, y\}\} = E(G(\mathbf{S}')),$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 \quad \text{y} \quad d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1.$$

Por otro lado, como

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \{E(G[S_1]), E(G[S_3])\}) \cup E(G_{1,3})$$

entonces:

a) Dado que

$$y \in V(G[S_1]) \cap V(G[S_3]) \quad \text{e} \quad y \in V(G_{1,3})$$

se tiene

$$|\mathbf{G_S}[y]| - 1 = |\mathbf{G_{S'}}[y]|.$$

b) Como $x \notin V(G[S_3])$, se sigue que

$$|\mathbf{G_S}[x]| = |\mathbf{G_{S'}}[x]| \text{ si } x \in V(G_{1,3})$$

ó

$$|\mathbf{G_S}[x]| = |\mathbf{G_{S'}}[x]| + 1 \text{ si } x \notin V(G_{1,3}).$$

En todo caso

$$|\mathbf{G_S}[x]| \geq |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así pues, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ entonces (lema 4.2)

$$d_{G(\mathbf{S})}(y) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]|$$

y así

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[y]|;$$

y como por hipótesis

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| \geq n - q + |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Por tanto, con (4.3) vemos que para todo $z \in V(G(\mathbf{S}'))$

$$d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G_{S'}}[z]|$$

y por tanto (lema 4.2) $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$.

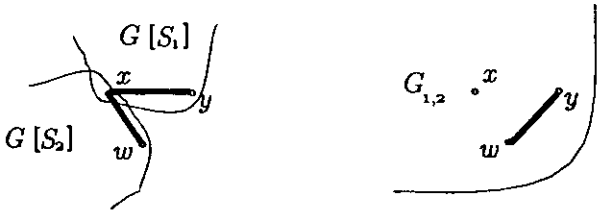
Caso 2. y no es adyacente a w en $G(\mathbf{S})$.

Sea en este caso $G_{1,2}$ la subgráfica de K_n definida como:

$$E(G_{1,2}) = ((E(G[S_1]) \cup E(G[S_2])) \setminus \{\{x,y\},\{x,w\}\}) \cup \{\{y,w\}\}$$

y

$V(G_{1,2}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,2})} e$ (Dibujo 4.4).



Dibujo 4.4

Ahora definamos

$$\mathbf{S}' = \{E(G_{1,2}), E(G[S_3]), ..., E(G_{|\mathbf{S}|})\}$$

y sea

$$G(\mathbf{S}') = (V(G(\mathbf{S}')), E(G(\mathbf{S}'))).$$

Nuevamente

$$|E(G(\mathbf{S}))| = |E(G(\mathbf{S}'))| + 1 \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}| = |\mathbf{S}'| + 1,$$

y entonces

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') = \mathbb{J}(\mathbf{S}) \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}'| < |\mathbf{S}|.$$

Así, probando que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n)),$$

termimos con este caso.

Una vez más, de forma análoga que en la demostración del lema 4.4 vemos que

$$\text{Para toda } z \in V(G(\mathbf{S}')) \setminus \{x,y,w\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[z]|, \quad (4.4)$$

y dado que

$$(E(G(\mathbf{S})) \setminus \{\{x,y\},\{x,w\}\}) \cup \{\{y,w\}\} = E(G(\mathbf{S}'))$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y); \quad d_{G(\mathbf{S}')}(w) = d_{G(\mathbf{S})}(w)$$

y

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 2.$$

Por otro lado, como

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \{E(G[S_1]), E(G[S_2])\}) \cup E(G_{1,2})$$

entonces:

a) Dado que

$$\{y,w\} \subseteq V(G[S_1]) \cup V(G[S_2]) \quad \text{y} \quad y,w \in V(G_{1,2}),$$

entonces

$$|\mathbf{G_S}[y]| \geq |\mathbf{G_{S'}}[y]| \quad \text{y} \quad |\mathbf{G_S}[w]| \geq |\mathbf{G_{S'}}[w]|.$$

b) Como $x \in V(G[S_1]) \cap V(G[S_2])$ se sigue que

$$|\mathbf{G_S}[x]| = |\mathbf{G_{S'}}[x]| + 1 \text{ si } x \in V(G_{1,2})$$

y

$$|\mathbf{G_S}[x]| = |\mathbf{G_{S'}}[x]| + 2 \text{ si } x \notin V(G_{1,2}).$$

En cualquier caso

$$|\mathbf{G_S}[x]| - 1 \geq |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, por el lema 4.2 vemos que

$$\begin{aligned} d_{G(\mathbf{S}')}(y) &= d_{G(\mathbf{S})}(y) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]| \geq n - q + |\mathbf{G_{S'}}[y]|; \\ d_{G(\mathbf{S}')}(w) &= d_{G(\mathbf{S})}(w) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[w]| \geq n - q + |\mathbf{G_{S'}}[w]|, \end{aligned}$$

y como por hipótesis

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1.$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 2 = n - q + |\mathbf{G_S}[x]| - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así, con (4.4) y el lema 4.2 se sigue que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$. ■

Lema 4.6 *Existe* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^{*}_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ *tal que para cada* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$, $\delta(G[S_i]) \geq 2$.

Prueba. Supongamos que el lema es falso.

Sea pues $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^{*}_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ con el mínimo número de parejas $(z, G[S_i])$, con

$$z \in V(G(\mathbf{S})) \quad \text{y} \quad G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$$

tales que $d_{G[S_i]}(z) = 1$.

Sin pérdida de generalidad, sea

$$G[S_1] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S}) \quad \text{y} \quad y \in V(G(\mathbf{S}))$$

tales que $d_{G[S_1]}(y) = 1$, y sea

$$\{x, y\} \in E(G[S_1]).$$

Obsérvese que como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^{*}_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ entonces por el lema 4.3 $G[S_1]$ es conexa y como $|V(G[S_1])| \geq 3$, entonces $d_{G[S_1]}(x) \geq 2$.

Caso 1. $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$.

Dado que $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$, entonces existe, sin pérdida de generalidad, $G[S_2] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ tal que

$$G[S_1] \neq G[S_2] \quad \text{y} \quad G[S_2] \in \mathbf{G_S}[x].$$

Nótese que por el lema 4.4, $G[S_2]$ es una subgráfica inducida de $G(\mathbf{S})$ por lo tanto

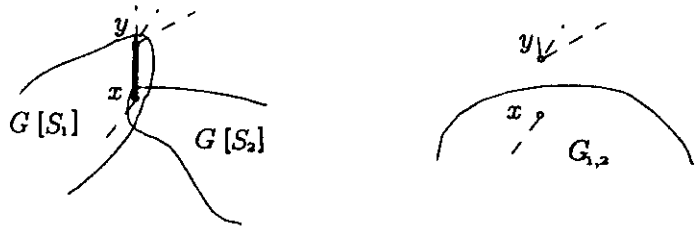
$$y \notin V(G[S_2]).$$

Sea entonces $G_{1,2}$ la subgráfica de $G(\mathbf{S})$ definida como:

$$E(G_{1,2}) = (E(G[S_1]) \cup E(G[S_2])) \setminus \{\{x, y\}\}$$

y

$$V(G_{1,2}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,2})} e$$ (Dibujo 4.5. Página siguiente).



Dibujo 4.5

Ahora definamos la familia

$$\mathbf{S}' = \left\{E\left(G_{1,2}\right), E\left(G\left[S_3\right]\right), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

y sea

$$G\left(\mathbf{S}'\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right).$$

Obsérvese que

$$\left|E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)\right| = \left|E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right| + 1 \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}| = |\mathbf{S}'| + 1,$$

y entonces

$$\mathbb{J}\left(\mathbf{S}'\right) = \mathbb{J}\left(\mathbf{S}\right) \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}'| < |\mathbf{S}|.$$

Así, si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right),$$

tendríamos que $\mathbf{S} \notin \mathbf{T}^{*}_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$, terminando con este caso.

De manera análoga que en la prueba del lema 4.4, vemos que:

$$\text{Para toda } z \in V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right) \setminus \{x, y\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(z\right) \geq n - q + \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}\left[z\right]\right|, \qquad (4.5)$$

y como

$$E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) \setminus \{\{x, y\}\} = E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right),$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}\left(y\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(y\right) - 1 \quad \text{y} \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(x\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(x\right) - 1\ .$$

Por otro lado, como

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus \{(E(G[S_1]), E(G[S_2]))\}) \cup \{E(G_{1,2})\}$$

entonces:

a) Dado que $y \notin V(G[S_2])$, entonces $y \notin V(G_{1,2})$ y así

$$|\mathbf{G_S}[y]| - 1 = |\mathbf{G_{S'}}[y]|.$$

b) Como

$$x \in V(G[S_1]) \cap V(G[S_2]) \quad \text{y} \quad x \in V(G_{1,2})$$

entonces

$$|\mathbf{G_S}[x]| - 1 = |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así, dado que $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, entonces (lema 4.2)

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[y]|$$

y

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| - 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Y así, con (4.5) y el lema 4.2 se sigue que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$.

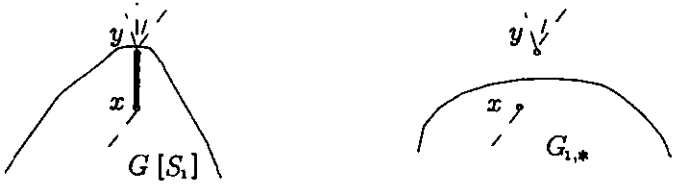
Caso 2. $|\mathbf{G_S}[x]| = 1$ y $d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1 = n - q + 2$.

En este caso sea $G_{1,*}$ la subgráfica de $G(\mathbf{S})$ definida como:

$E(G_{1,*}) = E(G[S_1]) \setminus \{\{x, y\}\}$

y

$V(G_{1,*}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,*})} e$ (Dibujo 4.6).



Dibujo 4.6

Ahora definamos

$$\mathbf{S}' = \left\{E\left(G_{1,*}\right), E\left(G\left[S_2\right]\right), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

y sea

$$G\left(\mathbf{S}'\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right).$$

En este caso

$$\left|E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)\right| = \left|E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right| + 1 \quad \text{y} \quad \left|\mathbf{S}\right| = \left|\mathbf{S}'\right|,$$

por lo que

$$\mathbb{J}\left(\mathbf{S}'\right) < \mathbb{J}\left(\mathbf{S}\right).$$

Así, si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right),$$

tendríamos que $\mathbf{S} \notin \mathbf{T}^*\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$, terminando con este caso.

Análogamente que en la prueba del lema 4.4, vemos que:

$$\text{Para toda } z \in V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right) \setminus \{x, y\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(z\right) \geq n - q + \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}\left[z\right]\right|, \quad (4.6)$$

y como

$$E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) \setminus \left\{\{x, y\}\right\} = E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}\left(y\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(y\right) - 1 \quad \text{y} \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(x\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(x\right) - 1.$$

Dado que

$$\mathbf{S}' = \left(\mathbf{S} \setminus E\left(G\left[S_1\right]\right)\right) \cup E\left(G_{1,*}\right)$$

entonces:

a) Como $y \in V\left(G\left[S_1\right]\right)$ y $y \notin V\left(G_{1,*}\right)$

$$\left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}\left[y\right]\right| - 1 = \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}\left[y\right]\right|.$$

b) Dado que $x \in V\left(G\left[S_1\right]\right)$ y $x \in V\left(G_{1,*}\right)$ entonces

$$\left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}\left[x\right]\right| = \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}\left[x\right]\right|.$$

Así pues, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, por el lema 4.2 sabemos que

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[y]|,$$

y como por hipótesis

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) - 1 = n - q + |\mathbf{G_S}[x]| = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así, por (4.6) y el lema 4.2 tenemos que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$.

Caso 3. $|\mathbf{G_S}[x]| = 1$; $d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]|$ y para cada $z \in V(G[S_1])$

$$\{x, z\} \in E(G[S_1]).$$

Dado que $|\mathbf{G_S}[x]| = 1$ y que x es adyacente a todos los vértices de $G[S_1]$ se sigue que

$$|V(G[S_1])| = d_{G[S_1]}(x) + 1 = n - q + 2.$$

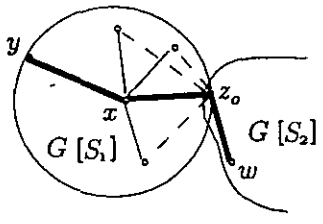
Sea $z_0 \in V(G[S_1]) \setminus \{x, y\}$. Dado que $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ entonces por el lema 4.2 sabemos que

$$d_{G(\mathbf{S})}(z_0) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[z_0]| \geq n - q + 1,$$

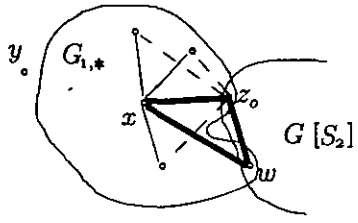
y como en la gráfica $G[S_1]$, el vértice y sólo es adyacente a x, entonces en $G(\mathbf{S})$ el vértice z_0 debe ser adyacente a algún $w \notin V(G[S_1])$ donde $\{z_0, w\} \in E(G[S_i])$ para algún $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ tal que $i \neq 1$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 2$.

Por otro lado, como x sólo es adyacente a vértices en $G[S_1]$, entonces w no es adyacente a x en $G(\mathbf{S})$ (Dibujo 4.7a).



Dibujo 4.7a



Dibujo 4.7b

Sea pues $G_{1,\bullet}$ la subgráfica de K_n definida como:

$$E(G_{1,\bullet}) = (E(G[S_1]) \setminus \{\{x,y\}\}) \cup \{\{x,w\}\}$$

y

$$V(G_{1,\bullet}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,\bullet})} e.$$

Ahora definamos

$$\mathbf{S}' = \left\{E(G_{1,\bullet}), E(G[S_2]), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

y sea

$$G(\mathbf{S}') = (V(G(\mathbf{S}')), E(G(\mathbf{S}'))).$$

Aquí

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}') = \mathbb{J}(\mathbf{S}) \quad \text{y} \quad |\mathbf{S}| = |\mathbf{S}'|,$$

por lo que si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n)),$$

como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ entonces $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}^*_{\min}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, pero en $G(\mathbf{S}')$ sucede que

$$\{z_0, w\} \in E(G[S_2]) \quad \text{y} \quad \{\{x, z_0\}, \{x, w\}\} \subseteq E(G_{1,\bullet}),$$

por lo que $G_{1,\bullet}$ no es una subgráfica inducida de $G(\mathbf{S}')$ (Dibujo 4.7b) lo cual contradice el lema 4.4.

Análogamente que en la prueba del lema 4.4, vemos que:

$$\text{Para toda } z \in V(G(\mathbf{S}')) \setminus \{x,y,w\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}(z) \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[z]|, \quad (4.7)$$

y dado que

$$(E(G(\mathbf{S})) \setminus \{\{x,y\}\}) \cup \{\{x,w\}\} = E(G(\mathbf{S}'))$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(y) = d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1; \quad d_{G(\mathbf{S}')}(w) = d_{G(\mathbf{S})}(w) + 1$$

y

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x).$$

Por otro lado

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus E(G[S_1])) \cup E(G_{1,*}),$$

entonces:

a) Como $y \in V(G[S_1])$ y $y \notin V(G_{1,*})$

$$|\mathbf{G_S}[y]| - 1 = |\mathbf{G_{S'}}[y]|.$$

b) Dado que $w \notin V(G[S_1])$ y $w \in V(G_{1,*})$ entonces

$$|\mathbf{G_S}[w]| + 1 = |\mathbf{G_{S'}}[w]|.$$

c) Como $x \in V(G[S_1])$ y $x \in V(G_{1,*})$ se sigue que

$$|\mathbf{G_S}[x]| = |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Así pues, como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ entonces por el lema 4.2 vemos que

$$\begin{aligned} d_{G(\mathbf{S}')}(y) &= d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[y]|; \\ d_{G(\mathbf{S}')}(w) &= d_{G(\mathbf{S})}(w) + 1 \geq n - q + |\mathbf{G_S}[w]| + 1 = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[w]|, \end{aligned}$$

y como por hipótesis

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1,$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]| = n - q + |\mathbf{G_{S'}}[x]|.$$

Luego, con (4.7) y el lema 4.2 se sigue que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$.

Caso 4. $|\mathbf{G_S}[x]| = 1$; $d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]|$ y existe $w \in V(G[S_1])$ tal que x es no es adyacente a w en $G[S_1]$.

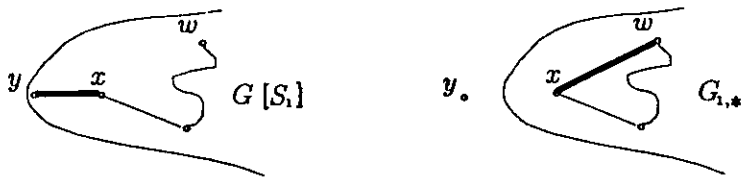
Dado que $|\mathbf{G_S}[x]| = 1$, sabemos que si x es no es adyacente a w en $G[S_1]$ entonces x no es adyacente a w en $G(\mathbf{S})$ pues x sólo es vértice de $G[S_1]$.

Sea pues $G_{1,*}$ la subgráfica de K_n definida como:

$$E(G_{1,*}) = (E(G[S_1]) \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, w\}\}$$

y

$$V(G_{1,*}) = \bigcup_{e \in E(G_{1,*})} e \quad \text{(Dibujo 4.8. Página siguiente).}$$



Dibujo 4.8

Ahora sean

$$\mathbf{S}' = \left\{E\left(G_{\mathbf{1},*}\right), E\left(G\left[S_2\right]\right), ..., E\left(G_{|\mathbf{S}|}\right)\right\}$$

y

$$G\left(\mathbf{S}'\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)\right).$$

En este caso nuevamente

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{S}'\right) = \mathbb{J}\left(\mathbf{S}\right).$$

Así, si probamos que

$$\mathbf{S}' \in \mathbf{T}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right),$$

como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}^*_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$ entonces $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}^*_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$. Sin embargo, por hipótesis $\mathbf{S}$ tiene el mínimo número de parejas $\left(z, G\left[S_i\right]\right)$ con

$$z \in V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) \quad \text{y} \quad G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(S\right),$$

tales que $d_{G[S_i]}\left(z\right) = 1$ en el conjunto $\mathbf{T}^*_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$ y vemos que $\mathbf{S}'$ tiene menos de tales parejas, por lo cual este caso tampoco es posible y quedaría demostrado el lema.

De forma análoga que en la prueba del lema 4.4 vemos que:

$$\text{Para toda } z \in V\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right) \setminus \{x, y, w\}, \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(z\right) \geq n - q + \left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}\left[z\right]\right|, \quad (4.8)$$

y como

$$\left(E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) \setminus \{\{x, y\}\}\right) \cup \{\{x, w\}\} = E\left(G\left(\mathbf{S}'\right)\right)$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}\left(y\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(y\right) - 1; \quad d_{G(\mathbf{S}')}\left(x\right) = d_{G(\mathbf{S})}\left(x\right)$$

y

$$d_{G(\mathbf{S}')}(w) = d_{G(\mathbf{S})}(w) + 1.$$

Dado que

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{S} \setminus E(G[S_1])) \cup E(G_{1,*})$$

entonces

a) Como $y \in V(G[S_1])$ y $y \notin V(G_{1,*})$

$$|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]| - 1 = |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[y]|.$$

b) Dado que $\{x, w\} \subseteq V(G[S_1])$ y $\{x, w\} \subseteq V(G_{1,*})$ entonces

$$|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]| = |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[x]| \quad \text{y} \quad |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[w]| = |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[w]|.$$

Como $\mathbf{S} \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$, por el lema 4.2 vemos que

$$\begin{aligned} d_{G(\mathbf{S}')}(y) &= d_{G(\mathbf{S})}(y) - 1 \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]| - 1 = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[y]|; \\ d_{G(\mathbf{S}')}(w) &= d_{G(\mathbf{S})}(w) + 1 \geq n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[y]| + 1 = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[y]| + 1 \end{aligned}$$

y como por hipótesis

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|$$

entonces

$$d_{G(\mathbf{S}')}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]| = n - q + |\mathbf{G}_{\mathbf{S}'}[x]|.$$

Así, con (4.8) y el lema 4.2 se sigue que $\mathbf{S}' \in \mathbf{T}(K_n, \mathbf{C}(K_n))$. ■

Sobre las 2-transversales del lema 4.6

A la luz del lema 4.6 sabemos que para toda $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n > q \geq 2$, existe

$$\mathbf{S} \in \mathbf{T}^{*}_{\min}\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_n\right)\right)$$

tal que para cada $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right), \delta\left(G\left[S_i\right]\right) \geq 2$.

Son este tipo de 2-transversales las que nos permitirán demostrar el resultado principal de este capítulo.

En lo que resta de esta sección, sean $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n > q \geq 2$ y

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ...S_{|\mathbf{S}|}\right\}$$

una de estas 2-transversales segmentadas del par $\left(K_n, \mathbf{C}\left(K_{1,q}\right)\right)$.

Además sea

$$\mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right) = \left\{G\left[S_1\right], ..., G\left[S_{|\mathbf{S}|}\right]\right\}$$

y

$$G\left(\mathbf{S}\right) = \left(V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right), E\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)\right).$$

Ahora definamos

$$Ram\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) = \left\{x \in V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right) : \left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right| \geq 2\right\},$$

y para cada $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$

$$ord\left(G\left[S_i\right]\right) = \sum_{x \in V\left(G\left[S_i\right]\right)} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right|}\right).$$

Lema 4.7 *Para cada* $x \in Ram\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)$,

$$\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right| \leq n - q.$$

Prueba. Sea $x \in Ram\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)$

Es claro que

$$d_{G(\mathbf{S})}\left(x\right) = \sum_{G\left[S_i\right] \in \mathbf{G_S}\left[x\right]} \left(d_{G\left[S_i\right]}\left(x\right)\right),$$

y como para cada $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$ sucede que $\delta\left(G\left[S_i\right]\right) \geq 2$, entonces

$$d_{G(\mathbf{S})}\left(x\right) \geq 2\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right|.$$

Por otro lado, como $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 2$, entonces por el lema 4.5 tenemos que

$$d_{G(\mathbf{S})}(x) = n - q + |\mathbf{G_S}[x]|,$$

por tanto

$$n - q + |\mathbf{G_S}[x]| \geq 2|\mathbf{G_S}[x]|$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 4.8 *Sea* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ *tal que*

$$|V(G[S_i]) \cap Ram(G(\mathbf{S}))| = k.$$

Entonces

i) $ord(G[S_i]) \geq \frac{k}{n-q}$.

ii) Si $k \leq 2$ *entonces* $ord(G[S_i]) \geq n - q + 2 - k$.

iii) Si $ord(G[S_i]) < n - q + 2 - k$ *entonces* $|V(G[S_i])| = k$.

Prueba.

i) Dada $x \in V(G[S_i])$, si $x \in Ram(G(\mathbf{S}))$ entonces por el lema 4.7 sabemos que $|\mathbf{G_S}[x]| \leq n - q$.

Así

$$\begin{aligned} ord(G[S_i]) &= \sum_{x \in V(G[S_i])} \left(\frac{1}{|\mathbf{G_S}[x]|} \right) \\ &\geq \sum_{x \in (V(G[S_i]) \cap Ram(G(\mathbf{S})))} \left(\frac{1}{|\mathbf{G_S}[x]|} \right) \\ &\geq \sum_{x \in (V(G[S_i]) \cap Ram(G(\mathbf{S})))} \left(\frac{1}{n-q} \right) = \frac{k}{n-q}. \end{aligned}$$

ii) Como $|V(G[S_i])| \geq 3$, entonces existe $x \in V(G[S_i])$ tal que

$$x \in V(G[S_i]) \setminus Ram(G(\mathbf{S})),$$

y por lo tanto

$$|\mathbf{G_S}[x]| = 1 \quad \text{y} \quad d_{G[S_i]}(x) = d_{G(\mathbf{S})}(x).$$

Por el lema 4.2 vemos entonces que

$$d_{G[S_i]}(x) \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]|$$

lo cual implica que

$$|V(G[S_i])| \geq n - q + |\mathbf{G_S}[x]| + 1 = n - q + 2.$$

Así,

$$|V(G[S_i]) \setminus Ram(G(\mathbf{S}))| \geq n - q + 2 - k$$

y entonces

$$\begin{aligned} ord(G[S_i]) &= \sum_{x \in V(G[S_i])} \left(\frac{1}{|\mathbf{G_S}[x]|} \right) \\ &\geq \sum_{x \in V(G[S_i]) \setminus Ram(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{1}{|\mathbf{G_S}[x]|} \right) \\ &= |V(G[S_i]) \setminus Ram(G(\mathbf{S}))| \\ &\geq n - q + 2 - k. \end{aligned}$$

iii) Sea $G[S_i]$ tal que $ord(G[S_i]) < n - q + 2 - k$.
Si

$$V(G[S_i]) \setminus Ram(G(\mathbf{S})) \neq \emptyset$$

entonces, análogamente que en el caso *ii)*, tendríamos que

$$ord(G[S_i]) \geq n - q + 2 - k.$$

Por lo tanto

$$V(G[S_i]) \subseteq Ram(G(\mathbf{S}))$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 4.9 $\sum_{G[S_i]\in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})} ord\left(G\left[S_i\right]\right) = n.$

Prueba. Considérese la gráfica bipartita

$$B = \left(V\left(B\right), E\left(B\right)\right)$$

definida como:

$V\left(B_1\right) = V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)$;
$V\left(B_2\right) = \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$

y

dado $x \in V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)$ y $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$, tenemos que

$$\left(x, G\left[S_i\right]\right) \in E\left(B\right) \text{ si y sólo si } x \in V\left(G\left[S_i\right]\right).$$

Nótese que por definición de $\mathbf{G_S}\left[x\right]$, esto último equivale a que

$$\left(x, G\left[S_i\right]\right) \in E\left(B\right) \text{ si y sólo si } G\left[S_i\right] \in \mathbf{G_S}\left[x\right].$$

Ahora, a cada arista $\left(x, G\left[S_i\right]\right)$ de B asignémosle el peso

$$\frac{1}{\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right|}.$$

Así, contando los pesos de las aristas de B por $V\left(B_1\right)$ vemos que

$$\sum_{x\in V(G(\mathbf{S}))} \left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G_S}[x]} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right|} \right) \right)$$
$$= \sum_{x\in V(G(\mathbf{S}))} (1) = \left|V\left(G\left(\mathbf{S}\right)\right)\right| = n.$$

Y contando los pesos de las aristas de B por $V\left(B_2\right)$ obtenemos

$$\sum_{G[S_i]\in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})} \left(\sum_{x\in V(G[S_i])} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{G_S}\left[x\right]\right|} \right) \right) = \sum_{G[S_i]\in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})} ord\left(G\left[S_i\right]\right)$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 4.10 *Si* $n-q \geq 2$ *entonces*

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) \geq \frac{n(n-q+1)}{2} - \frac{n}{n-q+2}.$$

Prueba. Supongamos que el lema es falso, es decir, que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| < \frac{n(n-q+1)}{2} - \frac{n}{n-q+2}. \tag{4.9}$$

Por la observación 4.1 *ii*) y el lema 4.2 vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) &= |E(G(\mathbf{S}))| \\
&= \sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{d_{G(\mathbf{S})}(x)}{2} \right) \\
&\geq \sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{n-q+|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|}{2} \right) \\
&= \sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{n-q+1+|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|-1}{2} \right) \\
&= \frac{n(n-q+1)}{2} + \sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|-1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Por tanto (4.9) implica que

$$\sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|-1}{2} \right) - |\mathbf{S}| < -\frac{n}{n-q+2}$$

y entonces

$$\sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}[x]|-1}{2} \right) < |\mathbf{S}| - \frac{n}{n-q+2}. \tag{4.10}$$

Ahora, por un lado, del lema 4.9 y la observación 4.1 *iii*) vemos que

$$\begin{aligned} & |\mathbf{S}| - \frac{n}{n-q+2} \\ = \; & |\mathbf{S}| - \sum_{G[S_i] \in \mathbf{Graf(S)}} \frac{ord\,(G\,[S_i])}{n-q+2} \\ = \; & \sum_{G[S_i] \in \mathbf{Graf(S)}} \left(1 - \frac{ord\,(G\,[S_i])}{n-q+2}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $x \notin RamG\,(\mathbf{S})$ sucede que $|\mathbf{G_S}\,[x]| = 1$, entonces

$$\sum_{x \in V(G(\mathbf{S}))} \left(\frac{|\mathbf{G_S}\,[x]| - 1}{2}\right) = \sum_{x \in RamG(\mathbf{S})} \left(\frac{|\mathbf{G_S}\,[x]| - 1}{2}\right).$$

Así (4.10) implica que

$$\sum_{x \in RamG(\mathbf{S})} \left(\frac{|\mathbf{G_S}\,[x]| - 1}{2}\right) < \sum_{G[S_i] \in \mathbf{Graf(S)}} \left(1 - \frac{ord\,(G\,[S_i])}{n-q+2}\right). \qquad (4.11)$$

Lo que haremos a continuación, será poner a la sumatoria del lado derecho en términos de una sumatoria sobre $RamG\,(\mathbf{S})$.

Si particionamos el conjunto $\mathbf{Graf}\,(\mathbf{S})$ en

$$\{\mathbf{Graf}\,(\mathbf{S},0)\,,\mathbf{Graf}\,(\mathbf{S},1)\,,\mathbf{Graf}\,(\mathbf{S},2)\,,...\}$$

donde para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{Graf}\,(\mathbf{S},k) = \{G\,[S_i] \in \mathbf{Graf}\,(\mathbf{S}) : |V\,(G\,[S_i]) \cap RamG\,(\mathbf{S})| = k\}$$

vemos entonces que

$$\begin{aligned} & \sum_{G[S_i] \in \mathbf{Graf(S)}} \left(1 - \frac{ord\,(G\,[S_i])}{n-q+2}\right) \qquad (4.12) \\ = \; & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{G[S_i] \in \mathbf{Graf(S},k)} \left(1 - \frac{ord\,(G\,[S_i])}{n-q+2}\right)\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, por el lema 4.8 *ii*) se sigue que para $\mathbf{Graf}(\mathbf{S},0)$ tenemos que

$$\sum_{G[S_i]\in\mathbf{Graf}(\mathbf{S},0)}\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)\leq\sum_{G[S_i]\in\mathbf{Graf}(\mathbf{S},0)}\left(1-\frac{n-q+2}{n-q+2}\right)=0$$

y entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in\mathbf{Graf}(\mathbf{S},k)}\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)\right) \tag{4.13}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in\mathbf{Graf}(\mathbf{S},k)}\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)\right)$$

Ahora para cada $x\in RamG\left(\mathbf{S}\right)$, particionemos el conjunto $\mathbf{G_S}\left[x\right]$ en

$$\left\{\mathbf{G}_{(\mathbf{S},1)}\left[x\right],\mathbf{G}_{(\mathbf{S},2)}\left[x\right],...\right\}$$

donde para cada $k\in\mathbf{N}$ tal que $k\geq1$

$$\mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}\left[x\right]=\left\{G\left[S_i\right]\in\mathbf{Graf}\left(\mathbf{S},k\right):G\left[S_i\right]\in\mathbf{G_S}\left[x\right]\right\}.$$

Obsérvese que por definición, para cada $x\in RamG\left(\mathbf{S}\right)$

$$\left\{G\left[S_i\right]\in\mathbf{Graf}\left(\mathbf{S},0\right):G\left[S_i\right]\in\mathbf{G_S}\left[x\right]\right\}=\emptyset,$$

así que efectivamente estamos particionando a cada $\mathbf{G_S}\left[x\right]$.

Sea ahora $k\in\mathbf{N}$ con $k\geq1$.

Dado $G\left[S_i\right]\in\mathbf{Graf}\left(\mathbf{S},k\right)$, por definición

$$\left|V\left(G\left[S_i\right]\right)\cap RamG\left(\mathbf{S}\right)\right|=k,$$

por tanto existen

$$\left\{x_1,...,x_k\right\}\subseteq RamG\left(\mathbf{S}\right)$$

tales que $G\left[S_i\right]\in\mathbf{G_S}\left[x_j\right]$ para cada $j\in\mathbf{N}$ tal que $1\leq j\leq k$, y consecuentemente tales que

$$G\left[S_i\right]\in\mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}\left[x_j\right]$$

para cada $j\in\mathbf{N}$ tal que $1\leq j\leq k$.

Así pues

$$\sum_{x\in RamG(\mathbf{S})}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)\right)$$

$$=\sum_{G[S_i]\in \mathbf{Graf}(\mathbf{S},k)} k\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)$$

y entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{Graf}(\mathbf{S},k)}\left(1-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{n-q+2}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{x\in RamG(\mathbf{S})}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(\frac{1}{k}-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{k\left(n-q+2\right)}\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{x\in RamG(\mathbf{S})}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(\frac{1}{k}-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{k\left(n-q+2\right)}\right)\right)\right).$$

Así, de (4.11), (4.12) y (4.13) se sigue que

$$\sum_{x\in RamG(\mathbf{S})}\left(\frac{\left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}\left[x\right]\right|-1}{2}\right)$$

$$<\sum_{x\in RamG(\mathbf{S})}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(\frac{1}{k}-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{k\left(n-q+2\right)}\right)\right)\right).$$

Ahora bien, esta última fórmula implica que existe $x\in RamG\left(\mathbf{S}\right)$ tal que

$$\frac{\left|\mathbf{G}_{\mathbf{S}}\left[x\right]\right|-1}{2}<\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(\frac{1}{k}-\frac{ord\left(G\left[S_i\right]\right)}{k\left(n-q+2\right)}\right)\right). \qquad (4.14)$$

A continuación veremos que esto no es posible.

Primero obsérvese que como

$$\left\{\mathbf{G}_{(\mathbf{S},1)}\left[x\right],\mathbf{G}_{(\mathbf{S},2)}\left[x\right],...\right\}$$

es una partición de $\mathbf{G_S}[x]$ entonces en

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{G[S_i]\in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]}\left(\frac{1}{k}-\frac{ord\,(G[S_i])}{k\,(n-q+2)}\right)\right)$$

existen exactamente $|\mathbf{G_S}[x]|$ sumandos.

Caso 1. $|\mathbf{G_S}[x]| \geq 3$.

Por la cantidad de sumandos, (4.14) implica que para alguna $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ y algún $G[S_i] \in \mathbf{G}_{(\mathbf{S},k)}[x]$ sucede que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}-\frac{ord\,(G[S_i])}{k\,(n-q+2)}\\
>\ &\frac{1}{|\mathbf{G_S}[x]|}\left(\frac{|\mathbf{G_S}[x]|-1}{2}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}-\frac{1}{2|\mathbf{G_S}[x]|}\geq\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

por lo que $k \leq 2$, pero entonces por el lema 4.8 *ii*) se sigue que

$$ord\,(G[S_i]) \geq n-q+2-k$$

y así

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}-\frac{ord\,(G[S_i])}{k\,(n-q+2)}\\
\leq\ &\frac{1}{k}-\frac{n-q+2-k}{k\,(n-q+2)}\\
=\ &\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{n-q+2}=\frac{1}{n-q+2},
\end{aligned}$$

por lo que tenemos entonces que

$$\frac{1}{n-q+2}>\frac{1}{3}$$

lo cual no es posible pues por hipótesis $n-q+2 \geq 4$.

Caso 2. $|\mathbf{G_S}[x]| = 2$.

En este caso sean, sin pérdida de generalidad, $G[S_1], G[S_2] \in \mathbf{G_S}[x]$ donde

$$G[S_1] \in \mathbf{G_S^{k_1}}[x] \quad \text{y} \quad G[S_2] \in \mathbf{G_S^{k_2}}[x],$$

siendo k_1 y k_2 enteros positivos no necesariamente distintos.

Entonces por (4.14) vemos que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k_1} - \frac{ord(G[S_1])}{k_1(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{ord(G[S_2])}{k_2(n-q+2)}. \tag{4.15}$$

Caso 2.1.

$$ord(G[S_1]) \geq n-q+2-k_1 \quad \text{y} \quad ord(G[S_2]) \geq n-q+2-k_2.$$

Aquí tenemos entonces que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_1} - \frac{ord(G[S_1])}{k_1(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{ord(G[S_2])}{k_2(n-q+2)} \\ \leq & \frac{1}{k_1} - \frac{n-q+2-k_1}{k_1(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{n-q+2-k_2}{k_2(n-q+2)} \\ = & \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_1} + \frac{1}{n-q+2} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_2} + \frac{1}{n-q+2} \\ = & \frac{2}{n-q+2} \end{aligned}$$

y así, con (4.15) se sigue

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{n-q+2},$$

cosa que no es posible pues por hipótesis $n-q+2 \geq 4$.

Caso 2.2.

$$ord\,(G\,[S_1]) \geq n-q+2-r_1 \quad \text{y} \quad ord\,(G\,[S_2]) < n-q+2-r_2.$$

En este caso, por el lema 4.8 *i*) y 4.8 *iii*) sabemos que

$$ord\,(G\,[S_2]) \geq \frac{k_2}{n-q} \quad \text{y} \quad k_2 \geq 3.$$

Así

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_1} - \frac{ord\,(G\,[S_1])}{k_1\,(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{ord\,(G\,[S_2])}{k_2\,(n-q+2)} \\ \leq\ & \frac{1}{k_1} - \frac{n-q+2-k_1}{k_1\,(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{k_2}{k_2\,(n-q)\,(n-q+2)} \\ =\ & \frac{1}{n-q+2} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{(n-q+2)\,(n-q)} \\ \leq\ & \frac{1}{n-q+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{(n-q+2)\,(n-q)} \end{aligned}$$

y entonces con (4.15) se sigue que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n-q+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{(n-q+2)\,(n-q)},$$

y por tanto

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{n-q+2} + \frac{1}{(n-q+2)\,(n-q)} < 0.$$

Ahora multiplicando por $6\,(n-q)\,(n-q+2)$ resulta entonces

$$\begin{aligned} 0 \ >\ & (n-q)\,(n-q+2) - 6\,(n-q) + 6 \\ =\ & (n-q)^2 + 2\,(n-q) - 6\,(n-q) + 6 \\ =\ & (n-q)^2 - 4\,(n-q) + 6, \end{aligned}$$

pero esta cuadrática no tiene soluciones reales para $(n-q)$, y así este caso no es posible.

Caso 2.3.

$$ord\,(G\,[S_1]) < n-q+2-k_1 \quad \text{y} \quad ord\,(G\,[S_2]) < n-q+2-k_2.$$

En este caso, por el lema 4.8 *i*) y 4.8 *iii*) sabemos que

$$ord\,(G\,[S_1]) \geq \frac{k_1}{n-q}\ ; \quad |V\,(G\,[S_1])| = k_1 \quad \text{y} \quad k_1 \geq 3;$$

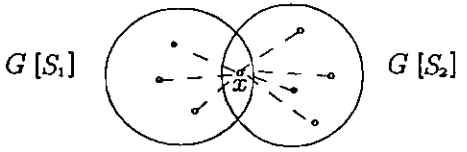
y

$$ord\,(G\,[S_2]) \geq \frac{k_2}{n-q}\ ; \quad |V\,(G\,[S_2])| = k_2 \quad \text{y} \quad k_2 \geq 3.$$

Por otro lado, como en $G\,(\mathbf{S})$ el vértice x sólo es vértice de las subgráficas $G\,[S_1]$ y $G\,[S_2]$, entonces

$$k_1 + k_2 - 2 \geq d_{G(\mathbf{S})}\,(x)\,.$$

(Dibujo 4.9.).



Dibujo 4.9

y por tanto, por el lema 4.2 vemos que

$$k_1 + k_2 - 2 \geq n - q + |\mathbf{G_S}\,[x]| = n - q + 2.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_1} - \frac{ord\,(G\,[S_1])}{k_1\,(n-q+2)} + \frac{1}{k_2} - \frac{ord\,(G\,[S_2])}{k_2\,(n-q+2)} \\ \leq\ & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{2}{(n-q)\,(n-q+2)} \\ \leq\ & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{2}{(k_1+k_2-4)\,(k_1+k_2-2)} \end{aligned}$$

y entonces, con (4.15) se sigue que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{2}{(k_1+k_2-4)(k_1+k_2-2)}. \tag{4.16}$$

Esto último en particular implica que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

y como $k_1 \geq 3$ y $k_2 \geq 3$, si suponemos que $k_2 \geq k_1$, entonces debe suceder que

$$k_1 = 3 \quad \text{y} \quad 5 \geq k_2 \geq 3.$$

Regresando a (4.16) con esto último, vemos que

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{k_2} - \frac{2}{(k_2-1)(k_2+1)},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{k_2} - \frac{2}{(k_2-1)(k_2+1)}.$$

Multiplicando por $6\left((k_2)^2-1\right)$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned}(k_2)^2 - 1 &< \frac{6\left((k_2)^2-1\right)}{k_2} - 12 \\ &\leq \frac{6(k_2)^2}{k_2} - 12 = 6k_2 - 12\end{aligned}$$

y así

$$(k_2)^2 - 6k_2 + 11 < 0,$$

y nos encontramos con una cuadrática que no tiene soluciones reales para k_2, y por tanto este caso tampoco es posible. ■

A la luz del lema 4.10 vemos que si $n-q \geq 2$, entonces existe una 2-transversal segmentada $\mathbf{S}$ del par $(K_n, \mathbf{C}(K_n))$ que es óptima, es decir,

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \lambda(K_n, \mathbf{C}(K_n)),$$

y que además

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) \geq \frac{n(n-q+1)}{2} - \frac{n}{n-q+2}.$$

Así tenemos

Corolario 4.1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $q \geq 2$ y $n - q \geq 2$. Entonces*

$$\lambda(K_n, \mathbf{C}(K_n)) \geq \frac{n(n-q+1)}{2} - \frac{n}{n-q+2}.$$

■

Teorema 4.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$ se cumple*

$$g(n,q) \leq H(K_n, K_{1,q}) \leq \begin{cases} g(n,q) & \text{si } n \text{ ó } q \text{ es par ó } \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} < \frac{1}{2}; \\ g(n,q)+1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Prueba.

Caso 1. $n - q = 1$.

Obsérvese que en este caso, como K_n es una gráfica q-regular, entonces por el teorema 3.2 sabemos que

$$H(K_n, K_{1,q}) = \binom{n}{2} - n + \phi(K_n) + 1,$$

y como el número máximo de ciclos ajenos 2 a 2 en K_n es $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, entonces

$$\begin{aligned} H(K_n, K_{1,q}) &= \frac{n(n-3)}{2} + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{n(n-1-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-(n-1)+2} \right\rfloor + 1 \\ &= g(n, n-1) = g(n,q) \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

Caso 2. $n - q \geq 2$.

Por el lema 4.1 sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n > q \geq 2$, se cumple que

$$H(K_n, K_{1,q}) \geq g(n,q).$$

Por otro lado, por el corolario 2.1 sabemos que

$$H(K_n, K_{1,q}) = \binom{n}{2} - \lambda(K_n, \mathbf{C}(K_n)) + 1$$

y entonces del corolario 4.1 se sigue que

$$\begin{aligned} H(K_n, K_{1,q}) &\leq \binom{n}{2} - \frac{n(n-q+1)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1 \qquad (4.17) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-q+1)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1 \\ &= \frac{n(n-1-n+q-1)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1 \\ &= \frac{n(q-2)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n(q-2)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1\right) - g(n,q) \\ = \; &\frac{n(q-2)}{2} - \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \frac{n}{n-q+2} - \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor \\ = \; &\frac{re(n(q-2),2)}{2} + \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} \end{aligned}$$

por lo tanto de (4.17) tenemos que

$$H(K_n, K_{1,q}) \leq g(n,q) + \frac{re(n(q-2),2)}{2} + \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2}. \qquad (4.18)$$

Así entonces

Caso 2.1 n ó q es par, ó $\frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} < \frac{1}{2}$.

En este caso

$$\frac{re(n(q-2),2)}{2} + \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} < 1$$

y como tanto $H(K_n, K_{1,q})$ como $g(n,q)$ son número enteros se sigue de (4.18) que

$$H(K_n, K_{1,q}) \leq g(n,q).$$

Caso 2.2 n y q son impares y $\frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} \geq \frac{1}{2}$.

Aquí

$$1 \leq \frac{re(n(q-2),2)}{2} + \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2}$$

pero claramente

$$\frac{re(n(q-2),2)}{2} + \frac{re(n,n-q+2)}{n-q+2} < 2,$$

y nuevamente, como tanto $H(K_n, K_{1,q})$ como $g(n,q)$ son número enteros se sigue de (4.18) que

$$H(K_n, K_{1,q}) \leq g(n,q) + 1.$$

■

Capítulo 5

LIBROS EN 3-GRÁFICAS

Dada una 3-gráfica $G = (V(G), E(G))$ (una hipergráfica tal que todas sus aristas constan de 3 vértices), sea

$$G^{(1)} = \left(V\left(G^{(1)}\right), E\left(G^{(1)}\right)\right)$$

la gráfica definida como

$$V\left(G^{(1)}\right) = V(G)$$

y

$$E\left(G^{(1)}\right) = \{\{x,y\} \subseteq V(G) : \text{existe } e \in E(G) \text{ tal que } \{x,y\} \subseteq e\}.$$

A la gráfica $G^{(1)}$ la llamaremos el *1-esqueleto* de G.

Ahora consideremos la familia $\mathbf{L}^{(3)}(G)$ de 3-subgráficas de G compuesta por los siguientes elementos:

Para cada arista $a \in E\left(G^{(1)}\right)$, sea

$$L(a) = (V(L(a)), E(L(a)))$$

la 3-subgráfica de G definida por el conjunto de 3-aristas que contienen a, es decir,

$$E(L(a)) = \{e \in E(G) : a \subseteq e\}$$

y

$$V(L(a)) = \bigcup_{e \in E(L(a))} e.$$

Así pues,

$$\mathbf{L}^{(3)}(G) = \{L(a)\}_{a \in E\left(G^{(1)}\right)}$$

A cada elemento $L(a)$ de $\mathbf{L}^{(3)}(G)$ lo denominaremos libro de G, a la arista a de $G^{(1)}$ la llamaremos el lomo del libro $L(a)$ y cada $e \in E(L(a))$ será una hoja de libro $L(a)$.

En este capítulo demostraremos que dada una 3-gráfica G tal que para cada $L(a) \in \mathbf{L}^{(3)}(G)$ se cumpla que $|E(L(a))| \geq 2$, entonces

$$h\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) \leq |E(G)| - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right| + 1$$

donde $h\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ es el número heterocromático lineal interno de la 3-gráfica G con respecto a $\mathbf{L}^{(3)}(G)$.

Esto además nos permitirá probar lo siguiente:

Dada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, sean

$$K_n^{(3)} = \left(V\left(K_n^{(3)}\right), E\left(K_n^{(3)}\right)\right)$$

la 3-gráfica completa de n vértices y

$$L_{n-2} = \left(V\left(L_{n-2}\right), E\left(L_{n-2}\right)\right)$$

la 3-gráfica definida como:

$$V\left(L_{n-2}\right) = \{z, w, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$$

y

$$E\left(L_{n-2}\right) = \{\{z, w, x_i\} : \text{ con } 1 \leq i \leq n-2\}$$

(es decir, L_{n-2} es un libro de $n-2$ hojas).

Entonces

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + 1 \geq H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right) \geq \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n) + 1$$

donde $H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right)$ es el número heterocromático lineal de $K_n^{(3)}$ con respecto a la clase $\mathbf{C} = \{L_{n-2}\}$;

$$p(n) = re(n-1, 3)\, n + re\left(n(n-1) - re(n-1, 3), 12\right)$$

y

$$g(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \notin \{8, 9, 10, 11, 17, 19\} \text{ y } n \not\equiv 7 \text{ ó } 10 \bmod 12 \\ 1 \text{ si } n \notin \{8, 9, 10, 11, 17, 19\} \text{ y } n \equiv 7 \text{ ó } 10 \bmod 12 \\ 1 \text{ si } n \in \{9, 17\} \\ 2 \text{ si } n \in \{8, 10, 11\} \\ 3 \text{ si } n = 19. \end{cases}$$

5.1 La cota superior de $h\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$

5.1.1 Algunos resultados previos

En toda esta sección, sea G una 3-gráfica; $G^{(1)}$ el 1-esqueleto de G, y para cada $a \in E\left(G^{(1)}\right)$

$$L(a) = (V(L(a)), E(L(a)))$$

denotará el libro de G con lomo a.

Además sea

$$Q(G) = \left\{a \in E\left(G^{(1)}\right) : |E(L(a))| \geq 2\right\}.$$

Lema 5.1 $\sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right)} (|E(L(a))|) = 3|E(G)|.$

Prueba. Considérese la gráfica bipartita

$$B = (V(B), E(B))$$

definida como:

$V(B_1) = E\left(G^{(1)}\right)$;
$V(B_2) = E(G)$

y

dada $a \in V(B_1)$ y $e \in V(B_2)$, entonces $(a, e) \in E(B)$ si y sólo si $a \subseteq e$.

Así, para cada $a \in E\left(G^{(1)}\right)$ tenemos que

$$d_B(a) = |E(L(a))|;$$

y por otro lado, obsérvese que para cada $e \in E(G)$,

$$|\{a \in E(G) : a \subseteq e\}| = 3$$

y por lo tanto $d_B(e) = 3$.

De esta forma, contando las aristas de B por $V(B_1)$ y $V(B_2)$ tenemos que

$$\sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right)} (|E(L(a))|) = \sum_{e \in E(G)} (3) = 3|E(G)|$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 5.2 $\frac{3}{2}|E(G)| \geq |Q(G)|$.

Prueba. Por definición $Q(G) \subseteq E\left(G^{(1)}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right)} (|E(L(a))|) \\
&= \sum_{a \in Q(G)} (|E(L(a))|) + \sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right) \setminus Q(G)} (|E(L(a))|) \\
&= \sum_{a \in Q(G)} (|E(L(a))| - 2) + 2|Q(G)| + \sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right) \setminus Q(G)} (|E(L(a))|).
\end{aligned}$$

Y como para cada $a \in Q(G)$ se tiene que $|E(L(a))| \geq 2$, entonces

$$\sum_{a \in Q(G)} (|E(L(a))| - 2) + \sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right) \setminus Q(G)} (|E(L(a))|) \geq 0$$

y así

$$\sum_{a \in E\left(G^{(1)}\right)} (|E(L(a))|) \geq 2|Q(G)|$$

que con el lema 5.1 implica el resultado. ■

Lema 5.3 $|E(G)| - \frac{1}{2}|Q(G)| \geq 1$.

Prueba. Demostraremos el resultado suponiendo que es falso.
Supongamos que

$$|E(G)| < \frac{1}{2}|Q(G)| + 1.$$

Por el lema 5.2 vemos entonces que

$$|E(G)| < \frac{1}{2}|Q(G)| + 1 \leq \frac{3}{4}|E(G)| + 1$$

y por tanto

$$|E(G)| < 4.$$

Ahora veamos los siguientes casos:

Caso 1. $|E(G)| = 1$.

En este caso (Dibujo 5.1a), claramente $|Q(G)| = 0$ por lo que

$$|E(G)| - \frac{1}{2}|Q(G)| \geq 1.$$

Caso 2. $|E(G)| = 2$.

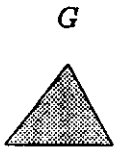
Aqui (Dibujo 5.1b), $|Q(G)| \leq 1$ y entonces

$$|E(G)| - \frac{1}{2}|Q(G)| \geq 1.$$

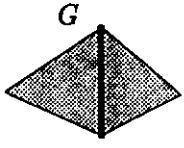
Caso 3. $|E(G)| = 3$.

En este caso (Dibujo 5.1c), $|Q(G)| \leq 3$ y así

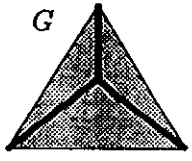
$$|E(G)| - \frac{1}{2}|Q(G)| \geq 1.$$



Dibujo 5.1a



Dibujo 5.1b



Dibujo 5.1c

■

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

5.1.2 Sobre las 2-transversales segmentadas

En lo que sigue, sea G una 3-gráfica; $G^{(1)}$ el 1-esqueleto de G, y supongamos que para cada $a \in E\left(G^{(1)}\right)$, el libro

$$L(a) = (V(L(a)), E(L(a))) \in \mathbf{L}^{(3)}(G)$$

cumple que $|E(L(a))| \geq 2$.

Por definición, una 2-transversal segmentada del par $\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ es una familia

$$\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

de subconjuntos de $E(G)$ tal que

i) Para toda $S_i \in \mathbf{S}$, $|S_i| \geq 2$.

ii) Para cada par $S_i, S_j \in \mathbf{S}$, si $i \neq j$ entonces $S_i \cap S_j = \emptyset$.

iii) Dada $G' \in \mathbf{L}^{(3)}(G)$ existe $S_i \in \mathbf{S}$ tal que $|E(G') \cap S_i| \geq 2$.

Denotaremos como $\mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ al conjunto de 2-transversales segmentadas del par $\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ y sea

$$\lambda\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) = min\left\{\mathbf{J}(\mathbf{S}) : \mathbf{S} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)\right\}.$$

Dada

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right),$$

dentaremos como $\mathbf{Graf}(\mathbf{S})$ al conjuntode 3-subgráficas de G

$$\{G[S_1], ..., G[S_{|\mathbf{S}|}]\}.$$

Observación 5.1 *Para cada* $G[S_i] \in \mathbf{Graf}(\mathbf{S})$

$$Q(G[S_i]) = \left\{a \in E\left(G^{(1)}\right) : |E(G[S_i]) \cap E(L(a))| \geq 2\right\}.$$

Lema 5.4 *Sea* $\mathbf{S} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ *y* $\mathbf{Graf}(\mathbf{S}) = \left\{G[S_1], ..., G\left[S_{|\mathbf{S}|}\right]\right\}$.
Entonces

$$\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} |Q(G[S_i])| \geq \left|E\left(G^{(1)}\right)\right|.$$

Prueba. Sea $a \in E\left(G^{(1)}\right)$. Por definición, existe $S_i \in \mathbf{S}$ tal que

$$|S_i \cap E(L(a))| \geq 2$$

por lo que

$$|E(G[S_i]) \cap E(L(a))| \geq 2$$

de donde se sigue (observación 5.1) que $a \in Q(G[S_i])$.

Así pues

$$E\left(G^{(1)}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{|\mathbf{S}|} Q(G[S_i])$$

y se sigue el resultado. ■

Teorema 5.1 $h\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) \leq |E(G)| - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right| + 1.$

Prueba. Por el corolario 2.2 sabemos que

$$h\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) = |E(G)| - \lambda\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) + 1,$$

y entonces probar el teorema es equivalente a demostrar que

$$\lambda\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right) \geq \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right|,$$

para lo cual basta mostrar que para cada $\mathbf{S} \in \mathbf{T}\left(G, \mathbf{L}^{(3)}(G)\right)$ sucede que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| \geq \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right|.$$

Sea pues

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\right\} \in \mathbf{T}\left(G, \left\{L(a)\right\}_{a \in E\left(G^{(1)}\right)}\right)$$

y

$$\mathbf{Graf}(\mathbf{S}) = \left\{G[S_1], ..., G\left[S_{|\mathbf{S}|}\right]\right\}.$$

Primero obsérvese que por definición, para cada $S_i \in \mathbf{S}$ tenemos que

$$S_i = E\left(G\left[S_i\right]\right),$$

por tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(|S_i|\right) - |\mathbf{S}| - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right| \\
= &\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(\left|E\left(G\left[S_i\right]\right)\right|\right) - |\mathbf{S}| - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right| \\
= &\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(\left|E\left(G\left[S_i\right]\right)\right| - 1\right) - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por el lema 5.4 vemos que

$$\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left|Q\left(G\left[S_i\right]\right)\right| \geq \left|E\left(G^{(1)}\right)\right|$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(|S_i|\right) - |\mathbf{S}| - \frac{1}{2}\left|E\left(G^{(1)}\right)\right| \\
\geq &\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(\left|E\left(G\left[S_i\right]\right)\right| - 1\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left|Q\left(G\left[S_i\right]\right)\right| \\
= &\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|}\left(\left|E\left(G\left[S_i\right]\right)\right| - \frac{1}{2}\left|Q\left(G\left[S_i\right]\right)\right| - 1\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, por el lema 5.3 sabemos que para toda 3-gráfica G' se cumple que

$$\left|E\left(G'\right)\right| - \frac{1}{2}\left|Q\left(G'\right)\right| \geq 1.$$

Entonces en particular, por el lema 5.3, para cada $G\left[S_i\right] \in \mathbf{Graf}\left(\mathbf{S}\right)$ se tiene que

$$\left|E\left(G\left[S_i\right]\right)\right| - \frac{1}{2}\left|Q\left(G\left[S_i\right]\right)\right| \geq 1$$

y así

$$\sum_{i=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_i|) - |\mathbf{S}| - \frac{1}{2} \left| E\left(G^{(1)}\right) \right| \geq 0$$

de donde se sigue el resultado. ■

5.2 El número heterocromático $H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right)$

5.2.1 Algunos resultados previos

Dada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, sea

$$K_n^{(3)} = \left(V\left(K_n^{(3)}\right), E\left(K_n^{(3)}\right)\right)$$

la 3-gráfica completa de orden n y sea

$$K_n^{(1)} = \left(V\left(K_n^{(1)}\right), E\left(K_n^{(1)}\right)\right)$$

el 1-esqueleto de $K_n^{(3)}$.

Además sea

$$L_{n-2} = \left(V\left(L_{n-2}\right), E\left(L_{n-2}\right)\right)$$

la 3-gráfica que es un libro con $n-2$ hojas.

Observación 5.2 *El conjunto de 3-subgráficas de $K_n^{(3)}$ isomorfas a L_{n-2} es igual al conjunto $\mathbf{L}^{(3)}\left(K_n^{(3)}\right)$.*

Lema 5.5 *Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$ y*

$$\{a_1, ...a_m\} \subseteq E\left(K_n^{(1)}\right)$$

con $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Entonces existe

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\right\}$$

una 2-transversal segmentada del par $\left(K_n^{(3)}, \{L(a_i)\}_{i=1}^m\right)$ tal que

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) - |\mathbf{S}| \leq m.$$

Prueba. Sea $A = \{a_1, ...a_m\}$. Para cada $a_i \in A$ escojamos un par

$$e_1^i, e_2^i \in E\left(K_n^{(3)}\right)$$

tal que

$$e_1^i \cap e_2^i = a_i.$$

Al par escogido para a_i lo denotaremos como $p(a_i)$.

Ahora definamos a la gráfica G de la forma siguiente:

$$V(G) = \bigcup_{a_i \in A} p(a_i)$$

y

$$E(G) = \{p(a_i) : a_i \in A\}.$$

y sean

$$\{G_1, ..., G_r\}$$

las r componentes conexas de G.

De regreso a $K_n^{(3)}$, la familia

$$\mathbf{S} = \{V(G_1), ..., V(G_r)\}$$

es una familia de subconjuntos de $E\left(K_n^{(3)}\right)$ disjuntos 2 a 2.

Obsérvese que si $\mathbf{S}$ es una pretransversal del par $\left(K_n^{(3)}, \{L(a_i)\}_{i=1}^m\right)$, el lema estará probado pues

$$\mathbb{J}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^{r} (|V(G_i)|) - r = |V(G)| - r,$$

y como G es una gráfica,

$$m = |E(G)| \geq |V(G)| - r$$

de donde se sigue que

$$m \geq \mathbb{J}(\mathbf{S})$$

y con el lema 2.3 tendríamos el resultado.

Así pues, sea $a_i \in A$. En la gráfica G, como

$$p(a_i) = \{e_1^i, e_2^i\} \in E(G),$$

entonces el par de vértices e_1^i y e_2^i estan en la misma componente conexa, digamos G_j, por lo tanto, de regreso en $K_n^{(3)}$ y $\mathbf{S}$, tenemos que $V(G_j) \in \mathbf{S}$ y

$$|V(G_j) \cap E(L(a_i))| \geq 2.$$

Así, $\mathbf{S}$ es una pretransversal del par $\left(K_n^{(3)}, \{L(a_i)\}_{i=1}^m\right)$ y queda demostrado el lema. ■

Observación 5.3 *Acerca del lema 5.5, dada*

$$\mathbf{S} = \left\{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\right\}$$

la 2-transversal segmentada del par $\left(K_n^{(3)}, \{L(a_i)\}_{i=1}^m\right)$ *tal que* $\mathbb{J}(\mathbf{S}) \leq m$, *es claro que podemos suponer que para toda* $S_j \in \mathbf{S}$ *y para toda* $e \in S_j$ *existe* $a_i \in \{a_1, ...a_m\}$ *tal que* $a_i \subseteq e$. *En otras palabras, suponemos que no sobran 3-aristas en los elementos de* $\mathbf{S}$.

Teorema 5.2 [6] *Sea* I_n *un conjunto de* n *elementos. Para* $n \geq k \geq t$ *sea* $D(t,k,n)$ *el máximo entero* b *tal que existe una familia*

$$B = \{B_1, ..., B_b\}$$

de subconjuntos de I_n, *cada uno con* k *elementos, tal que todo* $A \subseteq I_n$ *de cardinal* t *esta contenido en a lo más un elemento de* B.

Entonces

i) $D(2,4,n) = J(2,4,n)$ *si y sólo si* $n \notin \{8,9,10,11,17,19\}$

ii) $D(2,4,n) = J(2,4,n) - 1$ *si y sólo si* $n \in \{9,10,17\}$

iii) $D(2,4,n) = J(2,4,n) - 2$ *si y sólo si* $n \in \{8,11,19\}$

donde

$$J(2,4,n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor - 1 & \text{para } n \equiv 7 \text{ ó } 10 \pmod{12} \\ \left\lfloor \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Lema 5.6 *Sea* $n \in \mathbf{N}$ *tal que* $n \geq 4$. *Entonces*

$$D(2,4,n) = \frac{1}{6}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{12} - g(n).$$

Prueba. Obsérvese que

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{n}{4} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right\rfloor \\ = & \left\lfloor \frac{n}{4} \left(\frac{n-1}{3} - \frac{re(n-1,3)}{3} \right) \right\rfloor \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\lfloor \frac{n(n-1)}{12} - \frac{re(n-1,3)n}{12} \right\rfloor \\
&= \frac{n(n-1)}{12} - \frac{re(n-1,3)n}{12} - \frac{re(n(n-1)-re(n-1,3),12)}{12} \\
&= \frac{n(n-1)}{12} - \frac{r(n-1,3)n + re(n(n-1)-re(n-1,3),12)}{12} \\
&= \frac{n(n-1)}{12} - \frac{p(n)}{12} \\
&= \frac{1}{6}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{12}.
\end{aligned}
$$

Así, por el teorema 5.2 se sigue el resultado. ■

Teorema 5.3 *Sean $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq 4$, $K_n^{(3)}$ la 3-gráfica completa de orden n, y L_{n-2} el libro con $n-2$ hojas. Entonces*

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + 1 \geq H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right) \geq \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n) + 1.$$

Prueba. Recordando la observación 5.2 vemos que

$$H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right) = h\left(K_n^{(3)}, \mathbf{L}^{(3)}\left(K_n^{(3)}\right)\right),$$

y así, por el teorema 5.1 se sigue que

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + 1 \geq H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right).$$

Entonces para probar este resultado sólo resta demostrar que:

$$H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right) \geq \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n) + 1.$$

La demostración de esto último la haremos mostrando una c-coloración de $E\left(K_n^{(3)}\right)$ donde

$$c \geq \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n)$$

y que es libre de L_{n-2} heterocromáticos.

Para esto, primero construiremos una familia de 3-subgráficas de $K_n^{(3)}$ de la manera siguiente:

Sea

$$K_n^{(1)} = \left(V\left(K_n^{(1)}\right), E\left(K_n^{(1)}\right)\right)$$

el 1-esqueleto de $K_n^{(3)}$. Además sea

$$B = \{B_1, ..., B_b\}$$

una familia de subconjuntos de $V\left(K_n^{(3)}\right)$, cada uno con 4 elementos, tal que cada lomo $a \in E\left(K_n^{(1)}\right)$ este contenido en a lo más un elemento de B.

Por el teorema 5.2 existen $D(2,4,n)$ de tales conjuntos. Denotemos como

$$G[B_i] = (V(G[B_i]), E(G[B_i]))$$

la 3-subgráfica de $K_n^{(3)}$ inducida por cada $B_i \in B$. Nótese que para cada $B_i \in B$ tenemos que

$$G[B_i] \cong K_4^{(3)}.$$

Ahora bien, obsérvese que en dependencia de n, no necesariamente todos los lomos $a \in E\left(K_n^{(1)}\right)$ estan contenidos en algún $B_i \in B$. Es decir, fuera de este "empaque" queda una familia de

$$\binom{n}{2} - 6D(2,4,n)$$

lomos de $E\left(K_n^{(1)}\right)$. A este conjunto de lomos sobrantes, si no es vacío, lo denotaremos como A.

Así,

$$A = \{a_1, ..., a_m\}$$

con $m = \binom{n}{2} - 6D(2,4,n)$. Por el lema 5.5 existe

$$\mathbf{S} = \{S_1, ..., S_{|\mathbf{S}|}\}$$

una 2-transversal segmentada de la familia $\{L(a_i)\}_{i=1}^{m}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) - |\mathbf{S}| \leq \binom{n}{2} - 6D(2,4,n).$$

son exactamente

$$\binom{n}{3} - 4D(2,4,n) - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|).$$

Ahora, a partir de la familia

$$\{G[B_1], ..., G[B_b], G[S_1], ..., G[S_{|\mathbf{S}|}]\}$$

definimos la siguiente coloración de $E\left(K_n^{(3)}\right)$:

Sea

$$\Gamma : E\left(K_n^{(3)}\right) \to \left\{1, ..., \left(\binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) + |\mathbf{S}| - 3D(2,4,n)\right)\right\}$$

donde:

i) Para cada $1 \leq i \leq D(2,4,n)$

$$\Gamma[E(G[B_i])] = i.$$

ii) Para cada $1 \leq i \leq |\mathbf{S}|$

$$\Gamma[E(G[S_i])] = D(2,4,n) + i.$$

iii) A las

$$\binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) - 4D(2,4,n)$$

aristas restantes, Γ les asigna uno a uno los

$$\begin{aligned} & \binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) + |\mathbf{S}| - 3D(2,4,n) - (D(2,4,n) + |\mathbf{S}|) \\ = & \binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) - 4D(2,4,n) \end{aligned}$$

colores restantes.

A continuación veremos que Γ es una coloración libre de L_{n-2} heterocromáticos.

Sea G una 3-subgráfica de $K_n^{(3)}$ isomorfa a L_{n-2} y sea $a \in E\left(K_n^{(1)}\right)$ el lomo del libro G.

Caso 1. Existe $B_i \in B$ tal que $a \subseteq B_i$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$a = \{x, y\} \quad \text{y} \quad B_i = \{x, y, w, z\}.$$

Como

$$\{\{x, y, z\}, \{x, y, w\}\} \subseteq E(G[B_i])$$

entonces

$$\Gamma(\{x, y, z\}) = \Gamma(\{x, y, w\}) = i$$

y por tanto, el libro con lomo a no es heterocromático, es decir G no es heterocromático.

Caso 2. $a \in A$.

En este caso tenemos que $G = L(a)$ con $a \in A$, y por tanto existe $S_j \in \mathbf{S}$ tal que

$$|E(L(a)) \cap S_j| \geq 2$$

y por tanto

$$|E(L(a)) \cap E(G[S_j])| \geq 2.$$

Entonces el libro de lomo a tiene 2 hojas de color $D(2, 4, n) + j$, es decir G no es heterocromático.

Así pues, Γ es una c-coloración de $E\left(K_n^{(3)}\right)$ libre de copias heterocromáticas de L_{n-2}, donde

$$c = \binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) + |\mathbf{S}| - 3D(2, 4, n).$$

Ahora bien, por el lema 5.5 sabemos que

$$\sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) - |\mathbf{S}| \leq \binom{n}{2} - 6D(2, 4, n),$$

y por el lema 5.6 tenemos que

$$D(2, 4, n) = \frac{1}{6}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{12} - g(n).$$

Entonces

$$\begin{aligned} c &= \binom{n}{3} - \sum_{j=1}^{|\mathbf{S}|} (|S_j|) + |\mathbf{S}| - 3D(2,4,n) \\ &\geq \binom{n}{3} - \binom{n}{2} + 6D(2,4,n) - 3D(2,4,n) \\ &= \binom{n}{3} - \binom{n}{2} + \frac{3}{6}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n) \\ &= \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n) \end{aligned}$$

y de ahí que

$$H\left(K_n^{(3)}, L_{n-2}\right) > \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{p(n)}{4} - 3g(n)$$

de donde se sigue el resultado. ■

Capítulo 6

LAS DIGRÁFICAS SELECTIVAS

En este capítulo se introduce el concepto de digráfica selectiva, junto con otra serie de conceptos y resultados relativos a las coloraciones de aristas, muchos de los cuales serán necesarios para el desarrollo de los capítulos siguientes.

6.1 La función ν y las digráficas selectivas

Sea G una gráfica y

$$\Gamma : E(G) \to \{1, ..., q\}$$

una coloración de las aristas de G.

Definición 6.1 *Para cada $x \in V(G)$, sea*

$$\nu(x, G, \Gamma) = |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x\})]|.$$

Es decir, $\nu(x, G, \Gamma)$ es el número de colores en $[G, \Gamma]$ que aparecen exclusivamente en las aristas incidentes al vértice x.

Así podemos ver que

Observación 6.1 *Para cada* $x \in V(G)$,

$$\nu(x, G, \Gamma) \geq n$$

si y sólo si *existe*

$$\{x_1, ..., x_n\} \subseteq N_G(x)$$

tal que:

i) *Dados* $i, j \in \mathbb{N}$ *tales que* $1 \leq i \leq n$ *y* $1 \leq j \leq n$, ***si*** $i \neq j$ *entonces*

$$\Gamma(\{x, x_i\}) \neq \Gamma(\{x, x_j\}).$$

ii) *Dada* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leq i \leq n$, *para toda* $e \in E(G \setminus \{x\})$ *sucede que*

$$\Gamma(e) \neq \Gamma(\{x, x_i\}).$$

Observación 6.2 *Para cada* $x \in V(G)$,

$$\nu(x, G, \Gamma) = n$$

si y sólo si *existe*

$$\{x_1, ..., x_n\} \subseteq N_G(x)$$

tal que cumple i) y ii) de la observación 6.1 y además

iii) *Para toda* $y \in N_G(x) \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ *ocurre una de dos cosas:*

a) Para algún $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leq i \leq n$

$$\Gamma(\{x, y\}) = \Gamma(\{x, x_i\}),$$

o bien

b) Para alguna $e \in E(G \setminus \{x\})$

$$\Gamma(\{x, y\}) = \Gamma(e).$$

A partir de las observaciones anteriores tenemos la siguiente

Definición 6.2 *Sea* $x \in V(G)$. *Un subconjunto* $W \subseteq N_G(x)$ *se dirá que es un* (x, G, Γ)*-conjunto selectivo si:*

i) $|W| = \nu(x, G, \Gamma)$.

ii) *Todas las* $\{x\}$ W*-aristas estan coloreadas con colores distintos.*

iii) *Toda* $\{x\}$ W*-arista tiene un color que no aparece en* $[G \setminus \{x\}, \Gamma]$.

Es decir, dados los $\nu(x,G,\Gamma)$ colores que sólo aparecen en aristas incidentes a x, escogemos , por ejemplo $\{x,y_i\}_{i=1}^{\nu(x,G,\Gamma)}$, $\nu(x,G,\Gamma)$ aristas incidentes a x, cada una de distinto color, y cada una con alguno de esos $\nu(x,G,\Gamma)$ colores que sólo aparecen en aristas incidentes a x. Así, el conjunto de vértices

$$\{y_1,\cdots,y_{\nu(x,G,\Gamma)}\}$$

es un (x,G,Γ)-conjunto selectivo.

Para cada $x \in V(G)$ sea

$$S(x,G,\Gamma) = \{W \subseteq N_G(x) : W \text{ es un } (x,G,\Gamma)\text{-conjunto selectivo}\}.$$

Así entonces

Observación 6.3 *Dados $x \in V(G)$ y $c \in \Gamma[E(G)]$ tal que $c \notin \Gamma[E(G \setminus \{x\})]$, para cada $W \in S(x,G,\Gamma)$ existe $y \in W$ tal que*

$$\Gamma(\{x,y\}) = c.$$

Utilizando los conjuntos selectivos de los vértices de G, podemos definir la familia de digráficas siguiente:

Definición 6.3 *Una digráfica D será denominada una (G,Γ)-digráfica selectiva si cumple con:*

i) $V(D) = V(G)$

ii) Si $V(G) = \{x_1,...,x_n\}$, *entonces existe una familia de n subconjuntos de* $V(G)$

$$\{W_{x_1},...,W_{x_n}\},$$

tal que para cada $x_i \in V(G)$

$$W_{x_i} \in S(x_i,G,\Gamma)$$

y

$$F(D) = \bigcup_{x_i \in V(G)} \{\overrightarrow{x_i u} : u \in W_{x_i}\}.$$

En otras palabras, cada (G,Γ)-digráfica selectiva se define escogiendo para cada vértice x de G, un (x,G,Γ)-conjunto selectivo W_x, y a partir de esto,

$$\overrightarrow{xu} \in F(D) \text{ si y sólo si } u \in W_x.$$

Por simplicidad y a menos que resulte ambiguo, diremos que una (G,Γ)-digráfica selectiva D esta definida por la familia

$$\left\{W_x^D : x \in V(G)\right\}$$

de conjuntos selectivos.

Al conjunto de todas las (G,Γ)-digráficas selectivas lo denotaremos como

$$DS(G,\Gamma).$$

De todo lo anterior, es importante resaltar lo siguiente:

Observación 6.4 *Dada $D \in DS(G,\Gamma)$ definida por la familia*

$$\left\{W_x^D : x \in V(G)\right\},$$

tenemos que:

i) Para todo par $x,y \in V(D)$,

$$\overrightarrow{xy} \in F(D) \text{ si y sólo si } y \in W_x^D.$$

ii) Para todo $x \in V(D)$,

$$d_D^+(x) = \nu(x,G,\Gamma).$$

Finalmente

Definición 6.4 *Para cada $Y \subseteq V(G)$, sea*

$$\nu(Y,G,\Gamma) = |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus Y)]|.$$

Es decir, $\nu(Y,G,\Gamma)$ es el número de colores en $[G,\Gamma]$ que desaparecen en $[G \setminus Y,\Gamma]$. Obsérvese que si $Y = \emptyset$, entonces $\nu(Y,G,\Gamma) = 0$.

6.1.1 Sobre $[G,\Gamma]$ y las (G,Γ)-digráficas selectivas

En toda esta sección, sean G una gráfica;

$$\Gamma : E(G) \to \{1,...,q\}$$

una coloración de las aristas de G;

$$c \in \Gamma[E(G)] \quad \text{y} \quad C = \{e \in E(G) : \Gamma(e) = c\}.$$

Lema 6.1 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) $C = \{\{x,y\}\}$.

ii) Para toda $D \in DS(G,\Gamma)$

$$\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in F(D).$$

iii) Existe $D \in DS(G,\Gamma)$ *tal que*

$$\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in F(D).$$

Prueba.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea $C = \{\{x,y\}\}$ y $D \in DS(G,\Gamma)$ definida por la familia

$$\{W_x^D : x \in V(G)\}$$

de conjuntos selectivos.

Vemos que

$$c \notin \Gamma[E(G \setminus \{x\})]$$

y por tanto (observación 6.3) existe $z \in W_x^D$ tal que

$$\Gamma(\{x,z\}) = c,$$

y claramente $z = y$, entonces $\overrightarrow{xy} \in F(D)$.

La demostración de que $\overrightarrow{yx} \in F(D)$ es análoga.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Se sigue.

iii) $\Rightarrow$ *i)*. Sea $D \in DS(G,\Gamma)$ definida por la familia

$$\{W_x^D : x \in V(G)\}$$

de conjuntos selectivos tal que

$$\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in F(D).$$

Entonces por definición

$$x \in W_y^D \quad \text{y} \quad y \in W_x^D,$$

por lo que

$$\Gamma(\{x,y\}) \notin \Gamma[E(G \setminus \{y\})] \quad \text{y} \quad \Gamma(\{x,y\}) \notin \Gamma[E(G \setminus \{x\})]$$

de donde se sigue que

$$C = \{\{x,y\}\}.$$

■

Habiendo caracterizado el caso en que $|C| = 1$, en lo que sigue sea $|C| \geq 2$ y D una (G,Γ)-digráfica selectiva definida por la familia

$$\left\{W_x^D : x \in V(G)\right\}.$$

Lema 6.2 *Si* $\overrightarrow{xy} \in F(D)$ *entonces*

$$x = \bigcap_{e \in C} e.$$

Prueba. Si $\overrightarrow{xy} \in F(D)$ entonces tenemos que $y \in W_x^D$, por tanto para toda $e \in E(G \setminus \{x\})$

$$\Gamma(\{x,y\}) \neq \Gamma(e)$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 6.3 *Sean* $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{zw} \in F(D)$ *con* $\{x,y\} \neq \{z,w\}$. *Entonces*

$$\Gamma(\{x,y\}) \neq \Gamma(\{z,w\}).$$

Prueba. Supongamos que

$$\Gamma(\{x,y\}) = \Gamma(\{z,w\}) = c.$$

Por el lema 6.2 se sigue entonces que

$$x = \bigcap_{e \in C} e = z,$$

por tanto

$$\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xw} \in F(D)$$

y así

$$y, w \in W_x^D,$$

lo cual por definición implica que

$$\Gamma(\{x, y\}) \neq \Gamma(\{x, w\})$$

y llegamos a una contradicción. ■

6.1.2 Las gráficas subyacentes

En toda esta sección sean G una gráfica;

$$\Gamma : E(G) \to \{1, ..., q\}$$

una coloración de las aristas de G;

$$c \in \Gamma[E(G)] \quad \text{y} \quad C = \{e \in E(G) : \Gamma(e) = c\}.$$

Lema 6.4 *$C = \{\{x, y\}\}$ si y sólo si para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se cumple que $\{x, y\} \in E(\mathbf{g}[D])$, donde $\mathbf{g}[D]$ es la gráfica subyacente de D.*

Prueba.
$\Rightarrow$) Si $C = \{\{x, y\}\}$ entonces (lema 6.1) para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se tiene que

$$\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} \in F(D)$$

y por tanto $\{x, y\} \in E(\mathbf{g}[D])$.
$\Leftarrow$) Esta implicación la demostraremos por reducción al absurdo.
Sea $|C| \geq 2$ y $\{x, y\} \in C$ tal que para toda $D \in DS(G, \Gamma)$

$$\{x, y\} \in E(\mathbf{g}[D]).$$

Entonces para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se tiene que

$$\overrightarrow{xy} \in F(D) \quad \text{ó} \quad \overrightarrow{yx} \in F(D),$$

y como $x \neq y$, por el lema 6.2 se sigue entonces que:

Para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se cumple que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$,

ó

Para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se cumple que $\overrightarrow{yx} \in F(D)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que para toda $D \in DS(G, \Gamma)$ se tiene que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$.
Si este es el caso, entonces para todo $W \in S(x, G, \Gamma)$

$$y \in W,$$

lo cual implica que no existe $z \in V(G)$ tal que $\{x,z\} \in C$, pues de lo contrario, dado cualquier (x,G,Γ)-conjunto selectivo W tal que $y \in W$, el conjunto

$$W' = (W \setminus \{y\}) \cup \{z\}$$

sería también un (x,G,Γ)-conjunto selectivo.

Así $|C| = 1$ y se demuestra esta implicación. ■

Nuevamente, habiendo caracterizado el caso en que $|C| = 1$, en lo que resta de la sección supongamos que $|C| \geq 2$.

Además sea D una $DS(G,\Gamma)$-digráfica selectiva definida por la familia

$$\left\{W_x^D : x \in V(G)\right\}$$

y $\mathbf{g}[D]$ su gráfica subyacente.

Nótese que como $D \in DS(G,\Gamma)$, entonces $\mathbf{g}[D]$ es una subgráfica de G y podemos considerar a

$$[\mathbf{g}[D],\Gamma] \quad \text{y} \quad \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Lema 6.5 *$c \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])]$ si y sólo si existe $x \in V(G)$ tal que*

$$x = \bigcap_{e \in C} e.$$

Prueba .

$\Rightarrow$) Sea $c \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])]$. Entonces existe $\{x,y\} \in E(\mathbf{g}[D])$ tal que

$$\Gamma(\{x,y\}) = c.$$

Como $\{x,y\} \in E(\mathbf{g}[D])$ entonces

$$\overrightarrow{xy} \in F(D) \quad \acute{o} \quad \overrightarrow{yx} \in F(D),$$

y por el lema 6.2 se sigue que

$$x = \bigcap_{e \in C} e \quad \acute{o} \quad y = \bigcap_{e \in C} e\,.$$

$\Leftarrow$) Sea $x \in V(G)$ tal que

$$x = \bigcap_{e \in C} e$$

y denotemos a los elementos de C como $\{x, y_i\}$ con $i = 1, ..., |C|$.

Claramente, el color c no aparece en $[G \setminus \{x\}, \Gamma]$ por tanto (observación 6.3) existe $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq |C|$ tal que

$$y_i \in W_x^D$$

y así

$$\overrightarrow{xy_i} \in F(D)$$

por lo que

$$\{x, y_i\} \in E(\mathbf{g}[D])$$

de donde se sigue el resultado. ■

A la luz del lema 6.5 podemos ver que

Lema 6.6 *Sea* $\{x, y\} \in E(\mathbf{g}[D])$ *tal que* $\Gamma(\{x, y\}) = c$. *Si*

$$x = \bigcap_{e \in C} e$$

entonces

$$\overrightarrow{xy} \in F(D) \quad y \quad \overrightarrow{yx} \notin F(D).$$

Prueba. Del lema 6.2 se sigue que si

$$x = \bigcap_{e \in C} e$$

entonces

$$\overrightarrow{yx} \notin F(D),$$

pues si no,

$$x = \bigcap_{e \in C} e = y.$$

Y como $\{x, y\} \in E(\mathbf{g}[D])$ entonces no queda otra opción que

$$\overrightarrow{xy} \in F(D).$$

■

Lema 6.7 *Para cada* $x \in V(\mathbf{g}[D])$

$$d_{\mathbf{g}[D]}(x) = \nu(x, G, \Gamma) + d_D^*(x).$$

Prueba. Dada $x \in V(\mathbf{g}[D])$ tenemos por definición que

$$d_{\mathbf{g}[D]}(x) = d_D^+(x) + d_D^-(x) - \left|N_D^+(x) \cap N_D^-(x)\right|.$$

Ahora bien,

$$d_D^*(x) = d_D^-(x) - \left|N_D^+(x) \cap N_D^-(x)\right|$$

y (observación 6.4 *ii*))

$$d_D^+(x) = \nu(x, G, \Gamma)$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 6.8 .

i) $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ *es heterocromática.*

ii) $|E(\mathbf{g}[D])| \leq |\Gamma[E(G)]|$.

Prueba.

i) Supongamos que $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ no es heterocromática. Entonces sean

$$\{x, y\}, \{z, w\} \in E(\mathbf{g}[D])$$

tales que

$$\Gamma(\{x, y\}) = \Gamma(\{z, w\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Por el lema 6.5 vemos, sin pérdida de la generalidad, que

$$x = \bigcap_{e \in C} e \quad \text{y} \quad x = z.$$

Así, por el lema 6.6 se sigue que

$$\overrightarrow{xy} \in F(D) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{xw} \in F(D)$$

por lo que $\{y, w\} \subseteq W_x^D$ y por tanto

$$\Gamma(\{x, y\}) \neq \Gamma(\{x, w\})$$

lo cual es una contradicción.

ii) Dado que $\mathbf{g}[D]$ es subgráfica de G y que $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ es heterocromática, el número de aristas de $\mathbf{g}[D]$ no puede exceder el número total de colores de la coloración Γ en G. ■

Lema 6.9 *Sea* $\{y,w\} \in E(G) \setminus E(\mathbf{g}[D])$ *tal que*

$$\Gamma(\{y,w\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Entonces existen $z \in V(G)$ *y* $D' \in DS(G,\Gamma)$ *tales que la gráfica subyacente* $\mathbf{g}[D']$ *se define como:*

$V(\mathbf{g}[D']) = V(\mathbf{g}[D])$

y

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D]) \setminus \{\{z,y\}\}) \cup \{\{y,w\}\}$$

ó

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D]) \setminus \{\{z,w\}\}) \cup \{\{y,w\}\}.$$

Prueba. Como

$$\Gamma(\{y,w\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])] \quad \text{y} \quad \{y,w\} \in E(G) \setminus E(\mathbf{g}[D])$$

entonces existe $\{v,z\} \in E(\mathbf{g}[D])$ tal que

$$\Gamma(\{y,w\}) = \Gamma(\{v,z\}).$$

Por el lema 6.5 vemos, sin pérdida de generalidad, que existen dos posibilidades, a saber

$$v = \bigcap_{e \in C} e \quad \text{y} \quad v = y$$

ó

$$v = \bigcap_{e \in C} e \quad \text{y} \quad v = w.$$

Supongamos que $y = v$.

Por el lema 6.6 vemos entonces que

$$\overrightarrow{vz} = \overrightarrow{yz} \in F(D)$$

por lo que

$$z \in W_y^D.$$

Ahora bien, como

$$\Gamma(\{y,w\}) = \Gamma(\{y,z\})$$

entonces el conjunto

$$W'_y = \left(W_y^D \setminus \{z\}\right) \cup \{w\}$$

es un (y, G, Γ)-conjunto selectivo y así, la digráfica D' definida por la familia

$$\left(\{W_x^D : x \in V(G)\} \setminus \{W_y^D\}\right) \cup \{W'_y\}$$

es una (G, Γ)-digráfica selectiva tal que su gráfica subyacente $\mathbf{g}[D']$ esta definida por

$$V(\mathbf{g}[D']) = V(\mathbf{g}[D])$$

y

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D]) \setminus \{\{z,y\}\}) \cup \{\{y,w\}\}.$$

Para el caso en que $w = v$, con una demostración análoga llegamos a que

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D]) \setminus \{\{z,w\}\}) \cup \{\{w,y\}\}.$$ ■

6.2 La función ν y las subgráficas de G

Sean G una gráfica y

$$\Gamma : E(G) \to \{1, ..., q\}$$

una coloración de las aristas de G.

Dada G' una subgráfica de G tenemos la siguiente

Definición 6.5 *Para cada $x \in V(G')$ sea*

$$\nu(x, G', \Gamma) = |\Gamma[E(G')]| - |\Gamma[E(G' \setminus \{x\})]|,$$

y para cada $Y \subseteq V(G')$, sea

$$\nu(Y, G', \Gamma) = |\Gamma[E(G')]| - |\Gamma[E(G' \setminus Y)]|.$$

Lema 6.10 *Para toda $x \in V(G')$*

$$\nu(x, G', \Gamma) = \nu(x, G', \Gamma_{G'}).$$

Y para todo $Y \subseteq V(G')$

$$\nu(Y, G', \Gamma) = \nu(Y, G', \Gamma_{G'}).$$

Prueba. Dada

$$\Gamma_{G'} : E(G') \to \{1, ..., q\}$$

la restricción de Γ en $E(G')$,

$$\Gamma[E(G')] = \Gamma_{G'}[E(G')]; \qquad \Gamma[E(G' \setminus \{x\})] = \Gamma_{G'}[E(G' \setminus \{x\})]$$

y

$$\Gamma[E(G' \setminus Y)] = \Gamma_{G'}[E(G' \setminus Y)]$$

de donde se sigue el resultado. ■

Así pues

Definición 6.6 *Sea $x \in V(G')$. Un subconjunto $W \subseteq N_{G'}(x)$ se dirá que es un (x, G', Γ)-conjunto selectivo si cumple con:*

i) $|W| = \nu(x, G', \Gamma)$.

ii) Todas las $\{x\}W$-aristas estan coloreadas con colores distintos.

iii) Toda $\{x\}W$-arista tiene un color que no aparece en $[G' \setminus \{x\}, \Gamma]$.

Para cada $x \in V(G)$ sea

$$S(x, G', \Gamma) = \{W \subseteq N_{G'}(x) : W \text{ es un } (x, G', \Gamma)\text{-conjunto selectivo}\}$$

Por el lema 6.10 vemos que para cada $x \in V(G')$

$$S(x, G', \Gamma) = S(x, G', \Gamma_{G'}).$$

Definición 6.7 *Una digráfica D será denominada una (G', Γ)-digráfica selectiva si cumple con:*

i) $V(D) = V(G')$

ii) Si $V(G') = \{x_1, ..., x_n\}$, *entonces existe una familia de n subconjuntos de* $V(G')$

$$\{W_{x_1}, ..., W_{x_n}\},$$

tal que para cada $x_i \in V(G')$

$$W_{x_i} \in S(x_i, G', \Gamma)$$

y

$$F(D) = \bigcup_{x_i \in V(G')} \{\overrightarrow{x_i u} : u \in W_{x_i}\}.$$

Al conjunto de todas las (G', Γ)-digráficas selectivas lo denotaremos como

$$DS(G', \Gamma).$$

Análogamente vemos que

$$DS(G', \Gamma) = DS(G', \Gamma_{G'}).$$

Lema 6.11 *Sea* $\{x_1,...x_m\} \subseteq V(G)$. *Para toda* $y \in V(G) \setminus \{x_1,...x_m\}$ *se cumple que*

$$\begin{aligned} &\nu(\{x_1,...,x_m,y\},G,\Gamma) \\ &= \nu(\{x_1,...,x_m\},G,\Gamma) + \nu(y,G \setminus \{x_1,...x_m\},\Gamma). \end{aligned}$$

Prueba. Por definición

$$\nu(\{x_1,...,x_m\},G,\Gamma) = |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,...,x_m\})]|$$

y para cada $y \in V(G) \setminus \{x_1,...x_m\}$

$$\begin{aligned} &\nu(y,G \setminus \{x_1,...,x_m\},\Gamma) \\ = \;& |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,...,x_m\})]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,...,x_m,y\})]| \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} &\nu(\{x_1,....x_m\},G,\Gamma) + \nu(y,G \setminus \{x_1,....x_m\},\Gamma) \\ = \;& |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,....x_m\})]| \\ &+ |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,....x_m\})]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,....x_m,y\})]| \\ = \;& |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,....x_m,y\})]| \end{aligned}$$

y como por definición

$$\nu(\{x_1,...,x_m,y\},G,\Gamma) = |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x_1,...,x_m,y\})]|$$

se sigue el resultado. ■

Lema 6.12 *Sea* $\{x_1,...x_m\} \subseteq V(G)$. *Entonces*

$$\nu(\{x_1,...x_m\},G,\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \nu(x_i,G \setminus \{x_1,...,x_{i-1}\},\Gamma)$$

Prueba. Por el lema 6.11 sabemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$ sucede que

$$\begin{aligned} &\nu(\{x_1,...,x_i\},G,\Gamma) \\ = \;& \nu(\{x_1,...,x_{i-1}\},G,\Gamma) + \nu(x_i,G \setminus \{x_1,...,x_{i-1}\},\Gamma) \end{aligned}$$

por tanto para cada $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$ se tiene

$$\begin{aligned} & \nu\left(x_i, G \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma\right) \\ = \; & \nu\left(\{x_1, ..., x_i\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\{x_1, ..., x_{i-1}\}, G, \Gamma\right). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} \nu\left(x_i, G \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma\right) \\ = \; & \sum_{i=1}^{m} \left(\nu\left(\{x_1, ..., x_i\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\{x_1, ..., x_{i-1}\}, G, \Gamma\right)\right) \\ = \; & \left(\nu\left(x_1, G, \Gamma\right) - \nu\left(\emptyset, G, \Gamma\right)\right) + \left(\nu\left(\{x_1, x_2\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(x_1, G, \Gamma\right)\right) \\ & + ... + \left(\nu\left(\{x_1, ..., x_m\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\{x_1, ..., x_{m-1}\}, G, \Gamma\right)\right). \end{aligned}$$

Reordenando los sumando tenemos entonces que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} \nu\left(x_i, G \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma\right) \\ = \; & -\nu\left(\emptyset, G, \Gamma\right) + \left(\nu\left(x_1, G, \Gamma\right) - \nu\left(x_1, G, \Gamma\right)\right) \\ & + \left(\nu\left(\{x_1, x_2\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\{x_1, x_2\}, G, \Gamma\right)\right) \\ & + ... + \left(\nu\left(\{x_1, ..., x_{m-1}\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\{x_1, ..., x_{m-1}\}, G, \Gamma\right)\right) \\ & + \nu\left(\{x_1, ..., x_m\}, G, \Gamma\right) \\ = \; & \nu\left(\{x_1, ..., x_m\}, G, \Gamma\right) - \nu\left(\emptyset, G, \Gamma\right) \\ = \; & \nu\left(\{x_1, ..., x_m\}, G, \Gamma\right) \end{aligned}$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 6.13 *Sea G' una subgráfica de G. Dada $x \in V(G')$, si W es un (x, G, Γ)-conjunto selectivo, entonces*

$$|W \cap V(G')| \leq \nu(x, G', \Gamma).$$

Prueba. Sea $x \in V(G')$ y W un (x, G, Γ)-conjunto selectivo.

Por definición, todas las $\{x\}\, W$-aristas están coloreadas de colores distintos y toda $\{x\}\, W$-arista tiene un color que no aparece en $[G \setminus \{x\}, \Gamma]$.

Así, considerando la coloración

$$\Gamma_{G'} : E(G') \to \{1, ..., q\},$$

en particular todas las $\{x\}\,(W \cap V(G'))$-aristas estan coloreadas de colores distintos y toda $\{x\}\,(W \cap V(G'))$-arista tiene un color que no aparece en $[G' \setminus \{x\}, \Gamma_{G'}]$.

Es decir, en la subgráfica G' existen cuando menos $|W \cap V(G')|$ vértices en $N_{G'}(x)$, que denotaremos como

$$\left\{x_1, ..., x_{|W \cap V(G')|}\right\},$$

tales que:

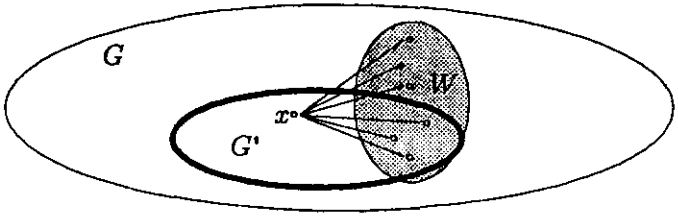
i) Dados $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq |W \cap V(G')|$ y $1 \leq j \leq |W \cap V(G')|$, si $i \neq j$ entonces

$$\Gamma_{G'}(\{x, x_i\}) \neq \Gamma_{G'}(\{x, x_j\}).$$

ii) Dada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq |W \cap V(G')|$, para toda $e \in E(G' \setminus \{x\})$ sucede que

$$\Gamma_{G'}(e) \neq \Gamma_{G'}(\{x, x_i\})$$

(Dibujo 6.1).



Dibujo 6.1

Así (observación 6.1)

$$\nu(x, G', \Gamma_{G'}) \geq |W \cap V(G')|$$

y por el lema 6.10 se sigue el resultado. ■

Lema 6.14 *Sea G' una subgráfica de G. Para toda $x \in V(G')$ se cumple que*

$$\nu(x, G, \Gamma) \leq \nu(x, G', \Gamma) + d_G(x) - d_{G'}(x).$$

Prueba. Sean $x \in V(G')$ y W un (x, G, Γ)-conjunto selectivo.

Como

$$|W| = |W \setminus V(G')| + |W \cap V(G')|$$

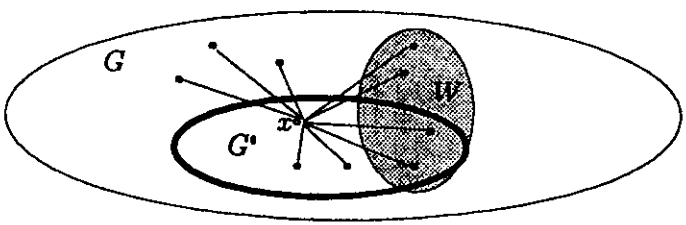
y

$$|W \setminus V(G')| \leq d_G(x) - d_{G'}(x)$$

entonces

$$|W| \leq |W \cap V(G')| + d_G(x) - d_{G'}(x).$$

(Dibujo 6.2).



Dibujo 6.2

Por otro lado, por el lema 6.13 sabemos que

$$|W \cap V(G')| \leq \nu(x, G', \Gamma),$$

y entonces

$$|W| \leq \nu(x, G', \Gamma) + d_G(x) - d_{G'}(x).$$

Por último, como por definición

$$|W| = \nu(x, G, \Gamma),$$

se sigue el resultado. ■

6.3 Y sobre el número heterocromático...

Ahora veremos la relación existente entre los conceptos presentados hasta ahora en este capítulo, con el número heterocromático lineal.

Sea G una gráfica y $\mathbf{C}$ una clase de gráficas. Al número heterocromático lineal de G con respecto a $\mathbf{C}$ lo denotaremos como

$$H(G,\mathbf{C}).$$

En lo que sigue, sea Γ una coloración de las aristas de G tal que $\Gamma \in C(G,\mathbf{C})$, D una (G,Γ)-digráfica selectiva y sea $G' \in \mathbf{C}(G)$.

Lema 6.15 *Sea $x \in V(G)$ tal que $\mathbf{C}(G \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Si $\Gamma \in C^*(G,\mathbf{C})$ entonces*

$$\nu(x,G,\Gamma) \geq H(G,\mathbf{C}) - H(G \setminus \{x\},\mathbf{C}).$$

Prueba. Sea $x \in V(G)$ tal que $\mathbf{C}(G \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y $\Gamma \in C^*(G,\mathbf{C})$.

Como $\Gamma \in C^*(G,\mathbf{C})$ entonces, por un lado

$$|\Gamma[E(G)]| = H(G,\mathbf{C}) - 1;$$

y por otro lado, $[\Gamma, G \setminus \{x\}]$ es libre de copias heterocromáticas de elementos de $\mathbf{C}$, por tanto

$$|\Gamma[E(G \setminus \{x\})]| \leq H(G \setminus \{x\},\mathbf{C}) - 1.$$

Así

$$\begin{aligned} \nu(x,G,\Gamma) &= |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus \{x\})]| \\ &= H(G,\mathbf{C}) - 1 - |\Gamma[E(G \setminus \{x\})]| \\ &\geq H(G,\mathbf{C}) - 1 - (H(G \setminus \{x\},\mathbf{C}) - 1) \\ &= H(G,\mathbf{C}) - H(G \setminus \{x\},\mathbf{C}) \end{aligned}$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 6.16 *Sea* $Y \subseteq V(G)$ *tal que* $\mathbf{C}(G \setminus Y) \neq \emptyset$. *Si* $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$ *entonces*

$$\nu(Y, G, \Gamma) \geq H(G, \mathbf{C}) - H(G \setminus Y, \mathbf{C}).$$

Prueba. Sea $Y \subseteq V(G)$ tal que $\mathbf{C}(G \setminus Y) \neq \emptyset$ y $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$.
Como $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$ entonces,

$$|\Gamma[E(G)]| = H(G, \mathbf{C}) - 1;$$

y por otro lado $[G \setminus Y, \Gamma]$ es libre de copias heterocromáticas de elementos de $\mathbf{C}$, por tanto

$$|\Gamma[E(G \setminus Y)]| \leq H(G \setminus Y, \mathbf{C}) - 1.$$

De manera análoga al lema 6.15, se sigue el resultado. ■

Lema 6.17 *Sea* $Y \subseteq V(G)$ *tal que* $\mathbf{C}(G \setminus Y) = \emptyset$. *Si* $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$ *entonces*

$$\nu(Y, G, \Gamma) \geq H(G, \mathbf{C}) - 1 - |E(G \setminus Y)|.$$

Prueba. Sea $Y \subseteq V(G)$ tal que $\mathbf{C}(G \setminus Y) = \emptyset$ y $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$.
Como $\Gamma \in C^*(G, \mathbf{C})$ entonces,

$$|\Gamma[E(G)]| = H(G, \mathbf{C}) - 1;$$

y por otro lado

$$|\Gamma[E(G \setminus Y)]| \leq |E(G \setminus Y)|.$$

Así

$$\begin{aligned} \nu(Y, G, \Gamma) &= |\Gamma[E(G)]| - |\Gamma[E(G \setminus Y)]| \\ &= H(G, \mathbf{C}) - 1 - |\Gamma[E(G \setminus Y)]| \\ &\geq H(G, \mathbf{C}) - 1 - |E(G \setminus Y)| \end{aligned}$$

y tenemos el resultado. ■

Lema 6.18 *La gráfica* $\mathbf{g}[D]$ *es libre de subgráficas isomorfas a* G'.

Prueba. Como (lema 6.8 *i*)) $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ es heterocromático y $\mathbf{g}[D]$ es subgráfica de G, si existiera una subgráfica de $\mathbf{g}[D]$ isomorfa a G', entonces en G existiría una copia heterocromático de G' lo cual es una contradicción. ■

Lema 6.19 *Sea $x \in V(G)$ y W un (x, G, Γ)-conjunto selectivo. Entonces en $[G[W], \Gamma]$ no existe una copia heterocromática de $G' \setminus \{x\}$.*

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.

Sea $x \in V(G)$ y W un (x, G, Γ)-conjunto selectivo tal que en $[G[W], \Gamma]$ existe una copia de $G' \setminus \{x\}$ heterocromática (Dibujo 6.3).

Dibujo 6.3

Por definición de W, todas las $\{x\}W$-aristas son de distinto color y de colores que no aparecen en $[G \setminus \{x\}, \Gamma]$.

Así, en la subgráfica de G inducida por $W \cup \{x\}$, y por tanto en $[G, \Gamma]$, existe una copia de G' heterocromática lo cual es una contradicción. ■

Lema 6.20 *Si existe una subdigráfica D' de D tal que*

$$\mathbf{g}[D'] + xy \cong G',$$

donde $\{x, y\} \in E(G)$, entonces

$$d^-_{D'}(x) + d^-_{D'}(y) < d_{\mathbf{g}[D']}(x) + d_{\mathbf{g}[D']}(y).$$

Prueba. Sea D' una subdigráfica de D que tal que

$$\mathbf{g}[D'] + xy \cong G'$$

y $\{x, y\} \in E(G)$.

Como (lema 6.8 *i*)) $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ es heterocromático, entonces también lo es $[\mathbf{g}[D'], \Gamma]$, y dado que

$$\mathbf{g}[D'] + xy \cong G'$$

entonces debe suceder que

$$\Gamma(\{x,y\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D'])].$$

Sea pues $\{z,w\} \in E(\mathbf{g}[D'])$ tal que

$$\Gamma(\{x,y\}) = \Gamma(\{z,w\}).$$

Sin pérdida de generalidad, por el lema 6.5 vemos entonces que

$$z = \bigcap_{e \in C} e \quad \text{y} \quad z = x,$$

y así (lema 6.6)

$$\overrightarrow{xw} \in F(D) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{wx} \notin F(D)$$

de donde

$$d^-_{D'}(x) < d_{\mathbf{g}[D']}(x)$$

y se sigue el resultado. ■

Capítulo 7

COMPLETAS EN GRÁFICAS COMPLETAS

Dado $m \in \mathbf{N}$ con $m \geq 3$, sea

$$K_m = (V(K_m), E(K_m))$$

la gráfica completa de orden m.

Dados $n, q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 3$, denotemos como $H(K_n, K_q)$ el número heterocromático lineal de K_n con respecto a la clase de gráficas $\mathbf{C} = \{K_q\}$.

Aquí demostraremos que para todo $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 3$, se cumple que

$$H(K_n, K_q) = \begin{cases} n & \text{si } q = 3; \\ d_{q-1}(n) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $d_{q-1}(n)$ es el máximo número de aristas de una gráfica de orden n libre de subgráficas isomorfas a K_{q-1}, también llamado el número de Turán de K_{q-1}.

7.1 El número heterocromático $H(K_n, K_q)$

7.1.1 La cota inferior

El caso $q = 3$.

Lema 7.1 *Para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, tenemos que*

$$H(K_n, K_3) \geq n.$$

Prueba. Este lema lo probaremos exhibiendo una $(n-1)$-coloración de $E(K_n)$ libre de K_3 heterocromáticos.

Sea

$$V(K_n) = \{x_1, ..., x_n\}$$

y consideremos la coloración

$$\Gamma : E(K_n) \to \{1, ..., n-1\}$$

donde para cada $\{x_i, x_j\} \in E(K_n)$,

$$\Gamma(\{x_i, x_j\}) = min\{i, j\}.$$

Veremos ahora que Γ es una coloración libre de K_3 heterocromáticos, es decir, que

$$\Gamma \in C(K_n, K_3).$$

Sea G una subgráfica de K_n tal que $G \cong K_3$. Para fijar ideas, sea

$$V(G) = \{x_i, x_j, x_k\}$$

y sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$i = min\{i, j, k\}.$$

Así

$$\Gamma(\{x_i, x_j\}) = \Gamma(\{x_i, x_k\}) = i$$

y por tanto G no es heterocromático.

Entonces

$$H(K_n, K_3) > n - 1$$

y se sigue el resultado. ■

El caso $q \geq 4$.

En [17] y [18] se establece una condición suficiente para que una gráfica de orden dado n, contenga a K_m como subgráfica en términos del número de aristas en la gráfica, a saber:

Teorema 7.1 *Sean n, m, r y t números enteros tales que $n \geq m \geq 3$ y $n = (m-1)t + r$, donde $1 \leq r \leq m-1$. Sea*

$$d_m(n) = \left(\frac{m-2}{2(m-1)}\right)(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Además, denotaremos como $\Delta(n, m)$ a la gráfica de orden n con la siguiente estructura: los vértices están particionados en r clases de $t+1$ vértices cada una y $m-r-1$ clases de t vértices cada una. Las clases son ajenas 2 a 2, y dos vértices de la gráfica son adyacentes si y sólo si no pertenecen a la misma clase. $\Delta(n, m)$ contiene exactamente $d_m(n)$ aristas.

Cualquier gráfica con n vértices y más de $d_m(n)$ aristas contiene al menos un K_m como subgráfica, al igual que cualquier gráfica con n vértices y exactamente $d_m(n)$ aristas que no sea isomorfa a $\Delta(n, m)$.

■

Observación 7.1 *Nótese que*

$$d_m(n) = \left(\frac{m-2}{2(m-1)}\right)(n^2 - re(n, m-1)^2) + \binom{re(n, m-1)}{2}.$$

Lema 7.2 *Para todo par $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$, se cumple que*

$$H(K_n, K_q) \geq d_{q-1}(n) + 2.$$

Prueba. La prueba de este lema la realizaremos mostrando una c-coloración de $E(K_n)$ con

$$c = d_{q-1}(n) + 1,$$

que es libre de K_q heterocromáticos.

Consideremos a

$$\{V_1, \ldots, V_{q-2}\}$$

Caso 1. Existe $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq q-2$ tal que

$$|V(G) \cap V(G_i)| \geq 3.$$

En este caso, en $E(G)$ existen al menos 3 aristas de color 1, a saber, las que también pertenecen a $E(G_i)$.

Caso 2. Existen $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq q-2$ y $1 \leq j \leq q-2$ tales que

$$|V(G) \cap V(G_i)| \geq 2 \quad \text{y} \quad |V(G) \cap V(G_j)| \geq 2.$$

Entonces en $E(G)$ existen al menos 2 aristas de color 1, a saber, las aristas contenidas en $E(G_i)$ y $E(G_j)$.

En ambos casos, el conjuntos $E(G)$ tiene al menos 2 aristas de un mismo color, por tanto G no es heterocromático.

Así,

$$H(K_n, K_q) > d_{q-1}(n) + 1$$

y se sigue el resultado. ■

El subcaso $n = q \geq 4$.

Lema 7.3 *Dada* $q \in \mathbb{N}$ *tal que* $q \geq 4$, *tenemos que*

$$H(K_q, K_q) = d_{q-1}(q) + 2.$$

Prueba. Dada $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$, claramente se cumple que

$$H(K_q, K_q) = \binom{q}{2}.$$

Ahora calcularemos $d_{q-1}(q) + 2$, y lo haremos en dos casos.

Caso 1. $q = 4$.

Si $q = 4$ entonces $re(4,2) = 0$, y así vemos (observación 7.1) que

$$d_3(4) + 2 = \left(\frac{1}{4}\right)(16) + 2 = 6 = \binom{4}{2}.$$

Caso 2. $q \geq 5$,

Si $q \geq 5$ entonces $re\,(q, q-2) = 2$, y así (observación 7.1)

$$\begin{aligned} d_{q-1}(q) + 2 &= \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)(q^2 - 2^2) + 3 \\ &= \left(\frac{q-3}{2}\right)(q+2) + 3 \\ &= q\left(\frac{q-3}{2}\right) + q - 3 + 3 \\ &= q\left(\frac{q-1}{2}\right) \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

7.1.2 La cota superior

El caso $q = 3$

Lema 7.4 *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$ y $\Gamma \in C(K_n, K_3)$. Entonces para cada $x \in V(K_n)$*

$$\nu(x, K_n, \Gamma) \leq 1.$$

Prueba. Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, Γ una coloración de $E(K_n)$ y supongamos que existe $x \in V(K_n)$ tal que

$$\nu(x, K_n, \Gamma) \geq 2.$$

Si $\nu(x, K_n, \Gamma) \geq 2$ entonces (observación 6.1) existen

$$x_1, x_2 \in N_{K_n}(x)$$

tales que

$$\Gamma(\{x, x_1\}) \neq \Gamma(\{x, x_2\})$$

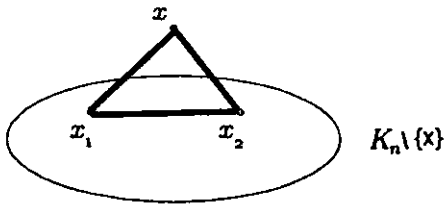
y para toda $e \in E(K_n \setminus \{x\})$ sucede que

$$\Gamma(e) \neq \Gamma(\{x, x_1\}) \quad \text{y} \quad \Gamma(e) \neq \Gamma(\{x, x_2\}).$$

Siguiendo esto, como $\{x_1, x_2\} \in E(K_n \setminus \{x\})$ entonces

$$\Gamma(\{x_1, x_2\}) \neq \Gamma(\{x, x_1\}) \quad \text{y} \quad \Gamma(\{x_1, x_2\}) \neq \Gamma(\{x, x_2\})$$

(Dibujo 7.1).



Dibujo 7.1

Así pues, la subgráfica G de K_n inducida por $\{x, x_1, x_2\}$ es heterocromática y $G \cong K_3$, por tanto

$$\Gamma \notin C(K_n, K_3).$$

■

Teorema 7.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Entonces*

$$H(K_n, K_3) = n.$$

Prueba. Por el lema 7.1, para probar el teorema basta mostrar que

$$H(K_n, K_3) \leq n.$$

La prueba de esto la realizaremos por inducción sobre n.

1. $n = 3$.

Claramente,

$$H(K_3, K_3) = 3 \leq 3.$$

2. Sea $n \geq 4$.

Supongamos que para toda $m \in \mathbf{N}$ tal que $3 \leq m < n$, se cumple que

$$H(K_m, K_3) \leq m.$$

Sea $\Gamma \in C^*(K_n, K_3)$. Como en particular, $\Gamma \in C(K_n, K_3)$ entonces por el lema 7.4 sabemos que para toda $x \in V(K_n)$,

$$\nu(x, K_n, \Gamma) \leq 1.$$

Además, como

$$\Gamma \in C^*(K_n, K_3) \quad \text{y} \quad n - 1 \geq 3,$$

entonces por el lema 6.15 vemos que para toda $x \in V(K_n)$ se tiene que

$$H(K_n, K_3) - H(K_{n-1}, K_3) \leq \nu(x, K_n, \Gamma).$$

Por tanto

$$H(K_n, K_3) \leq H(K_{n-1}, K_3) + 1,$$

que por hipótesis de inducción implica que

$$H(K_n, K_3) \leq (n-1) + 1 = n$$

y se sigue el resultado. ■

El caso $q \geq 4$

Algunos lemas técnicos.

Lema 7.5 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq m \geq 3$. Entonces*

$$d_m(n) \leq n^2 \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \right).$$

Prueba. Supongamos que

$$d_m(n) > n^2 \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \right).$$

Como (observación 7.1)

$$d_m(n) = \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \right) \left(n^2 - re(n, m-1)^2 \right) + \binom{re(n, m-1)}{2}$$

entonces se sigue que

$$\binom{re(n, m-1)}{2} > \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \right) re(n, m-1)^2,$$

y así

$$re(n, m-1) - 1 > \left(\frac{m-2}{m-1} \right) re(n, m-1).$$

De esto último se sigue que

$$re(n, m-1)(m-1) - (m-1) > re(n, m-1)(m-2)$$

y entonces

$$re(n, m-1) > (m-1)$$

lo cual es una contradicción. ■

Ahora, para todo par $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$ sea

$$g(n, q) = n - 1 - \left\lfloor \tfrac{n-1}{q-2} \right\rfloor.$$

Lema 7.6 *Sean $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$. Entonces*

$$d_{q-1}(n) - d_{q-1}(n-1) = g(n,q).$$

Prueba. Por la observación 7.1 vemos que

$$\begin{aligned}
& d_{q-1}(n) - d_{q-1}(n-1) \\
= & \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)\left(n^2 - re(n,q-2)^2\right) + \binom{re(n,q-2)}{2} \\
& - \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)\left((n-1)^2 - re(n-1,q-2)^2\right) - \binom{re(n-1,q-2)}{2} \\
= & \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)\left(n^2 - re(n,q-2)^2 - (n-1)^2 + re(n-1,q-2)^2\right) \\
& + \binom{re(n,q-2)}{2} - \binom{re(n-1,q-2)}{2} \\
= & \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)\left(2n-1 + re(n-1,q-2)^2 - re(n,q-2)^2\right) \\
& + \binom{re(n,q-2)}{2} - \binom{re(n-1,q-2)}{2}.
\end{aligned}$$

Así tenemos los siguientes 2 casos:

Caso 1. $re(n-1,q-2) = re(n,q-2) - 1$.

Aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
& d_{q-1}(n) - d_{q-1}(n-1) \\
= & \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)\left(2n - 1 - 2re(n-1,q-2) - 1\right) + re(n-1,q-2) \\
= & \left(\frac{q-3}{q-2}\right)\left(n - 1 - re(n-1,q-2)\right) + re(n-1,q-2)
\end{aligned}$$

$$= \left(1-\frac{1}{q-2}\right)(n-1-re(n-1,q-2))+re(n-1,q-2)$$

$$= n-1-re(n-1,q-2)-\left(\frac{n-1-re(n-1,q-2)}{q-2}\right)$$
$$+re(n-1,q-2)$$

$$= n-1-\left(\frac{n-1-re(n-1,q-2)}{q-2}\right)$$

$$= n-1-\left\lfloor\frac{n-1}{q-2}\right\rfloor = g(n,q).$$

Caso 2. $re(n-1,q-2)=q-3$ y $re(n,q-2)=0$.

En este caso, entonces

$$d_{q-1}(n)-d_{q-1}(n-1)$$

$$= \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)(2n-1+(q-3)^2)-\frac{(q-3)(q-4)}{2}$$

$$= \left(\frac{q-3}{2(q-2)}\right)(2n-1+(q-3)^2)-\frac{(q-3)(q-4)(q-2)}{2(q-2)}$$

$$= \frac{q-3}{2}\left(\frac{2n-1+(q-3)^2-(q-4)(q-2)}{q-2}\right)$$

$$= \frac{q-3}{2}\left(\frac{2n}{q-2}\right) = n\left(\frac{q-3}{q-2}\right) = n\left(1-\frac{1}{q-2}\right)$$

$$= n-\frac{n}{q-2} = n-1-\frac{n-(q-2)}{q-2}$$

$$= n-1-\frac{n-1-(q-3)}{q-2} = n-1-\frac{n-1-re(n-1,q-2)}{q-2}$$

$$= n-1-\left\lfloor\frac{n-1}{q-2}\right\rfloor = g(n,q).$$

■

Lema 7.7 *Sean* $n,\ q \in \mathbb{N}$ *tales que* $n > q \geq 4$.

i) Si $q = 4$ *entonces* $g(n,4) + 1 \geq 3$.

ii) Si $q \geq 5$ *entonces* $g(n,q) + 1 \geq q$.

iii) $g(n,q) + 1 > n\left(\frac{q-3}{q-2}\right)$.

Prueba.

i) Por definición

$$g(n,4) = n - 1 - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

y por tanto

$$g(n,4) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Así, como $n > q$ y $q = 4$ entonces

$$g(n,4) + 1 \geq \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil + 1 = 3.$$

ii) Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.
Sean $n > q \geq 5$ tales que

$$g(n,q) + 2 \leq q.$$

Entonces

$$\begin{aligned} q &\geq n + 2 - \left\lfloor \frac{n-1}{q-2} \right\rfloor \\ &= n + 1 - \frac{n-1}{q-2} + \frac{re(n-1, q-2)}{q-2} \\ &\geq n + 1 - \frac{n-1}{q-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} q(q-2) &\geq (n+1)(q-2) - n + 1 \\ &= nq - 3n + q - 1 \\ &= n(q-3) + q - 1 \end{aligned}$$

y así

$$q(q-3) \geq n(q-3) - 1$$

de donde se sigue que

$$q \geq n - \frac{1}{q-3},$$

pero $n > q \geq 5$ lo cual nos lleva a una contradicción.
iii) Nuevamente, por definición

$$g(n,q) = n - 1 - \left\lfloor \frac{n-1}{q-2} \right\rfloor$$

y por tanto

$$\begin{aligned} g(n,q) &= n - 1 - \left(\frac{n-1}{q-2}\right) + \frac{re(n-1, q+2)}{q+2} \\ &\geq n - 1 - \frac{n}{q-2} + \frac{1}{q-2} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{q-2}\right) - 1 + \frac{1}{q-2} \\ &= n\left(\frac{q-3}{q-2}\right) - 1 + \frac{1}{q-2} \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 7.8 *Sean $n_0 \in \mathbb{N}$, h y f dos funciones reales con dominio en el conjunto de números enteros $\{n : n \geq n_0\}$ y c_0 una constante. Si tenemos que:*
i) $h(n_0) = f(n_0) + c_0$ y
ii) Para toda $n \geq n_0$

$$h(n+1) - h(n) \leq f(n+1) - f(n),$$

entonces para toda $n \geq n_0$ tenemos que

$$h(n) \leq f(n) + c_0.$$

Prueba. Demostraremos este resultado por inducción sobre $n \geq n_0$.
1. $n = n_0$.
Por i) sabemos que $h(n_0) = f(n_0) + c_0$ y por tanto

$$h(n_0) \leq f(n_0) + c_0.$$

2. Sea $n+1 > n_0$.

Supongamos que para toda $m \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq m < n+1$ se cumple que

$$h(m) \leq f(m) + c_0.$$

Por *ii*) vemos que

$$h(n+1) - h(n) \leq f(n+1) - f(n),$$

por tanto

$$h(n+1) - f(n+1) \leq h(n) - f(n).$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción

$$h(n) \leq f(n) + c_0$$

de donde se sigue que

$$h(n) - f(n) \leq c_0.$$

Así pues

$$h(n+1) - f(n+1) \leq h(n) - f(n) \leq c_0$$

por lo tanto

$$h(n+1) - f(n+1) \leq c_0.$$

■

En las digráficas selectivas de una coloración.

En esta sección analizaremos las coloraciones máximas de $E(K_n)$ libres de K_q heterocromáticos, es decir, las coloraciones Γ de $E(K_n)$ tales que

$$\Gamma \in C^*(K_n, K_q).$$

Analizaremos solamente los casos en que $n > q \geq 4$, ya que el problema en el caso en que $n = q \geq 4$ esta resuelto en el lema 7.3.

Para empezar, dados $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$, sea

$$\nu^*(K_n, K_q) = max\{min\{\nu(x, K_n, \Gamma) : x \in V(K_n)\} : \Gamma \in C^*(K_n, K_q)\}$$

Lema 7.9 *Sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$ y supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$ se cumple que*

$$\nu^* (K_n, K_q) \leq g(n, q).$$

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$,

$$H(K_n, K_q) = d_{q-1}(n) + 2.$$

Prueba. Sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$ y supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$ se cumple que

$$\nu^* (K_n, K_q) \leq g(n, q).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$, sea

$$\Gamma_n \in C^* (K_n, K_q).$$

Por el lema 6.15 vemos entonces que para toda $x \in V(K_n)$,

$$\nu(x, K_n, \Gamma_n) \geq H(K_n, K_q) - H(K_{n-1}, K_q).$$

Por tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$ sucede que

$$\nu^* (K_n, K_q) \geq H(K_n, K_q) - H(K_{n-1}, K_q).$$

Así pues, si para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q \geq 4$ se cumple

$$\nu^* (K_n, K_q) \leq g(n, q),$$

entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q \geq 4$

$$g(n, q) \geq H(K_n, K_q) - H(K_{n-1}, K_q).$$

Ahora bien, por el lema 7.6 vemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq q \geq 4$ se tiene que

$$d_{q-1}(n) - d_{q-1}(n-1) = g(n, q),$$

por tanto, para toda $n > q \geq 4$,

$$d_{q-1}(n) - d_{q-1}(n-1) \geq H(K_n, K_q) - H(K_{n-1}, K_q). \qquad (7.1)$$

Por otro lado (lema 7.3), para toda $q \geq 4$ sucede que

$$H(K_q, K_q) = d_{q-1}(q) + 2. \tag{7.2}$$

Así, aplicando el lema 7.8 a (7.1) y (7.2) tenemos entonces que para cada $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > q$ se cumple que

$$H(K_n, K_q) \leq d_{q-1}(n) + 2.$$

Finalmente (lema 7.2), como para toda $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq q \geq 4$,

$$H(K_n, K_q) \geq d_{q-1}(n) + 2$$

se sigue el resultado. ■

Lema 7.10 *Sean $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$ y $\Gamma \in C(K_n, K_{q-1})$. Entonces existe $x_0 \in V(K_n)$ tal que*

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \leq \frac{2}{n}(H(K_n, K_{q-1}) - 2).$$

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.

Sean $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$,

$$\Gamma \in C(K_n, K_{q-1})$$

y supongamos que para toda $x \in V(K_n)$ sucede que

$$\nu(x, K_n, \Gamma) > \frac{2}{n}(H(K_n, K_{q-1}) - 2).$$

Además sea $D \in DS(K_n, \Gamma)$ y $\mathbf{g}[D]$ su gráfica subyacente.

Por el lema 6.7 sabemos que para toda $x \in V(\mathbf{g}[D])$ sucede que

$$d_{\mathbf{g}[D]}(x) = \nu(x, K_n, \Gamma) + d_D^*(x)$$

donde

$$d_D^*(x) = |\{y \in V(K_n) : \overrightarrow{yx} \in F(D) \text{ y } \overrightarrow{xy} \notin F(D)\}|,$$

por tanto, si para toda $x \in V(K_n)$ tenemos que

$$\nu(x, K_n, \Gamma) > \frac{2}{n}(H(K_n, K_{q-1}) - 2),$$

entonces

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{g}[D])| &= \sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{\nu(x, K_n, \Gamma) + d_D^*(x)}{2} \right) \\ &> \sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{\frac{2}{n}(H(K_n, K_{q-1}) - 2) + d_D^*(x)}{2} \right) \\ &= \frac{|V(\mathbf{g}[D])|}{n}(H(K_n, K_{q-1}) - 2) + \sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{d_D^*(x)}{2} \right), \end{aligned}$$

y como por definición

$$V(\mathbf{g}[D]) = V(D) \quad \text{y} \quad V(D) = V(K_n),$$

se sigue entonces que

$$|E(\mathbf{g}[D])| > H(K_n, K_{q-1}) - 2 + \sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{d_D^*(x)}{2} \right). \tag{7.3}$$

Por otro lado, como $\Gamma \in C(K_n, K_{q-1})$ entonces

$$|\Gamma[E(K_n)]| \leq H(K_n, K_{q-1}) - 1,$$

y además (lema 6.8 *ii*))

$$|\Gamma[E(K_n)]| \geq |E(\mathbf{g}[D])|,$$

por lo que

$$H(K_n, K_{q-1}) - 1 \geq |\Gamma[E(K_n)]| \geq |E(\mathbf{g}[D])|.$$

Aplicando a esto último (7.3) tenemos que

$$\begin{aligned} & H(K_n, K_{q-1}) - 1 \\ \geq\ & |\Gamma[E(K_n)]| \geq |E(\mathbf{g}[D])| \\ >\ & H(K_n, K_{q-1}) - 2 + \sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{d_D^*(x)}{2} \right) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sum_{x \in V(\mathbf{g}[D])} \left(\frac{d_D^*(x)}{2} \right) < 1 \tag{7.4}$$

y

$$|E(\mathbf{g}[D])| = |\Gamma[E(K_n)]| = H(K_n, K_{q-1}) - 1. \tag{7.5}$$

Así pues, por (7.4) vemos que:

Nota 1. A lo sumo existe un único $x_0 \in V(\mathbf{g}[D])$ tal que $d_D^*(x_0) = 1$, y para todo $x \in V(\mathbf{g}[D]) \setminus \{x_0\}$ sucede que $d_D^*(x) = 0$.

Así mismo, por la **Nota 1** se sigue

Nota 2. Existe a lo más un $y_0 \in V(\mathbf{g}[D])$ tal que

$$\overrightarrow{y_0 x_0} \in F(D) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{x_0 y_0} \notin F(D).$$

Obsérvese que si ahora probamos que $[K_n \setminus \{y_0\}, \Gamma]$ es heterocromático, como $n \geq q$ entonces $[K_n \setminus \{y_0\}, \Gamma]$ contiene una copia heterocromática de K_{q-1}, lo cual implica que $[K_n, \Gamma]$ contiene una copia heterocromática de K_{q-1} y por tanto

$$\Gamma \notin C(K_n, K_{q-1}),$$

que contradice las hipótesis y demuestra el lema.

A continuación veremos que $[K_n \setminus \{y_0\}, \Gamma]$ es heterocromático, y lo demostraremos suponiendo que es falso.

Sean $e_1, e_2 \in E(K_n \setminus \{y_0\})$ tales que

$$\Gamma(e_1) = \Gamma(e_2).$$

Por el lema 6.8 *i*) sabemos que $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ es heterocromático y por (7.5) vemos que

$$|E(\mathbf{g}[D])| = |\Gamma[E(K_n)]|,$$

entonces todos los colores de $\Gamma[E(K_n)]$ aparecen en $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ y por tanto

$$\Gamma(e_1) = \Gamma(e_2) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Sea pues $\{w, z\} \in E(\mathbf{g}[D])$, que sin pérdida de generalidad podemos suponer $\{w, z\} \neq e_1$, tal que

$$\Gamma(\{w, z\}) = \Gamma(e_1).$$

Por el lema 6.5, sin pérdida de generalidad, vemos que

$$w = \bigcap \{e \in E(K_n) : \Gamma(e) = \Gamma(\{w, z\})\}$$

y así, por el lema 6.6 se sigue que

$$\overrightarrow{wz} \in F(D) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{zw} \notin F(D),$$

por tanto $d_D^*(z) \geq 1$ y entonces, por la **Nota 1**

$$z = x_0,$$

y por la **Nota 2**

$$w = y_0,$$

pero como $w \in e_1$, y por hipótesis $e_1 \in E(K_n \setminus \{y_0\})$, se sigue que $w \neq y_0$ lo cual es una contradicción. ■

Teorema 7.3 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 3$, se cumple que*

$$H(K_n, K_q) = \begin{cases} n & \text{si } q = 3; \\ d_{q-1}(n) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Prueba.

Caso 1. $n \geq q$ y $q = 3$.

Por el teorema 7.2 se sigue este el resultado.

Caso 2. $n \geq q$ y $q \geq 4$.

Caso 2.1. $n = q$ y $q \geq 4$.

Por el lema 7.3 tenemos el resultado.

Caso 2.2. $n > q$ y $q \geq 4$.

Dada $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$, denotemos como $Prop(q)$ a la propiedad:

Para toda $n \in N$ tal que $n > q$, se cumple que $\nu^*(K_n, K_q) \leq g(n, q)$.

Obsérvese que si probamos que para toda $q \geq 4$ se cumple $Prop(q)$, entonces por el lema 7.9 sabremos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q \geq 4$

$$H(K_n, K_q) = d_{q-1}(n) + 2$$

y habremos probado el teorema.

Así entonces, probaremos que para toda $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$ se cumple $Prop(q)$, y lo haremos por inducción sobre q.

1. Sea $q = 4$.

Supongamos que $Prop(4)$ no se cumple. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 4$ tal que

$$\nu^*(K_n, K_4) \geq g(n,4) + 1. \tag{7.6}$$

Sean $\Gamma \in C^*(K_n, K_4)$ y $x_0 \in V(K_n)$ tal que

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) = \nu^*(K_n, K_4);$$

y además sean $D \in DS(K_n, \Gamma)$ definida por la familia

$$\{W_x : x \in V(K_n)\}$$

de conjuntos selectivos y $G[W_{x_0}]$ la subgráfica de K_n inducida por el conjunto de vértices W_{x_0}. Sobre esta subgráfica es que centraremos nuestra atención.

Primero obsérvese que como

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq g(n,4) + 1,$$

entonces (lema 7.7 i))

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq 3. \tag{7.7}$$

Así

$$G[W_{x_0}] \cong K_p$$

con $p \geq 3$, y como $G[W_{x_0}]$ es la subgráfica de K_n inducida por W_{x_0}, entonces (lema 6.19) $G[W_{x_0}]$ es libre de K_3 heterocromáticos, es decir,

$$\Gamma_{G[W_{x_0}]} \in C(G[W_{x_0}], K_3).$$

Así, por el lema 7.4 vemos que para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$

$$\nu\left(z, G[W_{x_0}], \Gamma_{G[W_{x_0}]}\right) \leq 1,$$

y por el lema 6.10 se sigue entonces que para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$

$$\nu(z, G[W_{x_0}], \Gamma) \leq 1.$$

Por otro lado, (lema 6.14) vemos que para toda $z \in V(G[W_{x_0}])$ sucede que

$$\begin{aligned}\nu(z, K_n, \Gamma) &\leq \nu(z, G[W_{x_0}], \Gamma) + d_{K_n}(z) - d_{G[W_{x_0}]}(z) \\ &= \nu(z, G[W_{x_0}], \Gamma) + n - 1 - (|V(G[W_{x_0}])| - 1) \\ &= \nu(z, G[W_{x_0}], \Gamma) + n - \nu(x_0, K_n, \Gamma).\end{aligned}$$

Así entonces, para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$ tenemos que

$$\nu(z, K_n, \Gamma) \leq 1 + n - \nu(x_0, K_n, \Gamma).$$

Ahora obsérvese que si probamos que existe $z_0 \in V(G[W_{x_0}])$ tal que

$$\nu(z_0, K_n, \Gamma) \leq n - \nu(x_0, K_n, \Gamma),$$

como

$$\nu(z_0, K_n, \Gamma) \geq \nu(x_0, K_n, \Gamma)$$

se sigue entonces que

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \leq n - \nu(x_0, K_n, \Gamma)$$

y por tanto

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \nu(x_0, K_n, \Gamma).$$

Pero dado que

$$g(n, 4) + 1 = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

entonces

$$g(n, 4) + 1 > \nu(x_0, K_n, \Gamma) = \nu^*(K_n, K_q)$$

lo cual contradice a (7.6) y probaríamos así el caso $q = 4$.

A continuación demostraremos pues que existe $z \in V(G[W_{x_0}])$ tal que

$$\nu(z, K_n, \Gamma) \leq n - \nu(x_0, K_n, \Gamma),$$

y lo haremos suponiendo que es falso.

Supongamos entonces que para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$ sucede que

$$\nu(z, K_n, \Gamma) = 1 + n - \nu(x_0, K_n, \Gamma).$$

Dada $z \in V(G[W_{x_0}])$ y el (z, K_n, Γ)-conjunto selectivo W_z , por el lema 6.13 vemos que

$$|W_z \cap W_{x_0}| = |W_z \cap V(G[W_{x_0}])| \leq \nu(z, G[W_{x_0}], \Gamma) \leq 1$$

lo cual implica que en la digráfica D están presentes todas las

$$\{z\}(V(K_n) \setminus W_{x_0})\text{-flechas}$$

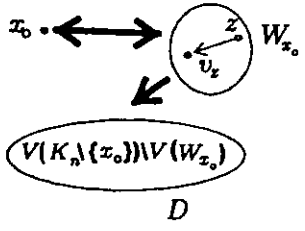
(las $n - \nu(x_0, K_n, \Gamma)$ flechas) y que

$$|W_z \cap W_{x_0}| = 1.$$

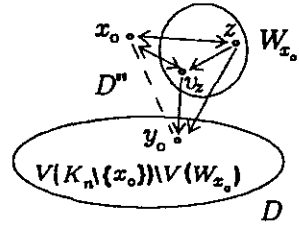
Así, en la digráfica D están presentes todas las $W_{x_0}(V(K_n) \setminus W_{x_0})$-flechas y para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$ existe la flecha $\overrightarrow{zv_z}$ donde

$$W_z \cap W_{x_0} = v_z.$$

(Dibujo 7.2a).



Dibujo 7.2a



Dibujo 7.2b

Por otro lado, como para cada $z \in V(G[W_{x_0}])$

$$\nu(z, K_n, \Gamma) \geq \nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq 3$$

entonces

$$|(V(K_n) \setminus W_{x_0}) \cap W_z| \geq 2,$$

de donde existe

$$y_0 \in V(K_n) \setminus W_{x_0}$$

con $x_0 \neq y_0$.

Así las cosas, dada $z \in V(G[W_{x_0}])$, sea D'' la subdigráfica de D inducida por

$$\{x_0, y_0, z, v_z\}$$

(Dibujo 7.2b) donde $\mathbf{g}[D'']$ es su gráfica subyacente.

Ahora veamos los siguientes 2 casos:

Caso 1. $\{x_0, y_0\} \in E(\mathbf{g}[D''])$.

En este caso $\mathbf{g}[D''] \cong K_4$ lo cual contradice el lema 6.18.

Caso 2. $\{x_0, y_0\} \notin E(\mathbf{g}[D''])$

Si $\{x_0, y_0\} \notin E(\mathbf{g}[D''])$ entonces

$$\mathbf{g}[D''] \cup \{\{x_0, y_0\}\} \cong K_4,$$

que por el lema 6.20 implica que

$$d_{\mathbf{g}[D'']}(x_0) + d_{\mathbf{g}[D'']}(y_0) > d^-_{D''}(x_0) + d^-_{D''}(y_0),$$

pero

$$d_{\mathbf{g}[D'']}(x_0) + d_{\mathbf{g}[D'']}(y_0) = d^-_{D''}(x_0) + d^-_{D''}(y_0) = 4$$

lo cual es una contradicción.

2. Sea $q \geq 5$, y supongamos que para toda $k < q$ se cumple $Prop(k)$.

Ahora demostraremos que se cumple $Prop(q)$, y lo haremos suponiendo lo contrario.

Así pues, sea $n \in \mathbf{N}$ con $n > q$ tal que

$$\nu^*(K_n, K_q) \geq g(n, q) + 1. \tag{7.8}$$

Sean $\Gamma \in C^*(K_n, K_q)$ y $x_0 \in V(K_n)$ tal que

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) = \nu^*(K_n, K_q);$$

y además sean $D \in DS(K_n, \Gamma)$ definida por la familia

$$\{W_x : x \in V(K_n)\}$$

y $G[W_{x_0}]$ la subgráfica de K_n inducida por el conjunto de vértices W_{x_0}. Nuevamente, sobre esta subgráfica es que centraremos nuestro análisis.

Por el lema 6.19, $G[W_{x_0}]$ es libre de K_{q-1} heterocromáticos, es decir,

$$\Gamma_{G[W_{x_0}]} \in C\left(G[W_{x_0}], K_{q-1}\right).$$

Por otro lado, como

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq g(n,q) + 1 \quad \text{y} \quad q \geq 5,$$

se tiene que (lema 7.7 *ii*))

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq q \geq 5.$$

Así,

$$G[W_{x_0}] \cong K_p$$

con

$$p = \nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq 5$$

y entonces, por el lema 7.10, sabemos que existe $z_0 \in V\left(G[W_{x_0}]\right)$ tal que

$$\nu\left(z_0, G[W_{x_0}], \Gamma_{G[W_{x_0}]}\right) \leq \frac{2}{\nu(x_0, K_n, \Gamma)}\left(H\left(K_{\nu(x_0,K_n,\Gamma)}, K_{q-1}\right) - 2\right).$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción se cumple $Prop(q-1)$, y como

$$\nu(x_0, K_n, \Gamma) \geq q > q - 1$$

entonces, aplicando el lema 7.9, vemos que

$$H\left(K_{\nu(x_0,K_n,\Gamma)}, K_{q-1}\right) = d_{q-2}\left(\nu(x_0, K_n, \Gamma)\right) + 2$$

y por tanto

$$\nu\left(z_0, G[W_{x_0}], \Gamma_{G[W_{x_0}]}\right) \leq \frac{2}{\nu(x_0, K_n, \Gamma)}\left(d_{q-2}\left(\nu(x_0, K_n, \Gamma)\right)\right).$$

Ahora, por el lema 7.5 sabemos que

$$d_{q-2}\left(\nu(x_0, K_n, \Gamma)\right) \leq \nu(x_0, K_n, \Gamma)^2\left(\frac{q-4}{2(q-3)}\right)$$

y entonces

$$\begin{aligned} & \nu\left(z_0, G\left[W_{x_0}\right], \Gamma_{G\left[W_{x_0}\right]}\right) \\ \leq & \frac{2}{\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)}\left(\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)^2\left(\frac{q-4}{2(q-3)}\right)\right) \\ = & \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)\left(\frac{q-4}{q-3}\right) \end{aligned}$$

que por el lema 6.10 implica que

$$\nu\left(z_0, G\left[W_{x_0}\right], \Gamma\right) \leq \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)\left(\frac{q-4}{q-3}\right). \tag{7.9}$$

Por otro lado (lema 6.14),

$$\begin{aligned} \nu\left(z_0, K_n, \Gamma\right) & \leq \nu\left(z_0, G\left[W_{x_0}\right], \Gamma\right) + d_{K_n}(z) - d_{G\left[W_{x_0}\right]}(z) \\ & = \nu\left(z_0, G\left[W_{x_0}\right], \Gamma\right) + n - 1 - \left(\left|V\left(G\left[W_{x_0}\right]\right)\right| - 1\right) \\ & = \nu\left(z_0, G\left[W_{x_0}\right], \Gamma\right) + n - \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right), \end{aligned}$$

por lo tanto, con (7.9) resulta que

$$\begin{aligned} & \nu\left(z_0, K_n, \Gamma\right) \\ \leq & \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)\left(\frac{q-4}{q-3}\right) + n - \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right) \\ = & n - \frac{\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)}{q-3}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Ahora bien, como por definición

$$\nu\left(z_0, K_n, \Gamma\right) \geq \nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right),$$

se sigue de (7.10) que

$$\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right) \leq n - \frac{\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)}{q-3},$$

y entonces

$$\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)\left(1+\frac{1}{q-3}\right) \leq n$$

y así

$$\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right) \leq n\left(\frac{q-3}{q-2}\right).$$

Por otro lado, por el lema 7.7 *iii*) sabemos que

$$g(n, q)+1>n\left(\frac{q-3}{q-2}\right)$$

y por tanto

$$g(n, q)+1>\nu\left(x_0, K_n, \Gamma\right)=\nu^*\left(K_n, K_q\right)$$

lo cual contradice a (7.8). ■

Capítulo 8

CICLOS EN GRÁFICAS COMPLETAS

Sean $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 3$;

$$K_n = (V(K_n), E(K_n))$$

la gráfica completa de orden n;

$$C_q = (V(C_q), E(C_q))$$

el ciclo de orden q y denotemos como $H(K_n, C_q)$ al número heterocromático lineal de K_n con respecto a la clase $\mathbf{C} = \{C_q\}$.

En este capítulo demostraremos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 3$, se cumple

$$g(n,q) + re(n,q-1)\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - \frac{re(n,q-1)+1}{2}\right) \geq H(K_n, C_q) \geq g(n,q)$$

donde

$$g(n,q) = \left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor \binom{q-1}{2} + \left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil + \binom{re(n,q-1)}{2}.$$

Obsérvese que para el caso en que $q = 3$, dado que $C_3 \cong K_3$ por el teorema 7.3 vemos que

$$H(K_n, C_3) = n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = g(n,3),$$

así que centraremos nuestra atención en los casos en que $q \geq 4$.

8.1 El número heterocromático $H(K_n, C_q)$

8.1.1 La cota inferior

Lema 8.1 *Dados $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$, se cumple que*

$$H(K_n, C_q) \geq g(n, q).$$

Prueba. Probaremos este lema exhibiendo una c-coloración de $E(K_n)$ con

$$c = g(n, q) - 1,$$

que es libre de copias de C_q heterocromáticas. Para esto, sea

$$P = \left\{V_1, ..., V_{\left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil}\right\}$$

una partición de $V(K_n)$ definida como sigue:

a) Para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor$,

$$|V_i| = q - 1.$$

Y si

$$\left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil > \left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor$$

entonces

b)

$$\left|V_{\left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil}\right| = re(n, q-1).$$

Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil$ denotemos como G_i a la subgráfica de K_n inducida por el conjunto de vértices V_i.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil} |E(G_i)| \\ = & \left\lfloor \frac{n}{q-1} \right\rfloor \binom{q-1}{2} + \binom{re(n, q-1)}{2} \\ = & \ g(n, q) - \left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil \end{aligned}$$

Ahora consideremos la siguiente coloración de $E(K_n)$.

Sea

$$\Gamma : E(K_n) \to \{1, ..., g(n,q) - 1\}$$

donde:

a) Para cada G_iG_j-arista con $i \neq j$, Γ asigna el color

$$min\{i, j\}.$$

Nótese que hasta aqui, Γ a asignado $\left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil - 1$ colores.

b) A las $g(n,q) - \left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil$ aristas restantes, Γ les asigna, uno a uno, los

$$g(n,q) - \left\lceil \frac{n}{q-1} \right\rceil$$

colores restantes.

Ahora veremos que Γ es una coloración de $E(K_n)$ libre de C_q heterocromáticos.

Sea G una subgráfica de K_n tal que $G \cong C_q$, y sean

$$\{V_{i_1}, ..., V_{i_k}\}$$

el conjunto de los elementos de la partición P tales que para cada $r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r \leq k$

$$V_{i_r} \cap V(G) \neq \emptyset.$$

Nótese que $k > 1$ pues cada elemento de la partición tiene cardinal a lo más $q - 1$ y $|V(G)| = q$.

Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$i_1 = min\{i_1, ..., i_k\}.$$

Entonces todas las $G_{i_1}G_{i_r}$-aristas, con $2 \leq r \leq k$, son de color i_1 y como G es un ciclo, existen cuando menos 2 aristas de G que son de color i_1 de donde se sigue que G no es heterocromático.

Asi pues

$$H(K_n, C_q) > g(n,q) - 1$$

y se sigue el resultado. ■

8.1.2 La cota superior

Algunos resultados previos.

En esta sección enunciamos algunas definiciones y resultados que serán necesarios para el desarrollo de este capítulo.

Definición 8.1 *Una gráfica conexa G se dirá que es panconexa si para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una uv-trayectoria de longitud m con $m = d(u,v), ..., |V(G)| - 1$; siendo $d(u,v)$ la distancia entre u y v.*

Teorema 8.1 [21] *Sea G una gráfica de orden t. Si para cada $x \in V(G)$ sucede que $d_G(x) \geq \frac{t+2}{2}$ entonces G es panconexa.*

■

Teorema 8.2 [3] *Sea G una gráfica de orden t. Si para cada par de vértices $x, y \in V(G)$ sucede que*

$$d_G(x) + d_G(y) \geq t + 1,$$

entonces para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una uv-trayectoria de longitud m con

$$m = d(u,v), 2, 4, ..., t - 1.$$

■

Lema 8.2 *Sea G una gráfica y $P = \{x_1, ..., x_t\}$ una trayectoria en G. Ahora sea G' la subgráfica de G inducida por los vértices $\{x_1, ..., x_t\}$. Si*

$$d_{G'}(x_1) + d_{G'}(x_t) \geq t$$

entonces G' es hamiltoniana.

Prueba. Sean

$$N_{G'}(x_1) = \left\{x^1_{i_1}, ..., x^1_{i_{d_P(x_1)}}\right\}$$

y

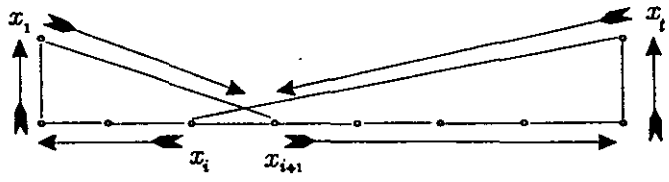
$$N_{G'}(x_t) = \left\{x^t_{i_1}, ..., x^t_{i_{d_P(x_t)}}\right\}.$$

Ahora sea

$$\left\{x^1_{i_1-1}, ..., x^1_{i_{d_P(x_1)}-1}\right\}$$

el conjunto de los vecinos "izquierdos" (izquierdos según la trayectoria P que va de x_1 a x_t) de los vecinos de x_1 en G'.

Obsérvese que si un vecino izquierdo de un vecino de x_1 pertenece a $N_{G'}(x_t)$, entonces tendremos que los vértices de G' forman un ciclo y con ello el resultado (Dibujo 8.1).



Dibujo 8.1

Como x_t no es vecino de sí mismo ni puede ser vecino izquierdo de nadie, entonces

$$x_t \notin \left(\left\{ x^1_{i_1-1}, \ldots, x^1_{i_{d_P(x_1)}-1} \right\} \cup \left\{ x^t_{i_1}, \ldots, x^t_{i_{d_P(x_t)}} \right\} \right)$$

por lo que

$$\left| \left\{ x^1_{i_1-1}, \ldots, x^1_{i_{d_P(x_1)}-1} \right\} \cup \left\{ x^t_{i_1}, \ldots, x^t_{i_{d_P(x_t)}} \right\} \right| \leq t-1.$$

Así mismo, como

$$d_{G'}(x_1) + d_{G'}(x_t) \geq t$$

entonces

$$\left| \left\{ x^1_{i_1-1}, \ldots, x^1_{i_{d_P(x_1)}-1} \right\} \right| + \left| \left\{ x^t_{i_1}, \ldots, x^t_{i_{d_P(x_t)}} \right\} \right| \geq t$$

por tanto

$$\left\{ x^1_{i_1-1}, \ldots, x^1_{i_{d_P(x_1)}-1} \right\} \cap \left\{ x^t_{i_1}, \ldots, x^t_{i_{d_P(x_t)}} \right\} \neq \emptyset$$

y se sigue el resultado. ■

Lema 8.3 *Sean $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$, G una gráfica tal que $\delta(G) \geq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ y $P = \{x_1, ..., x_t\}$ una trayectoria máxima en G. Si $q - 1 \geq t$ entonces la subgráfica de G inducida por los vértices $\{x_1, ..., x_t\}$ es una componente conexa hamiltoniana de G.*

Prueba. Sea $P = \{x_1, ..., x_t\}$ es una trayectoria máxima en G, G' la subgráfica inducida por $\{x_1, ..., x_t\}$ y supongamos que $q - 1 \geq t$.

Como $P = \{x_1, ..., x_t\}$ es una trayectoria máxima en G, entonces

$$N_G(x_1) \subseteq \{x_1, ..., x_t\} \quad \text{y} \quad N_G(x_t) \subseteq \{x_1, ..., x_t\},$$

y como $\delta(G) \geq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ entonces se sigue que

$$d_{G'}(x_1) + d_{G'}(x_t) \geq q - 1 \geq t.$$

Así, por el lema 8.2 vemos que G' es hamiltoniana.

Ahora bien, sea

$$\{y_1, ..., y_t, y_1\}$$

un ciclo hamiltoniano en G'.

Si existe

$$x \in V(G) \setminus \{y_1, ..., y_t\}$$

tal que sea adyacente a algún vértice y_i de G', entonces

$$\{x, y_i, y_{i+1}, ..., y_t, y_1, ..., y_{i-1}\}$$

es una trayectoria en G más larga que P, lo que contradice las hipótesis. ■

Lema 8.4 *Sean $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq 4$ y G una gráfica tal que $\delta(G) \geq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$. Si G no contiene una trayectoria de orden mayor o igual a q, entonces G es una unión de componentes conexas hamiltonianas, y cada componente tiene orden a lo más $q - 1$ y cuando menos $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1$.*

Prueba. Este resultado lo demostraremos por inducción sobre el orden de las gráficas. Obsérvese que como por hipótesis las gráficas a considerar tienen valencia mínima $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, entonces la base de inducción del orden es $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1$.

1. Sea G una gráfica tal que

$$|V(G)| = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1; \qquad \delta(G) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

y que no contiene una trayectoria de orden mayor o igual a q.

En este caso, claramente

$$G \cong K_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1}$$

y se sigue el resultado.

2. Sea G una gráfica tal que

$$|V(G)| = m > \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1; \qquad \delta(G) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

y que no contiene una trayectoria de orden mayor o igual a q. Además, supongamos que para toda gráfica G' tal que

$$|V(G')| < m; \qquad \delta(G') \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

y que no contiene una trayectoria de orden mayor o igual a q, se cumple el resultado.

Sea $P = \{x_1, ..., x_t\}$ una trayectoria máxima de G. Como $t \leq q - 1$ y $\delta(G) \geq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ entonces (lema 8.3) la subgráfica G_1 inducida por $\{x_1, ..., x_t\}$ es una componente conexa hamiltoniana de G, y como $\delta(G) \geq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ entonces

$$\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq |V(G_1)| = t \leq q - 1.$$

Ahora bien, como G_1 es una componente conexa de G, entonces la subgráfica G' de G inducida por

$$V(G) \setminus V(G_1)$$

es tal que no contiene una trayectoria de orden mayor o igual a q,

$$\delta(G') = \delta(G) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

y además,

$$|V(G')| < |V(G)| = m,$$

por lo tanto, por hipótesis de inducción en G' se sigue el resultado. ■

Algunos lemas técnicos

Dados $k,p \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq 1$ y $p \geq 4$ sea

$$g(k,p) = \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor \binom{p-1}{2} + \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil + \binom{re(k,p-1)}{2}.$$

Lema 8.5 *Sean $k,p \in \mathbb{N}$ tales que $p \geq 4$ y $p > k \geq 1$. Entonces*

$$g(k,p) - 1 = \binom{k}{2}.$$

Prueba.

Caso 1. $p-1 = k$.

En este caso

$$\left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor = \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil = 1 \quad \text{y} \quad \binom{re(k,p-1)}{2} = 0$$

por lo que

$$g(k,p) = \binom{p-1}{2} + 1 = \binom{k}{2} + 1.$$

Caso 2. $p-1 > k$.

Aquí

$$\left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor = 0; \qquad \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil = 1 \quad \text{y} \quad \binom{re(k,p-1)}{2} = \binom{k}{2}$$

y así

$$g(k,p) = 1 + \binom{k}{2}.$$

■

Lema 8.6 *Sean k,p y m números naturales tales que $k \geq p \geq 4$ y $k-m \geq p$. Entonces*

$$\begin{aligned} & g(k,p) + re(k,p-1)\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - \frac{re(k,p-1)}{2}\right) \\ \geq\ & g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right). \end{aligned}$$

Prueba. Por definición es fácil ver que para cada par $k,p \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq p \geq 4$

$$\begin{aligned} g(k,p) &= \frac{k(p-2)}{2} - \frac{re(k,p-1)(p-2)}{2} \\ &\quad + \frac{re(k,p-1)(re(k,p-1)-1)}{2} + \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil \end{aligned}$$

por lo que para cualquier terna k,m y p de números naturales tales que $k \geq p \geq 4$ y $k-m \geq p \geq 4$ se sigue que

$$\begin{aligned} g(k,p) - g(k-m,p) &= \frac{k(p-2)}{2} - \frac{(k-m)(p-2)}{2} \\ &\quad - \frac{re(k,p-1)(p-2)}{2} + \frac{re(k-m,p-1)(p-2)}{2} \\ &\quad + \frac{re(k,p-1)(re(k,p-1)-1)}{2} \\ &\quad - \frac{re(k-m,p-1)(re(k-m,p-1)-1)}{2} + \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-m}{p-1} \right\rceil \\ &\geq \frac{m(p-2)}{2} - \frac{re(k,p-1)(p-1-re(k,p-1))}{2} \cdot \\ &\quad + \frac{re(k-m,p-1)(p-1-re(k-m,p-1))}{2} \\ &\geq m\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right) + m\left(\frac{re(p,2)}{2}\right) - \frac{re(k,p-1)(p-1-re(k,p-1))}{2} \\ &\geq m\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right) - \frac{re(k,p-1)(p-1-re(k,p-1))}{2}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} g(k,p) &\geq g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right) \\ &\quad - \frac{re(k,p-1)(p-1-re(k,p-1))}{2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
& g(k,p) + re(k,p-1)\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - \frac{re(k,p-1)}{2}\right) \\
\geq\ & g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - 1\right) \\
& + re(k,p-1)\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - \frac{re(k,p-1)}{2}\right) \\
& - \frac{re(k,p-1)(p-1-re(k,p-1))}{2} \\
=\ & g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - 1\right) \\
& + re(k,p-1)\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - \frac{re(k,p-1)}{2} - \frac{p-1-re(k,p-1)}{2}\right) \\
=\ & g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - 1\right) + re(k,p-1)\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - \frac{p-1}{2}\right) \\
\geq\ & g(k-m,p) + m\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor - 1\right).
\end{aligned}$$

■

Lema 8.7 *Sean $k, p \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq p \geq 4$ y sean $k_1, \ldots, k_t$ una sucesión de enteros positivos menores o iguales a $p-1$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{t} k_i = k.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{k_i}{2} + t \leq g(k,p).$$

Prueba. Para demostrar este lema, antes veamos lo siguiente:
Dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b$, se cumple que

$$\binom{a+1}{2} + \binom{b-1}{2} = \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + (a-b) + 1. \tag{8.1}$$

Ahora sea $\mathbf{Suc}(k)$ el conjunto de todas las sucesiones decrecientes de enteros positivos menores o iguales a $p-1$, tales que para toda $\mathbf{s} \in \mathbf{Suc}(k)$, donde $\mathbf{s} = (u_1, ..., u_t)$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{t} u_i = k;$$

y sea $\mathbf{R}$ un orden sobre $\mathbf{Suc}(k)$ definido como sigue:

Sean $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in \mathbf{Suc}(k)$ tales que

$$\mathbf{s}_i = (u_1, ..., u_t) \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_j = (m_1, ..., m_r).$$

$\mathbf{s}_i >_{\mathbf{R}} \mathbf{s}_j$ si y sólo si

i) $t < r$;

o bien

ii) $t = r$ y $u_i > m_i$ siendo $i = \min\{i \in \mathbb{N} : u_i \neq m_i\}$

Claramente, el máximo en este buen orden es la sucesión

$$\mathbf{s}^* = \left(k_1, ..., k_{\left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil}\right)$$

donde para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor$ se tiene que

$$k_i = p-1$$

y si $\left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil > \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor$ entonces,

$$k_{\left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil} = re(k, p-1).$$

Además

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil} \binom{k_i}{2} + \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil \\ = & \left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor \binom{p-1}{2} + \binom{re(k, p-1)}{2} + \left\lceil \frac{k}{p-1} \right\rceil \\ = & \; g(k, p). \end{aligned}$$

Así pues, demostraremos el lema probando lo siguiente:
Dada $\mathbf{s}_i = (u_1, ..., u_t) \in \mathbf{Suc}(k)$ tal que $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}^*$, existe

$$\mathbf{s}_j = (m_1, ..., m_r) \in \mathbf{Suc}(k),$$

con $\mathbf{s}_j >_{\mathbf{R}} \mathbf{s}_i$ que cumple que

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{u_i}{2} + t \leq \sum_{i=1}^{r} \binom{m_i}{2} + r,$$

es decir, estamos probando que $\mathbf{s}^*$ alcanza el máximo de esa sumatoria.
La prueba es como sigue:

Sea $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}^*$ con $\mathbf{s}_i = (u_1, ..., u_t)$.
Como $\mathbf{s}_i$ es una sucesión decreciente y $\mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}^*$ entonces

$$u_{t-1} < p - 1 \quad \text{y} \quad u_t < p - 1.$$

Así, a partir de esto definamos la siguiente sucesión:

Sea $m_1, ..., m_t$ una sucesión de naturales tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq t-2$

$$m_i = u_i$$

y además

$$m_{t-1} = u_{t-1} + 1 \quad \text{y} \quad m_t = u_t - 1.$$

Caso 1. $u_t > 1$.

En este caso, sea $\mathbf{s} = (m_1, ..., m_t)$. (Sin pérdida de generalidad, supongamos que esta ordenada de forma decreciente).
Así $\mathbf{s} \in \mathbf{Suc}(k)$, $\mathbf{s} >_{\mathbf{R}} \mathbf{s}_i$ y

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{m_i}{2} + t = \sum_{i=1}^{t-2} \binom{u_i}{2} + \binom{u_{t-1}+1}{2} + \binom{u_t - 1}{2} + t$$

que por (8.1) implica que

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{m_i}{2} + t = \sum_{i=1}^{t} \binom{u_i}{2} + t + (u_{t-1} - u_t) + 1$$

y se sigue el resultado.

Caso 2. $u_t = 1$.

En este caso, sea $\mathbf{s} = (m_1, ..., m_{t-1})$. (Nuevamente, sin pérdida de generalidad supongamos que esta ordenada de forma decreciente).

Así $\mathbf{s} \in \mathbf{Suc}(k)$, $\mathbf{s} >_{\mathbf{R}} \mathbf{s}_i$ y

$$\sum_{i=1}^{t-1} \binom{m_i}{2} + t - 1 = \sum_{i=1}^{t-2} \binom{u_i}{2} + \binom{u_{t-1}+1}{2} + \binom{u_t - 1}{2} + t - 1$$

que por (8.1) implica que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{t-1} \binom{m_i}{2} + t - 1 \\ = & \sum_{i=1}^{t} \binom{u_i}{2} + t - 1 + (u_{t-1} - u_t) + 1 \\ = & \sum_{i=1}^{t} \binom{u_i}{2} + t + (u_{t-1} - u_t) \\ \geq & \sum_{i=1}^{t} \binom{u_i}{2} + t, \end{aligned}$$

y se sigue el resultado. ■

Las coloraciones óptimas

En toda esta sección sean $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$ y $\Gamma \in C^*(K_n, C_q)$.

Lema 8.8 *Para todo* $Y \subseteq V(K_n)$ *tal que* $|Y| = m \leq q-1$ *se cumple que*

$$\nu(Y, K_n, \Gamma) \geq \binom{m}{2} + 1.$$

Prueba. Sean $Y \subseteq V(K_n)$ tal que

$$|Y| = m \leq q-1$$

y $G[Y]$ la subgráfica inducida por Y en K_n.

Ahora consideremos la coloración

$$\Gamma' : E(K_n) \to \left\{1, ..., |\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2} + 1\right\}$$

definida como sigue:

a) Para cada $e \in E(K_n \setminus Y)$ sea

$$\Gamma'(e) = \Gamma(e).$$

Supongamos que esos colores son del 1 al $|\Gamma[E(K_n \setminus Y)]|$.

b) A las $\binom{m}{2}$ aristas de $G[Y]$ las coloreamos con $\binom{m}{2}$ colores nuevos, a saber,

$$|\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + 1, ..., |\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2}.$$

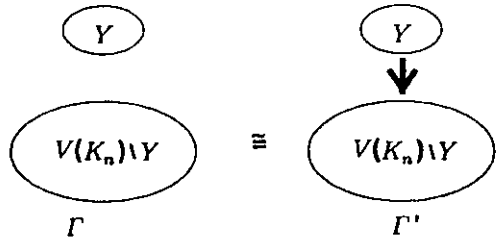
c) A las aristas que van de Y a $V(K_n - Y)$ las coloreamos con un sólo color nuevo, a saber, el color

$$|\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2} + 1.$$

(Dibujo 8.2. Página siguiente).

Ahora veremos que Γ' es una coloración de $E(K_n)$ libre de copias heterocromáticas de C_q.

Sea G una subgráfica de K_n tal que $G \cong C_q$.



Dibujo 8.2

Caso 1. $V(G) \subseteq V(K_n \setminus Y)$.

Como para cada $e \in E(K_n \setminus Y)$ tenemos

$$\Gamma'(e) = \Gamma(e),$$

se sigue que

$$[G, \Gamma'] = [G, \Gamma],$$

y como $\Gamma \in C^*(K_n, C_q)$ entonces $[G, \Gamma]$, y por tanto $[G, \Gamma']$, no es heterocromática.

Caso 2. $V(G) \cap Y \neq \emptyset$.

Dado que $|Y| = m \leq q - 1$ entonces $V(G)$ no puede estar contenido totalmente en Y, por tanto existe algún vértice de G en $V(K_n \setminus Y)$.

Entonces, por ser G un ciclo, existen cuando menos 2 aristas que van de Y a $V(K_n \setminus Y)$ y por ende de un mismo color, a saber, el color

$$|\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2} + 1.$$

Por tanto $[G, \Gamma']$ no es heterocromática.

Así pues, $\Gamma' \in C(K_n, C_q)$ y

$$|\Gamma'[E(K_n)]| = |\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2} + 1.$$

Ahora bien, como $\Gamma \in C^*(K_n, C_q)$ entonces

$$|\Gamma[E(K_n)]| \geq |\Gamma'[E(K_n)]|$$

y dado que por definición

$$\nu(Y, K_n, \Gamma) = |\Gamma[E(K_n)]| - |\Gamma[E(K_n \setminus Y)]|$$

entonces

$$|\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \nu(Y, K_n, \Gamma) \geq |\Gamma[E(K_n \setminus Y)]| + \binom{m}{2} + 1$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 8.9 *Sea* $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq V(K_n)$ *un conjunto máximal de vértices tal que para cada* $1 \leq i \leq m$ *sucede que*

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1.$$

Entonces $m \leq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2$.

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.

Sea $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq V(K_n)$ tal que $m \geq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$ sucede que

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1.$$

Consideremos los primeros $2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$ elementos del conjunto $\{x_1, ..., x_m\}$. Por el lema 6.12 sabemos entonces que

$$\nu\left(\left\{x_1, ...x_{2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1}\right\}, K_n, \Gamma\right) = \sum_{i=1}^{2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1} \left(\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma)\right)$$

y como para cada $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$ sucede que

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$$

entonces

$$\nu\left(\left\{x_1, , , , x_{2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1}\right\}, K_n, \Gamma\right) \leq \left(2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1\right)\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1\right).$$

Pero como por el lema 8.8 tenemos que

$$\nu\left(\left\{x_1,\ldots,x_{2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1}\right\},K_n,\Gamma\right)\geq\binom{2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1}{2}+1$$

se sigue entonces

$$\left(2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1\right)\left(\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1\right)\geq\binom{2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1}{2}+1,$$

y así

$$\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1\geq\frac{2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-2}{2}+\frac{1}{2\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1}>\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1$$

lo cual es una contradicción. ■

A la luz del lema 8.9 vemos que en cualquier coloración óptima Γ de $E(K_n)$ libre de ciclos heterocromáticos de orden q, existe una serie de vértices

$$\{x_1, ..., x_m\}$$

tales que si nos fijamos en la coloración Γ' definida por la restricción de Γ a $E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})$, Γ' es una coloración sin ciclos heterocromáticos de orden q y tal que para todo vértice $x \in V(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})$ se cumple que

$$\nu(x, K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\}, \Gamma') \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

Serán estas coloraciones las que analizaremos en esta sección. Así pues, dados $n \in \mathbf{N}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$, al conjunto de coloraciones $\Gamma \in C(K_n, C_q)$ tales que para cada $x \in V(K_n)$ se tiene que

$$\nu(x, K_n, \Gamma) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

las denotaremos como

$$C^{\geq}(K_n, C_q).$$

En toda esta sección, sean $n, q \in \mathbf{N}$ tales que $n \geq q \geq 4$; $\Gamma \in C^{\geq}(K_n, C_q)$; $D \in DS(K_n, \Gamma)$ una digráfica selectiva y $\mathbf{g}[D]$ su gráfica subyacente.

Lema 8.10 *Para toda trayectoria $\{x_1, ..., x_q\}$ en D sucede que:*

$$\text{Si } \overleftarrow{x_1x_2} \in F(D) \text{ entonces } \overrightarrow{x_{q-1}x_q} \notin F(D).$$

Prueba. Sea $D' = \{x_1, ..., x_q\}$ una trayectoria en D tal que $\overleftarrow{x_1x_2} \in F(D)$ y sea $\mathbf{g}[D']$ su gráfica subyacente.Como

$$\{x_1, x_q\} \notin E(\mathbf{g}[D'])$$

y

$$\mathbf{g}[D'] + x_1x_q \cong C_q$$

entonces por el lema 6.20 vemos que

$$d^-_{D'}(x_1) + d^-_{D'}(x_q) < d_{\mathbf{g}[D']}(x_1) + d_{\mathbf{g}[D']}(x_q).$$

Ahora bien

$$d_{\mathbf{g}[D']}(x_1) + d_{\mathbf{g}[D']}(x_q) = 2,$$

por tanto, como $d^-_{D'}(x_1) = 1$ entonces $d^-_{D'}(x_q) = 0$ de donde se sigue el resultado. ■

Lema 8.11 *Supongamos que* $\mathbf{g}[D]$ *contiene una trayectoria máxima*

$$T = \{x_1, ..., x_m\}$$

con $m \geq q$. *Entonces la subgráfica inducida por* $\{x_1, ..., x_m\}$ *en* $\mathbf{g}[D]$ *contiene un ciclo de orden* $t \geq q - 1$.

Prueba. Supongamos que el lema es falso.

Sea $T = \{x_1, ..., x_m\}$ una trayectoria máxima de $\mathbf{g}[D]$ con $m \geq q$ y sea D' la trayectoria en D tal que $\mathbf{g}[D'] = T$.

Claramente D' también es máxima en D, entonces

$$N_D^+(x_1) \subseteq V(D').$$

Y como la subgráfica inducida por $\{x_1, ..., x_m\}$ en $\mathbf{g}[D]$ no contiene un ciclo de orden $t \geq q - 1$, entonces

$$N_D^+(x_1) \subseteq \{x_2, ..., x_{q-2}\}.$$

Ahora análicemos los 2 casos posibles siguientes:

Caso 1. $\overleftarrow{x_1x_2} \in F(D')$.

Sea $y \in N_D^+(x_{q-1})$ y consideremos el camino

$$\{x_1, ..., x_{q-2}, x_{q-1}, y\}.$$

Como $\overleftarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_{q-1}y} \in F(D)$, por el lema 8.10

$$\{x_1, ..., x_{q-2}, x_{q-1}, y\}$$

no es una trayectoria, por lo tanto $y \in \{x_1, ..., x_{q-2}\}$ y así

$$N_D^+(x_{q-1}) \subseteq \{x_1, ..., x_{q-2}\}.$$

Regresando a la gráfica $\mathbf{g}[D]$, vemos que entonces en la subgráfica G de $\mathbf{g}[D]$ inducida por los vértices

$$\{x_1, ..., x_{q-1}\}$$

sucede que

$$d_G(x_1) + d_G(x_{q-1}) \geq d_D^+(x_1) + d_D^+(x_{q-1}),$$

y entonces (observación 6.4 *ii*))

$$d_G(x_1) + d_G(x_{q-1}) \geq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq q - 1,$$

que por el lema 8.2 implica que G es hamiltoniana de donde se sigue que existe un ciclo de orden $q-1$ en la subgráfica inducida por $\{x_1, ..., x_m\}$.

Caso 2. $\overrightarrow{x_1x_2} \in F(D)$.

Para este caso primero observemos lo siguiente:
Para $r \in \mathbf{N}$ tal que $r > 2$, si

$$\overrightarrow{x_1x_r} \in F(D) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{x_{r-2}x_{r-1}} \in F(D)$$

entonces considerando la trayectoria

$$\{x_{r-1}, x_{r-2}, ..., x_2, x_1, x_r, ..., x_m\}$$

regresamos al caso 1.

Supongamos entonces que para cada $r \in \mathbf{N}$ tal que $r > 2$, si $\overrightarrow{x_1x_r} \in F(D)$ entonces $\overrightarrow{x_{r-2}x_{r-1}} \in F(D)$ y sea

$$k = \max\{r : \overrightarrow{x_1x_r} \in F(D)\}.$$

Obsérvese $k \leq q-2$.
Ahora bien, como

$$N_D^+(x_1) \subseteq \{x_2, ..., x_k\}$$

entonces en la trayectoria $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ existen cuando menos $d_D^+(x_1) - 1$ flechas orientadas hacia x_1, a saber, el conjunto

$$\{\overrightarrow{x_{r-2}x_{r-1}} \in F(D) : r > 2 \text{ y } \overrightarrow{x_1x_r} \in F(D)\}.$$

Ahora consideremos la trayectoria

$$P = \{x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_2, x_1, x_k, x_{k+1}, .., x_m\}$$

y supongamos que no se da el caso 1.

Nótese que en P, en la subtrayectoria $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ existen cuando menos $d_D^+(x_1) - 1$ flechas no orientadas hacia x_{k-1}, a saber, las orientadas a x_1.

Ahora bien, como D' es máxima en longitud, entonces

$$N_D^+(x_{k-1}) \subseteq V(D'),$$

y dada la construcción de P, y que la subgráfica inducida por $\{x_1, ..., x_m\}$ en $\mathbf{g}[D]$ no contiene un ciclo de orden $t \geq q-1$, entonces

$$N_D^+(x_{k-1}) \subseteq \{x_{k-2}, x_{k-3}, ..., x_1, x_k, ..., x_{q-2}\}.$$

Ahora veamos el siguiente par de casos:

Caso 2.1. $k = q-2$.

Aquí vemos que

$$P = \{x_{q-3}, x_{q-4}, ..., x_2, x_1, x_{q-2}, x_{q-1}, .., x_m\}.$$

Por idénticas razones para no regresar al caso 1 que las aplicadas a x_1 en la trayectoria original, en

$$\{x_{q-3}, ..., x_1\}$$

existen cuando menos

$$d_D^+(x_{q-3}) - 1$$

flechas orientadas hacia x_{q-3}, y junto con las $d_D^+(x_1) - 1$ flechas no orientadas hacia x_{k-1} tenemos entonces que en

$$\{x_{q-3}, ..., x_1\}$$

deben existir cuando menos

$$d_D^+(x_1) - 1 + d_D^+(x_{q-3}) - 1$$

$$= 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2 \geq q-3$$

flechas, pero sólamente existen $q-4$ flechas.

Caso 2.2. $k < q-2$.

En este caso

$$P = \{x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_2, x_1, x_k, x_{k+1}, .., x_{q-2}, ..., x_m\}.$$

Análogamente al caso 2.1, en

$$\{x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_1, x_k, ..., x_{q-3}\}$$

existen cuando menos

$$d_D^+(x_{q-3}) - 1$$

flechas orientadas hacia x_{q-3}, y junto con las $d_D^+(x_1) - 1$ flechas no orientadas hacia x_{k-1} en

$$\{x_{k-1}, ..., x_1\}$$

tenemos entonces que en

$$\{x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_1, x_k, ..., x_{q-3}\}$$

deben existir cuando menos

$$d_D^+(x_1) - 1 + d_D^+(x_{q-3}) - 1$$

$$= 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2 \geq q-3$$

flechas, pero nuevamente sólo existen $q-4$. ■

Lema 8.12 *Supongamos que* $\mathbf{g}[D]$ *contiene un ciclo* $C = \{x_1, ..., x_t, x_1\}$ *con* $t \geq q-1$. *Entonces la subgráfica inducida por* $\{x_1, ..., x_t\}$ *en* $\mathbf{g}[D]$ *contiene un ciclo de orden* $q-1$.

Prueba. Sea

$$C = \{x_1, ..., x_t, x_1\}$$

con $t \geq q-1$ el ciclo contenido en $\mathbf{g}[D]$ y sea

$$C' = (V(C'), E(C'))$$

un ciclo de orden mínimo p mayor o igual a $q-1$ que esté contenido en la subgráfica inducida por los vértices

$$\{x_1, ..., x_t, x_1\}$$

en $\mathbf{g}[D]$.

Denotemos al ciclo C' como

$$\{y_1, ..., y_p, y_1\}$$

y sea D' la subdigráfica de D tal que $\mathbf{g}[D'] = C'$.

Nótese que si $p = q - 1$ el lema queda demostrado, y $p \neq q$ pues $\Gamma \in C(K_n, C_q)$ (lema 6.18). Así entonces, supongamos que

$$p = q + r \text{ con } r \geq 1.$$

Caso 1. D' es un ciclo no orientado por sus flechas.

Por ser D' no orientado, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que

$$\overrightarrow{y_p y_1}, \overleftarrow{y_1 y_2} \in F(D').$$

Por el lema 8.10, en el ciclo D' no existe una trayectoria $\{z_1, ..., z_q\}$ tal que

$$\overleftarrow{z_1 z_2}, \overrightarrow{z_{q-1} z_q} \in F(D'),$$

así entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq p - 1$, si

$$\overleftarrow{y_i y_{i+1}} \in F(D'),$$

entonces para toda terna s, t y k de enteros tales que

$$s \equiv i + k(q - 2) \mod p$$

y

$$t \equiv i + 1 + k(q - 2) \mod p$$

se tiene que

$$\overleftarrow{y_s y_t} \in F(D').$$

De ahí se sigue que:

a) Como $\overleftarrow{y_1 y_2} \in F(D')$ entonces $\overleftarrow{y_{q-1} y_q} \in F(D')$.

b) $\overrightarrow{y_{q-2} y_{q-1}} \in F(D')$ pues de lo contrario se implicaría que $\overleftarrow{y_p y_1} \in F(D')$.

Consideremos ahora en el ciclo D' la trayectoria

$$D'' = \{y_{q-1}, y_{q-2}, y_{q-3}, \cdots, y_2, y_1\}.$$

Como

$$\overleftrightarrow{y_1y_2}, \overrightarrow{y_{q-2}y_{q-1}} \in F(D')$$

entonces nuevamente por el lema 8.10,

$$N_D^+(y_1) \subseteq \{y_2, \cdots, y_{q-2}, y_{q-1}\}$$

y

$$N_D^+(y_{q-1}) \subseteq \{y_1, y_2, \cdots, y_{q-2}\}.$$

Así, regresando a $\mathbf{g}[D]$ vemos que entonces en la subgráfica G inducida por

$$\{y_1, \cdots, y_{q-1}\}$$

sucede que

$$d_G(y_1) + d_G(y_{q-1}) \geq d_D^+(y_1) + d_D^+(y_{q-1}),$$

y entonces (observación 6.4 *ii*))

$$d_G(y_1) + d_G(y_{q-1}) \geq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq q-1,$$

que por el lema 8.2 implica que G es hamiltoniana de donde se sigue que en la gráfica inducida por los vértices

$$\{x_1, \cdots, x_t, x_1\}$$

en $\mathbf{g}[D]$ existe un ciclo de orden $q-1$, contradiciendo la minimalidad de C'.

Caso 2. D' es un ciclo orientado.

Supongamos que todas las flechas de D' son de la forma $\overrightarrow{y_iy_{i+1}}$ y consideremos las trayectorias dirigidas contenidas en D' de orden $q-1$ siguientes:

$$D_1 = \{y_1, y_2, \cdots, y_{q-2}, y_{q-1}\} \quad \text{y} \quad D_2 = \{y_{q-1}, y_q, \cdots, y_{2q-4}, y_{2q-3}\}$$

(por comodidad, en D_2 obviamos el módulo).

Como

$$\overrightarrow{y_{q-2}y_{q-1}}, \overrightarrow{y_{2q-4}y_{2q-3}} \in F(D')$$

entonces (lema 8.10)

$$N_D^+(y_1) \subseteq \{y_2, \cdots, y_{q-2}, y_{q-1}\} \quad \text{y} \quad N_D^+(y_{q-1}) \subseteq \{y_q, y_{q+1}, \cdots, y_{2q-4}, y_{2q-3}\}.$$

Ahora bien, por hipótesis

$$C' = \{y_1, \cdots, y_p, y_1\}$$

es un ciclo de $\mathbf{g}[D]$ de orden $q+r$ con $r \geq 1$ y r mínimo. Entonces

$$N_D^+(y_{q-1}) \cap \{y_{q+1}, y_{q+2}, \cdots, y_{p-1}\} = \emptyset,$$

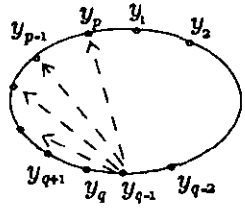
y como $\Gamma \in C(K_n, C_q)$ entonces

$$y_p \notin N_D^+(y_{q-1})$$

pues si no

$$\{y_{q-1}, y_p, y_1, \cdots, y_{q-2}, y_{q-1}\}$$

sería un ciclo heterocromático de orden q en $\mathbf{g}[D]$ contradiciendo al lema 6.18 (Dibujo 8.3).



Dibujo 8.3

Así pues,

$$\begin{aligned} N_D^+(y_{q-1}) &\subseteq \{y_q, y_{q+1}, \cdots, y_{2q-4}, y_{2q-3}\} \setminus \{y_{q+1}, y_{q+2}, \cdots, y_{p-1}, y_p\} \\ &\subseteq \{y_1, y_2, \cdots, y_{q-2}\} \cup \{y_q\}. \end{aligned}$$

De regreso a $\mathbf{g}[D]$, vemos entonces que en la subgráfica G inducida por

$$\{y_1, \cdots, y_{q-1}\}$$

sucede que

$$d_G(y_1) \geq d_D^+(y_1) \quad \text{y} \quad d_G(y_{q-1}) \geq d_D^+(y_{q-1}) - 1.$$

Sin embargo, nótese que en G, y_{q-1} es adyacente a y_{q-2} aunque

$$y_{q-2} \notin N_D^+(y_{q-1})$$

por lo tanto

$$d_G(y_{q-1}) \geq d_D^+(y_{q-1}) + 1$$

de donde se sigue que

$$d_G(y_1) + d_G(y_{q-1}) \geq d_D^+(y_1) + d_D^+(y_{q-1}),$$

y entonces

$$d_G(y_1) + d_G(y_{q-1}) \geq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq q-1,$$

que por el lema 8.2 implica que G es hamiltoniana y así, en la gráfica inducida por los vértices

$$\{x_1, ..., x_t, x_1\}$$

en $\mathbf{g}[D]$ existe un ciclo de orden $q-1$, que contradice de nuevo la minimalidad de C'. ■

Lema 8.13 *Supongamos que* $\mathbf{g}[D]$ *contiene un ciclo* $C = (V(C), E(C))$ *de orden* $q-1$. *Sean ahora*

$$y \in V(K_n) \setminus V(C) \quad y \quad x \in V(C).$$

Si $\Gamma(\{x,y\}) \notin \Gamma[E(C)]$ *entonces en* $[K_n, \Gamma]$ *todas las* $\{y\}V(C)$*-aristas tienen el color* $\Gamma(\{x,y\})$.

Prueba. Demostraremos el resultado suponiendo que es falso.

Sean

$$C = (V(C), E(C))$$

un ciclo de orden $q-1$; y

$$y \in V(K_n) \setminus V(C) \quad \text{y} \quad x \in V(C)$$

tales que

$$\Gamma(\{x,y\}) \notin \Gamma[E(C)].$$

Ahora sea $z \in V(C)$ tal que

$$\Gamma(\{z,y\}) \neq \Gamma(\{x,y\}).$$

Denotemos al ciclo C como $\{x_1, x_2, ..., x_{q-1}, x_1\}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que

$$x = x_1 \quad \text{y} \quad z = x_2.$$

Entonces $\Gamma(\{x_2, y\}) \in \Gamma[E(C)]$ pues si no, el ciclo

$$\{x_1, y, x_2..., x_{q-1}, x_1\}$$

sería un ciclo heterocromático de orden q en $[K_n, \Gamma]$.

Así, como

$$\Gamma(\{x_2, y\}) \in \Gamma[E(C)] \quad \text{y} \quad y \notin V(C),$$

por el lema 6.5 se sigue que

$$x_2 = \bigcap \{e \in E(K_n) : \Gamma(e) = \Gamma(\{x_2, y\})\}$$

y entonces

$$\Gamma(\{x_2, y\}) = \Gamma\{x_2, x_1\} \quad \text{ó} \quad \Gamma(\{x_2, y\}) = \Gamma(\{x_2, x_3\}),$$

sin embargo, si $\Gamma(\{x_2, y\}) = \Gamma(\{x_2, x_1\})$, nuevamente el ciclo

$$\{x_1, y, x_2..., x_{q-1}, x_1\}$$

sería un ciclo heterocromático. Asi,

$$\Gamma(\{x_2, y\}) = \Gamma(\{x_2, x_3\}).$$

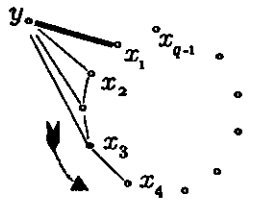
De forma análoga $\Gamma(\{x_3, y\}) \in \Gamma[E(C)]$ pues si no el ciclo

$$\{x_1, x_2, y, x_3..., x_{q+r}, x_1\}$$

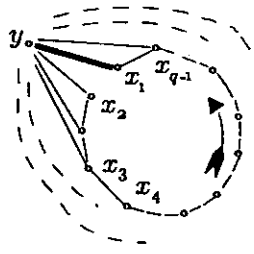
sería un ciclo heterocromático de orden q en $[K_n, \Gamma]$ y por razones idénticas que para $\Gamma(\{x_2, y\})$,

$$\Gamma(\{x_3, y\}) = \Gamma(\{x_3, x_4\}).$$

(Dibujo 8.4a. Página siguiente).



Dibujo 8.4a



Dibujo 8.4b

Siguiendo este argumento, tenemos entonces que para cada $i \leq q-1$ sucede que

$$\Gamma(\{x_i, y\}) = \Gamma(\{x_i, x_{i+1}\})$$

y por tanto, dado que C es un ciclo,

$$\Gamma(\{x_{q-1}, y\}) = \Gamma(\{x_{q-1}, x_1\}).$$

Como estamos suponiendo que $\Gamma(\{x_1, y\}) \notin \Gamma[E(C)]$ entonces el ciclo

$$\{x_{q-1}, y, x_1, x_2 ..., x_{q-1}\}$$

es un ciclo heterocromático de orden q en $[K_n, \Gamma]$ lo cual es una contradicción (Dibujo 8.4b). ■

Lema 8.14 *Supongamos que* $\mathbf{g}[D]$ *contiene un ciclo* C *de orden* $q-1$. *Entonces la subgráfica de* $\mathbf{g}[D]$ *inducida por los vértices de* C, *es una componente conexa de* $\mathbf{g}[D]$.

Prueba. Demostraremos el resultado suponiendo que es falso.

Sea

$$C = (V(C), E(C))$$

un ciclo de orden $q-1$ en $\mathbf{g}[D]$. Denotemos al ciclo C como

$$\{x_1, ..., x_{q-1}, x_1\}.$$

Sea además $y \in V(K_n) \setminus V(C)$ tal que

$$\{x_1, y\} \in E(\mathbf{g}[D]).$$

Como (lema 6.8) $[\mathbf{g}[D], \Gamma]$ es heterocromático entonces

$$\Gamma(\{x_1, y\}) \notin \Gamma[E(C)],$$

por lo que (lema 8.13) en $[K_n, \Gamma]$ todas las $\{y\} V(C)$-aristas tienen el color $\Gamma(\{x_1, y\})$ y por tanto, en $\mathbf{g}[D]$ sólo existe la arista $\{x_1, y\}$ uniendo a y con el ciclo C.

Ahora bien, por hipótesis

$$\nu(y, K_n, \Gamma) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \geq 2$$

por lo que (lema 6.7)

$$d_{\mathbf{g}[D]}(y) \geq 2$$

y entonces existe $w \in V(D) \setminus V(C)$ tal que

$$\{y, w\} \in E(\mathbf{g}[D]); \quad \Gamma(\{x_1, y\}) \neq \Gamma(\{w, y\})$$

y

$$\Gamma(\{w, y\}) \notin \Gamma[E(K_n - \{y\})]$$

(Dibujo 8.5a. Página siguiente).

Ahora veremos que pasa con la arista $\{w, x_2\}$.

Caso 1. $\Gamma(\{w, x_2\}) \notin \Gamma[E(C)]$.

Entonces el ciclo

$$\{x_1, y, w, x_2 \ldots, x_{q-1}, x_1\}$$

es un ciclo heterocromático de orden q en $[K_n, \Gamma]$.

Caso 2. $\Gamma(\{w, x_2\}) \in \Gamma[E(C)]$.

En este caso, entonces $\Gamma(\{w, x_2\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])]$ y por el lema 6.5 se sigue que

$$x_2 = \bigcap \{e \in E(K_n) : \Gamma(e) = \Gamma(\{x_2, w\})\}$$

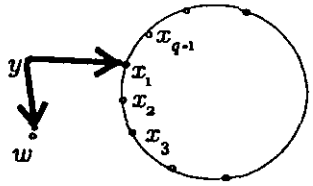
y entonces

$$\Gamma(\{w, x_2\}) = \Gamma(\{x_1, x_2\}) \quad \text{ó} \quad \Gamma(\{w, x_2\}) = \Gamma(\{x_3, x_2\}).$$

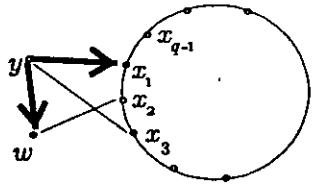
En cualquier caso,

$$\{x_1, y, w, x_2 ..., x_{q-1}, x_1\} \quad \text{ó} \quad \{x_1, x_2, w, y, x_3 ..., x_{q-1}, x_1\}$$

es un ciclo heterocromático de orden q en $[K_n, \Gamma]$ (Dibujo 8.5b.).



Dibujo 8.5a



Dibujo 8.5b

■

Lema 8.15 *La trayectoria máxima contenida en* $\mathbf{g}[D]$ *es de orden menor o igual a* $q-1$.

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.

Sea $T = \{x_1, ..., x_m\}$ una trayectoria máxima en $\mathbf{g}[D]$ con $m \geq q$ y sea G la subgráfica inducida por $\{x_1, ..., x_m\}$ en $\mathbf{g}[D]$. Obsérvese que G es conexa.

Por el lema 8.11, G contiene un ciclo de orden $t \geq q-1$. Sea

$$C = (V(C), E(C))$$

tal ciclo. Por el lema 8.12, en la subgráfica inducida en $\mathbf{g}[D]$ por $V(C)$ existe un ciclo de orden $q-1$. Como

$$V(C) \subseteq V(G),$$

entonces en G existe un ciclo de orden $q-1$. Sea

$$C' = (V(C'), E(C'))$$

el ciclo de orden $q-1$.

Ahora bien (lema 8.14), C' es una componente conexa de $\mathbf{g}[D]$, y como G es conexa y C' esta contenido en G, entonces

$$V(C') = V(G)$$

lo cual es contradictorio pues

$$|V(C')| = q-1 \quad \text{y} \quad |V((G))| = m \geq q.$$

■

Así pues,

Lema 8.16 $\mathbf{g}[D]$ *es una unión de componentes conexas hamiltonianas. Y cada componente tiene orden a lo más* $q-1$ *y cuando menos* $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1$.

Prueba. Por el lema 8.15, la trayectoria máxima contenida en $\mathbf{g}[D]$ es de orden menor o igual a $q-1$. Como por hipótesis, para cada $x \in V(K_n)$ sucede que

$$\nu(x, K_n, \Gamma) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor,$$

entonces (lema 6.7)

$$\delta(\mathbf{g}[D]) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor.$$

Así, por el lema 8.4 se sigue el resultado. ■

Lema 8.17 *Sean* $\{G_1, ..., G_r\}$ *las componentes hamiltonianas de* $\mathbf{g}[D]$.

Para toda $\{x, y\} \in E(K_n)$ *tal que sea una* G_iG_j*-arista con* $i \neq j$ *sucede que*

$$\Gamma(\{x, y\}) \notin \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Prueba. Supongamos que el resultado es falso, es decir, sea $\{x, y\} \in E(K_n)$ una G_iG_j-arista tal que

$$\Gamma(\{x, y\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])].$$

Como

$$\{x, y\} \in E(K_n) \setminus E(\mathbf{g}[D]) \quad \text{y} \quad \Gamma(\{x, y\}) \in \Gamma[E(\mathbf{g}[D])],$$

entonces por el lema 6.9, existen $z \in V(K_n)$ y $D' \in DS(K_n, C_q)$ tales que la gráfica subyacente $\mathbf{g}[D']$ esta definida como:

$$V(\mathbf{g}[D']) = V(\mathbf{g}[D])$$

y

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D']) \setminus \{\{x, z\}\}) \cup \{\{x, y\}\}$$

ó

$$E(\mathbf{g}[D']) = (E(\mathbf{g}[D']) \setminus \{\{y, z\}\}) \cup \{\{x, y\}\}.$$

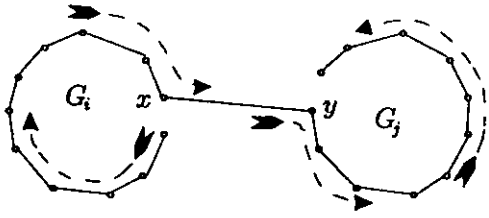
Obsérvese que en cualquier caso, dado que tanto G_i como G_j son hamiltonianas y

$$\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq |V(G_i)| \quad \text{y} \quad \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq |V(G_j)|,$$

se sigue que en $\mathbf{g}[D']$ existe una trayectoria de orden al menos

$$2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 2 \geq q + 1$$

contradiciendo el lema 8.15 (Dibujo 8.6). ■



Dibujo 8.6

Lema 8.18 *Sean* $\{G_1, ..., G_r\}$ *las componentes hamiltonianas de* $\mathbf{g}[D]$. *Para cada par de componentes* G_i *y* G_j, *todas las* G_iG_j*-aristas son de un mismo color.*

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso.

Sean G_1 y G_2 dos componentes conexas hamiltonianas de $\mathbf{g}[D]$ tales que en $[K_n, \Gamma]$, en las G_1G_2-aristas existe más de un color.

Como (lema 8.16)

$$|V(G_1)| \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \quad \text{y} \quad |V(G_2)| \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1,$$

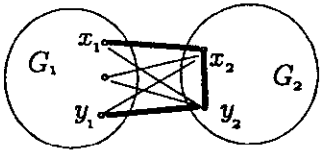
y $q \geq 4$ entonces, si en las G_1G_2-aristas existe más de un color entonces existen

$$x_1, y_1 \in V(G_1) \quad \text{y} \quad \{x_2, y_2\} \in E(G_2)$$

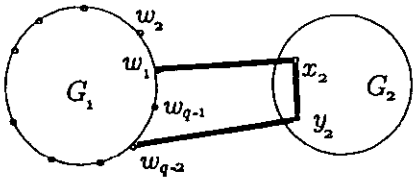
con $x_1 \neq y_1$ y $x_2 \neq y_2$ tales que

$$\Gamma(\{x_1, x_2\}) \neq \Gamma(\{y_1, y_2\}).$$

(Dibujo 8.7a. Página siguiente).



Dibujo 8.7a



Dibujo 8.7b

Por el lema 8.17, dado que $\{x_1, x_2\}$ y $\{y_1, y_2\}$ son G_1G_2-aristas entonces

$$\Gamma(\{x_1, x_2\}) \notin \Gamma[E(\mathbf{g}[D])] \quad \text{y} \quad \Gamma(\{y_1, y_2\}) \notin \Gamma[E(\mathbf{g}[D])],$$

por lo que la subgráfica G de K_n definida como

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

y

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}\}$$

es heterocromática en $[K_n, \Gamma]$

Ahora veremos que la existencia de esa subgráfica implica que en $[K_n, \Gamma]$ existe un ciclo de orden q heterocromático, lo cual es una contradicción, dado que $\Gamma \in C(K_n, C_q)$.

Caso 1. $|V(G_2)| \leq |V(G_1)|$ y $|V(G_1)| = q - 1$.

Por el lema 8.16 sabemos que G_1 es una componente conexa hamiltoniana de $\mathbf{g}[D]$. Sea

$$C = (V(C), E(C))$$

un ciclo hamiltoniano en G_1 al cual denotaremos como

$$\{w_1, ..., w_{q-1}\},$$

y sea, sin pérdida de generalidad, $x_1 = w_1$.

Dado que

$$\Gamma(\{y_1, y_2\}) \notin \Gamma[E(\mathbf{g}[D])],$$

entonces $\Gamma(\{y_1, y_2\})$ es un color que no aparece en $\Gamma[E(C)]$. Así (lema 8.13) en $[K_n, \Gamma]$ todas las $\{y_2\} V(C)$-aristas tienen el color $\Gamma(\{y_1, y_2\})$. Luego se sigue que en $[K_n, \Gamma]$, el ciclo

$$\{y_2, x_2, x_1 = w_1, w_2, ..., w_{q-2}, y_2\}$$

de orden q es heterocromático (Dibujo 8.7b).

Caso 2. $|V(G_2)| \leq |V(G_1)|$ y $|V(G_1)| = q - 2$.

Dado que $\delta(\mathbf{g}[D]) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, entonces para cada par $w, z \in V(G_1)$ sucede que

$$d_{G_1}(w) + d_{G_1}(z) \geq q - 1 \geq |V(G_1)| + 1.$$

Así, por el teorema 8.2, sabemos que para cada par de vértices

$$u, v \in V(G_1)$$

existe una uv-trayectoria de longitud m con

$$m = d(u, v), 2, 4, ..., |V(G_1)| - 1.$$

Consideremos una trayectoria en G_1 entre x_1 y y_1 de longitud

$$|V(G_1)| - 1 = q - 3,$$

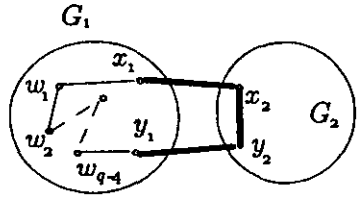
a saber

$$\{x_1, w_1, ..., w_{q-4}, y_1\}.$$

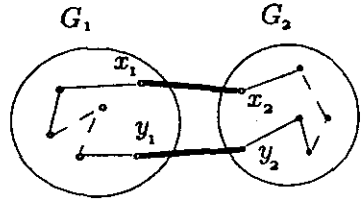
Entonces, en $[K_n, \Gamma]$ el ciclo

$$\{y_2, x_2, x_1, w_1, ..., w_{q-4}, y_1, y_2\}$$

es heterocromático de orden q (Dibujo 8.8a).



Dibujo 8.8a



Dibujo 8.8b

Caso 3. $|V(G_2)| \leq |V(G_1)| < q-2$.

En este caso, dado que $\delta(\mathrm{g}[D]) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, tanto G_1 como G_2 cumplen las hipótesis del teorema 8.1 y entonces, tanto G_1 como G_2 son panconexas. Como

$$\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq |V(G_2)| \leq |V(G_1)|,$$

sea en G_1 una x_1y_1-trayectoria de longitud

$$\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$$

y en G_2 una x_2y_2-trayectoria de longitud

$$\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil - 1.$$

Uniendo las trayectorias con las aristas

$$\{x_1, x_2\} \quad \text{y} \quad \{y_1, y_2\}$$

tendremos en $[K_n, \Gamma]$ un ciclo heterocromático de orden q (Dibujo 8.8b). ■

Lema 8.19 *Sean* $\{G_1, ..., G_r\}$ *las componentes hamiltonianas de* $\mathbf{g}[D]$. *Entonces en* $[K_n, \Gamma]$, *en las aristas*

$$E(K_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} E(G_i)$$

no existen más de $r-1$ *colores.*

Prueba. Demostraremos este resultado suponiendo que es falso. Supongamos que en el conjunto de aristas

$$E(K_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} E(G_i)$$

existen cuando menos r colores distintos bajo la coloración Γ.

Por el lema 8.18 sabemos que para cada par de componentes conexas G_i y G_j, todas las G_iG_j-aristas son de un mismo color. Consideremos así a

$$K_r = (V(K_r), E(K_r))$$

la gráfica completa de orden r donde

$$V(K_r) = \{x_1, ..., x_r\},$$

y a la coloración Γ' de las aristas de K_r definida como

$$\Gamma'(\{x_i, x_j\}) = \Gamma[G_iG_j\text{-aristas}].$$

Por el teorema 7.2, en $[K_r, \Gamma']$ existe un K_3 heterocromático.

Supongamos que $\{x_1, x_2, x_3\}$ es el triángulo heterocromático en $[K_r, \Gamma']$. Regresando a K_n, de aqui se sigue que en $[K_n, \Gamma]$, las

$$G_1G_2\text{-aristas}, \quad G_2G_3\text{-aristas} \quad \text{y} \quad G_3G_1\text{-aristas}$$

son de tres colores distintos.

Como G_2 y G_3 son hamiltonianas, sean

$$\{y_1, \cdots, y_{|V(G_2)|}, y_1\} \quad \text{y} \quad \{w_1, ..., w_{|V(G_3)|}, w_1\}$$

dos ciclos hamiltonianos de G_2 y G_3 respectivamente y sea $x \in V(G_1)$.

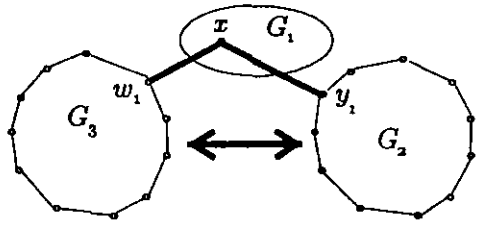
Como

$$|V(G_2)| \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \quad \text{y} \quad |V(G_3)| \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1$$

entonces

$$\left\{y_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}, y_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 1}, \cdots, y_1, x, w_1, w_2, ..., w_{\lceil \frac{q}{2} \rceil - 1}, y_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}\right\}$$

es un ciclo de orden q que es heterocromático en $[K_n, \Gamma]$ (Dibujo 8.9). ■



Dibujo 8.9

Con todo esto tenemos que

Lema 8.20 *Sean* $n, q \in \mathbb{N}$ *tales que* $n \geq q \geq 4$ *y sea* $\Gamma \in C^{\geq}(K_n, C_q)$. *Entonces*

$$\Gamma[E(K_n)] \leq g(n,q) - 1.$$

Prueba. Por el lema 8.16, $\mathbf{g}[D]$ es la unión de componentes conexas hamiltonianas $\{G_1, ..., G_r\}$, y cada componente tiene orden a lo más $q-1$.

Por el lema 8.19, en las aristas

$$E(K_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} E(G_i),$$

no existen mas de $r-1$ colores. Así pues

$$\begin{aligned} |\Gamma[E(K_n)]| &\leq \sum_{i=1}^{r} (|E(G_i)|) + r - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{r} \binom{|V(G_i)|}{2} + r - 1. \end{aligned}$$

Ahora, como por definición $V(D) = V(K_n)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{r} (|V(G_i)|) = n$$

y así por el lema 8.7 se sigue el resultado. ■

Teorema 8.3 *Sean* $n, q \in \mathbb{N}$ *tales que* $n \geq q \geq 3$. *Entonces*

$$g(n,q) + r(n,q-1)\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - \frac{r(n,q-1)}{2}\right) \geq H(K_n, C_q) \geq g(n,q).$$

Prueba.

Caso 1. $q = 3$.

Como se dijo al inicio del capítulo, por el teorema 7.3 se sigue el resultado.

Caso 2. $n \geq q \geq 4$.

Por el lema 8.1 tenemos que

$$H(K_n, C_q) \geq g(n,q).$$

Asi pues, sólo queda demostrar que

$$H(K_n, C_q) \leq g(n,q) + r(n,q-1)\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - \frac{r(n,q-1)+1}{2}\right).$$

Sean $\Gamma \in C^*(K_n, C_q)$ y

$$\{x_1, ..., x_m\} \subseteq V(K_n)$$

un conjunto máximal de vértices tal que para cada $1 \leq i \leq m$ sucede que

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1.$$

Por el lema 8.9 sabemos que

$$0 \leq m \leq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2.$$

A continuación veremos cuántos colores a lo más existen en

$$[K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\}, \Gamma].$$

Primero obsérvese que $n - m > 0$ pues

$$n \geq q > 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2 \geq m.$$

Subcaso 2.1. $n - m < q$.

En esta caso, claramente

$$|\Gamma[E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})]| \leq \binom{n-m}{2}$$

que por el lema 8.5 implica que

$$|\Gamma[E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})]| \leq g(n-m) - 1.$$

Subcaso 2.2. $n - m \geq q$.

Aqui, dado que $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq V(K_n)$ un conjunto máximal de vértices tal que para cada $1 \leq i \leq m$ sucede que

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1,$$

entonces se sigue que para cada $x \in V(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})$ se tiene que

$$\nu(x, K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\}, \Gamma) \geq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

y por tanto, la coloración Γ' definida por la restricción de Γ a $E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})$ es una coloración tal que

$$\Gamma' \in C^{\geq}(K_{n-m}, C_q)$$

y entonces, por el lema 8.20

$$|\Gamma[E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})]| = \Gamma'[E(K_{n-m})] \leq g(n-m, q) - 1.$$

Así, en ambos casos vemos que

$$|\Gamma[E(K_n \setminus \{x_1, ..., x_m\})]| \leq g(n-m, q) - 1. \tag{8.2}$$

Ahora queda por ver que pasa con lo demás.

Por el lema 6.12 sabemos que si $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq V(K_n)$ entonces

$$\nu(\{x_1, ..., x_m\}, K_n, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} (\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma))$$

y como para cada $i \in \mathbf{N}$ tal que $1 \leq i \leq m$ sucede

$$\nu(x_i, K_n \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}, \Gamma) \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1,$$

entonces

$$\nu(\{x_1, , , , x_m\}, K_n, \Gamma) \leq m\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1\right) \tag{8.3}$$

con $m \leq 2\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 2$.

Así pues, como por definición,

$$\nu\left(\{x_1,,,,x_m\},K_n,\Gamma\right)=\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|-\left|\Gamma\left[E\left(K_n\setminus\{x_1,...,x_m\}\right)\right]\right|,$$

entonces

$$\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|=\left|\Gamma\left[E\left(K_n\setminus\{x_1,...,x_m\}\right)\right]\right|+\nu\left(\{x_1,,,,x_m\},K_n,\Gamma\right)$$

y así

$$\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|\leq\left|\Gamma\left[E\left(K_n\setminus\{x_1,...,x_m\}\right)\right]\right|+m\left(\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1\right)$$

que con (8.2) y (8.3) implica que

$$\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|\leq g\left(n-m,q\right)-1+m\left(\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-1\right),$$

y por el lema 8.6 esto último nos dice

$$\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|\leq g\left(n,q\right)+re\left(n,q-1\right)\left(\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor-\frac{re\left(n,q-1\right)}{2}\right)-1.$$

Finalmente, como $\Gamma\in C^*\left(K_n,C_q\right)$ entonces

$$\left|\Gamma\left[E\left(K_n\right)\right]\right|=H\left(K_n,C_q\right)-1$$

y se sigue el resultado. ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Alon, "On a conjecture of Erdös, Simonovits, and Sós concerning anti-Ramsey theorems", *J. Graph Theory* Vol. 7 (1983), 91-94.

[2] J.L. Arocha, J. Bracho, V. Neumann-Lara, "On the minimum size of tight hypergraphs", *J. Graph Theory* 16, No. 4 (1992), 319-326.

[3] A.S. Asratian, R. Häggkvist, G.V. Sarkisian, "A characterization of panconnected graphs satisfying a local Ore-type condition", *J. Graph Theory* Vol. 22, No. 2 (1996), 25-103.

[4] Behzad M., Chartrand G., Lesniak-Foster L., "*Graphs and Digraphs*", Wadsworth International Group, 1979.

[5] Berge C., "*Graphs and Hypergraphs*", North-Holland Publishing Company, 1976.

[6] A. E. Brouwer, "Optimal packings of K_4's into a K_n", *J. Combinatorial Theory*, Serie A 26, (1979), 278-297.

[7] P. Erdös, M. Simonovits, V.T. Sós, "Anti-Ramsey theorems", *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and finite sets, Keszthely (Hungary), 1973,.633-643.

[8] Harary F., "*Graph Theory*", Addison Wesley, 1969.

[9] Y. Manoussakis, M. Spyratos, Zs. Tuza, M. Voigt, "Minimal colorings for properly colored subgraphs", *Graphs and Combinatorics* 12, (1996), 345-360.

[10] Marshall Hall, Jr., "*Combinatorial Theory*", Wiley-Interscience Publication, 1986.

[11] V. Neumann-Lara, "Números heterocromáticos en gráficas". Comunicación interna.

[12] R, Rado, "Anti-Ramsey theorems". *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and finite sets, Keszthely (Hungary), 1973, 1159-1168.

[13] M. Simonovits, V. Sós, "On restricted colourings of K_n", *Combinatorica* 4 (1), (1984), 101-110.

[14] F. Sterboul, "A new combinatorial parameter". *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 10. Infinite and finite sets, Keszthely (Hungary), 1973, 1387-1404.

[15] F. Sterboul, "An extremal problem in hypergraph colouring". *J. Combinatorial Theory* Serie B 22, (1977), 159-164.

[16] F. Sterboul, D. Wertheimer, "Colorations extremes dans les hypergraphes". *Annals of Discrete Mathematics"*, 17. *Proceedings of the International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics, University of Marseille-Luminy*, 1981, North-Holland Mathematics Studies. 606-612.

[17] P. Turán, "Egy gráfelméleti szélsöértékfeladatról" *Matematikai és fizikai lapok*, 48 (1941), 436-452.

[18] P. Turán, "On the theory of graphs", *Colloq. Math.*, 3 (1954), 19-30.

[19] P. Valencia, "Número heterocromático de triangulaciones en superficies". Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM. 1998.

[20] Wang Hong, "Covering a graph with cycles", *J. Graph Theory* 20, No. 2 (1995), 203-211.

[21] J. E. Williamson, "Panconnected graphs II", *Period. Math. Hungar.* 8 (1977), 105-116.