

00384

4  
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**LA 3-ESFERA COMO CUBIERTA DE LA  
3-ESFERA RAMIFICADA SOBRE UN  
NUDO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE**

**DOCTOR EN CIENCIAS**

**MATEMATICAS**

**PRESENTA:**

**M. EN C. ENRIQUE RAMIREZ LOSADA**

**DIRECTOR DE TESIS:**

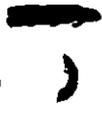
**DR. FRANCISCO GONZALEZ ACUÑA**

**MEXICO. D. F.**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

27/3/25

1999





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A mi familia**

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Permutaciones y grupos simétricos</b>	<b>5</b>
1.1 Definiciones y notación . . . . .	5
1.2 Proposiciones . . . . .	6
<b>2 Nudos toroidales y cubiertas ramificadas</b>	<b>9</b>
2.1 Variedades de Seifert . . . . .	9
2.2 Cubiertas de $S^3$ y nudos toroidales. . . . .	11
2.3 Resultados principales . . . . .	11
<b>3 Satélites monótonos de nudos toroidales.</b>	<b>16</b>
3.1 Definiciones. . . . .	16
3.2 Resultados principales . . . . .	17
3.3 Aplicaciones. . . . .	17
<b>4 Bibliografía</b>	<b>28</b>

# Introducción

Un enlace  $L$  en  $S^3$  es universal si toda 3-variedad, cerrada, orientable es una cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $L$ . En 1982 Thurston [T] probó la existencia de enlaces universales. Posteriormente, Hilden, Montesinos, Lozano [HLM] demostraron que los nudos o enlaces racionales que no son toroidales son universales. En [HLM2] los mismos autores dan ejemplos de nudos no simples universales. En ambos trabajos las demostraciones son constructivas: como punto de partida se intenta encontrar una cubierta de  $S^3$  que sea, a su vez,  $S^3$  y que ramifique sobre el nudo en cuestión de forma tal que una o varias de las componentes del levantamiento del nudo conformen un enlace universal conocido. Surge, entonces, en este contexto la siguiente pregunta:

Dado un nudo  $k$  en  $S^3$  ¿Es  $S^3$  cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $k$ ?

El presente trabajo da una respuesta afirmativa a esta cuestión para los nudos toroidales y a cierto tipo de satélites de nudos toroidales.

Hemos estructurado esta tesis de la siguiente forma:

En el capítulo uno estudiamos los grupos simétricos de  $pq$  símbolos y de  $mpq$  símbolos. Establecemos, primeramente, que en  $S_{pq}$  existen dos permutaciones regulares de orden  $p$  y  $q$ <sup>1</sup> cuyo producto tiene  $(p-1)(q-1)$  puntos fijos. A continuación generalizamos este resultado al grupo simétrico  $S_{mpq}$ ; aquí el producto de las permutaciones tiene  $m((p-1)(q-1)-1)+1$  puntos fijos y el grupo generado por ambas es transitivo.

---

<sup>1</sup>Una permutación en  $S_n$  es regular de orden  $n$  si es el producto de  $n$ -ciclos ajenos y número de órbitas  $\sigma/n$ .

Acompañamos cada proposición con un ejemplo.

En el capítulo dos, usando los resultados del capítulo uno, demostramos que dado un nudo toroidal  $\tau_{p,q}$  en  $S^3$  el espacio lente  $L(m, 1)$  es una cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $\tau_{p,q}$ . La demostración se apoya, también, en los resultados de [GR] donde se establece un algoritmo para calcular la homología de las cubiertas ramificadas de  $S^3$ , así como el género del espacio base de las variedades cubrientes.

Una vez que se demuestra que el espacio lente  $L(m, 1)$  es cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $\tau_{p,q}$  probamos que la 3-esfera cubre a  $S^3$  tomando la cubierta universal del espacio lente. Demostramos, también, que  $\tau_{p,q}$  tiene  $m((p-1)(q-1)-1)+2$  componentes en la preimagen y que sólo una de ellas tiene índice de ramificación mayor que uno.

En el capítulo tres se responde afirmativamente a la pregunta de arriba para los satélites monótonos de nudos toroidales. Definimos un satélite monótono de un nudo  $k$  en  $S^3$  como sigue:

Sea  $k$  un nudo no trivial en  $S^3$ , con vecindad tubular  $\eta$  y proyección  $\pi : \eta \rightarrow k$  y sea  $J(k)$  un nudo contenido en  $\eta$  tal que  $\pi|_{J(k)}$  es una cubierta de  $n$  hojas con  $n > 1$ . Decimos que  $J(k)$  es un satélite monótono de  $k$  con número de vueltas  $n$ .

La idea de la demostración es como sigue:

Dada  $f : S^3 \rightarrow (S^3, \tau_{p,q})$ , la cubierta que ramifica sobre  $\tau_{p,q}$  de  $m^2pq$ -hojas, tomamos una vecindad tubular  $T$  de  $\tau_{p,q}$  que contenga al satélite monótono  $J(\tau_{p,q})$ , con número de vueltas  $n$  un divisor de  $m$ , en su interior; sea  $\bar{T}$  la componente de  $f^{-1}(T)$  que contiene a la componente de la preimagen de  $f^{-1}(\tau_{p,q})$  cuyo índice de ramificación es diferente a uno. Entonces  $f|_{\bar{T}}$  es una cubierta de  $T$  ramificada sobre  $\tau_{p,q}$  que factoriza como  $\bar{T} \xrightarrow{p} \bar{T} \xrightarrow{u} T$  donde  $u$  es una cubierta no ramificada de orden  $m$  y  $p$  es una cubierta de  $\bar{T}$  ramificada sobre el ánima de  $\bar{T}$ .

Ahora bien,  $u^{-1}(J(\tau_{p,q}))$  es un enlace de  $n$  componentes cada uno de los cuales es isotópico al ánima de  $\bar{T}$ . y por lo tanto existe un homeomorfismo  $h : \bar{T} \rightarrow \bar{T}$  tal que  $h$  manda a una de estas componentes en el ánima y  $h|_{\partial\bar{T}} = id$ .

Definimos  $g : S^3 \rightarrow (S^3, J(\tau_{p,q}))$  como  $f$  en  $S^3 - \bar{T}$  y  $u \circ h^{-1} \circ p$  en  $\bar{T}$ .

Finalizamos el capítulo tres mostrando algunos ejemplos de satélites monótonos de nudos toroidales que son universales.

Antes de concluir, introducimos cierta notación que será recurrente a lo largo del texto:

Sea  $f : M \rightarrow N$  una cubierta ramificada;  $S_f$  denotará el conjunto de puntos  $x$  del dominio de  $f$  en los cuales  $f$  no es un homeomorfismo local; lo llamaremos conjunto singular de  $f$ .

El símbolo  $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$  denota al subgrupo generado por los elementos  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Si  $X$  es un conjunto (probablemente un grupo)  $|X|$  denotará la cardinalidad de  $X$ ; si  $X$  es un espacio topológico  $|X|$  será el número de componentes de  $X$  y si  $X$  es una permutación  $|X|$  denotará el número de órbitas de  $X$ . El grupo de permutaciones en  $\sigma$  símbolos será denotado por  $S_\sigma$ .  $m.c.d.\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  denota el máximo común divisor de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento y enorme deuda con cada uno de los sinodales y asesores por sus comentarios, correcciones y sugerencias. En especial mi gratitud a José María Montesinos quien me planteó el tema de investigación y me inició en este arduo camino, y a Francisco González Acuña por su asesoría e infinita paciencia a lo largo de estos años de trabajo.

# Capítulo 1

## Permutaciones y grupos simétricos

En este capítulo estudiaremos a los grupos simétricos de  $n$  elementos; estaremos interesados, particularmente, en los grupos simétricos  $S_{pq}$  y  $S_{mpq}$ . Probaremos que en  $S_{pq}$  existen dos permutaciones regulares  $\alpha$  y  $\beta$ , de orden  $p$  y  $q$  respectivamente, tales que la permutación  $\beta\alpha$  tiene  $(p-1)(q-1)$  puntos fijos. Esta proposición se generalizará al grupo  $S_{mpq}$ .

### 1.1 Definiciones y notación

Frecuentemente estaremos identificando  $S_\sigma$  con  $S_X$  donde  $S_X$  denota el conjunto de biyecciones del conjunto de cardinalidad  $\sigma$ .

La composición de dos permutaciones  $X \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X$  la escribimos como  $\alpha\beta$  y la imagen de  $x \in X$  bajo  $\alpha$  como  $(x)\alpha$ .

Sea  $G \leq S_X$ ; una órbita de  $G$  es un subconjunto de  $X$  de la forma  $\{(x)g : g \in G\}$  donde  $x \in X$ .

Sea  $\pi$  una permutación en  $S_X$ ; definimos  $\iota(\pi) = \{x : (x)\pi = x\}$  y  $m(\pi) = \{x : (x)\pi \neq x\}$

## 1.2 Proposiciones

**Proposición 1.1** Sean  $p, q$  enteros tales que  $1 \leq p < q$  y m.c.d.  $\{p, q\} = 1$ . Entonces, existen dos permutaciones regulares  $\alpha, \beta$  en  $S_{pq}$ , de órdenes  $p, q$ , tales que:

- i)  $|i(\beta\alpha)| \geq (p-1)(q-1)$
- ii)  $m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1}) \neq \emptyset$ .

**Demostración** Usaremos inducción en  $p$ .

Si  $p = 1$  entonces  $\alpha$  es la identidad; por lo tanto  $|i(\beta\alpha)| \geq 0$  y  $m(\beta\alpha) = m(\beta^{-1}\alpha^{-1}) \neq \emptyset$ .

Supongamos  $p > 1$ . Escribimos  $q = np + r$  con  $0 < r < p$ .

Identificamos  $S_{pq}$  con  $S_{X \cup Y}$  donde  $X = \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, np\}$ ,  $|Y| = rp$  y  $X \cap Y = \emptyset$ .

Al elemento  $(i, j)$  de  $X$  lo denotamos por  $x_{ij}$ .

Sean  $\beta' = \prod_{i=1}^p (x_{i1}, \dots, x_{inp})$  y  $\alpha' = \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^n (x_{ijp}, x_{ijp-1}, \dots, x_{ijp-p+1})$

Por hipótesis de inducción existen  $\alpha'', \beta''$  en  $S_Y$ , permutaciones regulares de órdenes  $p$  y  $r$  tales que  $|i(\beta''\alpha'')| \geq (r-1)(p-1)$  y  $m(\beta''\alpha'') \cap m(\beta''^{-1}\alpha''^{-1}) \neq \emptyset$

Podemos escribir  $\beta'' = \prod_{i=1}^p (y_{i1}, \dots, y_{ir})$ , donde  $Y = \{y_{11}, \dots, y_{1r}, y_{21}, \dots, y_{2r}, \dots, y_{p1}, \dots, y_{pr}\}$  y  $y_{i1}$  no es punto fijo de  $\beta''\alpha''$ , pues ningún ciclo de  $\beta''$  está formado por puntos fijos de  $\beta''\alpha''$ , ya que  $\langle \beta'', \beta''\alpha'' \rangle$  actúa transitivamente en  $Y$ .

Sea  $\delta = \prod_{i=1}^p (x_{i1} y_{i1})$

Definimos  $\alpha = \alpha''\alpha'$  y  $\beta = \beta'\delta\beta''$ . Obsérvese que  $\alpha$  y  $\beta$  son permutaciones regulares de órdenes  $p$  y  $q$ .

Puede verse sin dificultad que  $x_{ij}$  es punto fijo de  $\beta\alpha$  si  $p$  no divide a  $j$  y  $y_{ij}$  es punto fijo de  $\beta\alpha$  si  $j > 1$  así que:

$$|i(\beta\alpha)| \geq pn(p-1) + (r-1)(p-1) = (p-1)(pn+r-1) = (p-1)(q-1).$$

Demostremos, ahora, que  $m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1}) \neq \emptyset$

Nótese que para  $r = 1$ :

$$y_{11} \in m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1}), \text{ pues } (y_{11})\beta^{-1}\alpha^{-1} = (x_{1np})\alpha^{-1} = x_{1np-p+1} \text{ y } y_{11} \notin i(\beta\alpha).$$

Sea  $r > 1$  y  $y_{i'j'} \in m(\beta''\alpha'') \cap m(\beta''^{-1}\alpha''^{-1})$ :

Si  $j' = 2$  entonces  $y_{i'2} \in m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1})$ , pues  $(y_{i'2})\beta^{-1}\alpha^{-1} = (x_{i'np})\alpha^{-1} = x_{i'np-p+1}$ ;  
 si  $j' \neq 2$ ,  $y_{i'j'} \in m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1})$ , ya que  $(y_{i'j'})\beta^{-1}\alpha^{-1} = (y_{i'j'})\beta''^{-1}\alpha''^{-1} \neq y_{i'j'}$  ■

*Observación.* Nótese que  $\langle \alpha, \beta \rangle$  es transitivo pues una órbita de  $\langle \alpha, \beta \rangle$  en  $X = \{1, \dots, pq\}$  tiene cardinalidad  $qp$  ya que las órbitas de  $\alpha$  y  $\beta$  están contenidas en la órbita de  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

La propiedad técnica ii) es necesaria para la proposición 1.2.

*Ejemplo 1.1* Sea  $q = 5$  y  $p = 3$

$$5 = 3(1) + 2; 3 = 2(1) + 1$$

$$\beta' = (1, 2, 3)(6, 7, 8)(11, 12, 13)$$

$$\beta'' = (5, 4)(10, 9)(15, 14)$$

$$\delta = (1, 5)(6, 10)(11, 15)$$

$$\beta = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)$$

$$\alpha' = (3, 2, 1)(8, 7, 6)(13, 12, 11)$$

$$\alpha'' = (5, 4, 14)(10, 9, 15)$$

$$\alpha = (3, 2, 1)(8, 7, 6)(13, 12, 11)(5, 4, 14)(10, 9, 15)$$

$$i(\beta\alpha) = \{1, 2, 6, 7, 11, 12, 4, 9\}$$

$$m(\beta\alpha) \cap m(\beta^{-1}\alpha^{-1}) = \{14, 15\}$$

**Proposición 1.2** Sean  $p$  y  $q$  enteros tales que  $1 < p < q$  y  $m.c.d.\{p, q\} = 1$ , sea  $m$  entero positivo. Entonces, existen  $\alpha$  y  $\beta$ , permutaciones regulares de orden  $p$  y  $q$  respectivamente, en  $S_{mpq}$  tales que:

1)  $\langle \beta, \alpha \rangle$  es transitivo

$$2) |i(\beta\alpha)| = m((p-1)(q-1) - 1) + 1$$

**Demostración** Pensamos  $S_{mpq}$  como  $S_{\mathbb{X}}$ ,  $\mathbb{X} = \bigsqcup_{k=1}^m X^k$ ,  $|X^k| = pq$ .

Por la proposición 1.1, existen  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in S_{\mathbb{X}}$  regulares de órdenes  $p$  y  $q$  tales que las órbitas de  $\langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} \rangle$  son  $X^1, \dots, X^k$ ,  $|i(\hat{\beta}|X^k\hat{\alpha}|X^k)| > 0$  y  $m(\hat{\beta}|X^k\hat{\alpha}|X^k) \cap m(\hat{\beta}^{-1}|X^k\hat{\alpha}^{-1}|X^k) \neq \emptyset$ .

Escribimos  $X^k = \{x_{ij}^k : 1 \leq i < p, 1 \leq j \leq q\}$  y  $\widehat{\beta} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq m}} (x_{i1}^k, \dots, x_{iq}^k)$

donde  $(x_{11}^k)\widehat{\beta}\widehat{\alpha} = (x_{11}^k)$  si  $1 \leq k < m$  y  $(x_{11}^m) \in m(\widehat{\beta}\widehat{\alpha} | X^m) \cap m(\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\alpha}^{-1} | X^m) \neq \emptyset$ .

Definimos  $\beta = \prod_{1 \leq k \leq m} (x_{11}^k, x_{12}^{k+1}, \dots, x_{1q}^{k+1}) \prod_{\substack{1 < i \leq p \\ 1 \leq k \leq m}} (x_{i1}^k, \dots, x_{iq}^k)$ , donde  $k+1$  se interpreta como

1 si  $k = m$ . Definimos  $\alpha = \widehat{\alpha}$ .

Nótese que si  $(z)\widehat{\beta}\widehat{\alpha} = (z)$  entonces  $(z)\beta\alpha = (z)$  a menos que  $z = x_{11}^k$  con  $1 \leq k < m$ . Además:  $|i(\beta\alpha | X^m)| \geq (p-1)(q-1)$ , ya que  $i(\beta\alpha | X^m) = i(\widehat{\beta}\widehat{\alpha} | X^m)$  pues  $(x_{ij}^m)\beta\alpha = (x_{ij}^m)\widehat{\beta}\widehat{\alpha}$  si  $i \geq 1$  y  $j \notin \{1, r\}$ ;  $x_{11}^m \in m(\beta\alpha | X^m) \cap m(\widehat{\beta}\widehat{\alpha} | X^m)$  dado que  $(x_{11}^m)\beta\alpha \neq (x_{11}^m) \neq (x_{11}^m)\widehat{\beta}\widehat{\alpha}$ ;  $x_{1r}^m \in m(\beta\alpha | X^m) \cap m(\widehat{\beta}\widehat{\alpha} | X^m)$  en virtud de que  $(x_{1r}^m)\beta\alpha \neq (x_{1r}^m) \neq (x_{1r}^m)\widehat{\beta}\widehat{\alpha} = (x_{11}^m)\widehat{\alpha}$  ya que de lo contrario  $(x_{11}^m)\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\alpha}^{-1} = (x_{1r}^m)\widehat{\alpha}^{-1} = x_{11}^m$  y por lo tanto  $x_{11}^m \in i(\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\alpha}^{-1})$ , pero  $x_{11}^m \in m(\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\alpha}^{-1})$ .

Podemos concluir que:  $|i(\beta\alpha)| \geq m(p-1)(q-1) - (m-1) = m((p-1)(q-1) - 1) + 1$ .

Para demostrar que  $(\alpha, \beta)$  es transitivo obsérvese que:

Si  $j > 1$  entonces  $(x_{1j}^k)\beta^s = (x_{12}^k)$  para algún entero  $s$ ; también  $(x_{12}^k)\alpha = (x_{12}^k)\widehat{\alpha}\widehat{\beta} = (x_{11}^k)$  si  $1 \leq k < m$ ; además  $(x_{11}^k)\beta = (x_{12}^{k+1})$ . Por lo tanto todas las  $x_{1j}^k$  pertenecen a la misma órbita de  $(\alpha, \beta)$ .

Ahora bien, como  $\langle \widehat{\beta} | X^k, \widehat{\alpha} | X^k \rangle$  es transitivo y  $\beta = \widehat{\beta}$  en  $\{x_{2j}^k : 1 \leq j \leq np\}$  se tiene que: si  $1 \leq i \leq p$  y  $1 \leq j \leq q$ , entonces alguna permutación de  $(\alpha, \beta)$  manda a  $x_{ij}^k$  en  $x_{1j}^k$ .

Por lo tanto  $(\alpha, \beta)$  es transitivo en  $S_{mpq}$ . ■

*Ejemplo 1.2* Sean  $q = 5, p = 3, m = 3$

$$5 = 3(1) + 2; 3 = 2(1) + 1$$

$$\widehat{\beta} = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)$$

$$(16, 17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24, 25)(26, 27, 28, 29, 30)$$

$$(31, 32, 33, 34, 35) (36, 37, 38, 39, 40)(41, 42, 43, 44, 45)$$

$$\beta = (1, 17, 18, 19, 20)(16, 45, 41, 42, 43)(44, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)$$

$$(21, 22, 23, 24, 25)(26, 27, 28, 29, 30)(36, 37, 38, 39, 40)(31, 32, 33, 34, 35)$$

$$\alpha = (3, 2, 1)(5, 4, 14)(8, 7, 6)(10, 9, 15)(13, 12, 11)(18, 17, 16)(20, 19, 29)(23, 22, 21)$$

$$(25, 24, 30)(28, 27, 26)(33, 32, 31)(35, 34, 44)(38, 37, 36)(40, 39, 45)(43, 42, 41)$$

$$i(\beta\alpha) = \{2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 31, 32, 34, 36, 37, 39, 41, 42\}$$

## Capítulo 2

# Nudos toroidales y cubiertas ramificadas

En este capítulo estableceremos y demostraremos la siguiente propiedad de los nudos toroidales:

Dado un nudo toroidal  $\tau_{p,q}$ ; existe  $f : S^3 \rightarrow S^3$ , cubierta ramificada, cuyo conjunto de ramificación es  $\tau_{p,q}$ .

A lo largo de esta sección estaremos considerando los nudos toroidales como fibras regulares de la variedad de Seifert  $(S^3, \tau_{p,q}) = (0, 0; r/p, s/q)$ ,  $r$  y  $s$  tales que  $-r/p - s/q = \pm 1/pq$

### 2.1 Variedades de Seifert

Una variedad, orientable, conexa y cerrada es una variedad de Seifert si es unión de fibras, homeomorfas a  $S^1$ , tal que cada punto de la variedad pertenece exactamente a una fibra, y cada fibra tiene una vecindad tubular homeomorfa a un toro sólido hecho de fibras que no son meridianos. Tales variedades se describen, explícitamente, de la siguiente forma:

Sea  $F$  una superficie compacta, orientable, de género  $g$ , con  $n+k$  componentes en la frontera, orientadas, denotadas por  $z_1, z_2, \dots, z_n, t_1, t_2, \dots, t_k$ . Sea  $D^2 = \{z : z \in \mathbb{C}, 0 \leq |z| \leq 1\}$ ,  $S^1 = \partial D^2$ .

Orientamos  $D^2$  y  $S^1$  con la orientación inducida por el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

Sean  $S^1 \times D_1^2, S^1 \times D_2^2, \dots, S^1 \times D_n^2$   $n$ -copias de  $S^1 \times D^2$  y  $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$ , homeomorfismos de  $\partial(S^1 \times D_i^2)$  en  $S^1 \times z_i$ , tales que:

- i) Para toda  $x \in S^1$  y para toda  $y \in z_i$ ,  $\varphi_i(\{x\} \times \partial D_i^2)$  intersecciona transversalmente a  $S^1 \times \{y\}$ .
- ii)  $\varphi_i(\{1\} \times \partial D_i^2) = \beta_i [S^1] + \alpha_i [z_i] \in H_1(S^1 \times z_i), 1 \leq i \leq n, \alpha_i > 0, m.c.d.\{\alpha_i, \beta_i\} = 1$ .

Entonces, si tomamos la unión disjunta de  $S^1 \times D_1^2, S^1 \times D_2^2, \dots, S^1 \times D_n^2$  y  $S^1 \times F$  e identificamos  $x \in \partial(S^1 \times D_i^2)$  con  $\varphi_i(x) \in S^1 \times \partial F, 1 \leq i \leq n$ , obtendremos la variedad de Seifert que denotamos por  $(g, k; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$ . La orientación en  $(g, k; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$  es la inducida por  $S^1 \times F$ .

La variedad de Seifert  $(g, k; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$  tiene la siguiente descomposición en fibras homeomorfas a  $S^1$ :

(a) Las circunferencias  $s = S^1 \times \{p\}$  de  $S^1 \times F$ .

(b) Las circunferencias  $\{\psi\}_{r,i}(s)$ , donde  $s \subset \partial(S^1 \times D_i^2)$  es una fibra como en (a),  $1 \leq i \leq n$ , y  $\{\psi\}_{r,i} : \partial(S^1 \times D_i^2) \rightarrow S^1 \times D_i^2$ , tal que  $\{\psi\}_{r,i}(z', z'') = (z', rz''), 0 < r < 1$ .

(c) Las ánimas  $S^1 \times \{0\}_i$  de los toros sólidos  $S^1 \times D_i^2, 1 \leq i \leq n$ .

Si  $\alpha_i > 1$  entonces  $S^1 \times \{0\}_i$  se denomina fibra excepcional de orden  $\alpha_i$ ; todas las demás fibras son fibras regulares.

Si  $k = 0$ ;  $(g, 0; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$  es cerrada. En este caso definimos su *número de Euler* como:

$$e(g, 0; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n) = -\sum_{i=1}^n \beta_i/\alpha_i$$

El espacio base  $S$  de la variedad de Seifert es el que se obtiene al identificar, en  $(g, 0; \beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$ , cada fibra con un punto;  $S$  tiene la estructura de un orbifold compacto de dimensión dos ( $[Mo]$ ), donde las fibras de orden  $\alpha_i$  corresponden a puntos cónicos con ángulo  $2\pi/\alpha_i$ .

$S$  puede ser identificado con la superficie que se obtiene de  $F$ , rellenando las componentes de la frontera,  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , con discos. Denotamos el orbifold  $S$  por  $\{g; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , donde  $\alpha_i \geq 1$  y por  $\pi_1^o(S)$  el grupo fundamental de orbifold.

## 2.2 Cubiertas de $S^3$ y nudos toroidales.

Sea  $(S^3, \tau_{p,q})$  la variedad de Seifert  $(0, 0; \tau/p, s/q)$ , donde  $r, s$  son tales que  $-r/p - s/q = \pm \frac{1}{pq}$ , y sea  $h$  una fibra regular en  $(S^3, \tau_{p,q})$ ,  $h$  es el nudo toroidal  $\tau_{p,q}$  ([ST]). Sea  $S = \{0; p, q\}$  el espacio base de  $(S^3, \tau_{p,q})$ .

Sea  $\rho : (S^3, \tau_{p,q}) \rightarrow S$ , la proyección natural de  $(S^3, \tau_{p,q})$  en  $S$ ; sea  $y = \rho(\tau_{p,q}) \subseteq S$ . La restricción  $\rho_0 : (S^3 - \tau_{p,q}) \rightarrow (S - y)$  induce un epimorfismo  $\rho_{0*}$  de  $\pi_1(S^3 - \tau_{p,q})$  en el grupo  $\pi_1^o(S - y)$ . El kernel de  $\rho_{0*}$  es el grupo cíclico generado por  $h$ .

Sea  $\omega$  una representación transitiva de  $\pi_1^o(S - y)$  en  $S_\sigma$ , el grupo simétrico del conjunto  $\{1, \dots, \sigma\}$ . Sea  $\phi : \bar{S} \rightarrow S$  la completación ([F]) de la cubierta asociada a  $\omega$  y  $\bar{y} = \phi^{-1}(y)$ . Análogamente, consideremos  $f : \bar{M} \rightarrow (S^3 - \tau_{p,q})$  la completación de la cubierta asociada a la representación  $\bar{\omega} = \omega \rho_{0*}$  de  $\pi_1(S^3 - \tau_{p,q})$  en  $S_\sigma$ , y sea  $\bar{L} = f^{-1}(\tau_{p,q})$ . Por el Teorema de Extensión de Fox ([F, sec.3]), existe una única función  $\bar{p} : \bar{M} \rightarrow \bar{S}$  tal que  $\phi \bar{p} = \rho f$ . El espacio  $\bar{M}$  es una variedad de Seifert cuyas fibras son las componentes de la preimagen de las fibras de  $(S^3, \tau_{p,q})$ . Entonces,  $\bar{S}$  puede ser identificado con el espacio base de  $\bar{M}$  y  $\bar{p}$  es la proyección natural. Si  $h$  es una fibra regular en  $(S^3, \tau_{p,q})$ , entonces  $\bar{\omega}([h]) = id$  y  $f$  es un homeomorfismo en cada componente de  $f^{-1}(h)$ , por lo tanto, las componentes de  $\bar{L}$  son fibras regulares.

## 2.3 Resultados principales

En el siguiente teorema consideraremos al espacio lente  $L(m, 1)$  como el espacio de Seifert  $(0, 0; \pm m/1)$ .  $S_{f_1}$  denota al conjunto singular de  $f_1$ .

**Teorema 2.1** *Sea  $\tau_{p,q}$  un nudo toroidal en  $S^3$ . Entonces, para toda  $m \in \mathbb{N}$ , existe una cubierta  $f_1 : L(m, 1) \rightarrow S^3$  ramificada sobre  $\tau_{p,q}$ , de  $mpq$  hojas. tal que  $S_{f_1}$  es una fibra y  $f_1|_{S_{f_1}} : S_{f_1} \rightarrow \tau_{p,q}$  es un homeomorfismo.*

**Demostración**  $\pi_1(S^3 - \tau_{p,q})$  tiene la siguiente presentación  $\|a_1, a_2 : a_1^p = a_2^q\|$ . Si  $h$  es una fibra regular en  $(S^3, \tau_{p,q})$  y  $\mu$  un meridiano de  $\partial(\eta(\tau_{p,q}))$  (la frontera de una vecindad tubular de  $\tau_{p,q}$  en  $S^3$ ), entonces  $[h] = a_1^p = a_2^q$  y  $[\mu] = a_2^{-s} a_1^{-r}$ .

$\pi_1^o(S - y) = \|\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 : z_1^p = z_2^q = 1\|$  ([GR, Teorema 2.4]).

Definimos  $\rho_{0*} : \pi_1(S^3 - \tau_{p,q}) \rightarrow \pi_1^o(S - y)$  de la siguiente manera:

$$\rho_{0*}(a_1) = z_1^q, \rho_{0*}(a_2) = z_2^p, \rho_{0*}(\mu) = z_2 z_1$$

Sea  $\omega_1 : \pi_1(S - y) \rightarrow S_{mpq}$  la representación transitiva definida por:

$$\omega_1(z_1) = \alpha$$

$$\omega_1(z_2) = \beta$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las permutaciones de la Proposición 1.2.

Sea  $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \rho_{0*} : \pi_1(S^3 - \tau_{p,q}) \rightarrow S_{mpq}$  y sea  $f_1 : \bar{M} \rightarrow (S^3, \tau_{p,q})$  la cubierta asociada a  $\bar{\omega}_1$ .

Sea  $\bar{S}$  el espacio base de  $\bar{M}$ ; [GR, Teorema 2.4] establece la siguiente fórmula para calcular el género  $\bar{g}$  de  $\bar{S}$ :

$$2\bar{g} - 2 = mpq - |\omega_1(z_1)| - |\omega_1(z_2)| - |\omega_1(z_2 z_1)| = mpq - mq - mp - |\omega_1(z_2 z_1)|$$

Como  $\bar{g} \geq 0$ , entonces:

$$0 \leq mpq - mq - mp - |\omega_1(z_2 z_1)| + 2$$

pero  $|\omega_1(z_2 z_1)| = |(\beta\alpha)| > m((p-1)(q-1) - 1) + 1$  pues  $m((p-1)(q-1) - 1) + 1 \leq |i(\beta\alpha)|$

se sigue que  $|\omega_1(z_2 z_1)| = m((p-1)(q-1) - 1) + 2$

Por lo tanto  $\bar{g} = 0$ .

Denotemos por  $s_p$  y  $s_q$  a las fibras excepcionales de  $(S^3, \tau_{p,q})$  de orden  $p$  y  $q$  respectivamente.

Sean  $x_p$  y  $x_q$  los puntos cónicos en  $S$  correspondientes a  $s_p$  y  $s_q$ . Los índices de ramificación de  $f_1^{-1}|_S(x_p)$  y  $f_1^{-1}|_S(x_q)$  están dados por la cardinalidad de las órbitas de  $\omega_1(z_1)$  y  $\omega_1(z_2)$ ;  $|f_1^{-1}|_S(x_p)| = |\omega_1(z_1)|$ ,  $|f_1^{-1}|_S(x_q)| = |\omega_1(z_2)|$ . La figura 2.1 ilustra el levantamiento de la frontera de una vecindad tubular de  $s_p$  y  $s_q$  en  $\bar{M}$ .

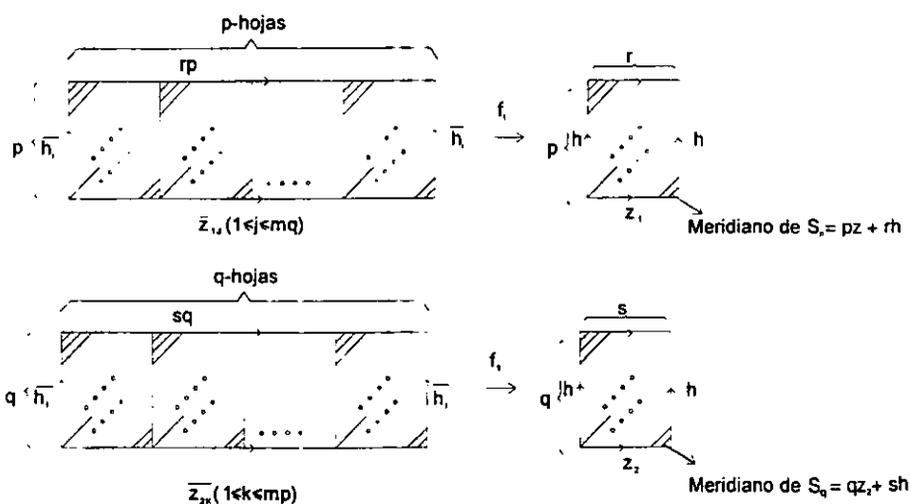


figura 2.1

Nótese que la preimagen del meridiano de  $\eta(s_p)$  son las curvas:

$$p\bar{z}_{1_j} + pr\bar{h}_i = \bar{z}_{1_j} + r\bar{h}_i, 1 \leq j, i \leq mq$$

y la preimagen del meridiano de  $\eta(s_q)$  son las curvas:

$$q\bar{z}_{2_k} + qs\bar{h}_l = \bar{z}_{2_k} + s\bar{h}_l, 1 \leq k, l \leq mp$$

Podemos concluir que  $\bar{M}$  es la variedad de Seifert:

$$(0, 0; \underbrace{r/1, \dots, r/1}_{mq\text{-veces}}, \underbrace{s/1, \dots, s/1}_{mp\text{-veces}})$$

que no tiene fibras excepcionales, pues  $\alpha_i = 1, 1 \leq i \leq m(p+q)$ .

Es fácil ver que:

$$(0, 0; \underbrace{r/1, \dots, r/1}_{mq\text{-veces}}, \underbrace{s/1, \dots, s/1}_{mp\text{-veces}}) = (0, 0; m(rq + ps)/1) = (0, 0; \pm m/1)$$

El signo depende del número de Euler.

Por lo tanto  $\bar{M} \cong L(m, 1)$ .

Nótese que  $\bar{\omega}_1([\mu])$  es una permutación con  $m((p-1)(q-1)-1)+1$  puntos fijos y con  $m((p-1)(q-1)-1)+2$  órbitas; por lo tanto podemos escribir  $\bar{\omega}_1([\mu])$  como la siguiente permutación:

$$\bar{\omega}_1([\mu]) = (b_1, b_2, \dots, b_{m(p+q)-1})(c_1)(c_2)\dots(c_k), k = m((p-1)(q-1)-1) + 1$$

Como  $\bar{\omega}_1([h]) = id$ , tenemos que  $|f_1^{-1}(\tau_{p,q})| = m((p-1)(q-1)-1) + 2$ , pues  $|f_1^{-1}(\tau_{p,q})|$  está generado por los conjuntos de transitividad de  $(\bar{\omega}_1([\mu]), \bar{\omega}_1([h]))$  ([GR, p.473]). Esto demuestra que  $S_{f_1}$  es una fibra y que  $f_1|S_{f_1}$  es un homeomorfismo. ■

**Corolario 2.2** Sea  $\tau_{p,q}$  un nudo toroidal en  $S^3$ . Entonces, para toda  $m \in \mathbb{N}$ , existe una cubierta  $f : S^3 \rightarrow S^3$  ramificada sobre  $\tau_{p,q}$ , de  $m^2 pq$  hojas. Además,  $S_f$  es un nudo trivial y  $f|S_f : S_f \rightarrow \tau_{p,q}$  es una cubierta de  $m$  hojas.

**Demostración** Sea  $f_2 : S^3 = (0, 0; \pm 1/1) \rightarrow (0, 0; \pm m/1) = L(m, 1)$  la cubierta universal del espacio lente  $L(m, 1)$ .

Sea  $f = f_1 \circ f_2$ . Como  $S_{f_1}$  genera al grupo  $\pi_1(L(m, 1))$ , entonces  $f|S_f$  es  $m$  a 1. ■

*Observación 2.1.* Nótese que el espacio cubriente  $S^3 = (0, 0; \pm 1/1)$  tiene la fibración de Hopf.

*Ejemplo 2.1.* Sea  $\tau_{2,3}$  y  $m = 2$ ,  $(S^3, \tau_{2,3}) = (0, 0; -1/2, 1/3)$ ,  $r = -1$ ,  $s = 1$ ,  $m^2 pq = 24$

$$\pi_1(S^3 - \tau_{2,3}) = \|[a_1, a_2 : a_1^2 = a_2^3]\|$$

$\bar{\omega}_1 : \pi_1(S^3 - \tau_{2,3}) \rightarrow S_{12}$  se define como:

$$\bar{\omega}_1([a_1]) = (1, 9)(2, 12)(4, 5)(3, 6)(7, 8)(10, 11)$$

$$\bar{\omega}_1([a_2]) = (1, 3, 2)(4, 6, 5)(7, 9, 8)(10, 12, 11)$$

$$\bar{\omega}_1([\mu]) = \bar{\omega}_1([a_2^{-1}a_1]) = (1, 12, 11, 2, 6, 5, 3, 9, 8)(4)(7)(10)$$

$$\bar{\omega}_1([h]) = \bar{\omega}_1([a_1^2]) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)$$

$\bar{\omega}_2 : \pi_1(L(2, 1)) \rightarrow S_2$  está definida por:

$$\bar{\omega}_2([\tilde{h}]) = (1, 2)$$

Ahora, como  $\bar{\omega}_1([h]) = id$  y  $\bar{\omega}_2([\bar{h}]) = (1, 2)$  entonces:

$$\bar{\omega}([h]) = \bar{\omega}([a_1^2]) = (1, 1')(2, 2')(3, 3')(4, 4')(5, 5')(6, 6')(7, 7')(8, 8')(9, 9')(10, 10')(11, 11')(12, 12')$$

$$\bar{\omega}([a_1]) = (1, 9, 1', 9')(2, 12, 2', 12')(4, 5, 4', 5')(3, 6, 3', 6')(7, 8, 7', 8')(10, 11, 10', 11')$$

pues  $\bar{\omega}_1([a_1]) = (1, 9)(2, 12)(4, 5)(3, 6)(7, 8)(10, 11)$  y  $\bar{\omega}([h]) = \bar{\omega}([a_1^2])$ .

Análogamente:

$$\bar{\omega}([a_2]) = (1, 3, 2, 1', 3', 2')(4, 6, 5, 4', 6', 5')(7, 9, 8, 7', 9', 8')(10, 12, 11, 10', 12', 11')$$

finalmente:

$$\bar{\omega}([\mu]) = \bar{\omega}([a_2^{-1}a_1]) = (1, 12', 11', 2, 6, 5, 3', 9', 8)(1', 12, 11, 2', 6', 5', 3, 9, 8)(4)(4')(7)(7')(10)(10')$$

## Capítulo 3

# Satélites monótonos de nudos toroidales.

En este capítulo demostraremos que el Corolario 2.2 se puede generalizar a los satélites monótonos de nudos toroidales; mostraremos, también, la forma en que pueden ser aplicados estos resultados.

Iniciamos el capítulo con una definición de satélite monótono de un nudo  $k$  equivalente a la dada en la introducción.

### 3.1 Definiciones.

Sea  $J$  una circunferencia en  $S^1 \times D^2$  tal que  $J$  no está contenido en una bola de  $S^1 \times D^2$ ; decimos que  $J$  interseca transversalmente a un disco  $\{z\} \times D^2$  si:

$$(D^2 \times I, J \cap (D^2 \times I)) \cong (D^2 \times I, F \times I), \text{ donde } F \subseteq D^2 \text{ y } F \text{ es finito.}$$

Supongamos  $J$  una curva contenida en  $S^1 \times D^2$  como arriba tal que  $J$  no es el ánimo de  $S^1 \times D^2$ , decimos que  $J$  es una curva monótona de  $S^1 \times D^2$  si  $J$  interseca transversalmente a  $\{z\} \times D^2$  para todo  $z \in S^1$ .

Sean  $k$  un nudo no trivial en  $S^3$ ,  $\eta(k)$  una vecindad tubular de  $k$  y  $f : S^1 \times D^2 \rightarrow \eta(k)$  un homeomorfismo tal que  $f(S^1 \times \{z\}) = 0 \in H_1(S^3 - \text{int } \eta(k))$ ,  $z \in \partial D^2$ . Para  $J$  una curva monótona en  $S^1 \times D^2$ , la imagen  $f(J)$  es un satélite monótono de  $k$ ; lo denotamos por  $J(k)$ .

## 3.2 Resultados principales

**Teorema 3.1** *Sea  $f : M^3 \rightarrow S^3$  una cubierta ramificada sobre un nudo  $k$  tal que  $S_f$  es conexo y  $f|_{S_f}$  es  $m$  a 1. Sea  $J(k)$  un satélite monótono de  $k$  cuyo número  $d$  de vueltas divide a  $m$ . Entonces, existe una cubierta  $g : M^3 \rightarrow S^3$  ramificada sobre  $J(k)$  que coincide con  $f$  en la cerradura del complemento de una vecindad tubular de  $S_f$ .*

**Demostración** Sea  $T$  una vecindad tubular de  $k$  que contenga a  $J(k)$  en su interior, sea  $\overline{T}$  la componente de  $f^{-1}(T)$  que contiene a la componente de la preimagen de  $f^{-1}(k)$  cuyo índice de ramificación es diferente a uno. Entonces,  $f|_{\overline{T}}$  es una cubierta de  $T$  ramificada sobre  $k$  y factoriza como  $\overline{T} \xrightarrow{p} \overline{T} \xrightarrow{u} T$ , donde  $u$  es una cubierta no ramificada de orden  $m$  y  $p$  es una cubierta de  $\overline{T}$  ramificada sobre el ánima  $\overline{C}$  de  $\overline{T}$ .

Ahora bien,  $u^{-1}(J(k))$  es un enlace de  $d$  componentes cada uno de los cuales es isotópico al ánima de  $\overline{T}$ , pues  $u$  es una cubierta (cíclica) de orden  $m$  no ramificada y  $J(k)$  es un satélite monótono de  $k$  cuyo número  $d$  de vueltas divide a  $m$ . Por lo tanto existe un homeomorfismo  $h : \overline{T} \rightarrow \overline{T}$  tal que  $h$  manda a una de estas componentes en el ánima y  $h|_{\partial\overline{T}} = id$ .

Definimos  $g : M^3 \rightarrow S^3$  como  $f$  en  $M^3 - \overline{T}$  y  $u \circ h^{-1} \circ p$  en  $\overline{T}$ . ■

**Corolario 3.2** *La 3-esfera es una cubierta de  $S^3$ , ramificada sobre  $J(\tau_{p,q})$ , de  $m^2pq$  hojas, donde  $\tau_{p,q}$  es un nudo toroidal y el número de vueltas de  $J(\tau_{p,q})$  es un divisor de  $m$ .*

**Corolario 3.3** *Sea  $k$  un nudo toroidal iterado. Entonces,  $S^3$  es cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $k$ .*

**Demostración** Los nudos toroidales iterados son un caso particular de satélites monótonos de toroidales. ■

## 3.3 Aplicaciones.

En esta sección mostraremos algunos ejemplos de satélites monótonos de nudos toroidales que son nudos universales -un nudo o enlace  $L$  en  $S^3$  es universal si toda 3-variedad, cerrada, orientable, puede ser representada como una cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $L - ([T])$ .

En todos los ejemplos supondremos que  $S^3$ ,  $\tau_{p,q}$  y  $S^1 \times D^2$  están orientados. Escogeremos un meridiano  $\mu \in \partial(\eta(\tau_{p,q}))$  tal que el número de enlace de  $\mu$  y  $\tau_{p,q}$  sea uno. Asumiremos que el homeomorfismo  $f : S^1 \times D^2 \rightarrow \eta(\tau_{p,q})$  mantiene la orientación.

En esta sección consideraremos a  $\tau_{p,q}$  como una fibra regular del espacio fibrado de Seifert  $(0, 0; r/p, s/q)$  con número de Euler  $e(S^3) = -r/p - s/q = -1/pq$ .

Nótese que si  $e(S^3) = -r/p - s/q = -1/pq$  y  $f : S^3 \rightarrow S^3$  es la cubierta del Corolario 2.2; entonces,  $S^3 = (0, 0; 1/1)$  y por lo tanto dos componentes de la preimagen de una fibra regular  $h$  de  $(S^3, \tau_{p,q})$  forman un enlace de Hopf con número de enlace uno (figura 3.1)

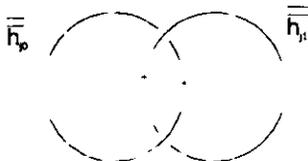


figura 3.1

Sean  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq k+1$ , las componentes de  $\partial(S^3 - \eta(g^{-1}(\tau_{p,q})))$ , sean  $l_i$  las preimágenes de  $g^{-1}(\tau_{p,q})$  en  $(S^3, g^{-1}(\tau_{p,q}))$  y sean  $\bar{h}_j$ ,  $1 \leq j \leq mpq$ , los levantamientos de  $h$ , una fibra regular de  $\partial(S^3 - \eta(\tau_{p,q}))$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\bar{h}_{j_0} \subset T_{i_0}$ , entonces,  $\bar{h}_{j_0}$  y  $l_{i_0}$  tienen número de enlace uno y por lo tanto  $\bar{h}_{j_0} = 1 l'_{i_0} + 1 \bar{\mu}_{i_0} \in H_1(T_{i_0})$ , donde  $\bar{\mu}_{i_0}$  es un levantamiento de  $\mu$  en  $T_{i_0}$  y  $l'_{i_0}$  es una curva paralela a  $l_{i_0}$  en  $T_{i_0}$  (figura 3.2)



figura 3.2

Sea  $J$  la curva monótona en  $S^1 \times D^2$  de la figura 3.3

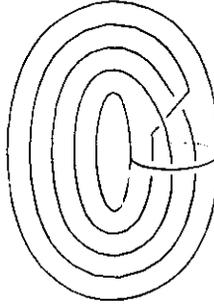


figura 3.3

Definimos  $\rho = u \circ p : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  una cubierta, donde  $p : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  es un homeomorfismo y  $u : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  es una cubierta no ramificada de 3 hojas.

Denotamos  $J_2 = (u \circ p)^{-1}(J)$  (figura 3.4)

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

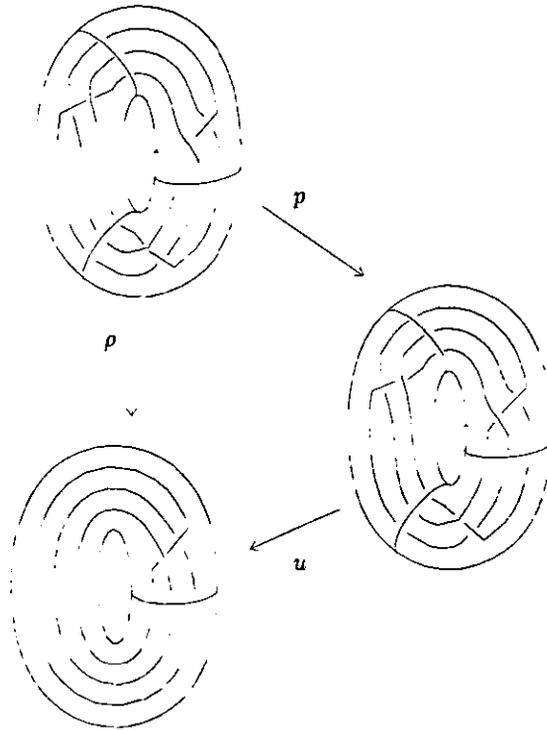


figura 3.4

Sea  $\tau_{p,q}$  un nudo toroidal en  $S^3$ ,  $e(S^3, \tau_{p,q}) = -1/pq$ , y sea  $J(\tau_{p,q})$  un satélite monótono de  $\tau_{p,q}$ , donde  $J$  es la curva en  $S^1 \times D^2$  de la figura 3.3. Por el Corolario 2.2 existe  $f : S^3 \rightarrow S^3$  una cubierta ramificada de  $S^3$  de  $3^2pq$  hojas y por lo tanto (Teorema 3.1) una cubierta  $g : S^3 \rightarrow S^3$  que ramifica sobre  $J(\tau_{p,q})$ . Sea  $\overline{T}_0 = g^{-1}(T)$ , donde  $T$  es una vecindad de  $\tau_{p,q}$  que contiene a  $J(\tau_{p,q})$  en su interior y  $\overline{T}_0$  es vecindad regular de una de las componentes de la preimagen de  $\tau_{p,q}$  cuyo índice de ramificación sea uno.

Se puede ver sin dificultad que  $J_2(l_2)$ , el levantamiento de  $J(\tau_{p,q})$  en  $\overline{T}_0 \subset S^3$ , es el enlace de la figura 3.5.

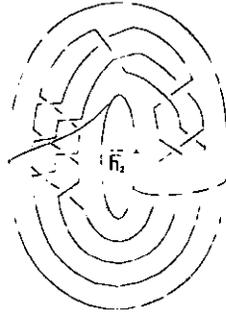


figura 3.5

$J_2(l_2)$  es isotópico al enlace  $L$  (figura 3.6)

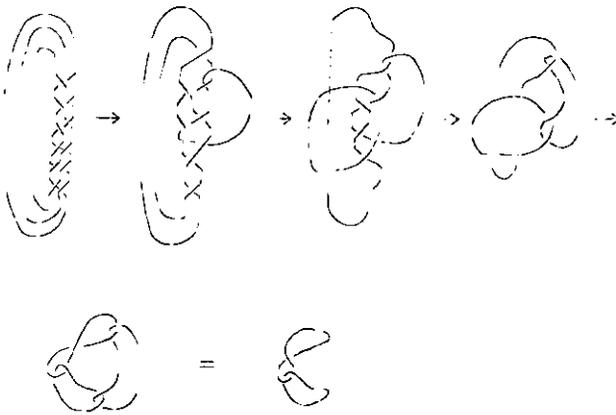


figura 3.6

Sea  $k \subset L$  la componente que contiene al infinito de  $L$ ; sea  $\omega : \pi_1(S^3 - k) \rightarrow S_2$  la única representación suprayectiva. Consideremos la doble cubierta  $p : M \rightarrow S^3$ , ramificada sobre  $k$ , construida como la unión de  $p^{-1}(B_1)$  y  $p^{-1}(B_2)$ , donde  $B_i$  son las 3-bolas que se indican en la figura 3.7.

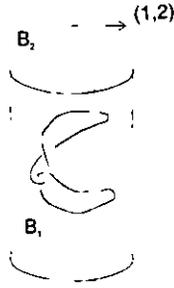


figura 3.7

Cada  $p^{-1}(B_i)$  es la doble cubierta de una 3-bola ramificada sobre un arco tal que su meridiano está representado por la permutación  $(1, 2)$ . Esto es equivalente a la siguiente cubierta ramificada  $D^2 \rightarrow D^2$  multiplicada por un intervalo (figura 3.8) y por lo tanto  $M \cong S^3$ .

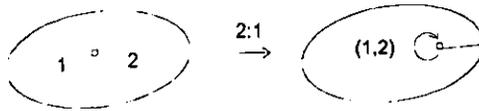


figura 3.8

La figura 3.9 ilustra el levantamiento una vecindad tubular de  $k$  que contiene un subconjunto de  $L - k$ .

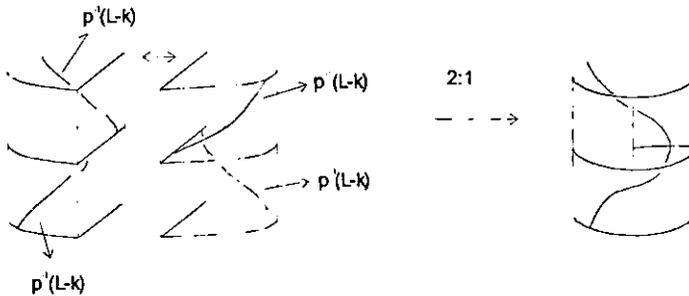


figura 3.9

Entonces,  $p^{-1}(L - k)$  es el enlace de la figura 3.10 que es homeomorfo al enlace racional  $L(-8/3)$

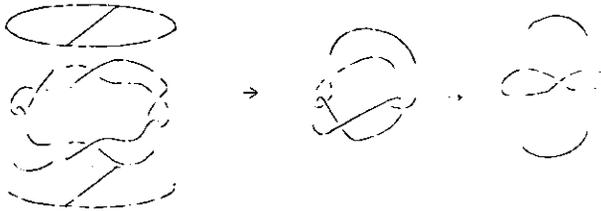


figura 3.10

Pero  $L(-8/3)$  es un enlace universal ([HLM, Corolario 4]); por lo tanto  $J(\tau_{p,q})$  es universal. Se tiene, entonces, la siguiente proposición:

**Proposición 3.4** *Todo nudo toroidal  $\tau_{p,q}$  posee un satélite monótono de  $\tau_{p,q}$  con número de vueltas tres que es un nudo universal.*

A continuación damos otros ejemplos de nudos universales.

Sea  $J'$  la curva monótona en  $S^1 \times D^2$  de la figura 3.11



figura 3.11

Si tomamos  $g : S^3 \rightarrow S^3$  análoga a la  $g$  definida en el ejemplo anterior, uno de los levantamientos de  $J'(\tau_{p,q})$  en  $S^3$  es el enlace  $L'$  de la figura 3.12 .



figura 3.12

$L'$  es isotópico a  $L'_1$

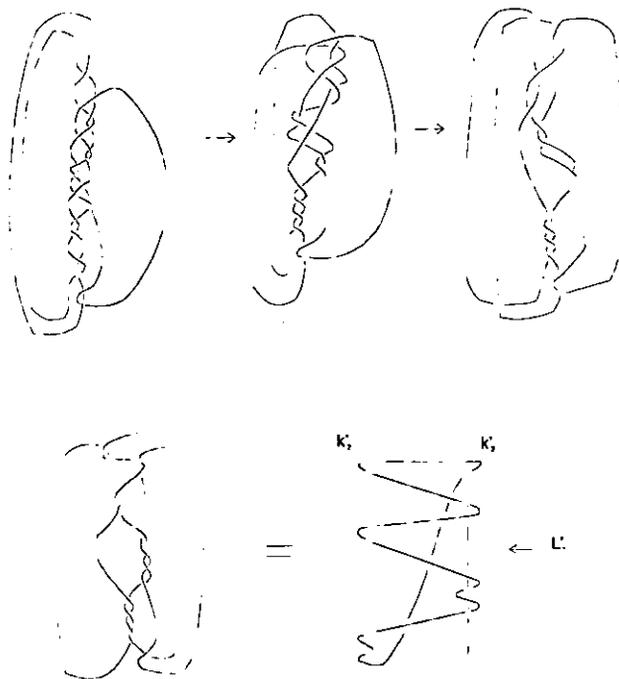


figura 3.13

Sea  $\omega : \pi_1(S^3 - k'_1 \cup k'_2) \rightarrow S_3$  la representación transitiva siguiente:

$$\omega([m_1]) = (1, 2)$$

$$\omega([m_2]) = (1, 3)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son meridianos de  $k'_1$  y  $k'_2$  respectivamente.

Definimos  $p : M' \rightarrow S^3$  como la triple cubierta de  $S^3$  ramificada sobre  $k'_1 \cup k'_2$ . Entonces,  $M'$  es la unión de  $p^{-1}(B'_1)$  y  $p^{-1}(B'_2)$ , donde  $B'_i$  son las 3-bolas de la figura 3.14.

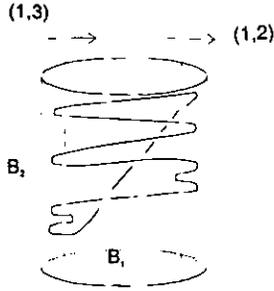


figura 3.14

Cada  $p^{-1}(B'_i)$  es la triple cubierta de una 3-bola ramificada sobre un par de arcos. Esto equivale a la cubierta ramificada  $D^2 \rightarrow D^2$  multiplicada por un intervalo (figura 3.15)

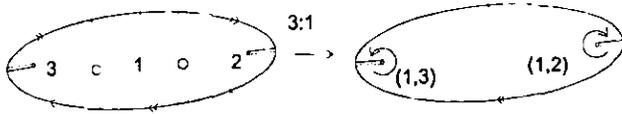


figura 3.15

Entonces,  $M'$  es la unión de dos 3-bolas y por lo tanto  $M' \cong S^3$ ,  $p^{-1}(L'_1 - k'_1 \cup k'_2)$  es el nudo  $k'$  (figura 3.16)

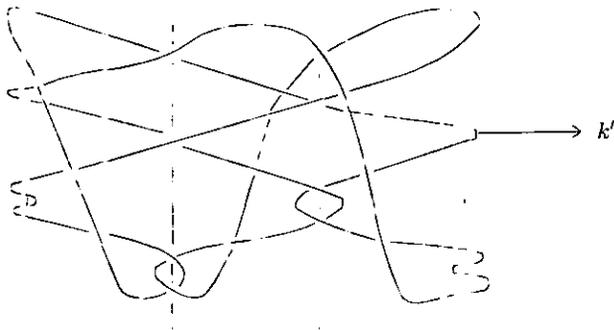


figura 3.16

Pero  $k'$  es homeomorfo al nudo racional  $L(5/2)$  que es universal ([HLM, Corolario 4])

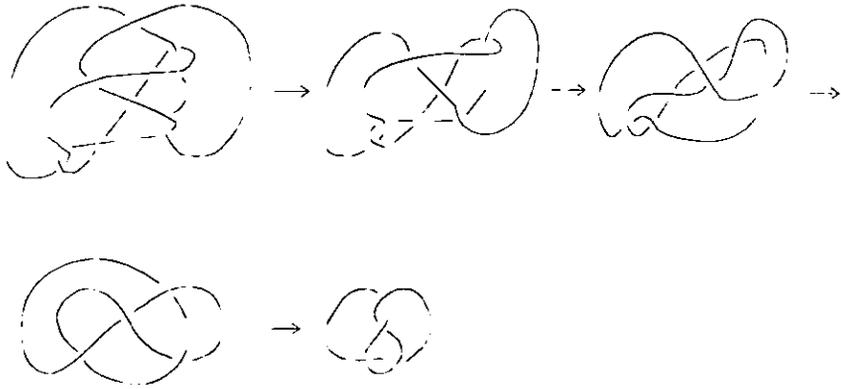


figura 3.17

Por lo tanto  $J'(\tau_{p,q})$  es universal.

*Observación.* Obviamente, siguiendo estas técnicas, se pueden obtener muchísimas familias de nudos universales.

# Bibliografía

- [F] Fox R. : Covering spaces with singularities. Lefschetz simposium. Princeton Math. Series, 12 (1957), 243-257. Princeton N. J. :Princeton University Press.
- [GR] González-Acuña F., Ramírez A. : Coverings of links and a generalization of Riley's conjeture B. Journal of Knot Theory and its ramifications, 5 (1996), 463-488.
- [HLM] Hilden, Lozano, Montesinos J.M. : On Knots that are universal. Topology , 24 (1985), 499-504.
- [Mo] Montesinos J. M. : Classical tessellations and Three-Manifolds. Springer-Verlag. Berlin- Heilderbreg-New York (1987)
- [ST] Seifert H., Threrfall W. : A textbook of topology. New York-London: Academic Press (1980)
- [T] Thurston W. : Universal links. (preprint 1982).
- [HLM2] Hilden, Lozano, Montesinos J.M. : Non-simple universal knots. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 102 (1987), 87-95.