

14  
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN PUNTO DE VISTA SOBRE LAS CONICAS  
Y SU USO EN EL SUAVIZAMIENTO DE POLIGONOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
M A T E M A T I C A  
CON ESPECIALIDAD EN  
CIENCIAS DE LA COMPUTACION

*Lic.*

P R E S E N T A :  
ADRIANA RIVERA HERNANDEZ

274296



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. PABLO BARRERA SANCHEZ

1999



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

**“UN PUNTO DE VISTA SOBRE LAS CÓNICAS Y SU USO EN EL SUAVIZAMIENTO DE POLÍGONOS”**

realizado por **ADRIANA RIVERA HERNÁNDEZ**  
con número de cuenta **8433385-8** , pasante de la carrera de **MATEMÁTICAS**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

**DR. PABLO BARRERA SÁNCHEZ**

Propietario

M. en C. **ANA IRENE RAMÍREZ GALANZA**

Propietario

**DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA**

Suplente

M. en C. **MARÍA ELENA GARCÍA ALVAREZ**

Suplente

M. en C. **JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA**

**Consejo Departamental de MATEMÁTICAS**  
**MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO**

*[Handwritten signatures and initials]*  
- Jul. Cesar Guevara  
- Ma. Elena Garcia  
- JCG

*A mi madre*

*Rafaela Hernández Rodríguez.*

*A mi padre*

*Jorge Rivera Ramírez.*

*Y a mis hermanos*

*Carolina y Rafael.*

# Agradecimientos

Sin duda, tengo mucho que agradecerle al Dr. Pablo Barrera Sánchez, por todas las facilidades que me ha brindado para superarme; por permitirme aprender de él y haberme introducido al mundo del análisis numérico, en uno de tantos cursos que ha impartido; por la paciencia y dedicación con la que me fue guiando para elaborar este trabajo; sobre todo, le agradezco todas aquellas conversaciones que me motivaron a continuar.

A los proyectos de investigación:

*UNAMALLA* Proyecto: DGAPA-No DO-104993 UNAM.

*TRIANGULACIONES ÓPTIMAS* Proyecto: DGAPA-No IN-103594 UNAM.

que con su apoyo económico hicieron posible la realización de este trabajo de tesis.

A la M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza le agradezco todos sus comentarios y sugerencias.

A todos mis profesores, muchas gracias, por haberme enseñado a leer, a sumar, . . . , a que no siempre uno más uno es igual a dos, y todo lo demás.

Me gustaría también agradecer a mis amigos, por acompañarme por la vida.

Por supuesto, agradezco a mis padres, por todo el respaldo que me han brindado para poder alcanzar esta meta, a mis hermanos: Carolina y Rafael, por su compañía y cariño.

# Contenido

Prólogo	v
<b>1 Razón Cruzada y Proyectividad Puntual y Lineal</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción	1
1.2 Razón Simple Puntual	1
1.2.1 Razón doble o razón cruzada	2
1.3 Perspectividad Puntual	7
1.4 Proyectividad Puntual	9
1.4.1 Representación simple de una proyectividad no-singular	9
1.5 Representación de líneas	18
1.5.1 Familia de líneas	20
1.5.2 Teorema de Desargues	21
1.6 Razón Simple Lineal	25
1.6.1 Razón cruzada lineal	26
1.6.2 Teorema de Pappus	28
1.7 Proyectividad lineal	29
1.8 Cuadrilátero Completo y Cuadrángulo Completo	31
1.9 Notas y Referencias	34
<b>2 Cónicas</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción	35
2.2 Cónica Puntual	35
2.2.1 Cónicas degeneradas	35
2.2.2 Rectas Notables Relacionadas con una Cónica Puntual.	36
2.2.3 Cónica puntual vista como una proyectividad entre dos haces de líneas	44
2.3 Familia de Cónicas	44

2.3.1	Casos Especiales . . . . .	47
2.3.2	Familia de cónicas a través de cuatro puntos . . . . .	51
2.4	Teorema de Pascal . . . . .	53
2.4.1	Construcción de una cónica a partir de cinco puntos . . . . .	59
2.4.2	Caso Especial: Cónica tangente a dos lados de un triángulo. . . . .	62
2.5	Cónica Lineal . . . . .	65
2.5.1	Ecuación de la Envolvente o Ecuación tangencial de una Cónica. . . . .	66
2.5.2	Puntos notables de una cónica lineal . . . . .	71
2.5.3	Teorema de Brianchon . . . . .	73
2.6	Notas y Referencias . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Dualidad</b> . . . . .	<b>76</b>
3.1	Introducción . . . . .	76
3.2	Coordenadas de línea . . . . .	77
3.2.1	Algunos casos especiales . . . . .	77
3.2.2	Ecuación de un punto . . . . .	79
3.2.3	Dualidad en Coordenadas de Puntos y Líneas . . . . .	80
3.3	Coordenadas Homogéneas . . . . .	82
3.3.1	Propiedades de puntos y líneas . . . . .	84
3.3.2	Dualidad entre puntos y líneas en coordenadas homogéneas . . . . .	85
3.3.3	Perspectividad en Coordenadas Homogéneas . . . . .	86
3.4	Cónicas . . . . .	87
3.4.1	Cónica puntual . . . . .	87
3.4.2	Cónica lineal . . . . .	89
3.5	Notas y Referencias . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Plano Proyectivo</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1	Introducción . . . . .	91
4.2	El plano proyectivo real . . . . .	91
4.2.1	Puntos y líneas . . . . .	92
4.2.2	Dualidad . . . . .	96
4.2.3	Interpretación del plano afín extendido y del plano proyectivo real. . . . .	97
4.3	Colineaciones . . . . .	99

4.3.1	Las matrices inducen colineaciones . . . . .	99
4.3.2	Correlaciones y Polaridades . . . . .	101
4.3.3	Polo y Polar . . . . .	103
4.3.4	Cónicas . . . . .	104
4.4	Notas y Referencias . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Graficación de cónicas</b>	<b>112</b>
5.1	Introducción . . . . .	112
5.2	Representación de una curva . . . . .	113
5.3	Graficación de curvas representadas paramétricamente . . . . .	113
5.4	Elección de la representación . . . . .	114
5.4.1	Algunas parametrizaciones del círculo unitario. . . . .	115
5.4.2	Parametrización óptima para una curva convexa y diferenciable. . . . .	117
5.5	El método en diferencias para generar puntos de secciones cónicas . . . . .	121
5.5.1	Elipses e hipérbolas con centro en el origen . . . . .	122
5.5.2	Elipses e Hipérbolas cuyo centro no necesariamente es el origen . . . . .	126
5.5.3	Parábolas . . . . .	126
5.6	El método en diferencias . . . . .	127
5.6.1	Aplicación del método para la elipse . . . . .	127
5.7	Notas y Referencias . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Graficación de arcos cónicos</b>	<b>134</b>
6.1	Introducción . . . . .	134
6.2	Representación de arcos parabólicos . . . . .	134
6.2.1	Representación Polinomial de Bézier de Segundo Grado . . . . .	135
6.3	Parametrización Racional de Bézier de Segundo Grado . . . . .	142
6.3.1	Algunas propiedades de las curvas racionales de Bézier . . . . .	148
6.3.2	Algoritmo para generar arcos cónicos . . . . .	160
6.3.3	Elección de una parametrización . . . . .	163
6.3.4	Parametrización rho . . . . .	168
6.3.5	Parametrización-g . . . . .	173
6.3.6	Parametrización estándar . . . . .	182
6.3.7	Centro . . . . .	183
6.4	Método recurrente para generar arcos cónicos . . . . .	185
6.4.1	Parametrización de Arcos Cónicos . . . . .	185

6.4.2	Transformación de la Representación de Bézier . . . . .	188
6.5	Notas y Referencias . . . . .	197
<b>7</b>	<b>Suavizamiento Cónico de Polígonos</b>	<b>198</b>
7.1	Introducción . . . . .	198
7.2	Eliminación de Puntos . . . . .	198
7.2.1	Criterios de Colinealidad . . . . .	199
7.2.2	Algoritmo De Eliminación De Puntos . . . . .	204
7.3	Suavizamiento de Regiones Poligonales . . . . .	222
7.3.1	Algoritmo . . . . .	227
7.4	Notas y Referencias . . . . .	243
	<b>Apéndice</b>	<b>246</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>249</b>

# Prólogo

El diseño geométrico asistido por computadora CAGD surge a finales de los cincuenta en respuesta a la necesidad de obtener nuevos métodos de diseño. Un avance significativo en esta área, fue el considerar una curva como la unión de otras más "simples", más aún, representar cada "pedazo" en su forma paramétrica. Un ejemplo de éstas, son las curvas NURBS. Una de las curvas NURBS más sencillas son aquéllas que por pedazos está formada por segmentos de cónicas. En el presente trabajo mostramos una aplicación de diseño geométrico, que consiste en suavizar una curva poligonal usando curvas NURBS.

Hoy en día, toda aplicación realizada en computadora, tiende a reemplazar el despliegue de resultados en forma de tablas de números o palabras, por un despliegue en su forma visual, estas aplicaciones incluyen el cómputo científico, donde se necesita de "precisión" y se requieren algoritmos eficientes, que no gasten mucho tiempo de cómputo para desplegar la información. Una aplicación de este estilo, es la generación numérica de mallas.

Actualmente, está disponible en la red el sistema UNAMALLA v.2.0 para PC, software que genera mallas sobre regiones planas irregulares vea [1]; durante su desarrollo, se hizo necesario aplicar métodos de suavizamiento para curvas poligonales. En las primeras versiones del sistema, una región muy irregular se suavizaba por medio de un spline cúbico. Sin embargo, no siempre se obtenían buenos resultados; en la figura (0-1) se muestra una poligonal no convexa, cuyo spline de suavizamiento, presenta muchas ondulaciones y que, al perderse las propiedades geométricas del contorno, no es de utilidad.

El problema de suavizar una región surge debido a que al generar la malla, se presentan problemas en aquellos vértices que forman "picos" muy pronunciados, por lo que se considera hacer un suavizamiento local, en lugar de uno global; es decir, suavizar únicamente los vértices, de esta forma, al suavizar una poligonal, aproximaremos cada vértice usando un arco cónico y, para lograr que la curva obtenida sea suave, el segmento cónico deberá ser tangente a los lados que definen el vértice; la curva que se contruye para suavizar la poligonal, está formada por segmentos de cónica y segmentos de recta (cónicas degeneradas); es decir, construiremos una curva NURBS.

La intención de este trabajo, es presentar algunos métodos para trazar cónicas revisando los métodos

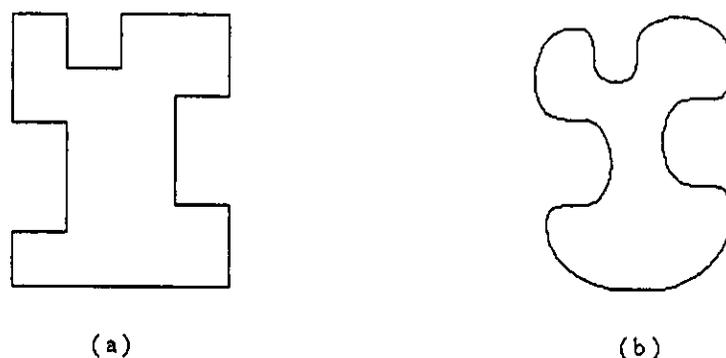


Figura 0-1: ( a ) Contorno Original, ( b ) Spline cúbico de suavizamiento.

clásicos y algunos que se han desarrollado recientemente con el fin de obtener un algoritmo eficiente que muestre la gráfica de un spline cónico.

Para presentar este material, primero introducimos algunos conceptos básicos, que se usarán de manera indirecta al plantear y resolver el problema de graficación de arcos cónicos, dichos conceptos están relacionados con la representación de puntos y líneas.

En el segundo capítulo presentamos las propiedades clásicas de las cónicas, poniendo especial atención en el Teorema de Pascal, que nos permite presentar un primer método para trazar una cónica puntual, incluimos una configuración de este teorema que nos sirve para trazar puntos de un arco cónico con tangentes determinadas en los extremos. Por otro lado, se enuncia el Teorema de Brianchon, cuya interpretación da lugar a un método para trazar tangentes a una cónica. Al final del capítulo se introduce brevemente el concepto de cónica lineal, mostrando a la vez, las propiedades de la cónica puntual y lineal con el objeto de hacer notar la relación de dualidad que existe entre ambos conceptos. Aquí planteamos la necesidad de usar un sistema coordenado que permita manejar coordenadas de líneas.

En el tercer capítulo estudiamos la forma de introducir un sistema coordenado que nos permita manejar a puntos y líneas como entes primarios y así, poder expresar, en términos algebraicos las propiedades de dualidad de las cónicas; dicho sistema es el sistema de coordenadas homogéneas.

En el capítulo cuatro retomamos las propiedades de las cónicas vistas en el segundo capítulo; esta vez planteamos dichos resultados usando coordenadas homogéneas.

En el capítulo cinco retomamos el problema de graficación de cónicas, haciendo notar que, para obtener la gráfica de una curva, en general, es conveniente usar una representación paramétrica de la curva y, se plantea, para el caso de curvas convexas y diferenciables, las características que debe tener la representación para generar una aproximación óptima. Incluimos las parametrizaciones óptimas para el caso de las cónicas y se obtiene un método recursivo, que sólo requiere de tres puntos iniciales, para

obtener la aproximación óptima de la cónica; al final, se muestra un algoritmo que usa este método para graficar elipses.

Como mencionamos al principio, nos interesa graficar un arco cónico con tangentes determinadas en los extremos. Una representación que permite describir un segmento cónico con estas características es la llamada representación racional de Bézier de segundo grado, que usa los puntos extremos del arco, el punto de intersección de las tangentes y tres parámetros adicionales. En el capítulo seis revisamos las propiedades de esta representación y se muestra cómo obtener la representación del arco que sólo usa un parámetro. Para graficar el segmento cónico, adaptamos el método, visto en el capítulo cinco y al final se presenta el algoritmo recursivo que genera una aproximación óptima del arco cónico.

En el último capítulo se muestra la aplicación que consiste en suavizar una poligonal. Antes de aplicar el suavizamiento cónico, primero, para tratar de reducir la irregularidad del contorno, se reduce el número de puntos, obteniendo una nueva aproximación a la que se le aplica el suavizamiento. En el capítulo se muestran los resultados que se obtienen con cada procedimiento y, al final indicamos cómo combinarlo para generar la aproximación del contorno que se usa en el sistema.

# Capítulo 1

## Razón Cruzada y Proyectividad Puntual y Lineal

### 1.1 Introducción

En este capítulo presentamos algunas propiedades de la razón simple y la razón doble para puntos y rectas, incluye un estudio elemental de proyectividad puntual y lineal. Estos conceptos son la base teórica de los resultados que presentaremos en capítulos posteriores.

### 1.2 Razón Simple Puntual

En la línea  $l$  del plano cartesiano elijamos dos puntos fijos:  $A$ ,  $B$ , y sea  $P$  un punto variable; al cociente de las longitudes de los segmentos  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$ , le llamaremos **razón simple** y la denotaremos por  $(A B P)$ . En ocasiones, nos referiremos al número  $(A B P)$  como la razón en la que el punto  $P$  divide al segmento  $\overline{AB}$ .

Debido a la semejanza de triángulos, para obtener la razón en la que el punto  $P$  divide al segmento  $\overline{AB}$ , basta aplicar la definición a sólo una de las coordenadas de los puntos. En este caso, lo haremos para las abscisas de manera que, si  $a_1$ ,  $b_1$  y  $p_1$  son las abscisas de  $A$ ,  $B$  y  $P$  respectivamente (vea la figura 1-1), entonces la razón en que  $P$  divide al segmento  $\overline{AB}$  está dada por:

$$(A B P) = \frac{PA}{PB} = \frac{a_1 - p_1}{b_1 - p_1} \quad (1.2.1)$$

Veamos ahora el procedimiento inverso; es decir, dado un número real  $r$ , interpretémoslo como la razón

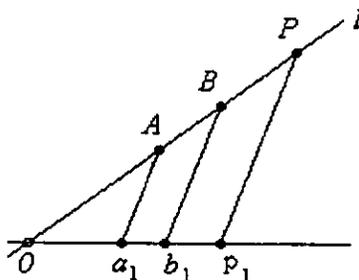


Figura 1-1:

en la que un punto divide al segmento  $\overline{AB}$ ; para determinar a dicho punto, igualemos  $r$  con la ecuación (1.2.1) y resolvamos para  $p_1$ , de esta forma, la abscisa correspondiente a  $P$ , está dada por

$$p_1 = \frac{a_1 - rb_1}{1 - r} \quad (1.2.2)$$

De las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2), vemos que cada punto de la línea  $l$  (a excepción de  $B$ ), determina unívocamente un valor de  $r$  y, viceversa, cada valor de  $r$  (exceptuando  $r = 1$ ), determina un único punto en  $l$ .

Al usar esta representación de  $l$ , a los puntos  $A$ ,  $B$  les llamaremos **puntos base**, mientras que a  $r$ , la podemos considerar como la coordenada de  $P$  con respecto a ellos.

Ya que hemos introducido el concepto de razón simple, procedamos a definir otras operaciones entre segmentos basadas en ésta.

### 1.2.1 Razón doble o razón cruzada

Sean  $A$  y  $B$  los puntos base de una línea;  $r_1$  y  $r_2$  las razones en que los puntos  $P$  y  $Q$  dividen al segmento  $\overline{AB}$ , respectivamente entonces, al cociente de  $r_1$  y  $r_2$  lo llamaremos **razón cruzada o razón doble**, y la denotaremos por  $(A B P Q)$ .

$$(A B P Q) = \frac{(A B P)}{(A B Q)} = \frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$$

Al igual que la razón simple, la razón cruzada, la podemos calcular usando una de las coordenadas de los puntos, por tanto, si  $a_1, b_1, p_1$  y  $q_1$  son las abscisas de  $A, B, P$  y  $Q$  respectivamente entonces, la razón cruzada está dada por

$$(A B P Q) = \frac{a_1 - p_1}{b_1 - p_1} : \frac{a_1 - q_1}{b_1 - q_1} = (a_1 b_1 p_1 q_1)$$

Si la línea está dada por medio de una ecuación paramétrica de la forma

$$x = d + \lambda q \tag{1.2.3}$$

y  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , son los valores del parámetro correspondientes a los puntos  $A, B, P$  y  $Q$ , entonces, aplicando la definición, la razón cruzada está dada por

$$(A B P Q) = \frac{d_1 + \lambda_1 q_1 - (d_1 + \lambda_3 q_1)}{d_1 + \lambda_2 q_1 - (d_1 + \lambda_3 q_1)} : \frac{d_1 + \lambda_1 q_1 - (d_1 + \lambda_4 q_1)}{d_1 + \lambda_2 q_1 - (d_1 + \lambda_4 q_1)}$$

simplificando, se llega a una relación, que expresa a la razón cruzada de la cuarteta, únicamente en términos de los valores de sus parámetros.

$$(A B P Q) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$$

### Puntos armónicos

Si la razón cruzada de los puntos es igual al negativo de la unidad, diremos que la cuarteta es armónica.

$$(A B P Q) = -1 \tag{1.2.4}$$

de modo que los puntos  $A, B, P$  y  $Q$  son armónicos si sus abscisas satisfacen la relación

$$\frac{a_1 - p_1}{b_1 - p_1} : \frac{a_1 - q_1}{b_1 - q_1} = -1$$

la que podemos llevar a la forma

$$2a_1 b_1 - (a_1 + b_1)(p_1 + q_1) + 2p_1 q_1 = 0 \tag{1.2.5}$$

A continuación veremos algunos casos especiales de la relación anterior que dependen de la elección del origen.

1. Si elegimos como origen de las abscisas a la correspondiente al punto  $A$ ; es decir, al hacer  $a_1 = 0$ , la relación (1.2.5) se simplifica a

$$2p_1q_1 = b_1(p_1 + q_1),$$

que puede reescribirse como

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \right)$$

la cual muestra que el segmento  $\overline{AB}$  es media armónica de los segmentos  $\overline{AP}$  y  $\overline{AQ}$ .

2. Si ahora elegimos al origen como el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ , resulta  $b_1 = -a_1$  y, por tanto, la relación entre los puntos armónicos queda dada por

$$a_1^2 = p_1q_1$$

expresándonos, que la mitad del segmento  $\overline{AB}$  es media geométrica entre las distancias del punto medio de éste a los puntos  $P$  y  $Q$ .

3. Si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  son los parámetros de los puntos  $A, B, P$  y  $Q$ , con respecto a la ecuación paramétrica (1.2.3) y satisfacen la relación

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1$$

o bien

$$2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_4 + \lambda_3) + 2\lambda_3\lambda_4 = 0$$

la cuarteta es armónica.

### Propiedades de la razón cruzada

Veamos ahora cómo se altera la razón cruzada al cambiar el orden de los puntos.

1. Cuando permutamos los primeros dos puntos o los dos últimos, la razón cruzada se transforma en el inverso de la original.

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \\
 &= \frac{1}{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}} \\
 &= \frac{1}{(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4)}
 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Intercambiando los dos últimos elementos

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{1}{\frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}} = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_3)} \tag{1.2.7}$$

2. La razón cruzada, no se altera, cuando se permutan entre sí los dos primeros y los dos últimos elementos.

Al intercambiar los dos últimos elementos en  $(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4)$  y al aplicar la propiedad (1.2.6), obtenemos

$$(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_4 \lambda_3) = \frac{1}{(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4)}$$

intercambiando ahora los dos primeros en  $(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4)$  llegamos a la expresión

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda_2 \lambda_1 \lambda_4 \lambda_3) \tag{1.2.8}$$

3. Cuando se permutan entre sí el primer y último elemento, o el segundo con el tercero, la razón cruzada obtenida se transforma en el complemento a la unidad de la original.

De la definición

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} \\
 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_4)}
 \end{aligned}$$

Sumando la razón  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) + (\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) + (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) + (\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_4) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\
 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

4. El resultado para cuando en  $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$  se intercambia el primer y último elemento se obtiene de la igualdad

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda_4 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1)$$

intercambiando  $\lambda_3$  y  $\lambda_2$

$$(\lambda_4 \lambda_3 \lambda_2 \lambda_1) = 1 - (\lambda_4 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_1)$$

En total, tenemos 24 diferentes permutaciones de los puntos  $A, B, P$  y  $Q$ , por tanto, determinan 24 razones cruzadas. Pero, aplicando las propiedades antes vistas, éstas se pueden dividir en seis grupos; éstos, los podremos obtener a partir del siguiente:

$$(A B P Q) = (B A Q P) = (Q P B A) = (P Q A B) = r \tag{1.2.10}$$

Intercambiando el primer y segundo punto en cada miembro de la igualdad (1.2.10), obtenemos el segundo grupo

$$(B A P Q) = (A B Q P) = (P Q B A) = (Q P A B) = \frac{1}{r} \tag{1.2.11}$$

Intercambiando el segundo y tercer punto en cada miembro del primer grupo

$$(A P B Q) = (B Q A P) = (Q B P A) = (P A Q B) = 1 - r \tag{1.2.12}$$

Intercambiando ahora el orden de los primeros dos puntos en cada miembro de la identidad anterior.

$$(P A B Q) = (Q B A P) = (B Q P A) = (A P Q B) = \frac{1}{1 - r} \tag{1.2.13}$$

Intercambiando el segundo y tercer punto en cada uno de los miembros del segundo grupo

$$(B P A Q) = (A Q B P) = (P B Q A) = (Q A P B) = \frac{r-1}{r} \quad (1.2.14)$$

Al intercambiar el primer y segundo punto en cada elemento de la igualdad anterior

$$(P B A Q) = (Q A B P) = (B P Q A) = (A Q P B) = \frac{r}{r-1}$$

### 1.3 Perspectividad Puntual

**Definición 1.3.1** Se dice que dos conjuntos de puntos están en *perspectiva central*, desde el centro  $v$ , si los conjuntos están en correspondencia uno a uno, y toda línea que une a los puntos correspondientes pasa a través del punto  $v$  (figura 1-2).

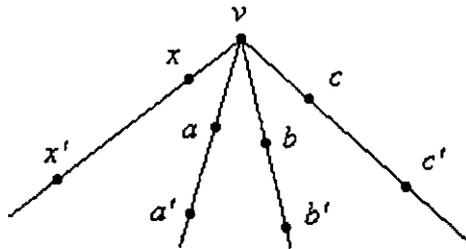


Figura 1-2: Puntos en perspectiva central.

Un caso especial de perspectiva central se obtiene cuando los dos conjuntos de puntos son colineales.

**Definición 1.3.2** Si dos conjuntos de puntos que están en distintas líneas se corresponden uno a uno, y las líneas que unen puntos correspondientes pasan a través de un punto fijo  $v$ , la relación entre ambos conjuntos es llamada *perspectividad* y, al punto  $v$ , se le llama *centro de perspectividad* (figura 1-3).

Veamos ahora cómo obtenemos la descripción algebraica de una perspectividad entre dos conjuntos de puntos sobre dos líneas distintas.

Sean  $l$  y  $l'$  dos líneas dadas por las ecuaciones  $x = a + kb$  y  $x' = a' + k'b'$ , respectivamente. Si  $v$  es el centro de perspectividad, el punto  $x' = (x'_1, x'_2)^t$ , con parámetro  $k'$ , es la imagen del punto  $x = (x_1, x_2)^t$ , con parámetro  $k$ , si y sólo si los puntos  $v$ ,  $x$ , y  $x'$  son colineales; si y sólo si

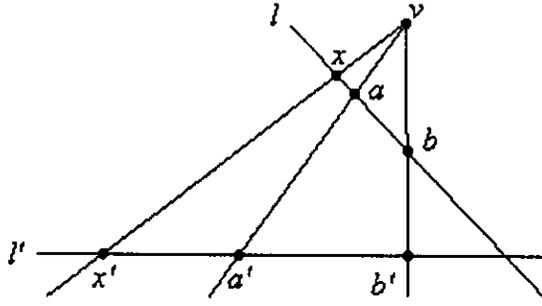


Figura 1-3: Perspectividad entre los puntos de  $l$  y  $l'$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & 1 \\ a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & 1 \\ a'_1 + k'b_1 & a'_2 + k'b'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Después de desarrollar el determinante y simplificar, obtenemos la siguiente relación bilineal entre  $k$  y  $k'$ .

$$\alpha k k' + \beta k + \gamma k' + \delta = 0 \quad (1.3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= b_1 b'_2 \\ \beta &= v_1 b_2 - v_2 b_1 + b_1 a'_2 \\ \gamma &= v_2 b'_1 - v_1 b'_2 + a_1 b'_2 \\ \delta &= v_1 (a_2 - a'_2) + v_2 (a'_1 - a_1) + a_1 a'_2 \end{aligned}$$

Notemos que si damos el valor de  $k'$  en la relación (1.3.15), el valor de  $k$  queda unívocamente determinado, y viceversa, dado el valor  $k$ , la relación determina un único valor de  $k'$ . Esto mismo lo podemos hacer ver al reescribir la relación en la forma

$$k' = -\frac{\beta k + \delta}{\alpha k + \gamma}. \quad (1.3.16)$$

De este modo hemos llegado a que los puntos de dos líneas diferentes  $l$  y  $l'$  con parámetros  $k$  y  $k'$  respectivamente, están en perspectiva, si  $k$  y  $k'$  satisfacen una relación bilineal.

La relación de perspectiva entre dos conjuntos de puntos, nos permite definir la siguiente relación más general.

## 1.4 Proyectividad Puntual

**Definición 1.4.3** Si en dos rectas  $l \equiv x = a + kb$  y  $l' \equiv x = a' + k'b'$ , los parámetros  $k$  y  $k'$  están ligados por una ecuación bilineal, diremos que existe una **proyectividad** entre sus puntos (haces de puntos).

Un caso especial de la proyectividad surge cuando la ecuación bilineal se puede expresar como un producto de dos factores; esto sucede sólo si  $\Delta \equiv \alpha\delta - \beta\gamma = 0$  o, equivalentemente  $\alpha\delta = \beta\gamma$ .

Para hacerlo ver, multipliquemos la relación (1.3.15) por  $\alpha$  y después substituyamos  $\delta\alpha$  por  $\beta\gamma$ , de esta forma, la expresión bilineal se reduce a

$$\alpha^2 k k' + \beta \alpha k + \gamma \alpha k' + \beta \gamma = 0$$

la cual podemos reescribir en la forma

$$(\alpha k + \gamma)(\alpha k' + \beta) = 0$$

De esta expresión, vemos que todo punto de  $l$  (todo el haz de puntos) va a dar a un único punto de  $l'$ , que está dado por el parámetro  $k' = -\beta/\alpha$  y, que a cada punto  $x'$  de  $l'$ , le corresponde el punto  $x$  cuyo parámetro es  $k = -\gamma/\alpha$ , en tal caso decimos que la **proyectividad es singular**.

### 1.4.1 Representación simple de una proyectividad no-singular

En una proyectividad no-singular ( $\Delta \neq 0$ ), seleccionemos los puntos base de tal forma que al punto  $A$  le corresponda el punto  $A'$  y a  $B$  el  $B'$ . En términos de los parámetros, esto significa que a  $k = 0$  le corresponde  $k' = 0$  y, entonces  $k = k' = 0$  deben satisfacer la ecuación (1.3.15), lo que implica que  $\delta = 0$ . Análogamente, como  $B'$  es imagen de  $B$ ,  $k = k' = \infty$  deben satisfacer la ecuación, implicando que  $\alpha = 0$  (esto se puede hacer ver al dividir la ecuación (1.3.15) por  $kk'$ ).

En este caso la ecuación de la proyectividad no-singular queda expresada por

$$\beta k + \gamma k' = 0 \quad \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \quad (1.4.17)$$

De esta representación, obtuvimos el siguiente resultado

**Teorema 1.4.4** *Una proyectividad entre los puntos de dos líneas está determinada unívocamente por tres pares de puntos correspondientes.*

A continuación enunciaremos un resultado importante en la teoría de las proyectividades.

**Teorema 1.4.5 (Fundamental de Proyectividad)** *En una proyectividad entre los puntos de las líneas  $l$  y  $l'$ , la razón cruzada de cuatro puntos de  $l$  es igual a la razón cruzada de sus puntos correspondientes.*

#### Demostración

Sean  $A, B, P_1, P_2$  cuatro puntos de  $l$  y  $A', B', P'_1$  y  $P'_2$  los puntos correspondientes de  $l'$ , bajo la proyectividad; si las razones en las que  $P_1$  y  $P_2$  dividen al segmento  $\overline{AB}$  son  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente;  $k'_1$  y  $k'_2$  las razones en las que  $P'_1$  y  $P'_2$  dividen al segmento  $\overline{A'B'}$ , entonces, de acuerdo a la representación anterior, es posible escribir la ecuación de la proyectividad en la forma  $\beta k + \gamma k' = 0$  y, por consiguiente se tiene

$$\beta k_1 + \gamma k'_1 = 0$$

$$\beta k_2 + \gamma k'_2 = 0$$

De ambas expresiones obtenemos

$$\frac{k'_1}{k'_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

lo que muestra que  $(A B P_1 P_2) = (A' B' P'_1 P'_2)$ . ■

Este resultado también lo podemos enunciar de la siguiente manera:

*La razón cruzada de cuatro puntos en una línea es invariante bajo una proyectividad no-singular.*

Ahora veamos que el recíproco también es válido.

**Teorema 1.4.6** *Dos líneas  $l$  y  $l'$  relacionadas entre sí de tal forma que a todo punto de la primera le corresponde un punto de la segunda, y las cuaternas de puntos correspondientes tienen la misma razón cruzada, están en proyectividad.*



## Proyectividad en una misma línea

Cuando en una proyectividad la línea  $l$  coincide con  $l'$ , cabe la posibilidad de encontrar uno o más puntos que sean invariantes, a un punto con esa propiedad se le llama **punto doble**. A continuación veremos cómo clasificar las proyectividades de una recta en sí misma con base en la existencia de **puntos dobles**.

Sea

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 ; \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$$

una proyectividad no-singular, de una recta sobre sí misma. Para encontrar sus puntos dobles, en la ecuación, hagamos  $x' = x$  así, obtenemos la expresión.

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0 \quad (1.4.18)$$

La clasificación de la proyectividad dependerá, del valor del discriminante  $\Delta' = (\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta$ .

I)  $\alpha \neq 0$

Caso 1)  $\Delta' > 0$

En este caso, la proyectividad recibe el nombre de **Hiperbólica**.

La ecuación tiene dos raíces reales, por tanto, dos puntos dobles, sean éstos  $D_1(x = a)$  y  $D_2(x = b)$  (ambos diferentes del punto al infinito). Dado que la proyectividad preserve la razón cruzada, existen  $P_1(x_1)$ ,  $P'_1(x'_1)$ ,  $P_2(x_2)$  y  $P'_2(x'_2)$  tales que

$$(D_1 D_2 P_1 P_2) = (D_1 D_2 P'_1 P'_2)$$

Al expresar esta relación en términos de las coordenadas

$$\frac{a - x_1}{b - x_1} : \frac{a - x_2}{b - x_2} = \frac{a - x'_1}{b - x'_1} : \frac{a - x'_2}{b - x'_2}$$

o bien

$$\frac{a - x_1}{a - x'_1} : \frac{b - x_1}{b - x'_1} = \frac{a - x_2}{a - x'_2} : \frac{b - x_2}{b - x'_2} = k.$$

La expresión del lado izquierdo de la igualdad representa la razón cruzada de los puntos  $P_1$  y  $P'_1$  con respecto a los puntos  $A$  y  $B$ , mientras que la del lado derecho expresa la razón cruzada

de los puntos  $P_2$  y  $P'_2$  con respecto a  $A$  y  $B$ , lo que nos indica que el valor de  $k$  no depende de la elección de los puntos correspondientes.

De esta manera, hemos obtenido el siguiente resultado.

*La razón cruzada de los puntos correspondientes con respecto a los puntos dobles es constante.*

Basándonos en este resultado, podemos escribir una proyectividad hiperbólica en la forma

$$\frac{a-x}{a-x'} : \frac{b-x}{b-x'} = k \quad \text{o} \quad \frac{b-x'}{a-x'} = k \frac{b-x}{a-x} \quad (1.4.19)$$

donde  $a, b, k$  son constantes y  $a \neq b$ . A  $k$  le llamaremos **multiplicador de la proyectividad**.

Caso 2 )  $\Delta' < 0$

En este caso a la proyectividad la llamaremos **Elíptica**. No hay raíces reales, por consiguiente, tampoco hay puntos dobles.

Caso 3 )  $\Delta' = 0$

El único punto doble está dado por  $a = -\frac{\beta + \gamma}{2\alpha}$ , en este caso, a la proyectividad la llamamos **Parabólica**.

Si multiplicamos la ecuación de proyectividad por  $\alpha$ , obtenemos

$$\alpha^2 xx' + \alpha\beta x + \gamma\alpha x' + \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 = 0$$

y después de dividir por  $\alpha^2$

$$xx' + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}x' + a^2 = 0,$$

reescribiéndola en la forma

$$(x-a)(x'-a) + ax + ax' + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}x' = 0$$

factorizando los términos en  $x$  y  $x'$  y substituyendo  $a + \frac{\gamma}{\alpha}$  por  $-\left(a + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ , llegamos a la expresión

$$(x-a)(x'-a) + ((x-a) - (x'-a))\left(a + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

la que podemos llevar a la forma

$$\frac{1}{x' - a} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{c}; \quad c = \frac{\beta}{\alpha} - a$$

II ) Analicemos ahora el caso en que el coeficiente del término de segundo grado es cero ( $\alpha = 0$ ), esto significa que  $\Delta' = (\beta + \gamma)^2$ , por tanto, el caso elíptico no ocurre y la ecuación que determina los puntos dobles queda dada por

$$(\beta + \gamma)x + \delta = 0$$

1 )  $\Delta' \neq 0$

Imaginemos por un momento que  $\alpha \neq 0$ ; conforme hagamos tender  $\alpha$  a cero, en la ecuación (1.4.18), una de sus raíces tiende a infinito. Basándonos en esta observación, a la ecuación  $(\beta + \gamma)x + \delta$ , la podemos considerar como una ecuación cuadrática en donde una de sus raíces es el punto al infinito.

En este caso, la ecuación de proyectividad la podemos reescribir en la forma

$$x' = -\frac{1}{\gamma}(\beta x + \delta) = c(x + c_1)$$

o bien, si  $x = a$ , es el punto doble, entonces

$$\beta x + \gamma x' + \delta = \beta a + \gamma a + \delta$$

la que podemos reescribir

$$x' - a = \frac{\beta}{\gamma}(x - a)$$

2 )  $\Delta' = 0$

En este caso el único punto doble es el punto al infinito.

La ecuación de proyectividad está dada por  $\beta x - \beta x' + \delta = 0$ , la que podemos reescribir en la forma

$$x' = x + p; \quad p = \frac{\delta}{\beta}$$

indicándonos que la proyectividad es una translación (siempre y cuando  $\delta \neq 0$ ).

**Involución** Consideremos una proyectividad de  $l$  en  $l$  donde  $Q$  es la imagen de  $P$  y  $R$  la de  $Q$ . Por lo general,  $R$  no coincide con  $P$ , pero si éste es el caso, decimos que los puntos  $P$  y  $Q$  están en **involución**. Si en una proyectividad, cada par de puntos correspondientes se encuentran en involución, la proyectividad recibe el nombre de **involución**.

Un ejemplo de involución, es la reflexión de un punto con respecto al origen, cuya ecuación está dada por  $x + x' = 0$ . En general, la ecuación de una involución no se debe alterar si permutamos  $x$  por  $x'$  de donde,  $\beta = \gamma$ , por tanto, la ecuación de una involución está dada por

$$\alpha xx' + \beta(x + x') + \delta = 0 ; \beta^2 - \alpha\delta \neq 0$$

Veamos ahora qué sucede si una proyectividad tiene un par de puntos en involución.

Sean  $x$  y  $x'$  las coordenadas de los puntos en involución, por la definición, éstas satisfacen

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

$$\alpha xx' + \beta x' + \gamma x + \delta = 0$$

restando a la primera ecuación la segunda, obtenemos  $(\beta - \gamma)(x - x') = 0$ , de donde  $\beta = \gamma$ , lo cual nos indica que, si en una proyectividad existe un par de puntos en involución, todo par de puntos correspondientes está en involución; es decir, la proyectividad es una **involución**.

Analicemos ahora los puntos dobles de una involución, los que vienen dados por la ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \delta = 0$$

Al igual que las proyectividades, las involuciones se pueden clasificar en hiperbólicas, parabólicas o elípticas, dependiendo del signo de  $\Delta' = 4(\beta^2 - \alpha\delta)$ .

### Clasificación de las Involuciones

#### 1. Hiperbólica ( $\Delta' > 0$ )

Tiene dos puntos dobles; sean éstos  $D_1(x = a)$  y  $D_2(x = b)$ , entonces, si  $P$  y  $P'$  son puntos correspondientes, se tiene

$$(D_1 D_2 P P') = (D_1 D_2 P' P)$$

qué, en términos de sus coordenadas, está dada por

$$\frac{a-x}{a-x'} : \frac{b-x}{b-x'} = \frac{a-x'}{a-x} : \frac{b-x'}{b-x} = k \quad (1.4.20)$$

simplificando obtenemos

$$\frac{(a-x)^2(b-x')^2}{(a-x')^2(b-x)^2} = 1 = k^2$$

Si tomamos  $k = 1$ , nos daría la identidad, por tanto,  $k = -1$  y, de la ecuación (1.4.20) se obtiene

$$\frac{a-x}{b-x} = -\frac{a-x'}{b-x'}$$

Esta última expresión nos indica que en toda involución hiperbólica los puntos dobles y cualquier par de puntos correspondientes  $P$  y  $P'$ , son conjugados armónicos, es decir,  $(D_1 D_2 P P') = -1$ .

Si ahora asumimos que el punto  $D_1$  es el punto al infinito ( $\alpha = 0$ ), la involución se puede escribir en la forma

$$x + x' = p$$

la cual es una reflexión con respecto al punto cuya abscisa es  $x = p/2$ .

Si el punto al infinito ( $P_\infty$ ) no es un punto doble, entonces le corresponde un punto ordinario que denotaremos por  $C$  y lo llamaremos punto central. Como los puntos están en involución hiperbólica, satisfacen la relación

$$(D_1 D_2 C P_\infty) = -1$$

por tanto,  $C$  debe coincidir con el punto medio del segmento  $\overline{D_1 D_2}$  (figura 1-5).



Figura 1-5:

Si elegimos a  $C$  como origen,  $\beta = 0$ , de lo contrario, el punto imagen de  $C$ , no sería el punto al infinito, de esta manera, la ecuación de involución se transforma en

$$xx' = k^2 ; k^2 = -\delta/\alpha \quad \text{constante positiva.}$$

Esta ecuación nos indica que el producto de las distancias de los puntos correspondientes al punto central, es constante; más aún, como la constante es positiva, los puntos correspondientes tienen el mismo signo y, considerando que éstos y los puntos dobles forman una cuarteta armónica entonces, los puntos correspondientes deben separar a  $D_1$  y  $D_2$ .

Ahora bien, si consideramos dos pares de puntos correspondientes digamos  $P, P'$  y  $Q, Q'$  éstos no se separan, además si  $P$  se mueve a un punto doble,  $P'$  se moverá al mismo punto doble, pero en sentido contrario.

## 2. Elíptica ( $\Delta' < 0$ )

Así como en el caso hiperbólico se eligió al origen como aquel punto cuya imagen es el punto al infinito y, con esto,  $\beta = 0$ , tratemos de hacer algo análogo, para lograr obtener una representación donde  $\beta$  sea cero.

Si hacemos corresponder al origen el punto al infinito, el valor de  $\beta$  debe ser cero, por tanto, la ecuación de involución está dada por

$$\alpha xx' + \delta = 0$$

como  $\Delta' < 0$  y  $\beta = 0$ , se tiene que  $\alpha\delta > 0$ , por tanto, la ecuación de involución la podemos reescribir en la forma

$$xx' + m^2 = 0 , m^2 = \delta/\alpha$$

la cual nos indica que el producto de las distancias de dos puntos correspondientes al punto central es constante; como esta constante es negativa, los puntos correspondientes caen en diferentes lados de  $C$  (figura 1-6).

## 3. Parabólica ( $\Delta' = 0$ )

En este caso toda involución es singular y todo punto tiene por imagen al punto  $x = -\beta/\alpha$ ,  $x' = -\beta/\alpha$ .

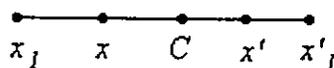


Figura 1-6:

**Teorema 1.4.7** *Una involución está determinada por dos pares de puntos correspondientes.*

**Demostración**

Sabemos que una proyectividad está determinada por tres pares de puntos correspondientes, sin embargo, al tener un par de puntos correspondientes en involución, digamos  $P, P'$  y  $Q, Q'$ ; del par de puntos correspondientes  $P, P'$  podemos, automáticamente, determinar un tercer par  $P', P$ , con los que queda determinada la involución. ■

### 1.5 Representación de líneas

Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos líneas (no paralelas) cuyas ecuaciones están dadas en la forma

$$\begin{aligned} l_1 &= A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2 &= A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

si  $L$  es una combinación lineal de ambas, es decir

$$L \equiv k_1l_1 + k_2l_2 = 0 \tag{1.5.21}$$

entonces  $L$  representa la ecuación de una línea que pasa por el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$ .

Denotemos por  $P$  al punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$  ( $P = l_1 \cap l_2$ ) y evaluemos la ecuación de  $L$  en éste:

$$L(P) = k_1l_1(P) + k_2l_2(P)$$

sabemos que  $P$  es el punto en común de  $l_1$  y  $l_2$ ,  $l_1(P) = l_2(P) = 0$ ; por tanto,  $P$  también es un punto de  $L$  y, dado que este resultado no depende de la elección de los parámetros  $k_1, k_2$  entonces,  $L$  representa a la familia de líneas que tienen en común al punto  $P$  (notemos que éste es el caso análogo al de la familia de puntos que pertenecen a una línea).

Sea  $l$  un miembro de esta familia entonces, su ecuación se puede expresar como una combinación lineal de  $l_1$  y  $l_2$

$$l = k_1 l_1 + k_2 l_2 = 0$$

si  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos de  $l$ ; es decir

$$k_1 l_1(P_1) + k_2 l_2(P_1) = 0$$

$$k_1 l_1(P_2) + k_2 l_2(P_2) = 0$$

como el sistema homogéneo tiene solución, se satisface la siguiente relación

$$l_1(P_1)l_2(P_2) - l_2(P_1)l_1(P_2) = 0.$$

Hemos visto que

Una línea pertenece a la familia generada por  $l_1$  y  $l_2$  si y sólo si dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  de ésta, se cumple la siguiente relación:

$$l_1(P_1)l_2(P_2) - l_2(P_1)l_1(P_2) = 0. \quad (1.5.22)$$

Este mismo resultado lo podemos enunciar de la siguiente forma:

Una línea  $l$  no pertenece a la familia de rectas generadas por  $l_1$  y  $l_2$  si y sólo si

$$l_1(P_1)l_2(P_2) - l_2(P_1)l_1(P_2) \neq 0.$$

**Teorema 1.5.8** *Dadas dos rectas no paralelas  $l_1$ ,  $l_2$  y una tercera línea  $l$  que no pertenece a la familia generada por  $l_1$  y  $l_2$ , existen constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que*

$$l = k_1 l_1 + k_2 l_2 + 1 = 0.$$

**Demostración**

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos de  $l$ , sabemos que ésta no pasa por el punto de intersección de las líneas  $l_1$  y  $l_2$  entonces,  $l_1(P_1)l_2(P_2) - l_2(P_1)l_1(P_2) \neq 0$ , esta expresión, es precisamente el determinante del sistema

$$k_1 l_1(P_1) + k_2 l_2(P_1) + 1 = 0 \quad (1.5.23)$$

$$k_1 l_1(P_2) + k_2 l_2(P_2) + 1 = 0$$

y como es diferente de cero, tiene solución, por tanto, existen  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $l = k_1 l_1 + k_2 l_2 + 1 = 0$ . ■

### 1.5.1 Familia de líneas

Ya hemos visto que la ecuación  $k_1 l_1 + k_2 l_2 = 0$ , representa al conjunto de líneas que pasan por el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$ . Esta misma, la podemos reescribir para obtener la ecuación de la familia de líneas descrita en términos de un solo parámetro; esto se logra, al dividir la ecuación por  $k_1$ , con ello, la familia de líneas queda representada por

$$l_1 + \lambda l_2 = 0, \quad \lambda = k_2/k_1 \tag{1.5.24}$$

El inconveniente que se tiene al usar esta representación, es, qué no existe un valor finito de  $\lambda$  que represente a la línea  $l_2$ .

Si  $P$  es el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$  entonces, decimos que (1.5.24) es la ecuación del haz de líneas con vértice  $P$ .

#### Tres líneas

Consideremos ahora tres líneas dadas por  $l_i = A_i x + B_i y + C_i = 0$  con  $i = 1, 2, 3$ .

En general, cualesquiera tres líneas no son concurrentes, pero, si lo son entonces,  $l_3$  es miembro del haz generado por  $l_1$  y  $l_2$ , por tanto, existen constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $l_3$  se puede expresar en la forma

$$l_3 = k_1 l_1 + k_2 l_2$$

la que podemos reescribir en la forma

$$k_1 l_1 + k_2 l_2 - l_3 = 0$$

De lo anterior, deducimos lo siguiente

Tres líneas diferentes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  concurren en un punto si y sólo si existen constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , diferentes de cero, tales que

$$k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3 = 0$$

o bien, si consideramos las ecuaciones de las líneas en la forma  $l_i = k_i l_i$

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0$$

observemos que siempre es posible realizar este procedimiento. A continuación enunciamos el Teorema de Desargues, junto con una demostración sencilla, que hace ver lo útil que resulta usar esta notación.

### 1.5.2 Teorema de Desargues

**Teorema 1.5.9 (Teorema de Desargues)** *Si los lados correspondientes de dos triángulos se intersecan en puntos que son colineales las líneas que unen vértices correspondientes son concurrentes y viceversa.*

*Si las líneas que unen vértices correspondientes son concurrentes, los puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales (vea la figura 1-7).*

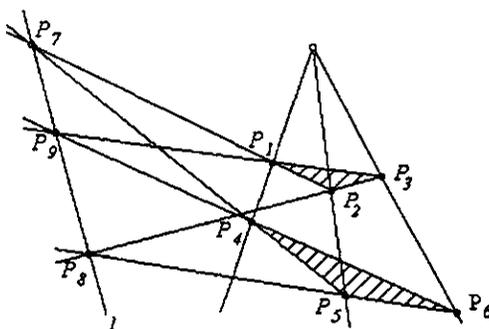


Figura 1-7: Teorema de Desargues

#### Demostración

Sean  $P_1, P_2$  y  $P_3$  los vértices de uno de los triángulos, y  $P_4, P_5$  y  $P_6$  los vértices del segundo, cuyos lados correspondientes son  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_4P_5}; \overline{P_1P_3}, \overline{P_4P_6}; \overline{P_3P_2}, \overline{P_6P_5}$  con puntos de intersección  $P_7, P_9$  y  $P_8$ , respectivamente.

Denotemos por  $l$  a la línea de colinealidad de los puntos  $P_7, P_9$  y  $P_8$ .

Como  $P_7$  es el punto de intersección de las líneas  $l_{12}$  y  $l_{45}$ ,  $l$  pertenece al haz generado por éstas; es decir, existen constantes  $k_1$  y  $s_1$  tales que

$$l \equiv k_1 l_{12} + s_1 l_{45} = 0 \tag{1.5.25}$$

Como  $P_8$  y  $P_9$  también son puntos de  $l$  entonces,  $l$  pertenece a la familia generada por  $l_{23}$  y  $l_{56}$  así como, al haz generado por las líneas  $l_{31}$  y  $l_{64}$ , por tanto, existen constantes  $k_2, s_2; k_3, s_3$ , tales que

$$l \equiv k_2 l_{23} + s_2 l_{56} = 0 \quad (1.5.26)$$

$$l \equiv k_3 l_{31} + s_3 l_{64} = 0 \quad (1.5.27)$$

Igualando las ecuaciones (1.5.25) y (1.5.26)

$$L_1 = k_1 l_{12} - k_2 l_{23} = s_2 l_{56} - s_1 l_{45} = 0 \quad (1.5.28)$$

haciendo lo mismo para las ecuaciones (1.5.26) y (1.5.27)

$$L_2 = k_2 l_{23} - k_3 l_{31} = s_3 l_{64} - s_2 l_{56} = 0 \quad (1.5.29)$$

y para las ecuaciones (1.5.25) y (1.5.27)

$$L_3 = -k_3 l_{31} + k_1 l_{12} = -s_3 l_{64} + s_1 l_{45} = 0 \quad (1.5.30)$$

Analizamos cada una de las expresiones anteriores.

De la ecuación (1.5.28), que representa a  $L_1$ , vemos que esta línea pasa por el punto de intersección de  $l_{21}$  y  $l_{23}$ , ésta misma, también pasa por el punto de intersección de  $l_{56}$  y  $l_{45}$ ; es decir,  $L_1$  es una recta que une a los vértices correspondientes  $P_2$  y  $P_5$ , por tanto

$$L_1 = l_{25}$$

De la ecuación (1.5.29), que representa la línea  $L_2$ , se deduce que ésta es una línea que une al par de vértices correspondientes  $P_3$  y  $P_6$ , de donde

$$L_2 = l_{36}.$$

Análogamente interpretando (1.5.30),  $L_3$  es una línea que une a los puntos correspondientes  $P_1$  y  $P_4$  de modo que

$$L_3 = l_{14}.$$

Notemos que si sumamos los lados derechos de las ecuaciones (1.5.28), (1.5.29) y (1.5.30), llegamos

a la siguiente relación:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

lo que indica que las líneas  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  son concurrentes; es decir, las líneas que unen los vértices correspondientes de los triángulos son concurrentes.

**Para el recíproco**

Sabemos que las líneas  $l_{14}$ ,  $l_{25}$  y  $l_{36}$  son concurrentes entonces, eligiendo de manera adecuada las ecuaciones de cada una de las líneas, podemos expresar esta propiedad en la forma

$$l_{14} + l_{25} + l_{36} = 0$$

o bien

$$l_{36} = -l_{14} - l_{25} \tag{1.5.31}$$

Encontremos ahora una expresión para cada una de estas líneas, que esté dada en términos de los lados de los triángulos.

La línea  $l_{14}$ , que pasa por el punto  $P_1$ , pertenece a la familia de líneas generada por  $l_{12}$  y  $l_{13}$  entonces, su ecuación se puede expresar como combinación lineal de éstas

$$l_{14} \equiv k_1 l_{12} - k_3 l_{31};$$

del mismo modo, dado que  $P_4$  es un punto de  $l_{14}$ , entonces  $l_{14}$  es una línea que pertenece al haz generado por  $l_{45}$  y  $l_{46}$ , de donde, su ecuación la podemos escribir de la forma

$$l_{14} \equiv s_1 l_{45} - s_3 l_{46}.$$

Hemos encontrado dos ecuaciones para la línea  $l_{14}$ , ambas, dadas en términos de los lados de los triángulos.

$$l_{14} \equiv -k_3 l_{31} + k_1 l_{12} = -s_3 l_{46} + s_1 l_{45}.$$

Siguiendo un razonamiento similar, vemos que la línea  $l_{25}$ , pertenece al haz con vértice en  $P_2$  y su ecuación la podemos escribir en la forma:

$$k_1 l_{12} - k_2 l_{23} = 0$$

como también pertenece al haz de líneas con vértice en  $P_5$ , se puede representar por la ecuación

$$s_2 l_{56} - s_1 l_{54} = 0$$

entonces, la ecuación de  $l_{25}$  en términos de los lados de los triángulos

$$l_{25} \equiv k_1 l_{12} - k_2 l_{23} = s_2 l_{56} - s_1 l_{54}$$

Ya que tenemos las ecuaciones de las líneas  $l_{14}$  y  $l_{25}$ , la correspondiente a  $l_{36}$ , se obtiene de la ecuación

$$l_{36} = -l_{14} - l_{25}.$$

De esta forma obtenemos la siguiente ecuación

$$l_{36} \equiv k_3 l_{31} - k_2 l_{23} = s_3 l_{46} - s_2 l_{56}$$

De las ecuaciones para  $l_{14}$  y  $l_{36}$ , es fácil obtener las siguientes relaciones

$$k_1 l_{12} - s_1 l_{45} = k_3 l_{31} - s_3 l_{46}$$

$$k_3 l_{31} - s_3 l_{46} = k_2 l_{23} - s_2 l_{56}$$

de las que obtenemos las siguientes igualdades

$$k_1 l_{12} - s_1 l_{45} = k_3 l_{31} - s_3 l_{46} = k_2 l_{23} - s_2 l_{56}$$

cada miembro de esta expresión, representa la misma línea; del primero, se deduce que la línea, pasa por el punto de intersección de los lados correspondientes  $\overline{P_1 P_2}$  y  $\overline{P_4 P_5}$ ; de la segunda, se sigue que ésta también pasa por el punto de intersección de  $\overline{P_1 P_3}$  y  $\overline{P_4 P_6}$  e interpretando la última expresión, llegamos a que la línea también pasa por el punto de intersección de lados  $\overline{P_2 P_3}$  y  $\overline{P_6 P_5}$ , es decir, los puntos  $P_7$ ,  $P_8$  y  $P_9$  son colineales. ■

## Líneas Independientes

A un conjunto de cuatro líneas  $l_1, l_2, l_3, y l_4$ , donde ninguna terna es concurrente, le llamaremos líneas independientes.

Sean  $l_1, l_2, l_3, y l_4$ , cuatro líneas independientes, si  $P$  y  $Q$  son los vértices de los haces  $l_1 - \lambda l_2 = 0$  y  $l_3 - \mu l_4 = 0$ , respectivamente entonces, la línea que une los puntos  $P$  y  $Q$ , pertenece a ambos haces, por tanto, existe una constante  $k$  diferente de cero, tal que

$$l_1 - \lambda l_2 = k(l_3 - \mu l_4)$$

Esto significa que, si  $l_1, l_2, l_3 y l_4$  son cuatro líneas independientes entonces, existen constantes  $m_1, m_2, m_3 y m_4$ , diferentes de cero, con la propiedad

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + m_4 l_4 = 0$$

y después de normalizar cada línea, podemos reescribir la ecuación en la forma

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 0 \tag{1.5.32}$$

## 1.6 Razón Simple Lineal

En la sección (1.2), definimos la razón simple entre puntos e hicimos ver que su valor, identifica unívocamente a los puntos de una línea (familia de puntos). A continuación aplicaremos este concepto a una familia de líneas.

Sean  $l_1 y l_2$  dos líneas no paralelas entonces, la familia de líneas que generan tiene por ecuación

$$l_1 - k l_2 = 0$$

Sea  $l$  un miembro de esta familia y  $P$  un punto de  $l$  (vea la figura 1-8), entonces se satisface la relación:

$$l_1(P) - k l_2(P) = 0$$

resolviendo para  $k$ , obtenemos

$$|k| = \frac{|l_1(P)|}{|l_2(P)|} = \left| \frac{\text{sen} \angle l_1 l}{\text{sen} \angle l_2 l} \right|$$

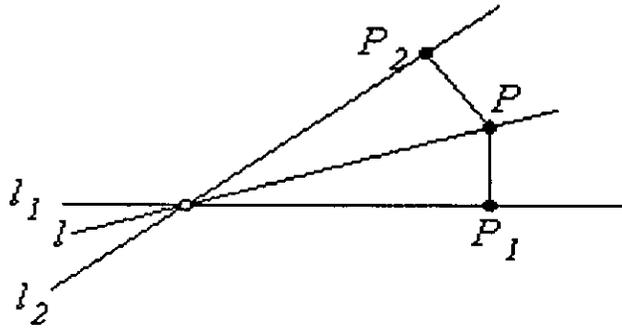


Figura 1-8:

Si el origen se encuentra fuera del sector acotado por las líneas  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l$  no pasa por el origen entonces

$$k = \frac{\text{sen} \angle l_1 l}{\text{sen} \angle l_2 l}$$

Hemos llegado a una expresión para  $k$ , que involucra al cociente de dos números; al del cociente del seno del ángulo formado por la línea  $l$  con  $l_1$  y el correspondiente al seno del ángulo entre  $l$  y  $l_2$ , por tanto, este valor, lo podemos interpretar como la razón en la que  $l$  divide a las líneas  $l_1$  y  $l_2$ .

Al igual que en el caso de los puntos, si la razón en la que  $l$  divide a  $l_1$  y  $l_2$  es  $k$  y la razón en que la línea  $m$  divide a  $l_1$  y  $l_2$  es  $-k$ , diremos que  $l$  y  $m$  son **conjugadas armónicas** con respecto a  $l_1$  y  $l_2$ ; es decir,  $l$  y  $m$  son **armónicas** si sus ecuaciones están dadas por:  $m \equiv l_1 - kl_2 = 0$  y  $l \equiv l_1 + kl_2 = 0$ .

### 1.6.1 Razón cruzada lineal

Sean  $l$  y  $m$  dos líneas del haz generado por  $l_1$  y  $l_2$ , donde  $k_1$  y  $k_2$  son las razones en que  $l$  y  $m$  dividen a las líneas base ( $l_1$  y  $l_2$ ) entonces, al cociente

$$r = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\text{sen} \angle ll_1}{\text{sen} \angle ll_2} : \frac{\text{sen} \angle ml_1}{\text{sen} \angle ml_2}$$

le llamaremos la **razón cruzada** de las líneas  $l$  y  $m$  con respecto a  $l_1$  y  $l_2$ , la que denotaremos por

$$r = (l m l_1 l_2) = (l_1 l_2 l m)$$

acabamos de definir, la razón cruzada entre dos líneas del haz y las líneas que lo generan. Veamos ahora cómo obtener la razón cruzada para cualesquiera cuatro líneas del haz.

Sean  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$ , cuatro líneas del haz generado por  $l_1$  y  $l_2$ , cuyas ecuaciones están dadas por

$$m_i = l_1 + k_i l_2 \quad ; \quad 1 \leq i \leq 4$$

Observemos que el haz generado por  $l_1$  y  $l_2$ , también lo podemos obtener al considerar a  $m_1, m_2$  como las líneas base y usando la ecuación

$$m_1 - \alpha m_2 = 0$$

Si los parámetros de las líneas  $m_3$  y  $m_4$ , con respecto a esta representación, son  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ , respectivamente, es decir

$$m_j = m_1 - \alpha_j m_2 \quad j = 3, 4 \tag{1.6.33}$$

Entonces la razón cruzada de las líneas  $m_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ ; está dada por

$$r = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Veamos cómo expresar a  $\alpha_j$ , para  $j = 3, 4$ , en términos de los parámetros  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ .

Por un lado, tenemos que la ecuación para  $m_j$ , en términos de  $l_1$  y  $l_2$  está dada por

$$m_j = l_1 - k_j l_2$$

substituyendo  $m_j$  por su ecuación con respecto a  $m_1$  y  $m_2$

$$l_1 - k_j l_2 = m_1 - \alpha_j m_2 \quad j = 3, 4$$

reemplazando  $m_1$  y  $m_2$  por su ecuaciones con respecto a  $l_1$  y  $l_2$

$$l_1 - k_j l_2 = (l_1 - k_1 l_2) - \alpha_j (l_1 - k_2 l_2) \quad j = 3, 4$$

reordenando términos del lado derecho de la igualdad

$$l_1 - k_j l_2 = (1 - \alpha_j) l_1 - (k_1 - \alpha_j k_2) l_2 \quad j = 3, 4$$

de ésta se sigue que

$$k_j = \frac{k_1 - \alpha_j k_2}{1 - \alpha_j}$$

resolviendo para  $\alpha_j$

$$\alpha_j = \frac{k_1 - k_j}{k_2 - k_j}$$

De manera que la razón cruzada de las líneas  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$  que, está dada por

$$r = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

en términos de  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  es

$$r = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_4} : \frac{k_2 - k_3}{k_2 - k_4}$$

Ya que extendimos el concepto de la razón cruzada de puntos, para que sea aplicable a las líneas, ahora, enunciaremos un Teorema que muestra la relación que guardan ambos conceptos.

### 1.6.2 Teorema de Pappus

**Teorema 1.6.10 (Teorema de Pappus)** Sean  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  cuatro líneas de un haz con vértice en  $P$  y  $P_1, P_2, P_3, P_4$  los puntos de intersección de éstas y una quinta línea  $l$  que no pertenece al haz entonces, la razón cruzada de las cuatro líneas es igual a la razón cruzada de los cuatro puntos, es decir,  $(l_1 l_2 l_3 l_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ .

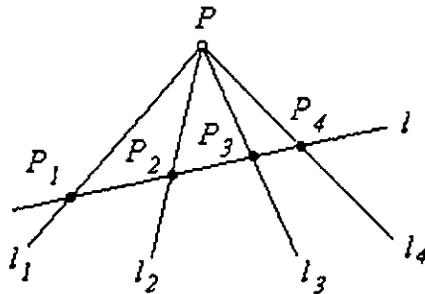


Figura 1-9: Teorema de Pappus  $(l_1 l_2 l_3 l_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ .

## Demostración

La razón cruzada de los puntos está dada por

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{P_2 P_3}} : \frac{\overline{P_1 P_4}}{\overline{P_2 P_4}}$$

Fijémonos en los triángulos  $\triangle PP_1P_3$ ,  $\triangle PP_2P_3$ ,  $\triangle PP_1P_4$  y  $\triangle PP_2P_4$ . Si tomamos como base de cada triángulo al lado que se encuentra sobre la línea  $l$ , entonces, cada cociente puede interpretarse como

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\text{área } \triangle PP_1P_3}{\text{área } \triangle PP_2P_3} : \frac{\text{área } \triangle PP_1P_4}{\text{área } \triangle PP_2P_4}$$

reescribiendo el área de cada triángulo

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{|\overline{PP_1}| |\overline{PP_3}| \text{sen } \angle l_1 l_3}{|\overline{PP_2}| |\overline{PP_3}| \text{sen } \angle l_2 l_3} : \frac{|\overline{PP_1}| |\overline{PP_4}| \text{sen } \angle l_1 l_4}{|\overline{PP_2}| |\overline{PP_4}| \text{sen } \angle l_2 l_4}$$

simplificando la expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} (P_1 P_2 P_3 P_4) &= \frac{\text{sen } \angle l_1 l_3}{\text{sen } \angle l_2 l_3} : \frac{\text{sen } \angle l_1 l_4}{\text{sen } \angle l_2 l_4} \\ &= (l_1 l_2 l_3 l_4) \end{aligned}$$



## 1.7 Proyectividad lineal

Tratemos ahora de ampliar el concepto de proyectividad puntual a haces de líneas. Con este objetivo, consideremos dos haces de líneas con vértices  $O$  y  $O'$ , respectivamente y una línea  $l$  que no pertenezca a ninguno de los dos haces. Si establecemos una proyectividad entre los puntos de la línea  $l$ , donde al punto  $P$  le corresponda el punto  $P'$  entonces, podemos basarnos en esta relación y definir la transformación del haz con vértice  $O$  en el haz con vértice  $O'$ , mediante la siguiente asociación:

A la línea que une los puntos  $O$  y  $P$ , le hacemos corresponder la línea del haz con vértice  $O'$ , que pasa por el punto  $P'$  (vea la figura 1-10).

De la definición y del Teorema de Pappus, es evidente, que la razón cruzada es invariante bajo la proyectividad de haces.

Procedamos ahora a encontrar una expresión algebraica para la proyectividad entre haces de líneas.

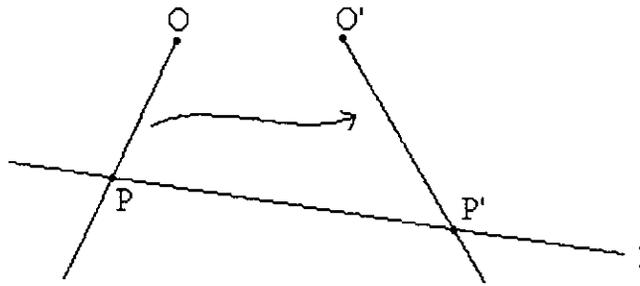


Figura 1-10: Proyectividad entre haces de líneas  $\overline{OP} \rightarrow \overline{O'P'}$  si  $P \rightarrow P'$ .

Si el haz con vértice  $O$ , está generado por las líneas  $l_1$  y  $l_2$  entonces, su ecuación la podemos expresar en la forma

$$l_1 - kl_2 = 0$$

por otro lado, si  $l'_1$  y  $l'_2$  son las líneas que generan el haz con vértice en  $O'$  entonces, su ecuación se puede escribir en la forma

$$l'_1 - k'l'_2 = 0$$

Fijémonos en cuatro líneas del haz con vértice en  $O$ :  $m_1, m_2, m_3$  y  $m$ , con parámetros  $k_1, k_2, k_3$  y  $k$  respectivamente y en sus líneas correspondientes  $m'_1, m'_2, m'_3$  y  $m'$ , del haz en  $O'$  cuyos parámetros los denotaremos por  $k'_1, k'_2, k'_3, k'$ , respectivamente. Como la proyectividad preserva la razón cruzada, se cumple la siguiente relación

$$\frac{k_1 - k_3}{k_1 - k} : \frac{k_2 - k_3}{k_2 - k} = \frac{k'_1 - k'_3}{k'_1 - k'} : \frac{k'_2 - k'_3}{k'_2 - k'}$$

la que da lugar a una expresión bilineal de la forma

$$\alpha k k' + \beta k + \gamma k' + \delta = 0$$

obtenemos así, que una proyectividad entre haces de líneas está dada por una relación bilineal.

*Como la razón cruzada de cuatro líneas se preserva bajo proyectividad, podemos transferir los resultados de la proyectividad hiperbólica, elíptica y parabólica a la proyectividad en un haz de líneas.*

## 1.8 Cuadrilátero Completo y Cuadrángulo Completo

A la figura formada por cuatro líneas independientes  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  junto con sus respectivos puntos de intersección  $P_{12} = l_1 \cap l_2, P_{13} = l_1 \cap l_3, P_{14} = l_1 \cap l_4, \dots, P_{34} = l_3 \cap l_4$  le llamaremos **cuadrilátero completo**. A las líneas, les llamaremos lados, mientras que a sus puntos de intersección les llamaremos vértices; éstos, pueden agruparse por pares "opuestos":  $P_{12}, P_{34}; P_{13}, P_{45}; P_{14}, P_{23}$  y, a las líneas que los unen  $d_1 = \overline{P_{12}P_{34}}, d_2 = \overline{P_{13}P_{45}}, d_3 = \overline{P_{14}P_{23}}$  les llamaremos diagonales, las que forman el llamado triángulo diagonal (vea la figura 1-11).

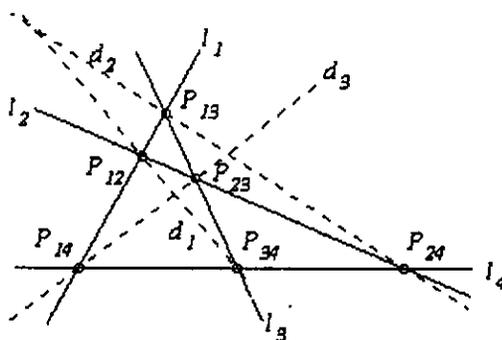


Figura 1-11: Cuadrilátero Completo

**Teorema 1.8.11** *Los lados que determinan un vértice son conjugados armónicos con respecto a las líneas que conectan a dicho vértice con los vértices del triángulo diagonal.*

### Demostración

Sean  $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0$  y  $l_4 = 0$  las ecuaciones de los lados del cuadrilátero y  $P_{12}, P_{13}, P_{14}, \dots, P_{34}$  sus vértices. Para la demostración, consideremos el vértice  $P_{12}$  y las ecuaciones de los lados que lo definen  $l_1 = 0$  y  $l_2 = 0$  de acuerdo con el teorema, debemos mostrar que la línea que une el punto  $P_{12}$  con el punto de intersección de las diagonales  $d_1$  y  $d_3$  (la diagonal  $d_1$ ) y la línea que pasa por  $P_{12}$  y el punto  $Q = d_2 \cap d_3$ , son conjugadas armónicas con respecto a las líneas  $l_1$  y  $l_2$ , vea la figura (1-12).

Por definición, las líneas que determinan los lados del cuadrilátero son independientes, entonces, de acuerdo a la ecuación (1.5.32), podemos elegir sus ecuaciones de tal forma que  $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 0$  o bien

$$l_1 + l_2 = -(l_3 + l_4)$$

escrita de esta forma, observamos que las ecuaciones  $l_1 + l_2 = 0$  y  $l_3 + l_4 = 0$  representan a la misma línea; de la primera ecuación, deducimos que ésta pasa por el punto  $P_{12}$  y, de la segunda, que ésta misma

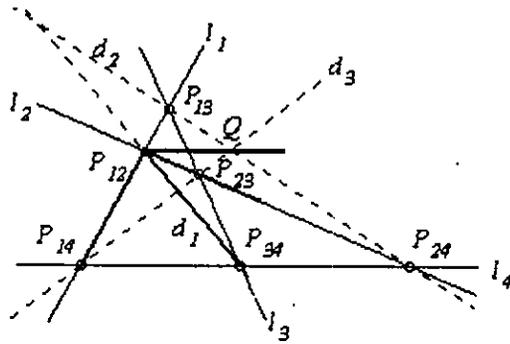


Figura 1-12:  $(l_1 l_2 d_1 \overline{P_{12}Q}) = -1$

pasa por  $P_{34}$ , por tanto, la línea debe de coincidir con la diagonal  $d_1$ .

Análogamente, se puede hacer ver que la ecuación de la diagonal  $d_2$ , está dada por  $l_1 + l_3 = 0$  o por  $l_2 + l_4 = 0$  y, que la ecuación de la diagonal  $d_3$  se puede representar por  $l_1 + l_4 = 0$  o bien, por  $l_2 + l_3 = 0$ .

Ahora, la ecuación de la línea  $l_1 - l_2 = 0$  (conjugada armónica de  $d_1$ ), la podemos expresar como

$$l_1 - l_2 = (l_1 + l_3) - (l_2 + l_3)$$

escrita así, vemos, por el lado izquierdo de la igualdad, que la línea pasa por el punto  $P_{12}$  y, de acuerdo al lado derecho, tenemos que ésta también pasa por el punto de intersección de las líneas  $l_1 + l_3 = 0$  y  $l_2 + l_3 = 0$ , que son precisamente las ecuaciones de las diagonales  $d_2$  y  $d_3$ , respectivamente, por tanto, hemos mostrado que la conjugada armónica de la diagonal  $d_1$ , con respecto a  $l_1$  y  $l_2$ , es la línea que une al vértice  $P_{12}$  con el punto  $Q$ . ■

Definamos ahora una figura análoga al cuadrilátero completo.

Un **cuadrángulo completo** está formado por cuatro puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y por las seis líneas que los unen, a las que llamaremos lados. Los lados son agrupados por pares "opuestos", los que se intersectan en tres puntos llamados diagonales. Si denotamos por  $l_{12}, l_{13}, \dots, l_{34}$  a los lados entonces, los puntos diagonales son  $P = l_{12} \cap l_{34}, Q = l_{13} \cap l_{42}, R = l_{14} \cap l_{23}$  (figura 1-13).

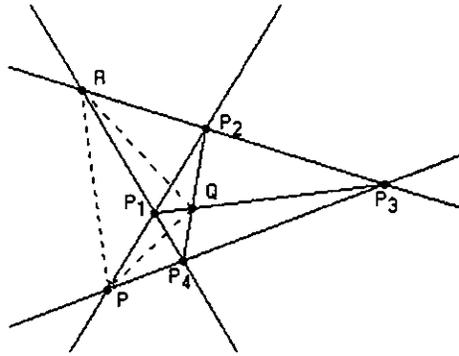


Figura 1-13: Cuadrángulo Completo

**Teorema 1.8.12** *En cada lado de un cuadrángulo completo, los dos vértices son armónicos con respecto a los puntos de intersección de dicho lado con los lados del triángulo diagonal.*

**Demostración**

Sean  $P_1, P_2, P_3, P_4$  los vértices del cuadrángulo;  $l_{12}, l_{13}, \dots, l_{34}$  sus lados y  $P, Q$  y  $R$  a los vértices del triángulo diagonal.

Sin pérdida de generalidad, elijamos el lado del cuadrángulo definido por los puntos  $P_1$  y  $P_3$ . El punto de intersección del lado  $l_{13}$  y el lado  $PQ$  del triángulo diagonal, es precisamente el punto  $Q$ . Sea  $N$  el punto de intersección de  $l_{13}$  y la línea que une a los puntos  $P$  y  $R$  (figura 1-14) entonces, debemos demostrar que los puntos  $Q$  y  $N$  son conjugados armónicos con respecto a los puntos  $P_1$  y  $P_3$ .

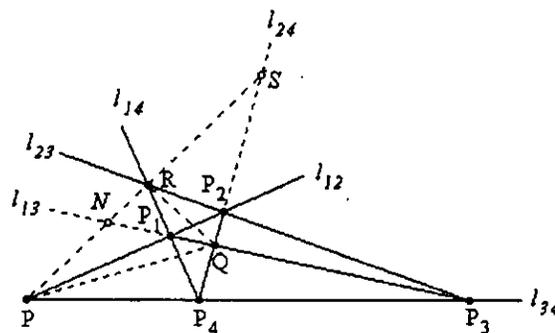


Figura 1-14:

Denotemos por  $S$  al punto de intersección de la línea  $l_{24}$  y el lado  $PR$  del triángulo diagonal, fijémonos en el haz de líneas con centro en  $P_2$  y proyectemos los puntos  $P_1, P_3, Q$  y  $N$ , de la línea  $l_{13}$ , sobre la

línea que une a los puntos  $P$  y  $N$ , estos puntos son:  $P, R, S$  y  $N$ ; por el teorema de Pappus se sigue

$$(P_1 P_3 Q N) = (P R S N) = \mu \quad (1.8.34)$$

Al proyectar los puntos  $P, R, S$  y  $N$  sobre la línea  $l_{13}$ , usando el haz con vértice en  $P_4$ , se obtienen los puntos  $P_3, P_1 Q$  y  $N$ ; aplicando nuevamente el teorema de Pappus

$$(P R S N) = (P_3 P_1 Q N) \quad (1.8.35)$$

Ahora bien, por un lado tenemos que si  $(P_1 P_3 Q N) = \mu$  entonces,  $(P_3 P_1 Q N) = \frac{1}{\mu}$ , pero, de las ecuaciones (1.8.34) y (1.8.35) se sigue que  $\mu = \frac{1}{\mu}$ , esto implica que  $\mu = \pm 1$ , pero  $\mu = 1$ , no es una solución, por lo que  $\mu = -1$  así que,  $(P_1 P_3 Q N) = -1$ ; es decir, los puntos  $Q$  y  $N$  son conjugados armónicos con respecto a los puntos  $P_1$  y  $P_3$ . ■

## 1.9 Notas y Referencias

El material que se presenta en este capítulo se consultó básicamente de los primeros dos capítulos del libro Dirk J. Struik [4].

Los conceptos de razón simple y proyectividad puntual también se pueden consultar en el segundo capítulo del libro Maravall [13].

## Capítulo 2

# Cónicas

### 2.1 Introducción

Debido a que las cónicas juegan un papel principal en este trabajo, este capítulo es central. En él, revisamos los resultados básicos relacionados con la teoría de cónicas. Algunos de los teoremas clásicos, los demostramos usando el método simbólico; uno de ellos es el Teorema de Pascal, el cual nos permite construir puntos de una cónica. Al final, hacemos énfasis en la representación de una cónica lineal y en la dualidad existente entre ésta y la cónica puntual.

### 2.2 Cónica Puntual

**Definición 2.2.13** *Al conjunto  $C$ , de puntos que satisfacen una ecuación cuadrática la llamaremos cónica puntual.*

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \} \quad (2.2.1)$$

#### 2.2.1 Cónicas degeneradas

Diremos que una cónica es degenerada, si la ecuación (2.2.1) se puede factorizar, en tal caso, existen dos posibilidades

1. Los factores  $l_1$  y  $l_2$  son diferentes:  $l_1 l_2 = 0$ ;
2. Los factores coinciden :  $l_1^2 = 0$ ;

donde  $l_i = 0$ , con  $i = 1, 2$ , es la ecuación de una línea.

De manera que una cónica es degenerada, si el lugar geométrico que representa es un par de rectas ó una recta doble.

## 2.2.2 Rectas Notables Relacionadas con una Cónica Puntual.

Empecemos por introducir una notación que será de utilidad al plantear y demostrar algunos resultados relacionados con las cónicas.

Si la ecuación de la cónica está dada por

$$C \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

reescribámosla en la forma

$$C \equiv axx + h(xy + yx) + byy + g(x + x) + f(y + y) + c = 0 \quad (2.2.2)$$

y denotemos por  $C_1$  a la ecuación que resulta al agregar de manera alternada, el subíndice 1 a las variables en  $C$  y, que significa substituir las variables  $x$  y  $y$  por las coordenadas del punto  $P_1 = (x_1, y_1)$ .

$$C_1 \equiv axx_1 + h(xy_1 + yx_1) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad (2.2.3)$$

$C_1$ , así definida, resulta ser la ecuación de una línea y, nos referiremos a ella como la línea asociada al punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  y a la cónica  $C$ .

Los números  $C_{12}$  y  $C_{11}$  se obtienen, al agregar el subíndice 2 ó 1 respectivamente, a las variables que restan en  $C_1$  y significa substituir las coordenadas del punto  $P_2$  ó  $P_1$ , de manera que

$$C_{12} \equiv ax_2x_1 + h(x_2y_1 + y_2x_1) + by_2y_1 + g(x_2 + x_1) + f(y_2 + y_1) + c \quad (2.2.4)$$

$$C_{11} \equiv ax_1x_1 + h(x_1y_1 + y_1x_1) + by_1y_1 + g(x_1 + x_1) + f(y_1 + y_1) + c \quad (2.2.5)$$

Si  $C_2$  y  $C_{21}$ , se definen de manera similar a  $C_1$  y  $C_{12}$  entonces, es fácil verificar que  $C_{12} = C_{21}$  y, por tanto, ésta se obtiene al hacer  $x = x_2$  y  $y = y_2$  en  $C_1$ , o bien  $x = x_1$  y  $y = y_1$  en  $C_2$ .

La utilidad de esta notación la podemos observar en los siguientes resultados

Para una cónica  $C$  dada por la ecuación (2.2.1), se tiene las propiedades:

1.- La cuerda con puntos extremos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  (figura 2-1) tiene por ecuación

$$C_1 + C_2 = C_{12} \quad (2.2.6)$$

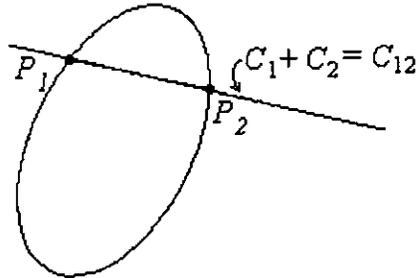


Figura 2-1: Cuerda con puntos extremos  $P_1$  y  $P_2$ .

2.- La ecuación de la cuerda con punto medio  $P_1$  (figura 2-2), está dada por

$$C_1 = C_{11} \quad (2.2.7)$$

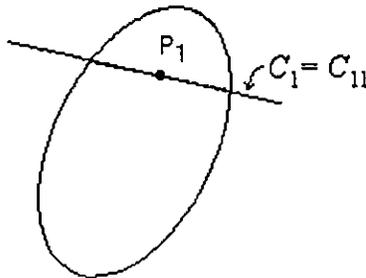


Figura 2-2: Ecuación de la cuerda con punto medio  $P_1$ .

3.- La tangente a la cónica en el punto  $P_1$  (figura 2-3) tiene por ecuación

$$C_1 = 0 \quad (2.2.8)$$

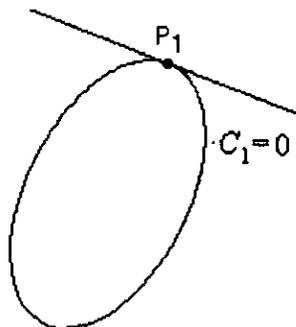


Figura 2-3: Ecuación de la tangente en  $P_1$ .

4.- La cuerda que une los puntos de contacto de la cónica con las tangentes desde el punto  $P_1$  (figura 2-4) tiene por ecuación

$$C_1 = 0 \quad (2.2.9)$$

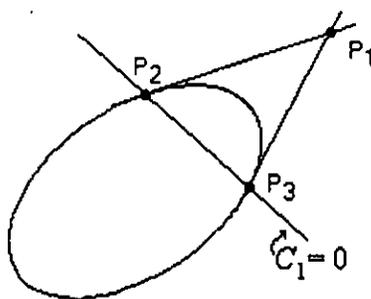


Figura 2-4: Cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes desde  $P_1$ .

5.- El lugar geométrico que describe el punto de intersección  $P_4 = (x_4, y_4)$  de las tangentes en los extremos,  $P_2 = (x_2, y_2)$  y  $P_3 = (x_3, y_3)$ , de una cuerda variable que pasa por el punto fijo  $P_1$  (figura 2-5), es la línea

$$C_1 = 0$$

a la que llamaremos *polar* del punto  $P_1$  con respecto a  $C$  y, al punto  $P_1$  le llamaremos el *polo* de la línea con respecto a  $C$ .

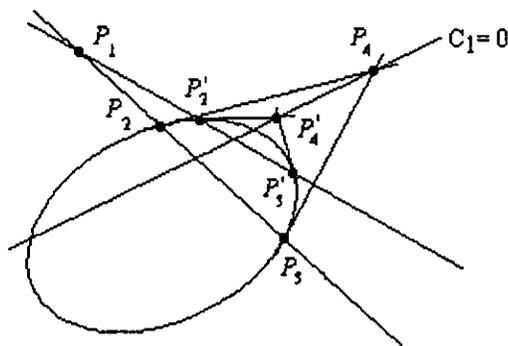


Figura 2-5: Ecuación de la polar de  $P_1$ .

### Demostración

1. Sean  $l$  y  $m$  dos líneas con  $P_1 \in l$  y  $P_2 \in m$ ; entonces, la ecuación de cualquier otra línea que no pase por el punto  $P = l \cap m$  la podemos escribir en la forma (vea la sección 1.5).

$$k_1 l + k_2 m + 1 = 0$$

De modo que si los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P$  no son colineales, entonces es posible determinar los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , de tal forma que la línea pase por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Notemos que las líneas  $l \equiv C_1 = 0$  y  $m \equiv C_2 = 0$ , satisfacen esta condición, por tanto, podemos escribir la ecuación de la cuerda  $\overline{P_1 P_2}$  en la forma

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 + 1 = 0 \tag{2.2.10}$$

como ésta pasa por  $P_1$

$$k_1 C_{11} + k_2 C_{21} + 1 = 0$$

y por  $P_2$

$$k_1 C_{12} + k_2 C_{22} + 1 = 0.$$

Dado que  $P_1$  y  $P_2$  son puntos de la cónica,  $C_{11} = C_{22} = 0$  entonces, el sistema se reduce a

$$k_2 C_{21} + 1 = 0$$

$$k_1 C_{12} + 1 = 0$$

despejando, obtenemos  $k_1 = k_2 = -1/C_{12}$ ; al substituirlos en la ecuación (2.2.10) y multiplicar por  $-C_{12}$ , se llega a la ecuación  $C_1 + C_2 = C_{12}$ , siendo ésta la ecuación de la cuerda que tiene puntos extremos  $P_1$  y  $P_2$ .

2. Si los puntos extremos de la cuerda requerida son:  $P_2$  y  $P_3$ ; por el resultado anterior, su ecuación es de la forma

$$C_2 + C_3 = C_{23} \tag{2.2.11}$$

y su punto medio:  $P_1$ , está dado por  $2P_1 = P_2 + P_3$ . Se sigue que  $C_2 + C_3 = 2C_1$ , por tanto, la ecuación de la cuerda toma la forma

$$2C_1 = C_{23}.$$

Para determinar el valor de la constante  $C_{23}$ , usemos el hecho de que la cuerda pasa por el punto  $P_1$ , por tanto,  $2C_{11} = C_{23}$ , de esta forma obtenemos la ecuación de la cuerda cuyo punto medio es  $P_1$  en la forma

$$C_1 = C_{11}$$

3. La tangente a la cónica en el punto  $P_1$ , la podemos ver como una cuerda cuyos puntos extremos coinciden con  $P_1$  entonces, su ecuación se obtiene al reemplazar el subíndice 2 por 1 en la ecuación (2.2.6). Esta substitución nos da la ecuación de la tangente en la forma

$$2C_1 = C_{11}$$

pero como  $P_1$  es un punto de la cónica,  $C_{11} = 0$  y, la ecuación se transforma en  $C_1 = 0$ .

Para reescribir la ecuación de la tangente, reagrupamos los términos en  $x$  y en  $y$ , dividimos por el término independiente ( $gx_1 + fy_1 + c$ ). De esta forma se llega a la expresión

$$C_1 = \left( \frac{ax_1 + hy_1 + g}{gx_1 + fy_1 + c} \right) x + \left( \frac{hx_1 + by_1 + f}{gx_1 + fy_1 + c} \right) y + 1 = 0 \quad (2.2.12)$$

4. Las ecuaciones de las tangentes a la cónica en los puntos  $P_2$  y  $P_3$ , están dadas por  $C_2 = 0$  y  $C_3 = 0$  respectivamente. Ahora bien, como  $P_1$  es su punto de intersección entonces

$$C_{21} = C_{12} = 0$$

$$C_{31} = C_{13} = 0.$$

Interpretando estas igualdades, tenemos que la recta  $C_1 = 0$  pasa por los puntos  $P_2$  y  $P_3$ . Por lo tanto, ésta es precisamente la ecuación de la cuerda  $\overline{P_2P_3}$ .

5. Sea  $l$  una cuerda de  $C$  que pasa por  $P_1$  y tiene puntos extremos  $P_2$  y  $P_3$ .

Si  $P_4$  es el punto de intersección de las tangentes a  $C$  en  $P_2$  y  $P_3$  entonces, la ecuación de  $l$  es  $C_4 = 0$ . Dado que  $l$  pasa por  $P_1$ ,  $C_{41} = C_{14} = 0$ , indicándonos que el punto  $P_4$  es un punto de la recta  $C_1 = 0$  y, como esto no depende de la elección de  $l$ , podemos deducir que  $C_1 = 0$  es la ecuación de la polar del punto  $P_1$ .

■

**Corolario 2.2.14** *Si la polar de  $P_1$  con respecto a  $C$  pasa por el punto  $P_2$  entonces, la polar de  $P_2$  pasa por  $P_1$ .*

#### Demostración

La polar de  $P_1$  tiene por ecuación  $C_1 = 0$ , como  $P_2$  es un punto de esta línea, se tiene que  $C_{12} = 0$ , o bien,  $C_{21} = 0$ , lo que indica que el punto  $P_1$  pertenece a la recta  $C_2 = 0$ , es decir, la polar de  $P_2$  pasa por el punto  $P_1$ . ■

**Corolario 2.2.15** Si el polo de la línea  $L'$  con respecto a  $C$  es un punto de  $L''$  entonces, el polo de  $L''$  es un punto de  $L'$ .

**Demostración**

Sean  $P_1$  y  $P_2$  los polos de  $L'$  y  $L''$  respectivamente entonces,  $L' \equiv C_1 = 0$  y  $L'' \equiv C_2 = 0$ . Como  $P_1$  es un punto de  $L''$  se tiene que  $C_{21} = 0$ , o equivalentemente,  $C_{12} = 0$ , lo cual indica que el punto  $P_2$  (el polo de  $L''$ ) es un punto de  $L'$ . ■

**Corolario 2.2.16** Las polares de los puntos de una línea  $l$  concurren en el polo de  $l$ , y los polos de las líneas del haz con vértice  $P$  son puntos de la polar de  $P$  (figura 2-6).

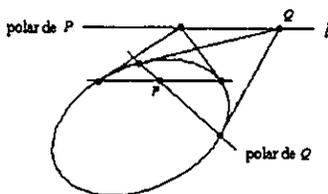


Figura 2-6: Relación entre polo y polar: las polares de los puntos de  $l$  pasan por  $P$  (polo de  $l$ ).

**Demostración**

Sea  $P$  el polo  $l$  y  $Q$  un punto de ésta; entonces, por el corolario 2.2.14, la polar de  $Q$  pasa por el punto  $P$ . Como  $Q$  es un punto arbitrario de  $l$ , se deduce que la polar de un punto de  $l$ , pasa por el polo de  $l$ .

Sea  $l'$  una línea del haz con centro en  $P$ . Como  $l'$  es una línea que pasa por el polo de  $l$ , entonces, aplicando el corolario 2.2.15, tenemos que el polo de  $l'$  es un punto de  $l$ , es decir, el polo de cualquier línea que pase por  $P$  es un punto que pertenece a la polar de  $P$ . ■

**Corolario 2.2.17** Sea  $l$  la polar del punto  $P_1$  con respecto a  $C$  y  $m$  una cuerda que pasa por el punto  $P_1$ , con puntos extremos  $P_2$  y  $P_3$ . Si  $P_4$  es el punto de intersección de  $l$  y la cuerda  $\overline{P_2P_3}$  entonces, los puntos  $P_2$  y  $P_3$  son conjugados armónicos con respecto a los puntos  $P_1$  y  $P_4$  (figura 2-7), es decir,

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_1P_3}} = -\frac{\overline{P_4P_2}}{\overline{P_4P_3}}$$

**Demostración**

Si  $\lambda$  es la razón en la que el punto  $P_1$  divide al segmento  $\overline{P_2P_3}$ , entonces  $\overline{P_1P_2} = \lambda \overline{P_1P_3}$ , o bien,  $\lambda(P_1 - P_3) = P_1 - P_2$ , de aquí, es fácil ver que la ecuación de la polar de  $P_1$  se puede reescribir como

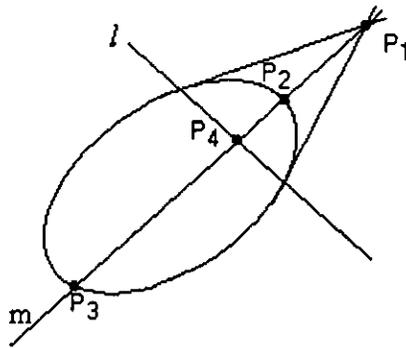


Figura 2-7:

$(\lambda - 1)C_1 = \lambda C_3 - C_2 = 0$ . Usando esta ecuación, podemos obtener la razón  $\lambda'$ , en la que el punto  $P_4$  divide al segmento  $\overline{P_2P_3}$  de la siguiente manera (vea el siguiente lema).

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{(\lambda C_3 - C_2)(P_2)}{(\lambda C_3 - C_2)(P_3)} \\ &= \frac{\lambda C_{32} - C_{22}}{\lambda C_{33} - C_{23}} \\ &= -\lambda \end{aligned}$$

por tanto  $(P_2 P_3 P_1 P_4) = -1$ . ■

**Lema 2.2.18** Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos que están separados por una línea  $\mathcal{L} \equiv lx + my + n = 0$ , y el punto de intersección del segmento  $\overline{P_1P_2}$  y  $\mathcal{L}$  es  $P_3$ , entonces la razón  $\lambda$  en la que  $P_3$  divide al segmento  $\overline{P_1P_2}$ , está dada por

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(P_1)}{\mathcal{L}(P_2)}$$

#### Demostración

Sabemos que  $\lambda = \frac{\overline{P_3P_1}}{\overline{P_3P_2}}$ , de donde se sigue que

$$P_3 = \frac{P_1 - \lambda P_2}{1 - \lambda}$$

evaluando a  $\mathcal{L}$  en  $P_3$

$$\mathcal{L}(P_3) = l \left( \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \right) + m \left( \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \right) + n = 0$$

después de multiplicar por  $1 - \lambda$  y factorizar  $\lambda$

$$lx_1 + my_1 + n - \lambda(lx_2 + my_2 + n) = 0$$

finalmente al despejar a  $\lambda$ , se llega a la expresión deseada

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}(P_1)}{\mathcal{L}(P_2)}$$



### 2.2.3 Cónica puntual vista como una proyectividad entre dos haces de líneas

Consideremos dos haces de líneas con vértices en  $A$  y  $B$  respectivamente, cuyas ecuaciones están dadas por

$$l_1 - \lambda l_2 = 0 \tag{2.2.13}$$

$$l_3 - \mu l_4 = 0 \tag{2.2.14}$$

donde  $l_i = A_i x + B_i y + C_i = 0$ .

Una proyectividad entre el haz con centro en  $A$  y el haz con centro en  $B$ , está dada por la relación

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 \tag{2.2.15}$$

Para obtener el lugar geométrico del punto de intersección de las líneas correspondientes, eliminamos a  $\lambda$  y  $\mu$  de las ecuaciones (2.2.13), (2.2.14) y (2.2.15), obteniendo así, la ecuación cuadrática.

$$al_1l_3 + bl_1l_4 + cl_2l_3 + dl_2l_4 = 0 \tag{2.2.16}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que describen los puntos de intersección de las líneas correspondientes de dos haces en proyectividad, es una **cónica puntual** (figura 2-8).

## 2.3 Familia de Cónicas

En la sección 1.5 vimos que una combinación lineal de dos rectas no paralelas  $l_1$  y  $l_2$ , representa una línea que pasa por el punto  $P = l_1 \cap l_2$ . De la misma forma, si  $C = 0$  y  $C' = 0$  son las ecuaciones de dos cónicas entonces, la combinación lineal

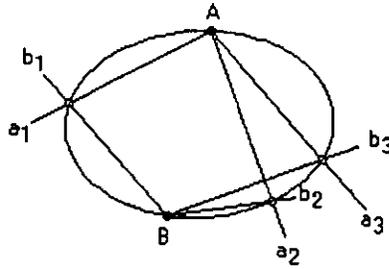


Figura 2-8: Dos haces de líneas en proyectividad definen una cónica puntual.

$$k_1C + k_2C' = 0 \quad (2.3.17)$$

representa, para cada par de valores  $(k_1, k_2)$ , una cónica que pasa por los puntos de intersección de  $C$  y  $C'$ .

El teorema de Bezout nos indica cuál es el número máximo de puntos de intersección de dos curvas planas, para una demostración de este teorema vea [9]. Si las curvas a las que nos referimos son cónicas, éstas tienen a lo más cuatro puntos diferentes en común.

Supongamos que  $A, B, C$  y  $D$  son los puntos de intersección de  $C$  y  $C'$ . A continuación enunciamos los diferentes casos que se pueden obtener

1. Todos los puntos son diferentes (figura 2-13).

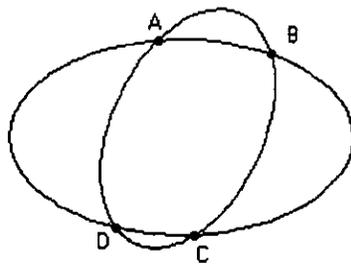


Figura 2-13: Cónicas que se intersectan en cuatro puntos diferentes.

2. Los puntos  $A, B$  coinciden, mientras que  $C, D$  son diferentes entre sí y diferentes de  $A$ . En este caso, se dice que las cónicas tienen un punto de contacto simple (figura 2-14).

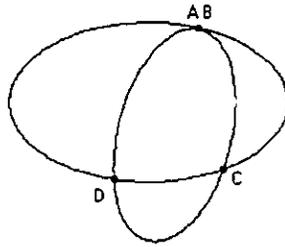


Figura 2-14: Cónicas con un punto de contacto en  $A$ .

3. Los puntos  $A, B$  coinciden y  $C, D$ , también coinciden. Se dice entonces que las cónicas tienen dos puntos de contacto (figura 2-15).

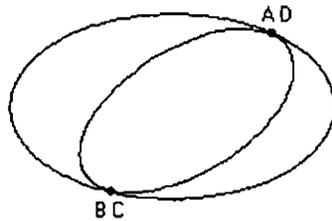


Figura 2-15: Cónicas con dos puntos de contacto simple en  $A$  y  $B$ .

4. Los puntos  $A, B, C$  coinciden,  $D$  es cualquier otro punto diferente de  $A$ . Las cónicas tienen un punto triple de contacto en  $A$  (figura 2-16).

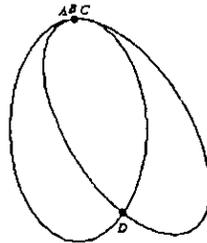


Figura 2-16: Cónicas con un punto triple de contacto en  $A$ .

5. Los cuatro puntos coinciden. En este caso, se dice que las cónicas tienen un punto cuádruple de contacto en  $A$  (figura 2-17).

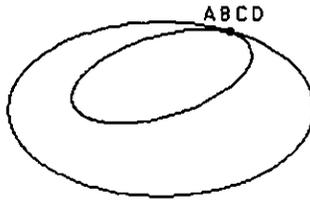


Figura 2-17: Cónicas con un punto cuádruple de contacto en  $A$ .

Al igual que en el caso de la familia de rectas, la ecuación de la familia de cónicas, se puede expresar usando un parámetro; esto se logra al dividir la ecuación (2.3.17) por  $k_1$  y renombrar al cociente  $k_2/k_1$  como  $-k$ . Así, la ecuación de la familia de cónicas la podemos llevar a la forma

$$C = kC' \tag{2.3.18}$$

### 2.3.1 Casos Especiales

A continuación mostramos las posibles configuraciones que podemos obtener cuando en la ecuación (2.3.18) una o ambas cónicas son degeneradas.

1. La ecuación  $C = kl_1l_2$ , es una cónica que pasa por los puntos de intersección de las líneas  $l_1$ ,  $l_2$  y la cónica  $C$  (figura 2-18).

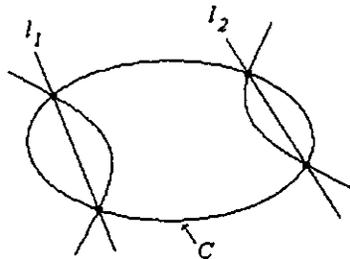


Figura 2-18: Una combinación lineal de la cónica  $C$  y la cónica  $l_1l_2 = 0$ .

2. Al hacer tender la recta  $l_1$  a  $l_2$ , las cuerdas de la cónica  $C = 0$ , definidas por los puntos de intersección de  $l_1, l_2$  y  $C$ , tienden a ser rectas tangentes, por lo tanto, al elegir  $l_2 = l_1$ , los puntos de intersección de  $C$  y  $l_1$ , se convierten en puntos de contacto de  $C = kl_1^2$  y  $C$  (figura 2-19).

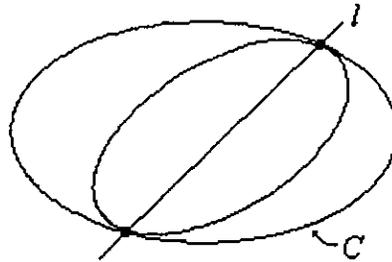


Figura 2-19: Las Cónicas  $C = kl_1^2$  y  $C$  tienen dos puntos de contacto.

3. Si  $l_1$  es una recta tangente a la cónica  $C$ , entonces las cónicas  $C = kl_1l_2$  y  $C$  tienen un punto de contacto, que coincide con el punto de tangencia de  $l_1$  y  $C$  (figura 2-20).

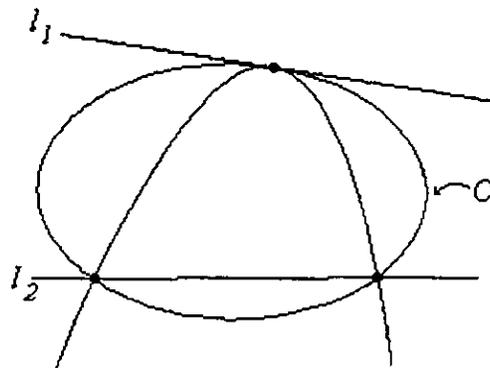


Figura 2-20:  $C = kl_1l_2$  y  $C = 0$  tienen un punto de contacto simple en el punto de tangencia de  $l_1$  y  $C = 0$ .

4. Sea  $t$  una tangente a  $C$ , y  $l$  una segunda recta que pasa por el punto de contacto de  $t$  y  $C$  entonces, las cónicas  $C = klt$  y  $C$ , tienen un punto triple de contacto, que coincide con el punto de intersección de  $l$  y  $t$  (figura 2-21).

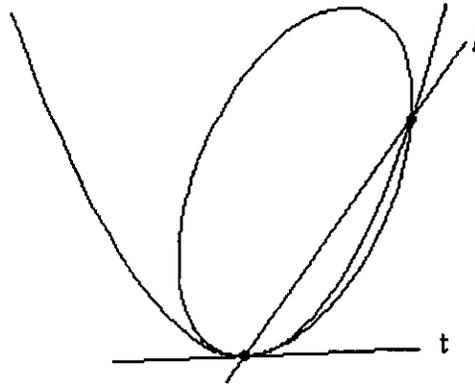


Figura 2-21:  $C = klt$  y  $C = 0$  tienen un punto triple de contacto que coincide con el punto de tangencia de  $t$  y  $C$ .

5. Si  $t$  es una tangente a  $C$  entonces, las cónicas  $C = kt^2$  y  $C$ , tienen un punto cuádruple de contacto, que coincide con el punto de tangencia de  $t$  y  $C = 0$  (figura 2-22).

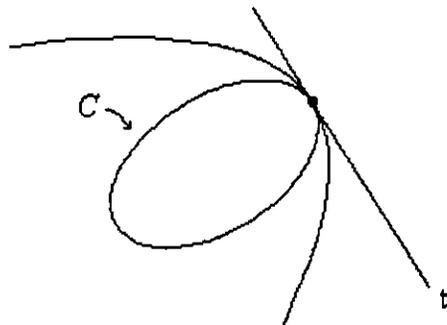


Figura 2-22: Las cónicas  $C = kt^2$  y  $C = 0$  tienen un punto cuádruple de contacto.

6. Sea  $C$  una cónica degenerada, es decir, si es de la forma  $C \equiv l_3 l_4$  entonces, la cónica que tiene por ecuación  $C = kl_1 l_2$ , pasa por los puntos de intersección de las líneas  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  (figura 2-23).

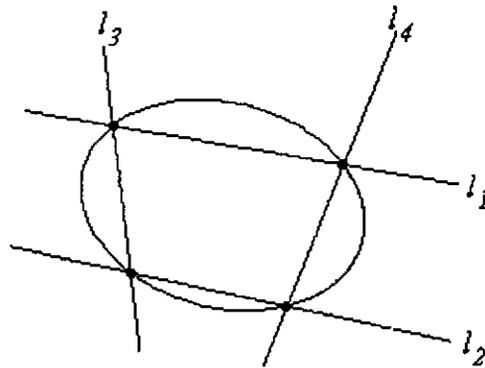


Figura 2-23: Cónica generada por un par de cónicas degeneradas.

7. Si en el caso anterior, hacemos coincidir la recta  $l_1$  con la recta  $l_2$  entonces la cónica dada por ecuación  $l^2 = kl_3 l_4$  es una cónica tangente a las líneas  $l_3, l_4$ , en los puntos de intersección de  $l$  con  $l_3, l_4$  (vea la figura 2-24).

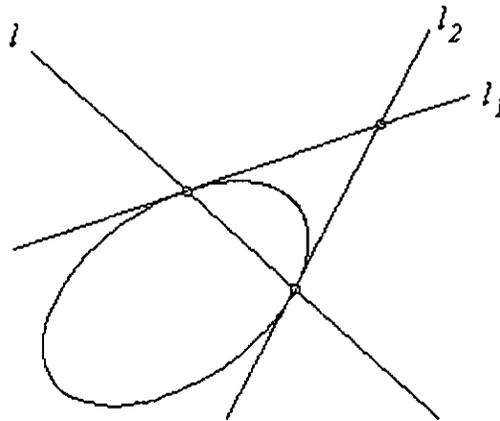


Figura 2-24:

### 2.3.2 Familia de cónicas a través de cuatro puntos

Hemos visto que dadas cuatro líneas independientes  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$ , la ecuación  $l_1 l_2 = k l_3 l_4$ , corresponde a la familia de cónicas que pasan por sus puntos de intersección  $P_{13} = l_1 \cap l_3$ ,  $P_{14} = l_1 \cap l_4$ ,  $P_{23} = l_2 \cap l_3$  y  $P_{24} = l_2 \cap l_4$ . Ahora tratemos de resolver el problema inverso, es decir, si  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son cuatro puntos diferentes, ¿cómo determinamos la familia de cónicas que tienen en común a estos puntos?

El resultado anterior nos sugiere construir cuatro líneas, de manera que sus puntos de intersección coincidan con los puntos dados (figura 2-25). De esta forma, sea  $l_{12}$  la línea que une los puntos  $P_1, P_2$ ,  $l_{34}$  la línea que une el punto  $P_3$  con  $P_4$ ,  $l_{24}$  la línea que une a  $P_2$  con  $P_4$  y  $l_{13}$  la línea que une a los puntos  $P_1, P_3$ .

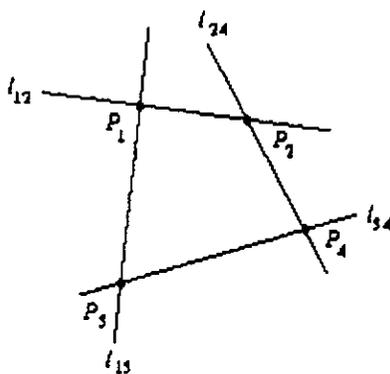


Figura 2-25: Construcción de la familia de cónicas que pasan por  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  usando cónicas degeneradas.

entonces la ecuación

$$l_{12} l_{34} = k l_{23} l_{13}$$

es precisamente la ecuación de la familia de cónicas que tienen en común los puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .

**Lema 2.3.19** Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos distintos de una cónica no degenerada  $C$ ;  $P_3, P_4, P_5$  y  $P_6$  otros cuatro puntos diferentes de  $C$  entonces  $(l_{13} l_{14} l_{15} l_{16}) = (l_{23} l_{24} l_{25} l_{26})$ .

#### Demostración

El haz con vértice en  $P_1$  lo podemos generar usando como base a las líneas  $l_{13}$  y  $l_{14}$  así, su ecuación es de la forma  $\lambda l_{13} + \beta l_{14} = 0$ ; análogamente, la ecuación del haz con vértice en  $P_2$  la podemos expresar

en términos de las líneas  $l_{23}$  y  $l_{24}$  en la forma  $\lambda' l_{23} + \beta' l_{24} = 0$ . Como  $l_{15}$  es una línea del haz en  $P_1$  y  $l_{25}$  pertenece al haz con vértice en  $P_2$ , sus ecuaciones las podemos escribir como

$$l_{15} \equiv l_{13} - l_{14} = 0$$

$$l_{25} \equiv l_{23} - l_{24} = 0$$

o bien

$$l_{13}(P) = l_{14}(P) \text{ para } P \in l_{15}$$

$$l_{23}(P) = l_{24}(P) \text{ para } P \in l_{25}$$

Usando las cónicas degeneradas  $C_1 \equiv l_{13}l_{24} = 0$  y  $C_2 \equiv l_{14}l_{23} = 0$ , podemos obtener la ecuación de la familia de cónicas que pasan por  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ ; como la cónica  $C$  pertenece a esta familia, existen constantes  $s$  y  $t$  tales que

$$C \equiv sl_{13}l_{24} + tl_{14}l_{23} = 0$$

Ahora bien, dado que  $P_5$  es un punto de la cónica y de las líneas  $l_{15}$  y  $l_{25}$ , la expresión para  $C(P_5)$  es de la forma

$$sl_{14}(P_5)l_{24}(P_5) + tl_{14}(P_5)l_{24}(P_5) = 0$$

de esta se sigue que  $s = -t$  y, por lo tanto, la ecuación de la cónica la podemos reescribir como

$$l_{13}l_{24} = l_{14}l_{23}.$$

Dado que  $P_5$  y  $P_6$  son puntos de  $C$

$$l_{13}(P_5)l_{24}(P_5) = l_{14}(P_5)l_{23}(P_5)$$

$$l_{13}(P_6)l_{24}(P_6) = l_{14}(P_6)l_{23}(P_6)$$

recordemos que la razón en la que una línea  $l$  divide a las líneas  $l_1$  y  $l_2$  está dada por  $(l_1 \ l_2 \ l) = \frac{l_1(P)}{l_2(P)}$ ,

donde  $P$  es un punto de  $l$ . De manera que las igualdades anteriores nos indican que

$$\begin{aligned}(l_{13} l_{14} l_{15}) &= (l_{23} l_{24} l_{25}) = 1 \\(l_{13} l_{14} l_{16}) &= (l_{23} l_{24} l_{26}) = \frac{l_{13}(P_6)}{l_{14}(P_6)}\end{aligned}$$

por lo tanto  $(l_{13} l_{14} l_{15} l_{16}) = (l_{23} l_{24} l_{25} l_{26})$  ■

**Corolario 2.3.20** *Dados cuatro puntos de una cónica no degenerada  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , podemos definir la razón cruzada  $(P_1 P_2 P_3 P_4)$  como la razón de las líneas  $l_{51}, l_{52}, l_{53}, l_{54}$  donde  $P_5$  es cualquier otro punto de la cónica.*

## 2.4 Teorema de Pascal

**Teorema 2.4.21 (Teorema de Pascal)** *Sean  $P_1, \dots, P_6$  los vértices de un hexágono inscrito en una cónica; entonces, los tres puntos,  $I_1, I_2, I_3$  de intersección de los tres pares de rectas  $l_{12}$  y  $l_{45}$ ;  $l_{23}$  y  $l_{56}$ ;  $l_{34}$  y  $l_{61}$  son colineales (figura 2-26).*

*A la línea que pasa por los puntos  $I_1, I_2, I_3$ , se le conoce como línea de Pascal.*

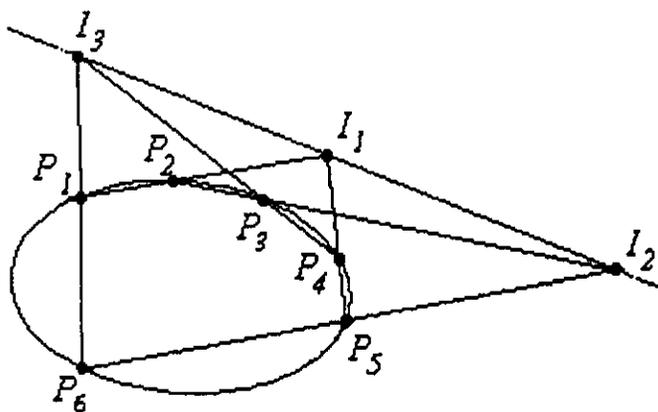


Figura 2-26: Teorema de Pascal: Si  $P_1, \dots, P_6$  pertenecen a una cónica entonces  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son colineales.

Primera demostración

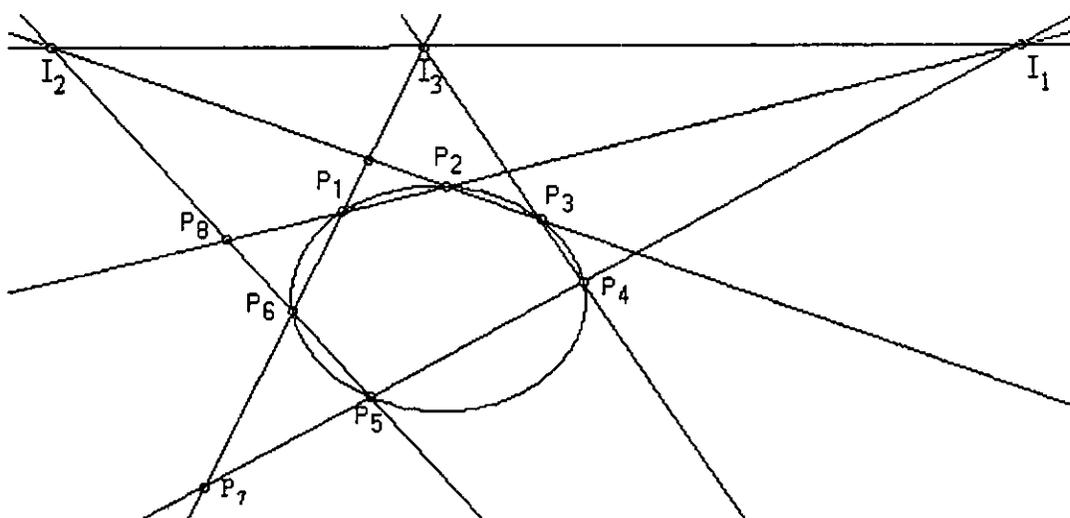


Figura 2-27:

Denotemos por  $P_7$  al punto de intersección de las líneas  $l_{16}$  y  $l_{45}$  (vea la figura 2-27) y usemos el punto  $P_4$  como centro de proyectividad, para proyectar los puntos  $P_1$ ,  $P_7$ ,  $I_3$  y  $P_6$ , de la línea  $l_{61}$  en la cónica; aplicando del lema 2.3.19 obtenemos

$$(P_1 P_7 I_3 P_6) = (P_1 P_5 P_3 P_6)$$

usemos ahora al punto  $P_2$  como centro y proyectemos los puntos  $P_1$ ,  $P_5$ ,  $P_3$  y  $P_6$  en la línea  $l_{56}$  de esta forma obtenemos

$$(P_1 P_5 P_3 P_6) = (P_8 P_5 I_2 P_6) \text{ donde } P_8 = l_{12} \cap l_{56}$$

fijémonos ahora en la cuarteta de líneas del haz con vértice en  $I_1$  que pasan por  $P_1$ ,  $P_7$ ,  $I_3$  y  $P_6$ , y en la segunda cuarteta, del mismo haz, determinada por los puntos  $P_8$ ,  $P_5$ ,  $I_2$  y  $P_6$ , ambas satisfacen la relación

$$(l_{I_1,1} l_{I_1,7} l_{I_1,3} l_{I_1,6}) = (l_{I_1,8} l_{I_1,5} l_{I_1,2} l_{I_1,6})$$

pero  $l_{I_1,1} = l_{I_1,8}$  y  $l_{I_1,7} = l_{I_1,5}$ , por lo tanto  $l_{I_1,3} = l_{I_1,2}$ , y con esto queda demostrado el teorema.

### Segunda demostración

Como la cónica forma parte de la familia de cónicas que comparten los puntos  $P_1, P_2, P_4$  y  $P_5$  (figura 2-28) entonces, existe un valor de  $\lambda$ , para el cual la ecuación de  $C$  la podemos escribir como

$$C \equiv l_{12}l_{45} - \lambda l_{25}l_{14} = 0 \quad (2.4.19)$$

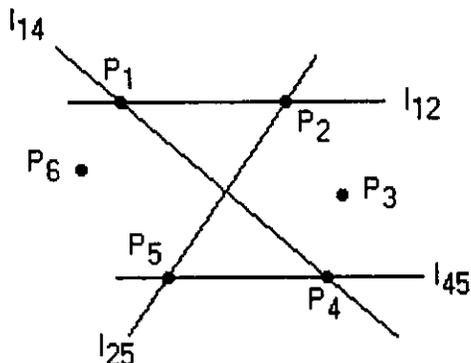


Figura 2-28:  $l_{12}l_{45} = 0$  y  $l_{25}l_{14} = 0$  generan la cónica que pasa por  $P_1, \dots, P_6$ .

Ahora, encontremos las ecuaciones de los lados  $l_{23}, l_{34}, l_{56}$  y  $l_{61}$ , en términos de las ecuaciones de las líneas  $l_{14}, l_{25}$  y de los lados  $l_{12}, l_{25}$ .

La línea  $l_{23}$  pertenece al haz con vértice en  $P_2$ ; usando la línea  $l_{25}$  y el lado  $l_{12}$  como base entonces, existe  $\gamma$  tal que la ecuación de la línea  $l_{23}$  la podemos escribir como:

$$\gamma l_{12} - \lambda l_{25} = 0 \quad (2.4.20)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro que determina a la cónica en la ecuación (2.4.19).

Si elegimos a  $l_{45}$  y  $l_{14}$  como las líneas que generan el haz con vértice  $P_4$  entonces la ecuación del  $l_{43}$  está dada por

$$l_{45} - \gamma l_{14} = 0$$

Para hacer ver esto, evaluemos las ecuaciones de la cónica y del lado  $l_{23}$  en  $P_3$ . Para la línea  $l_{23}$

$$l_{23}(P_3) = \gamma l_{12}(P_3) - \lambda l_{25}(P_3) = 0$$

para la cónica

$$C(P_3) = l_{12}(P_3)l_{45}(P_3) - \lambda l_{25}(P_3)l_{14}(P_3) = 0$$

De la primera, se sigue que  $\lambda l_{25}(P_3) = \gamma l_{12}(P_3)$  y después de substituir  $\lambda l_{25}(P_3)$  en  $C(P_3)$  obtenemos

$$l_{12}(P_3)l_{45}(P_3) - \gamma l_{12}(P_3)l_{14}(P_3) = 0$$

factorizando  $l_{12}(P_3)$

$$l_{12}(P_3)(l_{45}(P_3) - \gamma l_{14}(P_3)) = 0$$

De esta última, tenemos que si  $l_{12}(P_3) = 0$ , llegaríamos a que los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son colineales, por lo que la única posibilidad es que

$$l_{45}(P_3) - \gamma l_{14}(P_3) = 0$$

Esta expresión nos indica que la línea  $l_{45} - \gamma l_{14} = 0$ , que pertenece al haz con vértice en  $P_4$ , pasa por el punto  $P_3$ , por tanto, es la ecuación de la línea  $l_{43}$

$$l_{43} \equiv l_{45} - \gamma l_{14} = 0$$

Siguiendo un razonamiento similar, obtenemos las ecuaciones de los lados  $l_{56}$  y  $l_{61}$ .

$$l_{56} \equiv \gamma' l_{45} - \lambda l_{25} = 0$$

$$l_{61} \equiv l_{12} - \gamma' l_{14} = 0$$

Con esto, tenemos expresadas las ecuaciones de cada lado del hexágono. Veamos ahora cómo usarlas para demostrar que los puntos  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$  son colineales.

Primero determinemos la ecuación de la línea que pasa por los puntos  $I_1$  e  $I_2$ .

Consideremos los haces de líneas con vértice en  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Como  $I_1$  es el punto de intersección de los lados  $l_{12}$  y  $l_{45}$  entonces, la ecuación del haz con vértice  $I_1$ , la podemos expresar en la forma

$$\alpha l_{12} - \beta l_{45} = 0;$$

análogamente, el haz con centro en  $I_2$  lo podemos generar usando las ecuaciones de los lados  $l_{23}$  y  $l_{56}$ , por lo que su ecuación se puede escribir

$$\widehat{\alpha}l_{23} - \widehat{\beta}l_{56} = 0$$

Ahora bien, como la línea que pasa por  $I_1$  e  $I_2$ , pertenece a ambos haces,

$$l_{I_1 I_2} \equiv \alpha l_{12} - \beta l_{45} = \widehat{\alpha}l_{23} - \widehat{\beta}l_{56} = 0.$$

Veamos cómo determinar los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$ .

Después de substituir las ecuaciones de  $l_{23}$  y  $l_{25}$  en la ecuación correspondiente del haz con vértice en  $I_2$  y reordenar términos, se llega a la expresión

$$\widehat{\alpha}\gamma l_{12} - \widehat{\beta}\gamma' l_{45} + \lambda(\widehat{\beta} - \widehat{\alpha})l_{25} = 0$$

Por lo que la ecuación de la línea  $l_{I_1 I_2}$  debe satisfacer

$$\alpha l_{12} - \beta l_{45} = \widehat{\alpha}\gamma l_{12} - \widehat{\beta}\gamma' l_{45} + \lambda(\widehat{\beta} - \widehat{\alpha})l_{25}$$

la que podemos reescribir en la forma

$$(\alpha - \widehat{\alpha}\gamma)l_{12} + (\widehat{\beta}\gamma' - \beta)l_{45} + \lambda(\widehat{\alpha} - \widehat{\beta})l_{25} = 0.$$

Para que esta relación sea válida, los coeficientes deben ser cero, esto es porque las líneas  $l_{12}$ ,  $l_{25}$ ,  $l_{45}$  no son concurrentes, de esta condición, se deduce que  $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$ ,  $\alpha = \widehat{\alpha}\gamma$  y  $\beta = \widehat{\beta}\gamma'$ , por tanto, la ecuación de la línea que une el punto  $I_1$  con  $I_2$  está dada por

$$l_{I_1 I_2} \equiv \gamma l_{12} - \gamma' l_{45} = 0$$

Pero ésta misma la podemos reescribir en la forma

$$\begin{aligned} \gamma(l_{12} - \gamma' l_{14}) - \gamma'(l_{45} - \gamma l_{14}) &= 0 \\ \gamma l_{61} - \gamma' l_{43} &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la línea que pasa por  $I_1$  e  $I_2$ , también pasa por el punto de intersección de los lados  $l_{61}$  y  $l_{43}$ ,

pero este punto es precisamente  $I_3$ ; es decir, los puntos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son colineales.

### Tercera demostración

Dados los vértices  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  y  $P_6$  del hexágono inscrito en la cónica, consideremos a la familia de cónicas que pasan por los puntos  $P_1, P_2, P_5$  y  $P_6$ , y a la familia de cónicas que pasan por los puntos  $P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$ , cuyas ecuaciones se pueden expresar como

$$l_{12}l_{56} + \lambda l_{61}l_{25} = 0$$

$$l_{23}l_{45} + \mu l_{34}l_{25} = 0$$

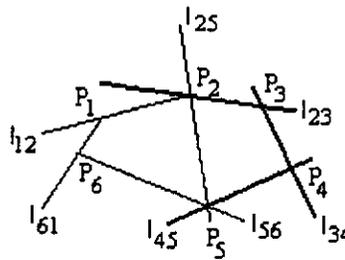


Figura 2-29: Configuraciones para describir una familia de cónicas a la que pertenece la cónica que pasa por los seis puntos dados.

Como la cónica pertenece a ambas familias, entonces, existen valores de  $\lambda$  y  $\mu$ , que bajo una normalización apropiada se satisface

$$C \equiv l_{12}l_{56} + \lambda l_{61}l_{25} = l_{23}l_{45} + \mu l_{34}l_{25}.$$

O bien

$$l_{12}l_{56} - l_{23}l_{45} = l_{25}(\mu l_{34} - \lambda l_{16}).$$

Esta expresión nos indica que la cónica que tiene por ecuación  $l_{12}l_{56} - l_{23}l_{45} = 0$  es un par de rectas, donde una de ellas es la línea  $l_{25}$ .

Veamos ahora qué podemos decir de la línea cuya ecuación es

$$\mu l_{34} - \lambda l_{16} = 0$$

Primero observemos que esta línea pasa por el punto de intersección de  $l_{34}$  y  $l_{16}$ , es decir, el punto  $I_3$  pertenece a ésta. Para obtener más información, fijémonos ahora en la expresión

$$l_{12}l_{56} - l_{23}l_{45} = 0$$

La línea  $l_{25}$ , está determinada por los puntos de intersección de las rectas  $l_{12}, l_{23}$  y  $l_{56}, l_{45}$ , por lo que la segunda línea que forma parte de la cónica degenerada  $l_{12}l_{56} - l_{23}l_{45} = 0$  (que tiene por ecuación  $\mu l_{34} - \lambda l_{16} = 0$ ) debe pasar por los puntos de intersección de las líneas  $l_{12}, l_{45}$  y  $l_{23}, l_{56}$ , pero  $l_{12}$  y  $l_{45}$  son dos lados opuestos del hexágono, por tanto, la línea pasa por el punto  $I_1$ , análogamente,  $l_{23}$  y  $l_{56}$  son otro par de lados opuestos cuyo punto de intersección es  $I_2$ , entonces, la línea que tiene por ecuación  $\mu l_{34} - \lambda l_{16} = 0$  pasa por los puntos  $I_1, I_2$  e  $I_3$  y con esto queda demostrado el teorema. ■

### 2.4.1 Construcción de una cónica a partir de cinco puntos

La graficación de cónicas es uno de los objetivos del presente trabajo y es en este sentido que el Teorema de Pascal toma gran importancia para nosotros, ya que fundamenta uno de los métodos clásicos para la construcción de cónicas.

#### Solución Geométrica

A continuación describiremos un algoritmo basado en el Teorema de Pascal que genera puntos de una cónica dados cinco.

Para facilitar la explicación usemos la notación del Teorema, así,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  son los cinco puntos dados y nuestro objetivo es obtener un procedimiento que nos permita generar el sexto vértice del hexágono.

La condición geométrica sobre el hexágono, está basada en términos de los pares de lados opuestos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_4P_5}; \overline{P_2P_3}, \overline{P_5P_6}$  y  $\overline{P_3P_4}, \overline{P_6P_1}$ , considerando que sólo conocemos cinco vértices, el único par de lados que está determinado es el  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_4P_5}$ , cuyo punto de intersección es  $I_1$ . Para construir el sexto punto, tracemos por  $P_5$  una línea (que no pase por los otros cuatro puntos), sobre ésta determinaremos el lado  $\overline{P_5P_6}$ , de modo que el punto de intersección de  $l$  y  $\overline{P_2P_3}$  es precisamente  $I_2$ . Tracemos la línea de Pascal  $\overline{I_1I_2}$  y determinemos su punto de intersección con el lado  $\overline{P_3P_4}$ , este punto es el  $I_3$  (punto de concurrencia de los lados  $\overline{P_3P_4}, \overline{P_6P_1}$  y la línea de Pascal), así, al trazar la línea que une  $I_3$  con  $P_1$  e interseccarla con  $l$  se encuentra el sexto punto  $P_6 = l \cap \overline{I_3P_1}$  (vea la figura 2-30).

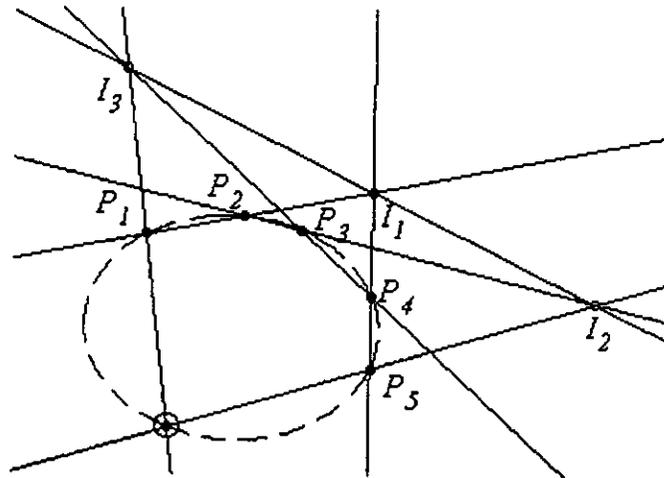
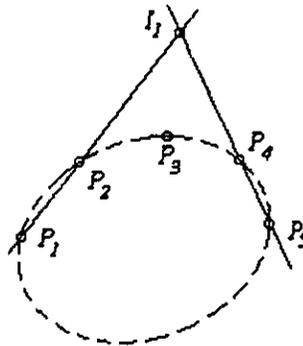


Figura 2-30: Configuración del Teorema de Pascal

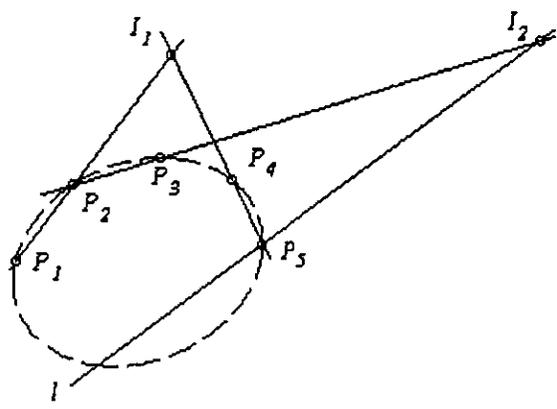
### Algoritmo

1. Localizar el punto de intersección de los lados  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P_4P_5}$ .

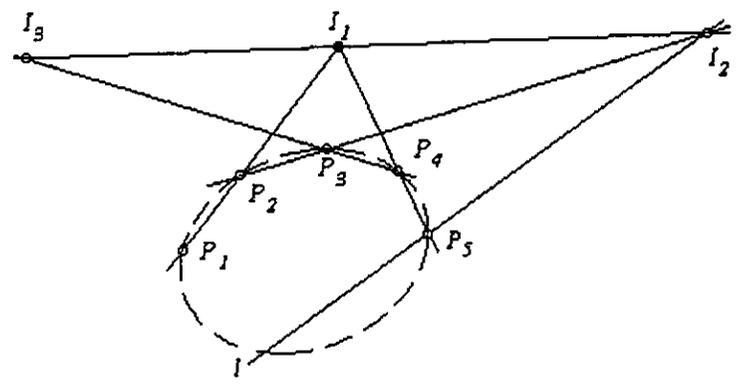


2. Trazar una línea  $l$ , que pase por el punto  $P_5$ , diferente de  $\overline{P_5P_i}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

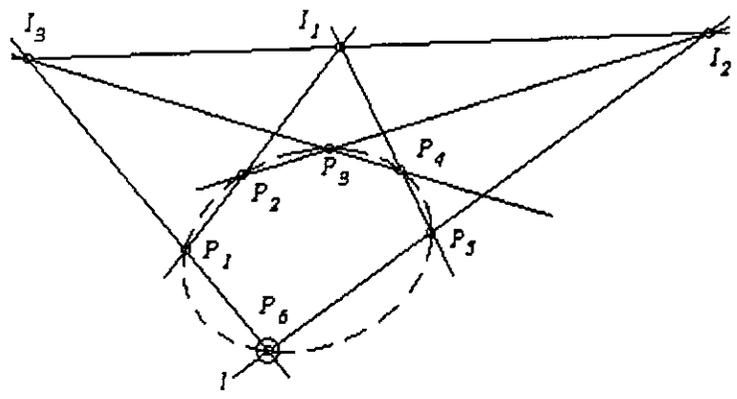
3. Determinar el punto de intersección  $I_2$  del lado  $\overline{P_2P_3}$  y la línea  $l$ .



4. Trazar la línea de Pascal  $\mathcal{L}$  y determinar su punto de intersección ( $I_3$ ) con el lado  $\overline{P_3P_4}$ .



5. El punto buscado es el punto de intersección de  $l$  y la línea que une el punto  $I_3$  con  $P_1$ .



## Solución analítica

En la sección 2.3.2 vimos que la ecuación

$$k_1 l_{12} l_{34} + k_2 l_{23} l_{14} = 0 \quad (2.4.21)$$

representa a la familia de cónicas que pasan por los puntos  $P_1, P_2, P_3,$  y  $P_4$ . Si queremos determinar la ecuación de la cónica que además pase por el punto  $P_5$ , entonces

$$k_1 [l_{12} l_{34}](P_5) + k_2 [l_{23} l_{14}](P_5) = 0$$

de esta forma queda determinado el cociente de  $k_1$  y  $k_2$

$$\frac{k_1}{k_2} = - \frac{[l_{23} l_{14}](P_5)}{[l_{12} l_{34}](P_5)}$$

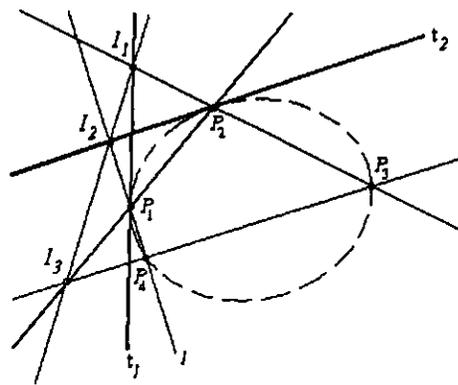
### 2.4.2 Caso Especial: Cónica tangente a dos lados de un triángulo.

Del Teorema de Pascal podemos obtener varios casos especiales que surgen al considerar a los vértices que definen un lado del hexágono como iguales, en este caso, en lugar del lado, en la configuración aparece una recta tangente junto con su punto de contacto. Ahora bien, si consideramos un segundo lado y, hacemos coincidir los puntos que lo definen, entonces obtendremos una configuración en la que se forma un triángulo donde dos de sus lados son tangentes a la cónica y el tercero, es la línea que une los puntos de tangencia.

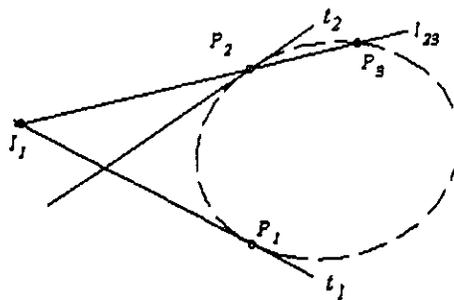
#### Solución geométrica

En la configuración del Teorema de Pascal, hagamos tender el punto  $P_2$  al  $P_1$ , a la vez que hacemos tender el punto  $P_4$  al  $P_3$ , así, las cuerdas  $\overline{P_1 P_2}$  y  $\overline{P_4 P_3}$ , cada vez se parecen más a las tangentes a la cónica en  $P_1$  y  $P_3$  respectivamente; en el límite, obtenemos las tangentes y dos puntos dobles, que corresponden a los puntos de contacto. Interpretando el Teorema de Pascal para este caso, obtenemos el siguiente resultado

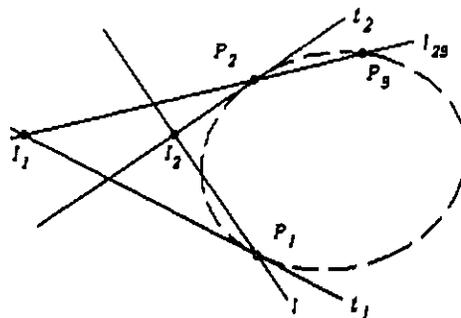
*Si  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son puntos de una cónica  $C$ ,  $t_1$  tangente a  $C$  en  $P_1$ ,  $t_2$  tangente a  $C$  en  $P_2$  entonces  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son colineales donde  $I_1$  es el punto de intersección de la tangente  $t_1$  y la línea  $l_{23}$  ( $I_1 = t_1 \cap l_{23}$ ),  $I_2$  es el punto de intersección de la tangente  $t_2$  y la línea  $l_{14}$  ( $I_2 = t_2 \cap l_{14}$ ) e  $I_3$  es el punto de intersección de las líneas  $l_{12}$  y  $l_{34}$ .*



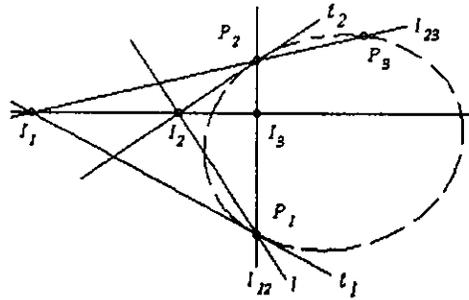
Podemos entonces usar este caso para construir puntos sobre una cónica, si conocemos dos tangentes:  $t_1$  y  $t_2$ , sus respectivos puntos de contacto:  $P_1$  y  $P_2$ , así como un tercer punto  $P_3$  de la cónica. Con estos datos, sólo es posible determinar el punto  $I_1$ .



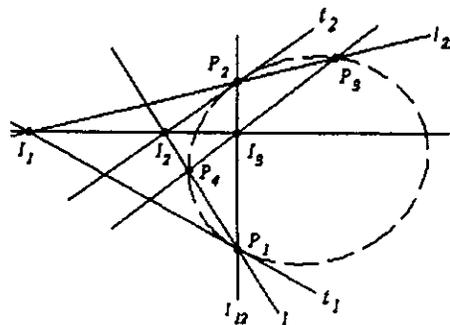
Para determinar otro punto de la línea de Pascal, tracemos por el punto  $P_1$  una línea  $l$ , y sea  $I_2$  el punto de intersección de ésta y la tangente  $t_2$ .



Después de trazar la línea de Pascal  $\mathcal{L}$ , determinamos su punto de intersección con la línea  $l_{12}$ , este punto, es el punto  $I_3$ .



El punto  $P_4$  (que estamos buscando), coincide con el punto de intersección de  $l$  y la línea que une a los puntos  $P_3$  e  $I_3$ .



### Solución Analítica

Veamos ahora cómo encontramos la ecuación de la cónica que cumple las condiciones antes mencionadas.

En la sección 2.3.1 se trataron los casos especiales de familias de cónicas y, de acuerdo al caso 7, la ecuación de la familia de cónicas que tiene por tangentes a  $t_1$  y  $t_2$  en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente, está dada por

$$k_1 t_1 t_2 + k_2 l_{12}^2 = 0$$

ahora bien, la cónica que pase por  $P_3$ , debe satisfacer la ecuación

$$k_1 [t_1 t_2] (P_3) + k_2 l_{12}^2 (P_3) = 0$$

de donde podemos elegir

$$k_1 = -l_{12}^2(P_3)$$

$$k_2 = t_1 t_2(P_3)$$

## 2.5 Cónica Lineal

Estamos acostumbrados a ver a una curva como un punto que cambia su posición de manera continua siguiendo una regla de correspondencia. A tal curva, la llamamos el **lugar geométrico** de los puntos que satisfacen la regla (vea la figura 2-31 (a) ), pero, ¿qué sucede si el objeto geométrico que se está moviendo, en lugar de ser un punto es una recta? en ese caso, la línea que cambia su posición de manera continua obedeciendo una condición física o geométrica, va describiendo una curva, a la que llamaremos **envolvente de la línea** ( figura 2-31 ( b )).

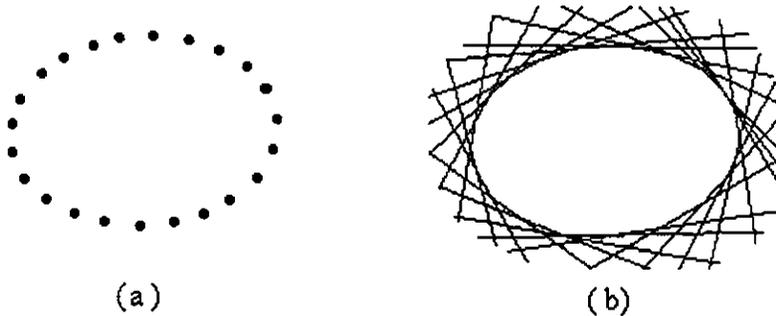


Figura 2-31: ( a ) Cónica Puntual ( b ) Cónica Lineal

Imaginemos que se tiene una curva descrita tanto por su lugar geométrico como por su envolvente; resulta natural preguntarnos cómo obtener la envolvente a partir del lugar geométrico y viceversa.

Una curva vista como el lugar geométrico de un punto en movimiento, tiene por envolvente, a la que se genera con una línea que une dos posiciones del punto, que tienden a coincidir (figura 2-32 (a)). Por otro lado, una curva vista como la envolvente de una línea en movimiento, tiene por lugar geométrico al que se genera con el punto de intersección de dos líneas de la envolvente que tienden a coincidir

(figura 2-32 (b)).

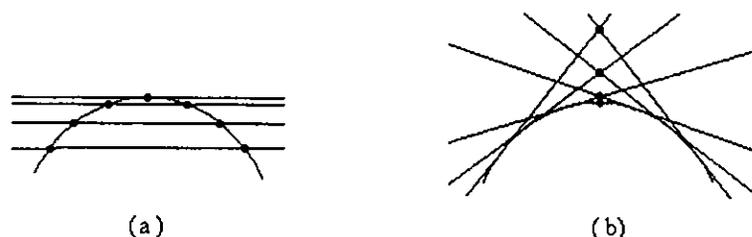


Figura 2-32:

### 2.5.1 Ecuación de la Envolvente o Ecuación tangencial de una Cónica.

Antes de abordar el caso general, veamos cómo obtener la ecuación de la envolvente de un círculo con centro en el origen y radio  $a$ .

El lugar geométrico del círculo se obtiene al restringir el movimiento de un punto variable de coordenadas  $(x, y)$ , de manera que su distancia al origen sea  $a$ ; este mismo círculo se puede obtener como la envolvente que genera una línea variable que se mueve manteniéndose a una distancia  $a$  del origen. Si la línea tiene por ecuación

$$l \equiv \alpha x + \beta y + 1 = 0$$

la condición para que su distancia al origen sea  $a$ , la podemos expresar por medio de la siguiente ecuación en  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$a^2 (\alpha^2 + \beta^2) = 1$$

A esta expresión analítica, que representa a la familia de líneas tangentes al círculo la llamaremos la **ecuación tangencial o ecuación de la envolvente del círculo**  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Abordemos ahora el caso general. Si la ecuación de la cónica  $C$  está dada por

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

encontremos la ecuación de la familia de líneas tangentes a  $C$ .

Primero reagrupemos los términos cuadráticos, lineales e independientes, para obtener una expresión

de la forma

$$C = U^{(2)} + U^{(1)} + U^{(0)} = 0$$

donde  $U^{(i)}$  es una ecuación homogénea de grado  $i$ .

Sea  $l$  una línea cuya ecuación está dada por

$$l \equiv \alpha x + \beta y = -1$$

y veamos cuál es el lugar geométrico que describe la ecuación dada por

$$U^{(2)} + lU^{(1)} + l^2U^{(0)} = ax^2 + 2hxy + by^2 - 2(gx + fy)(\alpha x + \beta y) + c(\alpha x + \beta y)^2 = 0.$$

Notemos que es una ecuación cuadrática homogénea; por tanto, el lugar geométrico que describe es una cónica que pasa por el origen. Por otro lado, si  $P_1$  y  $P_2$  son los puntos de intersección de  $l$  y  $C$  entonces, éstos también satisfacen la ecuación, más aún, todo punto, múltiplo de  $P_1$  o de  $P_2$ , es un punto de la cónica, estas condiciones nos indican, que la cónica es degenerada y, que está formada por la recta que pasa por el origen y el punto  $P_1$  ( $l_1$ ) y por la línea  $l_2$  que pasa por el origen y  $P_2$ .

Reagrupando los términos, se llega a una expresión de la forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

donde

$$A = a - 2g\alpha + c\alpha^2$$

$$B = h - g\beta - f\alpha + c\alpha\beta$$

$$C = b - 2f\beta + c\beta^2$$

Queremos obtener la condición de tangencia para la recta  $l$ ; esto equivale a que la cónica degenerada dada por la ecuación anterior, represente una recta doble ( $l_1 = l_2$ ), en términos del discriminante  $B^2 = AC$ , es decir

$$(h - g\beta - f\alpha + c\alpha\beta)^2 = (a - 2g\alpha + c\alpha^2)(b - 2f\beta + c\beta^2)$$

Después de desarrollar cada producto y reagrupar términos llegamos a la expresión

$$\sum \equiv A\alpha^2 + 2H\alpha\beta + B\beta^2 + 2G\alpha + 2F\beta + C = 0 \quad (2.5.22)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= bc - f^2 & H &= fg - ch & F &= gh - af \\ B &= ca - g^2 & G &= hf - bg & C &= ab - h^2 \end{aligned}$$

de esta manera, hemos visto que la línea  $l \equiv \alpha x + \beta y + 1 = 0$  es tangente a la cónica  $C$  si y sólo si  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen una ecuación cuadrática.

*Observemos que si  $l = 0$  es la ecuación de una línea que no pasa por el origen, ésta siempre se puede llevar a la forma  $l \equiv \alpha x + \beta y + 1 = 0$  y, por tanto, puede identificarse con los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Por ello, convendremos en llamarles las coordenadas de la línea  $l$ .*

En la sección previa, definimos a una cónica puntual como aquel conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen una ecuación cuadrática y, acabamos de ver que la envolvente de una cónica es el conjunto de líneas  $(\alpha, \beta)$  que satisfacen una ecuación cuadrática, por tanto, toda ecuación cuadrática, la podemos considerar como el lugar geométrico de los puntos  $(x, y)$  que la satisfacen y definirla como la ecuación puntual de una cónica, o bien, puede verse como la ecuación de la envolvente de las líneas determinadas por las variables  $\alpha, \beta$  y definirse como la ecuación tangencial de una cónica.

**Teorema 2.5.22** *Sea  $l \equiv \alpha x + \beta y + 1 = 0$  una línea de la envolvente de una cónica cuya ecuación está dada por*

$$C \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

*Es decir, si  $\alpha, \beta$  satisfacen la ecuación*

$$\sum \equiv A\alpha^2 + 2H\alpha\beta + B\beta^2 + 2G\alpha + 2F\beta + C = 0$$

*donde*

$$\begin{aligned} A &= bc - f^2 & H &= fg - ch & F &= gh - af \\ B &= ca - g^2 & G &= hf - bg & C &= ab - h^2 \end{aligned}$$

*entonces, el punto de tangencia de  $l$  está dado por*

$$\left( \frac{A\alpha + H\beta + G}{G\alpha + F\beta + C}, \frac{H\alpha + B\beta + F}{G\alpha + F\beta + C} \right) \quad (2.5.23)$$

### Demostración

Si el punto de tangencia de  $l$  es  $P_1(x_1, y_1)$  entonces su ecuación también se puede escribir como  $l \equiv C_1 = 0$ , y al reagrupar los términos en  $x, y$

$$l \equiv xX_1 + yY_1 + Z_1 = 0$$

donde

$$X_1 = ax_1 + hy_1 + g$$

$$Y_1 = hx_1 + by_1 + f$$

$$Z_1 = gx_1 + fy_1 + c.$$

Por tanto, estos términos deben ser proporcionales a  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir

$$\frac{X_1}{\alpha} = \frac{Y_1}{\beta} = \frac{Z_1}{1} \quad (2.5.24)$$

Es fácil verificar que

$$\frac{rX_1 + mY_1 + sZ_1}{r\alpha + m\beta + s} = Z_1; \quad \text{con } r, m, s \text{ constantes} \quad (2.5.25)$$

Aplicando este resultado a (2.5.24), con  $r = A, m = H$  y  $s = G$ , obtenemos

$$\frac{A(ax_1 + hy_1 + g) + H(hx_1 + by_1 + f) + G(gx_1 + fy_1 + c)}{A\alpha + H\beta + G}$$

después de reagrupar términos en  $x$  y en  $y$

$$\frac{x_1(aA + hH + gG) + y_1(hA + bH + fG) + gA + fH + cG}{A\alpha + H\beta + G}$$

Ahora como

$$hA + bH + fG = gA + fH + cG = 0$$

este cociente se reduce a

$$\frac{x_1 \Delta}{A\alpha + H\beta + G}$$

donde

$$\Delta = aA + hH + gG$$

Análogamente, podemos obtener

$$\frac{x_1 \Delta}{A\alpha + H\beta + G} = \frac{y_1 \Delta}{H\alpha + B\beta + F} = \frac{\Delta}{G\alpha + F\beta + C}$$

de esta última igualdad, se sigue que las coordenadas del punto  $(x_1, y_1)$ , están dadas por

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{A\alpha + H\beta + G}{G\alpha + F\beta + C}, \frac{H\alpha + B\beta + F}{G\alpha + F\beta + C} \right)$$

■

Tomando en cuenta este resultado junto con el de las coordenadas de la recta tangente a la cónica, observamos que existe cierta dualidad entre la cónica puntual y la lineal.

Las coordenadas de la recta tangente a la cónica puntual  $C$  que tiene por punto de contacto a  $(x_1, y_1)$  son

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{ax_1 + hy_1 + g}{gx_1 + fy_1 + c}, \frac{hx_1 + by_1 + f}{gx_1 + fy_1 + c} \right)$$

mientras que las coordenadas del punto de contacto de la línea  $(\alpha, \beta)$  de la envolvente  $\Sigma$  (Cónica lineal) son

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{A\alpha + H\beta + G}{G\alpha + F\beta + C}, \frac{H\alpha + B\beta + F}{G\alpha + F\beta + C} \right)$$

Interpretando ambos resultados, tenemos que, cuando un punto  $(x, y)$  se mueve bajo la condición  $C = 0$ , existe una única línea de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ , que es tangente a la cónica, es decir, satisface la ecuación  $\Sigma = 0$ . Por tanto, conforme el punto se va moviendo y, describe el lugar geométrico, la línea correspondiente  $(\alpha, \beta)$  va describiendo la envolvente de la cónica.

Análogamente, si ahora consideramos una línea  $(\alpha, \beta)$  que se mueve de acuerdo a la condición  $\Sigma = 0$ , existe un único punto  $(x, y)$  de la línea, tal que satisface la ecuación  $C = 0$ . Al moverse la línea e ir

trazando la envolvente, su punto de tangencia va trazando el lugar geométrico de la cónica.

Con base en lo anterior, podemos pensar ahora a un punto como un haz de rectas y, entonces, hablar de la ecuación de un punto  $(x_0, y_0)$  como

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + 1 = 0, \quad \alpha, \beta \text{ variables}$$

de esta forma, podemos establecer los resultados análogos a los de las rectas notables de una cónica puntual.

### 2.5.2 Puntos notables de una cónica lineal

A continuación listamos los resultados relacionados con los puntos notables de una cónica lineal.

Sea  $\Sigma = 0$  la ecuación de una cónica lineal. Entonces:

1.- La ecuación de la cuerda de la cónica  $C = 0$  que pasa por los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es

1'.- La ecuación lineal del punto de intersección de las tangentes  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  de la cónica lineal  $\Sigma = 0$  está dada por

$$C_1 + C_2 = C_{12}$$

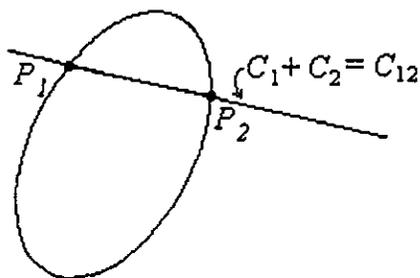


Figura 2-33

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_{12}$$

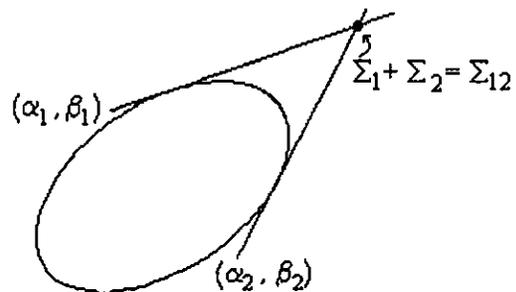


Figura 2-34

2.- La tangente a  $C = 0$  en el punto  $P_1$  tiene por ecuación:  $C_1 = 0$

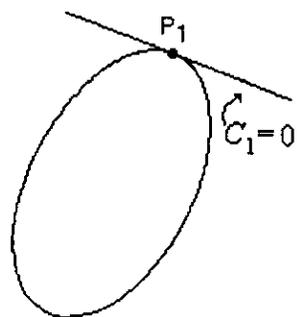


Figura 2-35

2'.- El punto de tangencia o de contacto de  $\Sigma = 0$  y la tangente  $(\alpha_1, \beta_1)$  tiene por ecuación:  $\Sigma_1 = 0$

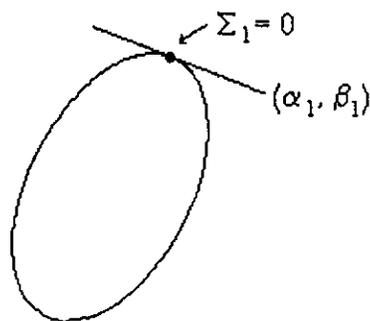


Figura 2-36

3.- La cuerda que une a los puntos de tangencia de las líneas tangentes a  $C = 0$  que pasan por  $P_1$  tienen por ecuación:  $C_1 = 0$ .

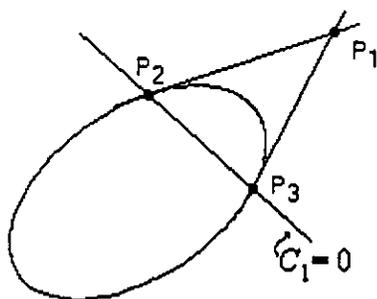


Figura 2-37

3'.- El punto de intersección de las tangentes a  $\Sigma = 0$ , en los puntos finales de la cuerda  $(\alpha_1, \beta_1)$  tiene por ecuación:  $\Sigma_1 = 0$ .

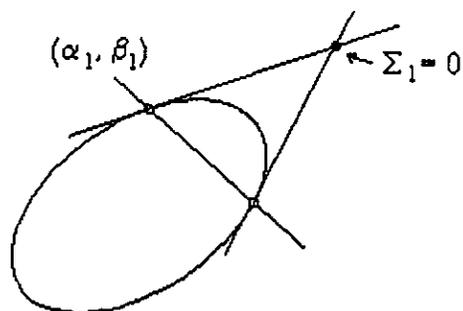


Figura 2-38

4.- La ecuación de la polar de  $P_1$  con respecto a  $C = 0$  es:  $C_1 = 0$ .

4'.- El polo con respecto a  $\Sigma = 0$  de la línea  $(\alpha_1, \beta_1)$  tiene por ecuación:  $\Sigma_1 = 0$ .

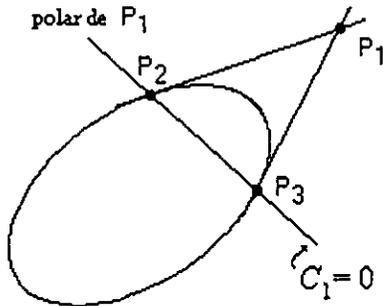


Figura 2-39

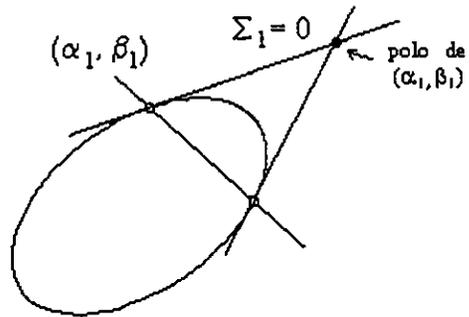


Figura 2-40

### 2.5.3 Teorema de Brianchon

Así como el teorema de Pascal nos permite construir geoméricamente puntos sobre una cónica, el teorema de Brianchon nos da una forma de construir líneas de la envolvente de una cónica.

**Teorema 2.5.23 (Brianchon)** *Un hexágono circunscribe a una cónica si las líneas que unen los vértices opuestos son concurrentes (figura 2-41).*

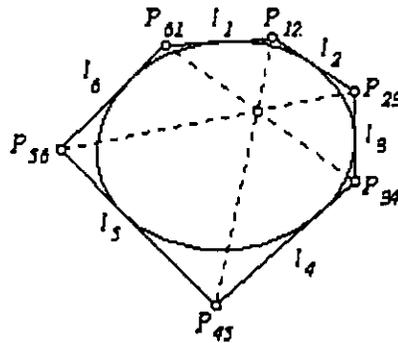


Figura 2-41: Teorema de Brianchon

### Demostración

Si denotamos por  $l_1, l_2, \dots, l_6$  a los lados del hexágono, y por  $P_{ij} = l_i \cap l_j$  entonces, debemos demostrar que las líneas  $\overline{P_{12}P_{45}}, \overline{P_{23}P_{56}}$  y  $\overline{P_{34}P_{61}}$  son concurrentes.

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_6$  los respectivos puntos de tangencia de  $l_1, l_2, \dots, l_6$  (vea la figura 2-42). Entonces por el Teorema de Pascal, los puntos  $I_1 = l_{12} \cap l_{45}$ ,  $I_2 = l_{23} \cap l_{56}$  e  $I_3 = l_{34} \cap l_{61}$  son colineales, y por el corolario 2.2.16, las polares de los puntos  $I_1, I_2$ , e  $I_3$  son concurrentes.

Por tanto, basta checar que las polares de estos puntos son precisamente los lados que unen vértices opuestos.

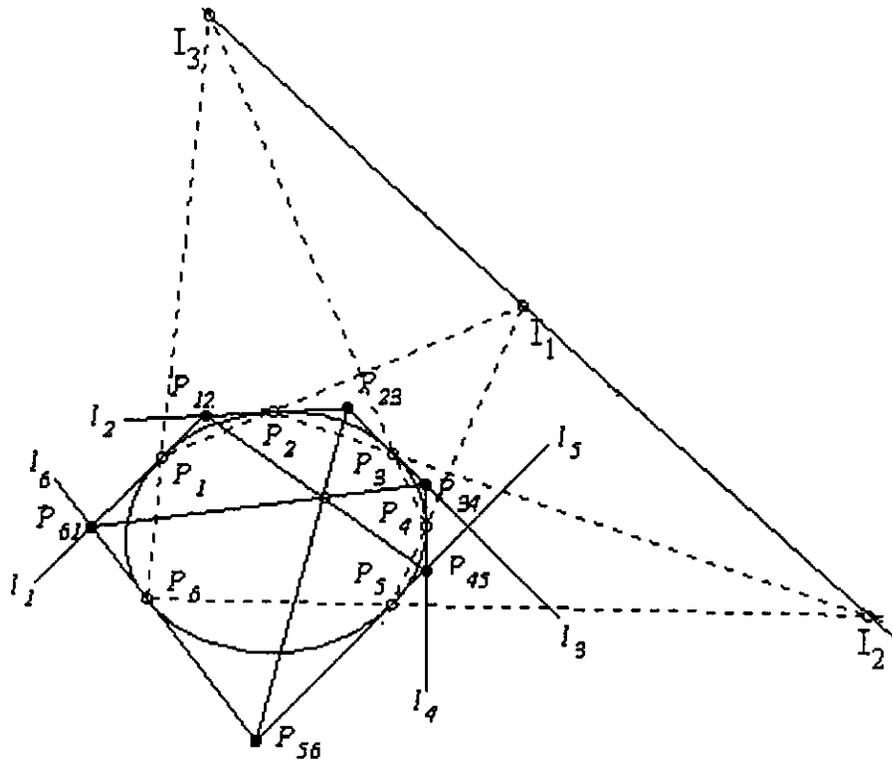


Figura 2-42: Configuración de los Teoremas de Pascal y Brianchon.

Ahora bien, dado que  $l_{12}, l_{45}$  son las polares de los puntos  $P_{12}, P_{45}$  respectivamente, y tomando en cuenta que su punto de intersección es  $I_1$  entonces, por el corolario 2.2.14, la polar de  $I_1$  pasa por los vértices opuestos  $P_{12}$  y  $P_{43}$ . Análogamente las polares de  $P_{23}$  y  $P_{56}$ , son  $l_{23}$  y  $l_{56}$  las cuales se intersecan en  $I_2$ , por tanto, la polar de  $I_2$  une los vértices opuestos  $P_{23}$  y  $P_{56}$ , y la polar de  $I_3$  es la línea que une a los vértices opuestos  $P_{34}$  y  $P_{61}$ , de donde las líneas que unen vértices opuestos son concurrentes. ■

## 2.6 Notas y Referencias

### Observaciones

1. En los resultados que hemos visto sobre la cónica puntual, se ha descartado a todas las líneas que pasan por el origen, al considerar que la ecuación de una línea está dada por  $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ .
2. Dado que toda línea que no pase por el origen se puede llevar a la forma  $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ , entonces, es posible identificar a una línea por medio del par  $(\alpha, \beta)$ , y por lo tanto, a éste lo podemos considerar como las coordenadas de la línea.
3. La ecuación  $\alpha x + \beta y + 1 = 0$  representa el lugar geométrico de una línea, si se mantienen fijos a  $\alpha$  y  $\beta$  y hacemos variar a  $x$  y  $y$ . Si ahora mantenemos fijos a  $x$  y  $y$  hacemos variar a  $\alpha$  y  $\beta$ , entonces, la ecuación  $\alpha x + \beta y + 1 = 0$  representa para cada valor de  $(\alpha, \beta)$  una línea que pasa por el punto  $(x, y)$ , es decir, la podemos considerar como la ecuación del punto  $(x, y)$ .

La intención de este capítulo ha sido presentar algunos resultados básicos acerca de las cónicas, que, como es bien sabido, es un tema ampliamente estudiado. Más aún, se muestra el poder que tiene la notación simbólica. Este material se puede consultar del libro Rajagopal C. T. and Srinivasaraghavan V. R. [16].

Otro libro que presenta la demostración del teorema de Pascal usando la notación simbólica es Eves H. [5].

La demostración del teorema de Pascal que se basa en las propiedades de la razón cruzada se consultó de [17]

La sección de familia de cónicas puede verse en el libro Robson [18].

## Capítulo 3

# Dualidad

### 3.1 Introducción

Hemos visto resultados tales como el teorema de Desargues, las rectas notables de una cónica puntual, los puntos notables de una cónica lineal, así como los teoremas de Pascal y Brianchon. Todos éstos enuncian propiedades que están relacionadas con la posición de un conjunto de puntos y las rectas que definen, o bien, con un conjunto de líneas y sus puntos de intersección; dichas propiedades no incluyen relaciones métricas, además cumplen la siguiente propiedad:

Si en el enunciado se cambia el término punto por línea y línea por punto, como se muestra a continuación

- |   |  |
|---|--|
| 1.- Línea que une dos puntos            | 1'.- Punto de intersección de dos líneas |
| 2.- Punto de intersección de dos líneas | 2'.- Línea que une dos puntos            |

Un teorema se transforma en otro y viceversa. Un ejemplo de esto, lo tenemos en los teoremas de Pascal y Brianchon.

A las figuras y teoremas que tienen esta propiedad les llamaremos, **duales**.

Si modificamos el enunciado del teorema de **Desargues**, conforme a las reglas antes mencionadas, notamos que el enunciado dual, es el teorema mismo. Cuando un teorema tiene esta propiedad, les llamaremos **auto-duales**.

Hasta el momento no hemos tenido dificultad alguna en manejar el concepto de dualidad en términos geométricos. Sin embargo, al plantear la dualidad algebraicamente, nos damos cuenta que nuestro sistema coordenado está incompleto. Como ejemplo, tomemos el haz de líneas generado por dos rectas paralelas,

donde convenimos en decir, que su vértice, es el punto al infinito; pero, ¿cuáles son las coordenadas de este punto?

En el capítulo anterior, empezamos a manejar el concepto de coordenadas de línea, pero, éstas únicamente hacen referencia a líneas que no pasan por el origen. A fin de encontrar un sistema coordenado que nos permita manejar a puntos y líneas como entes primarios, retomemos este caso.

## 3.2 Coordenadas de línea

En el capítulo anterior, vimos que toda línea que satisface la ecuación

$$l = Ax + By + C = 0 ; \text{ con } C \neq 0$$

siempre la podemos llevar a la forma

$$\alpha x + \beta y + 1 = 0 \tag{3.2.1}$$

y dado que la línea queda unívocamente determinada por  $\alpha$  y  $\beta$ , a este par de valores le llamamos las coordenadas de la línea.

Si el punto  $P = (x, y)$  y la línea  $l = (\alpha, \beta)$  satisfacen la ecuación (3.2.1), diremos que el punto  $P$  y  $l$  son incidentes. Por ejemplo, la línea  $l = (1, -1)$  y  $P = (0, 1)$  satisfacen la ecuación  $x - y + 1 = 0$ , por tanto,  $P$  y  $l$  son incidentes.

Si la abscisa y ordenada al origen de  $l$  son  $a$  y  $b$ , respectivamente, entonces, las coordenadas de la línea en términos de estos valores están dadas por

$$(\alpha, \beta) = \left( -\frac{1}{a}, -\frac{1}{b} \right)$$

### 3.2.1 Algunos casos especiales

1. Consideremos a las líneas cuya primera coordenada es constante e igual a  $\alpha = -\frac{1}{a}$  y  $\beta$  arbitrario, es decir, las líneas que satisfacen la ecuación  $-\frac{x}{a} + \beta y + 1 = 0$ . Todas éstas pasan por el punto  $(a, 0)$ , por lo que a la ecuación

$$\alpha = -\frac{1}{a}$$

la podemos interpretar como la ecuación del punto  $(a, 0)$ , o bien, como la ecuación de la familia de líneas con vértice en  $(a, 0)$ .

2. El caso anterior describe una familia de líneas, cuyo vértice es un punto ordinario; ahora tratemos

de obtener la ecuación de una familia de líneas cuyo vértice sea un punto al infinito; es decir, la ecuación de una familia de líneas paralelas. Ésta viene dada por

$$qx + py + C = 0,$$

donde los coeficientes de  $x$  y  $y$  son constantes, y  $C$  es variable. La podemos identificar por la ecuación

$$\frac{A}{B} = \frac{q}{p} \quad (3.2.2)$$

o bien, cuya pendiente está dada por  $-\frac{q}{p}$  y, por tanto, son paralelas a la línea  $y = -\frac{q}{p}x$ .

Para obtener la ecuación en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ , observemos que

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación (3.2.2), obtenemos la ecuación de la familia de líneas paralelas en la forma:  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q}{p}$ , o bien

$$p\alpha - q\beta = 0$$

Como en el caso anterior, a esta ecuación también la podemos interpretar como la ecuación del punto al infinito que se encuentra en la dirección de la línea con pendiente  $-\frac{q}{p}$ .

3. Dos casos especiales del anterior, son la familia de líneas paralelas a los ejes coordenados.

- Las líneas paralelas al eje  $X$ , las obtenemos al hacer  $q = 0$ , por tanto, la ecuación de la familia de líneas se convierte en  $p\alpha = 0$ , pero, como  $p$  no puede ser cero, la ecuación se reduce a

$$\alpha = 0$$

En resumen,  $\alpha = 0$  con  $\beta = \beta_0$  ( $\beta_0 \neq 0$ ), representa una línea paralela al eje  $X$  o, si consideramos a  $\beta$  variable, ésta se convierte en la ecuación del punto al infinito en la dirección del eje  $X$ .

- Líneas paralelas al eje  $Y$

Toda línea paralela al eje  $Y$ , está dada por  $\alpha = \alpha_0$  y  $\beta = 0$ , pero, si hacemos que  $\alpha$  varíe

$$\beta = 0$$

representa el punto al infinito en la dirección del eje  $Y$ .

4. En el caso anterior vimos que  $\alpha = 0$  y  $\beta = \beta_0$ , representa una línea que pasa por el punto  $(0, -\frac{1}{\beta_0})$  y es paralela al eje  $X$ . Al hacer tender  $\beta_0$  a cero, la línea se aleja cada vez más del origen, por lo que podemos decir que

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

represente la línea al infinito. Notemos que ésta satisface la ecuación  $p\alpha - q\beta = 0$ , lo que nos indica que el punto al infinito en la dirección de la línea con pendiente  $-\frac{q}{p}$ , incide con la línea al infinito y, dado que esto no depende de los valores de  $q$  y  $p$  entonces, todo punto al infinito incide con la línea al infinito.

5. Ahora, para obtener las coordenadas de una línea que pase por el origen, consideremos a  $A$  y  $B$  diferentes de cero y, para ver cómo se ven afectados los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  conforme  $C$  tiende a cero, reescribamos sus expresiones en términos de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , las cuales son

$$\alpha = \frac{A}{C}$$

$$\beta = \frac{B}{C}.$$

De éstas vemos que, conforme  $C$  toma valores más pequeños, los correspondientes a  $\alpha$  y  $\beta$  aumentan, por lo que una línea que pasa por el origen la podemos identificar por  $\alpha = \infty$ ,  $\beta = \infty$ .

### 3.2.2 Ecuación de un punto

En los casos antes vistos, observamos que la ecuación (3.2.1), además de interpretarse como la ecuación de una línea, también la podemos ver como la ecuación de un punto siempre y cuando, en la ecuación

$$x_0\alpha + y_0\beta + 1 = 0$$

consideremos a la pareja  $(x_0, y_0)$  como fija y hagamos variar las coordenadas  $(\alpha, \beta)$ . Entonces, la ecuación, en lugar de expresar una relación entre un número infinito de puntos que pertenecen a una línea, se convierte, en una relación entre un número infinito de líneas que pasan por el punto de coordenadas

$(x_0, y_0)$  (haz de líneas con vértice  $(x_0, y_0)$ ), por tanto, en este caso, a la ecuación

$$x_0\alpha + y_0\beta + 1 = 0, \text{ con } (\alpha, \beta) \text{ variable}$$

la llamaremos la ecuación del punto  $(x_0, y_0)$  (en coordenadas de línea). Por ejemplo, la ecuación  $4\alpha + 3\beta + 1 = 0$  es la ecuación del punto  $(4, 3)$ , mientras que la ecuación  $4x + 3y + 1 = 0$  es la ecuación de la línea de coordenadas  $(4, 3)$ .

### 3.2.3 Dualidad en Coordenadas de Puntos y Líneas

Las coordenadas de línea nos permiten plantear algunos resultados de dualidad en términos algebraicos que a continuación enunciamos.

1.- Punto de coordenadas  $(x, y)$ .

1'.- Línea de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ .

2.- Línea que no pasa por el origen.

$$\alpha x + \beta y + 1 = 0 \text{ con } (\alpha, \beta) \text{ fijos}$$

2'.- Punto que no pertenece a la línea al infinito

$$\alpha x + \beta y + 1 = 0 \text{ con } (x, y) \text{ fijos}$$

3.- Línea  $(\alpha, \beta) = (A/C, B/C), C \neq 0$ .

$$Ax + By + C = 0$$

3'.- Punto  $(x, y) = (A/C, B/C), C \neq 0$ .

$$A\alpha + B\beta + C = 0$$

4.- Origen  $(x, y) = (0, 0)$ .

4'.- Línea al infinito  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ .

5.-  $Ax + By = 0$  línea a través del origen.

5'.-  $A\alpha + B\beta = 0$  punto que pertenece a la línea al infinito.

6.- Dos líneas

$$A_1x + B_1y + C_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2$$

determinan un punto:

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

éste será un punto al infinito si

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

7.- Haz de líneas  $l_1 - kl_2 = 0$ , con

$$l_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0.$$

8.- Tres líneas concurrentes  $l_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0$$

9.- Punto  $(x, y)$  en la línea que une los puntos  $P(p_1, p_2)$  y  $Q(q_1, q_2)$ .

$$x = \frac{p_1 - \mu q_1}{1 - \mu}; \quad y = \frac{p_2 - \mu q_2}{1 - \mu}$$

donde  $\mu$  es la razón proporcional a  $k$  en 7' ( $\mu = kC_2/C_1$ ).

6'.- Dos puntos

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1$$

$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2$$

determinan una línea:

$$\alpha : \beta : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

ésta pasa por el origen si

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

7'.- Haz de puntos  $P_i - kP_2 = 0$ , con

$$P_i = A_i\alpha + B_i\beta + C_i = 0.$$

8'.- Tres puntos  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$  colineales

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

9'.- Línea  $(\alpha, \beta)$  que pasa por el punto de intersección de las líneas  $l(p_1, p_2)$ ,  $m(q_1, q_2)$ .

$$\alpha = \frac{p_1 - \mu q_1}{1 - \mu}; \quad \beta = \frac{p_2 - \mu q_2}{1 - \mu}$$

donde  $\mu$  es la razón proporcional a  $k$  en 7 ( $\mu = kC_2/C_1$ ).

10.- Dos puntos determinados por la razón  $\mu_1, \mu_2$  con respecto a los puntos  $A$  y  $B$ , tienen razón cruzada  $\mu_1/\mu_2$ . Esta razón cruzada es igual a  $k_1/k_2$  (usando la  $k$  de 7'). Si  $\mu_1 + \mu_2 = 0$  o  $k_1 + k_2 = 0$ , se dice que los puntos son conjugados armónicos.

10'.- Dos líneas del haz generado por  $l$  y  $m$  con parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$  o  $k_1$  y  $k_2$  (usando la  $k$  de 7), tienen razón cruzada  $\mu_1/\mu_2$ , ésta es igual a  $k_1/k_2$  y, se dice que son conjugadas armónicas con respecto a  $l$  y  $m$  si  $\mu_1 + \mu_2 = 0$  o  $k_1 + k_2 = 0$ .

### 3.3 Coordenadas Homogéneas

El sistema coordenado que hemos introducido, aún tiene limitantes, por ejemplo, en coordenadas de puntos, no existen coordenadas para los puntos o la línea al infinito; mientras que, en las coordenadas de línea, no tenemos forma de hacer referencia al origen ni a las líneas que pasan por éste. Estas excepciones las podemos remover si usamos **coordenadas homogéneas**. Para ello, escribamos las coordenadas de un punto  $P$  en la forma

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad (3.3.3)$$

e identificaremos al punto con la terna  $x_1, x_2, x_3$ , notemos que la terna no es única ya que, cualquier múltiplo (diferente de cero) de ésta, también representa a  $P$ . En los libros de geometría proyectiva un punto se denota por:

$$(x_1 : x_2 : x_3) = (x : y : 1) \quad (3.3.4)$$

y a cualquier terna  $x_1, x_2, x_3$  que satisfaga la relación anterior la llamaremos las **coordenadas homogéneas del punto  $P$**  en el plano.

Abusando de la notación, usaremos los vectores columna para representar las coordenadas homogéneas de un punto así, a las coordenadas homogéneas del punto  $P$ , las denotaremos por  $(x_1, x_2, x_3)^t$  sin olvidar que,  $(x_1, x_2, x_3)^t = k(x_1, x_2, x_3)^t$ , para  $k \neq 0$ . Por ejemplo, el punto  $P = (5, 6, -3)^t$  es idéntico al punto  $P = (10, 12, -6)^t$  e igual al punto de coordenadas ordinarias  $x = -5/3, y = -2$ .

Los puntos que pertenecen al eje  $X$ , son aquellos cuya segunda coordenada es cero ( $x_2 = 0$ ), mientras que los del eje  $Y$ , son los que su primera coordenada es cero ( $x_1 = 0$ ). Los **puntos al infinito** se obtienen al hacer  $x_3 = 0$  así, la **línea al infinito**  $l_\infty$  está formada por todos aquellos puntos cuya tercer coordenada es cero, entonces, su ecuación está dada por  $x_3 = 0$ .

El origen tiene por coordenadas a  $(0, 0, 1)^t$  o  $(0, 0, a)^t$  con  $a$  diferente de cero (figura 3-1).

La ecuación de una recta está dada por

$$\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 &= 0 \\ A^t x &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

donde las  $A_i$  con  $i = 1, 2, 3$  no son todas cero.

Un punto al infinito tiene coordenadas  $(a, b, 0)^t$  y corresponde al punto al infinito de la línea  $y : x = b : a$ . Cada terna  $(x_1, x_2, x_3)^t$  representa un punto, a excepción  $(0, 0, 0)^t$ . El punto  $(0, 0, 0)^t$  no tiene ninguna interpretación.

Para obtener las coordenadas homogéneas correspondientes a las líneas, reescribamos la ecuación (3.3.5) en la forma

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = \alpha^t x = 0 \tag{3.3.6}$$

a la terna  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  la llamaremos las **coordenadas homogéneas** de la línea cuya ecuación es  $\alpha^t x = 0$ . Para pasar de las coordenadas homogéneas de la línea a las coordenadas no homogéneas, usaremos la ecuación

$$(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3) = (\alpha : \beta : 1)$$

La ecuación (3.3.6) expresa la relación de incidencia del punto  $(x_1, x_2, x_3)^t$  y la línea  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . La ecuación  $\alpha_1 = 0$  ( $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  variables), obliga a que  $x_2 = x_3 = 0$  entonces, ésta representa el punto ideal del eje  $X$  análogamente, la ecuación  $\alpha_2 = 0$  ( $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  variables), indica que  $x_1 = x_3 = 0$  y, por tanto, es la ecuación del punto ideal en el eje  $Y$ , mientras que el origen está dado por  $\alpha_3 = 0$  ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  variables). Una línea que pasa por el origen, tiene coordenadas  $(a, b, 0)$ ; la línea de coordenadas  $(0, 1, 0)$ , es el eje  $X$ ; el eje  $Y$  tiene coordenadas  $(1, 0, 0)$ , y la línea  $(0, 0, 1)$  es la línea al infinito  $l_\infty$  (figura 3-2).

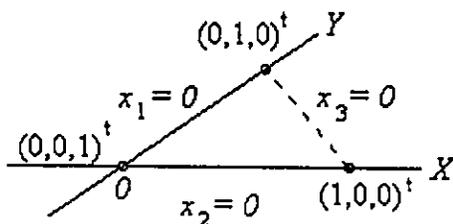


Figura 3-1

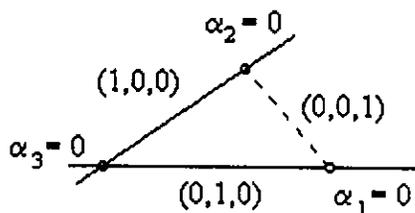


Figura 3-2

### 3.3.1 Propiedades de puntos y líneas

El siguiente teorema nos da una forma rápida para determinar si tres puntos, son colineales.

**Teorema 3.3.24** *Tres puntos  $A = (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)^t$  y  $C = (c_1, c_2, c_3)^t$  son colineales si y sólo si el determinante de la matriz cuyos renglones son las coordenadas de los puntos es cero.*

#### Demostración

Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales si y sólo si existe una línea  $\alpha^t$  que incida con los tres puntos, es decir, si y sólo si

$$\alpha^t A = 0$$

$$\alpha^t B = 0$$

$$\alpha^t C = 0$$

este sistema tiene solución (diferente de la trivial) si y sólo si el determinante asociado es igual a cero

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

El dual de este resultado está relacionado con la concurrencia de líneas, cuyo enunciado es el siguiente: ■

**Teorema 3.3.25** *Tres líneas son concurrentes si y sólo si el determinante de la matriz cuyos renglones son las coordenadas de las líneas es igual a cero.*

#### Demostración

Sean  $\alpha^t$ ,  $\beta^t$  y  $\gamma^t$  tres líneas, éstas serán concurrentes si y sólo si existe un punto  $A = (a_1, a_2, a_3)$  que incide con cada una de las líneas, es decir, si y sólo si el determinante del sistema

$$\alpha^t A = 0$$

$$\beta^t A = 0$$

$$\gamma^t A = 0$$

es igual a cero

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

A continuación enunciaremos dos resultados equivalentes, por lo que omitiremos su demostración. ■

**Teorema 3.3.26** *Un punto  $C = (c_1, c_2, c_3)^t$  es colineal con  $A = (a_1, a_2, a_3)^t$  y  $B = (b_1, b_2, b_3)^t$  si y sólo si existen números  $k_1$  y  $k_2$  tales que*

$$C = k_1 A + k_2 B$$

El teorema correspondiente para líneas es:

**Teorema 3.3.27** *Una línea  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es concurrente con las líneas  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  y  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  si y sólo si existen constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que*

$$\alpha = k_1 \beta + k_2 \gamma$$

### 3.3.2 Dualidad entre puntos y líneas en coordenadas homogéneas

Una vez que hemos introducido las coordenadas homogéneas que nos permiten manejar tanto las coordenadas de puntos al infinito como las coordenadas de las líneas que pasan por el origen, reenunciaremos los resultados duales que se listaron en la sección 3.2.3.

- |   |   |
|---|---|
| <p>1.- Línea: <math>\alpha^t x = 0</math>, con <math>\alpha_i</math>, <math>i = 1, 2, 3</math> constantes no todas cero.</p> <p>2.- Línea que pasa por el origen<br/><math>\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0</math>.</p> <p>3.- Línea paralela al eje <math>Y</math>: <math>\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = 0</math>.</p> | <p>1'.- Punto: <math>\alpha^t x = 0</math> con <math>x_i</math>, <math>i = 1, 2, 3</math> constantes no todas cero.</p> <p>2'.- Punto al infinito<br/><math>\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0</math>.</p> <p>3'.- Punto en el eje <math>X</math>: <math>\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = 0</math>.</p> |
|---|---|

4.- Puntos de la línea que une a los puntos  $A = (a_1, a_2, a_3)^t$  y  $B = (b_1, b_2, b_3)^t$

$$(\lambda a_1 + \mu b_1) : (\lambda a_2 + \mu b_2) : (\lambda a_3 + \mu b_3)$$

donde  $-\mu/\lambda$  es la razón en la que el punto divide al segmento  $\overline{AB}$ .

5.- Dos puntos  $P$  y  $Q$  para los cuales los valores de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  en la ecuación anterior son  $(\lambda_1, \mu_1)$  y  $(\lambda_2, \mu_2)$  respectivamente, determinan la razón cruzada

$$(P Q A B) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

6.- Tres puntos  $A = (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)^t$  y  $C = (c_1, c_2, c_3)^t$  son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4'.- Línea a través del punto de intersección de las líneas  $a = (a_1, a_2, a_3)$  y  $m = (b_1, b_2, b_3)$

$$(\lambda a_1 + \mu b_1) : (\lambda a_2 + \mu b_2) : (\lambda a_3 + \mu b_3)$$

donde  $-\mu/\lambda$  es proporcional a la razón en la que la línea divide a las líneas  $a$  y  $m$ .

5'.- Dos líneas  $p$  y  $q$  para las cuales los valores de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  en la ecuación anterior son  $(\lambda_1, \mu_1)$  y  $(\lambda_2, \mu_2)$  respectivamente, determinan la razón cruzada

$$(p q a m) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

6'.- Tres líneas  $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$  y  $\gamma = (c_1, c_2, c_3)$  son concurrentes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

### 3.3.3 Perspectividad en Coordenadas Homogéneas

Sea  $l$  una línea parametrizada en términos de  $A$ ,  $B$  y parámetro  $k$ ; entonces, cualquier punto  $P$  de  $l$  puede expresarse como

$$P = A + kB.$$

Análogamente, si  $l'$  es una segunda línea parametrizada en términos de  $A'$ ,  $B'$  como puntos base y  $k'$  como parámetro entonces, todo punto  $P'$  de  $l'$  lo podemos expresar en la forma

$$P' = A' + k'B'$$

Ahora, hay una perspectividad entre ambas con centro en  $V$ , al hacer un desarrollo similar al que se realizó en 1.3, se obtiene la ecuación de perspectividad entre los parámetros:

$$\alpha k k' + \beta k + \gamma k' + \delta = 0$$

donde

$$\alpha = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} ; \beta = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} ; \delta = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix}$$

### 3.4 Cónicas

Veremos ahora cómo obtener tanto la ecuación puntual como la lineal de una cónica, en términos de haces de líneas y de puntos en proyectividad.

#### 3.4.1 Cónica puntual

Sea  $A$  el vértice de un haz de líneas generado por  $l_1$  y  $l_2$ ;  $B$  el vértice de otro haz generado por  $l_3$  y  $l_4$  entonces, la ecuación del haz en  $A$  se puede escribir como

$$l_1 - \lambda l_2 = 0 \tag{3.4.7}$$

mientras que la del haz con vértice  $B$

$$l_3 - \mu l_4 = 0 \tag{3.4.8}$$

donde  $l_i = A_i x_1 + B_i x_2 + C_i x_3 = 0$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Una relación bilineal entre  $\lambda$  y  $\mu$

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 ; \text{ con } ad - bc \neq 0 \tag{3.4.9}$$

establece una correspondencia uno a uno entre las líneas del haz con vértice  $A$  y las del haz con vértice

*B*. A cada línea *a* del haz *A*, le corresponde una línea *b* del haz en *B* y viceversa. Esto establece una proyectividad entre las líneas de ambos haces. Cuando la línea *a* se mueve a través de las líneas  $a_1, a_2, a_3, \dots$  del haz *A*, la línea *b* se mueve sobre las líneas  $b_1, b_2, b_3, \dots$  del haz *B*, y su punto de intersección *P*, se mueve sobre los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  (Vea la figura 3-3). Para encontrar el lugar geométrico que describen, procedamos a eliminar a  $\lambda$  y  $\mu$  de las tres ecuaciones anteriores.

Multiplicando la ecuación (3.4.9) por  $l_2 l_4$  y reordenando términos obtenemos

$$a(\lambda l_2)\mu l_4 + b l_4(\lambda l_2) + c l_2(\mu l_4) + d l_2 l_4 = 0$$

usando las ecuaciones (3.4.7) y (3.4.8), esta última ecuación se puede reescribir

$$a l_1 l_3 + b l_1 l_4 + c l_2 l_3 + d l_2 l_4 = 0$$

ésta última es una ecuación homogénea de segundo grado, por lo tanto es de la forma:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

lo que indica, que el lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas correspondientes de haces en proyectividad es una **cónica puntual**.

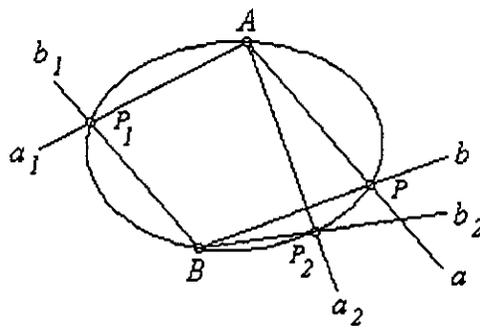


Figura 3-3: Cónica puntual

### 3.4.2 Cónica lineal

Consideremos ahora la línea  $a$  (haz de puntos) generada por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , cuya ecuación está dada por

$$P_1 - \lambda P_2 = 0$$

y a la línea  $b$  dada por la ecuación

$$P_3 - \mu P_4 = 0$$

donde  $P_i = A_i\alpha + B_i\beta + C_i\gamma$ .

Una relación bilineal no-singular entre  $\lambda$  y  $\beta$

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 ; \text{ con } ad - bc \neq 0$$

establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de la línea  $a$  y de la línea  $b$ , donde a cada punto  $A$  de la línea  $a$  le corresponde un punto  $B$  de la línea  $b$  y viceversa. Esto establece una proyectividad entre los puntos de los haces. Cuando el punto  $A$  se mueve a través de los puntos  $A_1, A_2, A_3 \dots$  del haz  $a$ , el punto  $B$  se mueve sobre los puntos  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , mientras que la línea  $\overline{AB}$  se mueve a través de las líneas  $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3} \dots$  (figura 3-4). La ecuación de la envolvente de esta línea, la obtenemos al hacer un procedimiento parecido al que realizamos para obtener la ecuación del lugar geométrico determinado por los puntos de intersección de las líneas correspondientes de dos haces de líneas en proyectividad; así llegamos a la siguiente expresión

$$aP_1P_3 + bP_1P_4 + cP_2P_3 + P_2P_4 = 0$$

Podemos concluir que la envolvente que describen las líneas que unen puntos correspondientes del haz  $a$  y el haz  $b$  es una cónica lineal.

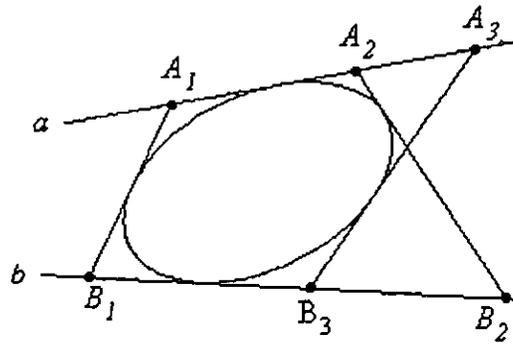


Figura 3-4: Cónica Lineal

### 3.5 Notas y Referencias

El material que se presenta en este capítulo se consultó principalmente del tercer capítulo del libro Dirk J. Struik [4].

## Capítulo 4

# Plano Projectivo

### 4.1 Introducción

Este capítulo lo dedicaremos al estudio puramente algebraico de algunos resultados de la geometría en la que no existen líneas paralelas, y por tanto, es posible el manejo de la dualidad entre puntos y líneas.

**Definición 4.1.28** *Un plano proyectivo consta del par ordenado  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ , donde*

- $\mathcal{P}$  es un conjunto no vacío, a cuyos elementos llamaremos puntos.
- $\mathcal{L}$  es una colección no vacía de subconjuntos de  $\mathcal{P}$ , y nos referiremos a ellos como las líneas del plano.

*que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Si  $P$  y  $Q$  son puntos distintos, existe una única línea  $l$ , tal que  $P \in l$  y  $Q \in l$ .
2. Si  $l$  y  $l'$  son dos líneas diferentes en  $\mathcal{L}$ , entonces  $\exists ! P \ni P \in l, P \in l'$ .
3. Cada línea tiene por lo menos tres puntos; hay al menos dos líneas.

### 4.2 El plano proyectivo real

En  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , definamos la siguiente relación entre los vectores columna. El vector  $(x_1, x_2, x_3)^t$  está relacionado con el vector  $(x'_1, x'_2, x'_3)^t$ ,  $(x_1, x_2, x_3)^t \cong (x'_1, x'_2, x'_3)^t$ , si y sólo si existe una constante  $k$ , diferente de cero, tal que

$$(x'_1, x'_2, x'_3)^t = k(x_1, x_2, x_3)^t$$

es fácil verificar que esta relación es de equivalencia. Basándonos en esta relación, definamos al conjunto de puntos de nuestro plano proyectivo de la siguiente manera:

Cada elemento de  $\mathcal{P}$  es una de las clases de equivalencia inducida por la relación antes definida. Así, un **punto proyectivo** consiste de algún vector columna  $x$  y de todos sus múltiplos (diferentes de cero); es decir, un punto proyectivo consiste de todos los puntos diferentes de cero que están en la línea que pasa por el origen, y tiene la dirección del vector  $x$ .

Una línea  $l$  de  $\mathcal{L}$ , es el conjunto de puntos proyectivos que satisfacen una ecuación homogénea de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

por tanto, a una línea proyectiva, la podemos identificar a través del vector renglón  $\alpha^t = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Observemos que como la ecuación, es homogénea, cualquier múltiplo escalar diferente de cero de  $\alpha^t$ , también la satisface, es decir, los vectores  $\alpha^t$  y  $k\alpha^t$  ( $k \neq 0$ ), representan a la misma línea proyectiva. Por lo tanto, podemos definir una relación de equivalencia entre los vectores renglón, análoga a la que se definió para los puntos y, entonces, una **línea proyectiva** es una clase de equivalencia; geoméricamente, la línea proyectiva es el plano que pasa por el origen y que es normal al vector  $\alpha^t$ .

De la definición, un punto y una línea proyectiva son incidentes, si el producto punto de sus coordenadas es cero

$$\alpha^t x = 0$$

#### 4.2.1 Puntos y líneas

En la geometría euclidiana, dos puntos diferentes definen una línea; veamos que esta noción también es válida en el plano proyectivo real.

Sean  $a$  y  $b$  dos puntos distintos, si definen una línea, denotémosla por  $\gamma^t$ . Como  $a$  es un punto de la línea

$$\gamma^t a = 0$$

y dado que  $b$  también pertenece a  $\gamma^t$

$$\gamma^t b = 0$$

la solución de este sistema homogéneo, está dada por

$$\gamma^t = a \wedge b$$

donde “ $\wedge$ ” denota el producto cruz. Sus componentes se pueden calcular usando los siguientes determinantes

$$\gamma^t = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{array} \right) \quad (4.2.1)$$

De manera que cualesquiera dos puntos proyectivos definen una línea. Ahora bien, notemos que, si reemplazamos a  $a$  por un múltiplo diferente de cero  $ka$ , entonces como  $ka$  y  $a$  representan al mismo punto proyectivo,  $ka$  y  $b$ , también deben definir a  $\gamma^t$ . Esto lo podemos mostrar, usando las propiedades del producto cruz

$$ka \wedge b = k(a \wedge b) = k\gamma^t$$

como un múltiplo escalar (diferente de cero) de  $\gamma^t$  y  $\gamma^t$  definen a la misma línea proyectiva, concluimos que la línea proyectiva definida por  $ka$  y  $b$ , es idéntica a la línea proyectiva determinada por  $a$  y  $b$ .

Veamos ahora el concepto correspondiente para las líneas.

La intersección de dos líneas define un punto.

Sean  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  dos líneas, si éstas se intersecan en un punto  $x$ , entonces  $x$  está dado por la solución al sistema

$$\alpha^t x = 0$$

$$\beta^t x = 0$$

es decir

$$x = \alpha^t \wedge \beta^t \quad (4.2.2)$$

expresión similar a la dada por la ecuación (4.2.1).

La noción de que dos puntos definan una línea nos resulta algo familiar, pero, el que dos líneas

diferentes siempre definan un punto, nos indica que en el plano proyectivo no existen las líneas paralelas.

El teorema de Pappus es uno de los teoremas fundamentales en el plano proyectivo. Éste se puede enunciar como sigue

**Teorema 4.2.29 (Teorema de Pappus)** Sean  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  dos líneas distintas. Si  $a_1, a_2, a_3$  son tres puntos diferentes de  $\alpha^t$ , y  $b_1, b_2, b_3$  son tres puntos diferentes de  $\beta^t$ , entonces, los puntos:

$$c = (a_2 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_2) \quad (4.2.3)$$

$$d = (a_1 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_1) \quad (4.2.4)$$

$$e = (a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)$$

son colineales, como lo ilustra la figura 4-1. La línea a la que pertenecen estos puntos se le llama línea de Pappus.

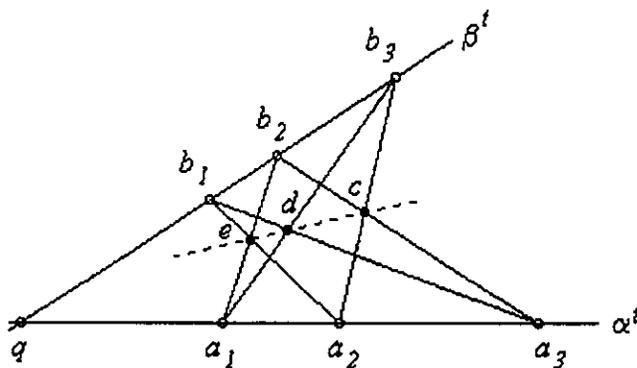


Figura 4-1: Teorema de Pappus

### Demostración

Sea  $q$  el punto de intersección de las líneas  $\alpha^t$  y  $\beta^t$ . Si es necesario, podemos reescalar las coordenadas de todos los puntos involucrados, de manera que los cuatro puntos en  $\alpha^t$  estén dados por:

$$q, a_1, a_2 \cong q + a_1, a_3 \cong q + k_1 a_1; k_1 \text{ constante}$$

y los puntos de  $\beta^t$  por

$$q, b_1 \cong q + k_2 b_3, b_2 \cong q + b_3, b_3; k_2 \text{ constante}$$

Como  $c$  es el punto de intersección de las líneas  $a_2 \wedge b_3$  y  $a_3 \wedge b_2$ , lo podemos expresar en la forma:  $c = r(q + a_1) + sb_3 = t(q + b_3) + u(q + k_1 a_1)$ . Considerando que  $q$ ,  $a_1$  y  $b_3$  no son colineales, podemos comparar los coeficientes, obteniendo

$$r = t + u$$

$$r = uk_1$$

$$s = t$$

este sistema nos lleva a la siguiente solución:

$$r = uk_1$$

$$s = t = uk_1 - u = u(k_1 - 1)$$

Considerando que un factor común en los coeficientes  $r$ ,  $s$ ,  $t$  y  $u$ , no afecta, podemos elegir  $u = 1$ , para este valor, obtenemos  $r = k_1$ ,  $s = t = k_1 - 1$ , por tanto

$$c = k_1 q + k_1 a_1 + (k_1 - 1) b_3$$

análogamente, para el punto de intersección de las líneas  $a_1 \wedge b_3$  y  $a_3 \wedge b_1$  se obtienen las expresiones:  $d = ra_1 + sb_3 = d = ra_1 + sb_3$ ; cuya solución es de la forma:  $t = -u$ ,  $s = uk_2$  y  $r = -uk_1$ , por tanto,  $d = k_1 a_1 - k_2 b_3$ . Finalmente para  $e$ , que se puede representar en la forma

$$e = ra_1 + s(q + b_3)$$

$$= t(q + a_1) + u(q + k_2 b_3)$$

y cuya solución viene dada por  $s = uk_2$  y  $r = t = u(k_2 - 1)$ , de ésta se sigue que el punto lo podemos expresar como  $e = k_2 q + (k_2 - 1)a_1 + k_2 b_3$ .

Las expresiones deducidas para  $c$ ,  $d$  y  $e$ , las podemos reescribir en la forma

$$c = (q \mid a_1 \mid b_3)(k_1, k_1, k_1 - 1)^t$$

$$d = (q \mid a_1 \mid b_3)(0, k_1, -k_2)^t$$

$$e = (q \mid a_1 \mid b_3)(k_2, k_2 - 1, k_2)^t$$

donde  $(q \mid a_1 \mid b_3)$  representa la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los puntos  $q$ ,  $a_1$  y  $b_3$  respectivamente. Este sistema también lo podemos expresar en la forma:

$$\begin{pmatrix} c^t \\ d^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & k_1 - 1 \\ 0 & k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_2 - 1 & k_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} q^t \\ a_1^t \\ b_3^t \end{pmatrix}$$

Notemos que el determinante de la matriz de  $3 \times 3$ , es cero, lo que nos indica que los puntos  $c$ ,  $d$  y  $e$  son colineales. ■

### 4.2.2 Dualidad

Consideremos dos ternas de números reales, digamos,  $a, b, c$  y  $r, s, t$ , que satisfacen la relación

$$ar + bs + ct = 0.$$

Podríamos decir que la terna  $a, b, c$  representa las coordenadas de un punto y, que la terna  $r, s, t$  representa las de una línea; entonces, la ecuación nos indica que el punto  $(a, b, c)^t$  pertenece a la línea  $(r, s, t)$ , o bien, en lugar de que  $a, b$  y  $c$  representen las coordenadas de un punto, ahora representen las de una línea y, que  $r, s, t$  sean las coordenadas del punto.

Esta posibilidad de interpretación geométrica dual de una expresión algebraica, es fundamental en geometría proyectiva y, es llamado el principio de dualidad. Como ejemplo, veamos el Teorema de Pappus.

Sean  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  dos líneas diferentes. Si  $a_1, a_2, a_3$  son tres puntos diferentes de  $\alpha^t$ , y  $b_1, b_2, b_3$  son tres puntos diferentes de  $\beta^t$ , entonces, los puntos:

Sean  $a$  y  $b$  dos puntos diferentes, si  $\alpha_1^t, \alpha_2^t$  y  $\alpha_3^t$  son tres líneas diferentes que inciden en  $a$ ;  $\beta_1^t, \beta_2^t$  y  $\beta_3^t$  tres líneas diferentes que inciden en  $b$ . Entonces, las líneas

$$c = (a_2 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_2)$$

$$d = (a_1 \wedge b_3) \wedge (a_3 \wedge b_1)$$

$$e = (a_1 \wedge b_2) \wedge (a_2 \wedge b_1)$$

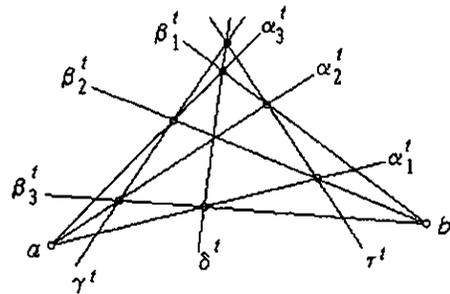
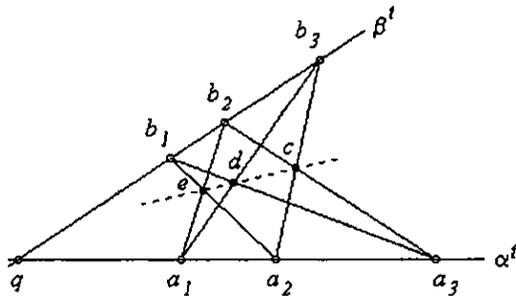
$$\gamma^t = (\alpha_2^t \wedge \beta_2^t) \wedge (\alpha_3^t \wedge \beta_2^t)$$

$$\delta^t = (\alpha_1^t \wedge \beta_3^t) \wedge (\alpha_3^t \wedge \beta_1^t)$$

$$\tau^t = (\alpha_1^t \wedge \beta_2^t) \wedge (\alpha_2^t \wedge \beta_1^t)$$

son colineales, como lo ilustra la figura siguiente

son concurrentes.



Como ya hemos probado el teorema de Pappus, ¡la demostración de su dual viene gratis!. Su prueba sería una copia de la del teorema de Pappus y, por tanto, la podemos omitir.

### 4.2.3 Interpretación del plano afín extendido y del plano proyectivo real.

Un punto  $x = (x_1, x_2)^t$  del plano afín puede identificarse con el punto del espacio tridimensional  $x = (x_1, x_2, 1)^t$  del plano  $z = 1$ . Interpretado como punto proyectivo, éste, a su vez, se identifica con todos los puntos de la forma  $x \cong (kx_1, kx_2, k)^t$  (para  $k$  diferente de cero), así, tenemos que al punto proyectivo  $x = (x, y, z)^t$  le corresponde el punto afín  $x = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})^t$ . Recordemos que  $x = (x, y, z)^t$  son las coordenadas homogéneas del punto afín. Por el momento, asumamos que  $z \neq 0$  y veamos cuál es la contraparte de una línea proyectiva  $\alpha^t$ . Si  $\alpha^t = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , entonces la línea afín que le corresponde es  $l = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right)$ ;

estas coordenadas deben interpretarse como los coeficientes de la ecuación  $l = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)x + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)y + 1$  (nuevamente con  $\alpha_3 \neq 0$ ).

Si la relación

$$x = k_1 a + k_2 b = \begin{pmatrix} k_1 a_1 + k_2 b_1 \\ k_1 a_2 + k_2 b_2 \\ k_1 a_3 + k_2 b_3 \end{pmatrix}$$

se satisface para tres puntos proyectivos, veamos cuál es la relación que satisfacen sus puntos afines correspondientes.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{k_1 a_3 + k_2 b_3} \begin{pmatrix} k_1 a_1 + k_2 b_1 \\ k_1 a_2 + k_2 b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k_1 a_3}{k_1 a_3 + k_2 b_3} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_3} \\ \frac{a_2}{a_3} \end{pmatrix} + \frac{k_2 b_3}{k_1 a_3 + k_2 b_3} \begin{pmatrix} \frac{b_1}{b_3} \\ \frac{b_2}{b_3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{k_1 a_3}{k_1 a_3 + k_2 b_3} a + \frac{k_2 b_3}{k_1 a_3 + k_2 b_3} b \end{aligned}$$

Notemos que los coeficientes de los puntos afines  $a$  y  $b$  suman uno; es decir,  $x$  es combinación baricéntrica de  $a$  y  $b$ , también llamada combinación afín. Dicho de otro modo, mientras que podemos formar combinaciones lineales de dos puntos proyectivos, es ilegal usar combinaciones lineales de puntos afines, la única combinación admisible para puntos afines es la combinación baricéntrica.

Sean  $\alpha^t = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  y  $\tilde{\alpha}^t = (\alpha_1, \alpha_2, \tilde{\alpha}_3)$  dos líneas proyectivas, que difieren en su tercer componente; éstas se intersecan en el punto  $\alpha^t \wedge \tilde{\alpha}^t$ , cuya tercer componente es cero, lo que nos indica que no tiene un punto afín correspondiente. Para salvar esta situación, agregamos los puntos al infinito, que corresponden a aquellos puntos cuya tercera componente es cero; todos estos puntos afines al infinito, inciden con la línea proyectiva  $\alpha^t = (0, 0, 1)$ . La línea afín que le corresponde es la línea al infinito  $l_\infty$ . Al agregar esta línea al plano afín, nos referiremos a él como el plano afín extendido, de esta manera, el plano afín extendido es un modelo para el plano proyectivo.

*La diferencia de los puntos afines  $a$  y  $b$ ,  $a - b$  es un vector. Sin embargo, la diferencia de dos puntos proyectivos, sigue siendo un punto proyectivo, que se encuentra en la línea que une a dichos puntos. Sean  $a = (a_1, a_2, 1)^t$  y  $b = (b_1, b_2, 1)^t$  las versiones proyectivas de los puntos afines  $a$  y  $b$ . La diferencia de puntos afines es un vector afín. Pero la diferencia de los puntos proyectivos, es el punto proyectivo  $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, 0)^t$ , éste corresponde a un punto afín al infinito. Así, los puntos afines al infinito*

corresponden a vectores afines o direcciones. El vector afín  $x$ , corresponde a un punto al infinito, pero también el vector  $kx$  para cualquier  $k$  diferente de cero. De manera que a un punto al infinito no sólo le corresponde un vector  $x$ , sino que le corresponden todos los vectores que tienen la misma dirección que  $x$ .

## 4.3 Colineaciones

En la geometría proyectiva se estudian los invariantes bajo proyectividades, éstas son funciones biyectivas del plano proyectivo que preservan la colinealidad. A tales funciones les llamaremos **colineaciones**.

### 4.3.1 Las matrices inducen colineaciones

Sea  $A$  una matriz no singular de  $3 \times 3$ ;  $x \in \mathcal{P}$ ;  $\bar{x}$  un vector representante y  $r \in \mathbb{R}$ , entonces como  $A(r\bar{x}) = rA(\bar{x})$ , la transformación  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  dada por  $\Psi(x) = A\bar{x}$ , está bien definido, por lo tanto, podemos escribir  $\Psi(x) = Ax$ .

**Teorema 4.3.30** *Dada una matriz  $A$  no singular, la transformación  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  dada por  $\Psi(x) = Ax$  es una colineación.*

#### Demostración

Supongamos que  $a, b$  y  $c$  son tres puntos colineales, y sean  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  sus representantes. Entonces el determinante cuyas columnas son las coordenadas de los puntos es cero

$$|\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}| = 0$$

Calculando el determinante de los puntos imagen

$$|\Psi(\bar{a}) \ \Psi(\bar{b}) \ \Psi(\bar{c})| = |A\bar{a} \ A\bar{b} \ A\bar{c}| = |A(\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c})| = |A| |\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}| = 0$$

Como el determinante de la matriz cuyas columnas son  $\Psi(\bar{a})$ ,  $\Psi(\bar{b})$  y  $\Psi(\bar{c})$  es cero, las imágenes de puntos colineales son colineales y, por tanto,  $\Psi$  es una colineación. ■

La matriz  $A$  representa una transformación lineal no singular en  $\mathbb{R}^3$  con respecto a la base estándar. De este modo,  $A$  induce una transformación entre subespacios, los subespacios unidimensionales y bidimensionales son enviados en subespacios de la misma dimensión, es decir, los puntos proyectivos son transformados en puntos y las líneas en líneas. La transformación preserva inclusión entre subespacios, lo que significa que la incidencia se preserva. El siguiente teorema muestra la relación entre la matriz  $A$ , la transformación que induce entre las líneas y los vectores renglón que los representan.

**Teorema 4.3.31** *La colineación  $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , dada por  $\Psi(x) = Ax$ , induce una transformación entre líneas, que también la denotaremos por  $\Psi$ , ésta viene dada por  $\Psi(\xi^t) = \xi^t A^{-1}$  para cada  $\xi^t \in \mathcal{L}$ . La transformación preserva incidencia.*

**Demostración**

Sea  $\xi^t$  una línea y  $x$  un punto tal que  $x$  y  $\xi^t$  son incidentes; es decir,  $\xi^t x = 0$ , queremos demostrar que  $\Psi(\xi^t)$  es incidente con  $\Psi(x)$ .

$$\begin{aligned} \Psi(\xi^t)\Psi(x) &= (\xi^t A^{-1})(Ax) \\ &= \xi^t x \end{aligned}$$

como  $x$  y  $\xi^t$  son incidentes, la relación  $\Psi(\xi^t)\Psi(x)$  es igual a cero, es decir,  $\Psi(\xi^t)$  y  $\Psi(x)$  son incidentes. ■

**Lema 4.3.32** *Sean  $a, b, c, d$  cuatro puntos, tales que ningún conjunto de tres es colineal. Entonces existe una matriz  $A$ , que induce una colineación  $\Psi$ , tal que envía los puntos  $(1, 0, 0)^t$ ,  $(0, 1, 0)^t$ ,  $(0, 0, 1)^t$  y  $(1, 1, 1)^t$  en los puntos  $a, b, c$  y  $d$  respectivamente. Además cualquier otra matriz con esta misma propiedad es un múltiplo escalar de  $A$ .*

**Demostración**

Si la matriz  $A$  está dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

como  $\Psi((1, 0, 0)^t) = a$ ,  $\Psi((0, 1, 0)^t) = b$  y  $\Psi((0, 0, 1)^t) = c$  entonces

$$\begin{aligned} A(1, 0, 0)^t &= (a_{11}, a_{21}, a_{31})^t = xa ; \text{ con } x \neq 0 \\ A(0, 1, 0)^t &= (a_{12}, a_{22}, a_{32})^t = yb ; \text{ con } y \neq 0 \\ A(0, 0, 1)^t &= (a_{13}, a_{23}, a_{33})^t = zc ; \text{ con } z \neq 0 \end{aligned}$$

por tanto, podemos reescribir a la matriz  $A$  en la forma

$$A = [xa \ yb \ zc]$$

donde  $a = (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)^t$  y  $c = (c_1, c_2, c_3)^t$ . Además la condición  $A(1, 1, 1)^t = ud$  para  $u \neq 0$ , determina el siguiente sistema de ecuaciones

$$xa_1 + yb_1 + zc_1 = ud_1$$

$$xa_2 + yb_2 + zc_2 = ud_2$$

$$xa_3 + yb_3 + zc_3 = ud_3$$

Como los puntos  $a, b$  y  $c$  no son colineales, el determinante asociado a este sistema es diferente de cero, por lo tanto, éste tiene una única solución. Si  $x, y, z, u$  es una solución del sistema, entonces, ninguno de estos valores puede ser cero, porque si lo fuera, tres de los puntos serían colineales. De modo que cada valor de  $u$  determina los valores de  $x, y, z$  y, por lo tanto a la matriz  $A$ .

Ahora bien, cualesquiera dos soluciones del sistema son múltiplos y, por tanto, representan a la misma colineación. ■

**Teorema 4.3.6** Sean  $a, b, c$  y  $d$  cuatro puntos, tales que no tres de éstos sean colineales, y  $a', b', c'$  y  $d'$  otro conjunto de puntos. Entonces, existe una única colineación, que manda a los puntos  $a, b, c$  y  $d$  en  $a', b', c'$  y  $d'$  respectivamente.

#### Demostración

Por el lema anterior, existen dos colineaciones  $\Psi_B$  y  $\Psi_C$  tales que los puntos  $(1, 0, 0)^t$ ,  $(0, 1, 0)^t$ ,  $(0, 0, 1)^t$  y  $(1, 1, 1)^t$  son transformados bajo  $\Psi_B$  en los puntos  $a, b, c$  y  $d$  y, que bajo  $\Psi_C$ , se transforman en  $a', b', c'$  y  $d'$ . Si tomamos la transformación inversa de  $\Psi_B$  ( $\Psi_{B^{-1}}$ ) entonces,  $\Psi_{B^{-1}}$  es una colineación que envía los puntos  $a, b, c$  y  $d$  en los puntos  $(1, 0, 0)^t$ ,  $(0, 1, 0)^t$ ,  $(0, 0, 1)^t$  y  $(1, 1, 1)^t$ , respectivamente, por lo tanto, la composición de las transformaciones  $\Psi_{B^{-1}}$  y  $\Psi_C$ :  $\Psi_C \circ \Psi_{B^{-1}}$  es una colineación que envía los puntos  $a, b, c$  y  $d$  en  $a', b', c'$  y  $d'$ . La matriz que determina la colineación esta dada por  $A = CB^{-1}$ . ■

### 4.3.2 Correlaciones y Polaridades

Sea  $A$  una matriz no singular de  $3 \times 3$ ; a la transformación  $\rho$  de  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{L}$  dada por  $\rho(a) = (Aa)^t$  y de  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{P}$  definida por  $\rho(\alpha^t) = (\alpha^t A^{-1})^t$  se le llama **correlación**.

**Teorema 4.3.7** Las correlaciones preservan la incidencia.

#### Demostración

Sean  $\alpha^t$  una línea y  $a$  un punto que son incidentes, es decir  $\alpha^t a = 0$ . Nuestro objetivo es demostrar que  $\rho(a)$  y  $\rho(\alpha^t)$  son incidentes. Evaluando su producto punto, obtenemos

Sean  $\alpha^t$  una línea y  $a$  un punto que son incidentes, es decir  $\alpha^t a = 0$ . Nuestro objetivo es demostrar que  $\rho(a)$  y  $\rho(\alpha^t)$  son incidentes. Evaluando su producto punto, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho(a)\rho(\alpha^t) &= (Aa)^t(\alpha^t A^{-1})^t \\ &= [\alpha^t A^{-1} Aa]^t \\ &= (\alpha^t a)^t\end{aligned}$$

como  $\alpha^t$  y  $a$  son incidentes, entonces,  $(\alpha^t a)^t$  es cero y, por tanto,  $\rho(a)\rho(\alpha^t) = 0$ , lo que indica que  $\rho(a)$  y  $\rho(\alpha^t)$  son incidentes. ■

**Definición 4.3.35** Si el cuadrado de una correlación es la identidad, entonces le llamaremos *polaridad*.

**Teorema 4.3.36** La correlación  $\rho$  determinada por la matriz  $A$  es una polaridad si y sólo si  $A = A^t$ .

**Demostración**

$$\begin{aligned}\rho(\rho(a)) &= \rho((Aa)^t) \\ &= ((Aa)^t A^{-1})^t \\ &= A^{-t} Aa\end{aligned}$$

de manera que  $\rho$  será una polaridad si y sólo si  $\rho(\rho(a)) = a$ ; es decir, si y sólo si  $A^{-t} A = rI$ , donde  $r$  es una constante. Multiplicando por  $A^t$

$$A = rA^t$$

y después de transponer

$$A^t = rA$$

de estas dos, tenemos que  $A = r^2 A$ ; como estamos excluyendo a las matrices singulares,  $r = 1$ . ■

### 4.3.3 Polo y Polar

Si  $\rho$  es una polaridad, entonces  $\rho(a)$  es la polar de  $a$ , mientras que  $\rho(\alpha^t)$  es el polo de  $\alpha^t$ .

Se dice que  $a$  es conjugado de  $b$ , si  $a$  y la polar de  $b$  son incidentes, es decir, si  $\rho(b)a = 0$ . Análogamente, la línea  $\alpha^t$  es conjugada de  $\beta^t$  si  $\alpha^t$  incide en el polo de  $\beta^t$ , es decir,  $\alpha^t\rho(\beta^t) = 0$ .

Un punto es autoconjugado si su conjugado es el mismo, en otras palabras,  $a$  es autoconjugado, si  $a$  incide con su polar ( $\rho(a)a = 0$ ).

Una línea es autoconjugada si es incidente con su polo, es decir, si  $\alpha^t\rho(\alpha^t) = 0$ .

**Teorema 4.3.37** La relación "conjugado" es simétrica, esto es, si  $a$  es conjugado de  $b$ , entonces  $b$  es conjugado de  $a$ .

#### Demostración

Si  $a$  es conjugado de  $b$ ,  $\rho(b)a = (Ab)^t a = 0$ , al transponer, substituir  $A^t$  por  $A$  y transponer nuevamente obtenemos

$$(Aa)^t b = \rho(a)b = 0$$

esta última expresión nos indica que  $b$  incide con la polar de  $a$ , por tanto,  $b$  es conjugado de  $a$ . ■

Supongamos que  $a$  es conjugado de  $b$  y denotemos por  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  a sus respectivas polares, entonces, por definición,  $a$  incide con  $\beta^t$ , y como la relación es simétrica,  $b$  incide con  $\alpha^t$ .

Si denotamos por  $c$  al punto de intersección de  $\alpha^t$  y  $\beta^t$ , se tiene, por definición, que  $c$  es conjugado tanto de  $a$  como de  $b$  y, al aplicar el teorema anterior obtenemos que  $a$  y  $b$  son conjugados de  $c$ ; es decir,  $a$  y  $b$  inciden con la polar de  $c$ , se sigue entonces que  $\rho(c)$  es la línea que une a los puntos  $a$  y  $b$  (vea la figura 4-2).

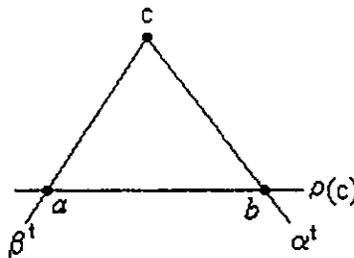


Figura 4-2:

De esta forma hemos visto que si  $a$  y  $b$  son conjugados entonces, la línea que los une, es la polar del punto de intersección de sus polares.

**Teorema 4.3.38** *Un punto  $a$  es autoconjugado si y sólo si su polar  $\alpha^t = \rho(a)$  es autoconjugada.*

**Demostración**

$\rho(a)$  es autoconjugada si y sólo si incide con su polo, que es  $\rho(\rho(a))$ .

$$\rho(a)\rho(\rho(a)) = \rho(a)a$$

lo que significa que  $\rho(a)$  incide con su polo si y sólo si  $\rho(a)a = 0$ , es decir, si y sólo si  $a$  es autoconjugado. ■

**Teorema 4.3.39** *Toda línea tiene a lo más dos puntos autoconjugados.*

**Demostración**

Sea  $\gamma^t$  una línea;  $a$  y  $b$  dos puntos autoconjugados distintos e incidentes con  $\gamma^t$ , entonces cada punto  $p$  de  $\gamma^t$  se puede expresar como:  $p = a + bx$ , donde  $x$  es una constante diferente de cero.

Supongamos que existe un tercer punto autoconjugado  $p$  que incide con  $\gamma^t$ , entonces  $p^t Ap = 0$ , desarrollando el producto

$$\begin{aligned} p^t Ap &= 2xa^t Ab \\ &= 2x\rho(a)b \end{aligned}$$

como  $x$  es diferente de cero,  $\rho(a)b = 0$ , lo que indica que  $a$  y  $b$  son conjugados, denotando por  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  a las polares de  $a$  y  $b$  respectivamente, se tienen las siguientes expresiones  $\alpha^t b = 0$  y  $\beta^t a = 0$  y como la relación es simétrica,  $\alpha^t a = 0$  y  $\beta^t b = 0$ .

De estas cuatro expresiones, deducimos que  $\alpha^t = \beta^t = \gamma^t$ ; es decir,  $\rho(a) = \rho(b)$ , pero esto implica que  $a$  es igual a  $b$ , lo cual es una contradicción, por lo tanto, concluimos que una línea tiene a lo más dos puntos autoconjugados. ■

#### 4.3.4 Cónicas

Dada una polaridad  $\rho$ , el conjunto de puntos autoconjugados, son aquellos que satisfacen la ecuación

$$x^t Ax = 0$$

Es decir, el conjunto de puntos autoconjugados bajo una polaridad  $\rho$  satisfacen una ecuación cuadrática, y por tanto, el lugar geométrico que determinan es una cónica puntual. De acuerdo al teorema 4.3.39, toda línea que intersecta a una cónica, lo hace en a lo más dos puntos.

Análogamente, una línea  $\alpha^t \in \mathcal{L}$  es autoconjugada bajo la polaridad  $\rho$  si y sólo si satisface la ecuación

$$\alpha^t A \alpha = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto de líneas autoconjugadas bajo la polaridad  $\rho$  determinan una **cónica lineal**.

Dada esta definición, diremos que una línea es **tangente** a una cónica, si es una línea autoconjugada bajo  $\rho$ . En el siguiente teorema se hace ver que la tangente a la cónica, definida anteriormente, es aquella línea que toca a la curva en un único punto (doble), es decir, que coincide con la definición analítica de la tangente.

**Teorema 4.3.40** *Una línea es tangente a una cónica si y sólo si la cónica interseca a la línea en un único punto (doble), es decir, que coincide con la definición analítica de la tangente.*

#### Demostración

Sea  $\alpha^t$  una tangente a la cónica determinada por la matriz  $A$ . Por definición,  $\alpha^t$  es autoconjugada y por tanto su polo, al que denotaremos por  $a$ , es autoconjugado, entonces concluimos que  $\alpha^t$  incide en  $a$  y que  $a$  es un punto de la cónica. Si  $\alpha^t$  interseca a la cónica en otro punto, digamos en  $b$ , éste será conjugado de  $a$ , por tanto,  $a$  incide con la polar de  $b$ , además, como  $b$  también es autoconjugado,  $b$  incide con su polar, por lo tanto,  $a$  y  $b$  son puntos tanto de  $\alpha^t$  como de la polar de  $b$  ( $\beta^t$ ), indicándonos que  $\alpha^t = \beta^t$ ; es decir,  $a = b$ , contradiciendo la hipótesis, por tanto, podemos concluir que  $\alpha^t$  interseca a la cónica sólo en un punto.

Supongamos ahora que  $\alpha^t$  interseca a la cónica en un único punto, digamos  $a$ , y sea  $b$  otro punto de  $\alpha^t$ . Como  $a$  es un punto de la cónica  $a^t A a = 0$ , por otro lado, dado que  $b$  no pertenece a la cónica, se tiene que  $b^t A b \neq 0$ . Ahora bien, a cualquier punto  $p$  de  $\alpha^t$ , lo podemos expresar de la forma

$$p = a + x b$$

donde  $x$  es una constante diferente de cero, entonces  $p$  es un punto de la cónica si y sólo si  $p^t A p = 0$ .

Después de desarrollar esta expresión obtenemos

$$x(x b^t A b + 2 b^t A a) = 0$$

de ésta, vemos que para que  $x = 0$  sea la única solución,  $b^t A a = \rho(b)a = 0$ ; es decir,  $a$  y  $b$  son conjugados, por tanto,  $a$  incide con la polar de  $b$  y  $b$  con la polar de  $a$ , además, como  $a$  es autoconjugado,  $a$  incide con su polar, esto es, la polar de  $a$  es la línea que une los puntos  $a$  y  $b$ , es decir, la polar de  $a$  coincide con  $\alpha^t$  y por el teorema 4.3.38,  $\alpha^t$  es una línea autoconjugada. ■

Si el punto  $(x, y, z)^t$  es autoconjugado con respecto a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

entonces  $(x, y, z)A(x, y, z)^t = 0$ , después de desarrollar, obtenemos

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$$

considerando un punto del plano euclidiano, es decir, haciendo  $z = 1$ , la ecuación se transforma en

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

La tangente a la cónica determinada por  $A$  en el punto  $p_0 = (x_0, y_0, 1)^t$  está dada por su polar  $p_0^t A$ , por tanto, su ecuación es

$$p_0^t A p = 0$$

Si  $p$  es un punto exterior de la cónica, es decir, un punto tal que por él pasan dos líneas tangentes a la cónica, sean éstas  $\alpha^t$  y  $\beta^t$ . Entonces los polos de ambas líneas,  $a$  y  $b$  respectivamente, son puntos de la cónica, más aún, son los puntos de tangencia. Como  $p$  es conjugado tanto de  $a$  como de  $b$  y dado que la relación conjugado es simétrica, entonces  $a$  y  $b$  inciden con la polar de  $p$ . Así, la polar de  $p$  es la línea que pasa por  $a$  y  $b$ , vea la figura 4-3.

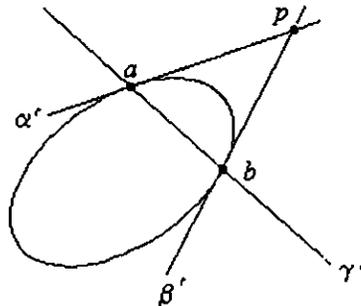


Figura 4-3: Polo y polar

Si  $p$  es un punto interior de la cónica, tracemos dos líneas  $\alpha^t$  y  $\beta^t$  que pasen por éste, si  $a$  y  $b$  son sus respectivos polos, entonces por construcción  $p$  es conjugado de  $a$ , pero, también lo es de  $b$ , por tanto,  $a$  y  $b$  son puntos de la polar de  $p$ ; es decir, la polar de  $p$  es la línea que pasa por  $a$  y  $b$ , vea la figura 4-4.

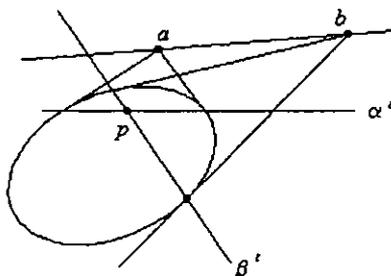


Figura 4-4: Polar de un punto interior a la cónica.

### Cónicas y Colineaciones

**Teorema 4.3.41** *Las colineaciones aplican cónicas en cónicas.*

#### Demostración

Sea  $C \equiv x^t Ax = 0$  y  $\Psi$  una colineación dada por  $\Psi(x) = Bx$ . Entonces  $\Psi(C) = \{y = Bx \mid x^t Ax = 0\}$ . Resolviendo para  $x$

$$x = B^{-1}y$$

al sustituirla en  $x^t Ax$

$$\begin{aligned} (B^{-1}y)^t A (B^{-1}y) &= 0 \\ y^t C y &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$C = (B^{-1})^t A B^{-1}$$

y como  $C^t = C$ , se tiene que  $y$  es autoconjugado con respecto a la polaridad dada por la matriz  $C$ , y por tanto, se deduce que  $\Psi(C)$  es una cónica. ■

**Teorema 4.3.42** *Una cónica está determinada por cinco puntos en posición general.*

### Demostración

Primero hagamos la demostración, suponiendo que los cinco puntos son  $p_1 = (1, 0, 0)^t$ ,  $p_2 = (0, 1, 0)^t$ ,  $p_3 = (0, 0, 1)^t$ ,  $p_4 = (1, 1, 1)^t$  y  $p_5 = (a_1, a_2, a_3)^t$ .

La matriz que determina a la cónica la podemos expresar en la forma

$$A = \begin{pmatrix} u & x & y \\ x & v & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$$

como cada punto es autoconjugado con respecto a la matriz  $A$ , se tiene

$$p_1^t A p_1 = 0$$

$$p_2^t A p_2 = 0$$

$$p_3^t A p_3 = 0$$

de estas tres, obtenemos que  $u = v = w = 0$ , y usando que  $p_4^t A p_4 = 0$  y que  $p_5^t A p_5 = 0$ , obtenemos el sistema

$$x + y + z = 0$$

$$a_1 a_2 x + a_1 a_3 y + a_2 a_3 z = 0$$

resolviendo para  $x$  y  $y$ , obtenemos

$$x = \frac{a_3(a_2 - a_1)}{a_1(a_3 - a_1)} z$$

$$y = \frac{a_2(a_1 - a_3)}{a_1(a_3 - a_2)} z$$

es decir, la solución es proporcional a

$$x = a_3(a_1 - a_2)$$

$$y = a_2(a_3 - a_1)$$

$$z = a_1(a_2 - a_3)$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3(a_2 - a_1) & a_2(a_3 - a_1) \\ a_3(a_2 - a_1) & 0 & a_1(a_2 - a_3) \\ a_2(a_3 - a_1) & a_1(a_2 - a_3) & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si los cinco puntos son  $b, c, d, e$ , y  $f$ , entonces, sea  $\Psi$  la colineación que transforma los puntos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  en los puntos  $b, c, d$  y  $e$  respectivamente, y  $a = \Psi^{-1}(f)$ . Si denotamos por  $\mathcal{C}$  a la cónica que pasa por los puntos  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $a$  entonces, la cónica dada por  $\Psi(\mathcal{C})$  pasa por los puntos  $b, c, d, e$ , y  $f$ . ■

El dual de este resultado se expresa en el siguiente teorema

**Teorema 4.3.43** Una cónica lineal está determinada por cinco líneas, de las cuales no tres de estas sean concurrentes.

**Teorema 4.3.44 (Teorema de Pascal)** Sean  $a, b, c, a', b'$  y  $c'$  seis puntos de una cónica. Si

$\bar{a} = (b \wedge c') \wedge (b' \wedge c)$ ,  $\bar{b} = (a \wedge c') \wedge (a' \wedge c)$  y  $\bar{c} = (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)$ . Entonces  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  son colineales (figura 4-5).

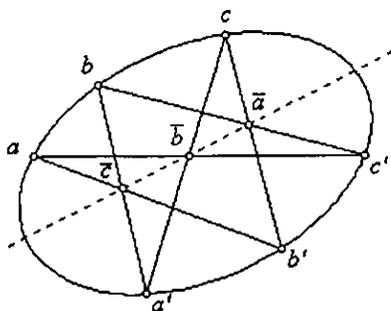


Figura 4-5: Teorema de Pascal

### Demostración

Con base en el teorema anterior, podemos asumir que  $b = (1, 0, 0)^t$ ,  $a = (0, 1, 0)^t$ ,  $a' = (0, 1, 0)^t$  y  $c' = (0, 0, 1)^t$ . Sean  $a = (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $b' = (b_1, b_2, b_3)^t$  y  $c = (c_1, c_2, c_3)^t$ . Ahora veamos cómo expresar los puntos  $\bar{a}, \bar{b}$  y  $\bar{c}$  en términos de  $a, b, c, a', b'$  y  $c'$ .

Dado que  $\bar{a}$  es un punto de la línea que pasa por  $b'$  y  $c$ , entonces  $\bar{a}$  se puede expresar

$$\bar{a} = c_2 b' - b_2 c = (c_2 b_1 - b_2 c_1, 0, c_2 b_2 - b_2 c_3)^t \quad (4.3.5)$$

Como  $\bar{b}$  es el punto de intersección de las líneas  $l_{a'}$  y  $l_{a'c}$ , cuyas coordenadas son  $(a_2, -a_1, 0)$  y  $(c_3, 0, -c_1)$  respectivamente, entonces  $\bar{b}$  está dado por

$$\bar{b} = ((a_2, -a_1, 0) \wedge (c_3, 0, -c_1))^t = (a_1 c_1, a_2 c_1, a_1 c_3)^t \quad (4.3.6)$$

Finalmente, como el punto  $\bar{c}$  pertenece a la línea que pasa por  $a$  y  $b'$ , entonces podemos expresar a  $\bar{c}$  en la forma

$$\bar{c} = b_3 a - a_3 b' = (b_3 a_1 - a_3 b_1, b_3 a_2 - a_3 b_2, 0)^t \quad (4.3.7)$$

Ahora para demostrar que  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  son colineales, tenemos que hacer ver que el determinante  $|\bar{a} \bar{b} \bar{c}| = 0$ , el que podemos calcular a través de  $-D$ , donde:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_2 a_3 \\ b_1 b_2 & b_1 b_3 & b_2 b_3 \\ c_1 c_2 & c_1 c_3 & c_2 c_3 \end{vmatrix}$$

Tomando en cuenta que  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  son puntos de la cónica, entonces la matriz  $C$  asociada a la cónica, debe ser de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & 0 & w \\ v & w & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que  $a$ ,  $b'$  y  $c$  también son puntos de la cónica, entonces  $a^t C a = b'^t C b' = c^t C c = 0$ , las cuales dan lugar al sistema

$$u a_1 a_2 + v a_1 a_3 + w a_2 a_3 = 0$$

$$u b_1 b_2 + v b_1 b_3 + w b_2 b_3 = 0$$

$$u c_1 c_2 + v c_1 c_3 + w c_2 c_3 = 0$$

cuyo determinante es cero, que es precisamente  $D$ , por tanto, podemos concluir que los puntos  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  son colineales. ■

En seguida enunciamos el dual del Teorema de Pascal

**Teorema 4.3.45 (Teorema de Brianchon)** Sean  $\alpha^t, \beta^t, \gamma^t, \alpha_1^t, \beta_1^t$  y  $\gamma_1^t$  seis líneas de una cónica lineal. Si  $\bar{\alpha}^t = (\beta^t \wedge \gamma_1^t) \wedge (\beta_1^t \wedge \gamma^t)$ ,  $\bar{\beta}^t = (\alpha^t \wedge \gamma_1^t) \wedge (\alpha_1^t \wedge \gamma^t)$  y  $\bar{\gamma}^t = (\alpha^t \wedge \beta_1^t) \wedge (\alpha_1^t \wedge \beta)$ . Entonces  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  y  $\bar{\gamma}$  concurren.

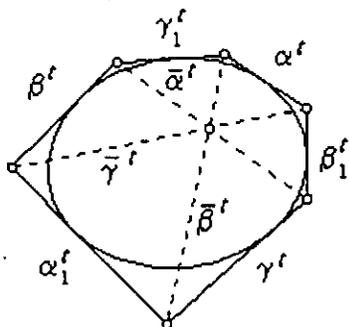


Figura 4-6: Teorema de Brianchon.

## 4.4 Notas y Referencias

En el presente capítulo mostramos una síntesis de los resultados que abordamos en el capítulo referente a las cónicas. Debemos hacer notar lo útil que resulta el empleo de los métodos algebraicos de la geometría proyectiva para el planteamiento y demostración de dichos teoremas.

Con este capítulo concluimos la parte teórica básica, que necesitaremos para desarrollar nuestras aplicaciones.

Para la presentación de este capítulo se consulto el libro Farin [6].

## Capítulo 5

# Graficación de cónicas

### 5.1 Introducción

Las cónicas son ampliamente usadas en el diseño asistido por computadora, por lo mismo, hay un gran número de algoritmos para trazarlas; éstos se dividen básicamente en dos categorías. Una produce la representación “puntual”; es decir, una aproximación a la curva a través de “*pixels*”; la segunda usa una sucesión de segmentos de línea conectados, en donde cada segmento se aproxima a través de un algoritmo eficiente de trazado de líneas.

En este capítulo nos enfocaremos en obtener una aproximación a la curva a través de una poligonal inscrita. La forma en que se puede obtener dicha poligonal, varía según la representación de la cónica. Uno de los métodos más populares es el del método recurrente de matrices, éste usa cuatro multiplicaciones para generar un punto. Recientemente se propuso un método en diferencias para trazar arcos cónicos en el plano. Las ventajas del método incluyen

- La forma del método es uniforme para trazar cualquier sección cónica.
- El cómputo requerido en cada iteración es simple, sólo dos multiplicaciones y varias sumas.
- El polígono obtenido es la mejor aproximación a la curva.

En el presente capítulo presentaremos cómo atacar el problema de graficar una cónica, teniendo como meta la presentación del método en diferencias.

## 5.2 Representación de una curva

La implementación de un algoritmo que grafique una curva depende de su representación. Por ejemplo, si la curva está dada por medio de una representación implícita  $F(x, y) = 0$ , tendríamos que dar el par de valores  $(x, y)$ , que satisfagan la ecuación, lo cual no es factible de implementar.

Algunas curvas también se pueden describir en forma explícita, a través de una función  $y = f(x)$ , pero esta representación tiene el inconveniente de que dado un valor de  $x$ , existe un único valor para  $y$ , y existen muchas curvas que no satisfacen esta condición, por ejemplo, las cónicas.

Otra forma de representación para una curva es la paramétrica. En este tipo de representación la curva está determinada por dos funciones  $x( )$  y  $y( )$ , que dependen de un parámetro, al que frecuentemente se le denota por  $t$ , así el punto asociado a  $t$  es  $p(t) = (x(t), y(t))^t$ .

La representación paramétrica de curvas salva las dificultades que se nos presentan con las representaciones implícitas y explícitas. Las curvas pueden ser multivaluadas, etc..

Nos abocaremos entonces a obtener la gráfica de una cónica cuya representación está dada en forma paramétrica.

## 5.3 Graficación de curvas representadas paramétricamente

Supongamos que la representación de la curva está dada a través de dos funciones definidas sobre el intervalo unitario.

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Al hacer variar de manera continua el valor del parámetro,  $p(t)$  va describiendo la curva, pero, si se trata de implementar un algoritmo que trace la gráfica, lo que hacemos es discretizar el parámetro y evaluar. De esta forma obtenemos un conjunto de puntos  $P_i = (x(t_i), y(t_i))^t$ , que finalmente conectamos por medio de un segmento.

El algoritmo que traza la gráfica de la curva  $(x(t), y(t))^t$  conforme  $t$  varía en el intervalo  $[0, 1]$  es

- Elegir  $n$  valores del parámetro  $t_1, t_2, \dots, t_n$  del intervalo  $[0, 1]$
- Evaluar cada función de la parametrización

– Para  $i = 1, \dots, n$

$$* P_i = (x(t_i), y(t_i))^t$$

- Trazar la aproximación a la curva uniendo los puntos por medio de un segmento de recta.

En la práctica, usaremos valores igualmente espaciados del parámetro.

## 5.4 Elección de la representación

Sabemos que una curva no tiene una única representación paramétrica, entonces, la primera pregunta que surge es: ¿cuál elegimos para graficarla?

Por ejemplo, en la representación paramétrica de la línea definida por los puntos  $P_1$  y  $P_2$  dada por

$$P(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

podemos reemplazar a  $t$  por  $4t$  o por  $\frac{t}{4}$ , y la parametrización sigue describiendo a la misma línea.

Consideremos ahora las siguientes parametrizaciones de la cúbica  $x^3$

$$\text{a) } P(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } P(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^6 \end{pmatrix}$$

Como se ilustra en la figura 5-1, las distribuciones que obtenemos son diferentes por lo que debemos de tener un criterio para elegir la que genere la mejor distribución de puntos sobre la curva. Esto nos lleva a la siguiente pregunta ¿de qué forma podemos caracterizar a una parametrización, que dado un número fijo de puntos genere una poligonal que aproxime "bien" a la curva?

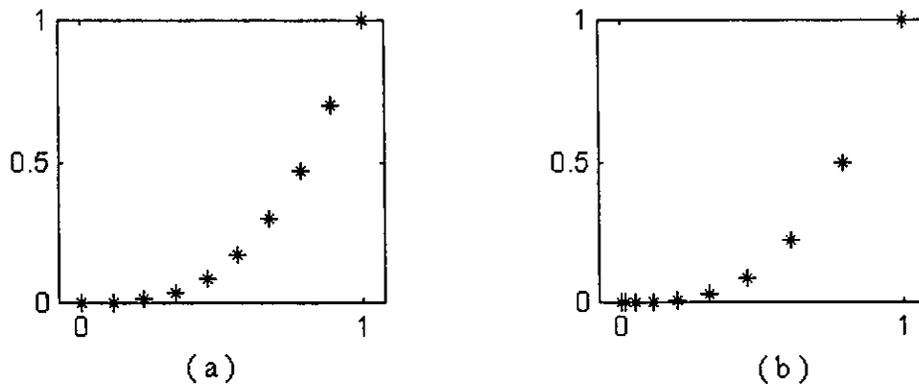


Figura 5-1: Aproximación de la cúbica en el intervalo unitario, obtenida con las representaciones ( a )  $P(t) = (t, t^3)^t$  ( b )  $P(t) = (t^2, t^6)^t$

### 5.4.1 Algunas parametrizaciones del círculo unitario.

Es sabido que una representación óptima para la gráfica del círculo se obtiene al elegir los puntos de tal forma que determinen una poligonal regular. A continuación analizaremos tres representaciones para el círculo unitario, en cada caso, se obtendrá la distribución de puntos solo en el primer cuadrante, usando el algoritmo que se describe en la sección anterior.

#### Representación implícita.

Con la representación  $x^2 + y^2 = 1$ , primero debemos resolver para una de las variables; haciéndolo para  $y$  tenemos:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

En la figura 5-2 se muestran las distribuciones obtenidas para 5, 8 y 11 puntos respectivamente. De ésta observamos que el espaciamiento de los puntos es menor para valores de  $x$  cercanos a cero, que el espaciamiento correspondiente cerca de la unidad.

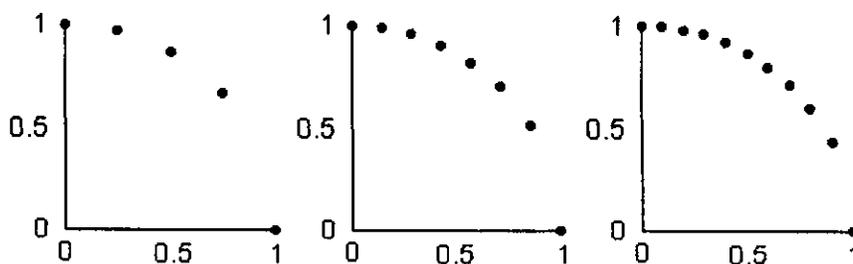


Figura 5-2: Aproximaciones al primer cuadrante del círculo unitario generadas con la representación  $x^2 + y^2 = 1$ .

Al hacer un análisis, obtenemos una aproximación al cociente de las longitudes de las cuerdas  $\overline{P_1P_2}$  y  $\overline{P_{n-1}P_n}$ .

$$\frac{|\overline{P_1P_2}|}{|\overline{P_{n-1}P_n}|} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$

esta expresión nos muestra que al aumentar el número de puntos, el cociente tiende a cero, es decir, el espaciamiento entre los puntos cerca de un extremo, es menor que el obtenido cerca del otro.

## Representación paramétrica racional

Veamos ahora la representación racional

$$p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

En la figura 5-3 se ilustran las distribuciones que se obtienen al usar esta representación, para 6, 9 y 11 puntos.

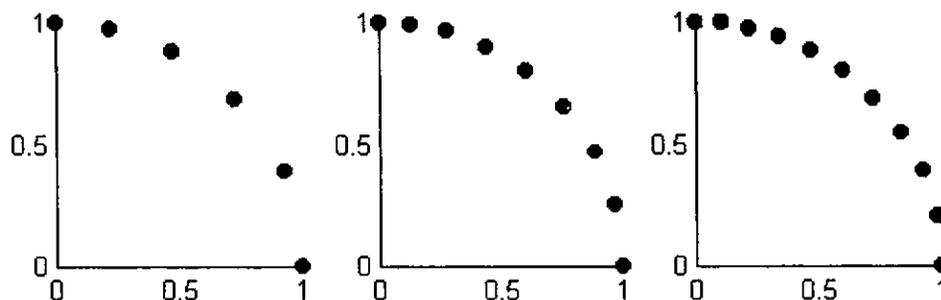


Figura 5-3: Poligonales inscritas en el primer cuadrante de círculo unitario que se obtuvieron al usar la representación paramétrica  $p(t) = (1 - t^2/1 + t^2, 2t/1 + t^2)$ .

Al igual que en el caso anterior, haciendo una comparación entre las longitudes de las cuerdas  $\overline{P_1 P_2}$  y  $\overline{P_{n-1} P_n}$ , obtenemos:

$$\frac{\|P_2 - P_1\|^2}{\|P_n - P_{n-1}\|^2} \rightarrow 2 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

## Representación trigonométrica

Finalmente veamos qué ocurre con la representación trigonométrica  $p(\theta) = (\cos \theta, \text{sen } \theta)^t$ . Debido a que el algoritmo usa valores equidistantes del parámetro, los puntos que se generan usando esta representación, determinan una curva poligonal regular. En la figura 5-4 se ilustran las distribuciones que se obtienen al variar el número de puntos.

De las parametrizaciones antes presentadas, resulta automática la elección de la representación, pero desafortunadamente, una poligonal regular no siempre es la que mejor aproxima a una curva. A continuación, nos centraremos en obtener una propiedad para las parametrizaciones de curvas convexas y diferenciables.

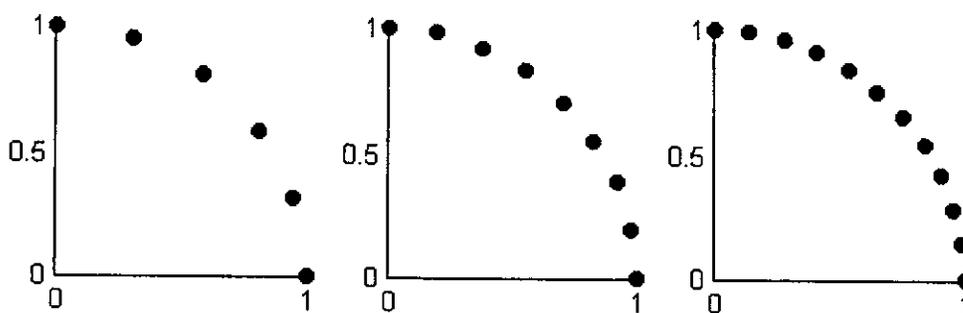


Figura 5-4: Aproximación al círculo obtenidas con la representación trigonométrica.

### 5.4.2 Parametrización óptima para una curva convexa y diferenciable.

Nuestro objetivo es caracterizar a la parametrización que genere una distribución de  $n$  puntos a lo largo de la cónica, de tal forma que la poligonal definida represente una “buena” aproximación a la curva.

Tomando en cuenta que las cónicas son curvas diferenciables y convexas, tratemos de obtener la propiedad para este tipo de curvas.

Sea  $\{P_j\}_{j=1}^n$  una distribución de puntos a lo largo de la curva; éstos determinarán una poligonal de área máxima, si para cada tres puntos consecutivos, el área del triángulo que definen, es máxima. Veamos entonces cómo hacer la elección de los puntos, para que esta propiedad se cumpla.

Sean  $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  tres vértices consecutivos de la poligonal y consideremos al segmento  $\overline{P_i P_{i+2}}$  como la base del triángulo, entonces, el problema se reduce a elegir la posición del punto  $P_{i+1}$  de tal forma que la distancia de éste a la cuerda  $\overline{P_i P_{i+2}}$  sea máxima. Como la curva es convexa, afirmamos que:

La distancia del punto  $P_{i+1}$  a la cuerda  $\overline{P_i P_{i+2}}$ , alcanza su máximo, cuando la tangente a la curva en  $P_{i+1}$  es paralela a la cuerda  $\overline{P_i P_{i+2}}$ .

Como la curva es convexa, el arco definido por los puntos  $P_i$  y  $P_{i+2}$  está completamente delimitado por la cuerda  $\overline{P_i P_{i+2}}$  y la tangente en el punto  $P_{i+1}$ . Ahora, como esta tangente es paralela a  $\overline{P_i P_{i+2}}$ , entonces la distancia de cualquier punto  $Q$  del arco, diferente de  $P_{i+1}$ , al segmento  $\overline{P_i P_{i+2}}$  es menor que la correspondiente al punto  $P_{i+1}$ , en consecuencia el punto  $P_{i+1}$  es el que determina el triángulo de área máxima (vea la figura 5-5).

Eligiendo los vértices de la poligonal, de tal manera que cada tres consecutivos determinen un triángulo de área máxima, entonces la poligonal obtenida será de área máxima.

**Teorema 5.4.46** *Un polígono inscrito en una curva convexa y diferenciable tiene área máxima si y sólo si el vector tangente a la curva en el punto medio de cada tres consecutivos es paralelo a la cuerda que une a los otros dos.*

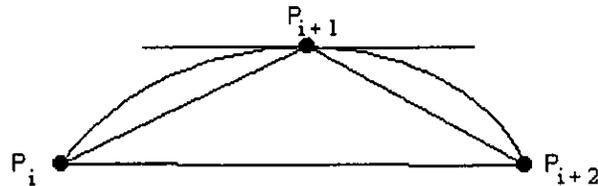


Figura 5-5: Elección de los puntos  $P_{i-1}$ ,  $P_i$  y  $P_{i+1}$  para generar una poligonal de área máxima inscrita en la curva.

**Poligonales de área máxima generadas con valores equidistantes del parámetro.**

En la práctica, para obtener los vértices de la poligonal, usamos valores equidistantes del parámetro, veamos cómo aplicamos el resultado antes visto en este caso.

Si la representación de la curva está dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

y los puntos se generan con los valores  $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$  donde

$$\begin{aligned} t_i &= \tau - \Delta\tau \\ t_{i+1} &= \tau \\ t_{i+2} &= \tau + \Delta\tau \end{aligned}$$

El vector tangente está dado por

$$T = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

y el vector en la dirección de la cuerda  $\overline{P_i P_{i+2}}$

$$C = \begin{pmatrix} f(\tau + \Delta\tau) - f(\tau - \Delta\tau) \\ g(\tau - \Delta\tau) - g(\tau + \Delta\tau) \end{pmatrix}$$

entonces, para que la poligonal generada sea de área máxima, se debe cumplir

$$T = \lambda C$$

donde  $\lambda$  es una constante.

**Ejemplo 5.4.47** Retomemos el caso de la parametrización trigonométrica para el círculo y veamos que ésta satisface la propiedad.

Calculando  $C$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \cos(\tau + \Delta\tau) - \cos(\tau - \Delta\tau) \\ \sin(\tau + \Delta\tau) - \sin(\tau - \Delta\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \operatorname{sen}(\tau) \operatorname{sen}(\Delta\tau) \\ 2 \cos(\tau) \operatorname{sen}(\Delta\tau) \end{pmatrix} \\ &= 2 \operatorname{sen}(\Delta\tau) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\tau) \\ \cos(\tau) \end{pmatrix} \\ &= 2 \operatorname{sen}(\Delta\tau) T \end{aligned}$$

Con esto demostramos que la representación trigonométrica para el círculo genera una poligonal de área máxima y, por consiguiente que toda poligonal de  $n$  lados inscrita en un círculo es de área máxima si y sólo si es regular.

### Parametrización óptima para una cónica

En la sección anterior obtuvimos una propiedad para las parametrizaciones de curvas convexas y diferenciables que genera poligonales de área máxima. En esta sección presentaremos una representación paramétrica para cada tipo de cónica, que satisface dicha propiedad.

#### 1. La elipse

Si la cónica es una elipse, consideremos la representación paramétrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t) \\ \beta \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \quad (5.4.1)$$

evaluando  $T$

$$T = \begin{pmatrix} -\alpha \operatorname{sen}(t) \\ \beta \cos(t) \end{pmatrix}$$

calculando  $C$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \alpha (\cos(\tau + \Delta\tau) - \cos(\tau - \Delta\tau)) \\ \beta (\operatorname{sen}(\tau + \Delta\tau) - \operatorname{sen}(\tau - \Delta\tau)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\alpha \operatorname{sen}(\Delta\tau) \operatorname{sen}(\tau) \\ 2\beta \cos(\tau) \operatorname{sen}(\Delta\tau) \end{pmatrix} \\ &= 2 \operatorname{sen}(\Delta\tau) \begin{pmatrix} -\alpha \operatorname{sen}(t) \\ \beta \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= 2 \operatorname{sen}(\Delta\tau) T \end{aligned}$$

en este caso  $\lambda = 2 \operatorname{sen}(\Delta\tau)$ , mostrando de esta forma que usando esta parametrización obtendremos una poligonal de área máxima.

## 2. La hipérbola

Para la hipérbola consideremos la representación hiperbólica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cosh(t) \\ \beta \operatorname{senh}(t) \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

evaluando  $T$  y  $C$

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} \alpha \operatorname{senh}(t) \\ \beta \cosh(t) \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \alpha (\cosh(\tau + \Delta\tau) - \cosh(\tau - \Delta\tau)) \\ \beta (\operatorname{senh}(\tau + \Delta\tau) - \operatorname{senh}(\tau - \Delta\tau)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha \operatorname{senh}(\tau) \operatorname{senh}(\Delta\tau) \\ 2\beta \cosh(\tau) \operatorname{senh}(\Delta\tau) \end{pmatrix} \\ &= 2 \operatorname{senh}(\Delta\tau) T \end{aligned}$$

por lo tanto, para la hipérbola es conveniente usar la parametrización 5.4.2.

### 3. La parábola

Finalmente para la parábola consideremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ 2\alpha t^2 \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

en este caso  $T$  y  $C$  están dados por

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha t^2 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 2\alpha(\tau + \Delta\tau) - 2\alpha(\tau - \Delta\tau) \\ \alpha(\tau + \Delta\tau)^2 - \alpha(\tau - \Delta\tau)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\alpha\Delta\tau \\ 4\alpha\tau\Delta\tau \end{pmatrix} \\ &= 2\Delta\tau T \end{aligned}$$

Podríamos decir que el haber obtenido las representaciones adecuadas para cada tipo de cónica, ya hemos resuelto el problema, pues lo único que resta es aplicar el algoritmo visto en la sección 5.3. Desafortunadamente, la evaluación directa de las parametrizaciones, resulta ser costosa, así que en lo precedente, trataremos de hacer uso de sus propiedades, para obtener un método que nos permita generar eficientemente los puntos de la poligonal.

## 5.5 El método en diferencias para generar puntos de secciones cónicas

Nuestra meta ahora es encontrar un método eficiente que permita generar una poligonal de área máxima inscrita en la cónica.

Empecemos con el siguiente resultado, que nos indica cómo podemos generar una poligonal de área máxima, usando únicamente dos puntos iniciales.

**Teorema 5.5.48** *Si  $C$  es un círculo centrado en el origen y  $P_0, P_1$  dos puntos diferentes de  $C$ , entonces existe una constante  $k$ , tal que la fórmula recurrente*

$$P_{j+2} = 2kP_{j+1} - P_j ; j \geq 0 \quad (5.5.4)$$

genera una sucesión de puntos  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  de  $C$ , con la propiedad de que el ángulo subtendido por cada par de puntos consecutivos es constante (figura 5-6).

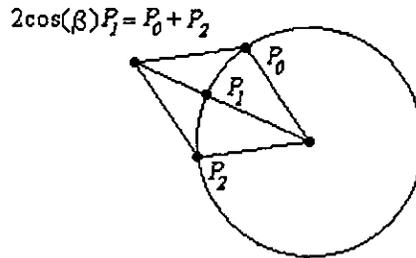


Figura 5-6: Relación entre tres puntos consecutivos de una poligonal de área máxima inscrita en el círculo.

Demostración

Sea  $\theta$  el ángulo subtendido por el arco  $P_0P_1$  y  $w = e^{i\theta}$ . Si  $P_0 = e^{it_0}$ , entonces  $P_j = w^j P_0$ . De esta forma, la ecuación (5.5.4) la podemos llevar a la forma

$$w^{j+2} P_0 = 2kw^{j+1} P_0 - w^j P_0$$

despejando  $k$

$$\begin{aligned} k &= \frac{w^2 + 1}{2w} \\ &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$



Pasemos ahora al caso en que la cónica sea una elipse o una hipérbola, y al final abordaremos el caso de la parábola.

### 5.5.1 Elipses e hipérbolas con centro en el origen

- Para la elipse

Si  $C$  representa a una elipse con centro en el origen, entonces, ésta puede transformarse al círculo unitario  $U$ , por medio de una transformación lineal  $M$ .

Si  $U$  está representado por la ecuación paramétrica  $p(t) = (\cos(t), \sin(t))^t$ , entonces,  $C$  puede escribirse en la forma

$$p(t) = M (\cos(t), \sin(t))^t \quad (5.5.5)$$

- Para la hipérbola

En el caso de que  $C$  represente la rama de una hipérbola con centro en el origen, ésta se puede enviar, por medio de una transformación lineal  $M$ , en la rama de la hipérbola  $H : x^2 - y^2 = 1, x > 0$ , de esta forma la ecuación paramétrica de  $C$  se puede escribir de la forma

$$p(t) = M(\cosh(t), \sinh(t))^t \quad (5.5.6)$$

El siguiente teorema nos indica cómo trazar, ya sea una elipse o una hipérbola centrada en el origen, usando las representaciones (5.5.5) y (5.5.6).

**Teorema 5.5.49** *Sea  $C$  una elipse ( la rama de una hipérbola) con centro en el origen y  $P_0, P_1$  dos puntos diferentes de  $C$ . Entonces, existe una constante  $k$  tal que la fórmula*

$$P_{i+2} = 2kP_{i+1} - P_i ; i \geq 0$$

*genera una sucesión de puntos  $\{P_i\}_{i \geq 0}$  en  $C$ , donde  $P_i$  se obtiene con la representación (5.5.5) ((5.5.6)), con valores del parámetro igualmente espaciados.*

$$\text{Si } C \text{ es una elipse:} \quad -1 \leq k < 1$$

$$\text{Si } C \text{ es una hipérbola:} \quad k > 1$$

#### Demostración

- Si  $C$  es una elipse

Existe una transformación, representada por la matriz  $M$ , que aplica el círculo unitario en la elipse. Entonces, los puntos

$$\overline{P_0} = M^{-1}P_0$$

$$\overline{P_1} = M^{-1}P_1$$

son puntos del círculo unitario, por lo que, eligiendo  $k = \cos(\beta)$ , donde  $\beta = \angle P_0OP_1$ , podemos generar una sucesión de puntos sobre el círculo unitario con la fórmula

$$\overline{P_{i+2}} = 2k\overline{P_{i+1}} - \overline{P_i}$$

Aplicando la matriz de transformación  $M$  a  $\overline{P_{i+2}}$  obtenemos

$$M\overline{P_{i+2}} = 2kM\overline{P_{i+1}} - M\overline{P_i}; \quad i \geq 0$$

Como  $P_i = M\overline{P_i}$ , la ecuación se reescribe en términos de los puntos de la elipse de la siguiente manera

$$P_{i+2} = 2kP_{i+1} - P_i$$

Por último, como  $-1 \leq \cos(\beta) < 1$ , entonces,  $-1 \leq k < 1$ .

Esto nos indica, que si en la ecuación (5.5.4), se eligen como puntos iniciales, a dos puntos sobre el círculo unitario, ésta generará una sucesión de puntos en el círculo, pero, si se escogen puntos sobre una elipse, ésta misma, genera puntos de la elipse (con la elección adecuada del parámetro).

- Si  $C$  es la rama de una hipérbola

Primero veamos que la ecuación (5.5.4), genera una sucesión de puntos sobre la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , usando como puntos iniciales

$$\begin{aligned} P_0 &= (\cosh(t_0), \sinh(t_0))^t \\ P_1 &= (\cosh(t_0 + \beta), \sinh(t_0 + \beta))^t \end{aligned}$$

Como la sucesión de puntos se genera bajo valores equidistantes del parámetro, el punto  $k+3$  está dado por

$$\begin{aligned} P_{k+2} &= (\cosh(t_0 + (k+2)\beta), \sinh(t_0 + k\beta))^t \\ &= (\cosh((t_0 + (k+1)\beta) + \beta), \sinh((t_0 + (k+1)\beta) - \beta))^t. \end{aligned}$$

Usando las identidades

$$\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta) = 2 \cosh(\beta) \cosh(\alpha)$$

$$\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta) = 2 \cosh(\beta) \sinh(\alpha)$$

con  $\alpha = t_0 + (k + 1)\beta$ , podemos reescribir a  $P_{k+2}$  en la forma

$$P_{k+2} = (2 \cosh(\beta) \cosh(t_0 + (k + 1)\beta) - \cosh(t_0 + k\beta), 2 \cosh(\beta) \sinh(t_0 + (k + 1)\beta) - \sinh(t_0 + k\beta))^t$$

y, reordenando términos, obtenemos

$$P_{k+2} = 2 \cosh(\beta) (\cosh(t_0 + (k + 1)\beta), \sinh(t_0 + (k + 1)\beta))^t - (\cosh(t_0 + k\beta), \sinh(t_0 + k\beta))^t.$$

Denotando por

$$k = \cosh(\beta)$$

llegamos a la expresión deseada

$$P_{k+2} = 2kP_{k+1} - P_k$$

con esto mostramos que todo punto generado por la fórmula (5.5.4) es un punto de la hipérbola canónica.

Ahora bien, dados dos puntos  $\overline{P}_0$  y  $\overline{P}_1$  de la rama de una hipérbola centrada en el origen, elijamos a  $P_0 = M^{-1}\overline{P}_0$  y a  $P_1 = M^{-1}\overline{P}_1$ , donde  $M$  es la matriz de transformación de la rama de la hipérbola canónica en la rama de la hipérbola  $\mathcal{C}$ ; por lo anterior, al elegir  $k = \cosh(\beta)$ , la ecuación genera una sucesión de puntos  $\{P_i\}_{i \geq 0}$  que pertenecen a la hipérbola canónica. Multiplicando por  $M$  ambos lados de la ecuación (5.5.4) y renombrando a  $MP_i = H_i$ , obtenemos la ecuación

$$H_{i+2} = 2kH_{i+1} - H_i ; i \geq 0$$

Sabemos que la función  $\cosh x$  siempre es mayor o igual a uno y, dado que el ángulo  $\beta$  es mayor que cero, entonces  $k > 1$ . De esta forma, la fórmula también es aplicable, si los puntos iniciales pertenecen a una hipérbola. ■

Notemos que el teorema (5.5.49) nos indica cómo generar una sucesión de puntos sobre una elipse o una hipérbola, con la propiedad de que estos puntos son imagen de las parametrizaciones que nos

garantizan obtener una poligonal de área máxima. El inconveniente es que sólo es aplicable a las cónicas con centro en el origen.

### 5.5.2 Elipses e Hipérbolas cuyo centro no necesariamente es el origen

Sea  $C$  una elipse o una hipérbola, cuyo centro lo denotaremos por  $S$ .

Si  $p(t)$  es la parametrización correspondiente, entonces la cónica  $C'$ , imagen de  $C$  bajo una translación al origen, tiene por ecuación

$$v(t) = p(t) - S$$

Por lo tanto, eligiendo el parámetro  $k$  adecuado, podemos generar una sucesión  $\{V_i\}_{i \geq 0}$  sobre la cónica  $C'$ , con la fórmula

$$V_{i+2} = 2kV_{i+1} - V_i$$

Al reescribir ésta en términos de  $p(t)$  y  $S$ , obtenemos

$$P_{i+2} - S = 2k(P_{i+1} - S) - (P_i - S) \quad (5.5.7)$$

Haciendo lo mismo para el punto  $V_{i+3}$

$$P_{i+3} - S = 2k(P_{i+2} - S) - (P_{i+1} - S) \quad (5.5.8)$$

Ahora restando la ecuación (5.5.7) de (5.5.8) y despejando  $P_{i+3}$

$$P_{i+3} = (2k + 1)P_{i+2} - (2k + 1)P_{i+1} + P_i \quad (5.5.9)$$

De este modo hemos obtenido una fórmula que sólo requiere de tres puntos iniciales para generar una sucesión de puntos de la cónica.

### 5.5.3 Parábolas

Si la cónica es una parábola, consideremos la representación paramétrica

$$p(t) = at^2 + bt + c$$

donde  $a = (a_1, a_2)^t$ ,  $b = (b_1, b_2)^t$  y  $c = (c_1, c_2)^t$ .

Usando el hecho de que la diferencia hacia atrás de tercer orden de  $p(t)$ , es cero, tenemos que

$$l(t) = p(t + \Delta t) - p(t)$$

$$c(t) = l(t + \Delta t) - l(t)$$

entonces  $c(t + \Delta t) - c(t) = 0$ , y al hacer la substitución hacia atrás obtenemos

$$p(t + 3 \Delta t) = 3p(t + 2 \Delta t) - 3p(t + \Delta t) + p(t)$$

reescribiendo esta última tenemos

$$P_{i+3} = 3P_{i+2} - 3P_{i+1} + P_i ; i \geq 0$$

Notemos que esta ecuación, resulta ser un caso particular de la fórmula (5.5.9), donde  $k = 1$ .

## 5.6 El método en diferencias

**Teorema 5.6.50** *Si  $C$  es una cónica no degenerada, para cualquier punto inicial  $P_0$  y una constante  $k$  en cierto rango relevante para  $C$ , existen puntos  $P_1$  y  $P_2$  tales que la ecuación*

$$P_{i+3} = (2k + 1)P_{i+2} - (2k + 1)P_{i+1} + P_i ; i \geq 0$$

*genera una secuencia de puntos  $\{P_i\}_{i \geq 0}$  que pertenecen a  $C$ .*

*Donde :*

$$-1 \leq k < 1 \quad \text{si } C \text{ es una elipse.}$$

$$k = 1 \quad \text{si } C \text{ es una parábola.}$$

$$k > 1 \quad \text{si } C \text{ es una hipérbola.}$$

### 5.6.1 Aplicación del método para la elipse

Veamos ahora cómo aplicar el método antes descrito para generar  $n$  puntos de una elipse.

Para aplicar el método, necesitamos: tres puntos iniciales y el valor del parámetro  $k$ .

- Elección del parámetro  $k$

Como vimos anteriormente, el valor de  $k$  no depende de la posición de la elipse; además, éste coincide con el valor que se usa para generar  $n$  puntos sobre el círculo unitario.

Recordemos que el valor del parámetro que nos sirve para generar  $n$  puntos del círculo unitario, es el coseno del ángulo subtendido por dos vértices consecutivos de la poligonal. Entonces, su valor está dado por:

$$k = \cos \beta \quad ; \quad \beta = \frac{2\pi}{n-1}$$

- Elección de los puntos iniciales

Resulta sencillo hacer la elección de los tres puntos iniciales para generar  $n$  puntos del círculo unitario, pues el arco subtendido por cada par, es constante e igual a  $\beta$ , por lo tanto, si estos puntos son:

$$\begin{aligned} \overline{P}_0 &= (1, 0)^t \\ \overline{P}_1 &= (\cos(\beta), \text{sen}(\beta))^t \\ \overline{P}_2 &= (\cos(2\beta), \text{sen}(2\beta))^t \end{aligned}$$

entonces, los puntos iniciales para generar la elipse (con centro en el origen) están dados por

$$P_i = M\overline{P}_i$$

donde  $M$  es la matriz de transformación del círculo unitario en la elipse.

### Transformación del círculo unitario en una elipse

Sea  $\mathcal{C}$  una elipse cuya ecuación está dada por

$$x^t A x + 2b^t x + \gamma = 0 \tag{5.6.10}$$

Primero veamos cómo obtener el centro de la elipse, es decir, los valores de  $x_0, \gamma_0$ , tales que la ecuación (5.6.10) se pueda reescribir como

$$y^t A y = \gamma_0 \tag{5.6.11}$$

donde  $y = x - x_0$ .

Bajo estas condiciones, obtenemos

$$x_0 = -A^{-1}b$$

$$x_0^t Ax_0 - \gamma = \gamma_0$$

Como  $A$  es positiva definida, entonces, existe una matriz  $Q$  tal que  $A = Q^2$ .

Sea  $z = Qy$ , entonces podemos reescribir la ecuación (5.6.11) en la forma

$$z^t z = \gamma_0$$

Esta ecuación en  $z$ , representa un círculo con centro en el origen y de radio  $\sqrt{\gamma_0}$ , por lo que podemos expresar a  $z$  de la siguiente forma

$$z = \sqrt{\gamma_0}(\cos(t), \text{sen}(t))^t.$$

Substituyendo a  $z$  y resolviendo para  $y$ , tenemos

$$y = \sqrt{\gamma_0}Q^{-1}(\cos(t), \text{sen}(t))^t.$$

Finalmente, substituyendo  $y$ , obtenemos la transformación que aplica el círculo unitario en la elipse

$$x = \sqrt{\gamma_0}Q^{-1}(\cos(t), \text{sen}(t))^t + x_0$$

## Un algoritmo para generar $n$ puntos de una elipse

A continuación mostramos un algoritmo que se basa en el método en diferencias para generar  $n$  puntos de una elipse.

Dado un número  $n$  y los coeficientes de la ecuación cuadrática  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , correspondientes a una elipse, el algoritmo obtiene  $n$  puntos distribuidos a lo largo de la elipse. Dichos puntos determinan una poligonal de  $n$  lados de área máxima inscrita .

### Datos de entrada

$A, B, C, D, E, F$ : Coeficientes de la ecuación de la elipse

$n$ : Número de puntos a evaluar

### Salida

$n$  puntos distribuidos a lo largo de la elipse, que determinan una poligonal de área máxima.

### Procedimiento

1. Calcula  $x_0$  y  $\gamma_0$ , tal que la ecuación de la elipse se pueda reescribir en la forma

$$C \equiv (x - x_0)^t A (x - x_0) = \gamma_0$$

2. Obtiene la matriz  $Q$  tal que  $Q^2 = A$ .
3. Calcula el ángulo  $\beta$
4. Obtiene los tres puntos iniciales para aplicar el método

$$P_i = \sqrt{\gamma_0} Q^{-1} (\cos(i * \beta), \text{sen}(i * \beta))^t + x_0 \quad \text{para } i = 0, 1, 2$$

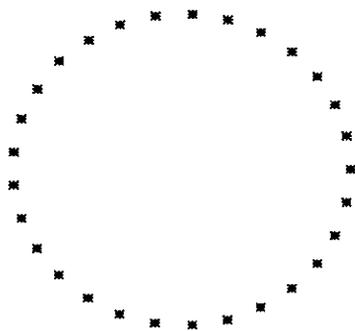
5. Calcula los  $n - 3$  puntos restantes usando el método en diferencias

(a)  $k = \cos \beta$

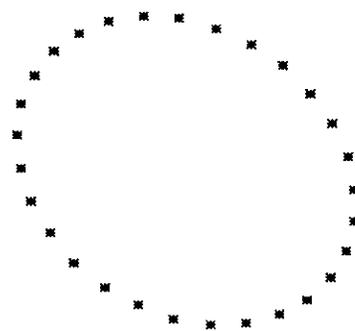
(b) Para  $i = 3$  hasta  $n - 1$

$$P_i = (2k + 1)P_{i-1} - (2k - 1)P_{i-2} + P_{i-3}$$

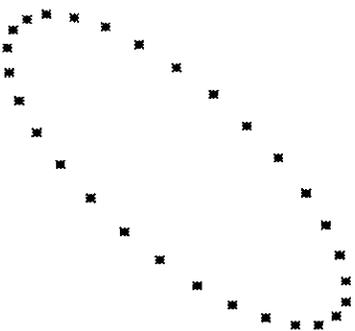
En seguida mostramos algunos ejemplos que se generaron usando el algoritmo anterior. Dicho algoritmo se implementó en la versión 5.0 de MATLAB. Cada cónica que se muestra se aproximó con 30 puntos.



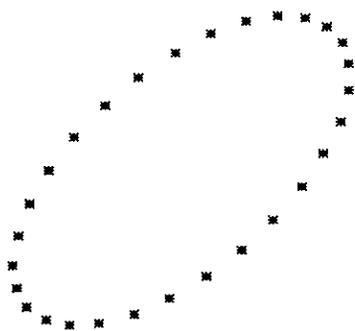
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$



$$9x^2 + 5xy + 16y^2 - 54x + 64y + 144 = 0$$

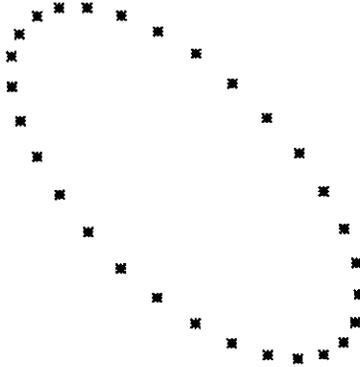


$$x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 16y + 24 = 0$$

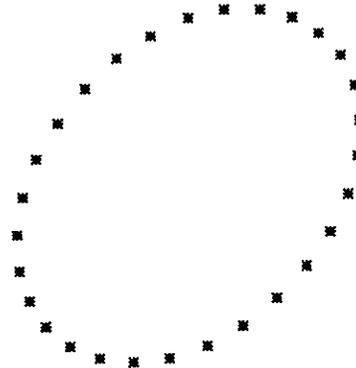


$$x^2 - 5xy + 16y^2 - 48x + 64y + 72 = 0$$

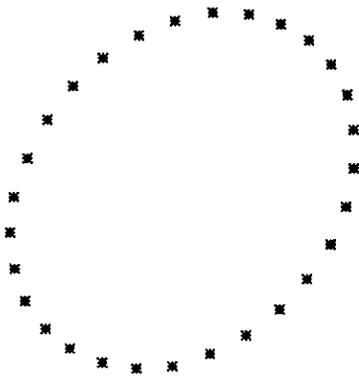
Figura 5-7: Aproximaciones de la cónica generadas con el método en diferencias.



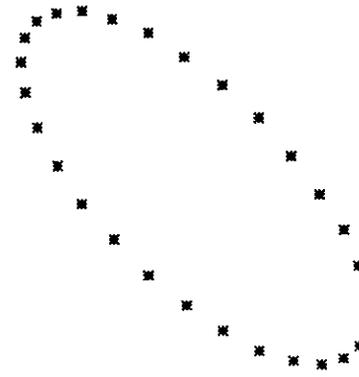
$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$$



$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$$



$$x^2 + 0.5xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$



$$x^2 + 2xy + 2y^2 + x + y - 4 = 0$$

Aproximaciones de la cónica generadas con el método en diferencias.

## 5.7 Notas y Referencias

Para la sección de graficación de curvas se consultó el libro Hill [11].

En el segundo capítulo de libro Beach R. [2], se puede consultar más sobre cónicas y cuádricas.

Para la parte del método en diferencias se consultaron los artículos Smith [19], Wang W. P. and Wang C. Y. [20] y Weping W., Barry J. and Wang C. Y. [21].

## Capítulo 6

# Graficación de arcos cónicos

### 6.1 Introducción

En el presente capítulo abordamos el problema de graficar eficientemente un arco cónico. Con este fin, primero obtenemos la representación racional de Bézier para una cónica; estudiamos algunas propiedades, en especial, la elección de parámetros, donde se hace notar que la representación se puede determinar usando sólo un parámetro. Una vez que se obtiene esta representación, vemos cómo modificar el método en diferencias (visto en el capítulo anterior) para generar arcos cónicos descritos a través de su representación racional de Bézier.

### 6.2 Representación de arcos parabólicos

La ecuación paramétrica

$$p(t) = at^2 + bt + c \tag{6.2.1}$$

representa una parábola, donde  $a = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ ,  $b = (\beta_1, \beta_2)^t$  y  $c = (\gamma_1, \gamma_2)^t$ . Para hacer ver esto, reescribamos la ecuación en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

resolviendo para  $t$  y  $t^2$ :

$$t^2 = \frac{\beta_2(x - \gamma_1) + (y - \gamma_2)\beta_1}{d}$$

$$t = \frac{\alpha_1(y - \gamma_2) - (x - \gamma_1)\alpha_2}{d}$$

donde

$$d = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

de ambas expresiones se sigue

$$\left( \frac{\alpha_1(y - \gamma_2) - (x - \gamma_1)\alpha_2}{d} \right)^2 = \frac{\beta_2(x - \gamma_1) + (y - \gamma_2)\beta_1}{d}$$

simplificando obtenemos

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con

$$A = \alpha_2^2$$

$$B = -2\alpha_1\alpha_2$$

$$C = \alpha_1^2$$

$$D = 2\alpha_1\alpha_2\gamma_2 - 2\gamma_1 - d\beta_2$$

$$E = d\beta_1 - 2\alpha_1^2\gamma_2 + 2\alpha_1\alpha_2\gamma_1$$

$$F = \alpha_1^2\gamma_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_2^2\gamma_1^2 + d(\beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2)$$

Notemos que  $B^2 = 4AC$ , por tanto, hemos llegado a que la ecuación paramétrica (6.2.1) representa una parábola.

### 6.2.1 Representación Polinomial de Bézier de Segundo Grado

Una representación que nos permitirá hacer referencia a arcos parabólicos, es la llamada **Representación Polinomial de Bézier de Segundo Grado**:

$$p(t) = b_0(1-t)^2 + 2b_1t(1-t) + b_2t^2, t \in [0, 1] \quad (6.2.2)$$

En esta representación, los puntos  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  están fuertemente ligados con el arco parabólico que se describe al hacer variar el parámetro entre cero y uno; por ello, al polígono formado con estos puntos, se le conoce como **polígono de control**.

Notemos que

$$p(0) = b_0 \quad (6.2.3)$$

$$p(1) = b_2 \quad (6.2.4)$$

Es decir, los puntos extremos del arco parabólico, son los puntos de control  $b_0$  y  $b_2$ .

Para obtener otras propiedades de los puntos de control, llevemos la ecuación (6.2.1) a su expresión polinomial de Bézier. Como  $p(0) = c$ , tenemos

$$c = b_0 \quad (6.2.5)$$

Evaluada la derivada en cero obtenemos

$$p'(0) = b \quad (6.2.6)$$

Con estas dos condiciones, la ecuación de la parábola la podemos reescribir en la forma

$$p(t) = at^2 + p'(0)t + b_0 \quad (6.2.7)$$

y tomando en cuenta que el extremo final del arco es  $b_2$ , obtenemos la siguiente expresión para  $a$

$$a = b_2 - (b_0 + p'(0))$$

de modo que la parametrización queda dada en la forma

$$p(t) = (b_2 - (b_0 + p'(0)))t^2 + p'(0)t + b_0 \quad (6.2.8)$$

evaluando la derivada en  $t = 1$ , obtenemos

$$p'(1) = 2(b_2 - b_0) - p'(0)$$

la que podemos reescribir

$$b_2 - \frac{1}{2}p'(1) = b_0 + \frac{1}{2}p'(0).$$

El lado izquierdo de ésta, representa un punto que pertenece a la tangente en el punto  $b_2$ , mientras que el lado derecho, nos indica que este punto también pertenece a la tangente en el punto  $b_0$ ; es decir, es el punto de intersección de las tangentes en los extremos del arco, sea  $r$  dicho punto, entonces la derivada en cero y en uno queda dada por

$$\begin{aligned}p'(0) &= -2(b_0 - r) \\p'(1) &= 2(b_2 - r)\end{aligned}$$

Substituyendo  $p'(0)$  en la ecuación de la parábola, llegamos a la expresión

$$\begin{aligned}p(t) &= b_0(1 - 2t + t^2) + 2r(t - t^2) + b_2t^2 \\&= b_0(1 - t)^2 + 2tr(1 - t) + b_2t^2\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

Finalmente, al comparar ésta con la ecuación (6.2.2), concluimos que  $r = b_1$ .

Resumiendo:

1. La tangente a la parábola en el punto  $b_0$  es la línea definida por los puntos  $b_0$  y  $b_1$ .
2. La tangente a la parábola en el punto  $b_2$  es la recta que une a los puntos  $b_1$  y  $b_2$ .
3. Reordenando los términos de la expresión (6.2.9), obtenemos

$$p(t) = (b_0(1 - t) + b_1t)(1 - t) + (b_1(1 - t) + b_2t)t$$

- El término  $e = b_0(1 - t) + b_1t$ , representa el punto de la línea que pasa por los puntos de control  $b_0$  y  $b_1$  y que divide al segmento  $\overline{b_0b_1}$  en la razón  $\frac{t}{1-t}$ .
- El punto  $f = b_1(1 - t) + b_2t$  divide al segmento  $\overline{b_1b_2}$  en la razón  $\frac{t}{1-t}$ .
- Reescribiendo la ecuación

$$p(t) = (1 - t)e + tf$$

nos muestra que  $p(t)$  es el punto que divide al segmento  $\overline{ef}$  en la razón  $\frac{t}{1-t}$ .

En notación compacta

$$(b_0 b_1 e) = (b_1 b_2 f) = (e f p(t)) = \frac{t}{1-t}$$

Reescribiendo la derivada en  $t$ , obtenemos la expresión

$$p'(t) = 2(f - e)$$

Concluimos que la línea que pasa por  $e$  y  $f$ , es precisamente la recta tangente a la parábola en el punto  $p(t)$  y, entonces se deduce que

- Dado el parámetro  $t$ , podemos construir la recta tangente a la parábola en el punto  $p(t)$ , de la siguiente manera :

- Sea  $s = \frac{t}{1-t}$ .
- Construir el punto  $e$  que divide al segmento  $\overline{b_0 b_1}$ , en la razón  $s$  (figura 6-1( a )).
- Construir el punto  $f$  que divide al segmento  $\overline{b_1 b_2}$ , en la razón  $s$ (figura 6-1( b )).
- La tangente a la parábola en el punto  $p(t)$ , es la línea que une a los puntos  $e$  y  $f$  (figura 6-1( c )).

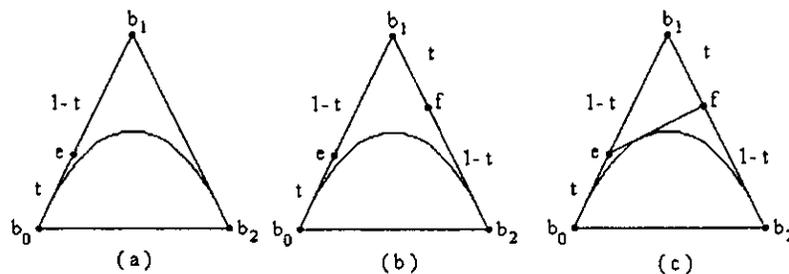


Figura 6-1: Construcción de la tangente a la parábola.

Más aún, una vez que hemos construido la tangente, podemos determinar el punto de contacto, el cual coincide con el punto que divide al segmento  $\overline{ef}$  en la razón  $s$  ( vea la figura 6-2).

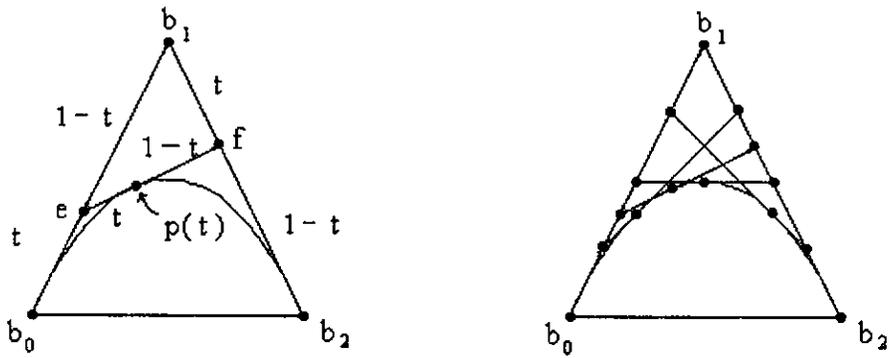


Figura 6-2: Construcción del punto determinado por el parámetro  $t$  con respecto a la representación polinomial de Bézier.

Si cambiamos el polígono de control de la parábola y seguimos el procedimiento antes descrito, obtendríamos las mismas propiedades, por lo tanto, se sigue el siguiente resultado:

**Teorema 6.2.51 (Teorema de las tres tangentes)** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres puntos diferentes de una parábola. Si las tangentes en  $a$  y  $c$  se intersecan en el punto  $d$ , y denotamos por  $e$  y  $f$  a los puntos de intersección de la tangente en  $b$  con las tangentes en  $a$  y  $c$ , entonces

$$(a e d) = (e b f) = (d f c) = \frac{t}{1-t}$$

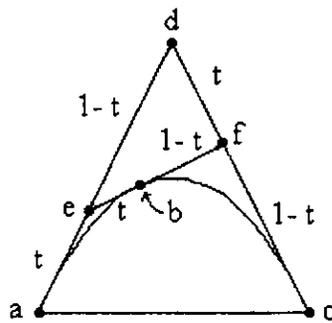


Figura 6-3: Teorema de las tres tangentes

### Algoritmo para generar puntos de un arco parabólico

A continuación mostramos un algoritmo para obtener el punto de la parábola correspondiente al parámetro  $t$ , con respecto a la representación polinomial de Bézier

Dados los puntos de control de la parábola  $b_0, b_1, b_2$  y  $t \in [0, 1]$ .

1. Para  $i = 0$  hasta 2

$$b_i^0(t) = b_i$$

2. Para  $r = 1, 2$

- Desde  $i = 0$  hasta  $2 - r$

$$b_i^r(t) = (1 - t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t)$$

de esta forma  $b_0^2(t)$  es el punto de la parábola con parámetro  $t$  (vea la figura 6-4).

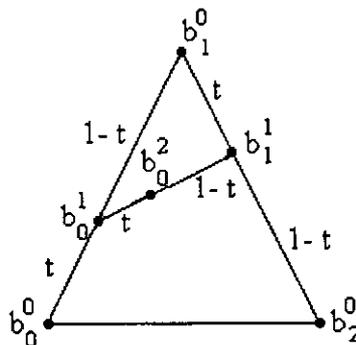


Figura 6-4:

### Algoritmo de Subdivisión

Como hicimos notar, los puntos intermedios  $b_0^1$  y  $b_1^1$  que se generan para construir el punto  $b_0^2$ , definen la recta tangente a la parábola en dicho punto. Tenemos entonces el siguiente esquema:

Los segmentos  $\overline{b_0^0 b_0^1}$  y  $\overline{b_0^1 b_1^1}$  son tangentes a la parábola en  $b_0^0$  y  $b_0^2$  respectivamente, por lo tanto, podemos aplicar el algoritmo, usando los puntos de control  $b_0^0, b_0^1$  y  $b_1^1$  para generar el subarco  $b_0^0 b_0^2$ . De manera similar, como los segmentos  $\overline{b_1^1 b_1^0}$  y  $\overline{b_1^0 b_2^0}$  son tangentes a la parábola en  $b_0^2$  y  $b_2^0$  respectivamente, podemos usar los puntos de control  $b_0^2, b_1^1$  y  $b_2^0$ , para generar el subarco  $b_0^2 b_2^0$ .

De esta forma, la representación polinomial de Bézier del subarco  $b_0^0 b_0^2$  es

$$p(s) = b_0^0(1-s)^2 + 2b_0^1s(1-s) + b_0^2s^2, s \in [0, 1]$$

y la correspondiente para el subarco  $b_0^2b_2^0$

$$p(s) = b_0^2(1-s)^2 + 2b_1^1s(1-s) + b_2^0s^2, s \in [0, 1]$$

Al procedimiento antes descrito se le conoce como **algoritmo de subdivisión**.

En general, para determinar el polígono de control del arco parabólico correspondiente al intervalo  $[0, u]$ , el parámetro local  $s$ , está dado por  $s = t/u$  y si  $c_0, c_1$  y  $c_2$  son los puntos de control del segmento correspondiente al intervalo (figura 6-5), entonces

$$c_i = b_0^i(u)$$

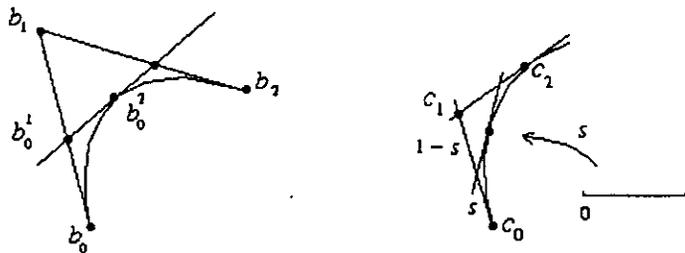


Figura 6-5: Algoritmo de subdivisión

Hemos encontrado que la representación polinomial de Bézier de la parábola  $p(t) = b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + b_2 t^2$ , describe el arco  $b_0b_2$  para valores del parámetro en el intervalo unitario, cuyas tangentes en los puntos extremos son los segmentos  $\overline{b_0b_1}$  y  $\overline{b_1b_2}$  respectivamente.

Ahora tratemos de encontrar una representación para arcos elípticos o hiperbólicos que tenga características similares.

### 6.3 Parametrización Racional de Bézier de Segundo Grado

Nuestro objetivo ahora es obtener una representación que describa un arco cónico en términos de sus puntos extremos y del punto de intersección de las tangentes en dichos puntos. Para ello, consideremos la ecuación de la cónica  $C$  en coordenadas homogéneas

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0 \quad (6.3.10)$$

cuya forma matricial es  $\bar{x}^t A \bar{x} = 0$  donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y denotemos por  $b_0$  y  $b_2$  a los extremos del arco y por  $b_1$  al punto de intersección de las tangentes en  $b_0$  y  $b_2$  respectivamente.

Para encontrar una expresión del arco  $b_0b_2$ , parametricemos el segmento  $\overline{b_0b_1}$  y determinemos el punto de intersección de la cónica y el segmento que une a un punto de  $\overline{b_0b_1}$  con  $b_2$  vea la figura 6-6.

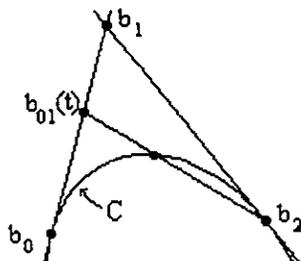


Figura 6-6:

Como nos interesa obtener una representación de arco  $b_0b_2$  para valores del parámetro en el intervalo unitario, usaremos la siguiente representación para el segmento  $\overline{b_0b_1}$

$$b_{01}(t) = t(b_1 - b_0) + b_0$$

entonces la representación paramétrica de la línea ( $l$ ) que une el punto  $b_{01}(t)$  con  $b_2$  la podemos expresar en la forma

$$p(s) = s(b_2 - b_{01}(t)) + b_{01}(t) \quad (6.3.11)$$

Para determinar los puntos de intersección de  $l$  y  $C$ , substituyamos  $p(s)$  en la ecuación matricial de  $C$  y determinemos los valores de  $s$  que la satisfacen

$$p^t(s)Ap(s) = 0$$

después de simplificar, obtenemos la siguiente expresión cuadrática en  $s$

$$(b_2 - b_{01}(t))^t A(b_2 - b_{01}(t))s^2 + 2(b_2 - b_{01}(t))^t Ab_{01}(t)s + b_{01}^t(t)Ab_{01}(t) = 0 \quad (6.3.12)$$

como  $b_2$  es un punto en común de  $C$  y  $l$ , entonces una de las raíces de la ecuación anterior es  $s = 1$ . Usando las propiedades de las raíces, encontramos que el valor de  $s$  que determina al segundo punto de intersección, debe satisfacer la ecuación

$$s = -\frac{D + 2(b_2 - b_{01}(t))^t Ab_{01}(t)}{D}$$

donde

$$D = (b_2 - b_{01}(t))^t A(b_2 - b_{01}(t)).$$

Al substituir este valor en la ecuación (6.3.11), obtenemos la expresión del punto del arco  $b_0b_2$  correspondiente al parámetro  $t$ :

$$Dp(t) = -\alpha b_2 + b_{01}(t)(D + \alpha) \quad (6.3.13)$$

donde

$$\alpha = D + 2(b_2 - b_{01}(t))^t Ab_{01}(t).$$

Conforme hagamos variar el parámetro en el intervalo unitario, la ecuación (6.3.13) describirá el arco cónico  $b_0b_2$ .

Dado que el punto  $b_2$  pertenece a la cónica, se tiene que  $b_2^t Ab_2 = 0$ , por lo que las expresiones para  $D$  y  $\alpha$  se reducen a

$$\begin{aligned} D &= b_{01}^t(t)Ab_{01}(t) - 2b_2^t Ab_{01}(t) \\ \alpha &= -b_{01}^t(t)Ab_{01}(t) \end{aligned}$$

para simplificar ambas expresiones, hagámoslo primero con el término  $b_{01}^t(t)Ab_{01}(t)$ .

$$\begin{aligned} b_{01}^t(t)Ab_{01}(t) &= (t(b_1 - b_0) + b_0)^t A(t(b_1 - b_0) + b_0) \\ &= t^2(b_1 - b_0)^t A(b_1 - b_0) + 2tb_0^t A(b_1 - b_0) + b_0^t Ab_0; \end{aligned}$$

como  $b_0$  es un punto de la cónica y  $b_1$  pertenece a la tangente en  $b_0$

$$\begin{aligned} b_0^t Ab_0 &= 0 \\ b_0^t Ab_1 &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la expresión se reduce a

$$b_{01}^t(t)Ab_{01}(t) = \beta t^2$$

donde

$$\beta = b_1^t Ab_1 = C(b_1).$$

De manera que las expresiones para  $D$  y  $\alpha$  se reducen a

$$\begin{aligned} D &= \beta t^2 - 2b_2 Ab_{01}(t) \\ \alpha &= -\beta t^2 \end{aligned}$$

después de simplificar el segundo término que aparece en  $D$ , obtenemos

$$D = \beta t^2 + \delta(t - 1)$$

donde

$$\delta = 2b_2^t Ab_0$$

**Nota:** Dado que estamos describiendo el arco cónico  $b_0b_2$ , el valor de  $s$  que determina al punto de la cónica, debe estar en el intervalo unitario; en consecuencia,  $D$  debe estar definido para todo valor del intervalo.

Ahora bien, dado que  $D(0) = -\delta$  y  $D(1) = \beta$ , entonces para que  $D$  no se anule,  $\beta$  y  $\delta$  deben tener signo contrario  $\beta\delta < 0$ .

Reescribiendo la ecuación (6.3.13)

$$Dp(t) = \beta t^2 b_2 + b_{01}(t)(t-1)\delta$$

y substituyendo  $b_{01}(t)$  obtenemos

$$Dp(t) = \beta t^2 b_2 - \delta b_1 t(1-t) + \delta(2t-1-t^2)b_0$$

finalmente, usando las siguientes propiedades de los polinomios de Bézier:

$$\begin{aligned} t^2 &= B_2^2(t) \\ t &= 1/2 B_1^2(t) + B_2^2(t) \\ 1 &= B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente expresión del arco cónico  $b_0b_2$ :

$$p(t) = \frac{-\delta b_0 B_0^2(t) - \delta/2 b_1 B_1^2(t) + \beta b_2 B_2^2(t)}{-\delta B_0^2(t) - \delta/2 B_1^2(t) + \beta B_2^2(t)} ; \beta\delta > 0. \quad (6.3.14)$$

En general, la ecuación de un arco cónico es de la forma

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)} ; w_0 = -\delta, w_1 = -\frac{\delta}{2}, w_2 = \beta \quad (6.3.15)$$

Observemos que esta representación siempre la podemos reescribir de tal manera que los coeficientes de  $b_i B_i^2(t)$ , sean positivos.

- Si  $\beta > 0$ , dado que  $\beta\delta < 0$ ,  $-\delta > 0$  y, por tanto, los coeficientes son positivos.
- Si  $\beta < 0$ , se concluye que  $-\delta < 0$ , entonces al factorizar un  $-1$ , tanto en el numerador como el denominador, se llega a una expresión donde todos los coeficientes son positivos.

A la ecuación que acabamos de obtener, se le conoce como **representación paramétrica racional de Bézier** y, al igual que en la representación polinomial de Bézier, los puntos  $b_i$  forman el llamado **polígono de control**, mientras que a las constantes  $w_0$ ,  $w_1$  y  $w_2$  se les conoce como el **peso asociado** al vértice  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente.

**Teorema 6.3.52** *Todo arco cónico  $b_0b_2$  puede expresarse por medio de una ecuación racional de Bézier de la forma*

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}; w_i > 0, t \in [0, 1]$$

A continuación veremos que el recíproco también es cierto, es decir, toda ecuación racional de Bézier representa una cónica, para ello, asumiremos que los pesos son positivos.

Como los polinomios de Bézier son curvas acotadas y su gráfica se encuentra en el primer cuadrante en el intervalo unitario, entonces el denominador de (6.3.15), que denotaremos por  $w(t)$ , también representa una curva positiva y acotada en este intervalo,

$$w(t) = \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)$$

si denotamos por

$$\Psi_i(t) = \frac{w_i B_i^2(t)}{w(t)}$$

entonces, la ecuación racional de Bézier queda expresada de la siguiente forma

$$p(t) = \sum_{i=0}^2 b_i \Psi_i(t) \tag{6.3.16}$$

Notemos que la suma de los coeficientes de los puntos de control es uno, lo que nos indica que  $p(t)$  es **combinación baricéntrica** de los puntos  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ ; más aún, dado que  $\Psi_i(t) \geq 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $p(t)$  es una combinación convexa de los puntos del polígono de control y, por tanto, para toda  $t$  entre cero y uno,  $p(t)$  está en la cubierta convexa de estos puntos.

Ahora consideremos los vectores

$$u = b_0 - b_1$$

$$v = b_2 - b_1$$

como los puntos  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  no son colineales, entonces los vectores son linealmente independientes (vea la figura 6-7), por lo tanto, si  $P$  es un punto del plano determinado por  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ , existen constantes  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$P = b_1 + \alpha u + \beta v$$

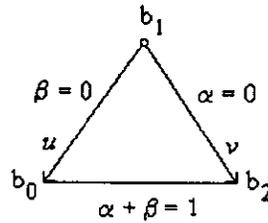


Figura 6-7:

reescribiendo a  $P$  en términos de los puntos de control

$$P = \alpha b_0 + (1 - (\alpha + \beta))b_1 + \beta b_2 \quad (6.3.17)$$

Estas expresiones de  $P$ , nos permiten hacer la siguiente traducción entre las coordenadas oblicuas y las baricéntricas.

Dadas las coordenadas oblicuas  $(\alpha, \beta)$ , las coordenadas baricéntricas son  $(\alpha, 1 - (\alpha + \beta), \beta)$ .

Ahora, comparando las ecuaciones (6.3.16) y (6.3.17)

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ 1 - (\alpha(t) + \beta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_1(t) \end{pmatrix} \quad (6.3.18)$$

Multiplicando  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  tenemos

$$\alpha(t)\beta(t) = \frac{w_0 w_2}{w^2(t)} B_0^2(t) B_2^2(t)$$

y dado que

$$B_0^2(t) B_2^2(t) = \frac{(B_1^2(t))^2}{4}$$

el producto lo podemos reescribir en la forma

$$\begin{aligned}\alpha(t)\beta(t) &= \frac{w_0w_2}{4w_1^2} \frac{w_1^2 (B_1^2(t))^2}{w^2(t)} \\ &= \frac{w_0w_2}{4w_1^2} \Psi_1^2(t)\end{aligned}$$

por último al reescribir a  $\Psi_1^2(t)$  en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ , obtenemos

$$\alpha(t)\beta(t) = c(1 - (\alpha(t) + \beta(t))^2) \quad (6.3.19)$$

donde

$$c = \frac{w_0w_2}{4w_1^2}$$

De esta forma llegamos a que las coordenadas oblicuas de todo punto generado por la ecuación racional de Bézier, satisfacen una ecuación cuadrática, por lo tanto, representa una cónica, en particular, para valores del parámetro entre cero y uno, la ecuación describe el arco cónico  $b_0b_2$ .

Tomando en cuenta ambos resultados, tenemos lo siguiente

*Toda cónica se puede expresar por medio de una representación racional de Bézier, y toda representación racional de Bézier representa una cónica.*

Ya que hemos visto que un arco cónico con tangentes no paralelas en los extremos, se puede describir mediante una ecuación paramétrica racional de Bézier, estudiemos ahora algunas propiedades de esta representación.

### 6.3.1 Algunas propiedades de las curvas racionales de Bézier

#### Clasificación de la cónica

Como es sabido, la clasificación de la curva se obtiene a través del discriminante de la ecuación

$$-c\alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2 + 2c\alpha + 2c\beta - c = 0$$

que está dado por

$$\Delta = 1 - 4c$$

después de substituir  $c$ , llegamos a la siguiente expresión

$$\Delta = 1 - k$$

donde

$$k = w_0 w_2 / w_1^2$$

De este modo, la clasificación de la cónica en términos de  $k$ , está dada por

Para  $k = 1$  la curva es una parábola.

Para  $k > 1$  se trata de una elipse. (6.3.20)

Para  $k < 1$  estamos en el caso de una hipérbola.

### Invarianza de la representación bajo transformaciones afines

Cuando se desea resolver un problema de diseño geométrico, generalmente se requiere del uso de curvas cuya representación sea invariante bajo transformaciones afines, es decir, bajo rotaciones, translaciones, escalamientos etc.. Esta es una propiedad que tiene la representación racional de Bézier.

Sea  $T$  una transformación afín, es decir,  $T$  es una transformación lineal seguida de una translación,  $T(P) = L(P) + A$ , entonces

$$\begin{aligned} T(p(t)) &= T\left(\sum_{i=0}^2 b_i \Psi_i(t)\right) \\ &= \sum (L(b_i) + A) \Psi_i(t) \\ &= \sum T(b_i) \Psi_i(t) \\ &= \frac{\sum w_i T(b_i) B_i^2(t)}{w(t)} \end{aligned}$$

esto nos muestra que la representación racional de Bézier es invariante bajo transformaciones afines.

### Las proyecciones preservan la forma de la Representación Racional de Bézier

Otra transformación que también es muy útil en el diseño geométrico por computadora es la proyección. Una de sus aplicaciones es el despliegue gráfico de un objeto tridimensional, que se obtiene generando una vista proyectiva de éste.

Sea  $S$  una perspectiva central con vértice  $c$  sobre el plano  $\mathcal{P}$ .  $S : p \rightarrow \mathcal{P}$ , por definición,  $S(p)$  está en perspectiva central con  $p$ , si  $c$ ,  $S(p)$  y  $p$  son colineales, es decir

$$S(p) = (1 - \rho)p + \rho c \quad (6.3.21)$$

Si  $q$  es un punto de  $\mathcal{P}$  y  $N$  un vector normal a éste, entonces la ecuación del plano está dada por

$$(S(p) - q) \cdot N = 0$$

al substituir  $S(p)$  en ésta última y despejar a  $\rho$ , obtenemos

$$\rho = \frac{(p - q) \cdot N}{(p - c) \cdot N}$$

Veamos ahora que  $S(p)$  preserva la forma racional de Bézier

Primero evaluemos a  $S$  en  $p(t)$  :

$$S(p(t)) = \frac{p(t)(q - c) \cdot N + ((p(t) - q) \cdot N)c}{(p(t) - c) \cdot N};$$

después de substituir  $p(t)$  y simplificar obtenemos

$$S(p(t)) = \frac{\sum w_i B_i^2(t) (((q - c) \cdot N)b_i + ((b_i - q) \cdot N)c)}{\sum (w_i (b_i - c) \cdot N) B_i^2(t)}$$

Notemos que el término de la sumatoria en el numerador, se puede reescribir en la forma

$$w_i B_i^2(t) (b_i - c) \cdot n(1 - \rho(b_i)b_i + \rho(b_i)c)$$

por lo tanto

$$S(p(t)) = \frac{\sum w'_i(t) S(b_i) B_i^2(t)}{\sum w'_i(t) B_i^2(t)}$$

donde  $w'_i = w_i (b_i - c) \cdot N$ .

Con esto se muestra que la representación racional se preserva bajo proyecciones, donde los puntos de control de la curva original van a dar a los puntos de control de la curva imagen, pero los valores de los pesos se alteran de acuerdo a la ecuación dada por  $w'_i$ .

## Definición alternativa de una sección cónica.

### Definición 6.3.53 Sección cónica

Una sección cónica en  $\mathbb{R}^2$  es la proyección sobre el plano  $z = 1$  desde el origen de coordenadas de una curva de Bézier de grado dos definida en  $\mathbb{R}^3$  (vea la figura 6-8).

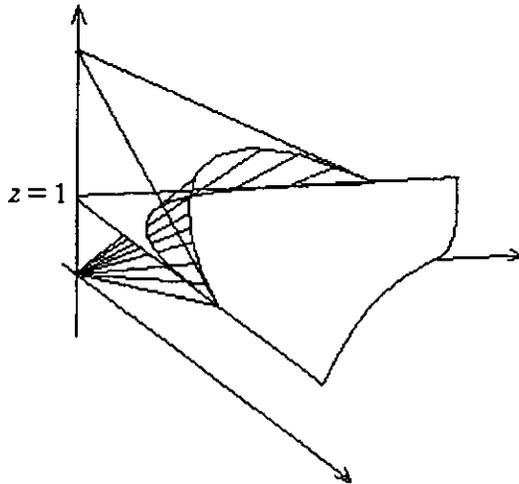


Figura 6-8: Cónica vista como la proyección de una parábola en  $\mathbb{R}^3$ .

Usando esta definición, probaremos ahora que toda sección cónica se puede escribir como una curva racional cuadrática de Bézier.

**Teorema 6.3.54** Para toda cónica  $p(t)$ , existen tres números reales  $w_0, w_1, w_2$  y tres puntos  $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$  tales que  $p(t)$  puede escribirse como

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)} \quad (6.3.22)$$

donde

$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}$$

### Demostración

Sea  $p(t)$  un punto de la cónica, por definición,  $p(t)$  es la imagen proyectiva de un punto de una curva de Bézier de grado dos definida en  $\mathbb{R}^3$ . Si pensamos en el plano de proyección  $z = 1$  como una copia de  $\mathbb{R}^2$ , entonces a  $p(t)$  lo podemos identificar con el punto  $(p(t), 1)^t$ ; por lo tanto,  $p(t)$  es la imagen

proyectiva de  $(w(t)p(t), w(t))^t$ . Escribiendo ahora la cónica en términos de los polinomios de Bézier, tenemos

$$\begin{pmatrix} w(t)p(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = r_0 B_0^2(t) + r_1 B_1^2(t) + r_2 B_2^2(t)$$

donde  $r_i \in \mathbb{R}^3$ .

Reescribiendo cada punto  $r_i$  de modo que su última componente, a la que denotaremos por  $w_i$  quede explícita, es decir,  $r_i = (q_i, w_i)^t$  con  $q_i \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{pmatrix} w(t)p(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^2 (q_i, w_i)^t B_i^2(t) \quad (6.3.23)$$

de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} w(t)p(t) &= \sum_{i=0}^2 q_i^t B_i^2(t) \\ w(t) &= \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{aligned}$$

resolviendo para  $p(t)$

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 q_i^t B_i^2(t)}{w(t)} ; \text{ con } q_i \in \mathbb{R}^2 \text{ y } w_i \in \mathbb{R}$$

finalmente escribiendo a cada  $q_i^t$  de la forma  $q_i^t = w_i b_i$ , obtenemos la expresión para  $p(t)$  deseada. ■

Notemos que los puntos de control de la cónica:  $b_0, b_1, b_2$ , son la proyección de los puntos de control  $(w_i b_i, w_i)^t$  de la curva polinomial de Bézier de grado dos, sobre el plano  $z = 1$ . Además, si todos los pesos son iguales, entonces como los polinomios de Bézier suman 1, el denominador de (6.3.22) es constante, por lo tanto, las curvas polinomiales de Bézier de grado dos son un caso especial de las racionales cuadráticas.

### Ecuación en coordenadas cartesianas

Todo punto  $p$  del plano generado por los puntos  $b_0, b_1$  y  $b_2$  lo podemos expresar

$$p = \alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

donde

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Dicho de otro modo, todo punto del plano, se puede expresar como combinación baricéntrica de  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Una forma de obtener las coordenadas baricéntricas de  $p$ , es calculando las áreas  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$ , de los triángulos determinados por los puntos de control y  $p$ , vea la figura 6-9.

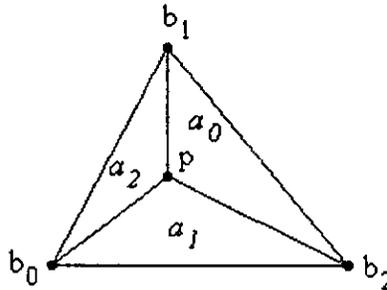


Figura 6-9:

$$d\alpha_0 = \text{área } \triangle pb_2b_1 = a_0$$

$$d\alpha_1 = \text{área } \triangle pb_0b_2 = a_1$$

$$d\alpha_2 = \text{área } \triangle pb_1b_0 = a_2$$

donde

$$d = \text{área } \triangle b_0b_1b_2.$$

Por otro lado, sabemos que si  $(\alpha, \beta)$  son las coordenadas oblicuas del punto, entonces las coordenadas baricéntricas están dadas por  $(\alpha, 1 - (\alpha + \beta), \beta)$ .

Usemos estas expresiones para obtener la ecuación de la cónica en coordenadas cartesianas. Para ello, sea  $N$  un vector normal al plano determinado por los puntos de control de la cónica y denotemos

$$\begin{aligned} a &= ((b_0 - b_1) \times (b_2 - b_1)) \cdot N \\ &= \lambda \text{área } \triangle b_0b_1b_2 \end{aligned}$$

donde

$$\lambda = 2N \cdot \hat{u}, \text{ y } \hat{u} \text{ un vector unitario paralelo a } N$$

Análogamente obtenemos

$$\lambda a_0 = (b_2 - p) \times (b_1 - p) \cdot N \quad (6.3.24)$$

$$\lambda a_1 = (b_0 - p) \times (b_2 - p) \cdot N \quad (6.3.25)$$

$$\lambda a_2 = (b_1 - p) \times (b_0 - p) \cdot N$$

De manera que las coordenadas baricéntricas de  $P$  están dadas por

$$\alpha_i = \frac{\lambda a_i}{a}$$

Reescribiendo la ecuación  $p = \alpha b_0 + (1 - (\alpha + \beta))b_1 + \beta b_2$ , tomando como punto de referencia a  $p$

$$\alpha(b_0 - p) + (1 - (\alpha + \beta))(b_1 - p) + \beta(b_2 - p) = 0 \quad (6.3.26)$$

aplicando el producto cruz con  $(b_2 - p)$  y comparando con las primeras dos igualdades de (6.3.25) tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(b_0 - p) \times (b_2 - p) - (1 - (\alpha + \beta))(b_1 - p) \times (b_2 - p) &= 0 \\ \alpha\alpha_1 - (1 - (\alpha + \beta))\alpha_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

tomando ahora el producto cruz de (6.3.26) con  $(b_0 - p)$  y comparando con la primera y última igualdad de (6.3.25) se tiene.

$$\begin{aligned} (1 - (\alpha + \beta))(b_1 - p) \times (b_0 - p) + \beta(b_2 - p) \times (b_0 - p) &= 0 \\ (1 - (\alpha + \beta))\alpha_2 - \beta\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

De las ecuaciones (6.3.27) y (6.3.28) se sigue

$$\alpha\alpha_1 = (1 - (\alpha + \beta))\alpha_0$$

$$\beta\alpha_1 = (1 - (\alpha + \beta))\alpha_2$$

de las que se deduce que

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha \\ \alpha_1 &= 1 - (\alpha + \beta) \\ \alpha_2 &= \beta\end{aligned}\tag{6.3.29}$$

De manera que si consideramos al plano  $b_0b_1b_2$  como el plano  $XY$ , al punto  $p = (x, y)$  y a  $b_i = (x_i, y_i)$ , entonces, las coordenadas oblicuas de  $\alpha$  y  $\beta$  están dadas por

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)}{(y_0 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ \beta &= \frac{(y - y_1)(x_0 - x_1) - (x - x_1)(y_0 - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)}\end{aligned}$$

Para obtener las coordenadas de la cónica, se substituye  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación (6.3.19).

#### Ecuación del “segmento” complementario

La representación racional de Bézier nos permite describir una cónica en términos de tres puntos  $b_0, b_1$  y  $b_2$ , en particular, para valores del parámetro entre cero y uno, se obtiene el arco definido por los puntos  $b_0$  y  $b_2$ . Para distinguir este arco del resto de la curva, a éste se le llama **segmento estándar**, mientras que al otro “segmento” de la curva se le llama **segmento complementario**.

El siguiente resultado nos indica cómo modificar los pesos asociados a los puntos de control  $b_0, b_1$  y  $b_2$ , para obtener el segmento complementario usando valores del parámetro en el intervalo unitario.

**Teorema 6.3.55** Sea  $\tilde{p}(t)$  la curva definida por

$$\tilde{p}(t) = \frac{w_0b_0B_0^2(t) - w_1b_1B_1^2(t) + w_2b_2B_2^2(t)}{\tilde{w}(t)}\tag{6.3.30}$$

con  $\tilde{w}(t) = w_0B_0^2(t) - w_1B_1^2(t) + w_2B_2^2(t)$  y los pesos  $w_i$  son positivos

Entonces  $p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$  describen a la misma cónica. Más aún para  $t \in [0, 1]$  los puntos  $b_1, p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$  son colineales. Por lo tanto, la ecuación (6.3.30) describe el segmento complementario de  $p(t)$  para  $t \in [0, 1]$ .

### Demostración

Primero veamos que las ecuaciones  $p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$  describen a la misma cónica, para lo cual, probaremos que las coordenadas baricéntricas de  $\tilde{p}(t)$  satisfacen la ecuación  $\alpha\beta = c(1 - (\alpha + \beta))$ .

Las coordenadas baricéntricas de  $\tilde{p}(t)$  son

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= w_0 B_0^2(t) / \tilde{w}(t) \\ \tilde{\beta} &= w_2 B_2^2(t) / \tilde{w}(t) \\ 1 - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) &= -w_1 B_1^2(t) / \tilde{w}(t)\end{aligned}$$

Para ver que éstas satisfacen la ecuación (6.3.19), hagamos el producto de  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} &= \frac{w_0 w_2}{\tilde{w}^2(t)} B_0^2(t) B_2^2(t) \\ &= \frac{w_0 w_2 w_1^2 (B_1^2(t))^2}{4w_1^2 \tilde{w}^2(t)} \\ &= c \left( 1 - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \right)^2\end{aligned}$$

de esta última expresión vemos que las coordenadas baricéntricas de  $\tilde{p}(t)$  satisfacen la ecuación (6.3.19) y por lo tanto  $p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$  representan a la misma cónica.

Ahora bien, para hacer ver que  $b_1$ ,  $p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$  son colineales, restemos  $b_1$  de  $\tilde{p}(t)$ , obteniendo (siempre y cuando  $\tilde{w}(t) \neq 0$ ).

$$\begin{aligned}\tilde{p}(t) - b_1 &= \frac{1}{\tilde{w}(t)} (w(t)p(t) - 2w_1 b_1 B_1^2(t) - \tilde{w}(t)b_1) \\ &= \frac{w(t)}{\tilde{w}(t)} (p(t) - b_1)\end{aligned}$$

Esta expresión nos indica la colinealidad de los puntos, y dado que  $\tilde{p}(t)$  también es un punto de la cónica,  $\tilde{p}(t)$  es un punto del segmento complementario, es decir, para  $t$  en el intervalo unitario,  $\tilde{p}(t)$  es el punto del segmento complementario determinado por el punto de intersección de la cónica y la línea que une los puntos  $b_1$  y  $p(t)$  (Vea la figura 6-10).

### Clasificación de la cónica con base en la representación del segmento complementario.

El segmento estándar es una curva acotada, por tanto, a través de un análisis de las discon-

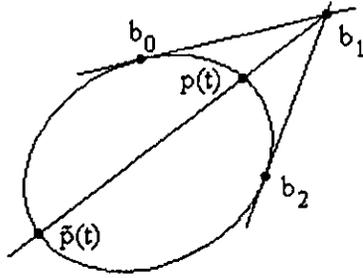


Figura 6-10: Relación entre los puntos generados por las representaciones  $p(t)$  y  $\tilde{p}(t)$ .

tinuidades del "segmento complementario", podemos clasificar a la cónica; por ejemplo, si  $\tilde{p}(t)$  es una curva acotada, la cónica es una elipse, de lo contrario,  $\tilde{p}(t)$  representa a una parábola o a una hipérbola. El comportamiento de la curva está determinado por el de  $\tilde{w}(t)$ .

$$\tilde{w}(t) = (w_0 + 2w_1 + w_2)t^2 - 2(w_0 + w_1)t + w_0$$

La forma de la curva  $\tilde{w}(t)$  se ilustra en figura 6-11.

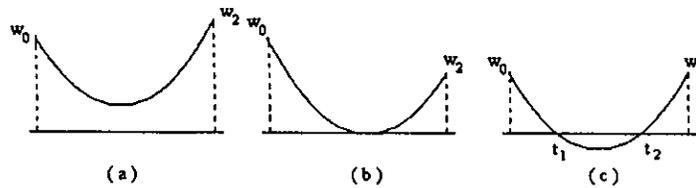


Figura 6-11: Formas que puede adoptar la curva  $\tilde{w}(t)$ .

sus raíces están dadas por

$$t_i = \frac{w_0 + w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - w_2 w_0}}{w_0 + 2w_1 + w_2}$$

$$t_i = \frac{w_0 + w_1 \pm w_1 \sqrt{1 - k}}{w_0 + 2w_1 + w_2}, \quad k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2}$$

de esta expresión obtenemos la siguiente clasificación

a)  $k > 1$  (figura 6-11 (a)).

$\tilde{w}(t)$  no tiene raíces reales, por tanto,  $\tilde{p}(t)$  es una curva acotada y entonces la cónica es una elipse.

b )  $k = 1$  (figura 6-11 (b)).

En este caso  $\tilde{w}(t)$  tiene una raíz doble indicando que  $\tilde{p}(t)$  es una curva no acotada y como  $\tilde{w}(t)$  no cambia de signo, la curva cae completamente en el primer cuadrante del sistema oblicuo ( $b_1; u, v$ ), tratándose en este caso de una parábola.

c )  $k < 1$  (figura 6-11 (c)).

$\tilde{w}(t)$  tiene dos raíces diferentes, digamos  $t_1 < t_2$ , lo que significa que la curva es la unión de dos curvas disjuntas, por lo tanto, la cónica es una hipérbola.

Para valores de  $t$  en el intervalo  $(0, t_1)$ , la curva se encuentra en el primer cuadrante y conforme  $t$  se aproxima a  $t_1$ , la curva tendrá un comportamiento asintótico, pero tomando en cuenta que  $\tilde{w}(t)$  cambia de signo para valores de  $t$  mayores que  $t_1$ , la curva pasa del primer cuadrante al tercero, y conforme  $t$  se aproxima a  $t_2$ ,  $\tilde{p}(t)$  se aproxima cada vez más a la segunda asíntota; para  $t$  mayor que  $t_2$ ,  $\tilde{w}(t)$  cambia nuevamente de signo, por tanto, la curva cambia del tercer al primer cuadrante y a medida que  $t$  se aproxima a la unidad,  $\tilde{p}(t)$  se acerca más al punto de control  $b_2$  (Vea la figura 6-12).

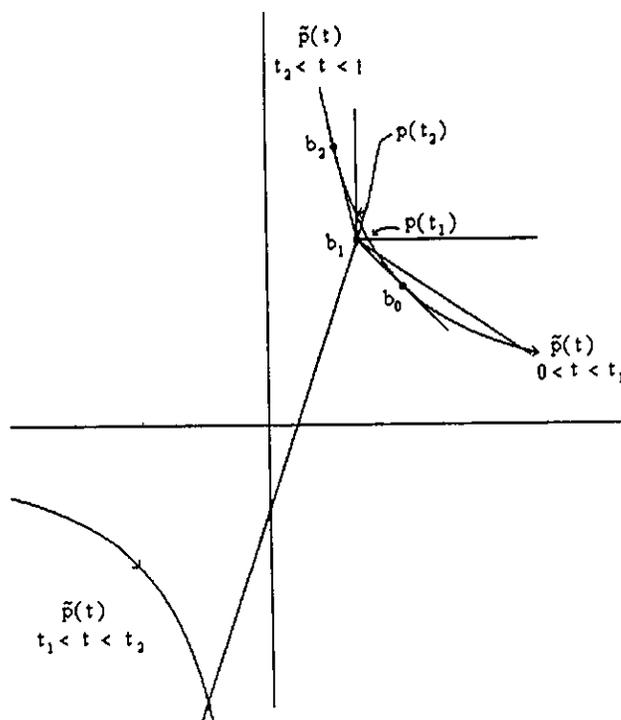


Figura 6-12:

### El problema de inversión

El problema de inversión consiste en obtener el parámetro correspondiente a un punto  $p$ ; es decir determinar el valor de  $t$  que cumple la relación

$$p = p(t)$$

Denotemos por  $l$  a la línea que une el punto  $b_1$  con  $p$  y por  $y$  a su punto de intersección con el segmento  $\overline{b_0 b_2}$  vea la figura 6-13, entonces existe un valor de  $\lambda$ , para el cual  $y$  está dado por

$$y = (1 - \lambda)b_0 + \lambda b_2$$

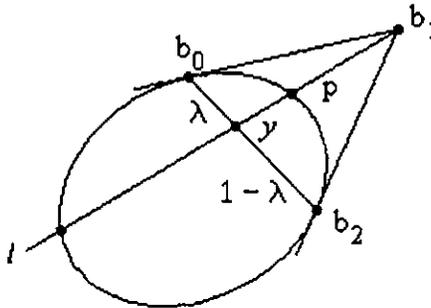


Figura 6-13:

Si  $t$  es el valor del parámetro correspondiente a  $p$ , los vectores

$$\begin{aligned} p(t) - b_1 &= \frac{w_0 B_0^2(t)(b_0 - b_1) + w_2 B_2^2(t)(b_2 - b_1)}{w(t)} \\ y - b_1 &= (1 - \lambda)(b_0 - b_1) + \lambda(b_2 - b_1) \end{aligned}$$

son paralelos, por tanto, sus coordenadas con respecto a los vectores  $u = b_0 - b_1$  y  $v = b_2 - b_1$ , deben satisfacer la relación

$$\frac{1 - \lambda}{w_0 B_0^2(t)} = \frac{\lambda}{w_2 B_2^2(t)} \quad (6.3.31)$$

que podemos llevar a la forma

$$((1 - \lambda)w_2 - w_0\lambda)t^2 + 2w_0\lambda t - \lambda w_0 = 0 \quad (6.3.32)$$

y cuyas raíces están dadas por

$$t_i = \frac{w_0\lambda \pm \sqrt{\lambda w_0 w_2 (1 - \lambda)}}{(1 - \lambda)w_2 - w_0\lambda}$$

simplificando obtenemos

$$t_1 = \frac{\sqrt{\lambda w_0}}{\sqrt{\lambda w_0} + \sqrt{w_2(1 - \lambda)}} \quad (6.3.33)$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{\lambda w_0}}{\sqrt{\lambda w_0} - \sqrt{w_2(1 - \lambda)}} \quad (6.3.34)$$

Notemos que  $t_1$  es menor que uno entonces, el punto que le corresponde pertenece al segmento estándar, mientras que el correspondiente a  $t_2$  pertenece al segmento complementario. Además, como  $b_1$ ,  $p(t_1)$  y  $p(t_2)$  son colineales,  $p(t_2)$  lo podemos expresar usando  $t = t_1$  en la parametrización del segmento complementario; es decir

$$p(t_2) = \tilde{p}(t_1)$$

Tomando en cuenta que  $t_1$  y  $t_2$  son raíces de la ecuación (6.3.32), tenemos la siguiente relación  $t_1 + t_2 = 2t_1 t_2$ , o equivalentemente  $t_2 = t_1 / (2t_1 - 1)$ , de aquí se sigue que

$$\tilde{p}(t_1) = p\left(\frac{t_1}{2t_1 - 1}\right)$$

Observemos ahora que este resultado no depende de la elección del punto  $P$ , por lo que podemos escribir

$$\tilde{p}(t) = p\left(\frac{t}{2t - 1}\right)$$

ésta última nos da una forma de obtener el segmento complementario con la parametrización  $p(t)$  (figura 6-14).

### 6.3.2 Algoritmo para generar arcos cónicos

Como ya tenemos un algoritmo para generar puntos de una parábola y una cónica se puede obtener a partir de la proyección de una de éstas, entonces al aplicar el algoritmo a la parábola definida en  $\mathbb{R}^3$ ,

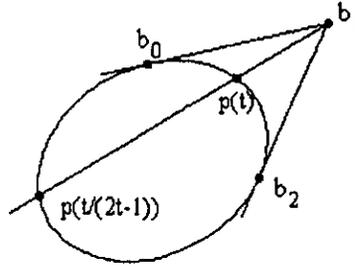


Figura 6-14: Parámetro correspondiente al segmento complementario usando la representación  $p(t)$ .

podemos obtener un algoritmo para generar puntos de una cónica.

Si los puntos de control de la parábola definida en  $\mathbb{R}^3$  son

$$r_0 = (w_0 b_0, w_0)^t$$

$$r_1 = (w_1 b_1, w_1)^t$$

$$r_2 = (w_2 b_2, w_2)^t$$

De acuerdo al algoritmo visto en la sección 6.2.1 obtenemos

$$r_0^1(t) = (1-t)r_0^0 + tr_1^0(t)$$

$$\begin{aligned} r_0^1(t) &= (1-t)(w_0 b_0, w_0)^t + t(w_1 b_1, w_1)^t \\ &= ((1-t)w_0 b_0 + tw_1 b_1, (1-t)w_0 + tw_1)^t \end{aligned}$$

$$r_1^1(t) = (1-t)r_1^0 + tr_2^0(t)$$

$$\begin{aligned} r_1^1(t) &= (1-t)(w_1 b_1, w_1)^t + t(w_2 b_2, w_2)^t \\ &= ((1-t)w_1 b_1 + tw_2 b_2, (1-t)w_1 + tw_2)^t \end{aligned}$$

$$r_0^2(t) = (1-t)r_0^1 + tr_1^1$$

$$= \left( \sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t), \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \right)^t$$

El algoritmo nos indica que el punto de la parábola correspondiente al parámetro  $t$  es :

$$\tilde{p}(t) = \left( \sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t), \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \right)^t$$

Al efectuar la proyección del punto  $\tilde{p}(t)$ , sobre el plano  $z = 1$ , se obtiene el punto de la cónica

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}$$

El algoritmo, nos muestra que podemos obtener el punto de la cónica, evaluado la expresión del numerador y del denominador por separado.

A continuación describimos el algoritmo para generar puntos de una cónica que tiene como puntos de control a  $b_0, b_1, b_2$  donde los pesos asociados son  $w_0, w_1$  y  $w_2$ .

1. Para  $i = 0$  hasta 2

$$q_i^0(t) = w_i b_i$$

$$w_i^0(t) = w_i$$

2. Para  $i = 0$  hasta 2

• Desde  $i = 0$  hasta  $2 - r$

$$q_i^r(t) = (1 - t) q_i^{r-1}(t) + t q_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$w_i^r(t) = (1 - t)w_i^{r-1}(t) + t w_{i+1}^{r-1}(t)$$

Entonces el punto sobre la cónica con parámetro  $t$  está dado por

$$p(t) = \frac{q_0^2(t)}{w_0^2(t)}$$

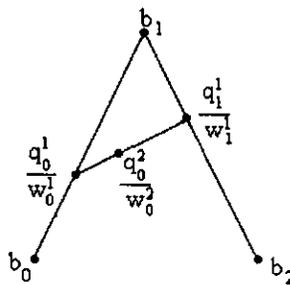


Figura 6-15: Algoritmo para generar el punto asociado a la cónica con parámetro  $t$ .

En la sección 6.2.1 obtuvimos el algoritmo de subdivisión correspondiente para las parábolas definidas en  $\mathbb{R}^2$ . Aplicando un razonamiento similar, podemos obtener el algoritmo de subdivisión para las parábolas definidas en  $\mathbb{R}^3$ , e interpretarlo para obtener el algoritmo de subdivisión correspondiente a las cónicas.

De manera que si denotamos por  $c_i$ , a los puntos de control del subarco cónico  $b_0p(t)$ , entonces éstos están dados por:

$$c_i(t) = \frac{q_0^i(t)}{w_0^i(t)}$$

### 6.3.3 Elección de una parametrización

La representación racional de Bézier describe el arco cónico  $b_0b_2$  para valores del parámetro en el intervalo unitario, donde el tipo de arco está determinado por el valor del invariante  $k$

$$k = \frac{w_0w_2}{w_1^2}$$

éste nos indica que no existe una forma única de elegir los valores de los pesos, es decir, dada una parametrización del arco  $b_0b_2$  determinada por  $w_0, w_1$  y  $w_2$ , si elegimos  $u_0, u_1$  y  $u_2$  de manera que la siguiente relación se cumpla

$$\frac{w_0w_2}{w_1^2} = \frac{u_0u_2}{u_1^2}, \quad w_i > 0, u_i > 0$$

entonces, al reemplazar  $w_i$  por  $u_i$  en la expresión para  $p(t)$ , obtendremos otra parametrización del mismo arco.

A continuación nos centraremos en determinar un miembro de la familia de cónicas que tiene en común a los puntos de control a  $b_0, b_1$  y  $b_2$ .

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}$$

Para fijar un miembro de esta familia, se hace necesario imponer más condiciones sobre la cónica, como por ejemplo, que dicha cónica pase por el punto  $p_*$ , a este punto se le conoce como punto hombro. Una vez que se ha elegido el punto hombro  $p_*$ , podemos calcular sus coordenadas oblicuas con respecto al sistema  $(b_1; b_0 - b_1, b_2 - b_1)$  y aplicando la ecuación (6.3.19), obtenemos el valor del invariante, sin embargo, como mencionamos anteriormente, no existe una manera única de elegir los valores de los pesos, de modo que, si además, indicamos que  $t = t_*$  es el valor del parámetro para el cual se desea obtener el punto hombro, es decir

$$p_* = p(t_*) = \sum_{i=0}^2 b_i \Psi_i(t_*)$$

entonces, las coordenadas baricéntricas de  $p_*$ , dadas por  $\Psi_i(t)$ , quedan completamente determinadas. Por otro lado, sabemos que las coordenadas oblicuas de  $p_* = (\alpha, \beta)$ , y las baricéntricas satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\alpha &= \Psi_0(t_*) \\ \beta &= \Psi_2(t_*) \\ 1 - (\alpha + \beta) &= \Psi_1(t_*)\end{aligned}$$

y de la ecuación (6.3.29)

$$\alpha = \xi a_0, \quad \beta = \xi a_2, \quad 1 - (\alpha + \beta) = \xi a_1$$

haciendo una comparación entre ambas expresiones obtenemos

$$\xi w(t_*) = \frac{w_0}{\frac{a_0}{B_0^2(t_*)}} = \frac{w_1}{\frac{a_1}{B_1^2(t_*)}} = \frac{w_2}{\frac{a_2}{B_2^2(t_*)}} \quad (6.3.35)$$

esta última relación nos permite determinar el valor de los pesos, y con ello, determinamos una representación paramétrica racional del arco con puntos de control  $b_0, b_1, b_2$  que pasa por el punto hombro  $p_*$ .

*Observemos que una vez que hemos especificado el punto hombro, éste determina los valores de  $a_0, a_1, a_2$ , por lo que el valor de los pesos dependerá de la elección de  $t_*$ ; es decir, si mantenemos fijo el punto hombro haciendo variar a  $t_*$  en el intervalo unitario, estaremos obteniendo diferentes parametrizaciones para el mismo arco cónico.*

Una posible elección para el parámetro, es  $t_* = \frac{1}{2}$ , para el que se tiene  $B_0^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}B_1^2(\frac{1}{2}) = B_2^2(\frac{1}{2})$ , de modo que la relación (6.3.35) se transforma en

$$\frac{w_0}{4a_0} = \frac{w_1}{2a_1} = \frac{w_2}{4a_2}$$

o bien

$$w_0 : w_1 : w_2 = a_0 : \frac{1}{2}a_1 : a_2 \quad (6.3.36)$$

**Ejemplo 6.3.56** *Veamos cómo obtener la representación del arco circular centrado en el origen y con tangentes  $x = 1$  y  $y = 1$ .*

Por definición, los puntos extremos del arco coinciden con los puntos de tangencia de las rectas dadas, así,  $b_0 = (1, 0)^t$  y  $b_2 = (0, 1)^t$ , mientras que el tercer punto de control es el punto de intersección de las tangentes,  $b_1 = (1, 1)^t$ . Si elegimos a  $p_* = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^t$  como punto hombro, entonces las áreas determinadas por el polígono de control y  $p_*$  son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{10} \\ a_1 &= \frac{1}{5} \\ a_2 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

o bien

$$a_0 : a_1 : a_2 = 1 : 2 : 2$$

finalmente, de la expresión (6.3.36), obtenemos la siguiente relación entre los pesos

$$w_0 : w_1 : w_2 = 1 : 1 : 2$$

por tanto, una parametrización del círculo unitario está dada por

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + 2b_2 t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2}$$

y después de simplificar, obtenemos

$$p(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)^t$$

Veamos ahora cómo se ve afectada la parametrización del arco circular, si únicamente modificamos el punto hombro.

**Ejemplo 6.3.57** Encontrar la parametrización del arco circular unitario centrado en el origen, usando los puntos de control  $b_0 = (1, 0)^t$ ,  $b_1 = (1, 1)^t$ ,  $b_2 = (0, 1)^t$ , el punto hombro  $p_* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^t$  y el parámetro  $t_* = \frac{1}{2}$ .

Procediendo de manera semejante al ejemplo anterior :

Las áreas determinadas por los puntos de control y el punto de apoyo son  $a_0 = a_1 = \frac{1}{5}$  y  $a_2 = \frac{1}{10}$ , se sigue entonces que  $a_0 : a_1 : a_2 = 4 : 4 : 2$  y  $w_0 : w_1 : w_2 = 4 : 2 : 2$ , de esta forma obtenemos una

segunda parametrización para el arco circular dada por.

$$p(t) = \frac{4b_0(1-t)^2 + 4b_1t(1-t) + 2b_2t^2}{4(1-t)^2 + 4t(1-t) + 2t^2}$$

En el siguiente ejemplo se muestra una tercera parametrización, ésta se obtiene al dejar fijo el valor del parámetro  $t_* = \frac{1}{2}$  y considerar como punto hombro a  $p_* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ .

**Ejemplo 6.3.58** Podemos obtener una tercera parametrización del arco, considerando ahora como punto de apoyo a  $p_* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ . Los valores de las áreas determinados por los puntos son:  $a_0 = a_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ ,  $a_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ , por lo tanto  $a_0 : a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2} : 1$  y  $w_0 : w_1 : w_2 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ , de esta forma obtenemos la parametrización

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \sqrt{2}b_1t(1-t) + b_2t^2}{(1-t)^2 + \sqrt{2}t(1-t) + t^2}$$

En los ejemplos anteriores obtuvimos tres representaciones del círculo unitario, éstas las determinamos manteniendo fijo el valor de  $t_*$  y modificando el punto hombro. En la figura 6-16 se ilustra la distribución que se obtiene para cada una de estas parametrizaciones, en la que podemos observar cómo se modifica la distribución al cambiar los valores de los pesos.

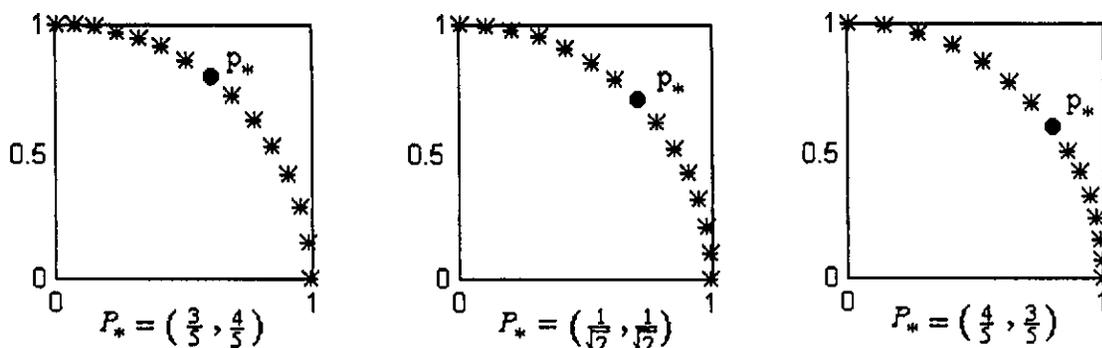


Figura 6-16: Diferentes parametrizaciones del arco circular unitario.

Otra forma de obtener diferentes parametrizaciones para un arco cónico es: dejar el punto hombro fijo y variar el parámetro  $t_*$ . Para hacerlo ver, aprovecharemos las parametrizaciones del círculo obtenidas en los ejemplos anteriores y resolveremos el problema de inversión para cada una, usando como punto hombro a  $p_* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ .

Dado que  $p_*$  pertenece al segmento estándar, el valor del parámetro viene dado por la ecuación (6.3.33)

$$t_* = \frac{\sqrt{\lambda w_0}}{\sqrt{\lambda w_0} + \sqrt{w_2(1-\lambda)}}$$

tomando en cuenta que  $p_*$  coincide con el punto de intersección del arco circular y la identidad, el valor de  $\lambda$  es  $\frac{1}{2}$  entonces,  $t_*$  viene dado por

$$t_* = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}}$$

Usando esta expresión para  $t_*$  obtenemos

- Para la parametrización

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + 2b_2 t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2}$$

el valor del parámetro para  $p_*$  es

$$t_{*1} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

- En la parametrización

$$p(t) = \frac{4b_0(1-t)^2 + 4b_1 t(1-t) + 2b_2 t^2}{4(1-t)^2 + 4t(1-t) + 2t^2}$$

el parámetro está dado por

$$t_{*2} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

- Con la representación

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \sqrt{2}b_1 t(1-t) + b_2 t^2}{(1-t)^2 + \sqrt{2}t(1-t) + t^2}$$

el valor del parámetro es

$$t_{*3} = \frac{1}{2}$$

Lo anterior muestra que las parametrizaciones también las hubiésemos podido obtener al mantener fijo el punto hombro en  $p_* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$  y haber elegido al parámetro  $t_*$ , de entre  $t_{*1}$ ,  $t_{*2}$  y  $t_{*3}$ .

A continuación estudiaremos una parametrización que resulta de hacer una elección particular tanto para el punto hombro  $p_*$  como para el parámetro.

### 6.3.4 Parametrización rho

En la sección anterior vimos que para fijar un miembro de la familia de cónicas con polígono de control  $b_0, b_1, b_2$ , basta con dar el punto hombro  $p_*$  y el valor del parámetro que lo determina  $t_*$ . Dado que nuestro interés es la descripción del arco cónico  $b_0b_2$ , restringimos la elección del punto hombro  $p_*$  a la cubierta convexa del polígono de control, dicha elección puede ser arbitraria, o bien, podemos imponer alguna condición, como por ejemplo, pedir que  $p_*$  sea un punto del segmento que une a  $b_1$  con  $p_m$  (vea la figura 6-17), donde  $p_m$  es el punto medio del segmento  $b_0b_2$ . Si parametrizamos el segmento  $\overline{p_m b_1}$  en la forma

$$p_*(\rho) = \rho b_1 + (1 - \rho)P_m \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (6.3.37)$$

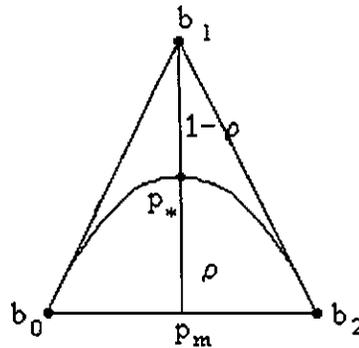


Figura 6-17: Elección del punto hombro en la parametrización rho.

entonces, es posible identificar al punto hombro con el valor del parámetro  $\rho$ .

Si para esta elección del punto hombro, pedimos que el valor de su parámetro con respecto a la representación racional de Bézier sea  $t_* = \frac{1}{2}$  entonces, la representación adopta el nombre de parametrización rho. Veamos cómo queda expresada la parametrización en términos de  $\rho$ .

El punto hombro en términos de los puntos de control está dado por la expresión

$$p_* = \frac{1-\rho}{2}b_0 + \rho b_1 + \frac{1-\rho}{2}b_2$$

usando la relación que existe entre las áreas  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y las coordenadas baricéntricas, dada en la ecuación (6.3.29), se tiene

$$\begin{aligned}\lambda a_0 &= \frac{1-\rho}{2} \\ \lambda a_1 &= \rho \\ \lambda a_2 &= \frac{1-\rho}{2}\end{aligned}$$

finalmente usando la ecuación (6.3.36), obtenemos las razones entre los pesos

$$w_0 : w_1 : w_2 = 1 - \rho : \rho : 1 - \rho \quad (6.3.38)$$

de la cual se sigue que la parametrización rho del arco cónico  $b_0b_2$  está dada por

$$p(t) = \frac{(1-\rho)b_0(1-t)^2 + \rho b_1 t(1-t) + (1-\rho)b_2 t^2}{(1-\rho)(1-t)^2 + \rho t(1-t) + (1-\rho)t^2} \quad (6.3.39)$$

o bien, multiplicando por  $\frac{1}{1-\rho}$  tanto el numerador como el denominador obtenemos la expresión

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \frac{\rho}{(1-\rho)} b_1 t(1-t) + b_2 t^2}{(1-t)^2 + \frac{\rho}{(1-\rho)} t(1-t) + t^2} \quad (6.3.40)$$

Observemos que al reescribir la parametrización de esta forma, se llega a una expresión donde los pesos  $w_0$  y  $w_2$  toman el mismo valor, mientras que el peso  $w_1 = \frac{\rho}{(1-\rho)}$ , es precisamente, la razón en la que el punto  $p_*$  divide al segmento  $\overline{p_m b_1}$ , y el valor del invariante está dado en términos de  $w_1$

$$k = \frac{1}{w_1^2}$$

que en términos de  $\rho$  es

$$k = \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2} \quad (6.3.41)$$

*De manera que si el punto hombro es aquél que divide al segmento  $\overline{p_m b_1}$  en la razón  $r$ , entonces, el invariante es*

$$k = \frac{1}{r^2}$$

y la ecuación racional de Bézier para la cónica está dada por

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \tau b_1 t(1-t) + b_2 t^2}{(1-t)^2 + \tau t(1-t) + t^2}$$

a esta representación de la cónica se le conoce como la *representación racional de Bézier estándar* y sus propiedades facilitan, en la práctica, la descripción de un arco cónico. Más adelante veremos otra forma de obtener esta misma representación.

Retomemos la expresión del invariante dada en términos de  $\rho$  y reescribámosla en la forma

$$\rho^2(1-k) - 2\rho + 1 = 0$$

cuyas raíces,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , están dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \\ \rho_2 &= \frac{1}{1 - \sqrt{k}} \end{aligned} \tag{6.3.42}$$

Notemos que para cualquier valor positivo de  $k$ ,  $\rho_1$  es positivo, en consecuencia, el punto que determina pertenece al segmento estándar, y dado que  $\rho_1$ , está en términos del invariante, la clasificación de la cónica viene dada por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2} \text{ Caso parabólico } (k = 1). \\ \rho_1 &< \frac{1}{2} \text{ Caso elíptico } (k > 1) \\ \rho_1 &> \frac{1}{2} \text{ Caso hiperbólico } (k < 1). \end{aligned} \tag{6.3.43}$$

Análogamente, podemos clasificar a la cónica usando el valor de  $\rho_2$ , en este caso, no existe un valor finito de  $\rho_2$  que corresponda a la parábola, mientras que si  $\rho_2 < 0$ , la cónica es una elipse y para  $\rho_2 > 1$ , la curva es una hipérbola.

**Ejemplo 6.3.59** *Obtener la representación rho para el arco elíptico que se encuentra en el primer cuadrante de una elipse centrada en el origen y con semiejes paralelos a los ejes coordenados, de longitudes a y b respectivamente.*



$$w_1 = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}.$$

De esta manera, la parametrización rho para el arco elíptico  $b_0b_2$  está dada por

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + 2\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}b_1t(1-t) + b_2t^2}{(1-t)^2 + 2\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}t(1-t) + t^2}$$

### Transformación de una parametrización de la cónica en la parametrización estándar

En el ejemplo anterior, obtuvimos una parametrización rho para una elipse donde el valor de  $\rho$  lo obtuvimos usando directamente su definición; veamos ahora cómo podemos obtener la parametrización rho a partir de otra, es decir, dados los pesos  $w_0$ ,  $w_1$  y  $w_2$ , encontraremos los valores correspondientes de  $w_{0\rho}$ ,  $w_{1\rho}$  y  $w_{2\rho}$  para la parametrización rho.

Si pedimos que  $w_{0\rho} = w_{2\rho} = 1$ , entonces dado que ambas parametrizaciones deben representar a la misma cónica, se sigue que

$$\frac{w_0w_2}{w_1^2} = \frac{1}{w_{1\rho}^2}$$

resolviendo para  $w_{1\rho}$

$$w_{1\rho} = \frac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}}$$

De manera que si una representación de la cónica está dada por

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}$$

entonces, la representación rho de la misma, viene dada por

$$p(t) = \frac{b_0 B_0^2(t) + \frac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}} b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \frac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}} B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

A continuación veamos cómo obtener la parametrización rho del arco circular unitario, a partir de las parametrizaciones obtenidas en los ejemplos anteriores.

**Ejemplo 6.3.60** Podemos obtener la parametrización rho del arco circular usando el valor de los pesos obtenidos en el ejemplo 6.3.56.

Los valores de los pesos obtenidos en esta parametrización son

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = 2$$

por lo que el peso  $w_{1\rho}$  asociado a la parametrización rho está dado por

$$w_{1\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde, la parametrización rho para círculo unitario, está dada por

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \sqrt{2}b_1t(1-t) + b_2t^2}{(1-t)^2 + \sqrt{2}t(1-t) + t^2}$$

### 6.3.5 Parametrización-g

Hasta el momento, hemos visto que dados el polígono de control, un punto hombro y el valor del parámetro  $t_*$ , es posible determinar una parametrización de la cónica. A continuación veremos cómo obtener la parametrización, si en lugar de especificar directamente el punto hombro  $p_*$ , lo hacemos a través de las razones en la que la recta tangente a la cónica en este punto divide a los segmentos  $\overline{b_0b_1}$  y  $\overline{b_1b_2}$ , sean éstas  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente (vea la figura 6-19).

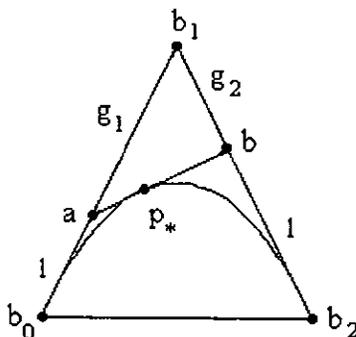


Figura 6-19:

Para obtener esta parametrización, denotemos por  $l_*$  a la tangente en el punto hombro, por  $a$  a su punto de intersección con la línea  $\overline{b_0b_1}$  y por  $b$  a su punto de intersección con la línea  $\overline{b_1b_2}$ .

Si  $l_1, l_2$  son las tangentes a la cónica en  $b_0$  y  $b_2$  respectivamente y  $l_3$  la línea que une a los puntos extremos del polígono de control, la ecuación de la familia de cónicas con puntos de control  $b_0, b_1$  y  $b_2$  la podemos escribir en la forma

$$(1 - \lambda)l_1l_2 + \lambda l_3^2 = 0. \quad (6.3.44)$$

Eligiendo el sistema coordenado  $(b_1; u = b_0 - b_1, v = b_2 - b_1)$  y considerando al punto  $b_0 = (1, 0)^t$  y a  $b_2 = (0, 1)^t$ , cualquier punto del plano determinado por los puntos de control se puede expresar como

$$p = b_1 + \alpha u + \beta v$$

y por tanto, las ecuaciones de  $l_1, l_2$  y  $l_3$  en este sistema están dadas por:  $\beta = 0, -\alpha = 0$  y  $\alpha + \beta - 1 = 0$  respectivamente, y en consecuencia, la ecuación de la familia de cónicas, viene dada por

$$C(\alpha, \beta) = (1 - \lambda)\alpha\beta - \lambda(\alpha + \beta - 1)^2 = 0, \quad (6.3.45)$$

mientras que la ecuación de la tangente a la cónica en el punto  $p_* = (\alpha_*, \beta_*)^t$  es

$$C_\alpha(\alpha_*, \beta_*)(\alpha - \alpha_*) + C_\beta(\alpha_*, \beta_*)(\beta - \beta_*) = 0 \quad (6.3.46)$$

o bien, desarrollando  $C_\alpha$  y  $C_\beta$ , la ecuación de la tangente en el punto hombro es

$$((1 - \lambda)\beta_* - 2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1))(\alpha - \alpha_*) + ((1 - \lambda)\alpha_* - 2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1))(\beta - \beta_*) = 0; \quad (6.3.47)$$

su punto de intersección con el segmento  $\overline{b_0b_1}$  ( $a$ ), tiene por segunda coordenada cero, por tanto, haciendo  $\beta = 0$ , obtenemos la expresión para la coordenada  $\alpha$  correspondiente al punto  $a$ .

$$\alpha = \frac{\beta_* C_\beta(\alpha_*, \beta_*) + \alpha_* C_\alpha(\alpha_*, \beta_*)}{C_\alpha(\alpha_*, \beta_*)};$$

simplificando obtenemos

$$\alpha = -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\beta_* - 2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}, \quad (6.3.48)$$

por otro lado, la expresión del punto  $a$  en términos de los puntos de control  $b_0$  y  $b_1$  esta dada por

$$a = b_1(1 - \alpha) + \alpha b_0$$

de ésta se sigue que la razón en la que  $a$  divide al segmento  $\overline{b_1 b_0}$  es  $\frac{\alpha}{1 - \alpha}$ , es decir

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \\ &= -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\beta_*}. \end{aligned} \quad (6.3.49)$$

Análogamente, para  $\alpha = 0$ , obtenemos la coordenada  $\beta$  del punto de intersección de la tangente en  $p_*$  y el segmento  $\overline{b_1 b_2}$

$$\beta = -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\alpha_* - 2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)},$$

y usando que  $b$  divide al segmento  $\overline{b_1 b_2}$  en la razón  $\frac{\beta}{1 - \beta}$ , obtenemos la siguiente expresión para  $g_2$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{\beta}{1 - \beta} \\ &= -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\alpha_*}. \end{aligned} \quad (6.3.50)$$

De manera que

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\beta_*} \\ g_2 &= -\frac{2\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)}{(1 - \lambda)\alpha_*}, \end{aligned}$$

y su producto está dado por

$$g_1 g_2 = \frac{4\lambda^2(\alpha_* + \beta_* - 1)^2}{(1 - \lambda)^2 \alpha_* \beta_*}.$$

Como  $p_*$  es un punto de la cónica, se tiene

$$\frac{\lambda(\alpha_* + \beta_* - 1)^2}{(1 - \lambda)\alpha_* \beta_*} = 1$$

entonces, el producto  $g_1 g_2$  se reduce a

$$g_1 g_2 = \frac{4\lambda}{1-\lambda} \quad (6.3.51)$$

esta expresión nos indica que en una cónica, el producto  $g_1 g_2$  siempre es constante.

Al resolver el sistema dado por las ecuaciones (6.3.49) y (6.3.50), obtenemos las coordenadas del punto hombro

$$\alpha_* = \frac{g_1}{2 + g_1 + g_2} \quad (6.3.52)$$

$$\beta_* = \frac{g_2}{2 + g_1 + g_2} \quad (6.3.53)$$

$p_*$  queda expresado en términos de los puntos de control en la forma

$$\begin{aligned} p_* &= b_1 + \frac{g_1}{2 + g_1 + g_2} (b_0 - b_1) + \frac{g_2}{2 + g_1 + g_2} (b_2 - b_1) \\ &= \frac{b_0 g_1 + 2b_1 + b_2 g_2}{2 + g_1 + g_2}. \end{aligned} \quad (6.3.54)$$

Por otro lado, si  $t_*$  es el valor del parámetro que determina a  $p_*$  en la representación racional de Bézier, entonces

$$p_* = \frac{w_0 b_0 (1 - t_*)^2 + 2w_1 b_1 t_* (1 - t_*) + w_2 b_2 t_*^2}{w_0 (1 - t_*)^2 + 2w_1 t_* (1 - t_*) + w_2 t_*^2}.$$

después de dividir tanto el numerador como el denominador por  $w_1 t_* (1 - t_*)$ , obtenemos

$$p_* = \frac{\frac{w_0(1-t_*)}{w_1 t_*} b_0 + 2b_1 + \frac{w_2 t_*}{w_1(1-t_*)} b_2}{\frac{w_0(1-t_*)}{w_1 t_*} + 2 + \frac{w_2 t_*}{w_1(1-t_*)}},$$

y comparando esta expresión con (6.3.54), deducimos

$$g_1 = \frac{w_0(1-t_*)}{w_1 t_*}$$

$$g_2 = \frac{w_2 t_*}{w_1(1-t_*)}.$$

Escribiendo a  $g_1$  y  $g_2$  en términos de los polinomios de Bézier

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{2w_0 B_0^2(t_*)}{w_1 B_1^2(t_*)} \\ g_2 &= \frac{2w_2 B_2^2(t_*)}{w_1 B_1^2(t_*)} \end{aligned} \quad (6.3.55)$$

de estas expresiones se sigue

$$w_0 : w_1 : w_2 = g_1 \frac{B_1^2(t_*)}{B_0^2(t_*)} : 2 : g_2 \frac{B_1^2(t_*)}{B_2^2(t_*)}.$$

Por tanto, la parametrización está dada en la forma

$$p(t) = \frac{g_1 \frac{B_1^2(t_*)}{B_0^2(t_*)} b_0 B_0^2(t) + 2b_1 B_1^2(t) + g_2 \frac{B_1^2(t_*)}{B_2^2(t_*)} b_2 B_2^2(t)}{g_1 \frac{B_1^2(t_*)}{B_0^2(t_*)} B_0^2(t) + 2B_1^2(t) + g_2 \frac{B_1^2(t_*)}{B_2^2(t_*)} B_2^2(t)},$$

donde el valor del invariante es

$$k = g_1 g_2 = \frac{4\lambda}{1-\lambda}.$$

Podemos ahora clasificar la cónica de acuerdo al valor de su parámetro en la ecuación de la familia de cónicas.

$\lambda = 1/5$	representa una parábola
$\lambda \in (-\infty, 1/5)$ o $\lambda \in (1, \infty)$	representa una hipérbola
$\lambda \in (1/5, 1)$	representa una elipse

Otra forma de obtener esta misma parametrización, es aplicar el algoritmo de subdivisión. Recordemos que si  $t_*$  es el parámetro correspondiente al punto hombro, entonces al aplicar el algoritmo de subdivisión, podemos obtener los puntos de control para generar los subarcos  $b_0 p_*$  y  $p_* b_2$ , en particular, obtenemos las expresiones para los puntos  $a$  y  $b$  en la forma

$$a = \frac{q_0^1(t_*)}{w_0^1(t_*)} = \frac{(1-t_*)w_0 b_0 + t_* w_1 b_1}{(1-t_*)w_0 + t_* w_1} \quad (6.3.56)$$

y

$$b = \frac{q_1^1(t_*)}{w_1(t_*)} = \frac{(1-t_*)w_1b_0 + t_*w_2b_1}{(1-t_*)w_1 + t_*w_2}. \quad (6.3.57)$$

Por otro lado, sabemos que  $g_1$  es la razón en que el punto  $a$  divide al segmento  $\overline{b_1b_0}$  y que  $g_2$  es la razón en que  $b$  divide al segmento  $\overline{b_1b_2}$  (vea la figura 6-20), por tanto,  $g_1$  y  $g_2$  satisfacen las siguientes relaciones

$$a - b_1 = g_1(b_0 - a) \quad (6.3.58)$$

$$b - b_1 = g_2(b_2 - b) \quad (6.3.59)$$

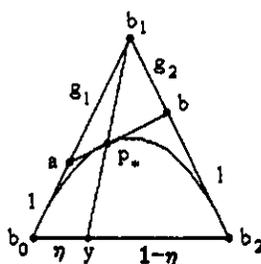


Figura 6-20:

Al substituir la expresión para  $a$  en la ecuación (6.3.58), obtenemos

$$\frac{(1-t_*)w_0(b_0 - b_1)}{(1-t_*)w_0 + t_*w_1} = g_1 \left( \frac{t_*w_1(b_0 - b_1)}{(1-t_*)w_0 + t_*w_1} \right),$$

y resolviendo para  $g_1$

$$g_1 = \frac{(1-t_*)w_0}{t_*w_1} \quad (6.3.60)$$

de la misma forma, al substituir  $b$  en la ecuación (6.3.59)

$$\frac{t_*w_2(b_2 - b_1)}{(1-t_*)w_1 + t_*w_2} = g_2 \left( \frac{(1-t_*)w_1(b_2 - b_1)}{(1-t_*)w_1 + t_*w_2} \right)$$

despejando a  $g_2$

$$g_2 = \frac{t_*w_2}{(1-t_*)w_1} \quad (6.3.61)$$

se sigue entonces, que el producto de estas razones, determinan el valor del invariante.

$$g_1 g_2 = k.$$

Al reescribir  $g_1$  y  $g_2$  en términos de los polinomios de Bézier (6.3.55) y comparar con la relación dada en (6.3.35), obtenemos

$$\frac{g_1}{2} = \frac{a_0}{a_1},$$

$$\frac{g_2}{2} = \frac{a_2}{a_1},$$

o bien

$$\frac{a_0}{g_1} = \frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{g_2}. \quad (6.3.62)$$

Observemos que si  $y$  es la proyección del punto hombro desde  $b_1$  en la línea  $\overline{b_0 b_2}$ , entonces a partir de las relaciones (6.3.31) y (6.3.55), obtenemos

$$\frac{g_1}{w_0 B_0^2(t_*)} = \frac{2}{w_1 B_1^2(t_*)}$$

$$\frac{g_2}{w_2 B_2^2(t_*)} = \frac{2}{w_1 B_1^2(t_*)}$$

se sigue que la razón en la que el punto  $y$  divide al segmento  $\overline{b_0 b_2}$  es igual al cociente de  $g_2$  y  $g_1$  (vea la figura 6-20).

$$\frac{\eta}{1 - \eta} = \frac{g_2}{g_1}.$$

### Reparametrización

Observemos que para cualquier conjunto  $u_0, u_1, u_2$  que satisfaga la relación  $k = \frac{u_0 u_2}{u_1^2}$ , es posible reparametrizar la ecuación de la cónica donde  $u_0, u_1$  y  $u_2$  sean los pesos; es decir

$$\frac{\sum w_i b_i B_i^2(t)}{\sum w_i B_i^2(t)} = \frac{\sum u_i b_i B_i^2(s)}{\sum u_i B_i^2(s)}$$

por tanto,  $g_1$  y  $g_2$  también satisfacen las relaciones

$$g_1 = \frac{u_0(1-s)}{u_1s}$$

$$g_2 = \frac{u_2s}{u_1(1-s)},$$

o bien

$$\frac{w_0(1-t)}{w_1t} = \frac{u_0(1-s)}{u_1s}$$

$$\frac{w_2t}{w_1(1-t)} = \frac{u_2s}{u_1(1-s)}$$

dando lugar a las ecuaciones bilineales

$$st(u_0w_1 - u_1w_0) + su_1w_0 - tu_0w_1 = 0$$

$$st(u_2w_1 - u_1w_2) - su_2w_1 + tu_1w_2 = 0.$$

*En general, los parámetros  $s$  y  $t$  correspondientes a dos representaciones de la misma cónica están ligados bajo la siguiente relación*

$$Ast + Bt + Cs = 0. \tag{6.3.63}$$

En las parametrizaciones que hemos analizado, consideramos que el parámetro  $t$  varía en el intervalo unitario. Una parametrización más general, resulta al permitir que el parámetro  $s$  varíe en un intervalo arbitrario  $[a, b]$ . En este caso, los valores de  $g_1$  y  $g_2$  están dados por

$$g_1 = \frac{w_0c(b-s)}{w_1(s-a)}$$

$$g_2 = \frac{w_2(s-a)}{w_1c(b-s)}.$$

La forma de la curva no se altera puesto que  $g_1g_2 = k$ , donde  $c$  es positiva y determina la distribución de los valores del parámetro a lo largo de la curva.

*Hemos visto que un cambio en el valor de los pesos, de tal forma que el invariante se conserve, produce un cambio en la parametrización y, que la transformación que satisfacen ambos parámetros es*

una forma bilineal.

Ahora veamos que el recíproco también es cierto, es decir, si  $t$  y  $s$  son dos parámetros variando en el intervalo unitario y satisfacen una relación bilineal entonces definen dos parametrizaciones de la misma cónica.

La transformación entre  $s$  y  $t$  satisface la ecuación (6.3.63), la cual podemos expresar en la forma

$$t = -\frac{Cs}{As + B} \quad (6.3.64)$$

Ahora, tomando en cuenta que el valor correspondiente para  $t = 1$  es  $s = 1$ , obtenemos  $A + B = -C$  y substituyendo  $C$  en (6.3.64), obtenemos

$$t = \frac{(A + B)s}{As + B}.$$

Reescribiendo el denominador en la forma  $\alpha s + \beta(1 - s)$  tenemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{(A + B)s}{(A + B)s + B(1 - s)} \\ &= \frac{s}{\rho(1 - s) + s} \end{aligned}$$

y

$$1 - t = \frac{\rho(1 - s)}{\rho(1 - s) + s},$$

donde

$$\rho = \frac{B}{A + B}.$$

Entonces los polinomios de Bézier en  $t$ , los podemos reescribir en términos de los polinomios de Bézier en  $s$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= \frac{\rho^2}{(\rho(1 - s) + s)^2} B_0^2(s) \\ B_1^2(t) &= \frac{\rho}{(\rho(1 - s) + s)^2} B_1^2(s) \end{aligned}$$

$$B_2^2(t) = \frac{1}{(\rho(1-s) + s)^2} B_2^2(s).$$

Por tanto, la ecuación de la cónica en términos de  $s$  está dada en la forma

$$p(s) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i \rho^{2-i} b_i B_i^2(s)}{\sum_{i=0}^2 w_i \rho^{2-i} B_i^2(s)} \quad (6.3.65)$$

la que nos lleva a concluir que un cambio en el parámetro, da lugar a un cambio en el valor de los pesos y éste viene dado por

$$u_i = \rho^{2-i} w_i. \quad (6.3.66)$$

Este resultado, nos lleva a la siguiente interpretación:

*Dada una representación racional de Bézier para una cónica, donde  $w_i$  representan los pesos asociados a los puntos de control, podemos obtener una segunda representación para la misma cónica alterando el valor de los pesos bajo la relación:  $u_i = \rho^{2-i} w_i$ .*

### 6.3.6 Parametrización estándar

En la práctica, cuando nos damos a la tarea de obtener la representación racional de Bézier de una cónica, nos vemos en la necesidad de determinar tres parámetros, a saber, el valor de los pesos. Pero, si en lugar de ello, pudiéramos describir a la cónica en base a un único parámetro, eso nos simplificaría el trabajo. Por otro lado, acabamos de ver que un cambio en los pesos dado por  $u_i = \rho^{2-i} w_i$  no altera la forma de la cónica. Si elegimos  $\rho = \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} w'_0 &= w_2 \\ w'_1 &= \sqrt{\frac{w_2}{w_0}} w_1 \\ w'_2 &= w_2, \end{aligned}$$

alterando cada peso por un factor de  $1/w_2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= 1 \\ \bar{w}_1 &= \frac{w_1}{\sqrt{w_0 w_2}} \\ \bar{w}_2 &= 1. \end{aligned}$$

De modo que la representación de la cónica está dada por

$$p(s) = \frac{b_0 B_0^2(s) + \bar{w}_1 b_1 B_1^2(t) + b_2 B_2^2(s)}{B_0^2(s) + \bar{w}_1 B_1^2(t) + B_2^2(s)}. \quad (6.3.67)$$

A esta representación se le conoce como *representación racional de Bézier estándar*.

Comparando ahora esta representación, con la ecuación (6.3.40), vemos que toda representación en forma estándar la podemos ver como la parametrización rho, por lo tanto, concluimos el siguiente resultado

Si  $p(t)$  es una cónica escrita en la forma racional de Bézier estándar y  $\tilde{p} = p(\frac{1}{2})$ , entonces, el punto medio del segmento  $\overline{b_0 b_2}$  ( $p_m$ ),  $\tilde{p}$  y el punto de control  $b_1$ , son colineales y la razón en que  $\tilde{p}$  divide al segmento  $\overline{p_m b_1}$  es  $\bar{w}_1$ .

Una ventaja que tiene el escribir la cónica en su representación racional de Bézier estándar es que su clasificación depende únicamente del peso  $\bar{w}_1$ , ésta se obtiene a partir de la relación  $\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{w}_1 &= 1 \text{ la curva es una parábola} \\ \text{Si } \bar{w}_1 &< 1 \text{ es una elipse} \\ \text{Si } \bar{w}_1 &> 1 \text{ es una hipérbola} \end{aligned} \quad (6.3.68)$$

### 6.3.7 Centro

Ya que hemos visto la representación paramétrica racional para arcos cónicos, veamos cómo expresar el centro de la cónica en términos de los puntos de control y del invariante.

Veamos primero un resultado que nos será de utilidad.

**Lema 6.3.61** Si  $p_*$  es el punto de intersección de la cónica  $C$  y el segmento que une el punto  $b_1$  con el punto medio del segmento  $\overline{b_0 b_2}$ , entonces la tangente a la cónica en  $p_*$  es paralela a la cuerda  $\overline{b_0 b_2}$ .

#### Demostración

Sabemos que en la representación rho el punto  $p_*$  corresponde a  $t_* = \frac{1}{2}$  entonces, aplicando el algoritmo de subdivisión con este valor, podemos obtener los puntos de intersección de la tangente en  $p_*$  con los segmentos  $\overline{b_0 b_1}$  y  $\overline{b_1 b_2}$ . Estos puntos están dados por  $\frac{q_0^1(t_*)}{w_0^1(t_*)}$  y  $\frac{q_1^1(t_*)}{w_1^1(t_*)}$ , que en términos de la parametrización rho son:

$$2 \frac{q_0^1(t_*)}{w_0^1(t_*)} = (1 - \rho)b_0 + \rho b_1$$

$$2 \frac{q_1^1(t_*)}{w_1^1(t_*)} = (1 - \rho)b_2 + \rho b_1,$$

entonces un vector paralelo a la tangente en  $p_*$  está dado por

$$\frac{q_1^1(t_*)}{w_1^1(t_*)} - \frac{q_0^1(t_*)}{w_0^1(t_*)} = (1 - \rho)(b_2 - b_0)$$

mostrando de esta forma que la tangente en  $p_*$  es paralela a la cuerda  $\overline{b_2 b_0}$ .

Regresando a la ecuación del centro, denotemos por  $p_*^1$  y  $p_*^2$  a los puntos de intersección de la cónica y la línea que pasa por  $p_m$  y  $b_1$ , entonces por el lema anterior tenemos que las tangentes  $T_1$  y  $T_2$  a la cónica en estos puntos son paralelas a la cuerda  $\overline{b_2 b_0}$  (vea la figura 6-21). Por otro lado, dado que el centro de la cónica está en el bisector de cuerdas paralelas y como  $T_1$  y  $T_2$  son el límite de éstas, deducimos que el centro es un punto de la cuerda que une a  $p_*^1$  con  $p_*^2$  además, sabemos que la cónica es simétrica con respecto a su centro, por lo tanto, éste coincide con el punto medio del segmento con puntos finales  $p_*^1$  y  $p_*^2$ .

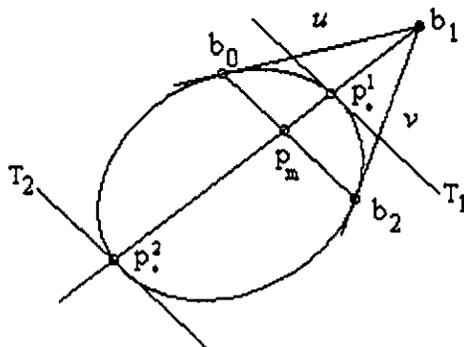


Figura 6-21:

De la ecuación (6.3.37) tenemos

$$p_*^1 = p_m + \rho_1(b_1 - p_m)$$

$$p_*^2 = p_m + \rho_2(b_1 - p_m)$$

calculando el punto medio del segmento  $\overline{P_1^* P_2^*}$  obtenemos la ecuación del centro

$$c = p_m + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}(b_1 - p_m)$$

substituyendo  $p_m$  y reescribiendo en términos de los vectores  $u = b_0 - b_1$  y  $v = b_2 - b_1$  tenemos

$$c = b_1 + \frac{u + v}{2} \left( 1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right)$$

finalmente reescribiendo  $1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  en términos de  $k$  obtenemos la expresión para el centro de la cónica

$$c = b_1 + \frac{k}{2(k-1)}(u + v). \quad (6.3.69)$$

## 6.4 Método recurrente para generar arcos cónicos

En el presente capítulo hemos visto que una manera natural para describir un arco cónico con tangentes determinadas en los extremos, es a través de la representación racional cuadrática de Bézier; ahora veamos cómo obtener un algoritmo eficiente para obtener su gráfica. En el capítulo anterior, mostramos el método en diferencias que nos permite generar eficientemente  $n$  puntos de una cónica; para graficar un arco cónico, usando este mismo método primero obtengamos una parametrización local de las cónicas, con respecto a las parametrizaciones que nos permiten generar poligonales de área máxima (vea la sección 5.4.2).

### 6.4.1 Parametrización de Arcos Cónicos

El caso del círculo con centro en el origen

**Teorema 6.4.62** Sean  $V_0$  y  $V_1$  los puntos finales del un arco circular centrado en el origen, entonces la parametrización

$$V(u) = \frac{\text{sen}((1-u)\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} V_0 + \frac{\text{sen}(u\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} V_1 ; 0 \leq u \leq 1 \quad (6.4.70)$$

representa el arco circular  $V_0 V_1$ , con respecto a la parametrización trigonométrica

$$p(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))^t$$

donde  $\alpha$  es el ángulo subtendido por el arco ( figura 6-22).

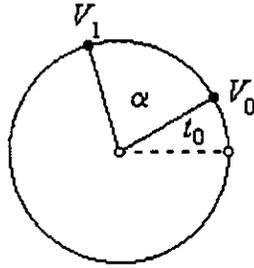


Figura 6-22:

### Demostración

Dada la parametrización trigonométrica  $p(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))^t$ , existen  $t_0$  y  $\alpha$  tales que los puntos  $V_0$  y  $V_1$  los podemos expresar en la forma

$$\begin{aligned} V_0 &= (\cos(t_0), \text{sen}(t_0))^t \\ V_1 &= (\cos(t_0 + \alpha), \text{sen}(t_0 + \alpha))^t \end{aligned}$$

substituyendo  $V_0$  y  $V_1$  en (6.4.70)

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{\text{sen}((1-u)\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} (\cos(t_0), \text{sen}(t_0))^t + \\ &\quad \frac{\text{sen}(u\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} (\cos(t_0 + \alpha), \text{sen}(t_0 + \alpha))^t \\ &= \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} \text{sen}((1-u)\alpha) \cos(t_0) + \text{sen}(u\alpha) \cos(t_0 + \alpha), \\ &\quad \text{sen}((1-u)\alpha) \text{sen}(t_0) + \text{sen}(u\alpha) \text{sen}(t_0 + \alpha))^t \end{aligned}$$

después de simplificar

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} (\text{sen}(\alpha) \cos(t_0 + \alpha u), \text{sen}(\alpha) \text{sen}(t_0 + \alpha u))^t \\ &= (\cos(t_0 + \alpha u), \text{sen}(t_0 + \alpha u))^t \\ &= p(t_0 + \alpha u) \end{aligned}$$

por tanto,  $V(u)$  es una parametrización para el arco  $V_0V_1$ . ■

### Representación para arcos elípticos

**Teorema 6.4.63** *Todo arco elíptico  $V_0V_1$  centrado en el origen; donde  $V_0 = p(t_0)$ ,  $V_1 = p(t_0 + \alpha)$ , con  $\alpha > 0$  y la parametrización  $p(t)$  está dada por  $p(t) = R(\cos(t), \sin(t))^t$ , puede expresarse en la forma*

$$V(u) = \frac{\sin((1-u)\alpha)}{\sin(\alpha)} V_0 + \frac{\sin(u\alpha)}{\sin(\alpha)} V_1 ; 0 \leq u \leq 1 \quad (6.4.71)$$

Como el arco elíptico con centro en el origen lo podemos enviar al círculo unitario mediante una transformación lineal y, dado que la ecuación (6.4.70) es invariante bajo este tipo de transformaciones, la parametrización dada por la ecuación (6.4.71), nos permite generar arcos elípticos (usando el valor adecuado de  $\alpha$ ).

### Parametrización para arcos hiperbólicos

**Teorema 6.4.64** *Un arco hiperbólico con centro en el origen; donde los puntos extremos están dados por  $V_0 = p(t_0)$  y  $V_1 = p(t_0 + \alpha)$ , con  $\alpha > 0$  y  $p(t) = R(\cosh(t), \sinh(t))^t$ ; puede expresarse como*

$$V(u) = \frac{\sinh((1-u)\alpha)}{\sinh(\alpha)} V_0 + \frac{\sinh(u\alpha)}{\sinh(\alpha)} V_1 ; 0 \leq u \leq 1 \quad (6.4.72)$$

### Demostración

Como la rama de la hipérbola es equivalente a la forma canónica  $p(t) = (\cosh(t), \sinh(t))^t$ , bajo una transformación lineal, basta probar el teorema asumiendo que la representación del arco está en la forma canónica.

Substituyendo  $V_0$  y  $V_1$  en (6.4.72)

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{1}{\sinh(\alpha)} (\sinh((1-u)\alpha) \cosh(t_0) + \sinh(u\alpha) \cosh(t_0 + \alpha), \\ &\quad \sinh((1-u)\alpha) \sinh(t_0) + \sinh(u\alpha) \sinh(t_0 + \alpha))^t \\ &= \frac{1}{\sinh(\alpha)} (\sinh(\alpha) (\cosh(u\alpha) \cosh(t_0) + \sinh(u\alpha) \sinh(t_0)), \\ &\quad \sinh(\alpha) (\sinh(t_0) \cosh(u\alpha) + \sinh(u\alpha) \cosh(t_0)))^t \\ &= (\cosh(t_0 + u\alpha), \sinh(t_0 + u\alpha))^t \\ &= p(t_0 + u\alpha) \end{aligned}$$

concluimos que  $V(u)$  es una parametrización del arco hiperbólico  $V_0V_1$ . ■

## Parametrización para arcos parabólicos

Si el arco es parabólico, al llevar la representación racional de Bézier a su forma estándar (vea la sección 6.3.6), ésta se reduce a la representación polinomial y, por lo tanto, para generar los puntos del arco, únicamente tenemos que hacer una elección adecuada del parámetro.

Las representaciones de arcos cónicos, antes vistas, nos permiten aplicar el método en diferencias, pero, en la práctica, el arco cónico está descrito en su expresión racional de Bézier, por ello, nos hace falta hacer una traducción entre esta representación y las parametrizaciones mencionadas.

### 6.4.2 Transformación de la Representación de Bézier

Como vimos en la sección anterior, si el segmento cónico es parabólico, no tenemos mayor problema, pues la representación estándar de la cónica se reduce a la polinomial, de este modo, nos centraremos en el caso de la elipse y la hipérbola.

Recordemos que las parametrizaciones para arcos que vimos en la sección anterior, sólo se aplican a las cónicas con centro en el origen entonces, si denotamos por  $c$  al centro de la cónica, los vectores de posición de los puntos finales del arco con centro en el origen están dados por

$$V_0 = b_0 - c$$

$$V_1 = b_2 - c$$

de manera que, para poder usar la representación local de la cónica, únicamente falta obtener el valor del "ángulo subtendido" por el segmento cónico  $V_0V_1$ . A continuación veremos un resultado que nos indica como obtener este valor en términos del invariante de la cónica.

**Teorema 6.4.65** Sean  $b_0$  y  $b_2$  los puntos finales de un arco cónico dado en su forma racional de Bézier

$$p(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}.$$

- Si  $b_0b_2$  es un arco elíptico ( $k > 1$ ) lo podemos expresar en la forma:

$$Q(u) = (b_0 - c) \frac{\text{sen}((1-u)\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + (b_2 - c) \frac{\text{sen}(u\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + c \quad (6.4.73)$$

donde

$$\alpha = \arccos(2k - 1)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{k-1}}{k}$$

- Si el arco es hiperbólico ( $k < 1$ ), éste puede expresarse

$$Q(u) = (b_0 - c) \frac{\operatorname{senh}((1-u)\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} + (b_2 - c) \frac{\operatorname{senh}(u\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} + c \quad (6.4.74)$$

donde

$$\alpha = \operatorname{arccosh}\left(\frac{2}{k} - 1\right)$$

$$\operatorname{senh}(\alpha) = \frac{2\sqrt{1-k}}{k}$$

$$\text{con } c = b_1 + \frac{k}{2(k-1)}(b_0 + b_2 - 2b_1) \text{ y } k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2}.$$

### Demostración

- caso elíptico

Dados los puntos extremos del arco y el centro de la cónica. Los vectores de posición  $V_0$  y  $V_1$  para el arco elíptico con centro en el origen, están dados por  $V_0 = b_0 - c$  y  $V_1 = b_2 - c$  respectivamente, substituyéndolos en la ecuación 6.4.71, obtenemos

$$V(u) = (b_0 - c) \frac{\operatorname{sen}((1-u)\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} + (b_2 - c) \frac{\operatorname{sen}(u\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

esta ecuación generará el arco centrado en el origen; para obtener los puntos sobre el arco original, sólo debemos trasladar nuevamente, es decir, la parametrización que genera el arco elíptico  $b_0 b_2$ , para valores de  $u$  en el intervalo unitario, está dada por

$$Q(u) = V(u) + c$$

que es precisamente la ecuación (6.4.73).

Enfoquemonos ahora en determinar el valor de  $\alpha$ , para ello, notemos que a partir de la ecuación del centro de la cónica (sección 6.3.7), podemos encontrar la siguiente expresión

$$c - b_1 = \frac{k}{2(k-1)}(b_0 + b_2 - 2b_1) \quad (6.4.75)$$

a fin de obtener una relación entre el valor del invariante y el ángulo  $\alpha$ , usemos la representación del arco dada por  $Q(u)$  para obtener una expresión del punto de control  $b_1$ .

Recordemos que  $b_1$  es el punto de intersección de las tangentes a la cónica en los puntos extremos del arco; dichas tangentes las podemos parametrizar en la forma

$$T_0(t) = b_0 + tQ'(0) \quad t \geq 0 \quad (6.4.76)$$

$$T_1(v) = b_2 - vQ'(1) \quad v \geq 0 \quad (6.4.77)$$

igualando, obtenemos

$$b_2 - b_0 = tQ'(0) + vQ'(1)$$

aplicando el producto cruz con  $Q'(1)$  y resolver para el valor de  $t$

$$t = \frac{|((b_2 - c) - (b_0 - c)) \times Q'(1)|}{|Q'(0) \times Q'(1)|} \quad (6.4.78)$$

para simplificar la expresión, primero calculemos  $Q'(u)$ .

$$Q'(u) = -\alpha V_0 \frac{\cos((1-u)\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + \alpha V_1 \frac{\cos(u\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$$

donde

$$V_0 = b_0 - c$$

$$V_1 = b_2 - c$$

Evaluando en  $u = 0$  y  $u = 1$ , obtenemos

$$Q'(0) = -V_0 \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + V_1 \frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)}$$

$$Q'(1) = -V_0 \frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} + V_1 \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$$

un a vez que tenemos los vectores de dirección de las tangentes, simplifiquemos la expresión.

Haciéndolo para el denominador

$$\begin{aligned} Q'(0) \times Q'(1) &= -\frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} \left( -V_0 \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + V_1 \frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} \right) \times V_0 + \\ &\quad \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \left( -V_0 \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} + V_1 \frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} \right) \times V_1 \\ &= \alpha^2 V_0 \times V_1 \end{aligned} \quad (6.4.79)$$

y para el numerador

$$\begin{aligned} (V_1 - V_0) \times Q'(1) &= -\frac{\alpha}{\text{sen}(\alpha)} V_1 \times V_0 - \frac{\alpha \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} V_0 \times V_1 \\ &= \frac{\alpha(1 - \cos(\alpha))}{\text{sen}(\alpha)} V_0 \times V_1 \end{aligned}$$

substituyendo ambas expresiones en (6.4.78), obtenemos

$$t = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha \text{sen}(\alpha)} \quad (6.4.80)$$

después de substituir  $t$  en la ecuación (6.4.76)

$$b_1 = b_0 + \frac{1 - \cos(\alpha)}{\alpha \text{sen}(\alpha)} Q'(0)$$

finalmente, substituyendo  $Q'(0)$ , obtenemos un expresión para  $b_1$  en términos de  $c$ ,  $\alpha$ ,  $b_0$  y  $b_2$

$$b_1 = c + \frac{1}{\cos(\alpha)} (b_0 + b_2 - 2c)$$

de ésta misma, obtenemos

$$c = -\frac{1 + \cos(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)} b_1 + \frac{1}{1 - \cos(\alpha)} (b_0 - b_2)$$

restando  $b_1$ , obtenemos una segunda expresión para  $c - b_1$

$$c - b_1 = \frac{1}{1 - \cos(\alpha)} ((b_0 - b_1) + (b_2 - b_1)).$$

Por último, considerando que los vectores  $(b_0 - b_1)$  y  $(b_2 - b_1)$  son linealmente independientes y comparando ésta última con la ecuación (6.4.75), obtenemos la siguiente relación entre  $k$  y  $\alpha$

$$\frac{1}{1 - \cos(\alpha)} = \frac{k}{2(k - 1)}$$

resolviendo para  $\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{k} - 1$$

y por tanto

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{k} - 1\right) \text{ y } \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{k-1}}{k}.$$

- caso hiperbólico

Para generar el arco con centro en el origen, hacemos  $V_0 = b_0 - c$  y  $V_1 = b_2 - c$  y aplicando una translación a  $c$ , se obtiene la ecuación paramétrica del arco hiperbólico  $b_0 b_2$ .

El valor de  $\alpha$  lo podemos calcular, siguiendo el procedimiento realizado para determinar el valor de  $\alpha$  correspondiente al caso elíptico.

Para obtener  $b_1$ , calculemos  $Q'(u)$

$$Q'(u) = -\alpha V_0 \frac{\cosh((1-u)\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} + \alpha V_1 \frac{\cosh(u\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)}$$

evaluando en  $u = 0$  y  $u = 1$

$$\begin{aligned} Q'(0) &= -\alpha \frac{\cosh((1-0)\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_0 + \frac{\alpha}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_1 \\ Q'(1) &= -\alpha \frac{\alpha}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_0 + \frac{\alpha \cosh(\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_1 \end{aligned}$$

simplificando el numerador de la expresión para el parámetro correspondiente a  $b_1$  (ecuación (6.4.78)).

$$\begin{aligned} Q'(0) \times Q'(1) &= -\frac{\alpha}{\operatorname{senh}(\alpha)} \left( -\frac{\alpha \cosh(\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_0 + \frac{\alpha}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_1 \right) \times V_0 + \\ &\quad \frac{\alpha \cosh(\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} \left( -\frac{\alpha \cosh(\alpha)}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_0 + \frac{\alpha}{\operatorname{senh}(\alpha)} V_1 \right) \times V_1 \\ &= -\alpha^2 V_0 \times V_1 \end{aligned}$$

Simplificando ahora el numerador

$$\begin{aligned}(V_1 - V_0) \times Q'(1) &= \frac{\alpha}{\sinh(\alpha)} V_0 \times V_1 - \frac{\alpha \cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} V_0 \times V_1 \\ &= \frac{\alpha(1 - \cosh(\alpha))}{\sinh(\alpha)} V_0 \times V_1\end{aligned}$$

substituyendo estas expresiones en (6.4.78), obtenemos el valor del parámetro para  $b_1$

$$t = \frac{\cosh(\alpha) - 1}{\alpha \sinh(\alpha)}$$

así, el punto de control  $b_1$  está dado por

$$b_1 = b_0 + \frac{\cosh(\alpha) - 1}{\alpha \sinh(\alpha)} Q'(0)$$

substituyendo  $Q'(0)$  y simplificando,  $b_1$  se puede escribir en la forma

$$b_1 = c + \frac{1}{1 + \cosh(\alpha)} (b_0 + b_2 - 2c)$$

despejando a  $c$  y restando  $b_1$  obtenemos

$$c - b_1 = \frac{1}{1 - \cosh(\alpha)} ((b_0 - b_1) + (b_2 - b_1))$$

comparando esta última expresión con (6.4.75) obtenemos la siguiente relación entre  $\alpha$  y  $k$

$$\frac{1}{1 - \cosh(\alpha)} = \frac{k}{1(k - 1)}$$

de aquí,  $\cosh(\alpha) = \frac{2}{k} - 1$ , y por tanto

$$\alpha = \operatorname{arccosh} \left( \frac{2}{k} - 1 \right) \text{ y } \sinh(\alpha) = \frac{2\sqrt{1-k}}{k}. \blacksquare$$

Con el resultado antes visto, concluimos el análisis teórico, en él, contemplamos desde el estudio del teorema de Pascal hasta las propiedades de una representación paramétrica adecuada que nos permite generar eficientemente puntos de una cónica y aplicarlo para obtener puntos de un segmento cónico. Este

análisis nos permite presentar el siguiente algoritmo, fundamental en algunas aplicaciones, en particular, para el suavizamiento de regiones irregulares que discutiremos en el siguiente capítulo.

En el capítulo anterior (5.6) presentamos el método en diferencias, este es un método recurrente que sólo necesita de tres puntos iniciales y de un parámetro  $s$  (que depende del tipo de cónica) para generar  $n$  puntos, dichos puntos describen una poligonal de área máxima. Ahora veremos cómo adaptar el método en diferencias para generar eficientemente  $n$  puntos de un arco cónico.

### Algoritmo

A continuación mostraremos cómo usar la teoría antes vista para implementar un algoritmo que genere  $n$  puntos del arco cónico con puntos de control  $b_0, b_1, b_2$  y pesos  $w_0, w_1, w_2$ .

Recordemos que el método en diferencias requiere de tres puntos iniciales  $A, B$  y  $C$ , donde el punto  $A$  coincide con el punto de control  $b_0$ . Los otros dos puntos los podemos obtener haciendo una evaluación directa de la parametrización (6.4.73) o (6.4.74) o bien, de la representación polinomial de Bézier, según sea el caso.

Para obtener el valor del parámetro correspondiente a los puntos  $B$  y  $C$ , observemos que:

- Como el incremento en el parámetro es constante y está dado en términos del número de puntos a generar (considerando entre éstos los puntos extremos del arco), éste viene dado por

$$incu = \frac{1}{n-1}$$

y por tanto, los puntos iniciales que nos faltan, quedan determinados por

$$B = Q(incu)$$

$$C = Q(2incu)$$

Procedamos ahora a determinar el valor del parámetro para el método en diferencias, este valor está en función del “ángulo subtendido” por el arco,  $\alpha$ , y del número de puntos a generar,  $n$ . En el caso de la elipse (vea 5.6.1), donde los extremos del arco coinciden, el valor del “ángulo subtendido” es  $2\pi$  y si  $n$  es el número de puntos a generar entonces el parámetro del método en diferencias es  $s = \cos(2\pi/n - 1)$ ; aplicando esto a un arco donde los extremos no coinciden, primero debemos obtener el valor del “ángulo subtendido”, posteriormente dividir esta cantidad por  $n - 1$  y finalmente aplicar la

función correspondiente dependiendo de si la cónica es una elipse o una hipérbola. Recordemos que si la cónica es una parábola el valor de  $s$  es la unidad.

Si  $k$  es el valor del invariante, entonces el valor de  $s$  está dado por:

- Si el arco es parabólico ( $k = 1$ )

$$s = 1$$

- Para arcos elípticos ( $k > 1$ )

Obtenemos el valor del “ángulo subtendido” por el arco elíptico

$$\alpha = \arccos(2k - 1)$$

por tanto, el valor del parámetro  $s$  está dado por

$$s = \cos(\alpha * incu)$$

- En caso de que sea un arco hiperbólico

El “ángulo subtendido” por el arco viene dado por

$$\alpha = \operatorname{arccosh}\left(\frac{2}{k} - 1\right)$$

en consecuencia

$$s = \cosh(\alpha * incu)$$

A continuación mostramos el algoritmo que genera  $n$  puntos del arco cónico  $b_0b_2$

## Algoritmo

Datos de Entrada

$b_0, b_1, b_2$  -Polígono de control de la curva

$w_0, w_1, w_2$  -Pesos asociados al polígono de control

$n$  -número de puntos a evaluar

1. Obtener el incremento del parámetro  $u$

$$incu = 1/(n-1)$$

2. Calcular el invariante

$$k = \frac{w_0 w_2}{w_1^2}$$

3. Calcular el centro de la cónica (para  $k \neq 1$ )

$$c = b_1 + \frac{k}{2(k-1)}(b_0 + b_2 - 2b_1)$$

4. Obtener los puntos iniciales y el parámetro  $s$  para aplicar el método en diferencias.

$$P_0 = b_0$$

(a) Caso elíptico

i. Calcular  $\alpha$

$$\alpha = \arccos(2/k - 1)$$

ii. Calcular  $\text{sen}(\alpha)$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{k-1}}{k}$$

iii. Obtener el segundo y tercer punto inicial

$$P_1 = (b_0 - c) \frac{\text{sen}((1 - incu)\alpha)}{\text{sen } \alpha} + (b_2 - c) \frac{\text{sen}(incu\alpha)}{\text{sen } \alpha} + c$$

$$P_2 = (b_0 - c) \frac{\text{sen}((1 - 2incu)\alpha)}{\text{sen } \alpha} + (b_2 - c) \frac{\text{sen}(2incu\alpha)}{\text{sen } \alpha} + c$$

iv. Cálculo del parámetro del método en diferencias

$$s = \cos(\alpha * incu)$$

(b) Caso hiperbólico

i. Calcular  $\alpha$

$$\alpha = \text{arccosh}(2/k - 1)$$

ii. Calcular  $\text{senh}(\alpha)$

$$\text{senh}(\alpha) = 2\sqrt{1 - k}/k$$

iii. Obtener el segundo punto inicial

$$P_1 = (b_0 - c) \frac{\sinh((1 - incu)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + (b_2 - c) \frac{\sinh(incu\alpha)}{\sinh(\alpha)} + c$$

iv. Obtener el tercer punto inicial

$$P_2 = (b_0 - c) \frac{\sinh((1 - 2incu)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + (b_2 - c) \frac{\sinh(2incu\alpha)}{\sinh(\alpha)} + c$$

v. Calcular el valor del parámetro para el método

$$s = \cosh(\alpha * incu)$$

(c) Caso parabólico

i. Calcular el segundo y tercer punto inicial usando la representación estándar.

$$P_1 = p(2 * incu)$$

$$P_2 = p(3 * incu)$$

ii. Asignar el valor del parámetro para el método

$$s = 1$$

5. Aplicar el método en diferencias para obtener los  $n - 3$  puntos restantes

• Para  $i = 0$  hasta  $n - 4$

$$- P_{i+3} = (2s + 1)P_{i+2} - (2s + 1)P_{i+1} + P_i$$

## 6.5 Notas y Referencias

Los resultados que presentamos sobre la Representación Racional Cuadrática de Bézier están basados en la investigación de Lee [12].

El método en diferencias que se presenta para generar de manera eficiente la gráfica de un arco cónico, es un trabajo desarrollado por Weping W., Barry J. and Wang C. Y. [21].

Del libro Boehm and Prautzsch [3], se consultaron las propiedades de las coordenadas baricéntricas.

En el libro Faux and Pratt [8] se puede consultar más sobre la representación paramétrica racional para curvas.

## Capítulo 7

# Suavizamiento Cónico de Polígonos

### 7.1 Introducción

La generación de una malla sobre una región del plano es el primer paso para la solución numérica de una ecuación diferencial en derivadas parciales, utilizando métodos de elemento finito o diferencias finitas. Este procedimiento requiere de una malla con buenas propiedades geométricas (celdas convexas). Sin embargo, cuando el contorno de la región es muy irregular, el método que genera la malla, presenta mayor dificultad para obtenerla. En estas situaciones, surge la necesidad de aplicar un preprocesamiento a la poligonal que describe la región para obtener una nueva aproximación que sea más suave, sin “modificar la región original por completo”; es decir, sin cambiar la forma del contorno de manera significativa. Con este fin, primero generamos una nueva aproximación al contorno que reduce el número de puntos y posteriormente realizamos un suavizamiento de la poligonal resultante.

### 7.2 Eliminación de Puntos

El primer problema que abordaremos y que llamaremos “Eliminación de Puntos”, consistirá en construir una poligonal que aproxime al contorno original reduciendo lo más que se pueda el número de vértices, respetando la forma de la curva. La idea fundamental será eliminar puntos redundantes; es decir, si un grupo de puntos está “alineado”, éste se puede reducir al segmento que une los puntos extremos.

Si tuviésemos a nuestro alcance el dibujo del contorno, nos sería posible detectar a simple vista las zonas donde los puntos “parecen estar alineados” y, en tal caso, podríamos reemplazarlos por el segmento que los aproxima. Usaremos esta idea para obtener un método que permita obtener una

solución a nuestro problema.

Observemos que nuestra solución será una curva poligonal donde, cada lado cumple con una de las siguientes condiciones

- El lado coincide con uno de la "curva original".
- Es un segmento que aproxima a por lo menos tres puntos de la "curva original".

El segundo punto nos lleva a preguntarnos ¿cómo identificamos vértices "colineales"? Es obvio que debemos tener algún punto de partida y llevar un orden para recorrer la poligonal. De esta forma, para reducir el número de puntos, iremos analizando segmentos del contorno para determinar si es posible reemplazarlo por el segmento de recta (segmento de ajuste) que une a los puntos extremos, para ello, necesitamos hacer una comparación entre el segmento poligonal y el segmento de ajuste.

### 7.2.1 Criterios de Colinealidad

Sean  $\{p_i\}_{i=1}^k$  los puntos que determinan el segmento de la curva, al que deseamos ajustar el segmento  $\overline{p_1 p_k}$  (segmento de ajuste). Si el conjunto consta de sólo tres puntos y el punto  $p_2$  está "cerca" del segmento  $\overline{p_1 p_3}$ , podríamos eliminarlo, de otro modo, el  $p_2$  deberá conservarse (vea la figura 7-1 ( a )); matemáticamente, tenemos que calcular la distancia del punto al segmento y, con base en una cota, decidir si  $p_2$  está "cerca" del segmento; a este criterio le llamaremos Criterio de Error Máximo. Otra opción, es comparar la longitud del segmento de ajuste contra la de la curva, intuitivamente, estas cantidades serán más parecidas conforme la distancia del punto al segmento de ajuste disminuya (vea la figura 7-1 ( b )), a este criterio le llamaremos Criterio de Longitud. Tratemos de aplicar estas pruebas a conjuntos con más de tres puntos. En tal caso, podríamos considerar también como criterio de colinealidad, el número de veces que la curva atraviesa al segmento de ajuste.

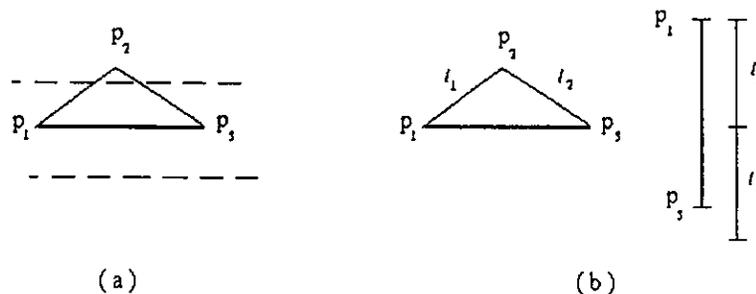


Figura 7-1: ( a ) Criterio de Error Máximo. ( b ) Criterio de Longitud.

## Criterio de Longitud

Como primera prueba de "colinealidad" compararemos la longitud de la curva definida por los puntos  $\{p_i\}_{i=1}^k$ , que denotaremos por  $D$ , contra la longitud del segmento de ajuste, a la que denotaremos por  $S$ . De manera que si  $D$  es "parecido" a  $S$ , diremos que el segmento  $\overline{p_1 p_k}$  ajusta bien a los puntos y, por tanto, los consideramos "colineales" (vea la figura 7-2).

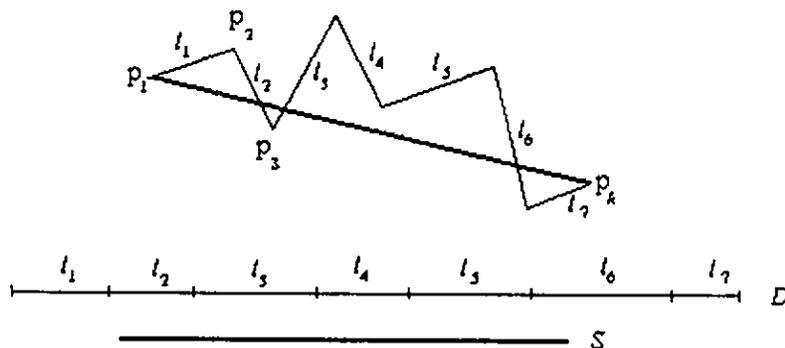


Figura 7-2: Criterio de Longitud: Comparación de la longitud del segmento de la curva y la del segmento de ajuste.

Para comparar estos números, usaremos el cociente  $\frac{S}{D}$ , de esta forma,  $S$  será "parecido" a  $D$  siempre y cuando  $\frac{S}{D}$  se "parezca" a la unidad. Para ser más precisos, se proponen dos cotas:  $R_0$  y  $R_1$ , con  $1 < R_0 < R_1$ , que usaremos de la siguiente manera

- Si  $\frac{S}{D} \leq R_0$  entonces
  - Diremos que los puntos son "colineales"
- Si  $R_1 \leq \frac{S}{D}$ 
  - Diremos que los puntos no son colineales
- Si  $R_0 < \frac{S}{D} < R_1$ 
  - Aplicamos otra prueba de colinealidad.

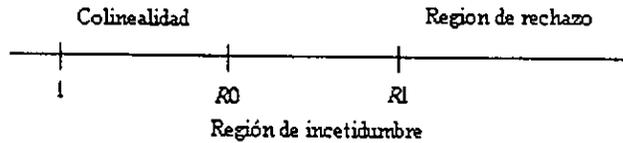


Figura 7-3: Significado de las cotas para el criterio de longitud

### Criterio de Error Máximo

Este criterio se basa en el error máximo ( $dm$ ), que se obtendrá si aproximamos los puntos  $\{p_i\}_{i=1}^k$  con el segmento  $\overline{p_1 p_k}$ . Si los puntos están “cerca” del segmento, diremos que éste aproxima bien al segmento poligonal, de esta forma, proponemos una cota  $E0$ , que medirá la distancia (que consideraremos como “cercana”) al segmento de ajuste, en la figura 7-4 ilustramos esta idea. Al igual que en el criterio de longitud, consideraremos un intervalo de incertidumbre ( $E0, E1$ ).

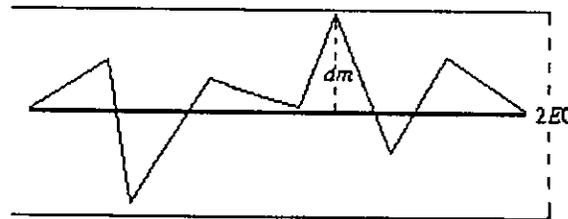


Figura 7-4: Criterio de Error Máximo: Se indica el error máximo  $E0$ .

Si  $dm$  es la distancia del punto más alejado del segmento y  $j$  es el índice del punto que alcanza esta distancia ( $dm = d(p_j, \overline{p_1 p_k})$ ). Entonces procederemos de la siguiente manera

- Si  $dm \leq E0$  entonces
  - Aceptaremos la “colinealidad” de los puntos
- Si  $E0 < dm < E1$  entonces
  - Aplicaremos otro criterio de colinealidad
- Si  $dm \geq E1$  entonces
  - Se rechazara la colinealidad

## Criterio de Cruce

Esta prueba usa el número de veces que la curva atraviesa el segmento de ajuste. Si la curva atraviesa el segmento sólo una vez, se altera el valor de  $dm$  por  $dm/2$ , de lo contrario, el valor de  $dm$  se modifica por  $dm/4$ . Este nuevo valor de  $dm$  se compara contra el valor de  $E0$ , si  $dm$  es menor o igual que  $E0$ , entonces se acepta el segmento, en otro caso, se rechaza el segmento de ajuste.

## Procedimiento Colineal

Veamos ahora cómo usaremos los criterios de colinealidad para construir un procedimiento que dado un segmento de curva nos indique si los puntos que lo definen se pueden aproximar por el segmento de recta que une los puntos extremos del segmento poligonal.

El procedimiento Colineal recibe los datos del contorno y el bloque de puntos a analizar; este segmento poligonal se indica a través de los índices de las coordenadas de los puntos extremos:  $indpib$  e  $indpfb$ , respectivamente. Colineal también recibe como datos las cotas  $R0$  y  $R1$  del criterio de longitud, así como las cotas  $E0$  y  $E1$  del criterio de Error máximo.

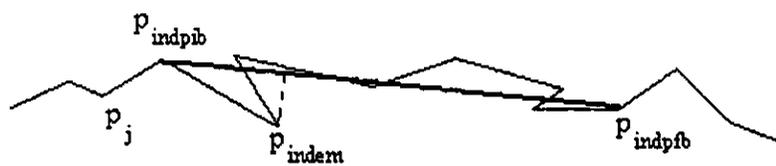


Figura 7-5: El posible segmento de ajuste une los puntos  $p_{indpib}$  y  $p_{indpfb}$ .

Colineal analizará los puntos  $p_{indpib}, p_{indpib+1}, \dots, p_{indpfb}$  y regresará en la variable colineal el valor de 1 si el segmento  $\overline{p_{indpib}p_{indpfb}}$  "aproxima bien a los datos", de otro modo, a colineal se le asignará el valor de cero y a la variable  $indem$  el valor del índice del punto más alejado del segmento de ajuste.

La idea del procedimiento es aplicar los criterios de colinealidad empezando por el criterio de longitud, si el valor de  $S/D$  cae en el intervalo de incertidumbre, aplicaremos el criterio de Error máximo y, si  $dm$  se encuentra en el intervalo de incertidumbre, se aplicará el criterio de cruce, en donde se determina si el segmento de ajuste se acepta o rechaza.

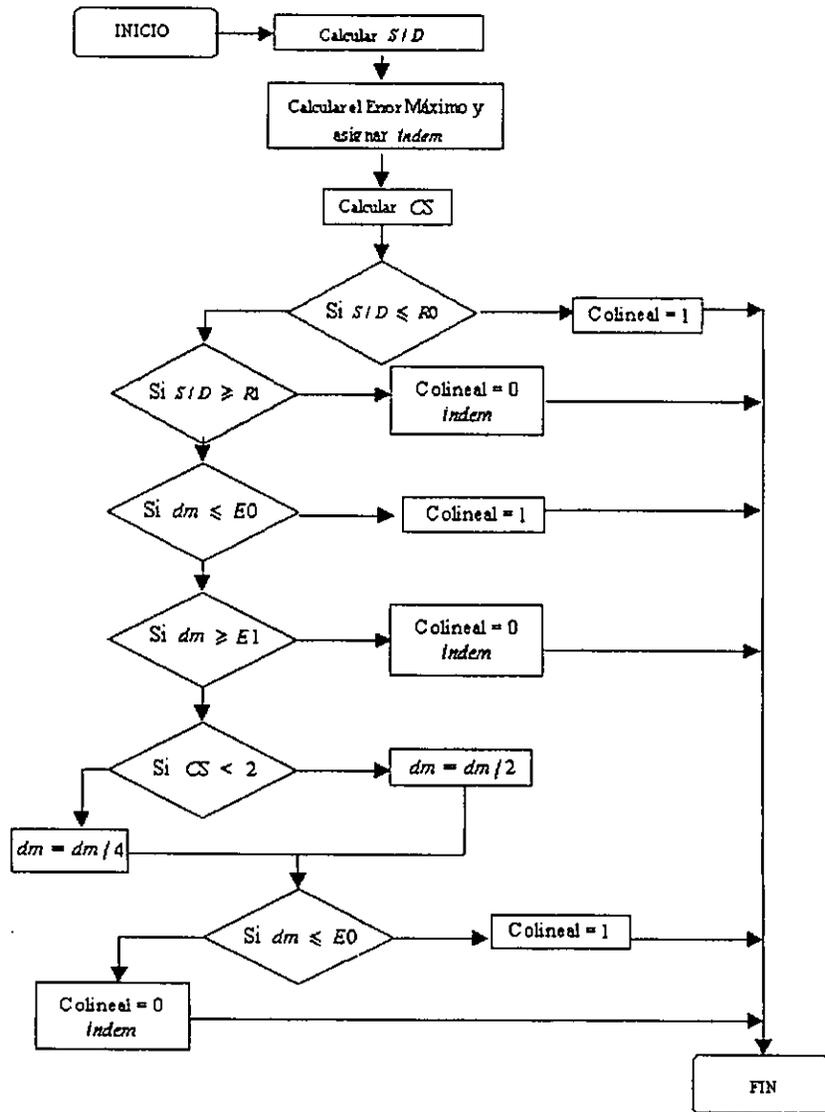


Figura 7-6: Diagrama de Flujo del Procedimiento Colineal.

## 7.2.2 Algoritmo De Eliminación De Puntos

La subrutina colineal es el corazón del algoritmo de eliminación de puntos, ya que al recorrer los puntos del contorno, se toma un segmento de la curva de tamaño (inicial)  $k$  pasando esta información a dicha subrutina. Colineal regresará un uno, si el segmento de ajuste fue aceptado, procederemos al análisis del siguiente bloque de  $k$  puntos (vea la figura 7-7 ( a )) pero, si Colineal regresa un cero, eso nos indicará que el segmento de ajuste fue rechazado y en este momento usaremos el segundo parámetro que regresa Colineal,  $indem$ ; recordemos que este parámetro tiene el valor del índice del punto que se encontró a mayor distancia del segmento de ajuste y, como el segmento fue rechazado; ahora intentaremos aproximar los puntos que se encuentran entre el primer punto del bloque  $p_{indpib}$  y el punto que tiene por índice a  $indem$ , con el segmento  $\overline{p_{indpib}p_{indem}}$  esto se muestra en la figura 7-7 ( b ); este proceso se aplica hasta encontrar un segmento que "ajuste bien" a los datos o hasta que el bloque conste de sólo dos puntos; para después continuar con el siguiente conjunto de  $k$  puntos.

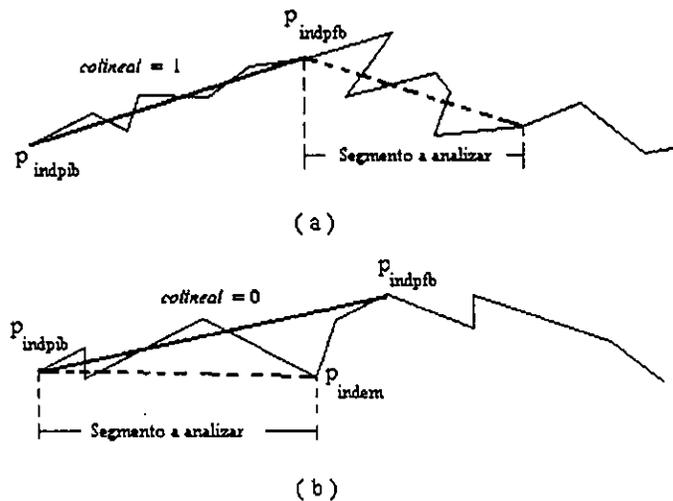


Figura 7-7: La figura ilustra el siguiente segmento a analizar de acuerdo al resultado que se obtenga sobre el segmento actual. ( a ) Si el segmento actual es aceptado, ( b ) El segmento de ajuste se rechazó.

En el procedimiento anterior no podemos descartar la posibilidad de obtener dos segmentos de ajuste consecutivos que formen un ángulo "casi llano".

Para evitar esta situación, el algoritmo conserva el valor del punto inicial del segmento de ajuste anterior  $L_1$  ( $p_{indpiba}$ ). Si Colineal indica que el segmento de ajuste  $L_2$  se acepta, entonces antes de incorporarlo al nuevo contorno, calcula el ángulo entre los segmentos  $L_1$  y  $L_2$ , si dicho ángulo es cercano a  $180^\circ$ , eliminamos el vértice  $p_{indpib}$  esto significa que se agrega al nuevo contorno el segmento  $\overline{p_{indpiba}p_{indpfb}}$ .

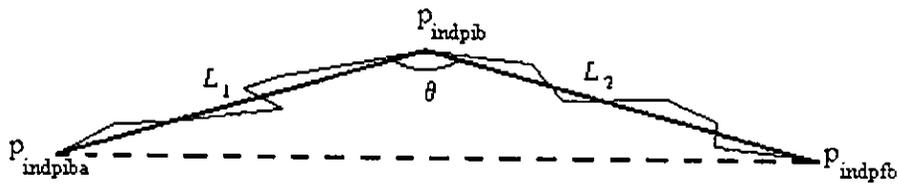


Figura 7-8: Eliminar vértice  $p_{indpib}$  dependiendo del valor del ángulo definido por  $L_1$  y  $L_2$ .

El criterio que usaremos para determinar si eliminamos el vértice  $p_{indpib}$  es el siguiente:

Calcular el coseno del ángulo entre los segmentos  $L_1$  y  $L_2$ . Si este ángulo resulta ser muy "pequeño" o "cercano" a  $180^\circ$ , es decir, si  $|\cos(\theta) - 1| \leq EPS$ , donde  $EPS$  es una constante "cercana" a cero, entonces, en lugar de agregar el segmento  $L_2$  al contorno, se eliminará el vértice formado por  $L_1$  y  $L_2$ .

### Los Parámetros

En la discusión previa, ya hicimos referencia a los parámetros que usaremos para eliminar puntos de una poligonal. A continuación describimos, con mayor detalle cada parámetro, proponiendo un valor por defecto, la elección de dicho valor fue empírica y de acuerdo con la aplicación que deseamos resolver.

$k$  - Es el número inicial de puntos a analizar por bloque.

Como este número no se mantiene fijo,  $k$  sólo influye en la velocidad de ejecución; al incrementar su valor, el algoritmo se torna más lento. Sin embargo, se mantiene constante el número de vértices que se eliminan de la poligonal. Se encontró que con  $k = 7$  el algoritmo produce buenos resultados.

EPS - Cota para determinar la colinealidad de los puntos que definen dos segmentos de ajuste consecutivos.

Este parámetro nos servirá para eliminar el vértice definido por dos segmentos de ajuste consecutivos, esto es, reemplazaremos dos segmentos de ajuste por uno solo. El valor del parámetro debe de ser pequeño, pues con él estaremos midiendo que tan cerca está el coseno del ángulo de la unidad, por tanto, conforme EPS disminuye, la aproximación a los "picos de la curva original" será mejor, aumentando así el número de puntos. Al realizar varias pruebas, se encontró que el valor que nos permite obtener buenas aproximaciones es  $EPS = 0.06$ , con éste se conservan aquellos segmentos de ajuste que formen un ángulo no mayor de 160 grados.

E0 - Cota superior para aceptar colinealidad con el criterio de error máximo

E1 - Cota inferior para rechazar colinealidad con el criterio de error máximo

Las cotas para el criterio de error máximo dependen del problema, ya que debemos considerar tanto la escala como la precisión que deseamos obtener.

R0 - Cota superior para aceptar colinealidad con el criterio de longitud

R1 - Cota inferior para rechazar colinealidad con el criterio de longitud

Debido a que en el criterio de longitud comparamos la longitud del segmento contra la del "segmento de curva", estas cotas son independientes de la escala que se esté considerando. Después de hacer varias pruebas, se encontró que al considerar valores de  $R0$  menores que 1.01 y con  $R1 = 1.02$  el algoritmo produce buenos resultados, si se elige  $R0 = 1.007$ , la aproximación obtenida reduce un poco más del cincuenta por ciento de la información, por lo que se propone usar  $R1 = 1.02$  y  $R0 = 1.007$ .

La rutina de eliminación de puntos fue implementada en *FORTTRAN*, se usó el compilador *F77L*. En las siguientes figuras, mostramos varias regiones, para cada una, se ilustra la región "original", la que se obtiene después de iterar el procedimiento hasta estabilizarlo, con los valores predeterminados de los parámetros y, por último, se muestran a la vez ambos contornos.

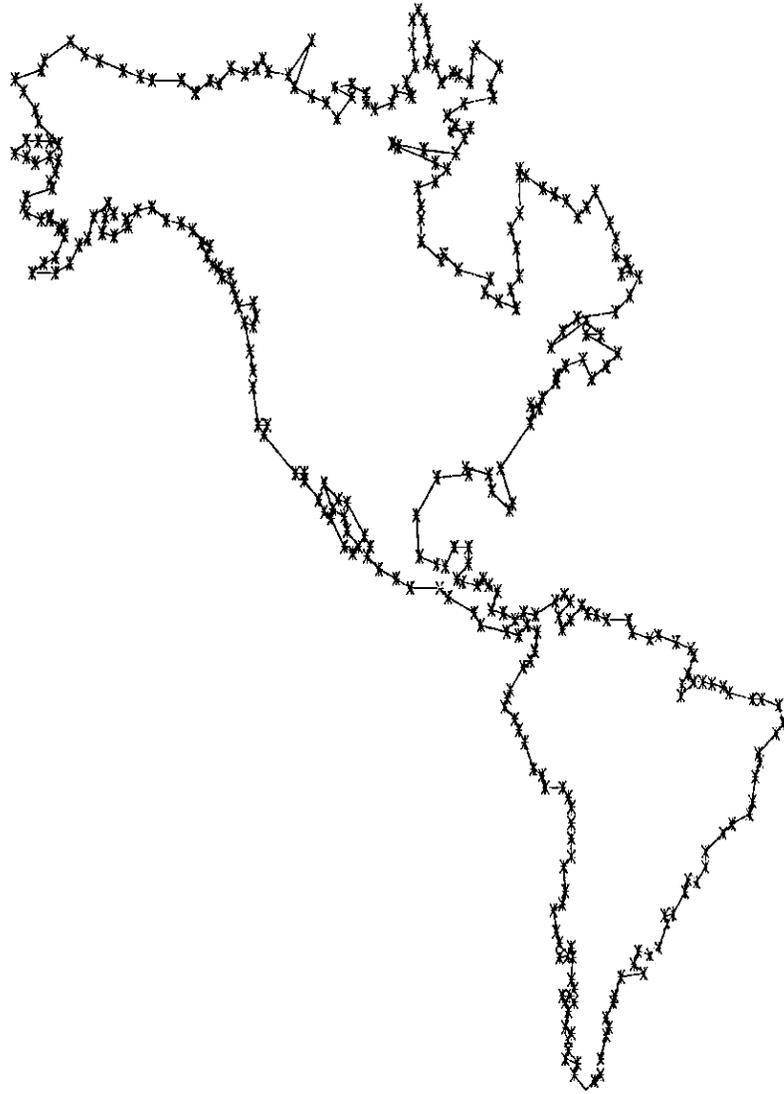


Figura 7-9: Contorno original 340 puntos.

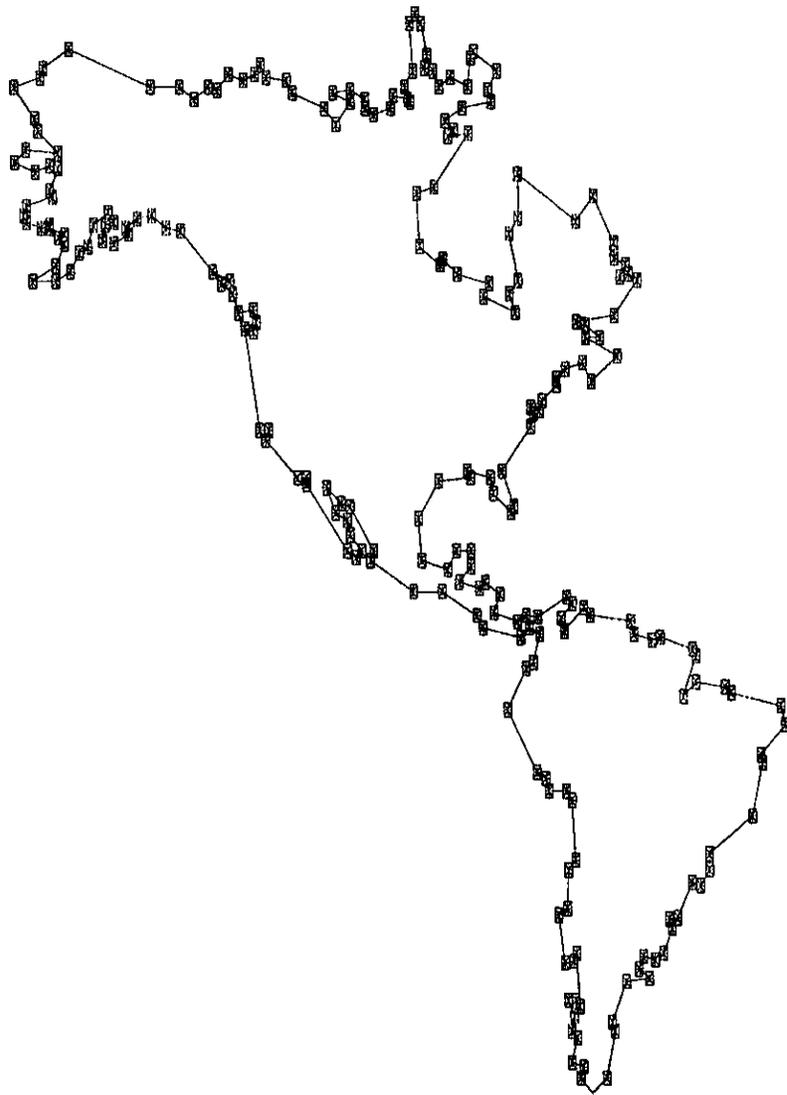


Figura 7-10: Contorno reducido con 242 puntos.

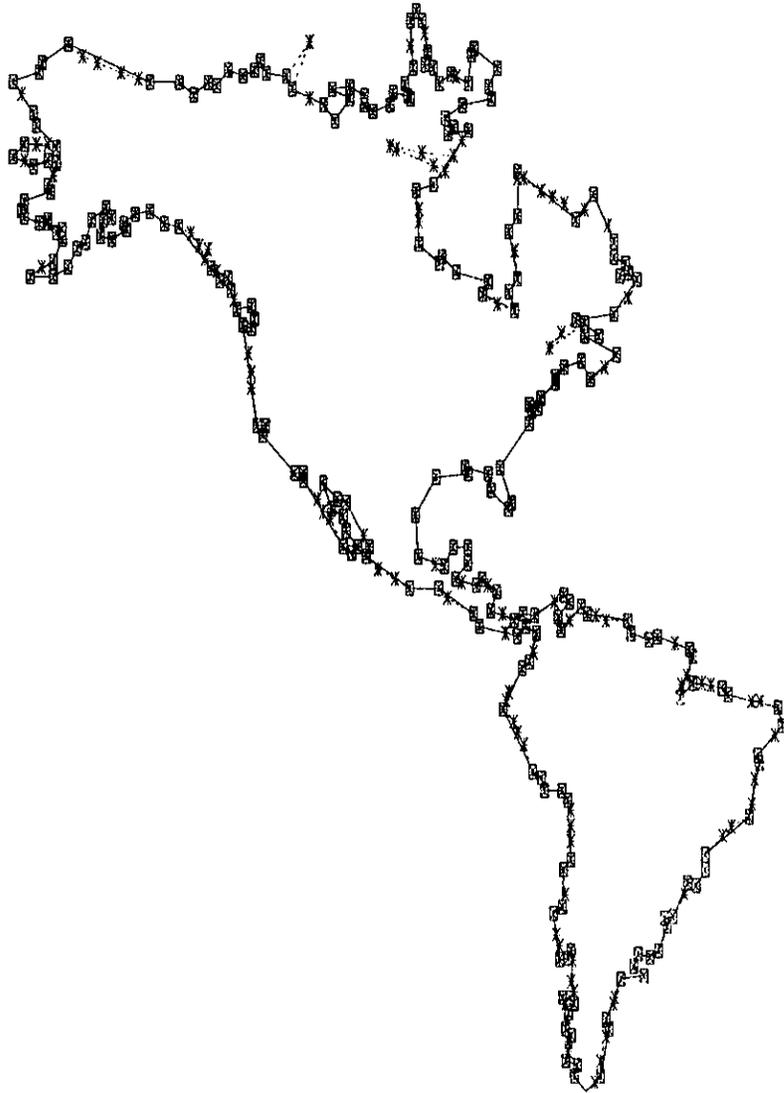


Figura 7-11: \* Contorno original 340 puntos □ Contorno Reducido 243 puntos.



Figura 7-12: Contorno con 101 puntos

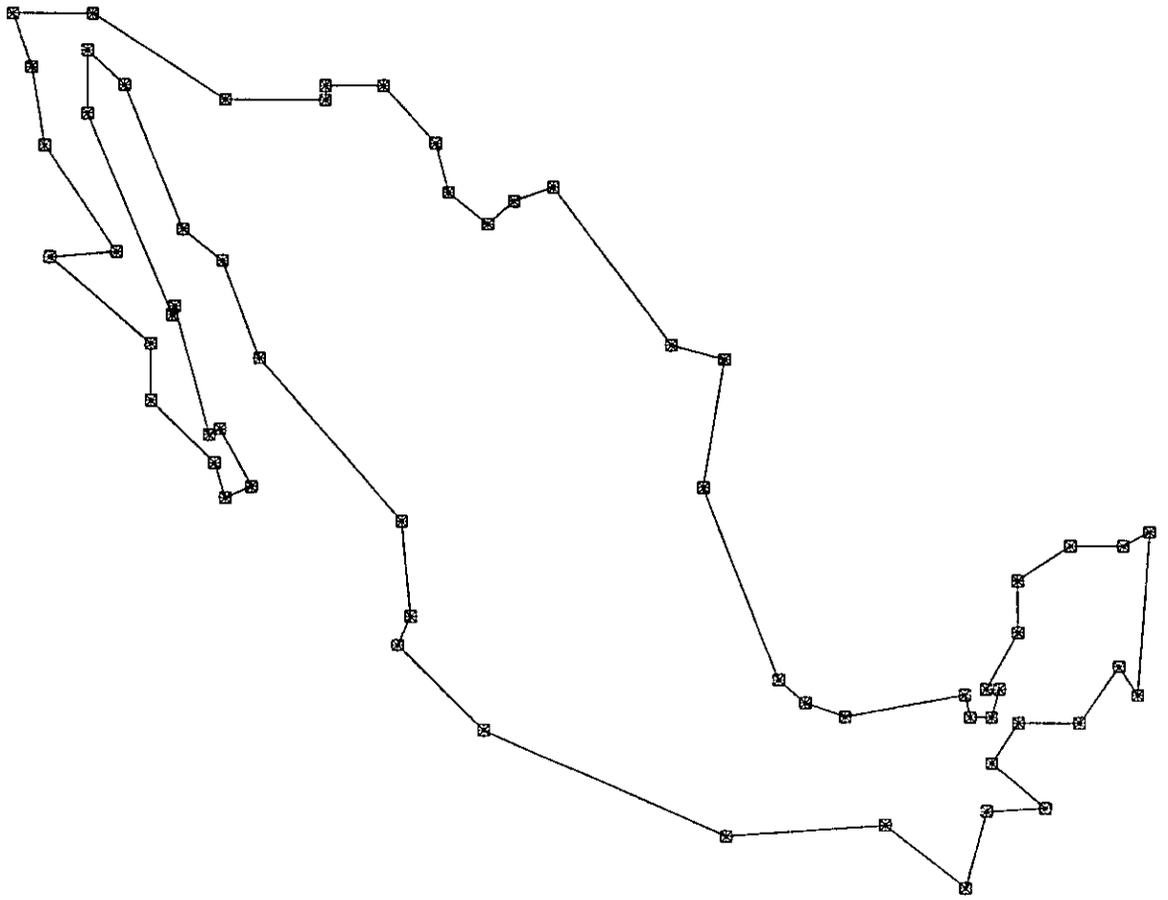


Figura 7-13: Contorno reducido con 61 puntos.



Figura 7-14: \* Contorno Original 101 puntos □ Contorno reducido 61 puntos.



Figura 7-15: Contorno de la Habana 170 puntos.

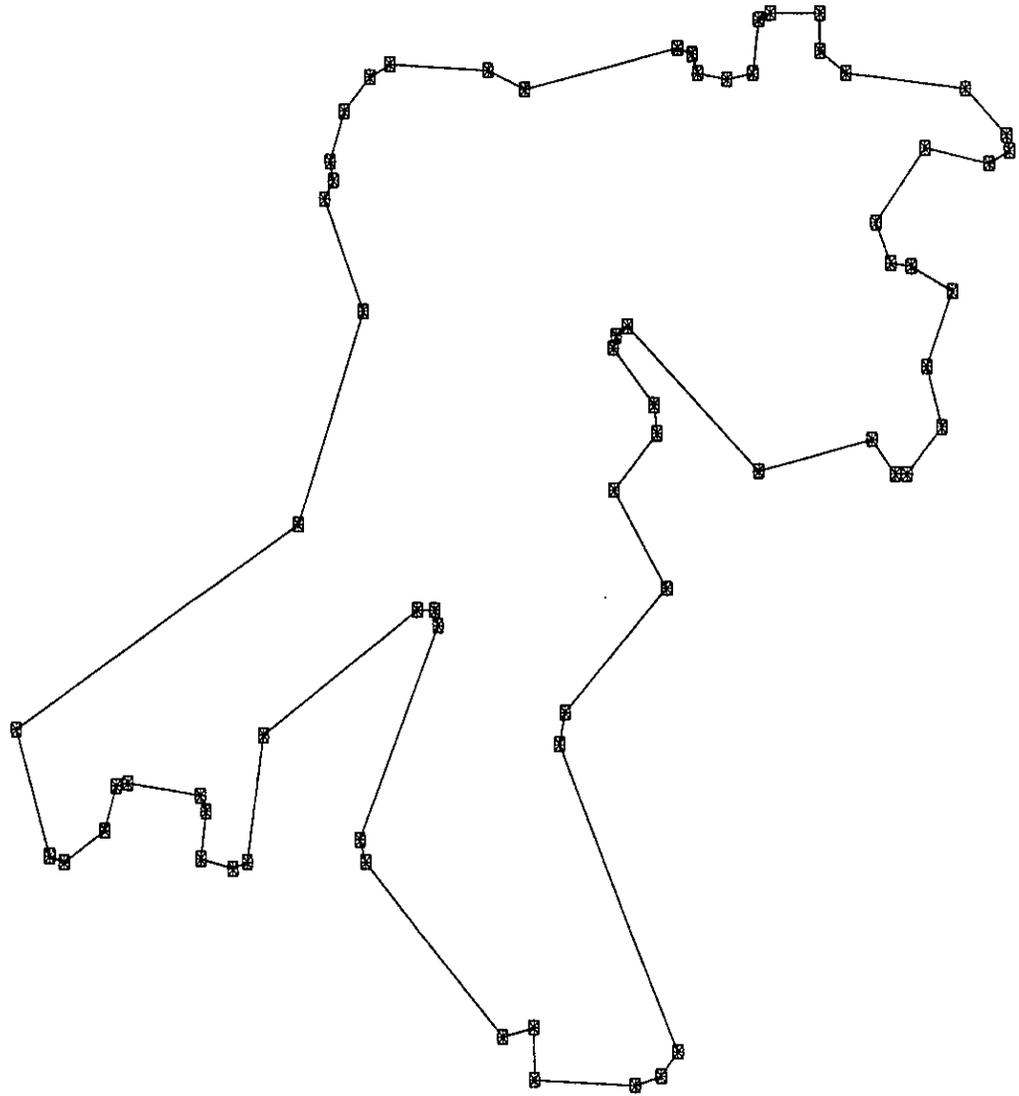


Figura 7-16: Contorno reducido 68 puntos.

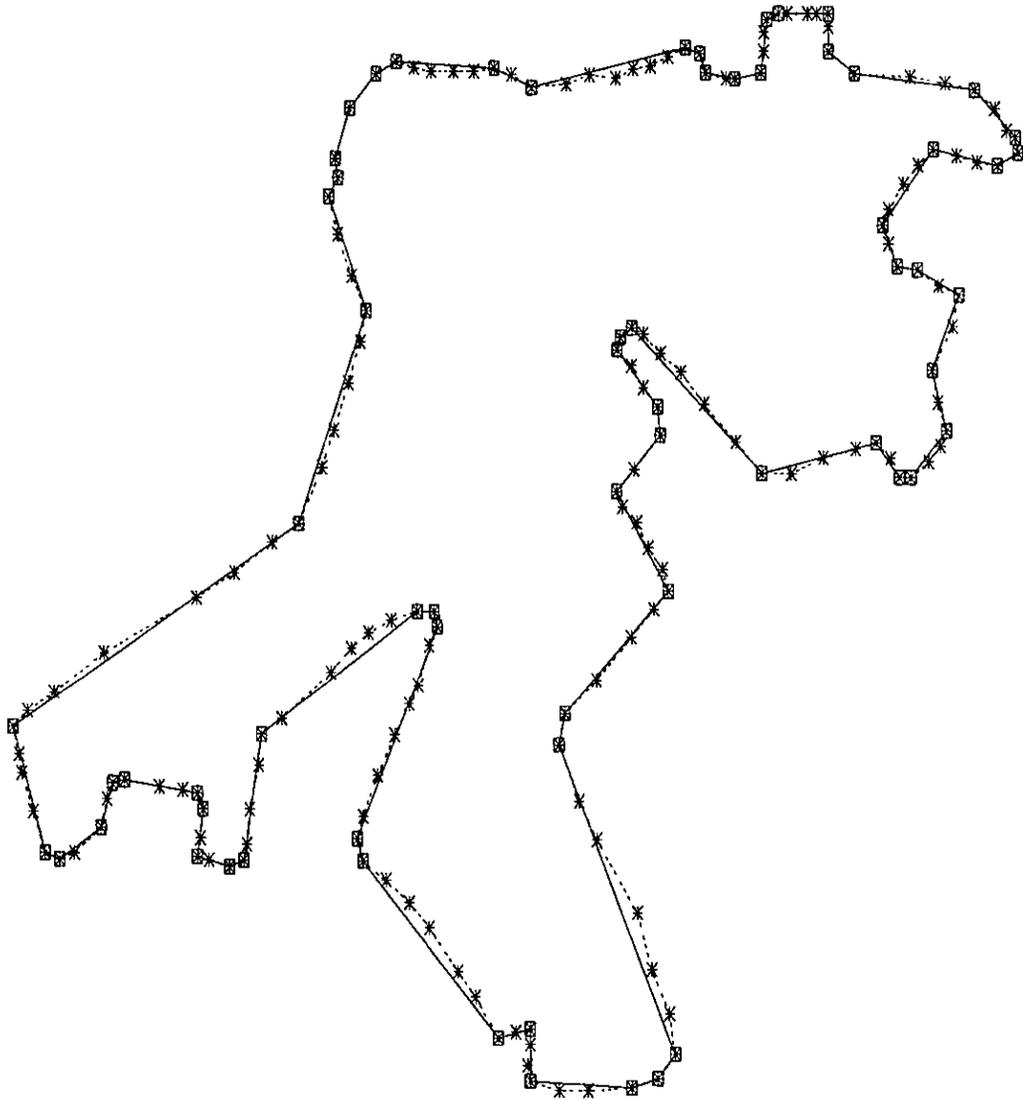


Figura 7-17: \* Contorno Original 170 puntos □ Contorno reducido 68 puntos.

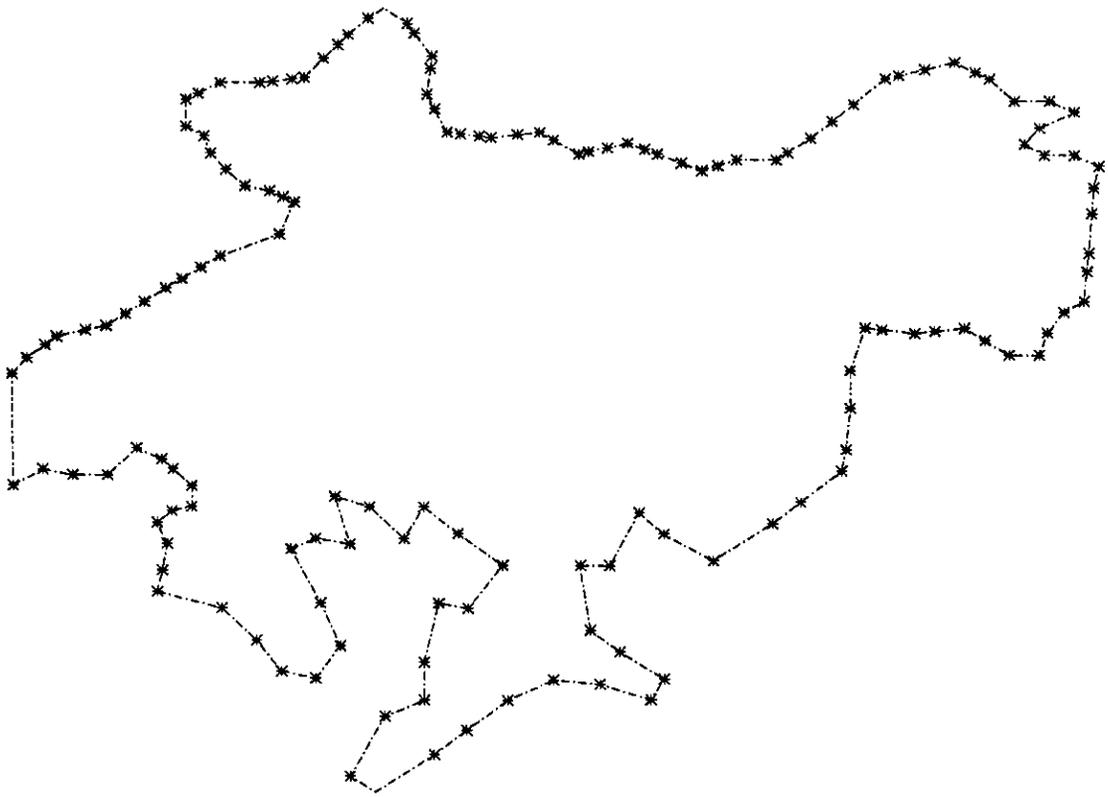


Figura 7-18: Contorno con 147 puntos.

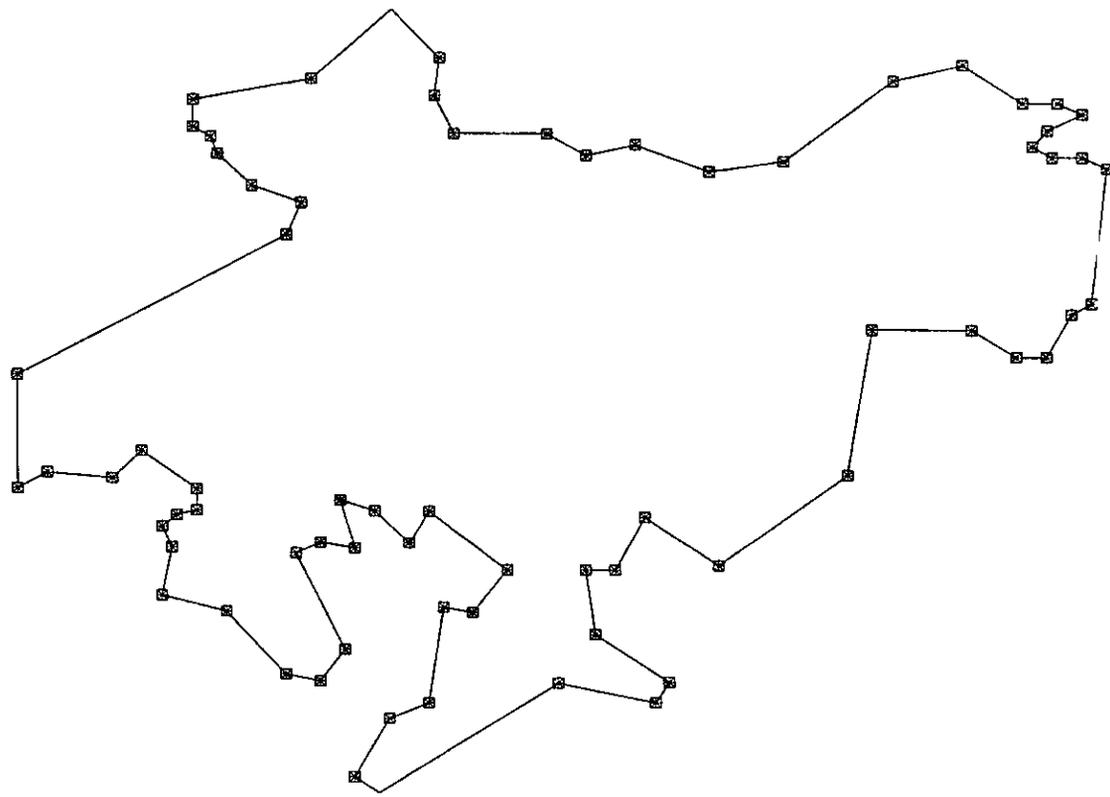


Figura 7-19: Contorno Reducido 72 puntos.

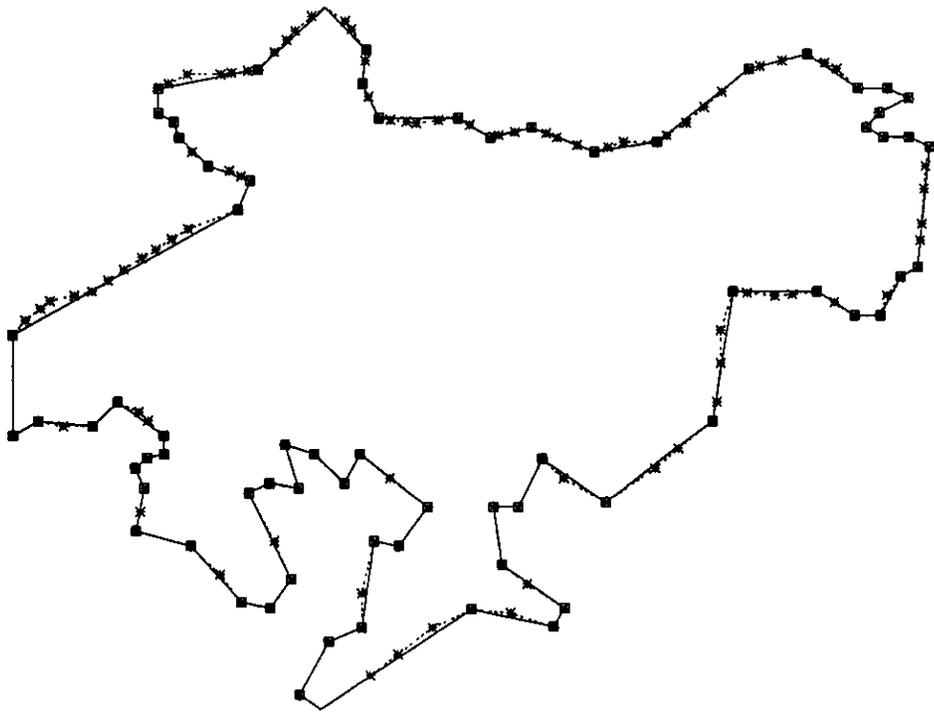


Figura 7-20: \* Contorno original 147 puntos □ Contorno reducido 72 puntos.

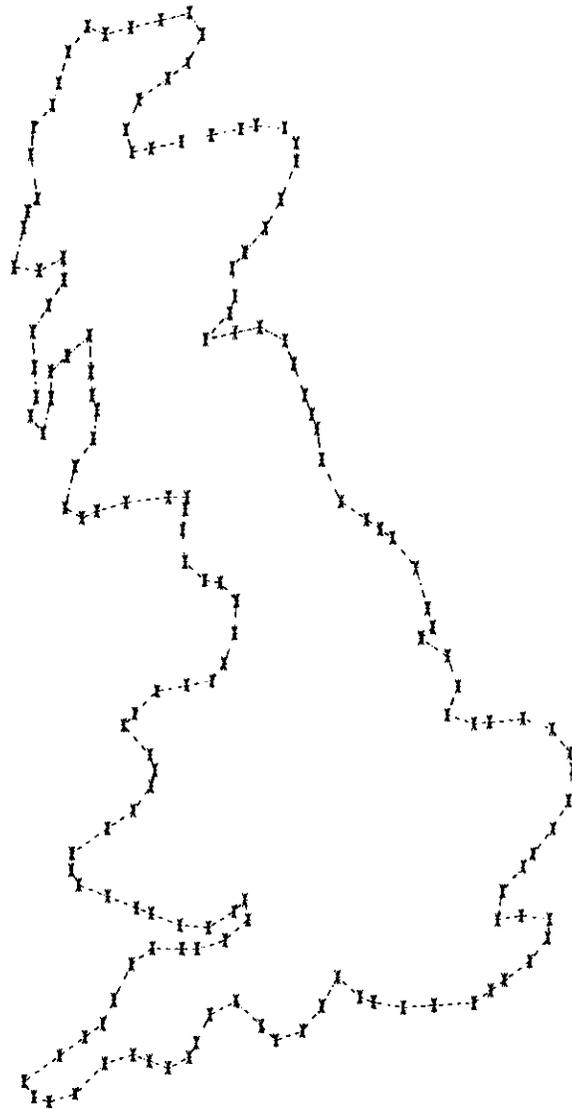


Figura 7-21: Contorno con 157 puntos.

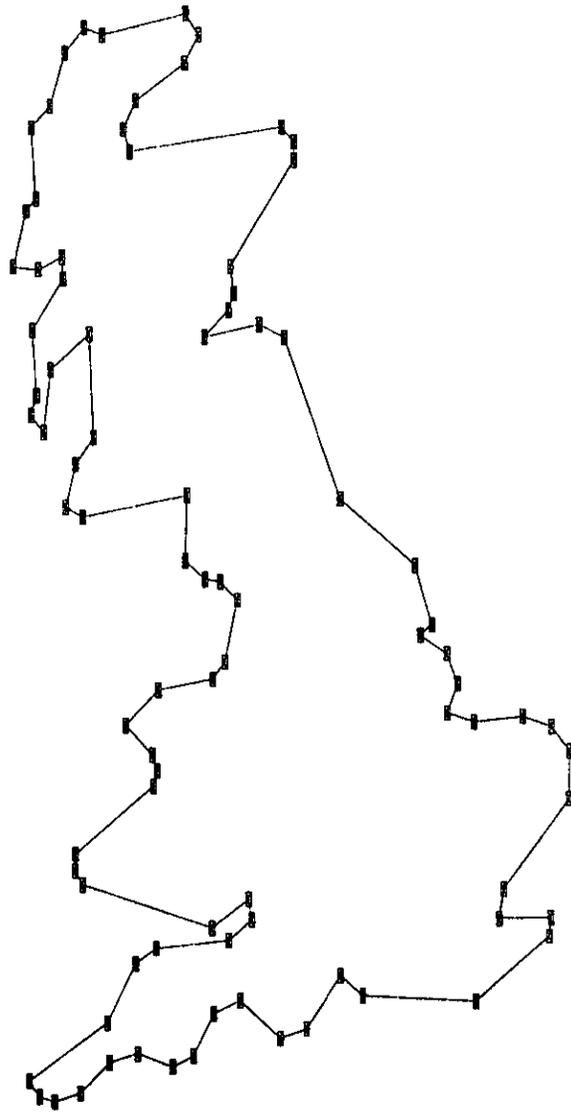


Figura 7-22: Contorno reducido 90 puntos.

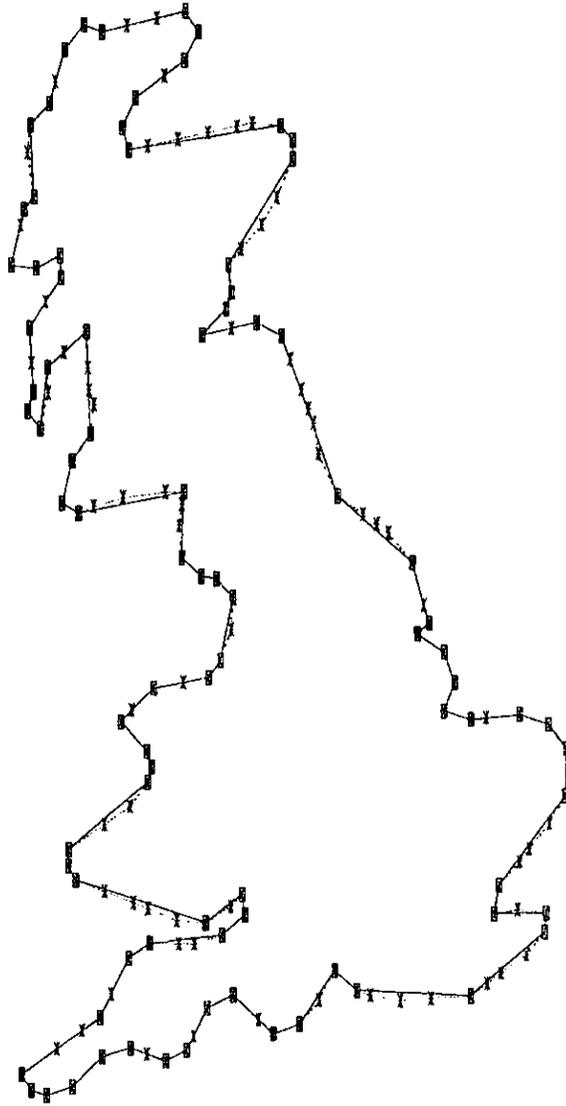


Figura 7-23: \* Contorno original 157 puntos □ Contorno reducido 90 puntos.

### 7.3 Suavizamiento de Regiones Poligonales

Recordemos que la necesidad de suavizar polígonos surge cuando el procedimiento de generación de mallas presenta dificultades para obtener una malla con celdas convexas, este problema se presenta cuando el contorno de la región es muy irregular, en tal caso, el contorno se puede suavizar por medio de un spline cúbico paramétrico. Sin embargo, si el contorno es un polígono no convexo, el uso de un spline de suavizamiento no da buenos resultados, pues obtenemos un nuevo contorno que es suave pero, que no se parece mucho a la curva original.

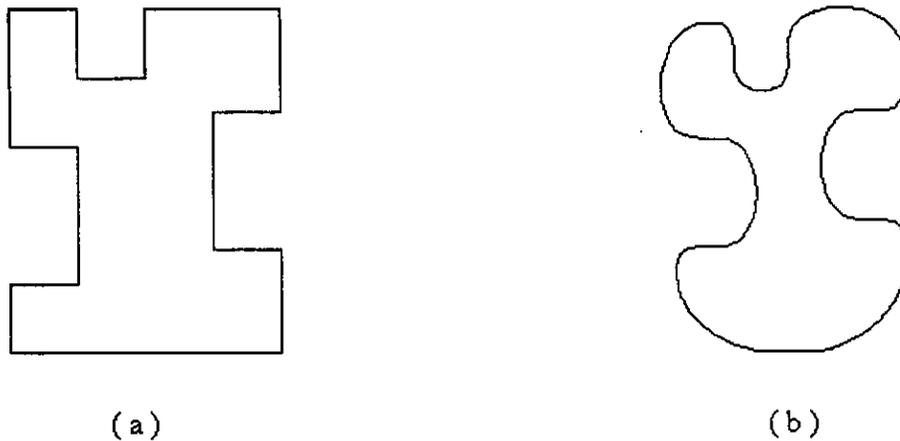


Figura 7-24: ( a ) Región Poligonal. ( b ) Región Suavizada

Por esta razón, es importante que el procedimiento suavice la curva preservando lo más que sea posible su forma original, para lograrlo, nos centraremos en “quitar los picos” de la poligonal, entendiéndose por ésto, que “suavizaremos” cada vértice tratando de conservar segmentos recta entre los vértices suavizados. Como deseamos obtener un contorno suave, los lados que definen a cada vértice deben ser tangentes a la curva que lo suavice. Para suavizar cada vértice haremos uso de secciones cónicas.

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que la representación racional de Bézier, nos permite describir arcos cónicos con tangentes determinadas en los extremos, más aún, si usamos la representación estándar, para determinar el arco, basta con dar el polígono de control y el peso  $w_1$ .

De acuerdo a lo que mencionamos anteriormente, la curva que suavizará a la poligonal estará definida por secciones rectas y cónicas que se unen suavemente. A continuación describimos cómo obtener una curva con estas características. Cabe mencionar que la curva que se obtiene es la que mejor se adapta al método para generación de mallas.

Primero veamos cómo definir el arco cónico que suavice a un único vértice, sea este  $p_2$  y sus puntos

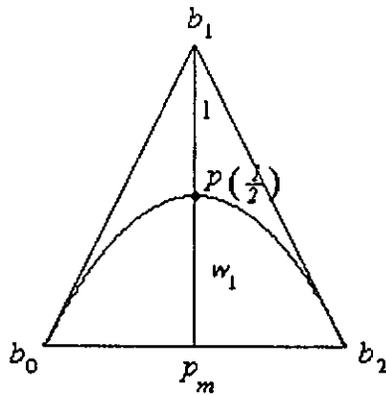


Figura 7-25: Parámetros en la representación racional de Bézier estándar de una cónica.

adyacentes  $p_1$  y  $p_3$ ; como usaremos la representación racional de Bézier estándar para describir el arco cónico, el problema lo podemos dividir en dos:

- 1.- Elección de los puntos de control:  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .
- 2.- Elección del peso  $w_1$ .

1. Elección del Polígono de Control de la Cónica

Sabemos que los segmentos  $\overline{b_0b_1}$  y  $\overline{b_1b_2}$  son tangentes al arco cónico en los puntos  $b_0$  y  $b_2$ , respectivamente. Como la curva que deseamos construir debe ser de tangente continua, esto nos indica que el punto de control  $b_1$  debe coincidir con el vértice  $p_2$ , que  $b_0$  debe elegirse entre los puntos del segmento  $\overline{p_1p_2}$  y que  $b_2$  debe ser un punto del segmento  $\overline{p_2p_3}$  (figura 7-26 ).

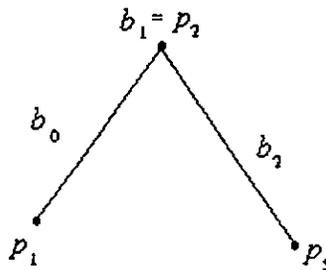


Figura 7-26:

Más adelante describiremos cómo asignar automáticamente los puntos extremos del polígono de control.

## 2. Elección del peso $w_1$

Recordemos que en la representación racional de Bézier estándar, el peso  $w_1$  determina la forma de la cónica (vea la sección 6.3.6); a su vez,  $w_1$  es el valor de la razón en que el punto  $p(1/2)$  divide al segmento  $\overline{p_m b_1}$ , donde  $p_m$  es el punto medio del segmento que une a los puntos extremos del arco; en la figura 7-25 se muestra el caso de un arco parabólico ( $w_1 = 1$ ). Es fácil ver que conforme el valor de  $w_1$  se incrementa en el intervalo unitario, la cónica que determina se aproxima más al punto de control  $b_1$ . En la siguiente figura ilustramos esta propiedad de la representación estándar.

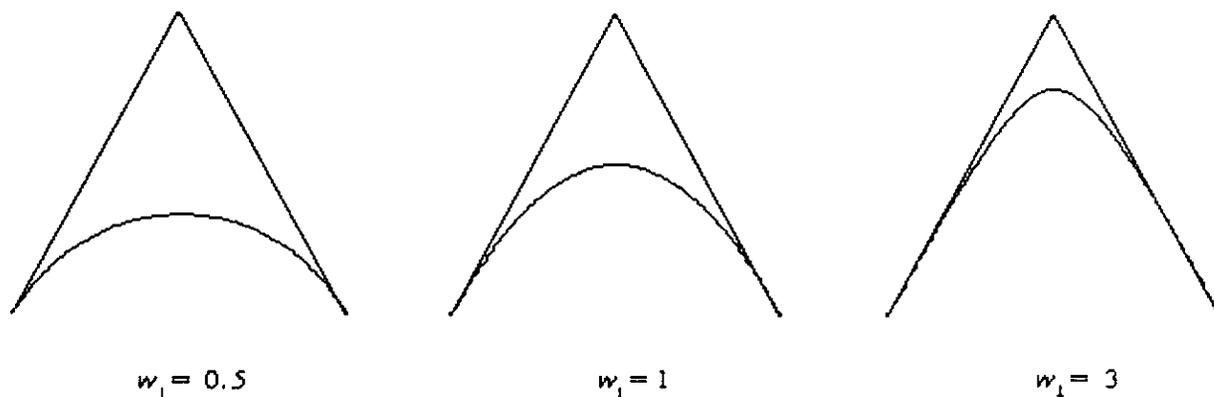


Figura 7-27: Cónicas obtenidas al variar el valor de  $w_1$ .

Considerando que uno de nuestros objetivos es suavizar el vértice con una curva que se encuentre lo más cerca posible del mismo, asignaremos el valor de  $w_1$  en términos del ángulo que determina el vértice basándonos en la siguiente propiedad:

Si  $\theta$  es el ángulo definido por el vértice, la cónica que lo suavice debe aproximarse más al vértice conforme  $\theta$  tienda a cero. La regla de correspondencia para  $w_1$  que se ha experimentado es:

$$w_1 = \begin{cases} 2 + \cos(\theta) & 0 < \theta \leq 90^\circ \\ 2 + 2\cos(\theta) & 90^\circ < \theta < 180^\circ \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Esto significa que si el vértice forma un ángulo menor que ciento veinte grados, el arco cónico que lo suavice será hiperbólico; los vértices con un ángulo de ciento veinte grados, se suavizarán con un arco parabólico y los vértices con un ángulo mayor de ciento veinte grados serán suavizados con un arco elíptico.

$$\text{arco} \begin{cases} \text{hiperbólico} & 0 < \theta < 120^\circ \\ \text{parabólico} & \theta = 120^\circ \\ \text{elíptico} & 120^\circ < \theta < 180^\circ \end{cases}$$

En la figura (7-28) se muestran las cónicas obtenidas al usar esta regla de correspondencia.

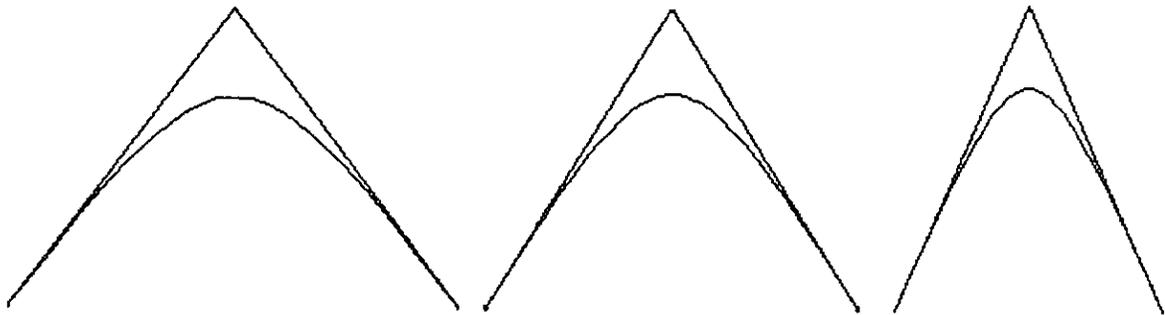


Figura 7-28: Cónicas obtenidas al variar el ángulo del vértice.

Veamos ahora cómo aplicamos esta idea para suavizar una poligonal.

Resulta natural que para suavizar una poligonal, se recorra cada vértice y se suavice usando el procedimiento que describimos anteriormente. Para facilitar la descripción del algoritmo, denotemos por  $I$  al vértice que será suavizado y por  $L_a$  y  $L_p$  a los lados que lo definen. Basándonos en la discusión anterior, el punto de control  $b_1$  coincide con el punto  $I$  mientras que los extremos del polígono de control:  $b_0$  y  $b_2$ , serán puntos de los lados  $L_a$  y  $L_p$ , respectivamente. A continuación explicaremos el método que seguiremos para asignar los puntos extremos del polígono de control.

Para automatizar el proceso, tomaremos en cuenta la longitud de cada lado de la poligonal. El caso más sencillo, es el de una poligonal regular. Como deseamos conservar un segmento recto en cada lado, se propone dividir el lado  $L_a$  en tres partes iguales y elegir a  $b_0$  como el punto que se encuentra a un tercio de distancia del vértice  $I$ .

Si la poligonal no es regular, para tratar de conservar un segmento de recta, haremos una comparación de la longitud de  $L_a$  y la longitud del lado más pequeño  $L_{\min}$ .

Si la longitud de  $L_a$  es "grande", elegiremos a  $b_0$  como el punto que esté a una distancia de  $L_{\min}/2$  del vértice  $I$ , con esta elección logramos que las cónicas que suavizan a los vértices definidos por  $L_a$  se unan por medio de un segmento de recta (vea la figura 7-30 (a)); en otro caso, se elige a  $b_0$  como el punto

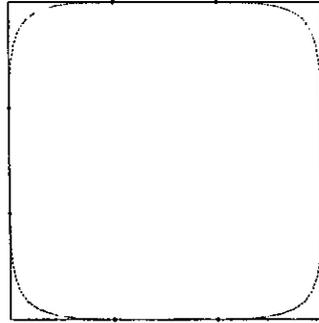


Figura 7-29: Suavizamiento de una poligonal regular.

medio del segmento  $L_a$  de esta forma, las cónicas que suavizan los vértices que definen a  $L_a$  se unen en el punto medio del segmento (vea la figura 7-30 (b)). Para determinar el punto de control  $b_2$ , aplicaremos el mismo análisis al segmento  $L_p$  y el peso  $w_1$  se asignará de acuerdo a la regla de correspondencia dada en (7.3.1).

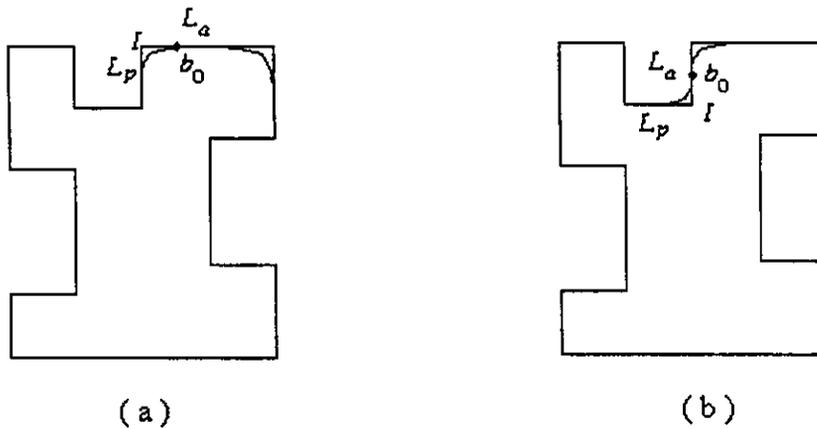


Figura 7-30: ( a ) Lado que preserva una sección recta. ( b ) Cónicas que se unen en el punto medio del segmento.

### 7.3.1 Algoritmo

- Calcular la longitud de cada lado del contorno y obtener la longitud mínima  $L_{min}$  y la longitud máxima  $L_{max}$ .

- Si  $L_{min} = L_{max}$

Los puntos extremos del polígono se eligen a una distancia  $L_{min}/3$  de  $I$ , de esta forma se incluye en cada lado una sección recta.

- Si  $L_{min} \neq L_{max}$

Para cada vértice

Definir el polígono de control y el peso  $w_1$  que determinan la cónica que suavizara al vértice.

– Sean  $L_a$  y  $L_p$  los lados que determinan a  $I$

\* Para  $L_a$  :

- Si la longitud de  $L_a$  es mayor que  $2L_{min}$

$b_0^I$  se toma a una distancia  $\frac{L_{min}}{2}$  de  $I$ .

- Si la longitud de  $L_a$  es menor o igual que  $2L_{min}$

$b_0^I$  es el punto medio de  $L_a$ .

\* Para  $L_p$  :

- Si la longitud de  $L_p$  es mayor que  $2L_{min}$

$b_2^I$  se toma a una distancia  $\frac{L_{min}}{2}$  de  $I$ .

- Si la longitud de  $L_p$  es menor o igual que  $2L_{min}$

$b_2^I$  es el punto medio de  $L_p$ .

– Asignar al punto de control  $b_1^I$  el vértice  $I$ .

–  $w_1$  se escoge en términos del ángulo que forma el vértice  $I$

$$w_1(\theta) = \begin{cases} 2 + \cos(\theta) & 0 < \theta \leq 90^\circ \\ 2 + 2\cos(\theta) & 90^\circ < \theta < 180^\circ \end{cases}$$

El algoritmo que antes presentamos sólo nos muestra cómo determinar el arco cónico que suaviza cada vértice, una vez hecho esto, podemos aplicar el método en diferencias visto en la sección ?? y obtener así una aproximación de cada segmento cónico.

En cada una de las siguientes figuras se muestra las gráficas de la región original y la región suavizada. *Debido a la escala, no se puede apreciar la diferencia entre ambos contornos, por lo que además se muestra una ampliación del segmento del contorno, que está delimitado en la gráfica correspondiente, por asteriscos.*



Figura 7-31: Contorno Suavizado

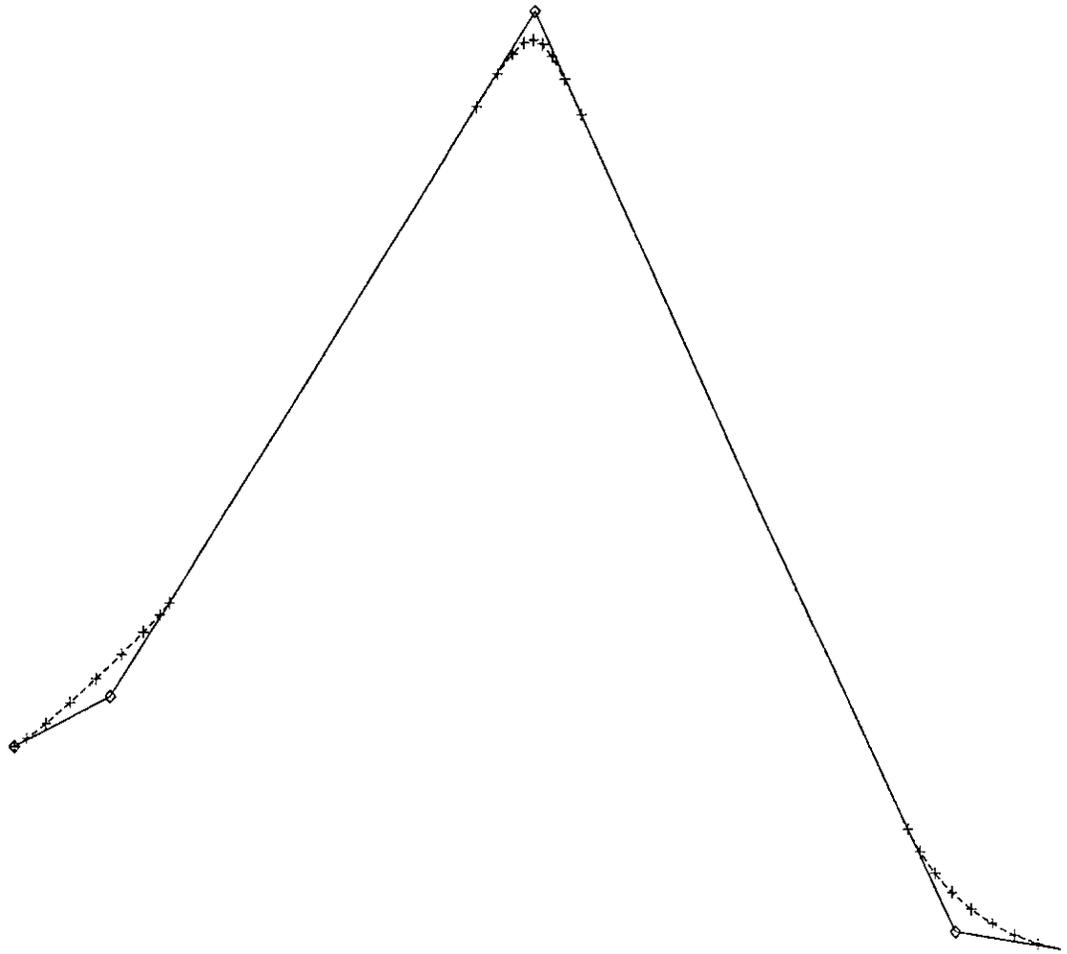


Figura 7-32: Ampliación del segmento delimitado por \* de la figura anterior.

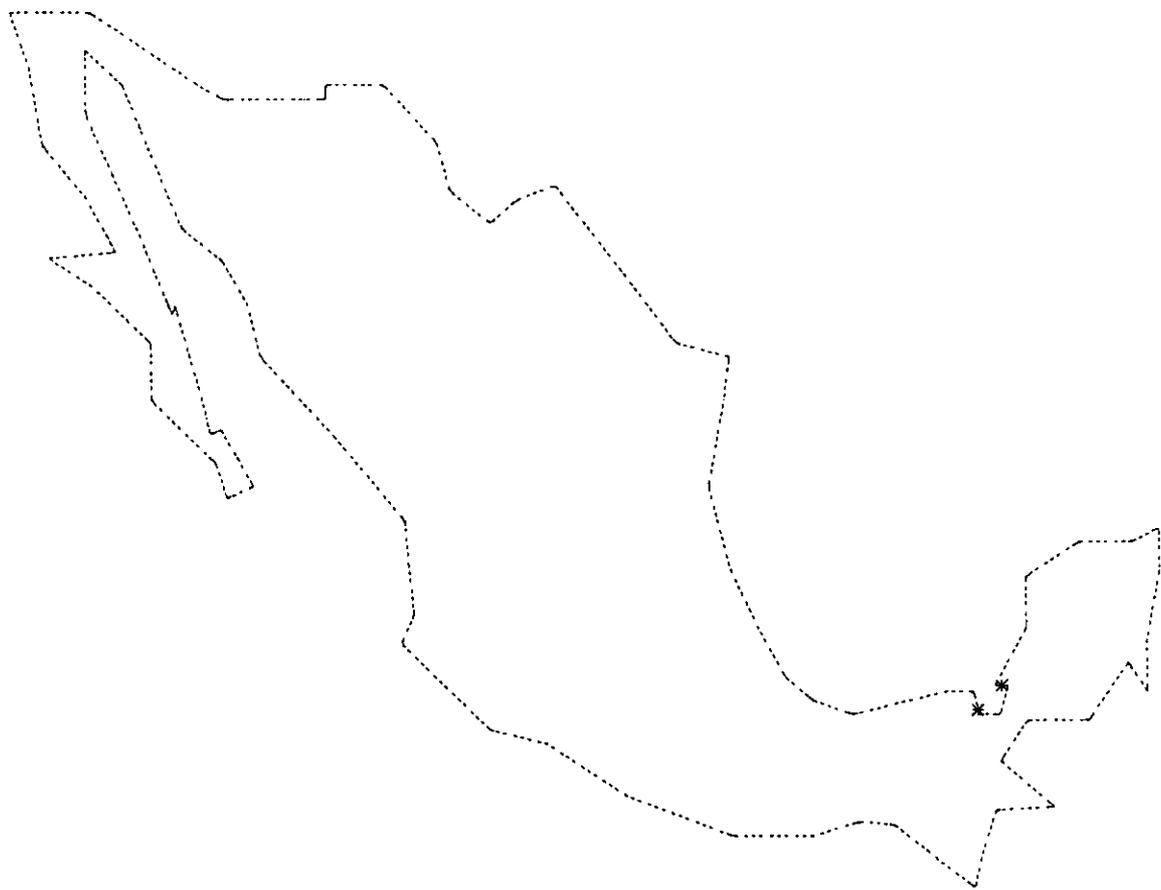


Figura 7-33:

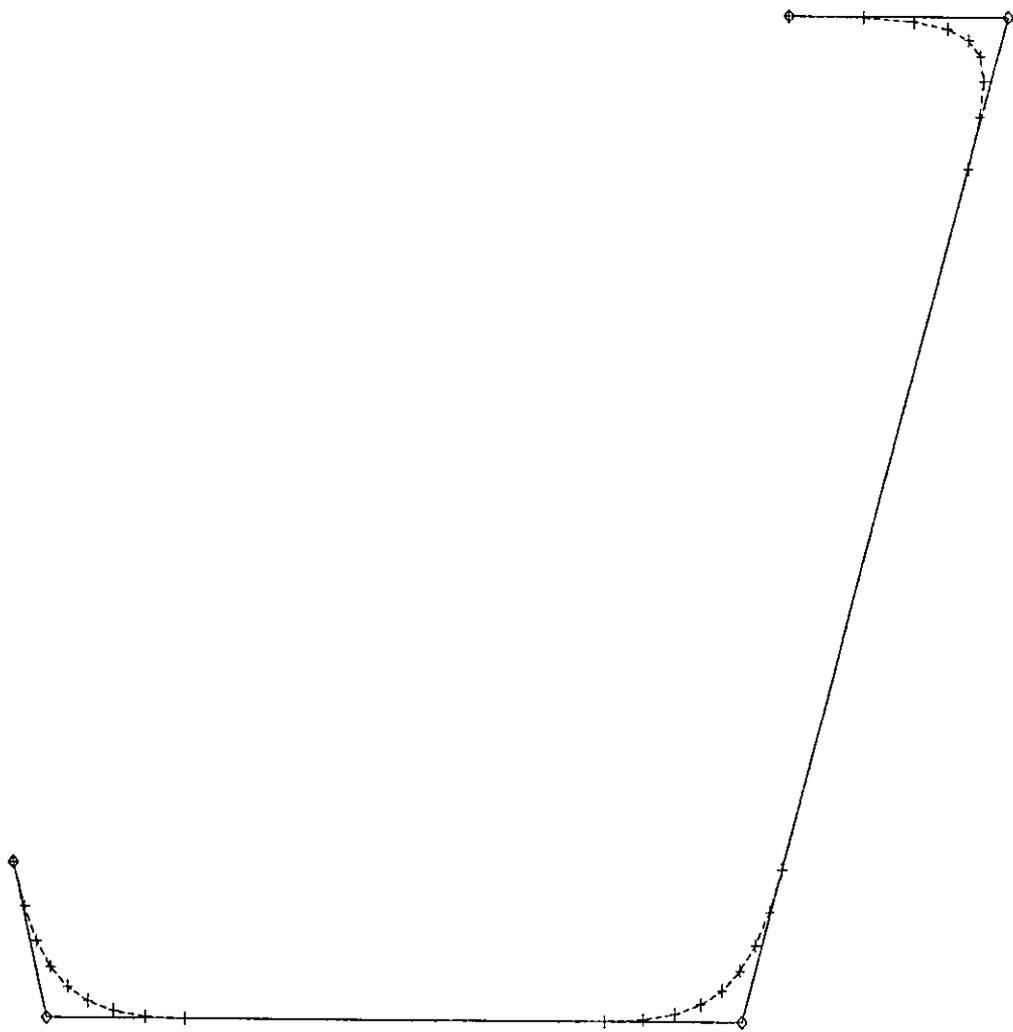


Figura 7-34:



Figura 7-35:

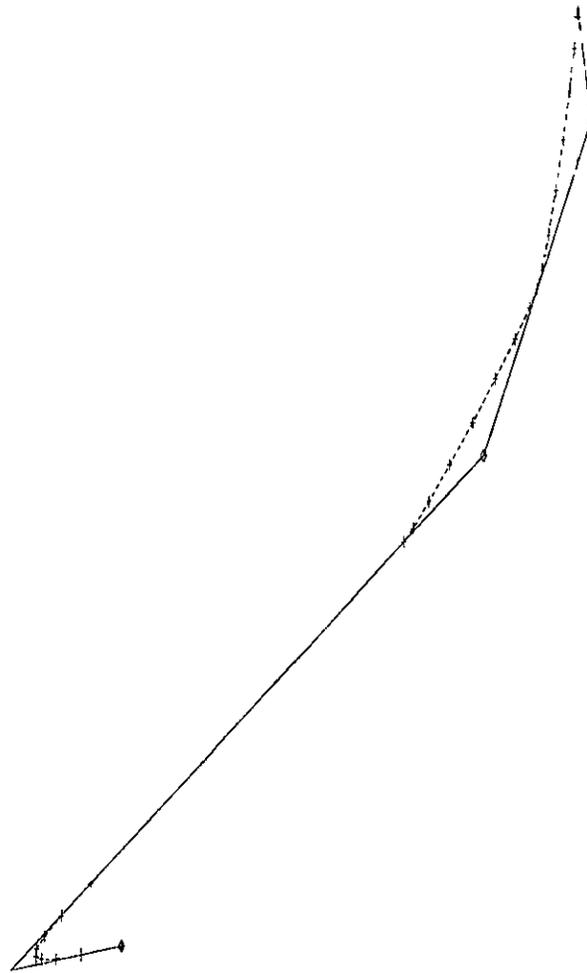


Figura 7-36:

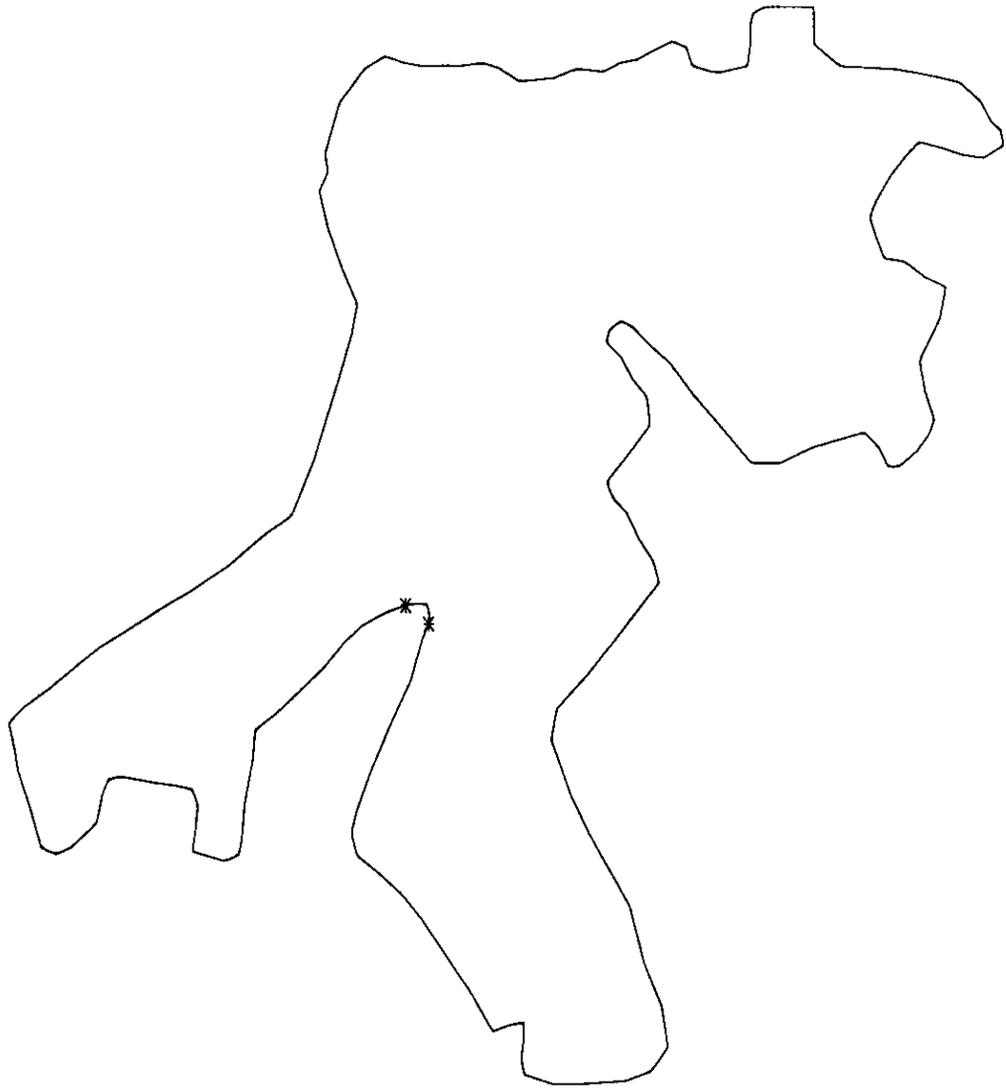


Figura 7-37:

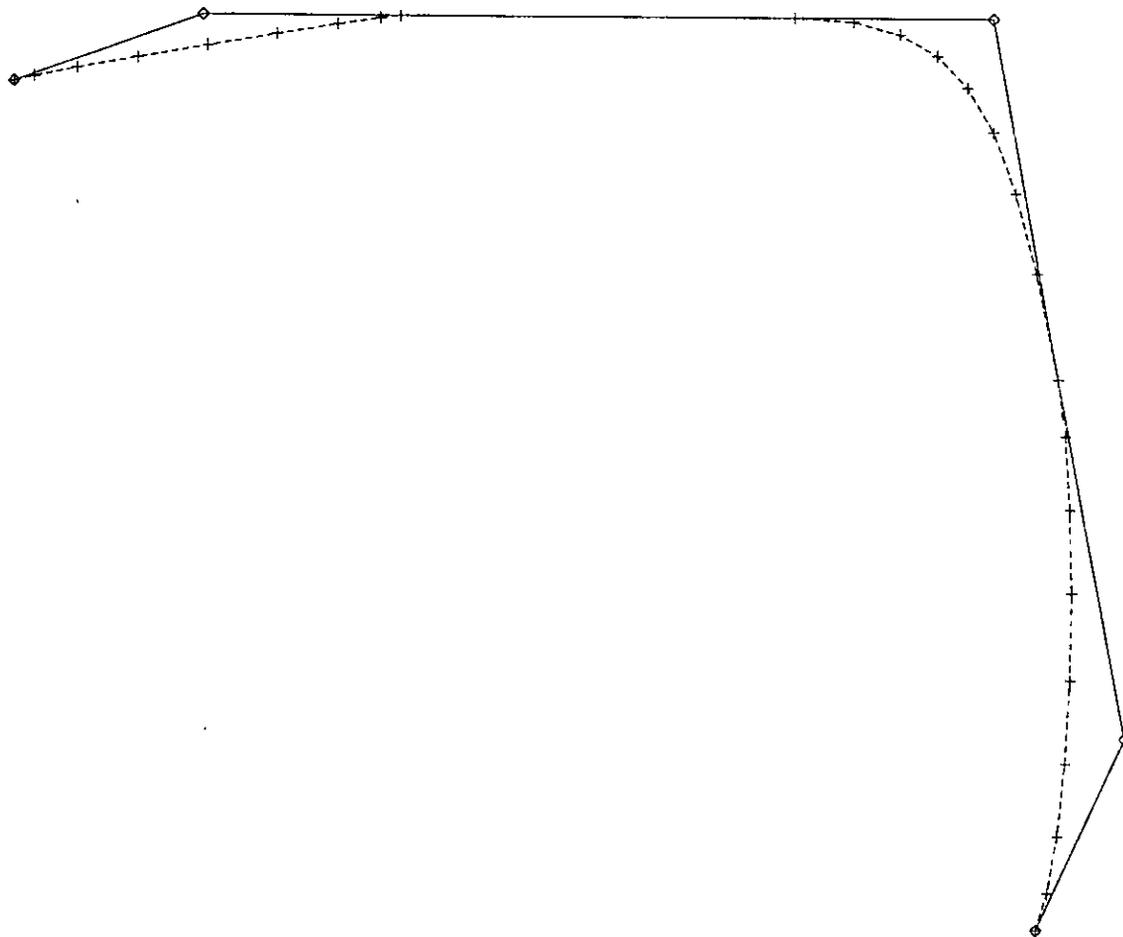


Figura 7-38:

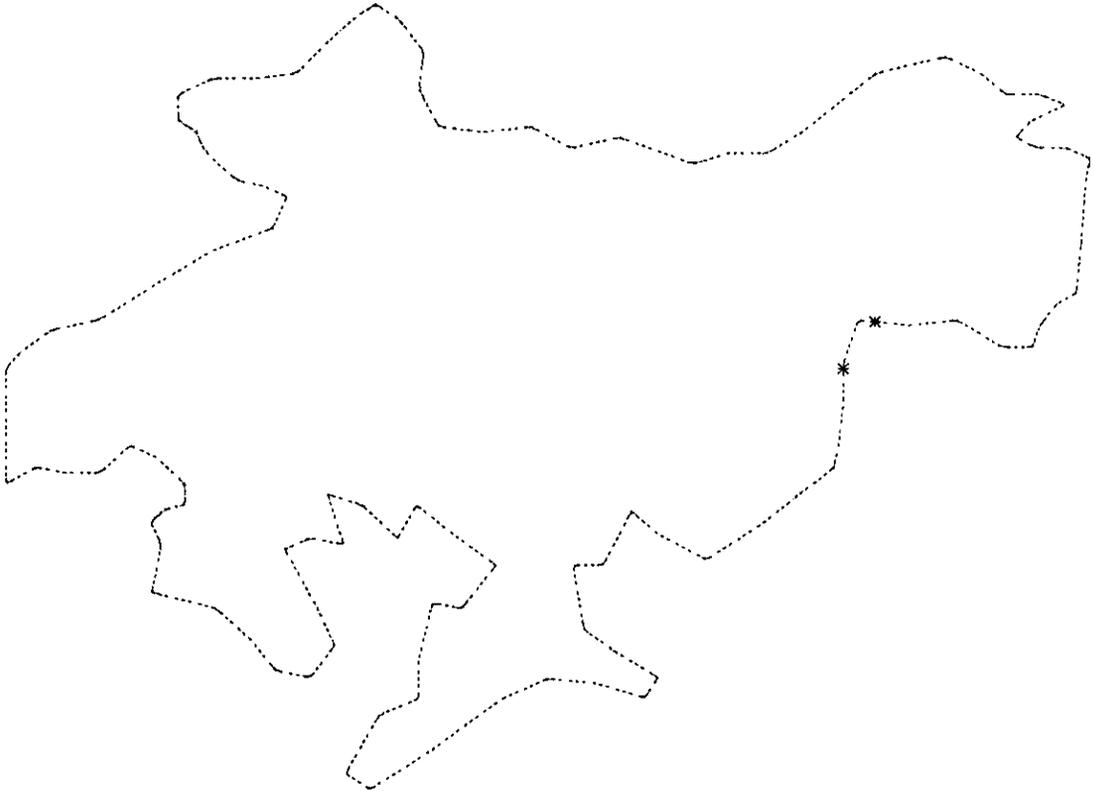


Figura 7-39:

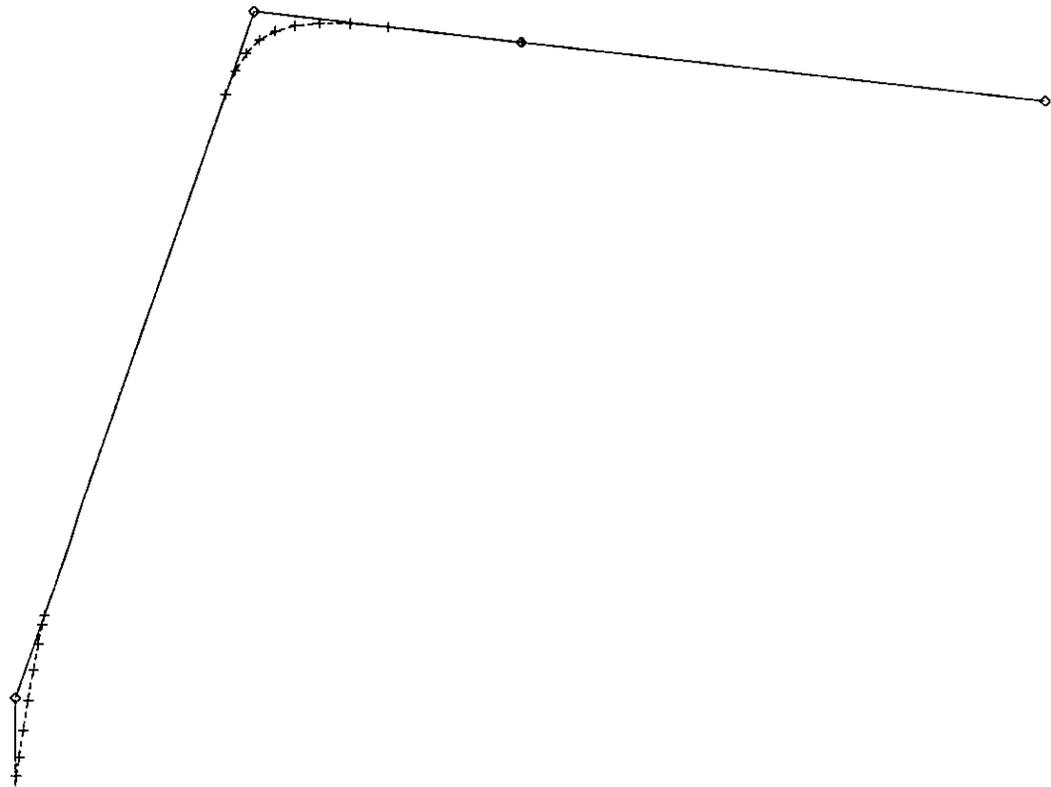


Figura 7-40:

Hasta el momento, hemos visto cómo reducir y suavizar los vértices de una región poligonal de manera independiente pero, cómo usamos ambos procedimientos en la práctica.

Recordemos que lo que motivo este trabajo fue la necesidad de obtener una aproximación, que suavizara un contorno poligonal y usar esta aproximación para generar una malla. Cuando el contorno es muy irregular, primero generamos una región suavizada, usando nueve puntos para aproximar cada arco cónico; como segundo paso, se aplica el proceso de eliminación de puntos hasta estabilizarlo, es decir, se itera hasta que el número de vértices sea constante. El tercer paso consiste en suavizar la región, usando siete puntos para aproximar cada segmento cónico; por último, se itera el segundo y tercer paso, hasta estabilizar el procedimiento o hasta obtener una región "aceptable".

A continuación se muestra un conjunto de regiones junto con las regiones que se obtuvieron al aplicar el procedimiento antes mencionado.

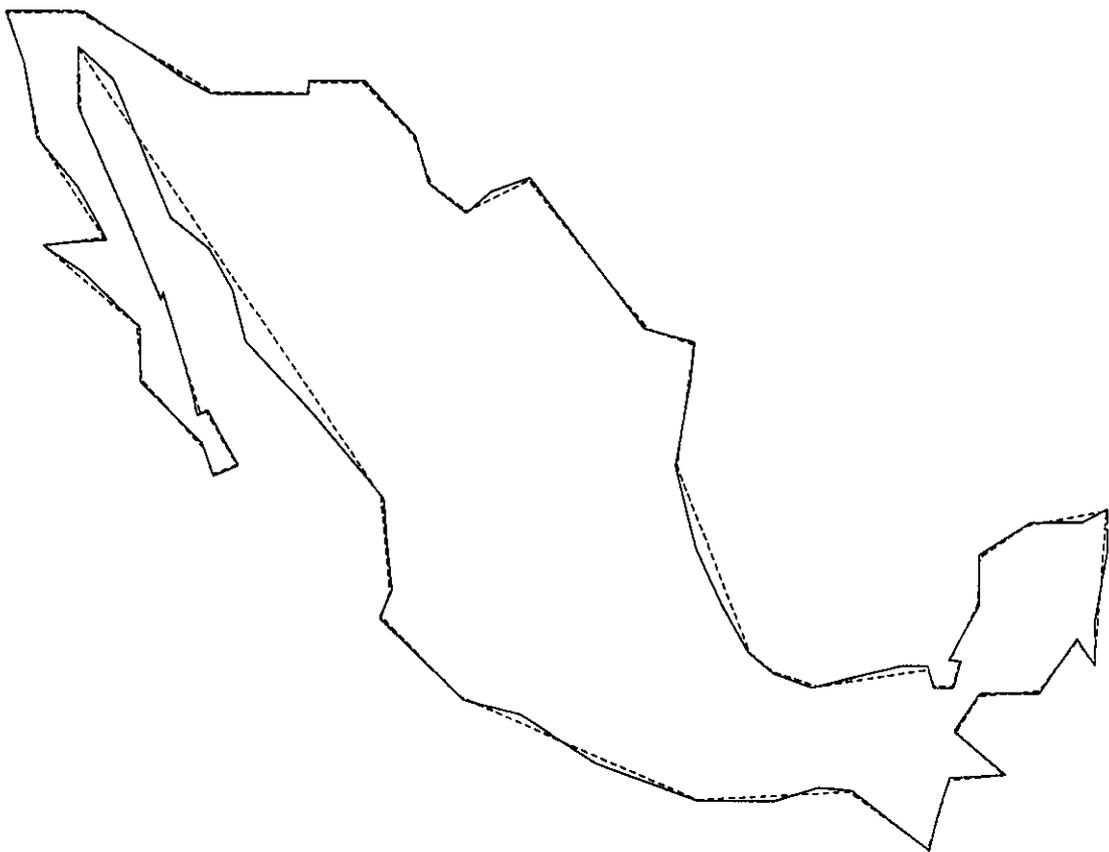


Figura 7-41: —Contorno original 101 puntos --Contorno generado 400 puntos.



Figura 7-42: — Contorno original 340 puntos --Contorno obtenido 1267 puntos.

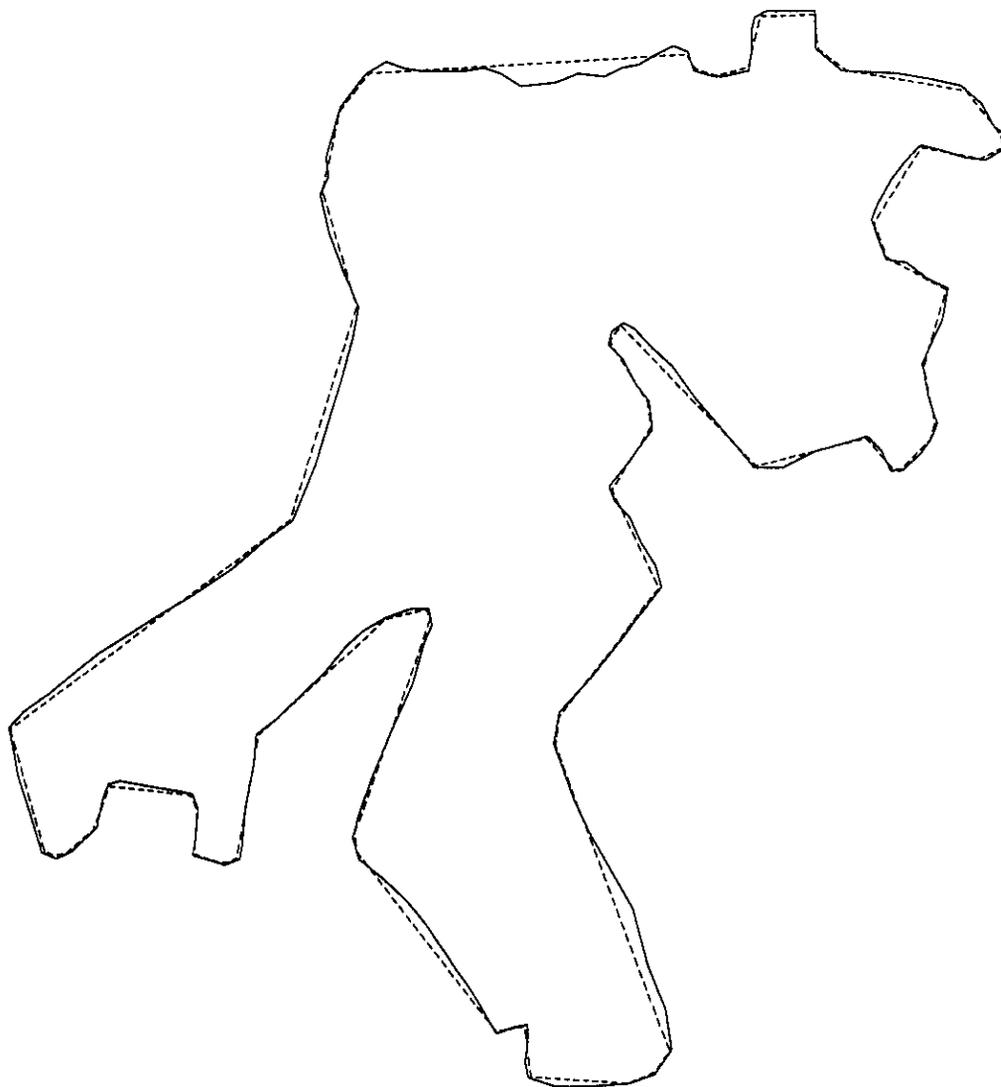


Figura 7-43: —Contorno original 170 puntos --Contorno obtenido 441 puntos.

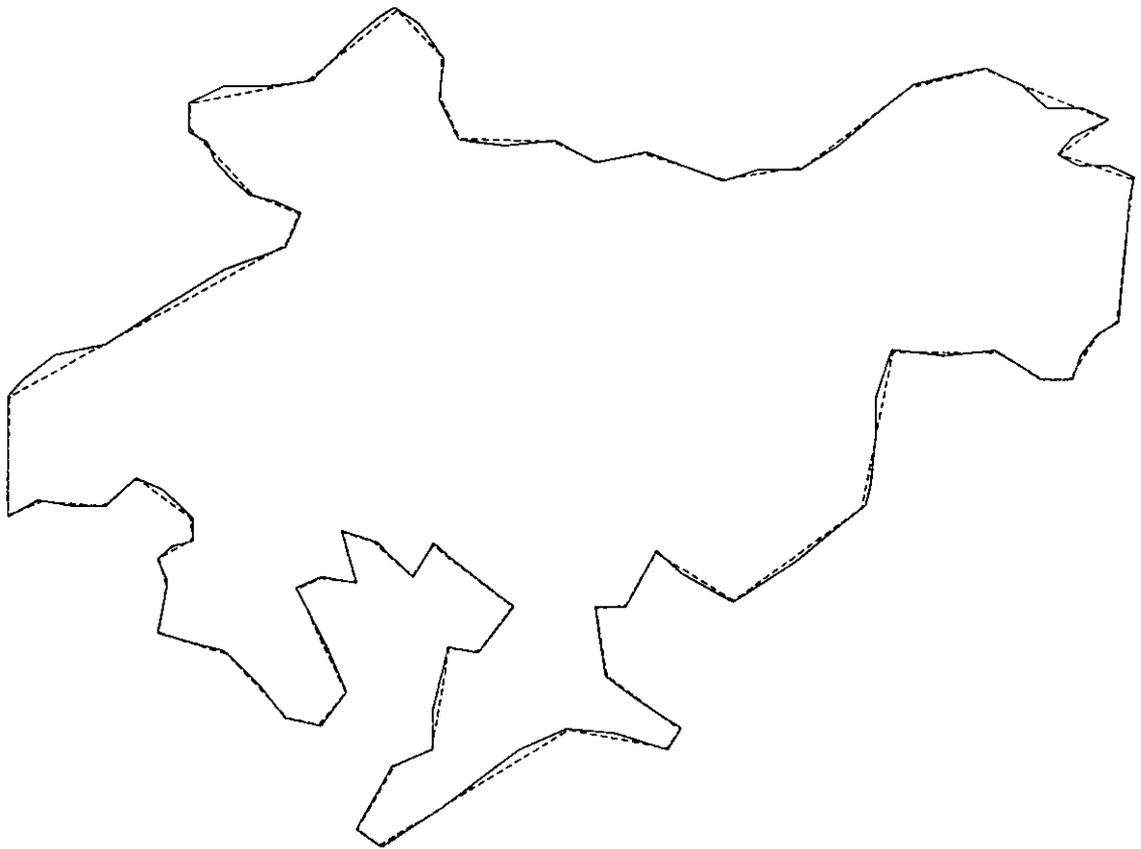


Figura 7-44: —Contorno original 147 --Contorno obtenido 488 puntos.



Figura 7-45: —Contorno original 157 puntos --Contorno obtenido 470 puntos.

## 7.4 Notas y Referencias

En el apéndice se incluye el pseudocódigo de los procedimientos Colineal y ReducePuntos, ambos se usan en la rutina que realiza la eliminación de puntos.

Se anexa un disco que contiene:

- El programa ejecutable *rys.exe*
- Algunas regiones de prueba como: *america.con*, *mexico.con*, *habana.con*, etc.

Si desea procesar otro contorno, edite un archivo que incluya en la primera línea los siguientes datos:

*n aut n<sub>1</sub> n<sub>2</sub> n<sub>3</sub> n<sub>4</sub>*

donde

*n* es el número de puntos del contorno, contando el primero dos veces.

*aut* variable que sólo puede tomar los valores de 0 o 1. El valor de 0 se usa para indicar que el contorno no está dividido en subfronteras, mientras que el 1 indicará que se especificarán las cuatro subfronteras. Si  $aut = 1$ , las subfronteras se indican a través del número de puntos que las definen.

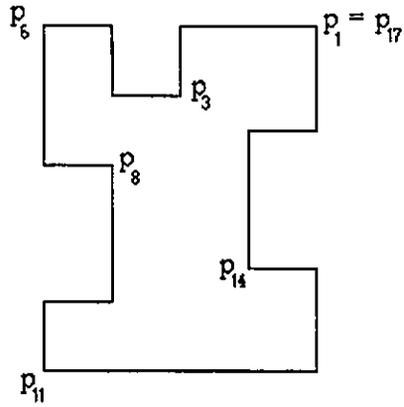
*n<sub>i</sub>* número de puntos que definen a la subfrontera *i*.

Cada una de las siguientes *n* líneas deben incluir las coordenadas de los puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $(x_1, y_1) = (x_n, y_n)$ .

Para que el programa pueda leer el archivo de datos, salve el archivo usando la extensión *con* y cópielo en el mismo directorio en donde está el programa ejecutable.

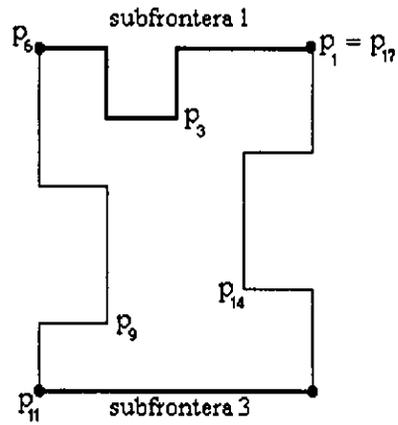
A continuación mostramos un ejemplo en el que se muestra el esquemas del archivo de datos para una región en la que no se han definido las subfronteras y, usando la misma región, ilustramos el caso en el que se definen las subfronteras.

Contorno para el que no se definieron las subfronteras



17	0	0	0	0	0
8	10				
4	10				
4	8				
2	8				
2	10				
0	10				
0	6				
2	6				
2	2				
0	2				
0	0				
8	0				
8	3				
6	3				
6	7				
8	7				
8	10				

Contorno con subfronteras definidas



17	1	6	6	2	6
8	10				
4	10				
4	8				
2	8				
2	10				
0	10				
0	6				
2	6				
2	2				
0	2				
0	0				
8	0				
8	3				
6	3				
6	7				
8	7				
8	10				

El procedimiento de eliminación de puntos fue presentado por *Pavlidis* en su artículo Pavlidis [14].

El algoritmo para suavizar una poligonal esta basado en la investigación de Hernández [10].

Pavlidis en [15] presenta cómo ajustar curvas usando splines cónicos.

# Apéndice

## PROCEDIMIENTO COLINEAL

### Parametros de entrada:

- x,y - Arreglos con las coordenadas del contorno
- indpib - índice correspondiente al punto inicial del bloque
- indpfb - índice correspondiente al punto final del bloque
- R0 - Cota superior para aceptar colinealidad con el criterio de longitud
- R1 - Cota inferior para rechazar colinealidad con el criterio de longitud
- E0 - Cota superior para aceptar colinealidad con el criterio de error máximo
- E1 - Cota inferior para rechazar colinealidad con el criterio de error máximo

### Variables locales:

- S - Variable para almacenar la longitud del segmento de ajuste.
- D - Variable para guardar la longitud del segmento de la curva.
- dm - distancia máxima de los puntos de la curva al segmento.
- CS - Número de veces que la curva atraviesa el segmento de ajuste.

### Salida:

- colineal - 1 - Se acepta el segmento de ajuste, 0 - Se rechaza la colinealidad.
- indem - índice correspondiente del punto más lejano al segmento de ajuste.

### Procedimiento:

1. Calcular la longitud del segmento de ajuste ( $S$ ).
2. Calcular la longitud de la curva definida por los puntos  $\{P_i\}_{i=indpib}^{indpfb}$  ( $D$ ).
3. Calcular el error máximo  $dm$ , asignando a  $indem$  el índice en el arreglo de coordenadas, correspondiente para el que se obtuvo este error.
4. Calcular el número de veces que la curva atraviesa al segmento ( $CS$ ).

Aplicar las pruebas de colinealidad

Criterio de Longitud

Si  $\frac{S}{D} \leq R0$

$colineal = 1$

Si  $\frac{S}{D} \geq R1$

$colineal = 0$

Si  $R0 < \frac{S}{D} < R1$

Criterio de Error máximo

Si  $dm \leq E0$

$colineal = 1$

Si  $dm \geq E1$

$colineal = 0$

Si  $E0 < dm < E1$

Criterio de Cruce

Si  $CS < 2$

$dm = \frac{dm}{2}$

Sino

$dm = \frac{dm}{4}$

Fin

Si  $dm \leq E0$

$colineal = 1$

Sino

$colineal = 0$

Fin

Fin (Criterio de Cruce)

Fin (Criterio de Error Máximo)

Fin(Criterio de Longitud)

FIN (Procedimiento)

ReducePuntos(x,y,n,k,EPS,E0,E1,R0,R1)

Variables locales:

indpib - índice correspondiente al punto inicial del bloque  
indpfb - índice correspondiente al punto final del bloque  
indpiba - índice correspondiente al punto inicial del bloque anterior.

Procedimiento:

indpib = indpiba = 1, indpfb = k

Mientras indpib  $\leq$  N-1

colineal = Colinealidad(x,y,indpib,indpfb,R0,R1,E0,E1,indem)

Si colineal = 1 Entonces

Si indpib = indpiba Entonces

Definir  $L_1$

Sino

Definir  $L_2$

Calcular el ángulo entre  $L_1$  y  $L_2$

Si el ángulo formado por  $L_1$  y  $L_2$  es "muy pequeño"

Eliminar el punto (x(indpib), y(indpib))

Agregar el punto (x(indpfb), y(indpfb))

Actualizar  $L_1$

Sino

indpiba = indpib

hacer  $L_1 = L_2$ .

Fin

indpib = indpfb

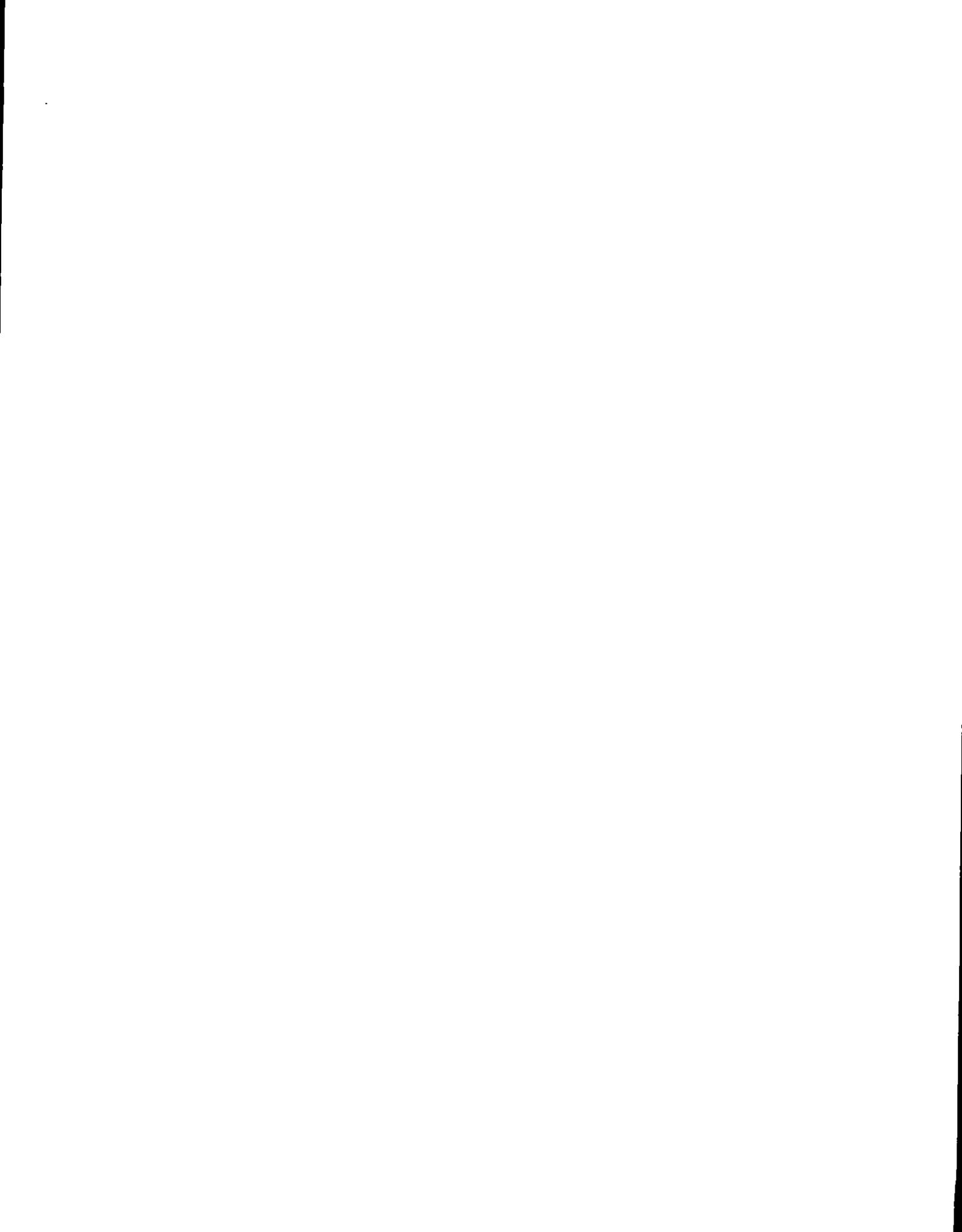
indpfb = indpfb + k

Fin

indpfb = indem

Fin (Del ciclo)

FIN(Procedimiento).



# Bibliografía

- [1] Barrera, P., Garcia, I., González, G. *Manual Operativo del Sistema UNAMALLA V. 2.0 para PC* U.N.A.M., México, D.F.. <http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla>.
- [2] Beach, R. [1991] *An Introduction To The Curves and Surfaces of Computer Aided Design* pp. 55-93.
- [3] Boehm, W., and Prautzsch H. [1994] *Geometric Concepts For Geometric Design*, Ak Peters.
- [4] Dirk, J. Struik [1953] *Lectures on Analytic And Projective Geometry*, Addison-Wesley, pp. 1 - 48.
- [5] Eves, H. [1985] *Estudio De Las Geometrías*, Vol. II, Uteha, pp 22 - 24.
- [6] Farin, G. [1995] *NURBS Curves and Surfaces: from Projective Geometry to Practical Use*, A K Press.
- [7] Farin, G. [1997] *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A Practical Guide*, Academic Press.
- [8] Faux, I. D. and Pratt, G. [1997] *Computational Geometry for Design And Manufacture*, Ellis Horwood Limited. pp. 138-141
- [9] Fulton, W. *Curvas Algebraicas, Introducción a la Geometría Algebraica* Reverte, pp. 74.
- [10] Hernández, M. V. [1994]. *Curvas NURBS: Una Aplicación al Suavizamiento de los Vértices de un Polígono*, Vínculos Matemáticos No. 209, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., México.
- [11] Hill F. S. Jr. [1990] *Computer Graphics*, Macmillan. pp. 115 - 121.
- [12] Lee [1987] *The Rational Bézier Representation for Conics*, (in *Geometric Modeling Algorithms And New trends*, Edited by Gerald Farin, SIAM ) pp. 3 - 19.
- [13] Maravall, C. D. [1953] *Geometría Analítica y Projectiva del Plano*, Dossat.
- [14] Pavlidis, T. [1982] *Curve Fitting As a Pattern Recognition Problem. Proc. 6th Conf. Pattern Recognition* (Munich, Oct. 1982) (in *IEEE Computer Society Press*, Silver Spring, Md., pp 853-859).

- [15] Pavlidis, T. [1983] *Curve Fitting with Conic Splines* (en ACM Transaction on Graphics, Vol. II, No. 1, January 1983, pp 1-31).
- [16] Rajagopal, C. T. and Srinivasaraghavan V. R. [1955] *An Introduction To Analytical Conics*, Vol. I, Cambridge University Press. Oxford University Press.
- [17] Rees, E. [1988] *Notes on Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [18] Robson, A. [1940] *An Introduction To Analytical Geometry*, Dossat.
- [19] Smith, L. B.[1969] *Fixed number of points and maximum inscribes area* (in The Computer Journal, Vol. XIV, No. 1) pp 81-86.)
- [20] Wang W., and Wang, C. Y. [1989] *Difference Method for Generation of Circular Arcs and Ellipses* (in Computer Aided Design, Vol XXI, No 1, January-February, 1989 ) pp. 33-37.
- [21] Weping, W., Barry, J. and Wang, C. Y. [1994] *On the Difference Method for Drawing Conic Arcs* (in CVGIP: Graphical Models and Image Processing , Vol LVI, No 1 , January, 1989 ) pp. 8-18.

# Fe de erratas

- En la séptima línea de la página 57, en lugar de  $l_{25}$  es  $l_{56}$ .
- En la página 169
  - el segundo término del numerador y del denominador de la ecuación (6.3.39) debe ir multiplicado por 2 así, la ecuación es:

$$p(t) = \frac{(1-\rho)b_0(1-t)^2 + \rho b_1 2t(1-t) + (1-\rho)b_2 t^2}{(1-\rho)(1-t)^2 + \rho 2t(1-t) + (1-\rho)t^2}$$

- la misma observación para la ecuación (6.3.40)

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + \frac{\rho}{(1-\rho)} b_1 2t(1-t) + b_2 t^2}{(1-t)^2 + \frac{\rho}{(1-\rho)} 2t(1-t) + t^2}$$

- En la ecuación que aparece en la segunda línea de la página 170, el término  $t(1-t)$  va multiplicado por 2

$$p(t) = \frac{b_0(1-t)^2 + r b_1 2t(1-t) + b_2 t^2}{(1-t)^2 + r 2t(1-t) + t^2}$$

- En la página 183, el polinomio de Bézier  $B_1^2$  de la ecuación (6.3.67) debe ser un polinomio en  $s$

$$p(s) = \frac{b_0 B_0^2(s) + \bar{w}_1 b_1 B_1^2(s) + b_2 B_2^2(s)}{B_0^2(s) + B_1^2(s) + B_2^2(s)}$$

- En la segunda línea de la página 228, la sección a la que se hace referencia es la 6.4.2.
- En las páginas 200, 203 y 247, el cociente que se maneja para el criterio de longitud es  $\frac{D}{S}$ .