00384 1
2e

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CONTINUOS CON HIPERESPACIO UNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

M. en C. GERARDO ACOSTA GARCIA

DIRECTOR DE TESIS DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

MEXICO, D. F. 1999

PAGINACION

DISCONTINUA.

DEDICATORIA

A Guadalupe Gloria García Pinacho.
A Ana Berenice Pérez Tobías.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseo agradecer al Dr. Alejandro Illanes el haber aceptado dirigir esta tesis doctoral, durante estos tres años. En este tiempo, Alejandro siempre me motivó y me dio su apoyo en esos teoremas que se dejaban. Fué un gran guía en aquellos resultados, cuyas pruebas tardaron meses en ser obtenidas. Siempre me dijo, a su muy peculiar manera, que yo podía con los resultados que pretendíamos probar. Estuvo presente en aquellos momentos en los que me hize pato y flojeaba, recibiendo sus también muy peculiares regaños que te hacen sentir que no es justo que no respondas. Una disculpa por aquellos momentos de flojera, por esas crisis emocionales que tuve en esos tres años y, un GRACIAS elevado a la n por la gran paciencia que me ha tenido durante todos estos años.

En segundo lugar quiero agradecer a mi familia que, aunque dispersa por este país, me apoyó en esta carrera. Gracias Madre, por esos momentos de estudio, por haberme inculcado el hábito por el estudio. Gracias Diana por creer en tu hermano regañón. Tonny, Freddy, gracias por su apoyo. Padre, no podía haber estudiado otra carrera. Esta es mi vocación y gracias por aceptarla. Gracias a todos, por que este deseo de llegar al Doctorado en Matemáticas (que inició en los años de la preparatoria) ahora se ve concluido. Gracias por su apoyo: padre, hermanos, tíos, primos.

Quiero agradecer también a mi gran amigo Jesús Efrén Pérez Terrazas. Mira en lo que se han traducido las competencias académicas de la universidad, así como aquellas visitas a los bufetes. Esos meses de angustia al iniciar nuestros estudios en este monstruo de universidad. Ese apoyo que siempre he obtenido de tu parte. Simplemente eres parte de esto.

A mis amigos matemáticos: Enrique (Willy), Marquiños (Mongol), Gabriel, Ita, Checo, Beto, Polo, Eric (gracias por ayudarme con los dibujos), Gloria, Martín, Gaby Palafox, Fernando (Cantor), Paty Pellicer, Juan Carlos,..., en fin. A mis compañeros del cubículo 203 del Instituto de Matemáticas de la UNAM: Efrén, Eduardo, Armado, Ernesto, Maribel y Diana. A mis compañeros del grupo de teoría de continuos: Willy, Ita, Gloria, Mary, Raúl, Daniel, Likin, Paty, Cantor, Fernando, Fanny, Benjamín, Edgar, Vero, Jorge, Margareta, Adrián, Emily y David. A mis compañeros de SITUS, Efrén, Dino y Larisa

A mis sinodales: Alejandro Illanes, Bety Puga, Sergio Macías, Janusz J. Charatonik, Luis Montejano, Victor Neuman y Raúl Conde, por aventarse la chamba de leer esta cantidad de páginas llenas de garabatejos matemáticos. Gracias Luis por ser haber traído la bella teoría de los hiperespacios a este país. Sergio, gracias por todo.

A la DGAPA por la beca que me otorgó durante estos tres años. Al Insituto de Matemáticas de la UNAM, por haberme brindado el espacio ideal para desarrollar este trabajo. A la Escuela de Matemáticas de la UAdeC: gracias Silvia, gracias Humberto. A la raza norteña matemática: Mike, Mimis, Fabio, Gordo, Larissa, Benjamín, Claudia, Carlos, Martilla. A la banda de ciencia ficción y fantasía, aunque el transrealismo les cause náuseas y estén hasta el gorro de mis comentarios sobre Philip K. Dick. En fin, a todo aquel que de alguna manera fue partícipe de esta aventura que termina: Adriana, Alicja, Vanesa, Blanca.

PRÓLOGO.

El trabajo que aquí presentamos está enmarcado en el estudio de los hiperespacios de un continuo. A saber, un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Si X denota un continuo entonces los hiperespacios de X son los conjuntos:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

A estos conjuntos se les da una métrica, que se llama la ***métrica de Hausdorff*** (ver Definición 8). A $C(X)$ se le conoce como el *hiperespacio de los subcontinuos* de X y este trabajo se centra totalmente en este hiperespacio en particular.

Un problema elemental de la teoría de los hiperespacios, dice que si dos continuos X y Y son homeomorfos entonces los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ también son homeomorfos. Es natural preguntarse si el recíproco de la afirmación anterior es cierto. Un resultado básico es que los hiperespacios de subcontinuos del arco y la curva cerrada simple son homeomorfos. Por consiguiente, el que los hiperespacios de subcontinuos de X y Y sean homeomorfos, no garantiza que los continuos X y Y también lo sean.

Existen situaciones, sin embargo, en las que si $\mathcal{F}$ es una familia de continuos y X y Y son elementos de $\mathcal{F}$ tales que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y son homeomorfos. En tales circunstancias, decimos que los elementos de la familia $\mathcal{F}$ están *C-determinados*. Más aún, existen situaciones en las que, si X es un continuo con determinadas propiedades y Y es un continuo arbitrario tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos entonces X y Y son homeomorfos. Esto significa que no existe un continuo no homeomorfo a X tal que los respectivos hiperespacios de subcontinuos son homeomorfos. Por tanto, el hiperespacio de X está únicamente determinado. En el contexto de este trabajo, decimos que tal X posee *hiperespacio único*.

La noción de continuo C-determinado fue introducida en 1978 por Sam B. Nadler, Jr. en su famoso libro [26]. Nadler mismo probó que los continuos hereditariamente indescomponibles están C-determinados ([26, Teorema 0.60]). Ya antes, R. Duda había demostrado que las gráficas finitas que son diferentes del arco y la curva cerrada simple, están C-determinadas. Naturalmente, Duda no mencionó este resultado así de explícito, sino que es consecuencia de los resultados que se prueban en su artículo [9, Teorema 9.1], y el primero en hacerlo notar en la literatura fue precisamente Sam B. Nadler, Jr.

Continuando en esta dirección, en 1979 Carl Eberhart, Jr. y Sam B. Nadler, Jr. probaron que los abanicos suaves están C-determinados ([12, Corolario 3.3]). También mostraron dos continuos X y Y, uno descomponible y el otro indescomponible, para los cuales los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Por tanto, ni los continuos descomponibles, ni los indescomponibles, tienen hiperespacio único.

Retomando el tema de los continuos C-determinados y haciendo honor a su costumbre, Nadler lanza en su libro de hiperespacios, una serie de preguntas lo bastante generales como para que a la fecha aún permanezcan abiertas algunas de ellas. Al parecer fueron tan generales, o de poco interés para la comunidad matemática, que no hubo quien las investigara sino hasta 19 años más tarde.

La primera persona que se atrevió a retomar el estudio de los continuos C-determinados, fue el mexicano Sergio Macías, quien en 1997 probó que los continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, están C-determinados (ver [24, Teorema 3]). Un año más tarde, Alejandro Illanes probó que los continuos encadenables no están C-determinados (ver [21, Teorema 2]), respondiendo así en negativo a una de las preguntas formuladas por Nadler en 1978. En ese mismo año, Alejandro respondió en negativo a otra de las preguntas de Nadler, al probar que los abanicos no están C-determinados.

También en 1998 inicia este trabajo de tesis, que no solamente contempla la búsqueda de nuevas familias C-determinadas, sino también la detección de continuos con hiperespacio único. Al respecto, se han encontrado compactaciones bastante particulares que están C-determinadas. Éstas son, por ejemplo, las compactaciones métricas del espacio $[0,\infty)$ con residuo no degenerado (Teorema 118), las compactaciones métricas del espacio $(-\infty,\infty)$ con residuo no degenerado (Teoremas 134 y 154) y las dobles compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo (Teorema 126).

Dado un continuo X con una propiedad específica (por ejemplo, idescomponible tal que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos), lo que se pretende, es verificar si X tiene hiperespacio único. De no lograr este objetivo, el siguiente paso consiste en buscar una familia de continuos $\mathcal{F}$ tal que $X \in \mathcal{F}$ y X esté C-determinado con respecto a dicha familia. Otra alternativa es detectar todos los posibles continuos $Y_1, Y_2, \ldots$ no homeomorfos entre sí, ni homeomorfos a X, tales que sus hiperespacios son homeomorfos entre sí. Esto es, detectar qué continuos son los que le estorban a X para que posea hiperespacio único. Los Capítulos 5 y 9 tratan este problema.

En el Capítulo 1, presentamos una serie de resultados de la teoría de los continuos e hiperespacios que serán importantes en los capítulos posteriores. En el Capítulo 2, probamos que los continuos hereditariamente indescomponibles y las gráficas finitas diferentes del arco y la circunferencia, tienen hiperespacio único.

La prueba de los resultados presentados en el Capítulo 2 es relativamente sencilla, debido a que en tales situaciones se obtienen caracterizaciones en el hiperespacio. Por ejemplo, un continuo X es una gráfica finita si y sólo si su hiperespacio $C(X)$ es localmente conexo y de dimensión finita. Es precisamente la existencia de un teorema de caracterización de este estilo, lo que permite probar con facilidad lo que se enuncia.

Para el caso de las compactaciones métricas del espacio $[0,\infty)$, no contamos con un teorema de caracterización como los del Capítulo 2. Es por tanto importante el uso de otras técnicas. En el resto del trabajo de tesis es de vital importancia la siguiente cuestión: dado un subcontinuo propio y no degenerado K de un continuo X, ¿bajo qué circunstancias podemos detectar o bien una 2-celda en $C(X)$ que posea a K en su interior relativo, o bien triodos arbitrariamente cercanos a K? En el Capítulo 3, por ejemplo, mostramos que la existencia de una 2-celda en $C(X)$ que posee a un conjunto de un solo punto en su interior relativo, garantiza la existencia de triodos arbitrariamente cercanos a dicho conjunto. Este resultado es importante en el Capítulo 4, en donde mostramos que las compactaciones métricas de $[0,\infty)$ tienen hiperespacio único.

En el Capítulo 6, vemos que las compactaciones métricas de una recta cuyos residuos tienen dos componentes no degeneradas, poseen hiperespacio único. En el Capítulo 7, vemos que los continuos estudiados por Sergio Macías en 1997 también tienen hiperspacio único. En el Capítulo 8, mostramos que los abanicos suaves no tienen hiperespacio único.

La extensión de este trabajo no implica que se haya agotado el tema de la determinación de familias C-determinadas y mucho menos el de la detección de continuos con hiperespacio único. En realidad, este trabajo se centra principalmente en el estudio de las compactaciones de un rayo y en la detección, ya sea de 2-celdas especiales, o de triodos arbitrariamente cercanos a un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo. Sentimos que esto último puede ser material importante en futuras investigaciones que involucren el tema de continuos C-determinados, por ejemplo, para resolver el problema de si los continuos circularmente encadenables tienen hiperespacio único.

Contenido

Capítulo 1

Nociones Preliminares.

1.1 Introducción.

En las siguientes líneas describimos los conceptos fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Algunos resultados se presentarán sin demostración, remitiendo al lector en cada caso al texto señalado.

Definición 1 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo.*

Recordemos que un espacio es *no degenerado* si contiene más de un punto.

Definición 2 *Un* ***subcontinuo*** *de un continuo X es un subconjunto no vacío, cerrado y conexo de X.*

Esencialmente, la diferencia entre un continuo y un subcontinuo estriba en que los subcontinuos pueden ser conjuntos *degenerados*, mientras que los continuos siempre poseen más de un punto.

1.2 Los Hiperespacios de un Continuo X.

1.2.1 El Hiperespacio 2^X.

Los hiperespacios de un continuo X, son espacios cuyos elementos son subconjuntos especiales de X. Uno de ellos es el espacio 2^X, que definimos a continuación.

Definición 3 *$2^X = \{A \subset X : A$ es cerrado y no vacío$\}$.*

Claramente el espacio 2^X es no degenerado. A continuación mostraremos como dotar a 2^X de una estructura de espacio métrico, bajo la cual resulta ser un continuo. Mientras no se diga otra cosa, consideraremos que la letra X representa un continuo con métrica d.

Definición 4 *Supongamos que $A \in 2^X$ y que $\varepsilon > 0$. Entonces definimos la **ε-nube** de A (o la nube de A de radio ε) como el conjunto*

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Definición 5 *Sea X un continuo con métrica d. Si $a \in X$ y $\varepsilon > 0$ entonces definimos la **ε-bola** de a (o la bola en X con centro en a y radio ε) como el conjunto*

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de las definiciones de $N(\varepsilon, A)$ y $B_\varepsilon(a)$.

Teorema 6 *Supongamos que $A \in 2^X$ y que $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Por consiguiente, cada conjunto de la forma $N(\varepsilon, A)$ es abierto en X. Más aún, si $p \in X$ entonces $N(\varepsilon, \{p\}) = B_\varepsilon(p)$. Algunas propiedades elementales de las nubes de los elementos de 2^X se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 7 *Supongamos que $\varepsilon > 0$ y que $A, B \in 2^X$. Entonces:*

1. *si $0 < \delta \leq \varepsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$,*

2. *$Cl_X(N(\varepsilon, A)) \subset N(2\varepsilon, A)$,*

3. *$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$.*

Demostración. Supongamos que $0 < \delta \leq \varepsilon$ y tomemos un punto $x \in N(\delta, A)$. Entonces existe un punto $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Claramente $a \in B$ y $d(x, a) < \varepsilon$. Por tanto, $x \in N(\varepsilon, B)$. Esto prueba 1. Para ver 2., tomemos un punto $x \in Cl_X(N(\varepsilon, A))$ y sea $y \in B_\varepsilon(x) \cap N(\varepsilon, A)$. Como $y \in N(\varepsilon, A)$, existe un punto $a \in A$ tal que $d(y, a) < \varepsilon$. Luego, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y así $x \in N(2\varepsilon, A)$. Finalmente, para ver 3. notemos que por 1.

$$N(\varepsilon, A), N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$$

así que $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Para la otra contención, tomemos un punto $x \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Entonces existe un punto $y \in A \cup B$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Si $y \in A$ entonces $x \in N(\varepsilon, A)$ y si $y \in B$, entonces $x \in N(\varepsilon, B)$. Luego $N(\varepsilon, A \cup B) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. ∎

Definición 8 *Si $A, B \in 2^X$ definimos una función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como sigue:*

$$H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \ y \ B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [26, Teorema 0.2] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 9 *La función H, que aparece en la Definición 8, es una métrica para 2^X.*

De esta manera, $(2^X, H)$ resulta ser un espacio métrico. Puesto que las definiciones de H y $N(\varepsilon, A)$ están dadas en términos de la métrica d de X, deberíamos escribir H_d y $N_d(\varepsilon, A)$. Sin embargo, no utilizaremos la notación con subíndices a menos que entren dos métricas en juego.

En [27, Teorema 4.6] se prueba que la topología τ sobre 2^X, inducida por la **métrica de Hausdorff** H, es independiente de la métrica de X. En otras palabras, si d y e son dos métricas en X que inducen la misma topología sobre X entonces la topología inducida en 2^X por la métrica H_d es idéntica a la inducida por la métrica H_e. Por consiguiente, podemos decir que la topología inducida en 2^X por la métrica de Hausdorff, depende solamente de la topología de X. Esto hace de 2^X un espacio topológico con vida propia y tiene sentido así la siguiente definición.

Definición 10 *El espacio 2^X con la topología inducida por la métrica de Hausdorff H, es un* ***hiperespacio*** *de X.*

En [26, Teorema 0.8] se prueba que 2^X es compacto, y en [26, Teorema 1.0], que 2^X es conexo por trayectorias (sin importar si X es conexo por trayectorias o no). Entonces 2^X es un continuo y podemos hablar del hiperespacio de 2^X

$$2^{2^X} = \left\{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\right\},$$

el cual resulta ser un continuo bajo la métrica de Hausdorff, que deberíamos denotar por H_H pues se define en terminos de H. En realidad, la denotaremos por H_2 y se define de forma análoga a H, es decir, si $\mathcal{A},\mathcal{B} \in 2^{2^X}$ entonces

$$H_2(\mathcal{A},\mathcal{B}) = inf\left\{\varepsilon > 0 : \mathcal{A} \subset N_2(\varepsilon,\mathcal{B}) \text{ y } \mathcal{B} \subset N_2(\varepsilon,\mathcal{A})\right\}.$$

Un importante resultado, consecuencia de la Definición 8 y de la compacidad de los elementos de 2^X dice que, para demostrar que $H(A,B) < \varepsilon$, es necesario y suficiente con verificar que $A \subset N(\varepsilon,B)$ y que $B \subset N(\varepsilon,A)$. Usaremos con frecuencia este hecho en el presente trabajo, por ejemplo, en el siguiente teorema.

Teorema 11 *Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $p \in X$. Entonces $A \in B_\varepsilon(\{p\})$ si y sólo si $A \subset B_\varepsilon(p)$.*

Demostración. Supongamos primero que $A \in B_\varepsilon(\{p\})$. De acuerdo con el Teorema 6, $A \subset N(\varepsilon,\{p\}) = B_\varepsilon(p)$. Supongamos ahora que $A \subset B_\varepsilon(p)$. Entonces, aplicando nuevamente el Teorema 6, $A \subset N(\varepsilon,\{p\})$. Como cada elemento de A dista de p en menos que ε, $\{p\} \subset N(\varepsilon,A)$. Así $A \in B_\varepsilon(\{p\})$. ∎

1.2.2 El Hiperespacio $C(X)$.

El hiperespacio de X que más utilizaremos en este trabajo es el de los subcontinuos de X, definido a continuación.

Definición 12 $C(X) = \{A \in 2^X : A$ *es conexo*$\}$.

Es claro que el espacio $C(X)$ es no degenerado y que la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(X)$, hace de éste un espacio métrico cuya topología inducida depende solamente de la topología de X. Tiene entonces sentido la siguiente definición.

Definición 13 *El espacio $C(X)$ con la topología relativa de 2^X es un* ***hiperespacio*** *de X.*

En [26, Teorema 0.8], se prueba que $C(X)$ es compacto, y en [26, Teorema 1.12], que $C(X)$ es conexo por trayectorias (también independientemente de si X es conexo por trayectorias). Por tanto, $C(X)$ resulta ser un continuo, y entonces podemos hablar de sus hiperespacios

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

y

$$C^2(X) = C(C(X)) = \left\{\mathcal{A} \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo}\right\},$$

ambos con la métrica de Hausdorff H_2.

1.2.3 El Hiperespacio $F_1(X)$.

Otro de los hiperespacios de X que utilizaremos en este trabajo, es el que está formado por todos los subconjuntos de un sólo punto de X.

Definición 14 $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$.

Es claro que $F_1(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X. Además, la restricción de la métrica de Hausforff H a $F_1(X)$, hace de éste un espacio métrico. Más aún, como el siguiente teorema lo menciona, $F_1(X)$, *el espacio de los singulares de* X, es isométrico a X.

Teorema 15 *Sea $F_1(X)$ el espacio de los singulares de X. Entonces $F_1(X) \in C^2(X)$ y $F_1(X)$ es isométrico a X.*

Demostración. Consideremos la función $i : X \to F_1(X)$ dada por $i(x) = \{x\}$. Es claro que i es suprayectiva. Por el Teorema 6, $N(\varepsilon, \{a\}) = B_\varepsilon(a)$ y $N(\varepsilon, \{b\}) = B_\varepsilon(b)$, así que

$$\begin{aligned}
H\left(i(a), i(b)\right) &= H\left(\{a\}, \{b\}\right) \\
&= inf\{\varepsilon > 0 : \{a\} \subset N(\varepsilon, \{b\}) \text{ y } \{b\} \subset N(\varepsilon, A)\} \\
&= inf\{\varepsilon > 0 : a \in B_\varepsilon(b) \text{ y } b \in B_\varepsilon(a)\} \\
&= inf\{\varepsilon > 0 : d(a,b) < \varepsilon\} \\
&= inf\left(d(a,b), \infty\right) = d(a,b).
\end{aligned}$$

esto prueba que φ es una isometría. Por tanto, $F_1(X)$ resulta ser un espacio isométrico a X. Luego, $F_1(X)$ es un subconjunto no vacío, cerrado y conexo de 2^X. Es decir, $F_1(X) \in C^2(X)$. ∎

1.3 Convergencia de Sucesiones.

En el hiperespacio 2^X de un continuo X, así como en cualquier espacio métrico, podemos hablar de la convergencia de sucesiones. En el sentido natural, si $(A_n)_n$ es un sucesión en 2^X, decimos que $(A_n)_n$ *converge* a un elemento $A \in 2^X$, y escribimos $A_n \to A$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que para cada natural $n \geq N$, sucede que $H(A_n, A) < \varepsilon$.

Ahora bien, como los elementos de 2^X son subconjuntos de X, también podemos hablar de convergencia en términos de conjuntos. A continuación presentamos la notación clásica de este tipo de convergencia.

Definición 16 *Si $(A_n)_n$ es una sucesión en 2^X, entonces $lím \inf A_n = \{x \in X :$ para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todas las n salvo un número finito de ellas$\}$ y $lím \sup A_n = \{x \in X :$ para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números $n\}$ son, respectivamente, el **límite inferior** y el **límite superior** de la sucesión $(A_n)_n$.*

Por tanto, si $x \in lím \inf A_n$ entonces para cada $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número natural N tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. A su vez, si $x \in lím \sup A_n$ entonces para cada $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Es claro entonces que $lím \inf A_n \subset lím \sup A_n$.

Algunas propiedades básicas de los límites laterales se presentan en el siguiente teorema.

Teorema 17 *[26, Teorema 0.6] Supongamos que $(A_n)_n$ es una sucesión en 2^X. Entonces:*

1. *$lím \inf A_n \subset lím \sup A_n$,*

2. *$lím \inf A_n$ y $lím \sup A_n$ son subconjuntos cerrados de X,*

3. $lím \sup A_n \neq \varnothing$.

4. si $(A_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(A_n)_n$ entonces:

   (a) $lím \inf A_n \subset lím \inf A_{n_k}$ y

   (b) $lím \sup A_{n_k} \subset lím \sup A_n$.

La noción de convergencia en términos de conjuntos se presenta en la siguiente definición.

Definición 18 *Decimos que una sucesión $(A_n)_n$ en 2^X* ***converge*** *a un elemento $A \in 2^X$, y escribimos $lím A_n = A$, si $lím \inf A_n = lím \sup A_n = A$.*

En [26, Teorema 0.7], se prueba que la convergencia de una sucesión con respecto a la métrica de Hausdorff, es equivalente a la convergencia de la sucesión en términos de conjuntos. En otras palabras, $A_n \rightarrow A$ si y sólo si $lím A_n = A$. En este trabajo haremos con frecuencia uso de este resultado.

A continuación, enunciaremos sin prueba, un resultado que relaciona los límites laterales con las sucesiones.

Teorema 19 *[1, Teorema 1.5] Supongamos que $(A_n)_n$ es una sucesión en 2^X. Entonces:*

1. *$x \in lím \inf A_n$ si y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow x$,*

2. *$x \in lím \sup A_n$ si y sólo si, existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_1 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \rightarrow x$.*

A continuación enunciaremos una serie de resultados básicos con respecto a la convergencia de sucesiones.

Teorema 20 *Supongamos que $A, B \in 2^X$ y sean $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$. Entonces:*

1. *si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$,*

2. *si $A_n \cap B_n \neq \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.*

3. $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

Demostración. Para probar 1., tomemos $a \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\inf A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Luego, $B_\varepsilon(a) \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$ y entonces, $a \in \lim\inf B_n = B$. Esto prueba que $A \subset B$.

Para probar 2. tomemos, para cada número natural n, un punto $x_n \in A_n \cap B_n$. Por la compacidad de X, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que converge a un punto $x \in X$. Entonces, aplicando el Teorema 19, $x \in \lim\sup A_n = A$ y $x \in \lim\sup B_n = B$. De esta manera $A \cap B \neq \emptyset$.

Finalmente, para probar 3, tomemos $\varepsilon > 0$. Como $A_n \to A$ y $B_n \to B$ existe un número natural N tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Por tanto, si $n \geq N$ entonces tenemos, por el Teorema 7, que

$$A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$$

y que

$$A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n) = N(\varepsilon, A_n \cup B_n).$$

Por tanto, $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$. En consecuencia $A_n \cup B_n \to A \cup B$. ∎

En el siguiente resultado, veremos una manera de construir subconjuntos abiertos (respectivamente, cerrados) en 2^X a partir de subconjuntos abiertos (respectivamente, cerrados) de X. Dicho teorema es, con frecuencia, de gran utilidad en la teoría de los hiperespacios, y en este trabajo no es la excepción.

Teorema 21 *[1, Teorema 1.8] Supongamos que $U \subset X$ y definamos:*

$$\mathcal{H} = \left\{A \in 2^X : A \subset U\right\}$$

y

$$\mathcal{K} = \left\{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\right\}.$$

Entonces $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son abiertos en 2^X si U es abierto en X, y son cerrados en 2^X si U es cerrado en X.

Como una aplicación del teorema anterior podemos probar que si un abierto de X contiene a un elemento de 2^X, entonces entre ellos existe una nube. Más precisamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 22 *Supongamos que U es un abierto en X tal que $A \subset U$ para algún elemento $A \in 2^X$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Definamos $\mathcal{H} = \left\{A \in 2^X : A \subset U\right\}$. Por el teorema anterior, $\mathcal{H}$ es abierto en 2^X. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{H}$. Tomemos un punto $a \in N(\varepsilon, A)$ y consideremos el conjunto $B = A \cup \{a\}$. Es claro que $B \in B_\varepsilon(A)$, así que $B \subset U$. Luego $a \in U$ y, de esta manera, resulta que $N(\varepsilon, A) \subset U$. ∎

1.4 Funciones Especiales.

1.4.1 Introducción.

En la teoría de los continuos, existen ciertas funciones importantes que involucran a los hiperespacios de un continuo X. Nos referimos a las funciones de Whitney, la función unión, las funciones inducidas entre hiperespacios y los arcos ordenados. En las siguientes subsecciones, definiremos dichas funciones sin llegar a estudiarlas con detalle.

1.4.2 Las Funciones de Whitney.

En 1933, Hassler Whitney construyó en un artículo ajeno a la teoría de los hiperespacios ([30]), una función continua $\omega : 2^X \to [0, \infty)$ con ciertas propiedades que enunciaremos más adelante. En 1942, John L. Kelley introdujo a la teoría de los hiperespacios, funciones continuas $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ con las propiedades que la función ω de Whitney tiene. Dichas funciones han resultado ser una herramienta muy útil en el estudio de los hiperespacios.

Definición 23 *Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto de 2^X. Una **función de Whitney** en $\mathcal{H}$ es una función continua $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface:*

(a) $\mu(A) = 0$ si y sólo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$,

(b) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A, B \in \mathcal{H}$ y $A \subsetneq B$.

En [26, Teoremas 0.50.1, 0.50.2 y 0.50.3] se muestran las construcciones de tres funciones de Whitney, las cuales existen en todos los hiperespacios. Cabe señalar que, en la práctica, uno no suele utilizar una función de Whitney en particular sino simplemente la existencia de una función $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ con las propiedades (a) y (b) de la definición anterior, sin importar la forma en que dicha función se construye. Esencialmente, lo que importa de las funciones de Whitney, es que son una manera de medir a los elementos de $\mathcal{H}$.

Definición 24 *Sea $\Psi = 2^X$ o $C(X)$. **Una función de Whitney normalizada** para Ψ, es una función de Whitney μ en Ψ tal que $\mu(X) = 1$ (y entonces $0 \leq \mu(A) \leq 1$ para cada $A \in \Psi$).*

Teorema 25 *Sea $\Psi = 2^X$ o $C(X)$. Entonces, toda función de Whitney en Ψ se puede normalizar.*

Demostración. Si μ es una función de Whitney en Ψ entonces la función $\mu' = \frac{\mu}{\mu(X)}$ es una función de Whitney normalizada. ∎

En este trabajo, la letra I denotará al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Teorema 26 *[26, Lema 1.28] Sea μ una función de Whitney en 2^X. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$.*

En 1981, L. E. Ward, Jr. probó que si $\mathcal{H}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X, entonces toda función de Whitney en $\mathcal{H}$ se puede extender a una función de Whitney en 2^X. A continuación, escribimos este resultado como un teorema.

Teorema 27 *[20, Teorema 16.10] Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X. Entonces cada función de Whitney en $\mathcal{H}$ se puede extender a una función de Whitney en 2^X.*

1.4.3 La Función Unión.

Unir los elementos de un elemento de 2^{2^X}, define una función continua de 2^{2^X} en 2^X, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 28 *[1, Teorema 1.18] Supongamos que $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y que $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Entonces*

1. $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$,

2. *si* $\mathcal{A}$ *es conexo y* $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, *entonces* $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$,

3. $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ *es una función continua.*

A la función continua σ definida en el teorema anterior, se le llama la **función unión en 2^X**. De acuerdo con la afirmación 2. del teorema anterior, si restringimos σ a $C^2(X)$, obtenemos una función continua de $C^2(X)$ a $C(X)$, llamada la **función unión en $C(X)$**. Es precisamente a esta función a la que nos referiremos en este trabajo.

1.4.4 La Función Inducida.

Toda función continua entre dos continuos X y Y, induce de manera natural una función continua entre los respectivos hiperespacios de X y Y, según se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 29 *Supongamos que* $f : X \to Y$ *es una función continua. Si para cada* $A \in C(X)$ *definimos* $C(f)(A) := \{f(a) : a \in A\}$, *entonces* $C(f)(A) \in C(Y)$ *y la función* $C(f) : C(X) \to C(Y)$ *así definida, es continua.*

Demostración. Probaremos primero que $C(f)(A) \in C(Y)$. Para esto, notemos que $C(f)(A) = f(A) \subset Y$, así que $C(f)(A)$ es un subconjunto no vacío de Y. Como $f(A)$ es la imagen continua de un subconjunto compacto y conexo de X, $C(f)(A) = f(A)$ resulta ser compacto y conexo. Por tanto, $C(f)(A) \in C(Y)$.

Para probar que $C(f)$ es continua, sea e la métrica de Y. Como X es compacto, f es en realidad uniformemente continua, así que dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x, y \in X$, si $d(x, y) < \delta$ entonces $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Supongamos que $H_d(A, B) < \delta$ y tomemos un punto $c \in C(f)(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $c = f(a)$. Como $a \in N(\delta, B)$, existe también un punto $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Por tanto, $e(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Esto significa que $z = f(b)$ es un elemento de $C(f)(B)$ tal que $e(c, z) < \varepsilon$, de donde $c \in N(\varepsilon, C(f)(B))$. Esto prueba que $C(f)(A) \subset N(\varepsilon, C(f)(B))$. De manera similar se prueba que $C(f)(B) \subset N(\varepsilon, C(f)(A))$, y entonces $H_e(C(f)(A), C(f)(B)) < \varepsilon$. ∎

A la función $C(f)$ del teorema anterior se le conoce como la **función inducida por** f. En vista de que $C(f)(A) = f(A)$, a $C(f)$ se le conoce también como la **función imagen**. Sin embargo, en este trabajo utilizaremos para $C(f)$ el nombre de función inducida por f.

1.4.5 Arcos Ordenados.

Una de las razones por la que la teoría de los hiperespacios es tan bella, se debe quizá a la existencia de los arcos ordenados. Con ellos se prueba, por ejemplo, que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X son conexos por trayectorias, sin importar si X lo es. También la noción de arco ordenado es crucial para caracterizar el hiperespacio de los continuos que son hereditariamente indescomponibles (ver los Teoremas 59 y 60). En realidad, en la teoría de continuos e hiperespacios, existen dos herramientas muy poderosas. La primera es la existencia de arcos ordenados en los hiperespacios, y la segunda, la existencia de las funciones de Whitney

Definición 30 *Sea* $\Psi = 2^X$ *o* $C(X)$. *Supongamos que* $A, B \in \Psi$ *y que* $A \subsetneq B$. *Un* ***arco ordenado de*** A ***a*** B ***en*** Ψ *es una función continua* $\lambda : I \to \Psi$ *tal que* $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ *y* $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ *siempre que* $s < t$.

Para usar más libremente la noción de arco ordenado, algunas veces identificaremos a un arco ordenado con su imagen. Como la función λ de la Definición 30 es inyectiva, su imagen es un arco. De manera que a veces denotaremos por λ a la función, y otras a su imagen. Esperamos que esto ayude a que la lectura de este trabajo sea más fácil.

En el siguiente teorema, se muestran condiciones necesarias y suficientes para que un subcontinuo de 2^X sea un arco ordenado.

Teorema 31 *[26, Teorema 1.4] Sea* Λ *un subcontinuo no degenerado de* 2^X. *Entonces* Λ *es un arco ordenado si y sólo si* $A, B \in \Lambda$ *implican* $A \subset B$ *o* $B \subset A$.

En [26, Lema 1.5], se prueba que si Λ es un arco ordenado en 2^X, entonces $\bigcap \Lambda \in \Lambda$ y $\bigcup \Lambda \in \Lambda$. En [26, Teorema 1.6], se muestra que si Λ es un arco ordenado en 2^X, entonces los dos puntos extremos de Λ son $\bigcap \Lambda$ y $\bigcup \Lambda$.

Combinando estos resultados con el Teorema 31, tenemos que un subcontinuo no degenerado Λ de 2^X, es un arco ordenado de $A \in \Lambda$ a $B \in \Lambda$ si y sólo si $A = \bigcap \Lambda$, $B = \bigcup \Lambda$ y para cualesquiera $C, D \in \Lambda$, $C \subset D$ o bien $D \subset C$.

En [1, Teorema 1.23], se prueba que existen arcos ordenados en $C(X)$ para cualesquiera A, B con $A \subsetneq B$. Para que exista un arco ordenado de un elemento $A \in 2^X$ a un elemento $B \in 2^X$, no basta con que A esté contenido propiamente en B. Se requiere que, además de esto, cada componente de B intersecte a A (ver [26, Teorema 1.8]).

Así como con las funciones de Whitney, en la teoría de los hiperespacios, lo que en realidad importa de un arco ordenado de A a B, es que es una manera continua de inflar A hasta llegar a B. No importa tanto el cómo A se infla a B, sino el hecho de que tal inflada se puede realizar.

En el siguiente teorema, se muestra que si $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ es una función de Whithey y Λ es un arco ordenado en 2^X, entonces la restricción $\mu_{|\Lambda}$ es un homeomorfismo.

Teorema 32 *[26, Lema 1.3] Supongamos que $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ es una función de Whithey, y que Λ es un arco ordenado en 2^X. Entonces la restricción $\mu_{|\Lambda}$ es un homeomorfismo.*

En el siguiente teorema, utilizamos arcos ordenados para detectar trayectorias especiales que evaden a un subcontinuo dado de un continuo descomponible. Recordemos que un continuo X es **descomponible**, si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios.

Teorema 33 *Sea Y un continuo descomponible. Supongamos que existen dos subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $A \cap B \in C(Y)$. Entonces para cada subcontinuo R de Y, existen $a \in A$, $b \in B - A$ y una trayectoria en $C(Y)$ de $\{a\}$ a $\{b\}$ que no pasa por R.*

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo R de Y que no tiene las propiedades indicadas. Afirmamos que:

1) $R \subset A$.

En efecto, si por el contrario $R \not\subset A$, entonces existe un punto $r \in R \cap (Y - A)$. Tenemos un arco ordenado $\alpha : I \to C(Y)$ de $A \cap B$ a B. Notemos que el conjunto $\mathcal{U} = \{K \in C(Y) : K \subset Y - \{r\}\}$ es abierto en $C(Y)$ y $A \cap B \in \mathcal{U}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A \cap B) \subset \mathcal{U}$. Por la continuidad de α en $t = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$ entonces $H(\alpha(t), \alpha(0)) = H(\alpha(t), A \cap B) < \varepsilon$. Definamos $C = \alpha\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Entonces C es un subcontinuo de B que contiene propiamente a $A \cap B$ y es tal que $C \in B_\varepsilon(A \cap B) \subset \mathcal{U}$. Luego $r \notin C$.

Como C contiene propiamente a $A \cap B$, existe un punto $c \in C - A \cap B$. Ya que $C \subset B$, tenemos que $c \in B - A$. Fijemos un punto $a \in A \cap B$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \to C(Y)$ arcos ordenados de $\{a\}$ a C y de $\{c\}$ a C, respectivamente. Entonces la función $\gamma : I \to C(Y)$ definida como

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2 - 2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

es una trayectoria en $C(Y)$ de $\{a\}$ a $\{c\}$. Como $\gamma(t) \subset C$ para cada $t \in I$ y $R - C \neq \emptyset$, tenemos que γ es una trayectoria en $C(Y)$ del punto $a \in A$ al punto $c \in B - A$, que no pasa por R. Esto contradice nuestra suposición sobre el conjunto R, y prueba que $R \subset A$. Afirmamos ahora que:

2) $R \not\subset A \cap B$.

Para ver 2), supongamos que $R \subset A \cap B$. Fijemos un punto $a \in A - B$ y un punto $b \in B - A$. Es claro que $a, b \notin R$. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \to C(Y)$ arcos ordenados de $\{a\}$ a Y y de $\{b\}$ a Y, respectivamente. Entonces, si definimos una función $\gamma : I \to C(Y)$ como en (1.1), resulta que γ es una trayectoria en $C(Y)$ del punto $a \in A$ al punto $b \in B - A$. Dada $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $a \in \gamma(t) - R$, así que $\gamma(t) \neq R$ y dada $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $b \in \gamma(t) - R$ de modo que $\gamma(t) \neq R$. Por tanto, γ no pasa por R. Esto contradice nuestra suposición sobre el conjunto R y termina la prueba de 2).

Por 2), tenemos que existe un punto $r \in R - A \cap B$. Entonces, dado que $R \subset A$, $r \in A - B$. Fijemos un punto $a \in A \cap B$ y un punto $b \in B - A$. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \to C(Y)$ arcos ordenados de $\{a\}$ a B y de $\{b\}$ a B, respectivamente. Entonces, si definimos una función $\gamma : I \to C(Y)$ como en (1.1), resulta que

γ es una trayectoria en $C(Y)$ de $\{a\}$ a $\{b\}$. Puesto que $a \in A$, $b \in B - A$ y, para toda $t \in I$, $r \in R - \gamma(t)$, tenemos que γ no pasa por R. Esto nuevamente contradice nuestra suposición sobre R y termina la prueba del teorema. ∎

Terminamos esta subsección mostrando que un conjunto de un sólo punto no separa por trayectorias al hiperespacio de los subcontinuos de un continuo.

Teorema 34 *Si Y es un continuo y $a \in Y$, entonces $C(Y) - \{\{a\}\}$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Para ver que $C(Y) - \{\{a\}\}$ es conexo por trayectorias, tomemos dos elementos $A, B \in C(Y) - \{\{a\}\}$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(Y)$ arcos ordenados en $C(Y)$ de A a Y y de B a Y, respectivamente. Entonces, la función $\alpha : I \to C(Y)$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2 - 2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una trayectoria en $C(Y)$ de A a B. Como $A \neq \{a\}$, $A \not\subseteq \{a\}$ así que $\alpha_1(t) \not\subseteq \{a\}$ para ninguna $t \in I$. Similarmente, $\alpha_2(t) \neq \{a\}$ para toda $t \in I$. Por tanto, $\{a\} \notin \alpha(I)$, así que $C(Y) - \{\{a\}\}$ es conexo por trayectorias. ∎

1.5 Conexidad Local y en Pequeño.

Recordemos que un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $p \in X$, si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo C de X tal que $p \in C \subset U$. Decimos que X es **localmente conexo**, si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Recordemos también que un espacio topológico X es **conexo en pequeño en un punto** $p \in X$, si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, la componente C de U que tiene a p satisface que $p \in Int_X(C)$. Es claro que si X es localmente conexo en un punto p entonces X es conexo en pequeño en p.

En [13], Jack T. Goodykoontz, Jr. estudió la conexidad local y en pequeño en los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X, obteniendo los resultados que a continuación mencionamos:

Teorema 35 *[13, Corolario 4] Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es conexo en pequeño en p si y sólo si $C(X)$ es conexo en pequeño en $\{p\}$.*

Teorema 36 *[13, Corolario5] Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es localmente conexo en p, entonces $C(X)$ es localmente conexo en $\{p\}$.*

En [14], Goodykoontz retoma el estudio de la conexidad local y en pequeño en los hiperespacios, y prueba el siguiente resultado.

Teorema 37 *[14, Teorema 2] Sean X un continuo y $M \in C(X)$. Entonces $C(X)$ es conexo en pequeño en M si y sólo si para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subset U$, toda sucesión en $C(X)$ cuyos elementos estén contenidos en U y que converge a M, tiene la propiedad de que, a partir de cierto momento, los elementos de la sucesión están contenidos en la componente de U que contiene a M.*

En otras palabras, $C(X)$ es conexo en pequeño en M, si para cada subconjunto abierto U de X tal que $M \subset U$ y cada sucesión $(M_n)_n$ en $C(X)$ tal que $M_n \subset U$ y $M_n \to M$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si C es la componente de U que contiene a M, entonces $M_n \subset C$ para cada $n \geq N$.

1.6 Conjuntos Mutuamente Separados.

Recordemos que dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X, están **mutuamente separados** si $Cl_X(A) \cap B = \varnothing$ y $A \cap Cl_X(B) = \varnothing$. Si un conjunto C es la unión de dos conjuntos mutuamente separados A y B, escribiremos $C = A \mid B$. Los siguientes resultados pertenecen a la Topología General, y una prueba de ellos aparece, por ejemplo en [25], como en cada caso la referencia lo indica.

Teorema 38 *[25, Lema 1.4] Supongamos que X es un espacio topológico y que Z es un subconjunto de X tal que $X - Z = A \mid B$. Entonces*

1. *si Z es cerrado, $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son cerrados en X,*
2. *si Z es conexo, $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son conexos.*

Por tanto, si X y Z son continuos, entonces $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son continuos.

Teorema 39 *[25, Lema 1.6] Sea Z un espacio topológico y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces Z tiene al menos n componentes si y sólo si posee n subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos dos a dos Z_1, Z_2, $\ldots$, Z_n tales que $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$.*

1.7 Continuos Especiales.

1.7.1 Introducción.

El propósito de esta sección, es el de introducir algunos continuos especiales que se utilizarán en este trabajo, así como ciertos resultados básicos sobre ellos. Una parte de este trabajo está dedicada a los continuos que se llaman *indescomponibles*. Otra buena parte, está dedicada a la detección de ciertos continuos llamados *n-odos*, así como de los llamados *n-celdas*.

1.7.2 Continuos Indescomponibles y Composantes.

Definición 40 *Un continuo X es* ***indescomponible*** *si no es descomponible.*

El sentido común nos hace pensar que todos los continuos son descomponibles. Sin embargo, existen construcciones de continuos que son indescomponibles (ver por ejemplo [27, 1.10]). Más aún, existen continuos tales que todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Definición 41 *Un continuo X es* ***hereditariamente indescomponible*** *si todos sus subcontinuos son indescomponibles.*

En [27, 1.23] se esboza la construcción de un continuo hereditariamente indescomponible.

Si x y y son dos puntos distintos de un continuo X, entonces no siempre es posible encontrar un subcontinuo propio de X que contiene a x y y. Para muestra, consideremos la cerradura en el plano del conjunto

$$W := \left\{\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2\right) : 0 < x \leq 1\right\}.$$

Sea $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(W)$. A X se le llama *continuo seno de $\frac{1}{x}$*. Si tomamos $a = (0,1)$ y $b = (1, sen 1)$, entonces a y b son dos puntos distintos de X y no existe ningún subcontinuo propio de X que los tenga. Así pues, dado un punto p en un continuo X, tiene sentido considerar la siguiente definición.

Definición 42 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces el conjunto:*

$$\varkappa(p) = \{x \in X : \text{ existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in A\}$$

es la ***composante de p en X***.

A continuación, mencionamos una serie de resultados básicos sobre las composantes de un continuo indescomponible.

Teorema 43 *Supongamos que X es un continuo. Entonces:*

1. *cada composante de X es un subconjunto conexo y denso en X.*

2. *si X es indescomponible, entonces tiene una cantidad no numerable de composantes,*

3. *si X es indescomponible, entonces sus composantes son ajenas dos a dos.*

Como referencia, 1. aparece probado en [16, Teoremas 3-44 y 3-45], 2. en [16, Teorema 3-46] y 3. en [16, Teorema 3-47]. Cuando X es descomponible, se puede probar que posee exactamente una o tres composantes (ver [27, Teorema 11.13]) y, más aún, que X mismo es siempre una composante de X (ver [27, Lema 11.10]). Sin embargo, en el presente trabajo no utilizaremos composantes de continuos descomponibles.

1.7.3 n-odos y n-celdas.

Dos conceptos ligados en los hiperespacios son los de n-odos y n-celdas. Cuando uno aparece, también aparece el otro y, en el presente trabajo, el modo de ir de un concepto al otro se utilizará con bastante frecuencia.

Definición 44 *Sean X un continuo y n un número natural. Un* **n-odo** *en X es un elemento $B \in C(X)$ para el cual existe un subcontinuo A de B, llamado el* **corazón de** *B, tal que $B - A$ tiene al menos n componentes. Decimos que un continuo X es* **atriódico** *si no contiene 3-odos.*

Como una consecuencia inmediata del Teorema 11, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 45 *Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $p \in X$. Entonces existe un elemento $T \in B(\{p\})$ tal que T es un n-odo si y solo si $B_\varepsilon(p)$ contiene un n-odo.*

Un ejemplo muy especial de n-odo es el llamado n-odo simple.

Definición 46 *Sean X un continuo y n un número natural. Decimos que X es un* **n-odo simple con vértice** *$p \in X$, si X es un n-odo tal que:*

1. *el corazón de X es el conjunto $\{p\}$ y*
2. *$X - \{p\}$ posee justo n componentes $C_1, \ldots, C_n$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $C_i \cup \{p\}$ es un arco.*

Definición 47 *Sea n un número natural. Una* **n-celda** *es un espacio homeomorfo a I^n.*

Uno de los resultados elementales que relacionan las nociones entre n-odo y n-celda, dice que si un continuo X contiene un n-odo, entonces el hiperespacio $C(X)$ contiene una n-celda. A continuación probamos un resultado un poco más general.

Teorema 48 *Si un continuo Y contiene un n-odo, entonces el hiperespacio $C(Y)$ contiene una n-celda. Más aún, si K es un subcontinuo de Y y T es un n-odo tal que $T \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(K)$ para alguna $\varepsilon > 0$, entonces es posible construir una n-celda $\mathcal{T}$ en $C(Y)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que Y contiene un n-odo T y que existen $\varepsilon > 0$ y $K \in C(Y)$ tales que $T \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(K)$. Como T es un n-odo, existe $B \in C(T)$ tal que $T - B$ tiene al menos n componentes. Esto implica que existen n conjuntos no vacíos y mutuamente separados $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que $T - B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ (Teorema 39). Entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $B \cup B_i$ es un subcontinuo de T (Teorema 38), por lo que podemos tomar un arco ordenado $\lambda_i : I \to C(T)$ de B a $B \cup B_i$. Definamos ahora una función $h : I^n \to C(T)$ como

$$h(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \lambda_1(t_1) \cup \lambda_2(t_2) \cup \cdots \cup \lambda_n(t_n).$$

Entonces h es continua (Teorema 20), $h(0, 0, \ldots, 0) = B$ y

$$h(1, 1, \ldots, 1) = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = T. \tag{1.2}$$

Afirmamos que

1) h es inyectiva.

Para ver 1), supongamos que $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ y $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ son dos puntos distintos en I^n. Entonces existe $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ tal que $t_i\neq r_i$. Supongamos, sin perder generalidad, que $t_i<r_i$. Entonces, como λ_i es un arco ordenado, resulta que $\lambda_i(t_i)\subsetneq\lambda_i(r_i)$. Tomemos $x\in\lambda_i(r_i)-\lambda_i(t_i)$. Como $B\subset\lambda_i(t_i)$, tenemos que $x\notin B$. Si $x\in\lambda_1(t_1)\cup\lambda_2(t_2)\cup\cdots\cup\lambda_n(t_n)$, entonces existe $j\neq i$ tal que $x\in\lambda_j(t_j)$. Luego $x\in B_j\cup B$ y, como $x\notin B$, se tiene que $x\in B_j$. Ahora bien, por una parte $x\in\lambda_i(r_i)-\lambda_i(t_i)$, así que $x\in B\cup B_i$. Por otra, $x\notin B$, y entonces $x\in B_i$. Esto implica que $x\in B_i\cap B_j$, lo cual es absurdo ya que B_i y B_j son ajenos. Entonces $h(t_1,t_2,\ldots,t_n)\neq h(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, y así h es inyectiva.

Tomemos ahora un punto $(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in I^n$ tal que, para cada $i=1,2,\ldots,n$, $r_i<1$ y

$$C=h(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(T).$$

Entonces

$$H(K,C)\le H(K,T)+H(T,C)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad (1.3)$$

Hagamos $f=h|_{[r_1,1]\times[r_2,1]\times\cdots\times[r_n,1]}$. Por 1), $f:[r_1,1]\times[r_2,1]\times\cdots\times[r_n,1]\to C(T)$ es inyectiva, y por (1.2), $f(1,1,\ldots,1)=T$. Por tanto, $\mathcal{T}=f([r_1,1]\times[r_2,1]\times\cdots\times[r_n,1])$ es una n-celda en $C(Y)$ que tiene a T. Más aún

2) $\mathcal{T}\subset B_\varepsilon(K)$.

En efecto, sea $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in[r_1,1]\times[r_2,1]\times\cdots\times[r_n,1]$. Para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\lambda_i(t_i)\subset B\cup B_i\subset T$$

así que

$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\lambda_1(t_1)\cup\lambda_2(t_2)\cup\cdots\cup\lambda_n(t_n)\subset T\subset N(\varepsilon,K).$$

Por otra parte, por (1.3) y el hecho de que $C\subset f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, tenemos que

$$K\subset N(\varepsilon,C)\subset N(\varepsilon,f(t_1,t_2,\ldots,t_n))$$

y de esta manera, $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B_\varepsilon(K)$, cumpliéndose 2). ∎

El problema de si el inverso del resultado anterior es cierto, estuvo abierto durante muchos años hasta que, en 1988 A. Illanes lo resolvió afirmativamente. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 49 *[18, Teorema 1.9] El hiperespacio $C(X)$ de un continuo X contiene n-celdas si y sólo si X contiene n-odos.*

1.7.4 Una Dendrita sin Arcos Libres.

En el Capítulo 8, utilizaremos una dendrita D que conviene mencionar en este momento. Pero antes, definamos lo que es un dendrita.

Definición 50 *Un continuo X es **unicoherente**, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, resulta que la intersección $A \cap B$ es conexa. X es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.*

Definición 51 *Un **dendroide** es un continuo hereditariamente unicoherente y conexo por trayectorias. Una **dendrita** es un dendroide localmente conexo.*

Definición 52 *Un **arco libre** en un continuo X es un arco $\alpha \subset X$ tal que el interior de α en X es no vacío.*

En vista de que una curva cerrada simple no es unicoherente, tenemos que una dendrita no contiene curvas cerradas simples. Construir dendritas es sencillo, basta por ejemplo tomar un arco o un triodo simple. Existen también dendritas sin arcos libres. A continuación veremos una manera de construirlas.

Consideremos, en el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$, el triodo simple

$$D_1 = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$$

Es claro que D_1 está constituido por tres segmentos de recta, a saber $[-1,0] \times \{0\}$, $[0,1] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0,1]$, como se muestra en la Figura 1.1.

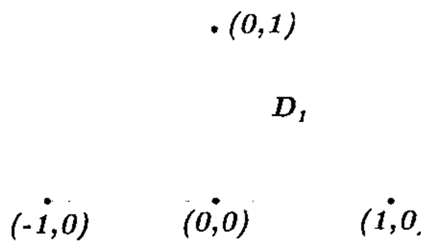

Figura 1.1:

Por el punto medio de cada uno de estos segmentos, tracemos un segmento perpendicular a ellos. A saber, tomemos a D_2 como el continuo:

$$D_2 = D_1 \cup \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\} \times \left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \cup \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right).$$

Notemos que D_2 está constituido por 9 segmentos de recta, como se muestra en la Figura 1.2.

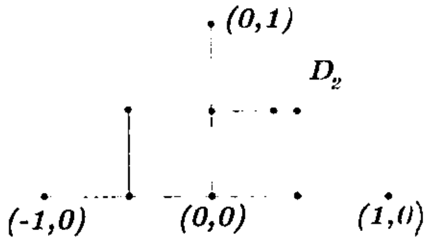

Figura 1.2:

Por el punto medio de cada uno de estos segmentos, tracemos un segmento pequeño, perpendicular a ellos. La Figura 1.3 muestra al continuo D_3:

Continuando con este procedimiento, obtenemos una sucesión creciente $(D_n)_n$ de dendritas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la dendrita D_n aún posee arcos libres, pero si definimos:

$$D = Cl_{\mathbb{R}^2}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) \tag{1.4}$$

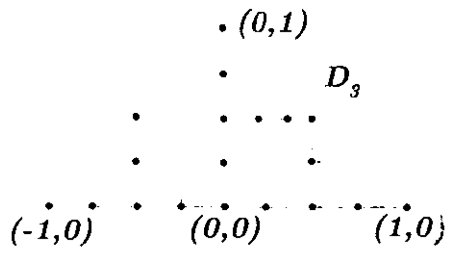

Figura 1.3:

entonces D es una dendrita que no contiene arcos libres (ver [8, p. 490]). Esta dendrita la utilizaremos en la sección 8.3, para probar que la clase de los dendroides no está C-determinada.

1.8 Propiedad de Kelley.

Si X es un continuo entonces el hiperespacio $C(X)$ de X no necesariamente es contraíble. Una propiedad topológica sobre X, que implica que $C(X)$ sea contraíble, es la *propiedad de Kelley.*

Definición 53 *Un continuo X tiene la **propiedad de Kelley** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe un elemento $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Una manera de ver que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $C(X)$ es contraíble, es la siguiente: consideremos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ y, para cada $(A,t) \in C(X) \times [0,\infty)$, definamos

$$L_\mu(A,t) = \begin{cases} \bigcup \{K \in C(X) : A \subset K \text{ y } \mu(K) = t\}, & \text{si } \mu(A) \leq t, \\ A, & \text{si } \mu(A) \geq t. \end{cases} \tag{1.5}$$

En [1, Teorema 3.10], se prueba que para cada $(A,t) \in C(X) \times [0,\infty)$, $L_\mu(A,t) \in C(X)$. Por tanto, $L_\mu : C(X) \times [0,\infty) \to C(X)$. Más aún, es fácil ver que $L_\mu(A,0) = A$ y $L_\mu(A,\mu(X)) = X$. Así que, para que L_μ resulte ser una contracción, sólo falta verificar que es una función continua. En [1, Corolario 3.4], se prueba que cuando X tiene la propiedad de Kelley, la función L_μ es continua. De esta manera, $C(X)$ es contraíble cuando X tiene la propiedad de Kelley. En [1, Teorema 3.11], se prueba que si $A \in C(X)$ entonces $L_\mu(A,t) \subset L_\mu(A,s)$ siempre que $t \leq s$ y $t, s \in I$.

La función L_μ será de gran utilidad en el Capítulo 8.

1.9 Golpes en la Frontera.

Terminamos este capítulo mencionando uno de los teoremas importantes de la teoría de los continuos. Éste dice que las componentes de un conjunto llegan hasta su frontera.

Teorema 54 (De Los Golpes en la Frontera) *[27, Teorema 5.6] Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E entonces $Cl_X(K) \cap Fr_X(E) \neq \emptyset$.*

Gracias al teorema de los golpes en la frontera se puede probar, por ejemplo, que existen arcos ordenados en 2^X. Una consecuencia del teorema de los golpes en la frontera, es la existencia de subcontinuos propios y no degenerados en todo continuo X (afirmación nada evidente). Más aún, si X es un continuo y A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, entonces el teorema de los golpes en la frontera, garantiza la existencia de un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$ (ver por ejemplo [27, Corolario 5.5] y la parte (21) de [26, Teorema 1.8]).

Capítulo 2

Continuos con Hiperespacio Único.

2.1 Introducción.

En el capítulo anterior, presentamos las nociones fundamentales para este trabajo. En la subsección 1.2.2, definimos el hiperespacio $C(X)$ de los subcontinuos de un continuo X. Como probaremos en el siguiente teorema, continuos homeomorfos poseen hiperespacios de subcontinuos homeomorfos.

Teorema 55 *Supongamos que X y Y son dos continuos homeomorfos. Entonces los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Por el Teorema 29, la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es continua. Si K es un subcontinuo de Y entonces $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X y $C(f)\left(f^{-1}(K)\right) = f\left(f^{-1}(K)\right) = K$, así que $C(f)$ es suprayectiva. Para ver que $C(f)$ es inyectiva, tomemos dos subcontinuos A y B de X tales que $C(f)(A) = C(f)(B)$. Entonces $f(A) = f(B)$, por lo que $A = f^{-1}(f(B)) = B$ y, con esto, $C(f)$ es inyectiva. Tenemos entonces que $C(f)$ es una función continua y biyectiva del compacto $C(X)$ al espacio Hausdorff $C(Y)$. Por tanto, $C(f)$ es un homeomorfismo. ∎

El recíproco del teorema anterior no es cierto. Para esto, haremos ver que $C(I)$ es homeomorfo a $C(S^1)$, mostrando que ambos espacios son una 2-celda.

Una manera de mostrar que $C(I)$ es una 2-celda es la siguiente: notemos que cada subcontinuo de I es de la forma $[a,b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$, por lo que podemos definir una función $f : C(I) \to \mathbb{R}^2$ por $f([a,b]) = (a,b)$. Es claro que la función f así definida es inyectiva. No es difícil probar que f es una función continua. Puesto que $C(I)$ es compacto y $\mathbb{R}^2$ es un espacio de Hausforff, f es un homeomorfismo en su imagen, que denotaremos por $\mathcal{F}$. Naturalmente, $\mathcal{F} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ es un triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices en los puntos $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$. Por tanto, $C(I)$ es homeomorfo a dicho triángulo $\mathcal{F}$, que por supuesto es una 2-celda.

Para ver ahora que $C(S^1)$ es una 2-celda, notemos que cada subcontinuo propio de S^1 es un arco de circunferencia A, que está completamente determinado por su longitud $l(A)$ y su punto medio $m(A)$. Sea D el disco acotado por S^1 descrito en coordenadas polares. Si para cada subcontinuo propio A de S^1, definimos $\theta_{m(A)}$ como el ángulo formado por el eje polar y el segmento de recta que une al polo con el punto $m(A)$, entonces podemos definir una función $g : C(S^1) \to D$ como $g(A) = \left(\theta_{m(A)}, 1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right)$ si $A \neq S^1$ y $g(S^1) = (0,0)$. No es difícil probar que la función g, así definida, es un homeomorfismo. Por tanto, $C(S^1)$ es homeomorfo al disco D, que claro está es una 2-celda. Como consecuencia de esto, los espacios no homeomorfos I y S^1 tienen hiperespacios de subcontinuos homeomorfos.

Existen, sin embargo, familias de continuos cuyos elementos satisfacen el recíproco del teorema anterior. Este tipo de familias son de interés en este trabajo. Asimismo, estamos interesados en la determinación de continuos X con *hiperespacio único*, esto es, con la propiedad de que si Y es un continuo tal que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

2.1.1 Continuos C-determinados.

Como mencionamos en la sección anterior, existen familias de continuos cuyos elementos cumplen el recíproco del Teorema 55. Dichos continuos se dicen que están *C-determinados*. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 56 *Los miembros de una clase de continuos Λ están* ***C-determinados****, si cada vez que demos dos elementos $X, Y \in \Lambda$ tales que $C(X)$ es* *homeomorfo a $C(Y)$, sucede que X es homeomorfo a Y.*

La noción de continuos C-determinados, fue introducida en 1978 por Sam B. Nadler, Jr. luego de que en [26, Teorema 0.60], hizo ver que los continuos hereditariamente indescomponibles están C-determinados. En [9, Teorema 9.1], R. Duda probó que las gráficas finitas que son diferentes del arco y la curva cerrada simple, están C-determinadas. Este resultado se menciona también en [26, Teorema 0.59]. Posteriormente, en [26, Pregunta 0.62], Nadler realiza la siguientes preguntas:

Preguntas: ¿Qué otras clases de continuos, aparte de las mencionados en (0.59) y (0.60), están C-determinadas?, ¿es cierto que la clase de los continuos encadenables está C-determinada?, ¿es cierto que la clase de los continuos circularmente encadenables está C-determinada?, ¿y la clase de los abanicos?

Al respecto, en 1979, Carl Eberhart, Jr. y Sam B. Nadler, Jr. probaron que los abanicos suaves están C-determinados (ver [12, Corolario 3.3]). En 1997, Sergio Macías probó que los continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos, están C-determinados (ver [24, Teorema 3]). En ese mismo año, Alejandro Illanes probó que los continuos encadenables no están C-determinados (ver [21, Teorema 2]), respondiendo así en negativo a la segunda pregunta de Nadler. En [22], Alejandro Illanes probó que los abanicos no están C-determinados, respondiendo así en negativo a la cuarta pregunta de Nadler. El problema de si los continuos circularmente encadenables están C-determinados, permanece aún sin respuesta.

En resumen, las clases de continuos que se conocen están C-determinadas, son las siguientes:

1. Gráficas finitias diferentes del arco y la curva cerrada simple.

2. Continuos hereditariamente indescomponibles.

3. Abanicos suaves.

4. Continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

Uno de los propósitos de este trabajo es alargar la lista anterior. Al respecto, veremos que las siguientes clases de continuos están C-determinadas:

5. Compactaciones métricas del espacio $[0, \infty)$ con residuo no degenerado (Teorema 118).

6. Aquellos que se pueden escribir como dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo (Teorema 126).

7. Compactaciones métricas de la recta real con residuo no degenerado (Teoremas 134 y 154).

2.1.2 Continuos con Hiperespacio Único.

Una especie de generalización a la noción de clases C-determinadas de continuos se da en la siguiente definición.

Definición 57 *Decimos que un continuo X tiene* ***hiperespacio único****, si cada vez que Y sea un continuo tal que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, resulta que X es homeomorfo a Y.*

Como ya mencionamos anteriormente, el objetivo principal del presente trabajo, es el de la determinación de continuos con hiperespacio único. Naturalmente los primeros continuos por analizar, son los hereditariamente indescomponibles y las gráficas finitas diferentes de un arco y de una curva cerrrada simple (pues como vimos en la sección 2.1, el arco y la curva cerrada simple no tienen hiperespacio único). En las siguientes secciones, veremos que dichos continuos tienen hiperespacio único.

2.2 Hereditariamente Indescomponibles.

2.2.1 La Estructura de $C(X)$ cuando X es Indescomponible.

La sección (I.C) del libro de Nadler ([26]), lleva por título el mismo que le hemos dado a esta subsección. Por consiguiente, mencionaremos sin prueba los resultados a utilizar en la siguiente subsección, remitiendo al lector al libro de Nadler para las demostraciones de los mismos.

Teorema 58 *[26, Teorema 1.51] Un continuo X es indescomponible si y sólo si $C(X) - \{X\}$ no es conexo por trayectorias.*

Recordemos que para cualquier continuo X, el hiperespacio $C(X)$ es conexo por trayectorias. Por tanto, si $A, B \in C(X)$ entonces existe una trayectoria $\alpha : I \to C(X)$ de A a B en $C(X)$. Bien podrían existir otras trayectorias de A a B en $C(X)$, o bien, α podría ser la única trayectoria de A a B en $C(X)$. Cuando esto último sucede, X resulta ser hereditariamente indescomponible. Más aún, esta propiedad de hiperespacio caracteriza a los continuos hereditariamente indescomponibles, como se menciona en el siguiente teorema.

Teorema 59 *[26, Teorema 1.61] Un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si $C(X)$ es únicamente conexo por arcos, es decir, si dados $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$ existe sólamente un arco α uniendo a A y B en $C(X)$.*

Podemos decir aún más. A saber, si X es hereditariamente indescomponible, $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$ y α es un arco que une a A y a B en $C(X)$ entonces α es un arco ordenado en el caso en que $A \subset B$ o $B \subset A$, o bien α es la unión de dos arcos ordenados α_1 y α_2, en donde α_1 va de A a $\bigcup \alpha_1$ y α_2 va de B a $\bigcup \alpha_2$, cuando $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$. Lo anterior lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 60 *[26, Corolario 1.62] Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Si α es un arco en $C(X)$, entonces*

1. *α es un arco ordenado en $C(X)$, o bien*

2. *$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, en donde α_1 y α_2 son arcos ordenados en $C(X)$ tales que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \bigcup \alpha$.*

El resultado que a continuación presentamos, es la clave para la prueba de que los continuos hereditariamente indescomponibles están C-determinados. Dicho teorema dice que para estos continuos X, los puntos de corte de un arco en $C(X)$, son justo los subcontinuos no degenerados de X.

Teorema 61 *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Entonces un subcontinuo A de X es un punto de corte de un arco en $C(X)$ si y sólo si $A \notin F_1(X)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es un continuo hereditariamente indescomponible y que A es un subcontinuo de X. Supongamos además, que existe un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que A es un punto de corte de $\mathcal{A}$. Por el Teorema 60, $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en $C(X)$ o $\mathcal{A} = \alpha_1 \cup \alpha_2$, donde α_1 y α_2 son arcos ordenados en $C(X)$ con $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \bigcup \mathcal{A}$. Si $A \in F_1(X)$ entonces A es un extremo de cualquier arco ordenado que lo tenga. Sea cual sea la forma de $\mathcal{A}$ (un arco ordenado o la unión de dos arcos ordenados), obtenemos que A es un extremo de $\mathcal{A}$. De esta contradicción se deriva que $A \notin F_1(X)$.

($\Leftarrow$) Para probar la segunda parte del teorema, supongamos que $A \notin F_1(X)$. Mostraremos que existe un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que A es un punto de corte de $\mathcal{A}$. Si $A \neq X$, entonces fijemos un punto $a \in A$ y tomemos dos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$, α_1 de $\{a\}$ a A y α_2 de A a X. Definamos $\mathcal{A} = \alpha_1(I) \cup \alpha_2(I)$. Entonces $\mathcal{A}$ es un arco en $C(X)$ y, como A no es un punto extremo de $\mathcal{A}$, resulta que A es un punto de corte de $\mathcal{A}$.

Supongamos ahora que $A = X$. Tomemos a y b en diferentes composantes de X y arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$, α_1 de $\{a\}$ a X y α_2 de $\{b\}$ a X. Entonces la función $\alpha : I \to C(X)$ definida por $\alpha(t) = \alpha_1(2t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $\alpha(t) = \alpha_2(2 - 2t)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, es una trayectoria de $\{a\}$ a $\{b\}$ en $C(X)$ tal que $X \in \alpha(I)$. Debido a que a y b se encuentran en diferentes composantes de X sucede, por el Teorema 13, que $\alpha_1(I) \cap \alpha_2(I) = \{X\}$. Por tanto, $\mathcal{A} = \alpha(I)$ es un arco en $C(X)$ y, como A no es un punto extremo de $\mathcal{A}$, resulta que A es un punto de corte de $\mathcal{A}$. Esto concluye la prueba del teorema. ∎

Teorema 62 *[26, Teorema 0.60] La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles está C-determinada.*

Demostración. Sean X y Y dos continuos hereditariamente indescomponibles tales que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Supongamos que $h : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo. Afirmamos que

1) $h(F_1(Y)) = F_1(X)$.

Para ver 1), tomemos un punto $y \in Y$ y sea $A = h(\{y\})$. Si $A \notin F_1(X)$ entonces, por el Teorema 61, existe un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que A es un punto de corte de $\mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{B} = h^{-1}(\mathcal{A})$ es un arco en $C(Y)$ tal que $\{y\}$

es un punto de corte de $\mathcal{B}$. Por tanto, $\{y\} \notin F_1(Y)$, según el Teorema 61. Puesto que esto es un absurdo, $A \in F_1(X)$. De esta manera, $h(F_1(Y)) \subset F_1(X)$. Análogamente se prueba que $F_1(X) \subset h(F_1(Y))$. Esto muestra 1) y, como consecuencia de esto, $F_1(Y)$ es homeomorfo a $F_1(X)$. Por tanto, Y es homeomorfo a X. ∎

Teorema 63 *Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo hereditariamente indescomponible y que Y es un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Por el Teorema 59, $C(X)$ es únicamente conexo por arcos. Así que $C(Y)$ es también únicamente conexo por arcos. Entonces, aplicando nuevamente el Teorema 59, resulta que Y es hereditariamente indescomponible. Luego, por el Teorema 62, sucede que Y es homeomorfo a X. ∎

2.3 Gráficas Finitas.

Definición 64 *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son disjuntos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.*

En el artículo [9], R. Duda probó el siguiente teorema.

Teorema 65 *[9, Teorema 9.1] La clase de las gráficas finitas diferentes del arco y la curva cerrada simple está C-determinada.*

En esta sección probaremos que las gráficas finitas tienen hiperespacio único. Para esto, utilizaremos los resultados que se enuncian, sin prueba, en el siguiente lema.

Lema 66 *Supongamos que X es un continuo. Entonces*

1. *$C(X)$ es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo,*

2. *la dimensión de un continuo localmente conexo $C(X)$ es finita si y sólo si X es una gráfica finita.*

3. *$C(X)$ es un continuo localmente conexo y de dimensión finita si y sólo si X es una gráfica finita.*

A modo de referencia, la afirmación 1. del lema anterior, se debe a Vietoris y Wazewski y se encuentra en [26, Teorema 1.92], 2. se debe a Kelley y aparece en [26, Teorema 1.109]. Finalmente 3. es una consecuencia inmediata de 1. y 2.

Teorema 67 *Las gráficas finitas que no son arcos ni curvas cerradas simples, tienen hiperespacio único.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita que no es un arco ni una curva cerrada simple. Sea Y un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Como X es localmente conexo, resulta por la parte 1. del Lema 66, que $C(X)$ es localmente conexo. Entonces $C(Y)$ es localmente conexo. Ahora bien, como X es una gráfica finita, por la parte 2. del Lema 66, $C(X)$ tiene dimensión finita. Entonces $C(Y)$ tiene dimensión finita. Por tanto, aplicando la parte 3. del Lema 66, resulta que Y es una gráfica finita.

Si Y es un arco o una curva cerrada simple entonces, como ya hemos visto, $C(Y)$ es una 2-celda. Luego, $C(X)$ es una 2-celda. Esto implica que X es una gráfica finita que no contiene 3-odos, pues de lo contrario, $C(X)$ contendría 3-celdas lo cual es imposible (ver Teorema 49). Luego, X es un intervalo o una curva cerrada simple, y esto es absurdo. Por consiguiente, Y tiene que ser una gráfica finita diferente de un arco y de una curva cerrada simple. Entonces, por el Teorema 65, Y es homeomorfo a X. ∎

Como ya vimos, el arco y la curva cerrada simple comparten su hiperespacio de subcontinuos. Como consecuencia del siguiente teorema, si X es un arco y Y una curva cerrada simple, entonces Y es el único continuo no homeomorfo a X tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos.

Teorema 68 *Sea X un arco. Si Y es un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces Y es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Sean X un arco y Y un continuo tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Como X es una gráfica finita, por el Teorema 66, $C(X)$ es localmente conexo y de dimensión finita. Por tanto, $C(Y)$ es localmente conexo y de dimensión finita. Entonces, aplicando de nuevo el Teorema 66, Y es una gráfica finita. Si Y es diferente del arco y la curva cerrada simple entonces, por el Teorema 67, X es homeomorfo a Y.

Entonces, en particular, X no es un arco, lo cual es absurdo. Por tanto, Y es un arco o una curva cerrada simple. ∎

De manera similar se prueba el siguiente teorema.

Teorema 69 *Sea X una curva cerrada simple. Si Y es un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces Y es un arco o una curva cerrada simple.*

Así pues, si X es una curva cerrada simple y Y un arco, entonces Y es el único continuo no homeomorfo a X, tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos.

Capítulo 3

2-celdas y Triodos.

3.1 La Orilla de una 2-celda.

Definición 70 *Una* **2-celda** *en un espacio topológico X, es un subconjunto de X homeomorfo al cuadrado $I \times I$. Si D es una 2-celda en X y si $h : I \times I \to D$ es un homeomorfismo entonces el conjunto*

$$\begin{aligned} o(D) &= \{y \in D : y = h(x) \text{ para alguna } x \in Fr_{\mathbb{R}^2}(I \times I)\} \\ &= h\left(Fr_{\mathbb{R}^2}(I \times I)\right) \end{aligned}$$

se define como la **orilla** *de D.*

Notemos que $o(D)$ es un subconjunto cerrado de X. En esta sección, probaremos que si D es una 2-celda en X y T un arco en X tal que $T \cap o(D) = \emptyset$, entonces $T \cap D$ no separa a D. Antes mencionaremos una serie de resultados, la mayoría de ellos probados en [17], como en cada caso la referencia lo indica.

Definición 71 *Una función continua $f : X \to Y$ es* **inesencial** *si es homotópica a una constante. Si f no es inesencial entonces se dice que f es* **esencial**.

Lema 72 *[17, Teorema VI.13, p.100] Un subconjunto compacto C de $\mathbb{R}^n$ desconecta a $\mathbb{R}^n$ si y sólo si existe una función esencial de C a S^{n-1}.*

Lema 73 *[17, Teorema VI.4, p.83] Un espacio X tiene dimensión $\leq n$ si y sólo si para cada subconjunto cerrado C de X y cada función continua f de C en S^n, existe una extensión de f a X.*

Lema 74 *[31, Teorema 6.1, p.225] Toda función continua de un arco K en S^1 es inesencial.*

Teorema 75 *Supongamos que D es una 2-celda en un espacio topológico X. Si T es un arco en X tal que $T \cap o(D) = \varnothing$, entonces $T \cap D$ no separa por trayectorias a D.*

Demostración. Supongamos que $T \cap D$ separa por trayectorias a D. Como D es una 2-celda en X, existe un homeomorfismo $h : I \times I \to D$. Entonces el conjunto $E = h^{-1}(T \cap D)$ separa por trayectorias a $I \times I$. Ya que $I \times I$ es localmente conexo por trayectorias, esto significa que E separa a $I \times I$ ([16, Teorema 3-16]). Más aún, afirmamos que

1) E desconecta a $\mathbb{R}^2$.

En efecto, como E separa a $I \times I$ y es un subconjunto cerrado de $I \times I$, existen dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U y V de $I \times I$ tales que $(I \times I) - E = U \cup V$. Como $T \cap o(D) = \varnothing$, sucede que $E \cap o(I \times I) = \varnothing$. Por tanto, $o(I \times I)$ es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ contenido en $(I \times I) - E = U \cup V$. Así que, sin perder generalidad, podemos suponer que $o(I \times I) \subset U$. Luego, $o(I \times I) \cap V = \varnothing$. Afirmamos ahora que

1.1) V es abierto en $\mathbb{R}^2$.

Para ver esto, tomemos un abierto V_1 en $\mathbb{R}^2$ tal que $V_1 \cap (I \times I) = V$. Notemos que $V = V_1 \cap (I \times I) = (V_1 \cap Int_{\mathbb{R}^2}(I \times I)) \cup (V_1 \cap o(I \times I))$. Como $o(I \times I) \cap V = \varnothing$, tenemos que $o(I \times I) \cap V_1 = \varnothing$. Luego, $V = V_1 \cap (I \times I) = V_1 \cap Int_{\mathbb{R}^2}(I \times I)$. Esto prueba 1.1). Afirmamos que

1.2) $(\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup U$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

Como E es cerrado en $I \times I$ y, además, $(I \times I) - E = U \cup V$, tenemos por el Teorema 38, que $E \cup V$ es cerrado en $I \times I$ y por tanto también en $\mathbb{R}^2$. Notemos que

$$E \cup V = (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U)$$

En efecto, si $x \in E \cup V$ entonces es claro que $x \in I \times I$, y como $(E \cup V) \cap U = \varnothing$, $x \notin U$. Luego, $x \in (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U)$ y, de esta manera, $E \cup V \subset (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U)$. Tomemos ahora un punto $x \in (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U)$ y supongamos, para efectos de la prueba, que $x \notin E$. Entonces $x \in (I \times I) - E = U \cup V$ y, como $x \notin U$, tenemos que $x \in V$. Por tanto, $x \in E \cup V$, y así $(I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U) \subset E \cup V$. Luego, $E \cup V = (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U)$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 - [(\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup U] &= (\mathbb{R}^2 \cap (I \times I)) \cap (\mathbb{R}^2 - U) \\
&= (I \times I) \cap (\mathbb{R}^2 - U) \\
&= E \cup V
\end{aligned}$$

y como $E \cup V$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, concluimos que $(\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup U$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

Es claro que $(\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup U$ y V son dos subconjuntos ajenos y no vacíos de $\mathbb{R}^2$. Más aún, como $E \subset I \times I$, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 - E &= (\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup ((I \times I) - E) \\
&= (\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup (U \cup V) \\
&= [(\mathbb{R}^2 - (I \times I)) \cup U] \cup V
\end{aligned}$$

así que E desconecta a $\mathbb{R}^2$. Esto prueba 1).

Puesto que E es compacto existe, por el Lema 72, una función esencial $f : E \to S^1$. Definamos una función $g : T \cap D \to S^1$ como $g(x) = f(h^{-1}(x))$ para $x \in T \cap D$. Es claro que g es una función continua. Como f es esencial y $h^{-1}_{|T \cap D} : T \cap D \to E$ es un homeomorfismo, $g = f \circ h^{-1}_{|T \cap D}$ es una función esencial.

Ahora bien, T tiene dimensión 1, $T \cap D$ es un subconjunto cerrado de T y $g : T \cap D \to S^1$ es una función continua. Entonces, por el Lema 73, existe una extensión G de g a T. De acuerdo con el Lema 74, la función $G : T \to S^1$ es inesencial. Por tanto, la restricción de G a $T \cap D$ (es decir g) es una función inesencial. Esto es una contradicción, así que $T \cap D$ no separa por trayectorias a D. ∎

Supongamos que D es una 2-celda en un espacio topológico X. Si p es un punto en X tal que $p \notin o(D)$, entonces $\{p\} \cup D$ no separa por trayectorias a D, puesto que un subespacio de dimensión 0 de una 2-celda, no puede separarla ([17, Teorema IV.4]). Por tanto, el teorema anterior sigue siendo cierto si pedimos que T sea un singular (o sea un conjunto de un sólo punto) o un arco en X tal que $T \cap o(D) = \emptyset$.

3.2 La Semifrontera de un Continuo.

En esta sección, estamos interesados en localizar una 2-celda $\mathcal{D}$ en el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X, tal que $\mathcal{D}$ tiene un singular de X que no está en la orilla de $\mathcal{D}$. Para tal efecto, la noción de semifrontera de un continuo será de gran utilidad.

Definición 76 *Sean X un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$. Entonces la **semifrontera** de A se define como*

$$\begin{aligned} SB(A) &= \{B \in C(A) : \text{ existe una función continua } \alpha : I \to C(X) \\ &\quad \text{tal que } \alpha(0) = B \text{ y } \alpha(t) - A \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0\}. \end{aligned}$$

La noción de semifrontera, fue introducida en 1991 por A. Illanes en [19], y utilizada para obtener caracterizaciones del intervalo, las curvas cerradas simples, la conexidad local y la atriodicidad de los continuos. A continuación, mencionamos una serie de resultados básicos sobre la semifrontera de un continuo.

Lema 77 *[19, Teoremas 1.2 y 1.3] Sean X un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$. Entonces*

(a) $SB(A) = \{B \in C(A) :$ *existe un arco ordenado* $\alpha : I \to C(X)$ *tal que* $\alpha(0) = B$ *y* $\alpha(t) - A \neq \emptyset$ *para todo* $t > 0\}$.

(b) si $B \in SB(A)$ *y* $B \subset D \subset A$, *entonces* $D \in SB(A)$,

(c) $A \in SB(A)$,

(d) $SB(A)$ *es un subconjunto conexo por trayectorias de* $C(A)$,

(e) si $(B_n)_n$ es una sucesión en $C(A)$ tal que $B_n \to B$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in SB(A)$ y $B_n \cap B \neq \varnothing$, entonces $B \in SB(A)$.

En los siguientes dos teoremas, mencionamos formas de detectar elementos en la semifrontera de un subcontinuo propio de un continuo dado. En el primero de ellos, dado un subcontinuo propio K de un continuo X, mostramos que si A es un subcontinuo de X que toca a K y al complemento de K, entonces las componentes de $A \cap K$ están en la semifrontera de K. En el segundo, mostramos que para que un subcontinuo E de K pertenezca a la semifrontera de K, es suficiente con que E se pueda aproximar por subcontinuos de X, que contengan a E e intersecten al complemento de K. Este resultado es en realidad una ligera variante del Lema 77(e).

Teorema 78 *Sean X un continuo y $K \in C(X) - \{X\}$. Supongamos que A es un subcontinuo de X tal que $A \cap K \neq \varnothing$ y $A - K \neq \varnothing$. Si B es una componente de $A \cap K$ entonces $B \in SB(K)$.*

Demostración. Sea $\alpha : I \to C(X)$ un arco ordenado de B a A en $C(X)$. Entonces $\alpha(0) = B$ y, como B es una componente de $A \cap K$ y $B \subsetneq \alpha(t) \subset A$ para cada $t \in (0, 1]$, resulta que $\alpha(t) - K \neq \varnothing$ para cada $t > 0$. Esto prueba que $B \in SB(K)$. ∎

Teorema 79 *Sean X un continuo y $K \in C(X) - \{X\}$. Supongamos que $E \in C(K)$ y que para cada $\varepsilon > 0$, existe un subcontinuo L de X tal que $E \subset L$, $L - K \neq \varnothing$ y $H(L, E) < \varepsilon$. Entonces $E \in SB(K)$.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subcontinuo L_n de X tal que $E \subset L_n$, $L_n - K \neq \varnothing$ y $H(L_n, E) < \frac{1}{n}$. Notemos que $E \subset L_n \cap K$ para cada natural n. Sea C_n la componente de $L_n \cap K$ que contiene a E. Por el teorema anterior, cada $C_n \in SB(K)$. Además, $C_n \to E$ y $C_n \cap E \neq \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, por el Lema 77(e), $E \in SB(K)$. ∎

En el siguiente resultado, vemos que cada elemento en la semifrontera de un conjunto, contiene un elemento minimal, con respecto a la inclusión, que también está en la semifrontera del conjunto.

Lema 80 *[19, Teorema 1.4] Sean X un continuo y $A \in C(X) - \{X\}$. Si $B \in SB(A)$ entonces existe un elemento minimal (con respecto a la inclusión) $C \in SB(A)$ tal que $C \subset B$.*

Recordemos que un *n-odo* en un continuo X, es un elemento $B \in C(X)$ para el cual existe un subcontinuo A de B tal que $B - A$ tiene al menos n componentes. Recordemos también que un continuo X es *atriódico*, si no contiene 3-odos (también llamados *triodos*).

Si A es un subcontinuo propio de X entonces denotaremos por $m(A)$ al conjunto de los elementos minimales en $SB(A)$. En [19, Teorema 4.2] se prueba que, cuando un continuo X contiene un n-odo, es posible encontrar un subcontinuo propio de X con al menos n elementos minimales distintos en su semifrontera. A continuación mostraremos un resultado un poco más general.

Teorema 81 *Supongamos que X es un continuo y que U es un subconjunto abierto de X. Si U contiene n-odos entonces existe un subcontinuo propio E de X, tal que $E \subset U$ y $m(E)$ tiene al menos n elementos.*

Demostración. Supongamos que existe un n-odo B en X tal que $B \subset U$. Entonces existe $A \in C(B)$ tal que $B - A$ tiene al menos n componentes $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Aplicando los Teoremas 54 y 38, tenemos que $Cl_X(D_i) \cap A \neq \emptyset$ y $D_i \cup A \in C(X)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Fijando un punto en cada conjunto D_i y aplicando la regularidad de X, es posible encontrar un conjunto abierto V de X tal que $A \subset V \subset Cl_X(V) \subset U$ y $D_i - Cl_X(V) \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea E la componente de $Cl_X(V)$ tal que $A \subset E$. Es claro que $E \subset U$ y como $D_i - Cl_X(V) \neq \emptyset$, E es un subcontinuo propio de X. Afirmamos que:

1) para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $E \cap D_i \neq \emptyset$.

Para ver esto, sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y tomemos un arco ordenado $\alpha : I \to C(X)$ de A a $A \cup D_i$. Como el conjunto $\mathcal{U} = \{L \in C(X) : L \subset V\}$ es abierto en $C(X)$ y $A \in \mathcal{U}$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(A) \subset \mathcal{U}$. Aplicando la continuidad de α, existe $\xi > 0$ tal que si $0 \leq t < \xi$ entonces $H(\alpha(t), \alpha(0)) = H(\alpha(t), A) < \delta$. Por tanto, $D = \alpha\left(\frac{\xi}{2}\right)$ es un subcontinuo de X tal que $A \subsetneq D \in B_\delta(A)$, de donde $D \subset V$. Debido a que E es la componente de $Cl_X(V)$ que contiene a A y $D \subset Cl_X(V)$, tenemos que $D \subset E$. Por otra parte, $D = \alpha\left(\frac{\xi}{2}\right) \subset A \cup D_i$. De esta manera, tomando un punto $d \in D - A$, resulta que $d \in D \cap D_i$. Luego, $d \in E \cap D_i$ y así, $E \cap D_i \neq \emptyset$.

Afirmamos ahora que:

2) para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe un elemento $F_i \in SB(E)$ tal que $F_i \subset Cl_X(D_i)$.

En efecto, sean $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y F_i una componente de $Cl_X(D_i) \cap E$. Claramente $F_i \subset Cl_X(D_i)$. Ahora bien, como $E \subset Cl_X(V)$ y $D_i - Cl_X(V) \neq \varnothing$, tenemos que $Cl_X(D_i)$ es un subcontinuo de X tal que $Cl_X(D_i) - E \neq \varnothing$. Además, debido a que $Cl_X(D_i) \cap A \neq \varnothing$ y a que $A \subset E$, sucede que $Cl_X(D_i) \cap E \neq \varnothing$. Entonces, por el Teorema 78, $F_i \in SB(E)$. Esto prueba 2).

Tomemos ahora, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, un elemento minimal $E_i \in SB(E)$ tal que $E_i \subset F_i$ (ver Lema 80). Afirmamos que:

3) para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $E_i \cap D_i \neq \varnothing$.

Para ver esto, sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Aplicando 2) resulta que $E_i \subset F_i \subset Cl_X(D_i) \subset B$. Supongamos que $E_i \subset A$. Como $E_i \in SB(E)$, existe un arco ordenado $\lambda : I \to C(X)$ tal que $\lambda(0) = E_i$ y $\lambda(t) - E \neq \varnothing$ para cada $t > 0$. Ahora bien, como el conjunto $\mathcal{U} = \{L \in C(X) : L \subset V\}$ es abierto en $C(X)$ y $E_i \in \mathcal{U}$ (pues $E_i \subset A \subset V$), existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(E_i) \subset \mathcal{U}$. Aplicando la continuidad de λ, existe $\xi > 0$ tal que si $0 < t < \xi$ entonces $H(\lambda(t), E_i) < \delta$. De esta manera, $\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \in B_\delta(E_i) \subset \mathcal{U}$, por lo que $\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \subset V \subset Cl_X(V)$.

Ahora bien, como $E_i \subset A \subset \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)$, resulta que $\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)$ es un subconjunto conexo de $Cl_X(V)$ que intersecta a A. Entonces, debido a que E es la componente de $Cl_X(V)$ que intersecta a A, $\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \subset E$. Esto contradice el hecho de que $\lambda(t) - E \neq \varnothing$ para cada $t > 0$, y por tanto, $E_i \not\subset A$. Luego, $E_i \cap (B - A) \neq \varnothing$.

Debido a que $E_i \subset Cl_X(D_i) = A \cup D_i$ y $E_i \cap (B - A) \neq \varnothing$, sucede que $E_i \cap D_i \neq \varnothing$, probando así 3). Utilizando esto y el hecho de que $D_1, D_2, \ldots, D_n$ son componentes distintas de $B - A$, resulta que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son n elementos distintos en $m(E)$. ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 82 *[19, Teorema 4.2] Si un continuo X contiene un n-odo entonces existe un subcontinuo propio E de X, tal que $m(E)$ tiene al menos n elementos.*

En [19, Teorema 4.2], se muestra también que el recíproco del colorario anterior es cierto. A continuación, probaremos una serie de resultados que serán útiles para la prueba de otra versión del recíproco del Teorema 81, en el caso $n = 3$, que es el que utilizaremos en los capítulos posteriores.

Teorema 83 *Sea X un continuo y sea U un subconjunto abierto de X tal que U no contiene triodos. Entonces para cualesquiera $A, B \in C(X)$ tales que $A, B \subset U$, tenemos que $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes.*

Demostración. Supongamos que existen $A, B \in C(X)$ tales que $A, B \subset U$ y $A \cap B$ tiene al menos tres componentes C_1, C_2 y C_3. Sea $\alpha_1 : I \to C(X)$ un arco ordenado de C_1 a B. Como el conjunto

$$\mathcal{U}_1 = \{L \in C(X) : L \subset X - (C_2 \cup C_3)\ \}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a C_1, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(C_1) \subset \mathcal{U}_1$. Aplicando la continuidad de α_1, existe $t_1 > 0$ tal que $C_1' = \alpha_1(t_1) \in B_{\varepsilon_1}(C_1)$. Por tanto, C_1' es un subcontinuo de B tal que $C_1 \subsetneq C_1'$ y $C_1' \cap (C_2 \cup C_3) = \emptyset$. Tomemos ahora un arco ordenado $\alpha_2 : I \to C(X)$ de C_2 a B. Como el conjunto

$$\mathcal{U}_2 = \{L \in C(X) : L \subset X - (C_1' \cup C_3)\ \}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a C_2, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_2}(C_2) \subset \mathcal{U}_2$. Aplicando ahora la continuidad de α_2, existe $t_2 > 0$ tal que $C_2' = \alpha_2(t_2) \in B_{\varepsilon_2}(C_2)$. Por tanto, C_2' es un subcontinuo de B tal que $C_2 \subsetneq C_2'$ y $C_2' \cap (C_1' \cup C_3) = \emptyset$. Tomemos por último un arco ordenado $\alpha_3 : I \to C(X)$ de C_3 a B. Como el conjunto

$$\mathcal{U}_3 = \{L \in C(X) : L \subset X - (C_1' \cup C_2')\ \}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a C_3, existe $\varepsilon_3 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_3}(C_3) \subset \mathcal{U}_3$. Aplicando la continuidad de α_3, existe $t_3 > 0$ tal que $C_3'' = \alpha_3(t_3) \in B_{\varepsilon_3}(C_3)$. Por tanto, C_3'' es un subcontinuo de B tal que $C_3 \subsetneq C_3''$ y $C_3'' \cap (C_1' \cup C_2') = \emptyset$.

Definamos $T = A \cup C_1' \cup C_2' \cup C_3'$. Dada $i \in \{1, 2, 3\}$, C_i' es un subconjunto conexo de B que contiene propiamente a la componente C_i de $A \cap B$. Luego,

$C_i' - A \neq \varnothing$. Más aún, como los conjuntos C_1', C_2' y C_3' son ajenos dos a dos, los conjuntos $C_1' - A$, $C_2' - A$ y $C_3' - A$ están mutuamente separados. Puesto que

$$T - A = (C_1' - A) \cup (C_2' - A) \cup (C_3' - A),$$

T es un triodo en X. Notemos ahora que $T \subset A \cup B \subset U$, así que U contiene un triodo. Esto es absurdo y, por consiguiente, $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes. ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 84 *Si X es un continuo atriódico entonces para cualesquiera $A, B \in C(X)$, $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes.*

Recordemos ahora que si X es un continuo entonces un **triodo débil** en X es un subcontinuo T de X para el cual existen $A, B, C \in C(T)$ tales que $T = A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C \neq \varnothing$, $A \not\subseteq B \cup C$, $B \not\subseteq A \cup C$ y $C \not\subseteq A \cup B$. El siguiente teorema se utilizará con bastante frecuencia en esta sección.

Teorema 85 *[28, Teorema 1.8] Si un continuo X contiene un triodo débil T, entonces existe $R \in C(T)$ tal que R es un triodo.*

En el siguiente teorema, bajo las mismas suposiciones sobre X y U que en el Teorema 83, mostramos que si un subcontinuo propio K de X está contenido en U y posee al menos dos elementos minimales E y F en su semifrontera, entonces E y F se pueden "inflar" de manera que obtenemos dos subcontinuos E' y F' tales que, E' y F' se salen de K, están contenidos en U y se intersectan en K. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 86 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que K es un subcontinuo propio de X tal que $K \subset U$. Si $m(K)$ posee al menos dos elementos E y F entonces:*

1. *$E \cap F$ es conexo,*

2. *si $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$ son arcos ordenados tales que $\alpha_1(0) = E$, $\alpha_2(0) = F$ y $\alpha_1(t) - K \neq \varnothing \neq \alpha_2(t) - K$ para toda $t > 0$, entonces existen números $s_1, s_2 > 0$ tales que $E' = \alpha_1(s_1)$ y $F' = \alpha_2(s_2)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

i) $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$, $E' - K \neq \varnothing$ *y* $F' - K \neq \varnothing$,

ii) $E', F' \subset U$,

iii) $E' \cap F' \subset K$.

Más aún, si $H_1, H_2 \in 2^X$ *son tales que* $E \cap H_1 = \varnothing$ *y* $F \cap H_2 = \varnothing$ *entonces* E' *y* F' *se pueden construir de manera que* $E' \cap H_1 = \varnothing$ *y* $F' \cap H_2 = \varnothing$.

Demostración. Como $E, F \in SB(K)$, existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$ tales que $\alpha_1(0) = E$, $\alpha_2(0) = F$ y $\alpha_1(t) - K \neq \varnothing \neq \alpha_2(t) - K$ para toda $t > 0$. Para probar 1., supongamos que $E \cap F$ no es conexo. Como $E, F \subset K \subset U$, tenemos por el Teorema 83, que $E \cap F$ tiene justo dos componentes Q_1 y Q_2.

Sean $\beta_1, \beta_2 : I \to C(X)$ arcos ordenados de Q_1 a F y de Q_2 a F, respectivamente. Como $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ y las funciones β_1 y β_2 son continuas, existen números $t_1, t_2 > 0$ tales que $Q'_1 = \beta_1(t_1) \subset X - Q_2$ y $Q'_2 = \beta_2(t_2) \subset X - Q'_1$. Fijemos un punto $q_1 \in Q'_1 - Q_1$, un punto $q_2 \in Q'_2 - Q_2$ y tomemos un número $t_3 > 0$ tal que $Q = \alpha_1(t_3) \subset X - \{q_1, q_2\}$ y $Q \subset U$.

Afirmamos que el continuo

$$T = (E \cup Q'_1) \cup (E \cup Q'_2) \cup (E \cup Q)$$

es un triodo débil. En efecto, notemos primero que

$$\varnothing \neq E \subset (E \cup Q'_1) \cap (E \cup Q'_2) \cap (E \cup Q),$$

también notemos que

$$q_1 \in (Q'_1 \cup E) - [(E \cup Q'_2) \cup (E \cup Q)]$$

y

$$q_2 \in (Q'_2 \cup F) - [(E \cup Q'_1) \cup (E \cup Q)].$$

Tomando un punto $q_3 \in Q - K$ resulta que

$$q_3 \in (Q \cup E) - [(E \cup Q'_1) \cup (E \cup Q'_2)].$$

Esto prueba que T es un triodo débil. Notemos ahora que

$$T = E \cup Q'_1 \cup Q'_2 \cup Q \subset E \cup F \cup Q \subset K \cup Q \subset U.$$

dado que $K, Q \subset U$. Por tanto, T es un triodo débil contenido en U. Debido a que T contiene un triodo, U contiene un triodo y esto es absurdo. Por tanto, $E \cap F$ es conexo, y así 1. es cierto.

Para probar 2., tomemos dos elementos $H_1, H_2 \in 2^X$ tales que $E \cap H_1 = \varnothing$ y $F \cap H_2 = \varnothing$. Supongamos primero que $E \cap F = \varnothing$. Como la función α_1 es continua y el conjunto

$$\mathcal{U}_1 = \{A \in C(X) : A \subset [X - (H_1 \cup F)] \cap U\}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a $E = \alpha_1(0)$, existe un número $s_1 > 0$ tal que $E' = \alpha_1(s_1) \in \mathcal{U}_1$. Ahora bien, como la función α_2 es continua y el conjunto

$$\mathcal{U}_2 = \{A \in C(X) : A \subset [X - (H_2 \cup E')] \cap U\}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a $F = \alpha_2(0)$, existe un número $s_2 > 0$ tal que $F' = \alpha_2(s_2) \in \mathcal{U}_2$. Es claro que E' y F' satisfacen las condiciones i), ii) y iii) del teorema y que $E' \cap H_1 = \varnothing = F' \cap H_2$.

Supongamos ahora que $E \cap F \neq \varnothing$. Fijemos un punto $e \in E - F$ y un punto $f \in F - E$. Por la continuidad de α_1 y α_2 y el hecho de que los conjuntos

$$\mathcal{U}_1 = \{A \in C(X) : A \subset [X - (H_1 \cup \{f\})] \cap U\}$$

y

$$\mathcal{U}_2 = \{A \in C(X) : A \subset [X - (H_2 \cup \{e\})] \cap U\}$$

son abiertos en $C(X)$ que tienen a E y F, respectivamente, existen números $t_1, t_2 > 0$ tales que $E_1 = \alpha_1(t_1) \in \mathcal{U}_1$ y $F_1 = \alpha_2(t_2) \in \mathcal{U}_2$. Notemos que E_1 y F_1 satisfacen las siguientes propiedades:

a) $E \subsetneq E_1 \subset X - (H_1 \cup \{f\})$,
b) $F \subsetneq F_1 \subset X - (H_2 \cup \{e\})$,
c) $E_1 - K \neq \varnothing$ y $F_1 - K \neq \varnothing$,
d) $E_1, F_1 \subset U$.

Afirmamos que:

1) existe $0 < s_1 \leq t_1$ tal que $\alpha_1(s_1) \cap F_1 \subset K$.

Para mostrar 1) supongamos, por el contrario, que para cada $s \in (0, t_1]$, $\alpha_1(s) \cap F_1 \nsubseteq K$. Entonces, dado $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{k} < t_1$, $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1 \nsubseteq K$. Como $E, F_1 \subset U$ y U no contiene triodos, resulta por el Teorema 83, que $E \cap F_1$ tiene a lo más dos componentes C_1 y C_2. Afirmamos que:

1.1) la unión C, de las componentes de $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ que no intersectan a E, es un conjunto cerrado tal que $C \cap E = \varnothing$.

Para probar 1.1), supongamos primero que $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ es conexo. Como $E \cap F \neq \varnothing$ y está contenido en $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$, tenemos que $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ intersecta a E. Luego, $C = \varnothing$ es cerrado y claramente $C \cap E = \varnothing$. Si $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ no es conexo entonces, debido a que $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \subset F_1 \subset U$ y $F_1 \subset U$, tenemos por el Teorema 83, que $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ posee justo dos componentes D_1 y D_2. En vista de que $E \cap F$ es un subconjunto conexo de $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$, podemos suponer sin perder generalidad que $E \cap F \subset D_1$. Si $D_2 \cap E \neq \varnothing$ entonces, de nueva cuenta, $C = \varnothing$ es cerrado y $C \cap E = \varnothing$. Finalmente, si $D_2 \cap E = \varnothing$ entonces $C = D_2$ es cerrado y $C \cap E = \varnothing$. Esto prueba 1.1).

Afirmamos ahora que:

1.2) existe $z_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ tal que $\alpha_1(z_k) \cap C = \varnothing$.

En efecto, de acuerdo con 1.1), $X - C$ es un subconjunto abierto de X y $E \subset X - C$. Entonces, existe $z_k > 0$ tal que $\alpha_1(z_k) \subset X - C$. Como α_1 es un arco ordenado, podemos suponer, sin perder generalidad, que $z_k < \frac{1}{k}$. De esta manera 1.2) se cumple.

Por hipótesis, para cada $s \in (0, t_1]$, $\alpha_1(s) \cap F_1 \nsubseteq K$. Entonces, en particular

$$(\alpha_1(z_k) \cap F_1) - K \neq \varnothing,$$

por lo que podemos tomar un punto $x \in (\alpha_1(z_k) \cap F_1) - K$. Puesto que $z_k < \frac{1}{k}$ y α_1 es un arco ordenado, sucede que $x \in \alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$. Entonces, existe una componente D_k de $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$ tal que $x \in D_k$. Si $D_k \cap E = \varnothing$ entonces, de acuerdo con la definición de C, $D_k \subset C$, de donde $x \in C$. Esto significa que $x \in \alpha_1(z_k) \cap C$, lo cual contradice 1.2). Por tanto, $D_k \cap E \neq \varnothing$. Como $E \cap F_1 \subset \alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$, existe una componente C_k de $E \cap F_1$ tal que $C_k \subset D_k$.

Así pues, para cada número natural k tal que $\frac{1}{k} \leq t_1$, es posible encontrar una componente D_k de $\alpha_1\left(\frac{1}{k}\right) \cap F_1$, tal que $D_k \not\subseteq K$, $D_k \cap E \neq \varnothing$ y D_k contiene a una componente de $E \cap F_1$. Como $E \cap F_1$ posee a lo más dos componentes, existe una componente C_0 de $E \cap F_1$ tal que $C_0 \subset D_k$ para una infinidad de números naturales k tales que $\frac{1}{k} \leq t_1$. Por tanto, existen números naturales $k_1 < k_2 < \cdots$ tales que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $C_0 \subset D_{k_m}$ y $\frac{1}{k_m} \leq t_1$.

Tomemos ahora $m \geq 2$. Notemos que

$$C_0 \subset D_{k_m} \subset \alpha_1\left(\frac{1}{k_m}\right) \cap F_1 \subset \alpha_1\left(\frac{1}{k_{m-1}}\right) \cap F_1$$

así que $D_{k_m} \subset D_{k_{m-1}}$. Por tanto

$$D_{k_m} \to D = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} D_{k_m}.$$

Como $\alpha_1\left(\frac{1}{k_m}\right) \to \alpha_1(0) = E$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, $D_{k_m} \subset \alpha_1\left(\frac{1}{k_m}\right)$ tenemos que, en el límite, $D \subset E \subset K$. Tomemos ahora $\varepsilon > 0$. Como $D_{k_m} \to D$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(D_{k_m}, D) < \varepsilon$ siempre que $m \geq N$. Definamos $L = D_{k_N}$. Entonces L es un subcontinuo de X, tal que $D \subset L$, $L - K \neq \varnothing$ y $H(L, D) < \varepsilon$ por lo que, aplicando el Teorema 79, $D \in SB(K)$.

Debido a que E es un elemento minimal en $SB(K)$ que contiene al elemento $D \in SB(K)$, necesariamente $D = E$. Pero entonces, si $m \in \mathbb{N}$

$$E = D \subset D_{k_m} \subset \alpha_1\left(\frac{1}{k_m}\right) \cap F_1 \subset F_1$$

y en particular, $e \in F_1$. Esto contradice b) y prueba así, que 1) se cumple. De manera similar, se prueba que:

2) existe $0 < s_2 \leq t_2$ tal que $E_1 \cap \alpha_2(s_2) \subset K$.

Definamos $E' = \alpha_1(s_1)$ y $F' = \alpha_2(s_2)$. Entonces, de acuerdo con 1) y 2),

$$E' \cap F' = \alpha_1(s_1) \cap \alpha_2(s_2) \subset E_1 \cap \alpha_2(s_2) \subset K.$$

Notemos ahora que, por d), $E' \subset E_1 \subset U$ y $F' \subset F_1 \subset U$. Además, por las propiedades de α_1 y α_2, $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$, $E' - K \neq \emptyset$ y $F' - K \neq \emptyset$. Más aún, por a) y b), $E' \cap H_1 = \emptyset$ y $F' \cap H_2 = \emptyset$. Esto termina la prueba. ∎

Estamos ahora en condiciones de probar el recíproco del Teorema 81, para el caso $n = 3$.

Teorema 87 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que K es un subcontinuo propio de X tal que $K \subset U$. Entonces $|m(K)| \leq 2$.*

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo propio K de X, tal que $K \subset U$ y $|m(K)| \geq 3$. Sean E_1, E_2 y E_3 tres elementos minimales distintos en $SB(K)$. Para cada $i \in \{1,2,3\}$, sea $\alpha_i : I \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha_i(0) = E_i$ y $\alpha_i(t) - K \neq \emptyset$ para toda $t > 0$. Dados $i, j \in \{1,2,3\}$ con $i \neq j$, aplicamos el Teorema 86 a los elementos minimales E_i y E_j, y obtenemos números $s_{ij}, s_{ji} > 0$ tales que $E_{ij} = \alpha_i(s_{ij})$ y $E_{ji} = \alpha_j(s_{ji})$ satisfacen que $E_i \subsetneq E_{ij}$, $E_j \subsetneq E_{ji}$, $E_{ij} - K \neq \emptyset$, $E_{ji} - K \neq \emptyset$, $E_{ij}, E_{ji} \subset U$ y $E_{ij} \cap E_{ji} \subset K$.

Dado $i \in \{1,2,3\}$, definimos $s_i = mín\{s_{ij} : j \neq i\}$ y hacemos $E^i = \alpha_i(s_i)$. Entonces, si $i \neq j$

$$E^i \cap E^j \subset E_{ij} \cap E_{ji} \subset K$$

y también, para cada $i \in \{1,2,3\}$, $E_i \subsetneq E^i$, $E^i - K \neq \emptyset$ y $E^i \subset U$. Definamos ahora $T = K \cup E^1 \cup E^2 \cup E^3$. Es claro que $T \subset U$ y que

$$T - K = (E^1 - K) \cup (E^2 - K) \cup (E^3 - K).$$

Además, si $i \neq j$

$$Cl_X\left(E^i - K\right) \cap (E^j - K) \subset E^i \cap (E^j - K) = \emptyset$$

ya que $E^i \cap E^j \subset K$. Por tanto, los conjuntos $E^1 - K$, $E^2 - K$ y $E^3 - K$ están mutuamente separados, y como son no vacíos, T es un triodo contenido en U. Esto es absurdo, y por consiguiente, $|m(K)| \leq 2$ ∎

Así pues, para el caso $n = 3$, el siguiente teorema caracteriza la existencia de triodos en términos de la semifrontera.

Teorema 88 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X. Entonces U contiene triodos si y sólo si existe un subcontinuo propio E de X, tal que $E \subset U$ y $m(E)$ tiene al menos tres elementos.*

Demostración. La parte ($\Rightarrow$) es el Teorema 81 con $n = 3$, y la parte ($\Leftarrow$). es el Teorema 87. ∎

De acuerdo con el teorema anterior, si U es un subconjunto abierto de un continuo X y U no contiene triodos, entonces un subcontinuo propio K de X contenido en U, tiene a lo más dos elementos minimales E y F en su semifrontera. Supongamos que $SB(K)$ tiene justo dos elementos minimales E y F. Entonces, el Teorema 86 garantiza que E y F se pueden "inflar" de manera que obtenemos subcontinuos E' y F' con las propiedades enunciadas en ese teorema. A continuación, veremos que E' y F' se pueden recortar, de manera que obtenemos nuevos subcontinuos E'' y F'' con propiedades más finas a las que enunciamos en el Teorema 86.

Teorema 89 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que K es un subcontinuo propio de X tal que $K \subset U$. Si $m(K)$ tiene exactamente dos elementos E y F, entonces:*

1. *$E \cap F$ es conexo,*
2. *existen dos subcontinuos E' y F' de X tales que*

   i) $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$, $E' - K \neq \emptyset$ y $F' - K \neq \emptyset$,

   ii) $E' \cap K$ y $F' \cap K$ son conexos y están en $SB(K)$,

   iii) $E' \cap F'$ es un subconjunto conexo de K,

   iv) $E', F' \subset U$.

Más aún, si $H_1, H_2 \in 2^X$ son tales que $E \cap H_1 = \emptyset$ y $F \cap H_2 = \emptyset$ entonces E' y F' se pueden construir de manera que $E' \cap H_1 = \emptyset$ y $F' \cap H_2 = \emptyset$.

Demostración. Por el Teorema 86, $E \cap F$ es conexo, así que 1. se cumple. Para probar 2., tomemos dos elementos $H_1, H_2 \in 2^X$ tales que $E \cap H_1 = \emptyset$ y $F \cap H_2 = \emptyset$. Como $E, F \in SB(K)$, existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$ tales que $\alpha_1(0) = E$, $\alpha_2(0) = F$ y $\alpha_1(t) - K \neq \emptyset \neq \alpha_2(t) - K$ para toda $t > 0$. Debido a que E y F son elementos minimales distintos de $SB(K)$, podemos elegir un punto $e \in E - F$ y un punto $f \in F - E$. En vista de que $H_1 \cup \{f\}, H_2 \cup \{e\} \in 2^X$, $E \cap (H_1 \cup \{f\}) = \varnothing$ y $F \cap (H_2 \cup \{e\}) = \varnothing$. Aplicando el Teorema 86, existen números $s_1, s_2 > 0$ tales que $E_1 = \alpha_1(s_1)$ y $F_1 = \alpha_2(s_2)$ satisfacen las siguientes propiedades.

a) $E \subsetneq E_1 \subset X - (H_1 \cup \{f\})$,

b) $F \subsetneq F_1 \subset X - (H_2 \cup \{e\})$,

c) $E_1 - K \neq \varnothing$ y $F_1 - K \neq \varnothing$,

d) $E_1, F_1 \subset U$,

e) $E_1 \cap F_1 \subset K$.

Más aún, podemos suponer que $E_1 \cap K$ es conexo. En efecto, como $E_1, K \subset U$, si $E_1 \cap K$ no es conexo entonces, por el Teorema 83, posee justo dos componentes C_1 y D_1. Como $E \cap F$ es conexo y está contenido en $E_1 \cap K$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $E \cap F \subset C_1$. Sea $\beta : I \to C(X)$ un arco ordenado de C_1 a E_1. Tomemos $t > 0$ tal que $E_2 = \beta(t) \subset X - D_1$. Afirmamos que E_2 satisface las propiedades a), c), d) y e) anteriormente enunciadas y que, además, $E_2 \cap K$ es conexo.

Para probar que E_2 satisface a), notemos que E es un conjunto conexo contenido en $E_1 \cap K = C_1 \cup D_1$ y que C_1 es la componente de $E_1 \cap K$ que contiene a $E \cap F$. Luego, $E \subset C_1$ y, como $C_1 \subsetneq E_2$, tenemos que $E \subsetneq E_2$. Dado que $E_2 \subset E_1 \subset X - (H_1 \cup \{f\})$, E_2 satisface a), es decir $E \subsetneq E_2 \subset X - (H_1 \cup \{f\})$. Como C_1 es una componente de $E_1 \cap K$ y $C_1 \subsetneq E_2 \subset E_1$, tenemos que $E_2 \not\subset K$. Luego, $E_2 - K \neq \varnothing$ y así E_2 satisface c). Debido a que $E_2 \subset E_1 \subset U$, E_2 satisface d). De la misma manera, $E_2 \cap F_1 \subset E_1 \cap F_1 \subset K$ así que E_2 satisface e).

Probaremos ahora que $E_2 \cap K = C_1$. Es claro que $C_1 \subset E_2 \cap K$. Supongamos ahora que $E_2 \cap K \not\subset C_1$ y tomemos un punto $z \in E_2 \cap K$ tal que $z \notin C_1$. Como $E_2 \subset E_1$, resulta que $z \in E_1 \cap K = C_1 \cup D_1$, así que $z \in D_1$ ya que $z \notin C_1$. Luego $z \in E_2 \cap D_1$. Esto es absurdo ya que, por construcción, $E_2 \cap D_1 = \varnothing$. Por tanto, $E_2 \cap K \subset C_1$ y con esto $E_2 \cap K = C_1$, probando así que $E_2 \cap K$ es conexo.

Como E_2 satisface las mismas propiedades que E_1, a saber a), c), d) y e), y además $E_2 \cap K$ es conexo, podemos renombrar a E_2 como E_1 y de esta manera suponer que $E_1 \cap K$ es conexo. Similarmente, podemos suponer que $F_1 \cap K$ es conexo. Por el Teorema 78, $E_1 \cap K, F_1 \cap K \in SB(K)$.

Mostraremos ahora que $E_1 \cap F_1$ es conexo. Para esto, supongamos por el contrario que $E_1 \cap F_1$ no es conexo. Entonces, debido a que $E_1, F_1 \subset U$ resulta, por el Teorema 83, que $E_1 \cap F_1$ tiene justo dos componentes C y D. Sin perder generalidad, podemos suponer que $E \cap F \subset C$. Ahora bien, como $E_1 \cap F_1 \subset K$, las componentes C y D están contenidas en K. Tomemos un arco ordenado $\beta_1 : I \to C(X)$ de C a F_1 y un arco ordenado $\beta_2 : I \to C(X)$ de D a F_1. Por la continuidad de β_1 y β_2, existen números $t_1, t_2 > 0$ tales que $C' = \beta_1(t_1)$ y $D' = \beta_2(t_2)$ son ajenos. Fijemos un punto $c_1 \in C' - C$, un punto $d_1 \in D' - D$ y consideremos el conjunto

$$T = [(E_1 \cap K) \cup C'] \cup [(E_1 \cap K) \cup D'] \cup [(E_1 \cap K) \cup E_1].$$

Notemos que

$$\emptyset \neq E \subset [(E_1 \cap K) \cup C'] \cap [(E_1 \cap K) \cup D'] \cap [(E_1 \cap K) \cup E_1]$$

y que

$$d_1 \in [(E_1 \cap K) \cup D'] - \{[(E_1 \cap K) \cup C'] \cup [(E_1 \cap K) \cup E_1]\}$$

ya que, si $d_1 \in E_1$, entonces $d_1 \in E_1 \cap F_1 = C \cup D$, de donde $d_1 \in C$ pues $d_1 \notin D$. Luego, $d_1 \in D' \cap C \subset D' \cap C'$, lo cual contradice al hecho de que C' y D' son ajenos. De manera similar se prueba que

$$c_1 \in [(E_1 \cap K) \cup C'] - \{[(E_1 \cap K) \cup D'] \cup [(E_1 \cap K) \cup E_1]\}.$$

Tomemos ahora un punto $e_1 \in E_1 - K$. Como $E_1 \cap F_1 \subset K$ y $e_1 \notin K$, resulta que

$$e_1 \in [(E_1 \cap K) \cup E_1] - \{[(E_1 \cap K) \cup C'] \cup [(E_1 \cap K) \cup D']\}.$$

Esto prueba que T es un triodo débil en X. Notemos ahora que

$$T \subset K \cup C' \cup D' \cup E_1 \subset K \cup F_1 \cup E_1 \subset U.$$

Entonces U contiene un triodo débil y, por tanto, también contiene un triodo (ver Teorema 85). Como esto es absurdo, $E_1 \cap F_1$ es conexo. Por tanto, $E' = E_1$ y $F' = F_1$ son dos subcontinuos de X, con las propiedades i)-iv) del teorema y, además, $E' \cap H_1 = \emptyset$ y $F' \cap H_2 = \emptyset$. Esto termina la prueba. ∎

Teorema 90 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que K es un subcontinuo propio de X tal que $K \subset U$. Si $E \in m(K)$ entonces existe un subcontinuo E' de X tal que:*

i) $E \subsetneq E'$ y $E' - K \neq \emptyset$,

ii) $E' \subset U$,

iii) $E' \cap K$ es conexo y está en $SB(K)$.

Más aún, si $H \in 2^X$ es tal que $E \cap H = \emptyset$ entonces E' se puede construir de manera que $E' \cap H = \emptyset$.

Demostración. Tomemos $H \in 2^X$ tal que $E \cap H = \emptyset$. Como $E \in SB(K)$, existe un arco ordenado $\alpha : I \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = E$ y $\alpha(t) - K \neq \emptyset$ para todo $t > 0$. Debido a que el conjunto

$$\mathcal{U} = \{A \in C(X) : A \subset (X - H) \cap U\}$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a E existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(E) \subset \mathcal{U}$. Aplicando la continuidad de α, existe $t > 0$ tal que $E_1 = \alpha(t) \in B_\delta(E)$. Por tanto, $E_1 \cap H = \emptyset$ y $E_1 \subset U$. Además, es claro que $E \subsetneq E_1$ y $E_1 - K \neq \emptyset$.

Si $E_1 \cap K$ es conexo, entonces es claro que $E' = E_1$ satisface las propiedades i)-iii) del teorema. Supongamos por tanto que $E_1 \cap K$ no es conexo. Entonces, por el Teorema 83, $E_1 \cap K$ tiene justo dos componentes C y D. Como E es conexo y está contenido en $E_1 \cap K$, podemos suponer sin perder generalidad que $E \subset C$. Sea $\beta : I \to C(X)$ un arco ordenado de C a E_1. Tomemos $t > 0$ tal que $E' = \beta(t) \subset X - D$. Afirmamos que E' satisface las propiedades i)-iii) del teorema.

Para ver i), notemos que $E \subset C$ y que $C \subsetneq E'$, así que $E \subsetneq E'$. Ahora bien, como $C \subsetneq E' \subset E_1$ y C es una componente de $E_1 \cap K$, sucede que

$E' \not\subset K$, por lo que $E' - K \neq \emptyset$. Para ver ii), notemos que $E' \subset E_1 \subset U$. De la misma manera, $E' \cap H \subset E_1 \cap H = \emptyset$, así que $E' \cap H = \emptyset$. Finalmente, para probar que $E' \cap K$ es conexo, haremos ver que $E' \cap K = C$. Es claro que $C \subset E' \cap K$. Supongamos ahora que $E' \cap K \not\subset C$ y tomemos un punto $z \in E' \cap K$ tal que $z \notin C$. Como $E' \subset E_1$, resulta que $z \in E_1 \cap K = C \cup D$, así que $z \in D$ ya que $z \notin C$. Luego $z \in E' \cap D$. Esto es absurdo ya que, por construcción, $E' \cap D = \emptyset$. Por tanto, $E' \cap K \subset C$ y con esto $E' \cap K = C$, probando así que $E' \cap K$ es conexo. Por el Teorema 78, $E' \cap K \in SB(K)$. ∎

Bajo las mismas hipótesis, sobre X y U, del teorema anterior, mostramos a continuación que el conjunto de los elementos en la semifrontera de un subcontinuo propio A de X contenido en U, que contiene a un elemento minimal E en $SB(A)$, constituye un arco ordenado de E a A, en $SB(A)$. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 91 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que A es un subcontinuo propio de X, tal que $A \subset U$. Si $E \in m(A)$ es tal que $E \neq A$, entonces el conjunto*

$$\Lambda_E = \{K \in SB(A) : E \subset K\}$$

es un arco ordenado de E a A en $SB(A)$.

Demostración. Supongamos que existen $E_1, E_2 \in SB(A)$ tales que $E \subset E_1 \cap E_2$, $E_1 \not\subset E_2$ y $E_2 \not\subset E_1$. Fijemos un punto $e_1 \in E_1 - E_2$ y un punto $e_2 \in E_2 - E_1$. Por el Teorema 90, existe un subcontinuo E' de X tal que $E \subsetneq E'$, $E' - A \neq \emptyset$, $E' \subset U$, $E' \cap A$ es conexo y $E' \cap \{e_1, e_2\} = \emptyset$. Sea $T = E_1 \cup E_2 \cup E'$. Entonces

1) T es un triodo débil contenido en U.

En efecto, como $E' \subset U$ y $E_1, E_2 \subset A \subset U$, resulta que $T \subset U$. Además, $e_1 \in E_1 - (E_2 \cup E')$ y $e_2 \in E_2 - (E_1 \cup E')$. Como $E' - A \neq \emptyset$ y $E_1, E_2 \subset A$, resulta que $E' \not\subset E_1 \cup E_2$. Por último, $\emptyset \neq E \subset E_1 \cap E_2 \cap E'$, así que T es un triodo débil. Esto prueba 1).

Por 1) y el Teorema 85, resulta que U contiene un triodo, lo cual es absurdo. De esta manera, tenemos que:

2) si $E_1, E_2 \in SB(A)$ y $E \subset E_1 \cap E_2$ entonces $E_1 \subset E_2$ o bien $E_2 \subset E_1$.

En otras palabras, Λ_E es un arco ordenado de E a A en $SB(A)$ (Teorema 31). ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 92 *Sean X un continuo atriódico y A un subcontinuo propio de X. Supongamos que $m(A)$ tiene un elemento E tal que $E \neq A$. Entonces el conjunto $\Lambda_E = \{K \in SB(A) : E \subset K\}$ es un arco ordenado de E a A en $SB(A)$.*

Por tanto, si X es un continuo atriódico, por el Teorema 87, cada subcontinuo propio A de X posee a lo más dos elementos minimales en su semifrontera. Si $SB(A)$ tiene justo un elemento minimal entonces, por el Corolario 92, $SB(A)$ es un singular o un arco. Si en su lugar $SB(A)$ tiene dos elementos minimales entonces, como veremos a continuación, también $SB(A)$ es un arco.

Teorema 93 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto en X tales que U no contiene triodos. Entonces $SB(A)$ es un singular o un arco, para cada $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $A \subset U$.*

Demostración. Sea A un subcontinuo propio de X tal que $A \subset U$. Por el Teorema 87, $m(A)$ tiene a lo más dos elementos. Si $m(A) = \{E\}$, entonces $SB(A)$ es un singular en el caso en que $E = A$, o bien un arco en el caso en que $E \neq A$ (Teorema 91).

Supongamos ahora que $m(A) = \{E, F\}$ y definamos

$$\Lambda_E = \{K \in SB(A) : E \subset K\} \quad \text{y} \quad \Lambda_F = \{K \in SB(A) : F \subset K\}.$$

Entonces, por el Teorema 91, Λ_E es un arco ordenado de E a A en $SB(A)$ y Λ_F es un arco ordenado de F a A en $SB(A)$. Ahora bien, es claro que $SB(A) = \Lambda_E \cup \Lambda_F$. Probaremos ahora que $\Lambda_E \cap \Lambda_F = \{A\}$. Para esto, supongamos que existe $G \in \Lambda_E \cap \Lambda_F$ tal que $G \neq A$. Entonces $G \subsetneq A$, por lo que podemos tomar un punto $a \in A - G$. También podemos tomar un punto $e \in E - F$ y un punto $f \in F - E$. Además, por el Teorema 89, existen $E', F' \in C(X)$ tales que $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$, $E' - A \neq \varnothing$, $F' - A \neq \varnothing$, $E', F' \subset U$ y $E' \cap F'$ es un subconjunto conexo de A. Más aún, E' y F' se pueden construir de modo que $a, e \notin F'$ y $a, f \notin E'$.

Definamos
$$T = (G \cup A) \cup (G \cup E') \cup (G \cup F').$$

Notemos que $\varnothing \neq G \subset (G \cup A) \cap (G \cup E') \cap (G \cup F')$ y que
$$a \in (G \cup A) - [(G \cup E') \cup (G \cup F')].$$

Tomemos ahora un punto $e' \in E' - A$ y un punto $f' \in F' - A$. Puesto que $E' \cap F' \subset A$, tenemos que
$$e' \in (G \cup E') - [(G \cup A) \cup (G \cup F')]$$
y
$$f' \in (G \cup F') - [(G \cup A) \cup (G \cup E')].$$

Por tanto, T es un triodo débil. Como $T = A \cup E' \cup F'$ y $A, E', F' \subset U$, resulta que $T \subset U$. Como consecuencia de esto y del Teorema 85, U contiene un triodo, lo cual es absurdo. Por tanto, $\Lambda_E \cap \Lambda_F = \{A\}$ y de esta manera, $SB(A)$ es un arco. ∎

A continuación, mostramos que el recíproco del teorema anterior es cierto.

Teorema 94 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto en X. Entonces U no contiene triodos si y sólo si $SB(A)$ es un singular o un arco, para cada $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $A \subset U$.*

Demostración. La parte ($\Rightarrow$) se menciona en el teorema anterior. Para ver la parte ($\Leftarrow$), supongamos que U contiene un triodo. Entonces, por el Teorema 81, existe un subcontinuo propio A de X tal que $A \subset U$ y $SB(A)$ tiene al menos tres elementos minimales E_1, E_2 y E_3. Entonces, $SB(A)$ es un arco. Para cada $i = 1, 2, 3$, sea $\alpha_i : I \to C(A)$ un arco ordenado de E_i a A en $SB(A)$ y sea $\Lambda_i = \alpha_i(I)$. Entonces, cada Λ_i es un subarco del arco

$SB(A)$, que une a E_i con A. Luego, Λ_1, Λ_2 y Λ_3 son subarcos del arco $SB(A)$ que tienen un punto en común. Esto implica que algún Λ_i está contenido en la unión de los otros dos. Supongamos por ejemplo, que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \cup \Lambda_3$. Entonces $E_1 \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3$. Supongamos, por ejemplo, que $E_1 \in \Lambda_2$. Entonces $E_2 \subset E_1$. Esto es imposible, pues E_1 y E_2 son minimales distintos en $SB(A)$. Esto prueba que U no contiene triodos. ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 95 *[19, Teorema 4.3] Un continuo X es atriódico si y sólo si $SB(A)$ es un singular o un arco, para cada $A \in C(X) - \{X\}$.*

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema principal de esta sección, a saber si el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X contiene una 2-celda $\mathcal{D}$ entonces existen triodos arbitrariamente cerca de cualquier singular $\{p\} \in \mathcal{D}$ que no esté en la orilla de $\mathcal{D}$.

Teorema 96 *Sea X un continuo tal que $C(X)$ contiene una 2-celda $\mathcal{D}$. Supongamos que p es un elemento de X tal que $\{p\} \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un elemento $T \in B_\varepsilon(\{p\})$ tal que T es un triodo.*

Demostración. Supongamos que, por el contrario, existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(\{p\})$ es un triodo. Fijemos un elemento $B \in o(\mathcal{D})$, un punto $b \in B - \{p\}$ y sea $h : I \times I \to \mathcal{D}$ un homeomorfismo. Consideremos el conjunto $\mathcal{H} = \{A \in C(X) : A \subset X - \{b\}\}$. Notemos que $\mathcal{H}$ es abierto en $C(X)$ y que $\{p\} \in \mathcal{H}$. Más aún, como $\{p\} \notin o(\mathcal{D})$, el conjunto

$$B_\varepsilon(\{p\}) \cap \mathcal{H} \cap [C(X) - o(\mathcal{D})]$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a $\{p\}$. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(\{p\}) \subset B_\varepsilon(\{p\}) \cap \mathcal{H} \cap [C(X) - o(\mathcal{D})].$$

Sea $c \in I \times I$ tal que $h(c) = \{p\}$. Afirmamos que

1) existe un subcontinuo C de $I \times I$ tal que $c \in Int_{I\times I}(C)$ y $h(C) \subset B_\delta(\{p\}) \cap \mathcal{D}$.

En efecto, por la continuidad de h en c y el hecho de que $B_\delta(\{p\})\cap\mathcal{D}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{D}$ que contiene a $\{p\} = h(c)$, existe un conjunto abierto C_1 de $I \times I$ tal que $c \in C_1$ y $h(C_1) \subset B_\delta(\{p\}) \cap \mathcal{D}$. Aplicando la regularidad y la conexidad local de $I \times I$, es posible encontrar un subcontinuo C de $I \times I$ tal que $c \in Int_{I\times I}(C) \subset C \subset C_1$. Entonces $h(C) \subset h(C_1) \subset B_\delta(\{p\}) \cap \mathcal{D}$ y 1) se cumple.

Definamos $\mathcal{C} = h(C)$. Notemos que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $C(X)$ contenido en $B_\delta(\{p\})$ por lo que

2) existe $\eta > 0$ tal que $N(2\eta, \mathcal{C}) \subset B_\delta(\{p\})$.

Sea $\mathcal{K}$ la componente de $N(\eta, \mathcal{C})$ que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces

3) $Cl_{C(X)}(\mathcal{K}) \subset B_\delta(\{p\})$.

En efecto, como $\mathcal{K} \subset N(\eta, \mathcal{C})$ tenemos que

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{K}) \subset Cl_{C(X)}(N(\eta, \mathcal{C})) \subset N(2\eta, \mathcal{C}) \subset B_\delta(\{p\}).$$

Así pues, $Cl_{C(X)}(\mathcal{K})$ es un subcontinuo de $C(X)$ contenido en $B_\delta(\{p\})$. Luego, $K = \bigcup Cl_{C(X)}(\mathcal{K})$ es un subcontinuo de X contenido en $B_\delta(p)$. Veremos que:

4) $K \neq X$ y $B \not\subset K$.

Para ver 4), basta mostrar que $b \notin K$. Supongamos, por el contrario, que $b \in K$. Tomemos un elemento $K' \in Cl_{C(X)}(\mathcal{K})$ tal que $b \in K'$. Entonces, según 3), $K' \in B_\delta(\{p\})$. Ahora bien, de acuerdo con la elección de δ, sucede que $B_\delta(\{p\}) \subset \mathcal{H}$. Así que $K' \in \mathcal{H}$, por lo que $K' \subset X - \{b\}$. Este absurdo termina la prueba de 4).

Tenemos de lo anterior que K es un subcontinuo propio de X. Luego, podemos considerar la semifrontera $SB(K)$ de K. Afirmamos que

5) $SB(K) \subset B_\delta(\{p\})$.

En efecto, si tomamos un elemento $A \in SB(K)$, entonces $A \in C(K)$, por lo que $A \subset K \subset B_\delta(p)$. Luego, por el Teorema 11, $A \in B_\delta(\{p\})$. Esto prueba 5). Afirmamos ahora que

6) $\{p\} \notin SB(K)$.

Para mostrar 6), sea $\alpha : I \to C(X)$ una función continua tal que $\alpha(0) = \{p\}$. De acuerdo con la definición de $SB(K)$, necesitamos probar que existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \subset K$. Recordemos que η es un número positivo tal que $N(2\eta, \mathcal{C}) \subset B_\delta(\{p\})$. Por la continuidad de α en 0, existe $\xi > 0$ tal que $H(\alpha(t), \alpha(0)) < \eta$ siempre que $0 < t < \xi$. Mostraremos que $t = \frac{\xi}{2}$ satisface lo requerido.

Por la elección de ξ y el hecho de que $\alpha(0) = \{p\}$, sucede que $\alpha([0,t]) \subset B_\eta(\{p\})$ y como $\{p\} \in \mathcal{C}$, tenemos que $B_\eta(\{p\}) \subset N(\eta, \mathcal{C})$. De esta manera, $\alpha([0,t])$ es un subconjunto conexo de $N(\eta, \mathcal{C})$ que contiene a $\{p\}$. Como $\mathcal{K}$ es la componente de $N(\eta, \mathcal{C})$ y cumple que $\{p\} \in \mathcal{K}$ (pues $\{p\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{K}$), tenemos que $\alpha([0,t]) \subset \mathcal{K}$. En particular, $\alpha(t) \in \mathcal{K} \subset Cl_{C(X)}(\mathcal{K})$. Por tanto, $\alpha(t) \subset \bigcup Cl_{C(X)}(\mathcal{K}) = K$. Esto prueba 6). Afirmamos ahora que:

7) $SB(K)$ es un singular o un arco.

En efecto, como ningún elemento de $B_\delta(\{p\})$ es un triodo resulta, por el Teorema 45, que $B_\delta(p)$ no contiene triodos. Ahora bien, por 4), K es un subcontinuo propio de X y además K está contenido en el subconjunto abierto $B_\delta(p)$ de X. Entonces, aplicando el Teorema 93, $SB(K)$ es un singular o un arco. Afirmamos ahora que:

8) $SB(K) \cap o(\mathcal{D}) = \emptyset$.

En efecto, en 5) vimos que $SB(K) \subset B_\delta(\{p\})$. De acuerdo con la elección de δ, sucede que $B_\delta(\{p\}) \subset C(X) - o(\mathcal{D})$. Luego, $SB(K) \cap o(\mathcal{D}) = \emptyset$. Afirmamos también que:

9) $SB(K) \cap \mathcal{D}$ separa por trayectorias a $\mathcal{D}$.

Para ver 9), supongamos que $SB(K) \cap \mathcal{D}$ no separa por trayectorias a $\mathcal{D}$. De acuerdo con 4) y 6), $\{p\}, B \in \mathcal{D} - (SB(K) \cap \mathcal{D})$. Puesto que $SB(K) \cap \mathcal{D}$ no separa por trayectorias a $\mathcal{D}$, existe entonces una trayectoria $\lambda : I \to \mathcal{D}$ de $\{p\}$ a B en $\mathcal{D}$ tal que ninguna $t \in I$ satisface que $\lambda(t) \in SB(K) \cap \mathcal{D}$.

Definamos $t_0 = máx\{t \in I : \lambda(t) \subset K\}$. Debido a que $\{p\} \notin SB(K)$ existe $t > 0$ tal que $\lambda(t) \subset K$. Entonces t_0 está bien definido y es mayor que cero. Como $B \not\subseteq K$, sucede que $t_0 < 1$. Hagamos $\alpha = \lambda|_{[t_0,1]} : [t_0, 1] \to \mathcal{D}$. Es claro que α es una función continua que empieza en $\lambda(t_0)$ y satisface que $\alpha(t) - K \neq \emptyset$ para toda $t > t_0$. Por tanto, $\lambda(t_0) \in SB(K)$. Además, $\lambda(t_0) \in \mathcal{D}$, así que t_0 es un número en I para el cual $\lambda(t_0) \in SB(K) \cap \mathcal{D}$. Esto es una contradicción, y de esta manera 9) se cumple.

Tenemos con todo esto, que $SB(K)$ es un singular o un arco en $C(X)$ tal que $SB(K) \cap o(\mathcal{D}) = \emptyset$. Entonces, por el Teorema 75, $SB(K) \cap \mathcal{D}$ no separa por trayectorias a $\mathcal{D}$. Debido a que esto contradice 9), concluimos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un elemento $T \in B_\varepsilon(\{p\})$ tal que T es un triodo en X. ∎

3.3 Localizando 2-celdas en Hiperespacios.

En la presente sección, veremos condiciones bajo las cuales es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en el hiperespacio $C(X)$ de un continuo, de manera que $\mathcal{D} - o(\mathcal{D})$ tiene a un subcontinuo dado de X. Dichos resultados serán importantes para probar, por ejemplo, que tanto las compactaciones métricas del espacio $[0, \infty)$ con residuo no degenerado, como los continuos indescomponibles cuyos subcontinuos propios y no degenerados son arcos, tienen hiperespacio único.

En esta dirección, el resultado más natural es el que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 97 *Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Supongamos que*

i) $A = A_1 \cup A_2$ en donde $A_1, A_2 \in C(A) - \{A\}$,

ii) $B = B_1 \cup B_2$ en donde $B_1, B_2 \in C(B) - \{B\}$,

iii) $A_1 \subsetneq B_1$, $A_2 \subsetneq B_2$ y $A_0 = A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 \in C(X)$.

Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Demostración. Debido a que $A_0 \subsetneq A_1$ y $A_0 \subsetneq A_2$, existen arcos ordenados $\alpha_1, \beta_1 : I \to C(X)$ de A_0 a A_1 y de A_0 a A_2, respectivamente. Más aún, como $A_1 \subsetneq B_1$ y $A_2 \subsetneq B_2$, existen arcos ordenados $\alpha_2, \beta_2 : I \to C(X)$

de A_1 a B_1 y de A_2 a B_2, respectivamente. Definamos ahora dos funciones $\alpha, \beta : I \to C(X)$ como sigue:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $\alpha(0) = \alpha_1(0) = A_0 = \beta_1(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \alpha_2(1) = B_1$ y $\beta(1) = \beta_2(1) = B_2$. Más aún, $\alpha_{|[0,\frac{1}{2}]}$ y $\alpha_{|[\frac{1}{2},1]}$ son funciones continuas y $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha_1(1) = A_1 = \alpha_2(0)$. Por tanto, α es una función continua. Similarmente se prueba que β es continua. Mostraremos ahora que:

1) si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Para esto, supongamos primero que $0 \leq s < t \leq \frac{1}{2}$. Entonces $\alpha(s) = \alpha_1(2s) \subsetneq \alpha_1(2t) = \alpha(t)$. Ahora supongamos que $\frac{1}{2} \leq s < t \leq 1$. Entonces $\alpha(s) = \alpha_2(2s-1) \subsetneq \alpha_2(2t-1) = \alpha(t)$. Finalmente, si $0 \leq s \leq \frac{1}{2} < t \leq 1$ entonces $A_0 \subset \alpha(s) \subset \alpha\left(\frac{1}{2}\right) = A_1 \subsetneq \alpha_2(2t-1) = \alpha(t)$. Esto prueba 1).

De manera similar, sucede que $\beta(s) \subsetneq \beta(t)$ si $0 \leq s < t \leq 1$. Esto significa que α y β son arcos ordenados de A_0 a B_1 y de A_0 a B_2, respectivamente. Definimos ahora una función $h : I \times I \to C(X)$ como $h(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$. Debido a que A_0 es, por hipótesis, un subcontinuo de X y a que $A_0 \subset \alpha(s) \cup \beta(t)$ para cada $(s,t) \in I \times I$, resulta que h está bien definida. Afirmamos que:

2) h es continua.

En efecto, sea $(s,t) \in I \times I$ y supongamos que (s_n, t_n) es una sucesión en $I \times I$ tal que $(s_n, t_n) \to (s,t)$. Entonces $s_n \to s$ y $t_n \to t$, por lo que $\alpha(s_n) \to \alpha(s)$ y $\beta(t_n) \to \beta(t)$. Luego, por la parte 3. del Teorema 20

$$h(s_n, t_n) = \alpha(s_n) \cup \beta(t_n) \to \alpha(s) \cup \beta(t) = h(s,t).$$

Esto prueba que h es continua. Afirmamos ahora que:

3) h es inyectiva.

Para ver 3), tomemos dos puntos distintos $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in I \times I$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $s_1 < s_2$. Entonces $\alpha(s_1) \subsetneq \alpha(s_2)$, por lo que existe un punto $x \in \alpha(s_2)$ tal que $x \notin \alpha(s_1)$. Notemos que $x \in h(s_2, t_2)$ y que $s_2 > 0$. Por tanto, $x \notin A_0$. Ahora bien, si $x \in h(s_1, t_1)$ entonces debido a que $x \notin \alpha(s_1)$, resulta que $x \in \beta(t_1)$. Como $\beta(t_1) \subset B_2$, sucede que $x \in B_2$. Más aún, puesto que $\alpha(s_2) \subset B_1$, $x \in B_1$. Luego, $x \in B_1 \cap B_2 = A_0$. Esto es una contradicción, así que $x \notin h(s_1, t_1)$. Por tanto, $h(s_1, t_1) \neq h(s_2, t_2)$ y así h es inyectiva.

Definamos $\mathcal{D} = h(I \times I)$. Por 2) y 3), $\mathcal{D}$ es una 2-celda en $C(X)$. Dado que

$$h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) \cup \beta\left(\frac{1}{2}\right) = A_1 \cup A_2 = A,$$

tenemos que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

A continuación, presentamos una versión más general del teorema anterior.

Teorema 98 *Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Supongamos que:*

i) $A = A_1 \cup A_2$ en donde $A_1, A_2 \in C(A) - \{A\}$,

ii) $B = B_1 \cup B_2$ en donde $B_1, B_2 \in C(B) - \{B\}$,

iii) $A_1 \subsetneq B_1$, $A_2 \subsetneq B_2$ y $B_0 = B_1 \cap B_2 \in C(A)$,

iv) $A_1 - B_0 \neq \emptyset$, $A_2 - B_0 \neq \emptyset$, $B_1 - (A_1 \cup B_2) \neq \emptyset$ y $B_2 - (A_2 \cup B_1) \neq \emptyset$.

Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Demostración. Definamos $A'_1 = A_1 \cup B_0$, $A'_2 = A_2 \cup B_0$ y $A' = A'_1 \cup A'_2$. Afirmamos que:

1) $A' \subsetneq B$.

En efecto, $A' = (A_1 \cup B_0) \cup (A_2 \cup B_0) = A_1 \cup A_2 \cup B_0 = A \cup B_0 = A$, ya que $B_0 \subset A$. Como $A \subsetneq B$, resulta que $A' \subsetneq B$.

2) $A'_1 \subsetneq B_1$ y $A'_2 \subsetneq B_2$.

Veamos, como $B_1 - (A_1 \cup B_2) \neq \emptyset$, existe un punto $x \in B_1$ tal que $x \notin A_1 \cup B_2$. Entonces, $x \notin A_1 \cup B_0 = A'_1$. Esto prueba que $A'_1 \subsetneq B_1$. Análogamente se prueba que $A'_2 \subsetneq B_2$.

3) $A'_1 \cap A'_2 = B_1 \cap B_2 \in C(X)$.

En efecto, $A'_1 \cap A'_2 = (A_1 \cup B_0) \cap (A_2 \cup B_0) = (A_1 \cap A_2) \cup B_0 = B_0 = B_1 \cap B_2 \in C(X)$.

4) $A'_1 \subsetneq A'$ y $A'_2 \subsetneq A'$.

En efecto, como $A_2 - B_0 \neq \emptyset$, existe $x \in A_2$ tal que $x \notin B_0$. Entonces, $x \in A' = A$. Supongamos que $x \in A'_1 = A_1 \cup B_0$. Como $x \notin B_0$, tenemos que $x \in A_1$. Luego, $x \in A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2 = B_0$. Esto es una contradicción, así que $x \notin A'_1$. Por tanto, $A'_1 \subsetneq A'$. De manera similar se prueba que $A'_2 \subsetneq A'$.

Así pues, $A' = A$ y B satisfacen las hipótesis del teorema anterior. Por tanto, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

El teorema principal de esta sección, establece que si A es un subcontinuo propio y descomponible de un continuo atriódico X, tal que $SB(A)$ posee exactamente dos elementos minimales, entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. A continuación presentamos una serie de resultados que nos llevarán a la prueba de dicho teorema.

Teorema 99 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que A es un subcontinuo propio de X tal que $A \subset U$. Si existen exactamente dos elementos $C, D \in m(A)$ y $A = C \cup D$, entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.*

Demostración. Como C y D son elementos minimales distintos en $SB(A)$, podemos escoger un punto $c \in C - D$ y un punto $y \in D - C$. Más aún, por el Teorema 89, $C \cap D$ es conexo. Además, existen dos subcontinuos C' y D' de X tales que

(a) $C \subsetneq C'$, $D \subsetneq D'$, $C' - A \neq \varnothing$ y $D' - A \neq \varnothing$,

(b) $C' \cap D'$ es un subconjunto conexo de A,

(c) $y \notin C'$ y $c \notin D'$.

Definamos $B = C' \cup D'$. Notemos que

1) C' y D' son subcontinuos propios de B.

Para ver 1), tomemos un punto $x \in C' - A$. Como $C' \cap D' \subset A$, sucede que $x \notin D'$. Por tanto, $D' \subsetneq B$. De manera similar se prueba que $C' \subsetneq B$.

2) $C \subsetneq C'$, $D \subsetneq D'$ y $C' \cap D' \in C(A)$.

Veamos, por las afirmaciones (a) y (b) para probar 2), basta con verificar que $C' \cap D' \neq \varnothing$. Esto es cierto ya que, por la conexidad de A, sucede que $C \cap D \neq \varnothing$. Luego, $\varnothing \neq C \cap D \subset C' \cap D'$, de donde $C' \cap D' \neq \varnothing$.

3) $C - (C' \cap D') \neq \varnothing$ y $D - (C' \cap D') \neq \varnothing$.

En efecto, por construccion $c \in C$ y $c \notin D'$, así que $c \notin C' \cap D'$. Esto prueba la primera parte de 3). Para la segunda, basta observar que $y \in D - (C' \cap D')$.

4) $C' - (C \cup D') \neq \varnothing$ y $D' - (D \cup C') \neq \varnothing$.

En efecto, tomemos un punto $x \in C' - A$. Como $C' \cap D' \subset A$, resulta que $x \notin D'$ y debido a que $C \subset A$, $x \notin C$. Por tanto, $x \in C' - (C \cup D')$. De manera similar se prueba que $D' - (D \cup C') \neq \varnothing$.

Hemos probado que $A = C \cup D$ y $B = C' \cup D'$ satisfacen las hipótesis del Teorema 98 (con $A_1 = C$, $A_2 = D$, $B_1 = C'$ y $B_2 = D'$). Por tanto, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

Teorema 100 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que A es un subcontinuo propio de X tal que $A \subset U$. Si $m(A)$ tiene exactamente dos elementos E y F tales que $E \cap F \neq \varnothing$ entonces A es descomponible y, además, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.*

Demostración. Afirmamos que $E \cup F = A$. Para ver esto, supongamos que $E \cup F \neq A$. Entonces existe un punto $a \in A$ tal que $a \notin E \cup F$. Por el Teorema 89, $E \cap F$ es conexo y, además, existen dos subcontinuos E' y F' de X tales que

(a) $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$, $E' - A \neq \varnothing$ y $F' - A \neq \varnothing$,

(b) $E' \cap F'$ es un subconjunto conexo de A,

(c) $E', F' \subset U$,

(d) $a \notin E' \cup F'$.

Sea $T = A \cup E' \cup F'$. Notemos que

$$\varnothing \neq E \cap F \subset E' \cap F' \subset A \cap E' \cap F'$$

y que $a \in A - (E' \cup F')$. Tomemos un punto $e \in E' - A$ y un punto $f \in F' - A$. Como $E' \cap F' \subset A$ y $e, f \notin A$, tenemos que $e \in E' - (A \cup F')$ y $f \in F' - (A \cup E')$. Por tanto, T es un triodo débil. Ahora bien, como $A, E', F' \subset U$, resulta que $T \subset U$. Entonces U contiene un triodo débil y, por consiguiente, también un triodo (Teorema 85). Como esto es una contradicción, $E \cup F = A$ y de esta manera, A es descomponible. Más aún, por el teorema anterior, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

Teorema 101 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que A es un subcontinuo propio y descomponible de X tal que $A \subset U$. Si $m(A)$ tiene exactamente dos elementos E y F tales que $E \cap F \neq \varnothing$ entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$, tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.*

Demostración. Como A es descomponible, existen $C, D \in C(A) - \{A\}$ tales que $A = C \cup D$. Supongamos primero que $(E \cup F) \cap (C \cap D) \neq \varnothing$. Entonces, sin perder generalidad, podemos suponer que $E \cap (C \cap D) \neq \varnothing$. Afirmamos que:

1) $C - D \subset E$ o bien $D - C \subset E$

Para ver 1) supongamos, por el contrario, que $C - D \not\subset E$ y que $D - C \not\subset E$. Entonces, existen puntos $c \in C - D$ y $y \in D - C$ tales que $c, y \notin E$. Por el Teorema 89, existe un subcontinuo E' de X tal que $E \subsetneq E' \subset U$, $E' - A \neq \varnothing$

y $c, y \notin E'$. Definamos $T = E' \cup C \cup D$. Como $E \cap (C \cap D) \neq \varnothing$ y $E \subset E'$, resulta que $E' \cap C \cap D \neq \varnothing$. Además, $c \in C - (E' \cup D)$ y $y \in D - (E' \cup C)$. Por último, como $\varnothing \neq E' - A = E' - (C \cup D)$, el conjunto T es un triodo débil en X. Notemos ahora que $T = E' \cup A \subset U$, así que U contiene un triodo dédil. Entonces, por el Teorema 85, U contiene un triodo. Como esto es absurdo, 1) es cierto.

En vista de 1) podemos suponer, sin perder generalidad, que $C - D \subset E$. Entonces $A = (C - D) \cup D = E \cup D$. Como consecuencia de esto y del hecho de que E y F son ajenos, se tiene que $F \subset D$. Por el Teorema 89, existen $E', F' \in C(X)$ tales que $E \subsetneq E' \subset U$, $F \subsetneq F' \subset U$, $E' - A \neq \varnothing$, $F' - A \neq \varnothing$ y $E' \cap F' = \varnothing$. Afirmamos que:

2) $E' \cap D$ es un subcontinuo de A.

Para ver 2), notemos primero que, como $A = E \cup D$ y A es conexo, $E \cap D \neq \varnothing$. Entonces $E' \cap D \neq \varnothing$. Además, $E' \cap D \subset D \subset A$, así que resta probar que $E' \cap D$ es conexo. Si esto no es así entonces, debido a que $E' \subset U$ y $D \subset A \subset U$, resulta por el Teorema 83, que $E' \cap D$ posee justo dos componentes K_1 y K_2. Sean $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(X)$ arcos ordenados de K_1 a E' y de K_2 a E', respectivamente. Tomemos $t_1, t_2 > 0$ tales que $K_1' = \alpha_1(t_1)$ y $K_2' = \alpha_2(t_2)$ son ajenos. Como $K_1', K_2' \subset E'$ y $E' \cap F' = \varnothing$, tenemos que $K_1' \cap F' = \varnothing$ y $K_2' \cap F' = \varnothing$. Dado que $K_1 \subsetneq K_1' \subset E'$, $K_2 \subsetneq K_2' \subset E'$ y tanto K_1 como K_2 son componentes de $E' \cap D$, se sigue que $K_1', K_2' \not\subset D$. Podemos entonces tomar un punto $k_1 \in K_1' - D$ y un punto $k_2 \in K_2' - D$. Es claro que $k_1, k_2 \in E'$. Como $E' \cap F' = \varnothing$, se sigue que $k_1, k_2 \notin F'$.

Definamos $T = (D \cup F') \cup (D \cup K_1') \cup (D \cup K_2')$ y tomemos un punto $f \in F' - A$. Entonces

$$\varnothing \neq D \subset (D \cup F') \cap (D \cup K_1') \cap (D \cup K_2'),$$

$f \in (D \cup F') - (D \cup K_1' \cup K_2')$, $k_1 \in (D \cup K_1') - (D \cup F' \cup K_2')$ y $k_2 \in (D \cup K_2') - (D \cup F' \cup K_1')$. Por tanto, T es un triodo débil en X. Ahora bien

$$T = D \cup F' \cup K_1' \cup K_2' \subset A \cup F' \cup E' \subset U,$$

así que U contiene un triodo débil y por tanto, también un triodo (Teorema 85). Como esto es absurdo, $E' \cap D$ es conexo, y con esto probamos 2).

Sea $B = E' \cup (D \cup F')$. Es claro que $A \subsetneq B$, $E \subsetneq E'$ y $D \subsetneq D \cup F'$. Por 2),

$$E' \cap (D \cup F') = (E' \cap D) \cup (E' \cap F') = E' \cap D \in C(A).$$

Además:

3) $E - E' \cap D \neq \emptyset$ y $D - E' \cap D \neq \emptyset$.

En efecto, debido a que $C - D$ es no vacío y está contenido en $E - D$, podemos tomar un punto $e \in E - D$ y entonces $e \in E - E' \cap D$. Tomando un punto $f \in F$, resulta que $f \in D - E' \cap D$. Esto prueba 3). Afirmamos ahora que:

4) $E' - (E \cup D \cup F') = E' - (A \cup F') \neq \emptyset$ y $(D \cup F') - (D \cup E') \neq \emptyset$.

Para ver la primera parte, basta tomar un punto $e \in E' - A$, y para la segunda, un punto $f \in F' - A$.

En virtud de lo anterior, tenemos que $A = E \cup D$ y $B = E' \cup (D \cup F')$ satisfacen las hipótesis del Teorema 98 (con $A_1 = E$, $A_2 = D$, $B_1 = E'$ y $B_2 = D \cup F'$). Por tanto, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - \partial(\mathcal{D})$.

Supongamos ahora que $(E \cup F) \cap (C \cap D) = \emptyset$. Entonces, podemos suponer, sin perder generalidad que $E \subset C - D$. Sean $E', F' \in C(X)$ tales que $E \subsetneq E' \subset U$, $F \subsetneq F' \subset U$, $E' \cap F' = \emptyset$, $E' - A \neq \emptyset$ y $F' - A \neq \emptyset$. Afirmamos que:

5) $F \subset D - C$.

Para ver 5), supongamos que $F \not\subset D - C$. Entonces, debido a que $F \cap (C \cap D) = \emptyset$, sucede que $F \subset C - D$. Fijemos un punto $y \in D - C$. Podemos construir a E' y F' de modo que, además de satisfacer las propiedades ya enunciadas, cumplan con que $y \notin E' \cup F'$. De esta manera, es fácil ver que el conjunto $T = (C \cup E') \cup (C \cup F') \cup (C \cup D)$ es un triodo débil en X que está contenido en U. Entonces, por el Teorema 85, U contiene un triodo. Puesto que esto es una contradicción, $F \subset D - C$.

Ahora bien, puesto que $E \cap D = \varnothing$ y $F \cap C = \varnothing$, podemos construir a E' y F' de modo que, además de satisfacer las propiedades ya enunciadas, cumplan con que $E' \cap D = \varnothing$ y $F' \cap C = \varnothing$. Veremos que:

6) $C \cap D$ es conexo.

Para ver esto, supongamos que $C \cap D$ posee dos componentes C_1 y C_2. Entonces existen dos subcontinuos ajenos C_1' y C_2' de D tales que $C_1 \subsetneq C_1'$ y $C_2 \subsetneq C_2'$. Puesto que C_1 y C_2 son componentes de $C \cap D$, resulta que $C_1', C_2' \not\subset C$. Por tanto, es fácil ver que el conjunto $T = (C \cup E') \cup (C \cup C_1') \cup (C \cup C_2')$ es un triodo débil contenido en U. Luego, por el Teorema 85, U contiene un triodo. De esta contradicción resulta que $C \cap D$ es conexo.

Definamos ahora $B = (C \cup E') \cup (D \cup F')$. Es claro que $A \subsetneq B$, $C \subsetneq C \cup E'$, $D \subsetneq D \cup F'$, $C \cup E'$ y $D \cup F' \subsetneq B$. Además, por 6) y la forma en que fueron construidos E' y F', sucede que

$$\begin{aligned}(C \cup E') \cap (D \cup F') &= (C \cap D) \cup (C \cap F') \cup (E' \cap D) \cup (E' \cap F') \\ &= C \cap D\end{aligned}$$

es un subcontinuo de A. Entonces, A y B satisfacen las hipótesis del Teorema 97 (con $A_1 = C$, $A_2 = D$, $B_1 = C \cup E'$ y $B_2 = D \cup F'$) y por tanto, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

De los teoremas anteriores tenemos el siguiente resultado.

Teorema 102 *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto de X tales que U no contiene triodos. Supongamos que A es un subcontinuo propio y descomponible de X tal que $A \subset U$. Si $m(A)$ tiene exactamente dos elementos entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.*

Capítulo 4

Compactaciones de $[0, \infty)$.

4.1 Introducción.

En este capítulo, probaremos que las compactaciones métricas del espacio $S = [0, \infty)$ con residuo no degenerado, tienen hiperespacio único.

Definición 103 *Un espacio compacto y de Hausdorff $\overline{X}$ se llama una* ***compactación*** *de X, si X es un subconjunto denso en $\overline{X}$. En tal caso el conjunto $R = \overline{X} - X$ se llama el* ***residuo*** *de $\overline{X}$.*

Formalmente hablando, deberíamos decir que hay un encaje $h : X \to \overline{X}$, de modo que $h(X)$ es denso en $\overline{X}$. Para hacer menos engorrosa la notación, identificaremos a X con $h(X)$ y entonces pensaremos que $X \subset \overline{X}$.

A menos que se diga lo contrario, en este capítulo la letra S representará al semirayo $[0, \infty)$ y la letra X a una compactación métrica de S con residuo no degenerado R. Si $a \in S$ entonces, como veremos en el siguiente teorema, el subconjunto $[a, \infty)$ de S, es denso en $[a, \infty) \cup R$.

Teorema 104 *Para cada punto $a \in S$, $R \subset Cl_X([a, \infty))$. Más aún*

$$Cl_X([a, \infty)) = [a, \infty) \cup R.$$

Demostración. Para efectos de la demostración, supongamos que $a \neq 0$ y tomemos un punto $x \in R$. Para ver que $x \in Cl_X([a, \infty))$ sea $\varepsilon > 0$. Como $X - [0, a]$ es un subconjunto abierto en X que tiene a x, existe $\delta > 0$

tal que $B_\delta(x) \subset X - [0,a]$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\delta < \varepsilon$. Como S es denso en X, existe un punto $y \in B_\delta(x) \cap S$. De acuerdo con la elección de δ, $y \notin [0,a]$, así que $y \in (a,\infty)$. Esto significa que $B_\delta(x) \cap (a,\infty) \neq \varnothing$ y por consiguiente $B_\varepsilon(x) \cap [a,\infty) \neq \varnothing$, probando así que $x \in Cl_X([a,\infty))$. Luego $R \subset Cl_X([a,\infty))$.

De lo anterior, resulta que $R \cup [a,\infty) \subset Cl_X([a,\infty))$. Supongamos ahora que $x \in Cl_X([a,\infty))$ y que, para efectos de la demostración, $x \notin [a,\infty)$. Entonces $x \in [0,a) \cup R$. Si $x \in [0,a)$ entonces, debido a que $x \in Cl_X([a,\infty))$ y a que $[0,a)$ es abierto en X y tiene a x, resulta que $[0,a) \cap [a,\infty) \neq \varnothing$. Como esto es absurdo, $x \notin [0,a)$. Por tanto, $x \in R$ y de esta manera $Cl_X([a,\infty)) \subset [a,\infty) \cup R$. Así $Cl_X([a,\infty)) = [a,\infty) \cup R$. ∎

A continuación veremos que el residuo R de X, es un subcontinuo de X.

Teorema 105 *El residuo R de X es un subcontinuo de X.*

Demostración. Notemos primero que, de acuerdo con el teorema anterior, si $a,b \in S$ y $a < b$ entonces $Cl_X([b,\infty)) = [b,\infty) \cup R \subset [a,\infty) \cup R = Cl_X([a,\infty))$. Por tanto, $\{Cl_X([n,\infty)) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia anidada de subcontinuos de X. Afirmamos que

$$R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty)).$$

En efecto, por el teorema anterior, $R \subset Cl_X([n,\infty))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $R \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty))$. Supongamos ahora que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty)) \not\subset R$. Entonces existe un punto $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty))$ tal que $x \notin R$. Por tanto, $x \in S$. Tomando un número natural n tal que $x < n$, resulta que $x \in Cl_X([n,\infty)) = [n,\infty) \cup R$. Como $x \notin R$, lo anterior implica que $x \in [n,\infty)$. Luego $n \leq x$. Esto es absurdo y, por consiguiente, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty)) \subset R$. Esto prueba que $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X([n,\infty))$.

De lo anterior, resulta que R es la intersección de una sucesión anidada de subcontinuos de X. Entonces, por [27, Teorema 1.8], R es un subcontinuo de X. ∎

Dado un conjunto Z contenido en un continuo Y, denotaremos por $C(Z)$ al conjunto de los elementos de $C(Y)$ contenidos en Z. A estos elementos los llamaremos *subcontinuos* de Z. En el siguiente teorema, determinaremos los tipos de subcontinuos que posee X.

Teorema 106 *Cada subcontinuo A de la compactación X satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:*

(a) A es un subcontinuo de R.

(b) $A = R \cup [a, \infty)$ para algún punto $a \in S$.

(c) A es un subcontinuo de S y por tanto un subintervalo cerrado y acotado de S.

Demostración. Sea $A \in C(X)$. Supongamos que A no es un subcontinuo de R y que A no es un subcontinuo de S. Entonces, $A \cap R \neq \varnothing$, $A \cap S \neq \varnothing$ y $A \notin F_1(X)$. Como $A \cap S$ es un subconjunto cerrado y no vacío de S, podemos definir $a = mín(A \cap S)$. Entonces, $a \in A \cap S$ y $[0, a] \cap A = \{a\}$. Afirmamos que $A = R \cup [a, \infty)$. En efecto, como $A = (A \cap R) \cup (A \cap S)$, $A \cap R \subset R$ y $A \cap S \subset [a, \infty)$, tenemos que $A \subset R \cup [a, \infty)$.

Tomemos ahora un punto $x \in [a, \infty)$. Si $x \notin A$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset S$ y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \cap R = \varnothing$. Por tanto

$$A = (A \cap [a, x - \varepsilon]) \cup (A \cap ([x + \varepsilon, \infty) \cup R)).$$

Notemos que $A \cap [a, x - \varepsilon]$ es cerrado y no vacío en A. Por el Teorema 104, $[x + \varepsilon, \infty) \cup R = Cl_X([x + \varepsilon, \infty))$ es cerrado en X, así que $A \cap ([x + \varepsilon, \infty) \cup R)$ es cerrado y no vacío en A. Notemos ahora que

$$(A \cap [a, x - \varepsilon]) \cap (A \cap ([x + \varepsilon, \infty) \cup R)) = A \cap [a, x - \varepsilon] \cap R = \varnothing.$$

Por tanto, A no es conexo. Como esto es una contradicción, $x \in A$. Luego, $[a, \infty) \subset A$. Aplicando de nuevo el Teorema 104, resulta que

$$R \cup [a, \infty) = Cl_X([a, \infty)) \subset Cl_X(A) = A.$$

Esto prueba que $A = R \cup [a, \infty)$. ∎

4.2 Localizando 2-celdas en $C(X)$.

La técnica a seguir para demostrar que X tiene hiperespacio único consiste, entre otras cosas, en localizar subcontinuos A de X para los cuales es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$ (ver Definición 70). El siguiente teorema determina ciertos subcontinuos de X con esta propiedad.

Teorema 107 *Para cada subcontinuo no degenerado A de X tal que $A \subset S$ y $0 \notin A$, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.*

Demostración. Sea A un subcontinuo no degenerado de X tal que $A \subset S$ y $0 \notin A$. Por el Teorema 106, existen $a_1, a_2 \in S$ tales que $0 < a_1 < a_2 < \infty$ y $A = [a_1, a_2]$. Tomemos puntos $a, b_1, b_2 \in S$ tales que $0 \leq b_1 < a_1 < a < a_2 < b_2 < \infty$ y definamos $A_1 = [a_1, a]$, $A_2 = [a, a_2]$, $B_1 = [b_1, a]$, $B_2 = [a, b_2]$ y $B = B_1 \cup B_2$. Entonces es claro que A_1 y A_2 son subcontinuos propios de A tales que $A_1 \cup A_2 = A$. Así mismo, B_1 y B_2 son subcontinuos propios de B tales que $B_1 \cup B_2 = B$. Además $A_1 \subsetneq B_1$, $A_2 \subsetneq B_2$ y $A_1 \cap A_2 = \{a\} = B_1 \cap B_2 \in C(A)$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

4.3 Continuos Terminales.

El siguiente paso consiste en determinar qué subcontinuos de X son terminales en X.

Definición 108 *Un subcontinuo propio y no degenerado A de un continuo X es **terminal** en X, si para cada subcontinuo B de X tal que $B \cap A \neq \varnothing$, se sigue que $A \subset B$ o bien $B \subset A$.*

En esta sección, probaremos que el residuo R de X es un continuo terminal que desconecta por trayectorias a $C(X)$.

Teorema 109 *El residuo R de la compactación X es terminal en X.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X tal que $A \cap R \neq \varnothing$. De acuerdo con el teorema anterior, A es un subcontinuo de R o bien $A = R \cup [a, \infty)$ para algún punto $a \in A$. Entonces $A \subset R$ o bien $R \subset A$. Con esto vemos que R es terminal en X. ∎

Ahora veremos que X no es localmente conexo en los puntos del residuo R.

Teorema 110 *X no es localmente conexo en ningún punto de R.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo en un punto $x \in R$. Como R es no degenerado, existe un punto $y \in R$ tal que $y \neq x$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Aplicando la regularidad de X y la conexidad local de X en x, es posible encontrar un conjunto abierto y conexo C de X, tal que $x \in C \subset Cl_X(C) \subset U$. Por la densidad de S en X y el hecho de que C es abierto en X, tenemos que $C \cap S \neq \varnothing$. Por tanto $Cl_X(C) \cap S \neq \varnothing$.

Tenemos de lo anterior, que $Cl_X(C)$ es un subcontinuo de X que intersecta a R, no está contenido en R (pues tiene un punto de S) y no contiene a R (pues $y \notin U$ y $Cl_X(C) \subset U$). Entonces R no es terminal en X. Como esto contradice el Teorema 109, X no es localmente conexo en x. ∎

Corolario 111 *X no es localmente conexo.*

A continuación, probaremos que los subcontinuos terminales de un continuo Y, desconectan por trayectorias a $C(Y)$.

Teorema 112 *[26, Teorema 11.5] Sea E un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(a) E es terminal en Y.

(b) $C(Y) - \{E\}$ no es conexo por trayectorias.

Entonces $(a) \Rightarrow (b)$ y si E es descomponible, entonces $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Demostración. Supongamos que E es terminal en Y. Elegimos puntos $p \in E$ y $q \in Y - E$. Sean $E_0 = \{p\} \in C(E) - \{E\}$ y $E_1 = \{q\} \in C(Y)$, entonces $E_1 - E \neq \varnothing$. Mostraremos que $C(Y) - \{E\}$ no es conexo por trayectorias, haciendo ver que toda trayectoria en $C(Y)$ de E_0 a E_1 tiene a E. Tomemos entonces una trayectoria $\lambda : I \to C(Y)$ tal que $\lambda(0) = E_0$ y $\lambda(1) = E_1$. Definamos $t_0 = máx\{t \in I : \lambda(t) \subset E\}$. Entonces $\lambda(t_0) \subset E$ y, como $E_1 - E \neq \varnothing$, sucede que $t_0 < 1$. Afirmamos que

1) E está contenido en $\lambda(t_0)$.

Para ver 1), definamos una función $\alpha : [t_0, 1] \to C(Y)$ como $\alpha(t) = \bigcup \lambda([t_0, t])$ para $t \in [t_0, 1]$. Entonces, aplicando la continuidad de λ, así como la de la función unión (Teorema 28), tenemos que α es una función continua. Notemos que $\alpha(1) = \bigcup \lambda([t_0, 1])$. Dada $t \in (t_0, 1]$, por la parte 2. del Teorema 28, $\alpha(t)$ es un subcontinuo de Y y, además, $\lambda(t_0) = \alpha(t_0) \subset \alpha(t)$. Como $\alpha(t_0)$ está contenido en E, tenemos que $\alpha(t) \cap E \neq \emptyset$ para cada $t \in (t_0, 1]$. Entonces $\alpha(t) \subset E$ o bien $E \subset \alpha(t)$, dado que E es terminal en Y. Como $\alpha(t) - E \neq \emptyset$ para cada $t \in (t_0, 1]$, sucede que $E \subset \alpha(t)$.

Así pues, para cada $t \in (t_0, 1]$, resulta que $E \subset \alpha(t)$. Por tanto, si tomamos una sucesión $(t_n)_n$ en $(t_0, 1]$ tal que $t_n \to t_0$, entonces $E \subset \alpha(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, en el límite, $E \subset \alpha(t_0) = \lambda(t_0)$. Esto prueba 1) y, por consiguiente, $\lambda(t_0) = E$. Luego, $C(Y) - \{E\}$ no es conexo por trayectorias.

Antes de probar la segunda parte del teorema, notemos que

2) $C(Y) - C(E)$ es conexo por trayectorias.

En efecto, sean $H, K \in C(Y) - C(E)$ y tomemos dos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(Y)$ de H a Y y de K a Y, respectivamente. Definamos una función $\alpha : I \to C(Y)$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2 - 2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces α es una trayectoria en $C(Y)$ de H a K. Como $H - E \neq \emptyset$, $K - E \neq \emptyset$ y todo elemento de α contiene a H o a K, sucede que $E \notin \alpha(I)$. Esto prueba 2).

Supongamos ahora que E es descomponible y que $C(Y) - \{E\}$ no es conexo por trayectorias. Como $C(Y) - C(E) \subset C(Y) - \{E\}$ y, por 2), $C(Y) - C(E)$ es conexo por trayectorias, existe una componente por trayectorias, $\mathcal{H}$, de $C(Y) - \{E\}$ tal que $C(Y) - C(E) \subset \mathcal{H}$. Si E no es terminal en Y, entonces existe un subcontinuo B de Y tal que $B \cap E \neq \emptyset$ y $B \not\subset E \not\subset B$. Entonces $B \in C(Y) - C(E)$. Tomemos una componente C de $B \cap E$ y un elemento $D \in C(Y) - \{E\}$ tal que $D \notin \mathcal{H}$. Entonces $D \notin C(Y) - C(E)$, por lo que

$D \in C(E)$. Más aún, $D \in C(E) - \{E\}$. También $C \in C(E) - \{E\}$ dado que $E \not\subseteq B$.

Como E es descomponible, $C(E) - \{E\}$ es conexo por trayectorias, según el Teorema 58. Por tanto, existe una trayectoria $\lambda_1 : I \to C(E)$ de D a C en $C(E) - \{E\}$. Sea $\lambda_2 : I \to C(B)$ un arco ordenado de C a B en $C(B)$. Es claro que λ_2 es una trayectoria de C a B en $C(B) - \{E\}$. Por tanto, la función $\lambda : I \to C(Y)$ definida como

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una trayectoria de D a B en $C(Y) - \{E\}$. Esto es una contradicción ya que, al estar D y B en componentes por trayectorias diferentes de $C(Y) - \{E\}$, toda trayectoria en $C(Y)$ que une a D con B pasa por E. Por consiguiente, E es terminal en Y. ∎

La prueba del teorema anterior contiene el siguiente simple pero importante resultado.

Corolario 113 *Sea E un subcontinuo terminal de un continuo Y. Si $B \in C(E) - \{E\}$ y $C \in C(Y)$ es tal que $C - E \neq \emptyset$ entonces toda trayectoria en $C(Y)$ de B a C pasa por E.*

4.4 Componentes por Trayectorias.

De acuerdo con los Teoremas 109 y 112, $C(X) - \{R\}$ no es conexo por trayectorias. Veamos entonces algunas propiedades de sus componentes por trayectorias. Para empezar, cada una de ellas posee un singular, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 114 *Supongamos que E es un subcontinuo de un continuo Y. Entonces cada componente por trayectorias de $C(Y) - \{E\}$ posee un singular.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una componente por trayectorias de $C(Y) - \{E\}$ y C un elemento de $\mathcal{C}$. Si $C \subset E$ entonces tomemos un punto $c \in C$ y un arco ordenado $\alpha : I \to C(Y)$ de $\{c\}$ a C. Es claro que $\alpha(I)$ es un conjunto conexo por trayectorias contenido en $C(Y) - \{E\}$ y que intersecta a C. Como C es una componente por trayectorias de $C(Y) - \{E\}$, resulta que $\alpha(I) \subset C$. Luego $\{c\} \in C \cap F_1(Y)$.

Supongamos ahora que $C \not\subset E$. Entonces existen un punto $c \in C - E$ y un arco ordenado $\beta : I \to C(Y)$ de $\{c\}$ a C en $C(Y)$. Nuevamente, para tal elección de c, sucede que $\beta(I)$ es un conjunto conexo por trayectorias contenido en $C(Y) - \{E\}$ y que intersecta a C. Entonces $\beta(I) \subset C$ y, por tanto, $\{c\} \in C \cap F_1(Y)$. ∎

A continuación describimos una parte importante de la estructura de $C(X)$. En particular, describiremos una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$ que será de gran utilidad en la prueba de que dichas compactaciones tienen hiperespacio único.

Si P es un subcontinuo de un continuo Y, entonces $C(P,Y)$ denotará al conjunto de los subcontinuos de Y que contienen a P. Si $P \in F_1(Y)$, entonces $P = \{p\}$ para algún punto $p \in Y$ y escribiremos $C(p,Y)$ en lugar de $C(\{p\},Y)$. Utilizando el Teorema 20, es fácil ver que $C(P,Y)$ es un subconjunto cerrado de $C(Y)$. Más aún, usando arcos ordenados, se prueba que $C(P,Y)$ es conexo por trayectorias. Por tanto, $C(P,Y)$ es un subcontinuo de $C(Y)$ para cada $P \in C(Y)$

Teorema 115 *Si X es una compactación métrica del espacio S con residuo no degenerado R entonces*

1. $C(0,X)$ *es un arco ordenado de* $\{0\}$ *a* X *en* $C(X)$.
2. $C(R,X)$ *es un arco ordenado de* R *a* X *en* $C(X)$.
3. $C(S)$ *es conexo por trayectorias.*
4. $C(S) \cup [C(R,X) - \{R\}]$ *es una componente por trayectorias de* $C(X) - \{R\}$.

Demostración. Para probar 1. notemos que, por el Teorema 106, cada elemento $A \in C(0,X)$ es de la forma $[0,a]$ para alguna $a \in S$, o bien $A = X$. Por tanto, si $A, B \in C(0,X)$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Más aún, $\{0\}, X \in C(0,X)$ y para cada $A \in C(0,X)$, $\{0\} \subset A \subset X$. Por tanto, aplicando el

Teorema 31, $C(0, X)$ es un arco ordenado de $\{0\}$ a X en $C(X)$. Esto prueba 1.

Para probar 2. notemos que, por el Teorema 106, cada elemento $A \in C(R, X)$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones: $A = R$ o bien $A = R \cup [a, \infty)$ para alguna $a \in S$. Por tanto, si $A, B \in C(R, X)$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Más aún, $R, X \in C(R, X)$ y para cada $A \in C(R, X)$, $R \subset A \subset X$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 31, $C(R, X)$ es un arco ordenado de R a X en $C(X)$.

Para probar 3., tomemos dos elementos $A, B \in C(S)$ y fijemos un punto $a \in A$ y un punto $b \in B$. Sean $\alpha, \beta : I \to C(S)$ arcos ordenados de $\{a\}$ a A y de $\{b\}$ a B respectivamente. Como S es conexo por trayectorias, $F_1(S)$ es conexo por trayectorias. Entonces existe una trayectoria $\gamma : I \to F_1(S)$ de $\{a\}$ a $\{b\}$ en $F_1(S)$. Definamos una función $\varphi : I \to C(X)$ como sigue:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha(1 - 3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \gamma(3t - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \beta(3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces

1) φ está bien definida y es continua.

Para ver que φ está bien definida, notemos que $\varphi(\frac{1}{3}) = \alpha(0) = \{a\} = \gamma(0)$, así que φ está bien definida en $t = \frac{1}{3}$. Similarmente se prueba que está bien definida en $t = \frac{2}{3}$, por lo que φ está bien definida. Para ver que φ es continua, basta notar que φ es continua en los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$ que cubren a I.

De 1) se sigue que φ es una trayectoria de $\varphi(0) = \alpha(0) = A$ a $\varphi(1) = \beta(1) = B$, claramente contenida en $C(S)$. Por lo tanto, $C(S)$ es conexo por trayectorias.

Probaremos a continuación que $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$ es conexo por trayectorias. Debido a que, por 1. y 2., $C(S)$ y $C(R, X) - \{R\}$ son conexos por trayectorias, basta mostrar que los elementos $\{0\} \in C(S)$ y $X \in C(R, X) - \{R\}$ se pueden conectar por una trayectoria en $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$. Sea α un arco ordenado de $\{0\}$ a X. Dada $A \in \alpha$, $\{0\} \subset A$. Por el Teorema 106, A es de la forma $[0, a] \in C(S)$ o bien $A = [0, \infty) \cup R = X$. Por tanto, $\alpha \subset C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$. Luego, $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$ es conexo por trayectorias. Es claro que $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}] \subset C(X) - \{R\}$, así que existe una componente por trayectorias $\mathcal{C}$ de $C(X) - \{R\}$ tal que $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}] \subset \mathcal{C}$.

Afirmamos que $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}] = \mathcal{C}$. Para ver esto, supongamos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \notin C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$. Entonces $C \in C(X, R) - \{R\}$. Fijemos un punto $B \in C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}]$. Como $\mathcal{C}$ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$ y $B, C \in \mathcal{C}$, existe una trayectoria $\alpha : I \to C(X)$ de C a B tal que $R \notin \alpha(I)$. Sin embargo, como R es terminal en X, $C \cap R$ y $B - R \neq \emptyset$, toda trayectoria en $C(X)$ de C a B pasa por R, según el Corolario 113. Entonces $R \in \alpha(I)$ y, como esto es una contradicción, $C(S) \cup [C(R, X) - \{R\}] = \mathcal{C}$ ∎

En la prueba de la parte 3. del teorema anterior, solamente utilizamos el hecho de que S es conexo por trayectorias. Así pues, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 116 *Sea V un subconjunto de un continuo Y. Si V es conexo por trayectorias entonces $C(V)$ es conexo por trayectorias.*

En el siguiente teorema, mostraremos que $C(R, X) \cup C(0, X) \cup F_1(X)$ es una compactación métrica del conjunto $C(R, X) \cup C(0, X) \cup F_1(S)$, con residuo no degenerado $F_1(R)$.

Teorema 117 *Supongamos que X es una compactación métrica del espacio $S = [0, \infty)$, con residuo no degenerado R. Definamos $\mathcal{S}_1 = C(R, X)$, $\mathcal{S}_2 = C(0, X)$, $\mathcal{S}_3 = F_1(S)$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. Entonces:*

a) $\mathcal{S}$ es un semirayo con extremo R. De hecho, existe un homeomorfismo $f : [-2, \infty) \to \mathcal{S}$ tal que:

i) $f([-2, -1]) = \mathcal{S}_1$, $f([-1, 0]) = \mathcal{S}_2$ y $f([0, \infty)) = \mathcal{S}_3$,

ii) $f(-2) = R$, $f(-1) = X$ y para cada $x \geq 0$, $f(x) = \{x\}$, *iii) para cada* $x \in [-2, \infty)$, $F_1(R) \subset Cl_{C(X)}(f([x, \infty)))$. *Más aún,*

$$Cl_{C(X)}(f([x,\infty))) = f([x,\infty)) \cup F_1(R).$$

b) el conjunto $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cup F_1(R)$ *es una compactación métrica de* $\mathcal{S}$ *con residuo no degenerado* $F_1(R)$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{S}$ es un semirayo con extremo R, notemos primero que:

1) $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es un arco en $C(X)$ con extremos $\{0\}$ y R.

En efecto, por el Teorema 115, $\mathcal{S}_1$ es un arco ordenado en $C(X)$ de R a X, y $\mathcal{S}_2$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $\{0\}$ a X. Además $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = C(R, X) \cap C(0, X) = \{X\}$. Por tanto, $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = C(R, X) \cup C(0, X)$ es un arco en $C(X)$ con extremos $\{0\}$ y R. Más aún, es claro que:

2) $[C(R, X) \cup C(0, X)] \cap F_1(S) = \{0\}$.

Como consecuencia de esto, $\mathcal{S}$ es la unión de dos conjuntos, un arco y un semirayo, que se intersectan en su extremo $\{0\}$. Luego, $\mathcal{S}$ es un semirayo con extremo R. Ahora veremos cómo construir un homeomorfismo $f : [-2, \infty) \to \mathcal{S}$ con las propiedades i)-iii) del teorema. Para esto, tomemos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, \infty)$. Como $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son arcos ordenados de R y X y de $\{0\}$ a X, respectivamente, las funciones $\mu_1 = \mu_{|\mathcal{S}_1} : \mathcal{S}_1 \to [\mu(R), \mu(X)]$ y $\mu_2 = \mu_{|\mathcal{S}_2} : \mathcal{S}_2 \to [0, \mu(X)]$ son homeomorfismos (Teorema 32).

Reparametrizamos ahora los arcos $[\mu(R), \mu(X)]$ y $[0, \mu(X)]$, considerando una función $h_1 : [-2, -1] \to [\mu(R), \mu(X)]$ definida por

$$h_1(x) = [\mu(X) - \mu(R)](x + 2) + \mu(R)$$

siempre que $x \in [-2, -1]$; así como una función $h_2 : [-1, 0] \to [0, \mu(X)]$ dada por

$$h_2(x) = -\mu(X)x$$

siempre que $x \in [-1, 0]$. Es claro que h_1 y h_2 son homeomorfismos y que $h_1(-2) = \mu(R)$, $h_1(-1) = \mu(X) = h_2(-1)$ y $h_2(0) = 0$.

Consideremos ahora las funciones $f_1 = \mu_1^{-1} \circ h_1$ y $f_2 = \mu_2^{-1} \circ h_2$. Es claro que $f_1 : [-2,-1] \to \mathcal{S}_1$ y $f_2 : [-1,0] \to \mathcal{S}_2$ son homeomorfismos. Sea $f_3 : [0,\infty) \to \mathcal{S}_3$ la función definida como $f_3(x) = \{x\}$ si $x \in [0,\infty)$. Entonces f_3 es un homeomorfismo (Teorema 15).

Definimos la función $f : [-2,\infty) \to \mathcal{S}$ como sigue.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in [-2,-1] \\ f_2(x), & \text{si } x \in [-1,0] \\ f_3(x), & \text{si } x \in [0,\infty) \end{cases}$$

Notemos que $f(-2) = f_1(-2) = \mu_1^{-1}(h_1(-2)) = \mu_1^{-1}(\mu(R)) = R$, $f_1(-1) = \mu_1^{-1}(h_1(-1)) = \mu_1^{-1}(\mu(X)) = X$, $f_2(-1) = \mu_2^{-1}(h_2(-1)) = \mu_2^{-1}(\mu(X)) = X$. $f_2(0) = \mu_2^{-1}(h_2(0)) = \mu_2^{-1}(0) = \{0\} = f_3(0)$. Por tanto, f está bien definida. Además, f_1, f_2 y f_3 son homeomorfismos y los conjuntos $[-2,-1]$, $[-1,0]$ y $[0,\infty)$ son cerrados en $[-2,\infty)$ que cubren a $[-2,\infty)$. Luego, f es un homeomorfismo.

Notemos ahora que $f([-2,-1]) = f_1([-2,-1]) = \mathcal{S}_1$, $f([-1,0]) = f_2([-1,0]) = \mathcal{S}_2$ y $f([0,\infty)) = f_3([0,\infty)) = \mathcal{S}_3$. Por tanto, f satisface i). Como ya hicimos ver $f(-2) = R$, $f(-1) = X$ y, por definición, $f(x) = \{x\}$ para cada $x \geq 0$. Entonces f satisface ii).

Para ver que f satisface iii), sea $x \in [-2,\infty)$. Veamos primero el caso en que $0 \leq x$. Entonces

$$\begin{aligned} f([x,\infty)) \cup F_1(R) &= \{\{p\} \in F_1(X) : p \in [x,\infty) \cup R\} \\ &= \{\{p\} \in F_1(X) : p \in Cl_X([x,\infty))\} \end{aligned}$$

de acuerdo con el Teorema 104. Como la función h que a p le asigna $\{p\}$ en $F_1(X)$ es una isometría, obtenemos que

$$\begin{aligned} h(Cl_X([x,\infty))) &= Cl_{F_1(X)}(h([x,\infty))) \\ &= Cl_{C(X)}(h([x,\infty))) \\ &= Cl_{C(X)}(\{\{p\} : p \in [x,\infty)\}). \end{aligned}$$

De manera que

$$f([x,\infty)) \cup F_1(R) = Cl_{C(X)}(\{\{p\} : p \in [x,\infty)\}) = Cl_{C(X)}(f([x,\infty))).$$

Ahora, si $x \in [-2,0]$

$$\begin{aligned} f([x,\infty)) \cup F_1(R) &= f([x,0] \cup [0,\infty)) \cup F_1(R) \\ &= f([x,0]) \cup f([0,\infty)) \cup F_1(R) \\ &= f([x,0]) \cup Cl_{C(X)}(f([0,\infty))) \\ &= Cl_{C(X)}(f([x,0])) \cup Cl_{C(X)}(f([0,\infty))) \\ &= Cl_{C(X)}(f([x,\infty))). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f([x,\infty)) \cup F_1(R) = Cl_{C(X)}(f([x,\infty))).$$

y así, f satisface iii).

De iii) resulta que

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{S}) = Cl_{C(X)}(f([-2,\infty))) = f([-2,\infty)) \cup F_1(R) = \mathcal{S} \cup F_1(R) = \mathcal{X},$$

y, como $\mathcal{X}$ es compacto y métrico, $\mathcal{X}$ es una compactación métrica de $\mathcal{S}$ con residuo $F_1(R)$ que es no degenerado, ya que R es no degenerado. Esto prueba b). ∎

4.5 El Teorema.

Estamos por fin en condiciones de probar que X tiene hiperespacio único.

Teorema 118 *Las compactaciones métricas del espacio $S = [0,\infty)$, con residuo no degenerado R, tienen hiperespacio único.*

Demostración. Sea $X = R \cup S$ una compactación métrica de S con residuo no degenerado R. Supongamos que Y es un continuo tal que $C(Y)$ es homeomorfo a $C(X)$ y que $h : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo. Entonces

1) Y no es localmente conexo.

En efecto, si Y es localmente conexo entonces $C(Y)$ y, por tanto, también $C(X)$, es localmente conexo, según el Teorema 66. Por el mismo teorema tenemos que X es localmente conexo. Puesto que esto es una contradicción al Corolario 111, Y no es localmente conexo. Esto prueba 1). Afirmamos ahora que:

2) $R \notin h(F_1(Y))$.

En efecto, si por el contrario $R \in h(F_1(Y))$ entonces existe un punto $y \in Y$ tal que $R = h(\{y\})$. Puesto que $C(Y) - \{\{y\}\}$ es conexo por trayectorias (Teorema 34), resulta que $C(X) - \{h(\{y\})\} = C(X) - \{R\}$ es conexo por trayectorias. Entonces R no es terminal (Teorema 112). Como esto contradice al Teorema 109, $R \notin h(F_1(Y))$

Hagamos ahora $\mathcal{S}_1 = C(R, X)$, $\mathcal{S}_2 = C(0, X)$, $\mathcal{S}_3 = F_1(S)$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. Por el Teorema 117, $\mathcal{S}$ es un semirayo con extremo R y además, existe un homeomorfismo $f : [-2, \infty) \to \mathcal{S}$ tal que:

a) $f([-2,-1]) = \mathcal{S}_1$, $f([-1,0]) = \mathcal{S}_2$ y $f([0,\infty)) = \mathcal{S}_3$,
b) $f(-2) = R$, $f(-1) = X$ y para cada $x \geq 0$, $f(x) = \{x\}$,
c) para cada $x \in [-2,\infty)$, $Cl_{C(X)}(f((x,\infty))) = f([x,\infty)) \cup F_1(R)$.

Afirmamos ahora que:

3) $h(F_1(Y)) \subset C(R) \cup \mathcal{S}$.

En efecto, si 3) no se cumple entonces existe un punto $y \in Y$ tal que $h(\{y\}) \notin C(R) \cup \mathcal{S}$. Luego $h(\{y\}) \notin C(R) \cup \mathcal{S}_1$, por lo que $h(\{y\})$ es un subcontinuo de S. Como $h(\{y\}) \notin \mathcal{S}_2$, resulta que $0 \notin h(\{y\})$. Por tanto, $h(\{y\})$ es un subcontinuo no degenerado de S tal que $0 \notin h(\{y\})$. Entonces, por el Teorema 107, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $h(\{y\}) \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Luego, $\mathcal{D}' = h^{-1}(\mathcal{D})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}' - o(\mathcal{D}')$.

Como S es un subconjunto abierto de X que contiene al subcontinuo $h(\{y\})$ de X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, h(\{y\})) \subset S$. Por la continuidad de h, existe $\delta > 0$ tal que si $H(B, \{y\}) < \delta$ entonces $H(h(B), h(\{y\})) < \varepsilon$. Además, por el Teorema 96, existe un triodo $T \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\{y\})$. Aplicando el Teorema 48, tenemos que existe una 3-celda $\mathcal{T}$ en $C(Y)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\delta(\{y\})$. Entonces $\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T})$ es una 3-celda en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T}) \subset h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(h(\{y\})) \subset C(S).$$

Por consiguiente, si $T_0 = \bigcup \mathcal{T}_0$ entonces resulta que T_0 es un subcontinuo de S tal que $\mathcal{T}_0 \subset C(T_0)$. Esto significa que el hiperespacio $C(T_0)$ contiene una 3-celda. Entonces, por el Teorema 49, el continuo T_0 contiene un triodo. Como $T_0 \subset S$ resulta que el semirayo S contiene un triodo, lo cual es absurdo y así 3) queda probado. Afirmamos ahora que:

4) $h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$.

Para ver 4) notemos que, como R es terminal en X, $C(X) - \{R\}$ no es conexo por trayectorias. Más aún, por el Teorema 115, el conjunto $\Lambda = C(S) \cup (\mathcal{S}_1 - \{R\})$ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$. Luego, $h^{-1}(\Lambda)$ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{h^{-1}(R)\}$. Entonces, por el Teorema 114,

$$h^{-1}(\Lambda) \cap F_1(Y) \neq \varnothing.$$

Por tanto,

$$h(F_1(Y)) \cap \Lambda \neq \varnothing.$$

Como

$$\Lambda \cap (C(R) \cup \mathcal{S}) = [C(S) \cup (\mathcal{S}_1 - \{R\})] \cap \mathcal{S},$$

se deduce de 3) que $h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$, probando así 4). Notemos ahora que:

5) $h(F_1(Y)) \cap C(R) \neq \varnothing$.

En efecto, supongamos que, por el contrario, $h(F_1(Y)) \cap C(R) = \varnothing$. De acuerdo con 3), $h(F_1(Y))$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$. Ahora bien, como $\mathcal{S}$ es homeomorfo al semirayo $[-2, \infty)$ y $h(F_1(Y))$ es un subcontinuo de $C(X)$, tenemos que $h(F_1(Y))$ tiene que ser un arco y, por consiguiente, un continuo localmente conexo. Entonces $F_1(Y)$ y, por ende también Y, es localmente conexo. Esto contradice 1), así que 5) es cierto.

Definamos $\mathcal{R} = h(F_1(Y)) \cap C(R)$ y $\mathcal{V}_Y = h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S}$. Por 4) y 5) $\mathcal{V}_Y$ y $\mathcal{R}$ son no vacíos. Es claro que $\mathcal{R}$ es cerrado en $C(X)$, que $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) \subset h(F_1(Y))$ y que

$$h(F_1(Y)) = \mathcal{V}_Y \cup \mathcal{R}.$$

Afirmamos que

6) existe $v_0 \in (-2,\infty)$ tal que $\mathcal{V}_Y = f([v_0,\infty))$.

Para ver 6), notemos primero que si $-2 \in f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$ entonces $R = f(-2) \in \mathcal{V}_Y \subset h(F_1(Y))$, contradiciendo 2). Notemos ahora que $\mathcal{V}_Y$ es, por definición, cerrado en $\mathcal{S}$. Por tanto, $f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$ es un subconjunto cerrado de $[-2,\infty)$ que no tiene a -2. Sea $v_0 = \text{mín} f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$, entonces $v_0 \in (-2,\infty)$ y $f^{-1}(\mathcal{V}_Y) \subset [v_0,\infty)$. Luego, $\mathcal{V}_Y = f(f^{-1}(\mathcal{V}_Y)) \subset f([v_0,\infty))$. Por tanto,

$$h(F_1(Y)) = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}_Y \subset \mathcal{R} \cup f([v_0,\infty)).$$

Luego, si $v \in (v_0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
h(F_1(Y)) &= [h(F_1(Y)) \cap f([v_0,\infty))] \cup [h(F_1(Y)) \cap \mathcal{R}] \\
&= [h(F_1(Y)) \cap (f([v_0,v]) \cup f([v,\infty)))] \cup [h(F_1(Y)) \cap C(R)] \\
&= [h(F_1(Y)) \cap f([v_0,v])] \cup [h(F_1(Y)) \cap (f([v,\infty)) \cup C(R))]
\end{aligned}$$

De acuerdo con b) del Teorema 117,

$$\begin{aligned}
f([v,\infty)) \cup C(R) &= f([v,\infty)) \cup F_1(R) \cup C(R) \\
&= Cl_{C(X)}(f([v,\infty))) \cup C(R)
\end{aligned}$$

es un conjunto compacto. Entonces, hemos escrito al continuo $h(F_1(Y))$ como la unión de dos compactos no vacíos. Luego, éstos deben intersectarse. Como

$$[h(F_1(Y)) \cap f([v_0,v])] \cap [h(F_1(Y)) \cap (f([v,\infty)) \cup C(R))] \subset h(F_1(Y)) \cap \{f(v)\},$$

obtenemos que $f(v) \in h(F_1(Y))$. Esto muestra que $f([v_0,\infty)) \subset \mathcal{V}_Y$. Por tanto, $\mathcal{V}_Y = f([v_0,\infty))$ y 6) se cumple.

Como consecuencia de 6), $\mathcal{V}_Y$ es conexo. Por tanto, $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ es conexo y, de acuerdo con c)

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = Cl_{C(X)}\left(f\left([r_0,\infty)\right)\right) = f\left([r_0,\infty)\right) \cup F_1(R) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R).$$

Esto es:

7) $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R)$.

Esto implica que

$$F_1(R) \subset Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) \subset h\left(F_1(Y)\right).$$

Como también $F_1(R) \subset C(R)$, resulta que $F_1(R) \subset \mathcal{R}$. Afirmamos ahora que:

8) $\mathcal{R} \cap Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = F_1(R)$.

En efecto, como $\mathcal{V}_Y \cap \mathcal{R} = \varnothing$ y $F_1(R) \subset \mathcal{R}$, aplicando 7) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \cap Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) &= \mathcal{R} \cap [\mathcal{V}_Y \cup F_1(R)] \\ &= (\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_Y) \cup [\mathcal{R} \cap F_1(R)] = F_1(R), \end{aligned}$$

con lo que se prueba 8).

Notemos ahora que si $\mathcal{R} \subset F_1(R)$, entonces $\mathcal{R} = F_1(R)$. Luego,

$$\begin{aligned} h\left(F_1(Y)\right) &= \mathcal{R} \cup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) \\ &= F_1(R) \cup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) \\ &= F_1(R) \cup (\mathcal{V}_Y \cup F_1(R)) \\ &= \mathcal{V}_Y \cup F_1(R). \end{aligned}$$

Es claro que $\mathcal{V}_Y \cup F_1(R)$ es homeomorfo a X y que $h\left(F_1(Y)\right)$ es homeomorfo a Y. Por tanto Y es homeomorfo a X. Esto culminaría la demostración del teorema. Supongamos entonces, para efectos de la prueba, que $\mathcal{R} - F_1(R) \neq \varnothing$. Afirmamos que:

9) $\mathcal{R}$ es conexo.

En efecto, $F_1(R)$ es un subconjunto conexo del continuo conexo $h(F_1(Y))$ y es tal que

$$h(F_1(Y)) - F_1(R) = [\mathcal{R} - F_1(R)] \cup [Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - F_1(R)].$$

Ahora bien, los conjuntos $\mathcal{R} - F_1(R)$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - F_1(R) = \mathcal{V}_Y$ son no vacíos y, por 8), están mutuamente separados. Por tanto, por el Teorema 38

$$[\mathcal{R} - F_1(R)] \cup F_1(R) = \mathcal{R}$$

es conexo. Esto prueba 9).

Tenemos, con todo lo anterior, que $\mathcal{R}$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ son dos subcontinuos de $h(F_1(Y))$ tales que $h(F_1(Y)) = \mathcal{R} \cup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ y $\mathcal{R} \cap Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = F_1(R)$ es conexo. Como $\mathcal{R} - F_1(R) \neq \varnothing$, sucede que $\mathcal{R}$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ son subcontinuos propios de $h(F_1(Y))$. Definamos los conjuntos

$$B = \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1(R)\},$$
$$N = \{y \in Y : h(\{y\}) \in \mathcal{R}\} \quad \text{y}$$
$$V_Y = \left\{y \in Y : h(\{y\}) \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)\right\}$$

Entonces, es claro que

10) B, N y V_Y son subcontinuos propios de Y tales que $Y = N \cup V_Y$ y $N \cap V_Y = B$ es conexo.

Por tanto, de acuerdo con esto y el Teorema 33, tenemos que:

11) Si R' es un subcontinuo de Y, entonces es posible encontrar un punto $a \in N$, un punto $b \in V_Y - N$, y una trayectoria $\lambda : I \to C(Y)$ de $\{a\}$ a $\{b\}$ en $C(Y)$ tal que $R' \notin \lambda(I)$.

Definamos $R' = h^{-1}(R)$. Es claro que R' es un subcontinuo de Y así que, por 11), es posible encontrar un punto $y_1 \in N$, un punto $y_2 \in V_Y - N$, y una trayectoria $\lambda : I \to C(Y)$ de $\{y_1\}$ a $\{y_2\}$ en $C(Y)$ tal que $R' \notin \lambda(I)$. Notemos que $h(\{y_1\}) \in \mathcal{R}$ y $h(\{y_2\}) \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - \mathcal{R} = \mathcal{V}_Y$. Esto significa que $h(\{y_1\})$ es un subcontinuo de R y que $h(\{y_2\})$ es un subcontinuo de X

que interseta a $X - R$. Más aún, debido a que $R \notin h(F_1(Y))$, tenemos que $h(\{y_1\})$ es un subcontinuo propio de R.

Sea $\gamma : I \to C(X)$ la función $\gamma = h \circ \lambda$. Entonces γ es una trayectoria en $C(X)$ de $h(\{y_1\})$ a $h(\{y_2\})$ y, de acuerdo con el Corolario 113, existe $t \in I$ tal que $\gamma(t) = R$. Luego $\lambda(t) = h^{-1}(\gamma(t)) = h^{-1}(R) = R'$, por lo que $R' \in \lambda(I)$. Esto es un absurdo. Por tanto, necesariamente $\mathcal{R} - F_1(R) = \varnothing$ y, como ya hicimos ver, de aquí se deduce que Y es homeomorfo a X. ∎

Capítulo 5

Dobles Compactaciones.

5.1 Introducción.

En el capítulo anterior, probamos que las compactaciones métricas del espacio $[0, \infty)$, con residuo no degenerado, tienen hiperespacio único. Ahora veremos el caso de dos compactaciones métricas de un semirayo, con residuo común que sea un continuo no degenerado. Más precisamente, consideremos dos números reales $a > 0$ y $b < 0$, y supongamos que $[a, \infty) \cup R$ y $(-\infty, b] \cup R$ representan dos compactaciones métricas de los semirayos *ajenos* $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$, respectivamente, ambas con residuo no degenerado R. Sea

$$X = [a, \infty) \cup R \cup (-\infty, b].$$

¿Tendrá X hiperespacio único? En este capítulo responderemos en negativo esta pregunta y, veremos que, aunque X no posee hiperespacio único, esencialmente sólo existe un continuo Y no homeomorfo a X, tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Por consiguiente, podemos decir que X casi tiene hiperespacio único.

Las ideas para la prueba del resultado principal de este capítulo, son similares a las que se dieron en el capítulo anterior. Mientras no se diga otra cosa, X denotará un continuo tal que $X = S_1 \cup R \cup S_2$, en donde $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ son compactaciones métricas de los semirayos ajenos $S_1 = [a, \infty)$ y $S_2 = (-\infty, b]$, respectivamente, ambas con residuo no degenerado R. Es fácil verificar que si A es un subcontinuo de X, entonces A satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

(a) A es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$,

(b) A es un subcontinuo de la compactación $S_2 \cup R$,

(c) $A = [x, \infty) \cup R \cup (-\infty, y]$ para algún $x \in S_1$ y un $y \in S_2$.

Más aún, en vista de que $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ son compactaciones métricas de semirayos, aplicando el Teorema 104, tenemos que

$$Cl_X([x,\infty)) = [x,\infty) \cup R \text{ para cada } x \in S_1$$

y

$$Cl_X((-\infty,y]) = (-\infty,y] \cup R \text{ para cada } y \in S_2.$$

Aplicando el Teorema 105 a la compactación $S_1 \cup R$, resulta que R es un subcontinuo de $S_1 \cup R$ y, por tanto, un subcontinuo de X.

5.2 Localizando 2-celdas en $C(X)$.

Así como en el caso de una compactación métrica del semirayo $[0,\infty)$, para los continuos de este capítulo, también es importante determinar subcontinuos A de X, para los cuales es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - \partial(\mathcal{D})$. Es claro que, si A es un subcontinuo no degenerado de $S_1 = [a,\infty)$ tal que $a \notin A$, entonces podemos encontrar dicha 2-celda. Llegamos a la misma conclusión si A es un subcontinuo no degenerado de $S_2 = (-\infty, b]$ tal que $b \notin B$. En el siguiente teorema vemos que existen otros subcontinuos de X para los cuales dicha 2-celda se puede obtener.

Teorema 119 *Si $A \in C(R,X) - \{R\}$ es tal que $a, b \notin A$, entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in [\mathcal{D} - \partial(\mathcal{D})] \subset Int_{C(X)}(\mathcal{D})$.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de $C(R,X) - \{R\}$ tal que $a, b \notin A$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $A \cap S_1 \neq \emptyset$. Sea $x = mín\, A \cap S_1$. Entonces, $x \in S_1 - \{a\}$. Es fácil convencerse que $A \cap S_1 = [x,\infty)$. Luego, A es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$ y, en tal caso, $A = [x,\infty) \cup R$, o bien existe un punto $y \in S_2$ tal que $A = [x,\infty) \cup R \cup (-\infty, y]$. Definimos a continuación un subcontinuo B de X. Hacemos $B = R$ si A es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$, y $B = R \cup (-\infty, y] = Cl_X((-\infty, y])$ en el otro caso. En cualquier situación, resulta que $A = [x,\infty) \cup B$. Notemos que $y < b$.

Fijemos un punto $z \in (x, \infty)$. Es claro que $z \in A$ y que

$$A = [x, \infty) \cup B = [x, z] \cup ([z, \infty) \cup B).$$

Afirmamos que:

1) $C(z, [a, z])$ es un arco ordenado α de $\{z\}$ a $[a, z]$ en $C(X)$, que tiene a $[x, z]$.

La afirmación 1) se sigue del hecho de que

$$C(z, [a, z]) = \{[e, z] : e \in [a, z]\}.$$

Sea $X_0 = [z, \infty) \cup R \cup S_2$. Afirmamos que:

2) $C(z, X_0)$ es un arco ordenado β de $\{z\}$ a X_0 en $C(X)$, que tiene a $[z, \infty) \cup B$.

Para probar 2), tomemos un elemento $C \in C(z, X_0)$. Entonces C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$, o bien tiene la forma $C = [z, \infty) \cup R \cup (-\infty, v]$ para alguna $v \in S_2$. Si C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$ entonces, como $z \in C$, C es de la forma $[z, w]$ para algún punto $w \in [z, \infty)$, o bien $C = [z, \infty) \cup R$. Por tanto, todo elemento $C \in C(z, X_0)$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones: $C = [z, w]$ para alguna $w \in [z, \infty)$, $C = [z, \infty) \cup R$, o bien $C = [z, \infty) \cup R \cup (-\infty, v]$ para alguna $v \in S_2$. Utilizando esto, es fácil ver que, si $C, D \in C(z, X_0)$ entonces $C \subset D$ o bien $D \subset C$. Ahora bien, como $\{z\}, X_0 \in C(z, X_0)$ y para cada $C \in C(z, X_0)$, $\{z\} \subset C \subset X_0$ tenemos, por el Teorema 31, que $C(z, X_0)$ es un arco ordenado de $\{z\}$ a X_0 en $C(X)$. Si $B = R$ entonces $[z, \infty) \cup B = [z, \infty) \cup R$, y si $B = R \cup (-\infty, y]$ entonces $[z, \infty) \cup B = [z, \infty) \cup R \cup (-\infty, y]$. En cualquier caso, resulta que $[z, \infty) \cup B \in C(z, X_0)$. Esto prueba 2).

Afirmamos ahora que:

3) si $C \in C(z, X)$ entonces C se puede escribir como $C = C_1 \cup C_2$, en donde $C_1 \in C(z, [a, z])$ y $C_2 \in C(z, X_0)$.

En efecto, tomemos un elemento $C \in C(z, X)$. Como $z \in S_1 \cap C$, C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$, o bien $C = [e, \infty) \cup R \cup (-\infty, r]$ para algún $e \in [a, z]$ y un punto $r \in S_2$. En el segundo caso, haciendo $C_1 = [e, z]$ y $C_2 = [z, \infty) \cup R \cup (-\infty, r]$ tenemos que $C_1 \in C(z, [a, z])$, $C_2 \in C(z, X_0)$ y $C_1 \cup C_2 = C$.

Supongamos ahora que C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$. Entonces, como $z \in C$, $C = [e, h]$ en donde $e, h \in S_1$ y $a \leq e \leq z \leq h$, o bien $C = [e, \infty) \cup R$ para algún $e \in [a, z]$. En el primer caso, haciendo $C_1 = [e, z]$ y $C_2 = [z, h]$, tenemos que $C_1 \in C(z, [a, z])$, $C_2 \in C(z, X_0)$ y $C_1 \cup C_2 = C$. En el segundo caso, haciendo $C_1 = [e, z]$ y $C_2 = [z, \infty) \cup R$ resulta que $C_1 \in C(z, [a, z])$, $C_2 \in C(z, X_0)$ y $C_1 \cup C_2 = C$. Esto prueba 3).

Definamos ahora una función $f : I \times I \to C(X)$ como

$$f(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$$

siempre que $(s,t) \in I \times I$. Como ya hemos comprobado varias veces en este trabajo, para funciones semejantes a f, concluimos que f tiene las siguientes propiedades:

4) f es inyectiva y continua.

De acuerdo con 4) y la compacidad de $I \times I$, si $\mathcal{D} = f(I \times I)$, entonces $f : I \times I \to \mathcal{D}$ es un homeomorfismo. Luego, $\mathcal{D}$ es una 2-celda en $C(X)$. Como

$$A = [x, z] \cup ([z, \infty) \cup R)$$

y por 1) y 2), $[x, z] \in C(z, [a, z]) = \alpha(I)$ y

$$[z, \infty) \cup R \in C(z, X_0) = \beta(I),$$

resulta que $A \in f(I \times I) = \mathcal{D}$. Más aún, debido a que $a, b \notin A$, $A \in \mathcal{D} - \partial(\mathcal{D})$. Afirmamos que:

5) $\mathcal{D} = C(z, X)$.

Para ver esto notemos que, por un lado, es claro que $\mathcal{D} \subset C(z, X)$. Por otro, de acuerdo con 3), cada elemento $C \in C(z, X)$ se puede escribir como la unión de un elemento $C_1 \in C(z, [a, z]) = \alpha(I)$ y un elemento $C_2 \in C(z, X_0) = \beta(I)$. Entonces $C \in f(I \times I) = \mathcal{D}$ y de esta manera, $C(z, X) \subset \mathcal{D}$. Esto prueba 5). Afirmamos ahora que:

6) $A \in Int_{C(X)}(\mathcal{D})$.

En efecto, sean $U = [a, z)$ y $V = X - [a, z] = (z, \infty) \cup R \cup (-\infty, b]$. Sea

$$\mathcal{U} = \{C \in C(X) : C \cap U \neq \varnothing \neq C \cap V\}.$$

Ya que U y V son abiertos en X, $\mathcal{U}$ es abierto en $C(X)$. Claramente $A \in \mathcal{U}$. Dada $C \in \mathcal{U}$, debido a que C es conexo, se sigue que $z \in C$. Luego, $C \in C(z, X) = \mathcal{D}$, según 5). Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$. Esto prueba 6) y termina la demostración. ∎

5.3 Continuos Terminales.

Ahora probaremos que el residuo común a las compactaciones $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$, es terminal en X.

Teorema 120 *El residuo común R de las compactaciones $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ es terminal en X.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X tal que $A \cap R \neq \varnothing$. Si A es un subcontinuo de $S_1 \cup R$, o bien de $S_2 \cup R$ entonces, por la terminalidad de R con respecto a dichas compactaciones, $A \subset R$ o bien $R \subset A$. Supongamos entonces que A no es un subcontinuo de $S_1 \cup R$ y que tampoco es un subcontinuo de $S_2 \cup R$. Entonces existen $x \in S_1$ y $y \in S_2$ tales que $A = [x, \infty) \cup R \cup (-\infty, y]$. Luego $R \subset A$ y, por consiguiente, R es terminal en X. ∎

Ahora veremos que X no es localmente conexo en los puntos de R.

Teorema 121 *Si R es no degenerado, entonces X no es localmente conexo en ningún punto de R.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo en un punto $x \in R$. Fijemos un punto $y \in R$ tal que $y \neq x$. Sea U un subconjunto abierto en X tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Aplicando la regularidad de X, así como la conexidad local de X en x, es posible encontrar un subconjunto abierto y conexo C de X, tal que $x \in C \subset Cl_X(C) \subset U$. Como $S_1 \cup S_2$ es denso en X, $C \cap (S_1 \cup S_2) \neq \varnothing$. Supongamos sin perder generalidad que $C \cap S_1 \neq \varnothing$. Entonces $Cl_X(C) \cap S_1 \neq \varnothing$.

Tenemos de lo anterior, que $Cl_X(C)$ es un subcontinuo de X que intersecta a R, no está contenido en R (pues tiene un punto de S_1) y no contiene a R (pues $y \notin U$ y $Cl_X(C) \subset U$). Entonces R no es terminal en X. Como esto contradice el teorema anterior, X no es localmente conexo en x. ∎

Corolario 122 *Si R es no degenerado, entonces X no es localmente conexo.*

5.4 Componentes por Trayectorias.

Una buena parte de la estructura de $C(X)$ es mostrada en el siguiente teorema. En el mismo, describimos una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$ que será de gran importancia para probar que X casi tiene hiperespacio único.

Teorema 123 *Para el continuo X son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. *$C(R, X)$ es una 2-celda en $C(X)$,*
2. *$C(a, X)$ es un arco ordenado de $\{a\}$ a X en $C(X)$,*
3. *$C(b, X)$ es un arco ordenado de $\{b\}$ a X en $C(X)$,*
4. *$Cl_{C(X)}(C(S_1)) \subset C(S_1 \cup R)$,*
5. *$Cl_{C(X)}(C(S_2)) \subset C(S_2 \cup R)$,*
6. *$\Lambda = C(S_1) \cup [C(R, X) - \{R\}] \cup C(S_2)$ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$.*

Demostración. Para probar 1. notemos que, aplicando la parte 2. del Teorema 115 a las compactaciones $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$, tenemos que $C(R, S_1 \cup R)$ es un arco ordenado α de R a $S_1 \cup R$ en $C(X)$, y $C(R, S_2 \cup R)$ es un arco ordenado β de R a $S_2 \cup R$ en $C(X)$. Definimos una función $f : I \times I \to C(X)$ como $f(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$ siempre que $(s,t) \in I \times I$. Afirmamos que:

1) $f(s,t) \in C(R,X)$ para cada $(s,t) \in I \times I$.

En efecto, si $(s,t) \in I \times I$, entonces $R \subset \alpha(s) \cap \beta(t)$. Por tanto, $R \subset \alpha(s) \cup \beta(t) = f(s,t)$, y así 1) es cierto. Es fácil ver que:

2) f es inyectiva y continua.

Afirmamos ahora que:

3) f es suprayectiva.

Para ver esto, tomemos un elemento $C \in C(R,X)$. Entonces hay tres opciones para C: C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$, un subcontinuo de la compactación $S_2 \cup R$, o bien $C = [x,\infty) \cup R \cup (-\infty, y]$ en donde $x \in S_1$ y $y \in S_2$. En este último caso, haciendo $C_1 = [x,\infty) \cup R$ y $C_2 = R \cup (-\infty, y]$, tenemos que $C_1 \in C(R, S_1 \cup R) = \alpha(I)$, $C_2 \in C(R, S_2 \cup R) = \beta(I)$ y $C = C_1 \cup C_2$. Por tanto, existe un punto $(s,t) \in I \times I$ tal que $\alpha(s) = C_1$ y $\beta(t) = C_2$. Luego, $C = \alpha(s) \cup \beta(t) = f(s,t)$.

Supongamos ahora que C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$. Entonces $C \in C(R, S_1 \cup R) = \alpha(I)$, por lo que existe $s \in I$ tal que $C = \alpha(s)$. Luego, $C = \alpha(s) = \alpha(s) \cup \beta(0) = f(s,0)$. De manera similar se resuelve el caso en que C es un subcontinuo de la compactación $S_2 \cup R$. Por tanto, siempre es posible encontrar un punto $(s,t) \in I \times I$ tal que $f(s,t) = C$. Luego, f es suprayectiva.

Como consecuencia de lo anterior, $f : I \times I \to C(R,X)$ es un homeomorfismo. Entonces $C(R,X)$ es una 2-celda en $C(X)$. Esto prueba 1.

Para probar 2., tomemos un elemento $C \in C(a,X)$. Como $a \in S_1 \cap C$, tenemos que C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$, o bien $C = S_1 \cup R \cup (-\infty, y]$ para algún punto $y \in S_2$. Si C es un subcontinuo de la compactación $S_1 \cup R$ entonces, debido a que $a \in C$, $C = [a,e]$ para algún punto $e \in S_1$, o bien $C = S_1 \cup R$. De esta manera, cada elemento $C \in C(a,X)$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones: $C = [a,e]$ para algún punto $e \in S_1$, $C = S_1 \cup R$ o bien $C = S_1 \cup R \cup (-\infty, y]$ para algún punto $y \in S_2$. Aplicando esto, es fácil ver que si $C, D \in C(a,X)$ entonces $C \subset D$ o $D \subset C$. Ahora bien, como $\{a\}, X \in C(a,X)$ y para cada $C \in C(a,X)$,

$\{a\} \subset C \subset X$ tenemos, por el Teorema 31, que $C(a, X)$ es un arco ordenado de $\{a\}$ a X en $C(X)$. Esto prueba 2. La prueba de 3. es similar.

Para ver 4., notemos que $S_1 \cup R$ es un continuo, así que $C(S_1 \cup R)$ es un compacto que contiene a $C(S_1)$. De aquí que $Cl_{C(X)}(C(S_1)) \subset C(S_1 \cup R)$. Esto prueba 4. Análogamente se prueba 5.

Para ver 6., notemos que, aplicando la parte 4. del Teorema 115 a las compactaciones $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$, resulta que $\Lambda_1 = C(S_1) \cup [C(R, R \cup S_1) - \{R\}]$ y $\Lambda_2 = C(S_2) \cup [C(R, R \cup S_2) - \{R\}]$ son conexos por trayectorias. Por 1., $C(R, X)$ es una 2-celda, así que $C(R, X) - \{R\}$ es conexo por trayectorias. Además, para $i = 1, 2$

$$R \cup S_i \in [C(R, X) - \{R\}] \cap \Lambda_i.$$

Esto muestra que Λ es conexo por trayectorias. Claramente $\Lambda \subset C(X) - \{R\}$, así que existe una componente por trayectorias $\mathcal{C}$ de $C(X) - \{R\}$ tal que $\Lambda \subset \mathcal{C}$. Si $\Lambda \subsetneq \mathcal{C}$ entonces existe $A \in \mathcal{C} - \Lambda \subset C(X) - \Lambda$. Luego, A es un subcontinuo propio de R. Fijemos $B \in C(S_1)$. Entonces $B \in \Lambda$, por lo que $B \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$, existe una trayectoria $\alpha : I \to C(X)$ de A a B tal que $R \notin \alpha(I)$. Sin embargo, como R es terminal en X, $A \subsetneq R$ y $B - R \neq \emptyset$, por el Corolario 113 se sigue que $R \in \alpha(I)$. De esta contradicción se tiene que $\Lambda = \mathcal{C}$ y, por tanto, Λ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$. ∎

En el siguiente teorema, mostraremos que $C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(X)$ es una compactación métrica del conjunto $C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(S_1) \cup F_1(S_2)$ con residuo $F_1(R)$.

Teorema 124 *Sean a y b números reales tales que $a > 0$ y $b < 0$. Sean $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ las respectivas compactaciones métricas de los semirayos ajenos $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$, ambas con residuo R. Definamos $X = S_1 \cup R \cup S_2$ y sea $S = C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(S_1) \cup F_1(S_2)$. Entonces,*

a) S es homeomorfo a $\mathbb{R}$. De hecho, existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to S$ tal que:

i) $f((-\infty, b]) = F_1(S_2)$, $f([b, 0]) = C(b, X)$, $f([0, a]) = C(a, X)$ y $f([a, \infty)) = F_1(S_1)$, *ii)* $f(0) = X$ *y, para cada* $x \in (-\infty, b] \cup [a, \infty)$, $f(x) = \{x\}$,

iii) para cada $x \in \mathbb{R}$, $F_1(R) \subset Cl_{C(X)}(f([x, \infty)))$. *Más aún*

$$Cl_{C(X)}(f([x, \infty))) = f([x, \infty)) \cup F_1(R),$$

iv) para cada $x \in \mathbb{R}$, $F_1(R) \subset Cl_{C(X)}(f((-\infty, x]))$. *Más aún*

$$Cl_{C(X)}(f((-\infty, x])) = f((-\infty, x]) \cup F_1(R),$$

b) el conjunto $\mathcal{X} = \mathcal{S} \cup F_1(R)$ *es una compactación métrica de* $\mathcal{S}$ *con residuo* $F_1(R)$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{S}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, notemos primero que:

1) $C(a, X) \cup C(b, X)$ es un arco en $C(X)$ con extremos $\{a\}$ y $\{b\}$.

En efecto, por las partes 2. y 3. del Teorema 123, $C(a, X)$ y $C(b, X)$ son arcos ordenados de $\{a\}$ a X en $C(X)$ y de $\{b\}$ a X en $C(X)$, respectivamente. Además $C(a, X) \cap C(b, X) = \{X\}$ por lo que, $C(a, X) \cup C(b, X)$ es la unión de dos arcos que se intersectan en su extremo X. Luego, $C(a, X) \cup C(b, X)$ es un arco en $C(X)$ con extremos $\{a\}$ y $\{b\}$. Más aún, es claro que:

2) $[C(a, X) \cup C(b, X)] \cap F_1(S_1) = \{a\}$.

Por tanto, $C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(S_1)$ es la unión de dos conjuntos, un arco y un semirayo, que se intersectan en su extremo $\{a\}$. Por tanto, $C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(S_1)$ es un semirayo en $C(X)$ con extremo $\{b\}$. Es claro que:

3) $[C(a, X) \cup C(b, X) \cup F_1(S_1)] \cap F_1(S_2) = \{b\}$.

Luego, $\mathcal{S}$ es la unión de dos semirayos que se intersectan en su extremo. Por tanto, $\mathcal{S}$ es un conjunto homeomorfo a $\mathbb{R}$. Claramente es posible construir un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ que satisface las propiedades i) y ii).

Para ver que f satisface iii), tomemos un punto $x \in \mathbb{R}$. Primero supongamos que $a \leq x$. Por el Teorema 104,

$$\begin{aligned} f([x, \infty)) \cup F_1(R) &= \{\{p\} : p \in [x, \infty) \cup R\} \\ &= \{\{p\} : p \in Cl_X([x, \infty))\}. \end{aligned}$$

Como la función $h : X \to F_1(X)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es una isometría:

$$
\begin{aligned}
h\left(Cl_X\left([x,\infty)\right)\right) &= Cl_{F_1(X)}\left(h\left([x,\infty)\right)\right) \\
&= Cl_{C(X)}\left(h\left([x,\infty)\right)\right) \\
&= Cl_{C(X)}\left(\{\{p\} : p \in [x,\infty)\}\right).
\end{aligned}
$$

Esto implica que:

$$
\begin{aligned}
f\left([x,\infty)\right) \cup F_1(R) &= Cl_{C(X)}\left(\{\{p\} : p \in [x,\infty)\}\right) \\
&= Cl_{C(X)}\left(f\left([x,\infty)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que $x < a$. Entonces, debido a que $f\left([x,a]\right)$ es compacto

$$
\begin{aligned}
Cl_{C(X)}\left(f\left([x,\infty)\right)\right) &= Cl_{C(X)}\left(f\left([x,a]\right)\right) \cup Cl_{C(X)}\left(f\left([a,\infty)\right)\right) \\
&= f\left([x,a]\right) \cup f\left([a,\infty)\right) \cup F_1(R) \\
&= f\left([x,\infty)\right) \cup F_1(R).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
f\left([x,\infty)\right) \cup F_1(R) = Cl_{C(X)}\left(f\left([x,\infty)\right)\right).
$$

Esto prueba iii). La prueba de que f satisface iv) es similar.

Para probar b), tomemos un punto $x \in \mathbb{R}$. Por iii) y iv)

$$
\begin{aligned}
Cl_{C(X)}(\mathcal{S}) &= Cl_{C(X)}\left(f\left((-\infty,x]\right) \cup f\left([x,\infty)\right)\right) \\
&= Cl_{C(X)}\left(f\left((-\infty,x]\right)\right) \cup Cl_{C(X)}\left(f\left([x,\infty)\right)\right) \\
&= f\left((-\infty,x]\right) \cup F_1(R) \cup f\left([x,\infty)\right) \cup F_1(R) \\
&= f\left((-\infty,x] \cup [x,\infty)\right) \cup F_1(R) \\
&= f(\mathbb{R}) \cup F_1(R) \\
&= \mathcal{S} \cup F(R).
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $\mathcal{X}$ es compacto y métrico. Por tanto, $\mathcal{X}$ es una compactación métrica de $\mathcal{S}$ con residuo $F_1(R)$. Esto prueba b). ∎

5.5 El Teorema.

Estamos en condiciones de probar que si Y es un continuo tal que $C(Y)$ y $C(X)$ son homeomorfos, entonces Y y X son homeomorfos, o bien Y es homeomorfo a la *varsomación* de X, esto es, al continuo que se obtiene agragándole a X un arco que lo intersecta solamente en el conjunto $\{a, b\}$.

Teorema 125 *Sean a y b números reales tales que $a > 0$ y $b < 0$. Supongamos que $X = S_1 \cup R \cup S_2$ es un continuo tal que $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ son las respectivas compactaciones métricas de los semirayos ajenos $S_1 = [a, \infty)$ y $S_2 = (-\infty, b]$, ambas con residuo R. Supongamos que Y es un continuo tal que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$. Entonces Y es homeomorfo a X, o bien Y es homeomorfo a $X \cup S$, en donde S es un arco con extremos a y b que satisface que $S \cap X = \{a, b\}$.*

Demostración. Tomemos un continuo Y tal que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$ y un homeomorfismo $h : C(Y) \to C(X)$. Supongamos primero que R es degenerado. Entonces X es el arco $[b, a]$ y, por el Teorema 68, Y es homeomorfo a X, o bien a la curva cerrada simple (es decir, al continuo $X \cup S$ en donde S es un arco con extremos a y b que satisface que $S \cap X = \{a, b\}$).

Supongamos ahora que R es no degenerado. Afirmamos que:

1) Y no es localmente conexo.

En efecto, si Y es localmente conexo, entonces $C(Y)$ y por ende también $C(X)$ son localmente conexos. Luego, X es localmente conexo, lo cual es absurdo. Esto prueba 1). Afirmamos ahora que:

2) $R \notin h(F_1(Y))$.

Veamos, si $R \in h(F_1(Y))$ entonces $R = h(\{y\})$ para alguna $y \in Y$. Debido a que $C(Y) - \{\{y\}\}$ es conexo por trayectorias, $C(X) - \{R\}$ es conexo por trayectorias. Luego R no es terminal en X. Esto contradice al Teorema 120, de manera que 2) se cumple.

Hagamos ahora $S = F_1(S_1) \cup F_1(S_2) \cup C(a, X) \cup C(b, X)$. Por el Teorema 124, existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to S$ tal que:

a) $f((-\infty,b]) = F_1(S_2)$, $f([b,0]) = C(b,X)$, $f([0,a]) = C(a,X)$ y $f([a,\infty)) = F_1(S_1)$,

b) $f(0) = X$ y, para cada $x \in (-\infty,b] \cup [a,\infty)$, $f(x) = \{x\}$,

c) para cada $x \in \mathbb{R}$ $Cl_{C(X)}(f([x,\infty))) = f([x,\infty)) \cup F_1(R)$ y $Cl_{C(X)}(f((-\infty,x])) = f((-\infty,x]) \cup F_1(R)$.

Afirmamos ahora que:

3) $h(F_1(Y)) \subset C(R) \cup S$.

Para ver 3) supongamos que, por el contrario, existe un punto $y \in Y$ tal que $h(\{y\}) \notin C(R) \cup S$. Entonces $h(\{y\}) \in C(S_1) \cup C(S_2) \cup [C(R,X) - \{R\}]$. Supongamos primero que $h(\{y\}) \in C(S_1)$. Como $h(\{y\}) \notin F_1(S_1) \cup C(a,X)$, tenemos que $h(\{y\})$ es un subcontinuo no degenerado de S_1 que no tiene al punto a. Entonces, por el Teorema 107, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $h(\{y\}) \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Definamos $\mathcal{D}_0 = h^{-1}(\mathcal{D})$. Es claro que $\mathcal{D}_0$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}_0 - o(\mathcal{D}_0)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, h(\{y\})) \subset S_1$. Por la continuidad de h, existe $\delta > 0$ tal que $h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(h(\{y\}))$. Por el Teorema 96, existe un triodo $T \in B_{\frac{\delta}{2}}(\{y\})$. Entonces, por el Teorema 48, existe una 3-celda $\mathcal{T}$ en $C(Y)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\delta(\{y\})$. Por tanto, $\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T})$ es una 3-celda en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{T}_0 \subset h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(h(\{y\})) \subset C(S_1).$$

Definiendo $T_0 = \bigcup \mathcal{T}_0$, resulta que T_0 es un subcontinuo de S_1 tal que la 3-celda $\mathcal{T}_0$ está contenida en $C(T_0)$. Por tanto, T_0 contiene un triodo. Debido a que $T_0 \subset S_1$, resulta entonces que el semirayo S_1 contiene un triodo, lo cual es absurdo. Por consiguiente $h(\{y\}) \notin C(S_1)$. De manera similar se prueba que $h(\{y\}) \notin C(S_2)$. Por tanto $h(\{y\}) \in C(R,X) - \{R\}$. Dado que $a, b \notin h(\{y\})$, por el Teorema 119, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que

$$h(\{y\}) \in [\mathcal{D} - o(\mathcal{D})] \cap Int_{C(X)}(\mathcal{D}).$$

Puesto que $h(\{y\}) \in Int_{C(X)}(\mathcal{D})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(h(\{y\})) \subset \mathcal{D}$. Por la continuidad de h, existe $\delta > 0$ tal que $h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(h(\{y\}))$. Notemos que $\mathcal{D}_0 = h^{-1}(\mathcal{D})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}_0 - o(\mathcal{D}_0)$

así que, por el Teorema 96, existe un triodo $T \in B_{\frac{\delta}{2}}(\{y\})$. Aplicando de nueva cuenta el Teorema 48, podemos construir una 3-celda $\mathcal{T}$ en $C(Y)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\delta(\{y\})$. Luego, $\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T})$ resulta ser una 3-celda en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{T}_0 \subset h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(h(\{y\})) \subset \mathcal{D},$$

es decir, $\mathcal{T}_0$ es una 3-celda contenida en una 2-celda $\mathcal{D}$. Esto es absurdo, así que $h(\{y\}) \in C(R) \cup \mathcal{S}$ y así 3) se cumple. Afirmamos ahora que:

4) $h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$.

En efecto, de acuerdo con el Teorema 123

$$\Lambda = C(S_1) \cup [C(R, X) - \{R\}] \cup C(S_2)$$

es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R\}$. Por tanto $h^{-1}(\Lambda)$ es una componente por trayectorias de $C(Y) - \{h^{-1}(R)\}$. Entonces, por el Teorema 114, $h^{-1}(\Lambda) \cap F_1(Y) \neq \varnothing$. Luego, $h(F_1(Y)) \cap \Lambda \neq \varnothing$ y, de acuerdo con 3), esto implica que $h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$. Afirmamos ahora que:

5) $h(F_1(Y)) \cap C(R) \neq \varnothing$.

En efecto, si por el contrario $h(F_1(Y)) \cap C(R) = \varnothing$ entonces, de acuerdo con 3), $h(F_1(Y)) \subset \mathcal{S}$. Debido a que $\mathcal{S}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y a que $h(F_1(Y))$ es un continuo contenido en $\mathcal{S}$, $h(F_1(Y))$ tiene que ser un arco en $\mathcal{S}$ y, por consiguiente, un conjunto localmente conexo. Entonces $F_1(Y)$ y por tanto también Y, son localmente conexos. Esto contradice 1), así que 5) se cumple.

Definamos ahora $\mathcal{R} = h(F_1(Y)) \cap C(R)$ y $\mathcal{V}_Y = h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S}$. Es claro que $\mathcal{R}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, y que $\mathcal{V}_Y$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{S}$. Además, por 4) y 5), $\mathcal{V}_Y \neq \varnothing$ y $\mathcal{R} \neq \varnothing$. Más aún, $h(F_1(Y)) = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}_Y$ y $\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_Y = \varnothing$, esto último por 2).

Afirmamos ahora que:

6) $\mathcal{V}_Y$ es de alguna de las siguientes cuatro formas:

i) $\mathcal{V}_Y = f(\mathbb{R})$,

ii) $\mathcal{V}_Y = f([v_0, \infty))$ para algún $v_0 \in \mathbb{R}$,

iii) $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_0])$ para algún $v_0 \in \mathbb{R}$, o bien

iv) $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_1]) \cup f([v_2, \infty))$ para algún par de números reales v_1 y v_2 con $v_1 < v_2$.

Para empezar, notemos que $f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $\mathbb{R}$. Para probar 6), es suficiente con que mostremos que si $x \in f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$, entonces $(-\infty, x] \subset f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$ o $[x, \infty) \subset f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$. Supongamos que esto no es cierto, entonces existen $x \in f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$ y u y v, con $u < x < v$ tales que $u, v \notin f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$. Entonces,

$$h(F_1(Y)) = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}_Y = \mathcal{R} \cup [h(F_1(Y)) \cap f(\mathbb{R})] =$$

$$= [\mathcal{R} \cup [h(F_1(Y)) \cap (f((-\infty, u]) \cup f([v, \infty)))]] \cup [h(F_1(Y)) \cap f([u, v])].$$

Estos dos uniendos son cerrados. El segundo por que es la intersección de dos compactos, y el primero por que es igual a

$$\mathcal{R} \cup [[F_1(R) \cap h(F_1(Y))] \cup [h(F_1(Y)) \cap (f((-\infty, u]) \cup f([v, \infty)))]]$$

$$= \mathcal{R} \cup [h(F_1(Y)) \cap [F_1(R) \cup f((-\infty, u]) \cup f([v, \infty))]]$$

el cual es cerrado por la parte iv) del Teorema 124. Además, ambos uniendos son no vacíos, pues el segundo tiene a $f(x)$. La intersección de ellos es igual a

$$h(F_1(Y)) \cap \{f(u), f(v)\}.$$

Por la conexidad de $h(F_1(Y))$, esta intersección es no vacía. Así que, por ejemplo $f(u) \in h(F_1(Y))$. De aquí que $u \in f^{-1}(\mathcal{V}_Y)$, lo cual es absurdo. Esto termina la prueba de la afirmación y, por consecuencia, 6) es cierto.

Cualquiera que sea la forma de $\mathcal{V}_Y$, afirmamos que:

7) $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R)$.

En efecto, si $\mathcal{V}_Y = f(\mathbb{R}) = \mathcal{S}$ entonces, de acuerdo con la parte b) del Teorema 124

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = \mathcal{X} = \mathcal{S} \cup F_1(R) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R).$$

Si $\mathcal{V}_Y = f([v_0, \infty))$, por c)

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = f([v_0, \infty)) \cup F_1(R) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R).$$

Si $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_0])$, por c)

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = f((-\infty, v_0]) \cup F_1(R) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R).$$

Finalmente, si $\mathcal{V}_Y = f((-\infty. v_1]) \cup f([v_2, \infty))$, por c)

$$\begin{aligned} Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) &= Cl_{C(X)}(f((-\infty, v_1])) \cup Cl_{C(X)}(f([v_2, \infty))) \\ &= f((-\infty, v_1]) \cup F_1(R) \cup f([v_2, \infty)) \cup F_1(R) \qquad (5.1) \\ &= \mathcal{V}_Y \cup F_1(R). \end{aligned}$$

Esto prueba 7). Afirmamos ahora que:

8) $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ es conexo.

En efecto, si $\mathcal{V}_Y = f(\mathbb{R})$ o $\mathcal{V}_Y = f([v_0, \infty))$ o $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_0])$, entonces $\mathcal{V}_Y$ es conexo y, por consiguiente, $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ es conexo. Si $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_1]) \cup f([v_2, \infty))$ entonces, de acuerdo con (5.1)

$$Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = [f((-\infty, v_1]) \cup F_1(R)] \cup [f([v_2, \infty)) \cup F_1(R)].$$

Notemos que los conjuntos $f((-\infty, v_1]) \cup F_1(R) = Cl_{C(X)}(f((-\infty, v_1]))$ y $f([v_2, \infty)) \cup F_1(R) = Cl_{C(X)}(f([v_2, \infty)))$ son conexos con intersección no vacía, así que la unión de dichos conjuntos, o sea $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$, es conexa. Esto prueba 8). Afirmamos que:

9) $\mathcal{R} \cap Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = F_1(R)$.

En efecto, como $F_1(R) \subset Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) \subset h(F_1(Y))$, tenemos que $F_1(R) \subset \mathcal{R}$. De manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \cap Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) &= \mathcal{R} \cap [\mathcal{V}_Y \cup F_1(R)] \\ &= [\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_Y] \cup [\mathcal{R} \cap F_1(R)] = F_1(R) \end{aligned}$$

con lo que 9) se cumple. Ahora mostraremos que:

10) $\mathcal{R}$ es conexo.

Para ver esto, notemos primero que si $\mathcal{R} = F_1(R)$, entonces $\mathcal{R}$ es conexo. Notemos ahora que si $\mathcal{R} \neq F_1(R)$ entonces, de acuerdo con 9), $\mathcal{R} - F_1(R) \neq \varnothing$. Ahora bien, $F_1(R)$ es un subconjunto conexo del conjunto conexo $h(F_1(Y))$, tal que

$$h(F_1(Y)) - F_1(R) = [\mathcal{R} - F_1(R)] \cup \left[Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - F_1(R)\right].$$

Además, $\mathcal{R} - F_1(R)$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - F_1(R) = \mathcal{V}_Y$ son no vacíos y, por 9), están mutuamente separados. Por tanto, por el Teorema 38, $[\mathcal{R} - F_1(R)] \cup F_1(R) = \mathcal{R}$ es conexo. Esto prueba 10).

Tenemos, de todo lo anterior, que $\mathcal{R}$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ son dos subcontinuos de $h(F_1(Y))$, cuya unión es $h(F_1(Y))$, y cuya intersección es $F_1(R)$. Afirmamos que:

11) $\mathcal{R} = F_1(R)$.

Para probar 11) supongamos que $\mathcal{R} \neq F_1(R)$. Debido a que $F_1(R) \subset \mathcal{R}$, resulta que $\mathcal{R} - F_1(R) \neq \varnothing$. Esto implica que $\mathcal{R}$ y $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)$ son dos subcontinuos propios de $h(F_1(Y))$, cuya unión es $h(F_1(Y))$ e intersección es $F_1(R)$, según 9). Definamos ahora

$$B_Y = \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1(R)\},$$

$$N = \{y \in Y : h(\{y\}) \in \mathcal{R}\} \text{ y}$$

$$V_Y = \{y \in Y : h(\{y\}) \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y)\}.$$

Es claro que N y V_Y son dos subcontinuos propios de Y, cuya unión es Y y cuya intersección es el conjunto conexo B_Y. Entonces, por el Teorema 33,

> 11.1) para cada subcontinuo R' de Y, es posible encontrar un punto $u \in N$, un punto $v \in V_Y - N$ y una trayectoria $\gamma : I \to C(Y)$ de $\{u\}$ a $\{v\}$ en $C(Y)$ tal que $R' \notin \gamma(I)$.

Tomemos $R' = h^{-1}(R)$. Es claro que R' es un subcontinuo de Y, así que por 11.1), existen un punto $u \in N$, un punto $v \in V_Y - N$ y una trayectoria $\gamma : I \to C(Y)$ de $\{u\}$ a $\{v\}$ en $C(Y)$ tales que $R' \notin \gamma(I)$. Definamos

$\beta = h \circ \gamma$. Entonces, $\beta : I \to C(X)$ es una trayectoria de $h(\{u\})$ a $h(\{v\})$ en $C(X)$. Como $u \in N$ resulta que $h(\{u\}) \in \mathcal{R} = h(F_1(Y)) \cap C(R)$, por lo que $h(\{u\})$ es un subcontinuo de R. En vista de 2), tenemos que $h(\{u\})$ es un subcontinuo propio de R.

Ahora bien, $v \in V_Y - N$ por lo que $h(\{v\}) \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) - F_1(R) = \mathcal{V}_Y = h(F_1(Y)) \cap \mathcal{S}$, así que $h(\{v\})$ es un subcontinuo de X que intersecta al complemento de R. Entonces, por el Corolario 113, existe $t \in I$ tal que $\beta(t) = R$. Luego $\gamma(t) = h^{-1}(\beta(t)) = h^{-1}(R) = R'$ contradiciendo el hecho de que $R' \notin \gamma(I)$. En consecuencia, $\mathcal{R} = F_1(R)$ y 11) queda probado.

Aplicando 7) y 11) tenemos que

$$\begin{aligned} h(F_1(Y)) &= \mathcal{R} \cup Cl_{C(X)}(\mathcal{V}_Y) = F_1(R) \cup [\mathcal{V}_Y \cup F_1(R)] \\ &= \mathcal{V}_Y \cup F_1(R). \end{aligned}$$

Afirmamos que:

12) $\mathcal{V}_Y$ no es de la forma $\mathcal{V}_Y = f([v_0, \infty))$ para ningún $v_0 \in \mathbb{R}$.

En efecto si existe un punto $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{V}_Y = f([v_0, \infty))$, entonces $h(F_1(Y)) = \mathcal{V}_Y \cup F_1(R)$ es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Entonces $F_1(Y)$ y, por ende también Y, son compactaciones métricas de un semirayo con residuo no degenerado. Debido a que dichas compactaciones tienen hiperespacio único (Teorema 118), se tiene que X es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Esto es absurdo, por lo que 12) queda probado.

Similarmente, se muestra que:

13) $\mathcal{V}_Y$ no es de la forma $\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_0])$ para ningún $v_0 \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con 12), 13) y i)-iv) de 6), resulta que

$$\mathcal{V}_Y = f((-\infty, v_1]) \cup f([v_2, \infty))$$

para algún par de números reales v_1, v_2 con $v_1 < v_2$, o bien $\mathcal{V}_Y = f(\mathbb{R})$. En el primer caso, es claro que Y es homeomorfo a X y, en el segundo caso que

Y es homeomorfo a $X \cup S$, en donde S es un arco con extremos a y b, que satisface que $S \cap X = \{a, b\}$. ∎

El teorema anterior nos da una nueva familia de continuos cuyos elementos están C-determinados. Supongamos que $\mathcal{F}$ es la familia de todos aquellos continuos que se pueden escribir como dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo. Tomemos dos elementos X y Y en $\mathcal{F}$ tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$. Entonces, por el teorema anterior, Y es homeomorfo a X o bien a $X \cup S$, en donde S es un arco que intersecta solamente a los extremos de los semirayos ajenos de X. Debido a que un continuo de la forma $X \cup S$ no está en la familia $\mathcal{F}$, necesariamente Y es homeomorfo a X y, así los elementos de $\mathcal{F}$ están C-determinados. A continuación escribiremos el resultado obtenido como un teorema.

Teorema 126 *Los miembros de la familia $\mathcal{F}$ de los continuos que se pueden escribir como dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo, están C-determinados.*

Debido a que un arco pertenece a la familia $\mathcal{F}$, tenemos que un arco está C-determinado con respecto a la familia $\mathcal{F}$.

Tomemos ahora un elemento $X \in \mathcal{F}$. Entonces $X = S_1 \cup R \cup S_2$ en donde $S_1 \cup R$ y $S_2 \cup R$ son compactaciones métricas de los semirayos ajenos $S_1 = [a, \infty)$ y $S_2 = [-\infty, b]$, ambas con el mismo residuo no degenerado R. Hemos visto que si Y es un continuo tal que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$ y Y no es homeomorfo a X, entonces Y es homeomorfo a $X \cup S$ en donde S es un arco con extremos a y b que satisface que $S \cap X = \{a, b\}$. Notemos que $X \cup S$ es una compactación de la recta real $\mathbb{R}$ con residuo el continuo R. Por tanto, esencialmente el único continuo que le estorba a X para tener hiperespacio único, es la compactación de la recta real que tiene como residuo el mismo que el de X.

Similarmente, si iniciamos con una compactación métrica X de la recta real $V = (-\infty, \infty)$, tal que el residuo de X es conexo y no degenerado, y fijamos dos puntos $a, b \in V$ tales que $a < b$, entonces el continuo $Y = X - (a, b)$ se encuentra en la familia $\mathcal{F}$, no es homeomorfo a X y es tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos (Teorema 182). Por tanto, tenemos el siguiente resultado

Teorema 127 *Las compactaciones métricas de la recta real no tienen hiperespacio único.*

En el siguiente capítulo estudiaremos con detalle las compactaciones de la recta real $\mathbb{R}$.

5.6 Dobles Compactaciones Generalizadas.

En la sección 5.2, detectamos 2-celdas especiales cuando un continuo X se puede escribir como el resultado de dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo (ver Teorema 119). Si las compactaciones no comparten el residuo, entonces tambien podemos localizar dichas 2-celdas, y los resultados de esta sección tratan este caso.

Consideremos que la letra X representa un continuo que se puede escribir como $X = V_1 \cup R \cup S \cup V_2$, en donde $V_1 \cup R$ y $V_2 \cup S$ son dos compactaciones métricas de los semirayos ajenos $V_1 = [a, \infty)$ y $V_2 = (-\infty, b]$, tales que R es el residuo de $V_1 \cup R$ y S el de $V_2 \cup S$. Entonces $V_1 \cup R$ y $V_2 \cup S$ son subcontinuos de X. Por tanto, aplicando el Teorema 104, sucede que:

$$Cl_X([x, \infty)) = [x, \infty) \cup R \text{ para cada } x \in V_1$$

y

$$Cl_X((-\infty, y]) = (-\infty, y] \cup S \text{ para cada } y \in V_2.$$

Además, por el Teorema 105, R y S son subcontinuos de $V_1 \cup R$ y de $V_2 \cup S$, respectivamente. Por tanto, R y S son subcontinuos de X. En el siguiente teorema vemos la forma que tienen los subcontinuos de X.

Teorema 128 *Supongamos que $V_1 \cup R$ y $V_2 \cup S$ son dos compactaciones métricas de los semirayos ajenos $V_1 = [a, \infty)$ y $V_2 = (-\infty, b]$ con residuos R y S, respectivamente. Definamos $X = V_1 \cup R \cup S \cup V_2$ y sea A un subcontinuo de X. Entonces A satisface una de las siguientes condiciones:*

(a) A es un subcontinuo de $R \cup S$,

(b) A es un subcontinuo de V_1,

(c) A es un subcontinuo de V_2,

(d) $A \in C(R, X)$ *y* $A \cap V_1 \neq \emptyset$,

(e) $A \in C(S, X)$ *y* $A \cap V_2 \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $A \in C(X)$. Si $A \cap (V_1 \cup V_2) = \emptyset$, entonces A es un subcontinuo de $R \cup S$. Supongamos ahora que $A \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$. Consideremos primero el caso en que $A \cap V_1 \neq \emptyset$. Si A es un subcontinuo de la compactación $V_1 \cup R$, entonces A es un subcontinuo de V_1 o bien $A = [x, \infty) \cup R$ para alguna $x \in V_1$. Luego, A satisface (b) o (d). Si A no es un subcontinuo de la compactación $V_1 \cup R$, entonces $A \cap (V_2 \cup S) \neq \emptyset$. Debido a que A es un subcontinuo de X y a que $Cl_X(V_1) = V_1 \cup R$, tenemos que $R \subset A$. Entonces A satisface (d). Por tanto, si $A \cap V_1 \neq \emptyset$ entonces A satisface (b) o (d). De manera similar se prueba que, si $A \cap V_2 \neq \emptyset$ entonces A satisface (c) o (e). ∎

Con respecto a la localización de subcontinuos A de X, para los cuales es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 129 *Sean $V_1 \cup R$ y $V_2 \cup S$ dos compactaciones métricas de los semirrayos ajenos $V_1 = [a, \infty)$ y $V_2 = (-\infty, b]$ con residuos R y S, respectivamente. Supongamos que $R \cap S \neq \emptyset$ y definamos*

$$X = V_1 \cup R \cup S \cup V_2.$$

Si A es un subcontinuo no degenerado de X, tal que $a, b \notin A$ y $A \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$ entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Demostración. Sea A un subcontinuo no degenerado de X tal que $A \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$ y $a, b \notin A$. De acuerdo con el teorema anterior, A satisface una de las siguientes condiciones:

(a) A es un subcontinuo no degenerado de V_1 tal que $a \notin A$.

(b) A es un subcontinuo no degenerado de V_2 tal que $b \notin A$.

(c) $A \in C(R, X)$, $A \cap V_1 \neq \emptyset$ y $a, b \notin A$

(d) $A \in C(S, X)$, $A \cap V_2 \neq \emptyset$ y $b \notin A$.

Si A es un subcontinuo no degenerado de V_1 tal que $a \notin A$ entonces, aplicando el Teorema 107 a la compactación $V_1 \cup R$, resulta que existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(V_1 \cup R)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Puesto que $V_1 \cup R$ es un subcontinuo de X, $\mathcal{D}$ es una 2-celda en $C(X)$. Si A es un subcontinuo no degenerado de V_2 entonces, procediendo de manera similar es posible encontrar dicha 2-celda $\mathcal{D}$.

Supongamos ahora que A es de la forma (c). Como cada punto x de (a, ∞) separa en los conjuntos $A_x = [a, x)$ y $B_x = (x, \infty) \cup R \cup S \cup V_2$, tenemos que si $p \in A \cap (a, \infty)$, entonces $[p, \infty) \subset A$. Esto implica que $A \cap [a, \infty)$ es de la forma $A \cap [a, \infty) = [v, \infty)$ para alguna $v > a$. Sea $x = v + 1$. Como x separa a X en los conjuntos A_x y B_x, por el Teorema 38, $B_1 = A_x \cup \{x\}$ y $B_2 = B_x \cup \{x\}$ son continuos cuya unión es X. Además, x también separa a A en los conjuntos $A_x \cap A$ y $B_x \cap A$. Nuevamente, por el Teorema 38, $A_1 = (A_x \cap A) \cup \{x\}$ y $A_2 = (B_x \cap A) \cup \{x\}$ son subcontinuos (propios) de A. Observemos que $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \neq A$, $A_2 \neq A$, $A_1 \subsetneq B_1$ (pues $a \in B_1 - A_1$), $A_2 \subsetneq B_2$ (pues $b \in B_2 - A_2$), $B_1 \neq X \neq B_2$ y $A_1 \cap A_2 = \{x\} = B_1 \cap B_2$. De acuerdo con el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Si A es de la forma descrita en (d), con una argumento similar es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. ∎

Capítulo 6

Compactaciones de la recta real.

6.1 Introducción.

Consideremos la clase C de las compactaciones métricas de la recta real $(-\infty,\infty)$. Es claro que C se puede escribir como la unión de las clases C_1 y C_2, dependiendo de si el residuo de dichas compactaciones es conexo o no, respectivamente.

Teorema 130 *Supongamos que $X = V \cup R$ es una compactación métrica de la recta real $V = (-\infty, \infty)$, con residuo R. Entonces R tiene a lo más dos componentes.*

Demostración. Definamos

$$A_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Cl_X\left((n,\infty)\right)$$

y

$$A_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Cl_X\left((-\infty,-n)\right).$$

Afirmamos que:

1) $R = A_1 \cup A_2$.

Para probar que $R \subset A_1 \cup A_2$, tomemos un punto $x \in R$. Como R es el residuo de la compactación, existe una sucesión $(x_n)_n$ en V tal que $x_n \to x$. Como el conjunto $X - [-1,1]$ es abierto en X y tiene a x, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset X - [-1,1]$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\delta(x)$ para cada $n \geq N$. Entonces $x_n \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, es posible encontrar una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ y tal que, $x_{n_k} \in (1,\infty)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, o bien $x_{n_k} \in (-\infty,-1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $x_{n_k} \in (1,\infty)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $x_{n_k} \in Cl_X((1,\infty))$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in Cl_X((1,\infty))$. Mostraremos ahora que $x \in Cl_X((i,\infty))$ para cada $i \in \mathbb{N} - \{1\}$. Tomemos $i \in \mathbb{N} - \{1\}$. Como el conjunto $X - [0,i]$ es abierto en X y tiene a x, existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(x) \subset X - [0,i]$. Debido a que $x_{n_k} \to x$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in B_{\delta_i}(x)$ para cada $k \geq N_i$. Entonces $x_{n_k} \in (i,\infty)$ para cada $k \geq N_i$. Luego, $x_{n_k} \in Cl_X((i,\infty))$. De donde, $x \in Cl_X((i,\infty))$. Esto muestra que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Cl_X((n,\infty)) = A_1$.

Si $x_{n_k} \in (-\infty,-1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces, de manera similar, se prueba que $x \in A_2$. Luego $x \in A_1 \cup A_2$. De aquí que $R \subset A_1 \cup A_2$.

Para probar que $A_1 \cup A_2 \subset R$, tomemos un punto $x \in A_1 \cup A_2$. Si $x \notin R$, entonces $x \in V = (-\infty,-1) \cup [-1,1] \cup (1,\infty)$. Supongamos primero que $x \in [-1,1]$. Como $x \in A_1 \cup A_2$, resulta que $x \in A_1$ o bien $x \in A_2$. En el primer caso, $x \in Cl_X((2,\infty)) \subset [2,\infty) \cup R$. Así que $x \in [2,\infty)$, ya que $x \notin R$. Luego $x \geq 2$. Esto es un absurdo. En el segundo caso, $x \in Cl_X((-\infty,-2)) \subset (-\infty,2] \cup R$ y, de manera similar, obtenemos un absurdo.

Supongamos ahora que $x \in (1,\infty)$. Si $x \in A_1$ entonces, tomando un entero positivo $n > x$, resulta que $x \in Cl_X((n,\infty)) \subset [n,\infty) \cup R$. Luego $x \in [n,\infty)$, de donde $n \leq x$. Esto es un absurdo. Si $x \in A_2$, entonces $x \in Cl_X((-\infty,-1)) \subset (-\infty,-1] \cup R$. Luego $x \in (-\infty,-1]$, de donde $x \leq -1$. Esto es un absurdo. Supongamos por último que $x \in (-\infty,-1)$. De manera similar, se llega a una contradicción. Por tanto, $x \in R$. Esto prueba que $A_1 \cup A_2 \subset R$.

Tenemos de lo anterior que $R = A_1 \cup A_2$. Esto prueba 1). Notemos, si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n > m$ entonces $(m,\infty) \subset (n,\infty)$. Luego $Cl_X((m,\infty)) \subset$

$Cl_X((n,\infty))$. Por tanto, $\{Cl_X((n,\infty)) : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia anidada de subcontinuos de X. Entonces, por [27, Teorema 1.8], $A_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Cl_X((n,\infty))$ es un continuo. De manera similar, A_2 es un continuo. Entonces, de acuerdo con 1), R es la unión de los continuos A_1 y A_2. Si $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, entonces R es conexo. Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, entonces R posee justo dos componentes, A_1 y A_2. Esto termina la demostración del teorema. ∎

De acuerdo con el teorema anterior, si $X \in \mathcal{C}$ entonces el residuo de X posee a lo más dos componentes. Por tanto, si $X \in \mathcal{C}_1$ entonces el residuo de X es conexo, mientras que si $X \in \mathcal{C}_2$, el residuo de X tiene justo dos componentes.

Como comentamos al final de la sección 5.5, los elementos de $\mathcal{C}$ no tienen hiperespacio único. Más precisamente, para cada elemento $X \in \mathcal{C}_1$, existe un continuo Y_X no homeomorfo a X tal que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y_X)$ son homeomorfos. Por tanto, los elementos de $\mathcal{C}_1$ no tienen hiperespacio único. Sin embargo, veremos que dichos continuos están C-determinados.

6.2 El Caso Disconexo.

Denotemos por $\mathcal{G}$ la clase de las compactaciones métricas del semirayo $[0,\infty)$ que poseen residuo no degenerado. Es claro que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}_2$ y, como ya probamos en el Teorema 118, los elementos de $\mathcal{G}$ tienen hiperespacio único. Notemos ahora que $I \in \mathcal{C}_2$ y que I no tiene hiperespacio único. Sea $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 - (\mathcal{G} \cup \{I\})$. Entonces $\mathcal{C}'$ es la clase de las compactaciones métricas de la recta real $(-\infty,\infty)$, cuyo residuo es no es conexo y posee justo dos componentes no degeneradas.

En esta sección, la letra X representará un continuo tal que $X = V \cup R$, en donde $V \cup R$ es una compactación métrica del espacio $V = (-\infty,\infty)$ con residuo no conexo R, tal que las dos componentes R_1 y R_2 de R, son no degeneradas. Consideraremos que $Cl_X([0,\infty)) = [0,\infty) \cup R_1$ y $Cl_X((-\infty,0]) = (-\infty,0] \cup R_2$. En el siguiente teorema, mostramos que si $x \in V$, entonces $[x,\infty)$ es denso en $[x,\infty) \cup R_1$ y $(-\infty,x]$ es denso en $(-\infty,x] \cup R_2$.

Teorema 131 *Para cada $x \in V$, $Cl_X([x,\infty)) = [x,\infty) \cup R_1$ y $Cl_X((-\infty,x]) = (-\infty,x] \cup R_2$.*

Demostración. Sea $x \in V$. Si $x \geq 0$ entonces, debido a que $[0,\infty) \cup R_1$ es un subcontinuo de X, por el Teorema 104, $Cl_X([x,\infty)) = [x,\infty) \cup R_1$. Supongamos ahora que $x < 0$. Entonces

$$Cl_X([x,\infty)) = Cl_X([x,0] \cup [0,\infty)) = [x,0] \cup [0,\infty) \cup R_1 = [x,\infty) \cup R_1.$$

De manera similar se prueba que $Cl_X((-\infty,x]) = (-\infty,x] \cup R_2$. ∎

Ahora bien, no es difícil probar que si $A \in C(X)$ entonces A cumple una de las siguientes condiciones:

(a) A es un subcontinuo de la compactación $[0,\infty) \cup R_1$,

(b) A es un subcontinuo de la compactación $(-\infty,0] \cup R_2$,

(c) $A \in C(0,X)$, $A \cap (0,\infty) \neq \varnothing$ y $A \cap (-\infty,0) \neq \varnothing$.

En base a esto, resulta que los subcontinuos R_1 y R_2 son terminales en X, como se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 132 *R_1 y R_2 son terminales en X.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X tal que $A \cap R_1 \neq \varnothing$. Si A es un subcontinuo de la compactación $[0,\infty) \cup R_1$ entonces, aplicando el Teorema 109, resulta que $A \subset R_1$ o bien $R_1 \subset A$. Como $((-\infty,0] \cup R_2) \cap R_1 = \varnothing$, A no puede ser un subcontinuo de $(-\infty,0] \cup R_2$. Supongamos, por último, que $A \in C(0,X)$, $A \cap (0,\infty) \neq \varnothing$ y $A \cap (-\infty,0) \neq \varnothing$. Como $A \cap R_1 \neq \varnothing$, A no está contenido en V. Entonces, $A = X$ o bien $A = [x,\infty) \cup R_1$ para algún punto $x \in (-\infty,0)$. En cualquier caso $R_1 \subset A$. Esto prueba que R_1 es terminal en X. La prueba de que R_2 es terminal en X, es similar. ∎

Con respecto a la estructura de $C(X)$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 133 *Para la compactación X, son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. *$C(R_1,X)$ es un arco ordenado de R_1 a X en $C(X)$,*

2. *$C(R_2,X)$ es un arco ordenado de R_2 a X en $C(X)$,*

3. $\Lambda_1 = C(V) \cup C(R_2) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}] \cup C(R_2, X)$ *es una componente por trayectorias de* $C(X) - \{R_1\}$.

4. $\Lambda_2 = C(V) \cup C(R_1) \cup C(R_1, X) \cup [C(R_2, X) - \{R_2\}]$ *es una componente por trayectorias de* $C(X) - \{R_2\}$.

Demostración. Para probar 1. tomemos un elemento $A \in C(R_1, X)$. Entonces, tomando en cuenta la forma que tiene un subcontinuo de X y que $R_1 \subset A$, resulta que $A = R_1$, $A = X$ o bien $A = [x, \infty) \cup R_1$ para alguna $x \in V$. Aplicando esto, resulta que para cada $C, D \in C(R_1, X)$, $C \subset D$ o bien $D \subset C$. Más aún, como $R_1, X \in C(R_1, X)$ y para cada $C \in C(R_1, X)$, $R_1 \subset C \subset X$ tenemos, por el Teorema 31, que $C(R_1, X)$ es un arco ordenado de R_1 a X en $C(X)$. Esto prueba 1. La prueba de 2. es similar.

Para probar 3. notemos primero que, por definición, $\Lambda_1 \subset C(X) - \{R_1\}$. Ahora bien, en vista de que

$$
\begin{aligned}
& [C(R_2) \cup C(R_2, X)] \cap [C(V) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}]] \\
= \;& C(R_2, X) \cap [C(V) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}]] \\
= \;& C(R_2, X) \cap [C(R_1, X) - \{R_1\}] \\
= \;& \{X\},
\end{aligned}
$$

para ver que Λ_1 es conexo por trayectorias, basta probar que $C(R_2) \cup C(R_2, X)$ y $C(V) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}]$ son conexos por trayectorias. Como R_2 es un continuo, $C(R_2)$ es conexo por trayectorias. De acuerdo con 2., $C(R_2, X)$ es conexo por trayectorias. Además,

$$C(R_2) \cap C(R_2, X) = \{R_2\}.$$

Por tanto, $C(R_2) \cup C(R_2, X)$ es conexo por trayectorias. Notemos ahora que, como V es conexo por trayectorias y está contenido en el continuo X, $C(V)$ es conexo por trayectorias (Teorema 116). Notemos ahora que, por 1., $C(R_1, X) - \{R_1\}$ es conexo por trayectorias. Entonces, para probar que $C(V) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}]$ es conexo por trayectorias, basta mostrar que los elementos $\{0\} \in C(V)$ y $[0, \infty) \cup R_1 \in C(R_1, X) - \{R_1\}$ se pueden conectar por una trayectoria en $C(V) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}]$.

De acuerdo con el Teorema 115, $C(0,[0,\infty) \cup R_1)$ es un arco ordenado de $\{0\}$ a $[0,\infty) \cup R_1$ en $C([0,\infty) \cup R_1)$. Además, cada elemento $C \in C(0,[0,\infty) \cup R_1)$ es de la forma $[0,x] \in C(V)$ para alguna $x \in [0,\infty)$, o bien $C = [0,\infty) \cup R_1 \in C(R_1, X) - \{R_1\}$. Luego,

$$C(0,[0,\infty) \cup R_1) \subset C(V) \cup [C(R_1,X) - \{R_1\}].$$

Esto prueba que $C(V) \cup [C(R_1,X) - \{R_1\}]$ es conexo por trayectorias. Entonces Λ_1 es conexo por trayectorias. Notemos ahora que el complemento de Λ_1 con respecto a $C(X) - \{R_1\}$, es $C(R_1) - \{R_1\}$. Notemos también que la única forma de conectar un elemento de $C(R_1) - \{R_1\}$ con un elemento de Λ_1 es pasando por R_1 (debido a que R_1 es terminal en X). Utilizando esto, resulta que Λ_1 es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R_1\}$. De manera similar se prueba que Λ_2 es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R_2\}$. ∎

Estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 134 *Los elementos de $\mathcal{C}'$ tienen hiperespacio único.*

Demostración. Sea $X = V \cup R$ una compactación métrica del espacio $V = (-\infty,\infty)$ con residuo no degenerado R. Supongamos que R no es conexo, y que sus dos componentes R_1 y R_2 son no degeneradas. Tomemos un continuo Y tal que $C(Y)$ es homeomorfo a $C(X)$ y sea $h : C(Y) \to C(X)$ un homeomorfismo. Afirmamos que:

1) Y no es localmente conexo.

En efecto, si Y es localmente conexo, entonces por el Teorema 66, $C(Y)$ es localmente conexo. Luego $C(X)$ y, por ende también X, es localmente conexo. Esto es absurdo. Por tanto 1) se cumple. Afirmamos ahora que:

2) $R_1, R_2 \notin h(F_1(Y))$.

Para ver 2) notemos que, como R_1 y R_2 son terminales en X (Teorema 132), $C(X) - \{R_1\}$ y $C(X) - \{R_2\}$ no son conexos por trayectorias (Teorema 112). Utilizando éste hecho y el Teorema 34, resulta entonces que $R_1, R_2 \notin h(F_1(Y))$

Definamos ahora

$$\mathcal{S}_1 := [C(R_1, X) - \{R_1\}] \cup [C(R_2, X) - \{R_2\}],$$
$$\mathcal{S}_2 := F_1(V) \cup [C(R_1) - \{R_1\}] \cup [C(R_2) - \{R_2\}]$$

y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Es claro que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \varnothing$. Afirmamos que:

3) $h(F_1(Y)) \subset \mathcal{S}$.

En efecto, sea $y \in Y$ y definamos $K = h(\{y\})$. Si $K \notin \mathcal{S}$ entonces, por 2), K es un subcontinuo no degenerado de V. Luego, existen $a, b \in V$ tales que $a < b$ y $K = [a, b]$. Tomemos tres puntos $x, y, z \in V$ tales que $x < a < y < b < z$. Definamos $A_1 = [a, y]$, $A_2 = [y, b]$, $B_1 = [x, y]$, $B_2 = [y, z]$ y $B = B_1 \cup B_2$. Es claro que A_1 y A_2 son dos subcontinuos propios de K tales que $K = A_1 \cup A_2$. Además, B_1 y B_2 son dos subcontinuos propios de B tales que $B = B_1 \cup B_2$, $A_1 \subsetneq B_1$, $A_2 \subsetneq B_2$ y $A_1 \cap A_2 = \{y\} = B_1 \cap B_2$. Entonces, por el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Luego, $\mathcal{D}' = h^{-1}(\mathcal{D})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}' - o(\mathcal{D}')$.

Como V es un subconjunto abierto de X que contiene al subcontinuo K de X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, K) \subset V$. Por la continuidad de h, existe $\delta > 0$ tal que $h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(K)$. Aplicando el Teorema 96, existe un triodo $T \in B_{\frac{\delta}{2}}(\{y\})$. Entonces, por el Teorema 48, existe una 3-celda $\mathcal{T}$ en $C(Y)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\delta(\{y\})$. Luego, $\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T})$ es una 3-celda en $C(X)$ tal que

$$\mathcal{T}_0 = h(\mathcal{T}) \subset h(B_\delta(\{y\})) \subset B_\varepsilon(K) \subset C(V).$$

Por consiguiente, si $T_0 = \bigcup \mathcal{T}_0$ entonces resulta que T_0 es un subcontinuo de V tal que $\mathcal{T}_0 \subset C(T_0)$. Esto significa que el hiperespacio $C(T_0)$ contiene una 3-celda. Entonces, por el Teorema 49, el continuo T_0 contiene un triodo. Como $T_0 \subset V$, la recta V contiene un triodo, lo cual es absurdo. Esto prueba 3). Afirmamos ahora que:

4) $\mathcal{S}_1 \cup \{R_1, R_2\}$ es un arco en $C(X)$ con extremos R_1 y R_2.

En efecto, de acuerdo con el Teorema 133, $C(R_1, X)$ es un arco ordenado de R_1 a X en $C(X)$, y $C(R_2, X)$ es un arco ordenado de R_2 a X en $C(X)$. Como $C(R_1, X) \cap C(R_2, X) = \{X\}$, $C(R_1, X) \cup C(R_2, X) = \mathcal{S}_1 \cup \{R_1, R_2\}$ es un arco en $C(X)$ con extremos R_1 y R_2. Esto prueba 4). Afirmamos que:

5) $h(F_1(Y)) \cap S_1 = \varnothing$.

Para ver esto, supongamos que $h(F_1(Y)) \cap S_1 \neq \varnothing$. Como $R_1, R_2 \notin h(F_1(Y))$ y la única manera de conectar un punto de S_1 con un punto de S_2, dentro de S, es pasando por R_1 o por R_2, resulta que $h(F_1(Y)) \subset S_1$. Entonces, de acuerdo con 4), $h(F_1(Y))$ tiene que ser un arco y por tanto, un continuo localmente conexo. De aquí que $F_1(Y)$ y por ende también Y, es localmente conexo. Esto contradice 1) y prueba 5).

En vista de 3) y 5) tenemos que:

6) $h(F_1(Y)) \subset S_2$.

Afirmamos ahora que:

7) $h(F_1(Y)) \cap F_1(V) \neq \varnothing$.

Para probar 7), sea

$$\Lambda = C(V) \cup C(R_2) \cup [C(R_1, X) - \{R_1\}] \cup C(R_2, X)$$

Por el Teorema 133, Λ es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R_1\}$. Entonces $h^{-1}(\Lambda)$ es una componente por trayectorias de $C(Y) - \{h^{-1}(R_1)\}$ así que, de acuerdo con el Teorema 114, $h^{-1}(\Lambda) \cap F_1(Y) \neq \varnothing$. Tomemos un punto $y \in Y$ tal que $h(\{y\}) \in \Lambda$. De acuerdo con 6) y la definición de Λ, resulta que $h(\{y\}) \in F_1(V) \cup [C(R_2) - \{R_2\}]$. Esto muestra que

$$h(F_1(Y)) \cap [F_1(V) \cup C(R_2)] \neq \varnothing. \qquad (6.1)$$

Si definimos ahora

$$\Lambda' = C(V) \cup C(R_1) \cup C(R_1, X) \cup [C(R_2, X) - \{R_2\}]$$

entonces se tiene, por el Teorema 133, que Λ' es una componente por trayectorias de $C(X) - \{R_2\}$. Por tanto, prosiguiendo como en la parte anterior, resulta que

$$h(F_1(Y)) \cap [F_1(V) \cup C(R_1)] \neq \varnothing. \qquad (6.2)$$

Ahora bien, si $h(F_1(Y)) \cap F_1(V) = \varnothing$, entonces de acuerdo con 6), (6.1) y (6.2) $h(F_1(Y)) \cap C(R_1) \neq \varnothing$, $h(F_1(Y)) \cap C(R_2) \neq \varnothing$ y $h(F_1(Y)) \subset$

$C(R_1) \cup C(R_2)$. Como $C(R_1) \cap C(R_2) = \varnothing$, tenemos por tanto que $h\,(F_1(Y))$ no es conexo, lo que es un absurdo. Luego, $h\,(F_1(Y)) \cap F_1(V) \neq \varnothing$ y 7) se cumple. Afirmamos ahora que:

8) $h\,(F_1(Y)) \cap [C(R_1) \cup C(R_2)] \neq \varnothing$.

En efecto, si $h\,(F_1(Y)) \cap [C(R_1) \cup C(R_2)] = \varnothing$ entonces de acuerdo con 6), $h\,(F_1(Y)) \subset F_1(V)$. Ahora bien, $F_1(V)$ es homeomorfo a la recta real y $h\,(F_1(Y))$ es un subcontinuo de $F_1(V)$, de manera que $h\,(F_1(Y))$ es un arco. Luego, $h\,(F_1(Y))$ es localmente conexo. De aquí que Y es localmente conexo, lo cual contradice 1), así que 8) se cumple.

Tenemos entonces que $h\,(F_1(Y))$ es un subcontinuo de $\mathcal{S}_2$ que intersecta tanto a $F_1(V)$ como a $[C(R_1) - \{R_1\}] \cup [C(R_2) - \{R_2\}]$. Afirmamos que:

9) $F_1(V) \subset h\,(F_1(Y))$.

Para ver esto, supongamos que $F_1(V)$ no está contenido en $h\,(F_1(Y))$. Recordemos que $Cl_X\,([0,\infty)) = [0,\infty) \cup R_1$ y que $Cl_X\,((-\infty,0]) = (-\infty,0] \cup R_2$. Notemos ahora que cada punto de $F_1(V)$ separa al conjunto $\mathcal{S}_2$, que $h\,(F_1(Y))$ es un subcontinuo de $\mathcal{S}_2$ que intersecta a

$$[C(R_1) - \{R_1\}] \cup [C(R_2) - \{R_2\}]$$

y que $F_1(V) \not\subseteq h\,(F_1(Y))$. Por tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que existe un punto $a \in V$ tal que

$$h\,(F_1(Y)) \subset F_1\,([a,\infty)) \cup C(R_1)$$

y $h\,(F_1(Y)) \cap F_1(V) = F_1\,([a,\infty))$.

En vista de que $F_1\,([a,\infty)) \subset h\,(F_1(Y))$, tomando cerraduras deducimos que:

9.1) $F_1(R_1) \subset h\,(F_1(Y))$.

Afirmamos que:

9.2) $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1) = F_1(R_1)$.

Para probar 9.2), supongamos que $h(F_1(Y)) \cap C(R_1) \neq F_1(R_1)$. Usando 9.1), resulta que $F_1(R) \subset h(F_1(Y)) \cap C(R_1)$. Por tanto, $h(F_1(Y)) \cap C(R_1) - F_1(R_1) \neq \emptyset$. Más aún, como

$$Cl_{C(X)}(F_1([a,\infty))) = F_1([a,\infty)) \cup F_1(R_1),$$

tenemos que $C(R_1)$ y $F_1([a,\infty)) \cup F_1(R_1)$ son dos subcontinuos propios de $F_1([a,\infty)) \cup C(R_1)$, cuya intersección es el conjunto conexo $F_1(R)$. Por tanto, si definimos:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in C(R_1)\}, \\ Y_2 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1([a,\infty)) \cup F_1(R_1)\} \text{ y} \\ Y_0 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1(R_1)\}, \end{aligned}$$

resulta que Y_1 y Y_2 son dos subcontinuos propios de Y tales que $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y $Y_1 \cap Y_2 = Y_0$ es conexo. Sea $R_1' = h^{-1}(R_1)$. Entonces $R_1' \in C(Y)$ así que, por el Teorema 33, es posible enontrar un punto $y_1 \in Y_1$, un punto $y_2 \in Y_2 - Y_1$, y una trayectoria $\alpha : I \to C(Y)$ de $\{y_1\}$ a $\{y_2\}$ en $C(Y)$ tal que $R_1' \notin \alpha(I)$.

Sea $\beta : I \to C(X)$ la función $\beta = h \circ \alpha$. Es claro que β es una trayectoria de $h(\{y_1\})$ a $h(\{y_2\})$ en $C(X)$ tal que $R_1 \notin \beta(I)$. Sin embargo, debido a que R_1 es terminal en X y a que, por definición, $h(\{y_1\}) \in C(R_1) - \{R_1\}$ y $h(\{y_2\}) \in F_1([a,\infty))$, resulta que toda trayectoria en $C(X)$ de $h(\{y_1\})$ a $h(\{y_2\})$ pasa por R_1. Entonces $R_1 \in \beta(I)$, lo cual es un absurdo. Por tanto, $h(F_1(Y)) \cap C(R_1) = F_1(R_1)$. Esto prueba 9.2)

De todo esto resulta que

$$h(F_1(Y)) = F_1([a,\infty)) \cup F_1(R_1) = F_1([a,\infty) \cup R_1)$$

y entonces, $F_1(Y)$ es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Esto implica que Y también es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado y entonces, según el Teorema 118, X es homeomorfo a Y. Por tanto, X es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Como esto es absurdo, 9) es cierto.

Tomando cerraduras en 9) resulta que

10) $F_1(R_1) \cup F_1(R_2) \subset h(F_1(Y))$.

Afirmamos ahora que:

11) $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1) = F_1(R_1)$.

Para probar 11), supongamos que $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1) \neq F_1(R_1)$. Usando 10), resulta que $F_1(R_1) \subset h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1)$. Por tanto, $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1) - F_1(R_1) \neq \varnothing$. Más aún, como $F_1(X) \cup C(R_2)$ es un continuo en $C(X)$, resulta que $C(R_1)$ y $C(R_2) \cup F_1(X)$ son dos subcontinuos propios de $C(R_1) \cup C(R_2) \cup F_1(X)$, cuya intersección es el conjunto conexo $F_1(R_1)$. De esta manera, si definimos

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in C(R_1)\}, \\ Y_2 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1(X) \cup C(R_2)\} \text{ y} \\ Y_0 &= \{y \in Y : h(\{y\}) \in F_1(R_1)\}, \end{aligned}$$

resulta que Y_1 y Y_2 son dos subcontinuos propios de Y, tales que $Y_1 \cup Y_2 = Y$ y $Y_1 \cap Y_2 = Y_0$ es conexo. Procediendo como en 9.2) obtenemos una contradicción, así que $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_1) = F_1(R_1)$. Esto prueba 11).

De manera similar se prueba que:

12) $h\,(F_1(Y)) \cap C(R_2) = F_1(R_2)$.

Por consiguiente

$$h\,(F_1(Y)) = F_1(R_1) \cup F_1(V) \cup F_1(R_2) = F_1(X),$$

y entonces Y es homeomorfo a X. ∎

Así pues, todas las compactaciones métricas de la recta real $(-\infty, \infty)$, diferentes del arco y con residuo disconexo, poseen hiperespacio único. En realidad, el estudio de las compactaciones métricas de la recta real se reduce al estudio de cinco tipos específicos de compactaciones. Más precisamente, supongamos que $X = V \cup R$ es una compactación métrica de la recta real $V = (-\infty, \infty)$ con residuo R. Entonces:

1. si R es degenerado entonces X es una curva cerrada simple y, por tanto, no tiene hiperespacio único, pero sólo puede compartir hiperespacio con el arco (Teorema 69).

2. supongamos que R es no degenerado, entonces:

a) si R no es conexo y sus dos componentes poseen solamente un punto entonces X es un arco y, por tanto, no tiene hiperespacio único, pero sólo puede compartir hiperespacio con la curva cerrada simple (Teorema 68).

b) si R no es conexo y una de sus dos componentes posee solamente un punto entonces X es una compactación métrica de un semirayo que tiene residuo no degenerado (la otra componente de R). Por tanto, X tiene hiperespacio único (Teorema 118)

c) si R no es conexo y sus dos componentes son no degeneradas entonces X tiene hiperespacio único (Teorema 134)

d) si R es conexo entonces X no tiene hiperespacio único. Pero los continuos que están en este caso, constituyen una clase C-determinada (Teorema 154).

6.3 Triodos y 2-celdas.

Recordemos que C_1 es la clase de las compactaciones métricas de la recta real que tienen residuo conexo. Si denotamos por S a la curva cerrada simple entonces es claro que $S \in C_1$. Sea $C'' = C_1 - \{S\}$, entonces C'' es la clase de las compactaciones métricas de la recta real, que tienen residuo conexo y no degenerado. El teorema principal del resto del capítulo dice que los elementos de C'' están C-determinados. La prueba de este resultado es bastante larga y por tanto, presentaremos en las secciones que restan, una serie de resultados que serán útiles en la prueba de este hecho.

Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. En esta sección veremos condiciones, bajo las cuales, es posible encontrar ya sea una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - \partial\mathcal{D})$, o bien triodos arbitrariamente cercanos a K (con respecto a la metrica de Hausforff). Los resultados de esta sección son generalizaciones de los que presentamos en el Capítulo 3.

Recordemos que si K es un subcontinuo propio de un continuo R entonces $m(K)$ representa el conjunto de los elementos minimales en $SB(K)$, la semifrontera de K. En el siguiente teorema, probamos que si K es un subcontinuo propio y no degenerado de R, y $m(K)$ tiene tres elementos ajenos dos a dos, entonces existen triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 135 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Supongamos también que $SB(K)$ tiene tres elementos ajenos dos a dos E_1, E_2 y E_3. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen tres subcontinuos ajenos dos a dos E_1', E_2' y E_3' tales que:*

1. $E_i \subsetneq E_i'$ *y* $E_i' - K \neq \emptyset$ *para cada* $i = 1, 2, 3$,

2. *el conjunto* $T = K \cup E_1' \cup E_2' \cup E_3'$ *es un triodo en* $B_\varepsilon(K)$.

Más aún, si para cada $i = 1, 2, 3$, $H_i \in 2^R$ es tal que $E_i \cap H_i = \emptyset$, entonces E_i' se puede construir de manera que $E_i' \cap H_i = \emptyset$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y, para cada $i = 1, 2, 3$ tomemos $H_i \in 2^R$ tal que $E_i \cap H_i = \emptyset$. Como cada $E_i \in SB(K)$, existe un arco ordenado $\alpha_i : I \to C(R)$ tal que $\alpha_i(0) = E_i$ y $\alpha_i(t) - K \neq \emptyset$ para cada $t > 0$.

Como el conjunto

$$\mathcal{U}_1 = \left\{A \in C(R) : A \subset [R - (E_2 \cup E_3 \cup H_1)] \cap N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right)\right\}$$

es abierto en $C(R)$ y $E_1 \in \mathcal{U}_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(E_1) \subset \mathcal{U}_1$. Por la continuidad de α_1, existe $\gamma_1 > 0$ tal que si $0 < t < \gamma_1$ entonces $H(\alpha_1(t), \alpha_1(0)) < \delta_1$. Definamos $E_1' = \alpha_1\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)$. Es claro que $E_1' \in B_{\delta_1}(E_1)$, así que $E_1' \cap (E_2 \cup E_3 \cup H_1) = \emptyset$ y $E_1' \subset N\left(\frac{\varepsilon}{3}, K\right)$. Entonces, $H(K, K \cup E_1') < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto, E_1' es un subcontinuo de X tal que $E_1 \subsetneq E_1'$, $E_1' \cap (E_2 \cup E_3 \cup H_1) = \emptyset$ y $E_1' - K \neq \emptyset$.

Ahora bien, el conjunto

$$\mathcal{U}_2 = \{A \in C(R) : A \subset R - (E_1' \cup E_3 \cup H_2)\}$$

es abierto en $C(R)$ y $E_2 \in \mathcal{U}_2$. Por tanto, siguiendo un razonamiento similar al de la parte anterior, existe $E_2' \in C(R)$ tal que

$$H(K \cup E_1', K \cup E_1' \cup E_2') < \frac{\varepsilon}{3},$$

$E_2 \subset E_2'$, $E_2' \cap (E_1' \cup E_3 \cup H_2) = \emptyset$ y $E_2' - K \neq \emptyset$. Finalmente, el conjunto

$$\mathcal{U}_3 = \{A \in C(R) : A \subset R - (E_1' \cup E_2' \cup H_3)\}$$

es abierto en $C(R)$ y $E_3 \in \mathcal{U}_3$. Por tanto, procediendo como antes, es posible encontrar un subcontinuo E_3' de R tal que $E_3 \subset E_3'$, $E_3' - K \neq \emptyset$, $E_3' \cap (E_1' \cup E_2' \cup H_3) = \emptyset$ y

$$H(K \cup E_1' \cup E_2', K \cup E_1' \cup E_2' \cup E_3') < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces $T = K \cup E_1' \cup E_2' \cup E_3'$ es un triodo en $C(R)$ tal que, por construcción, $T \in B_\varepsilon(K)$. Además $E_i' \cap H_i = \emptyset$ para cada $i = 1, 2, 3$ y los conjuntos E_1', E_2' y E_3' son ajenos dos a dos. ∎

Como consecuencia del teorema anterior, si un subcontinuo A de R intersecta a K y a su complemento, de modo que $A \cap K$ posee al menos tres componentes entonces, como probamos en el siguiente resultado, podemos encontrar triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 136 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Supongamos también que existe un subcontinuo A de R tal que $A \cap K \neq \emptyset$ y $A - K \neq \emptyset$. Si $A \cap K$ tiene al menos tres componentes C_1, C_2 y C_3 entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen tres subcontinuos ajenos dos a dos C_1', C_2' y C_3' de A tales que:*

1. *$C_i \subsetneq C_i'$ y $C_i' - K \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2, 3$.*

2. *el conjunto $T = K \cup C_1' \cup C_2' \cup C_3'$ es un triodo en $B_\varepsilon(K)$.*

Más aún, si para cada $i = 1, 2, 3$, $H_i \in 2^R$ es tal que $C_i \cap H_i = \emptyset$ entonces C_i' se puede construir de manera que $C_i' \cap H_i = \emptyset$.

Demostración. Por el Teorema 78, $C_1, C_2, C_3 \in SB(K)$ y como son ajenos dos a dos, el teorema se deduce del resultado anterior. ∎

Teorema 137 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Supongamos también que existe un subcontinuo A de R tal que $A \cap K \neq \emptyset$ y $A - K \neq \emptyset$. Si C es una componente de $A - K$ entonces $Cl_R(C) \cap K \neq \emptyset$ y $Fr_R(C) - C \subset K$.*

Demostración. Como $A \cap K \neq \varnothing$. $A - K \neq \varnothing$ es un subconjunto propio y no vacío de A. Entonces, por el teorema de los golpes en la frontera (Teorema 54)

$$[Cl_A(C)] \cap Cl_A(A - (A - K)) \neq \varnothing.$$

Ahora bien, $A - (A - K) = A \cap K$, por lo que

$$\varnothing \neq [Cl_A(C)] \cap (A \cap K) \subset [Cl_R(C)] \cap K$$

y, de esta manera, $[Cl_R(C)] \cap K \neq \varnothing$. Esto prueba la primera parte del teorema. Para ver que $Fr_R(C) - C \subset K$, tomemos un punto $x \in Fr_R(C)$ tal que $x \notin C$. Supongamos que $x \notin K$. Notemos que $C \subset C \cup \{x\} \subset Cl_R(C)$, así que $C \cup \{x\}$ es un subconjunto conexo que contiene propiamente a C. Notemos ahora que $Fr_R(C) \subset Cl_R(C) \subset A$, así que $C \cup \{x\} \subset A - K$. Entonces $C \cup \{x\}$ es un subconjunto de $A - K$ que contiene propiamente a una componente de $A - K$. Esto es absurdo, así que $x \in K$ y $Fr_R(C) - C \subset K$. Esto termina la segunda parte del teorema. ∎

El resultado anterior se utilizará con frecuencia a lo largo de esta sección. El siguiente resultado generaliza el Teorema 90, que presentamos en la Sección 3.2.

Teorema 138 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Sea $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Si $m(K)$ tiene al menos un elemento E entonces existe una sucesión decreciente $(E_n)_n$ en $C(R)$ tal que $E_n \to E$ y para cada $n \in \mathbb{N}$*

1. $E \subsetneq E_n$,
2. $E_n - K$ *es conexo y no vacío,*
3. $E_n \cap K$ *es conexo y está en* $SB(K)$,
4. $E \subset E_n \cap K \subset Fr_R(E_n - K)$,
5. $H(K, K \cup E_n) < \varepsilon$.

Más aún, si $H \in 2^R$ es tal que $E \cap H = \varnothing$ entonces cada E_n se puede construir de manera que $E_n \cap H = \varnothing$.

Demostración. Tomemos $H \in 2^R$ tal que $E \cap H = \emptyset$. Como $E \in SB(K)$, existe un arco ordenado $\alpha : I \to C(R)$ tal que $\alpha(0) = E$ y $\alpha(t) - K \neq \emptyset$ para cada $t > 0$. Afirmamos que:

1) existe un subcontinuo G_1 de R tal que

$$a)\ E \subsetneq G_1, \qquad c)\ G_1 \cap H = \emptyset \text{ y}$$

$$b)\ G_1 - K \neq \emptyset \qquad d)\ H(K, K \cup G_1) < \varepsilon.$$

Para ver esto notemos que, como el conjunto

$$\mathcal{U} = \{A \in C(R) : A \subset (R - H) \cap N(\varepsilon, K)\}$$

es abierto en $C(X)$ y $E \in \mathcal{U}$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(E) \subset \mathcal{U}$ y $\delta < \varepsilon$. Tomemos $t_1 > 0$ tal que $G_1 = \alpha(t_1) \in B_\delta(E)$. Es claro que G_1 satisface las propiedades $a)$-$d)$ arriba enunciadas. Por el Teorema 137, tenemos que:

2) si C es una componente de $G_1 - K$, entonces $Cl_R(C) \cap K \neq \emptyset$ y $Fr_R(C) - C \subset K$.

Afirmamos ahora que:

3) $G_1 - K$ tiene a lo mas dos componentes.

Para ver 3), supongamos que $G_1 - K$ tiene al menos tres componentes C_1, C_2 y C_3. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ definamos $D_i = Cl_R(C_i)$ y sea $T = K \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$. De acuerdo con 2), cada D_i intersecta a K. Por tanto T es un subcontinuo de R. Más aún, resulta que $T \subset K \cup G_1 \subset N(\varepsilon, K)$. Además $K \subset T \subset N(\varepsilon, T)$. Por tanto, $T \in B_\varepsilon(K)$.

Notemos ahora que $T - K = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Para ver esto tomemos un punto $x \in T - K$. Entonces existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $x \in D_i - K$. Si $x \notin C_i$, resulta que $x \in Fr_R(C_i) - C_i \subset K$, de acuerdo con 2). Luego $x \in K$ y, como esto es absurdo, $x \in C_i$. Esto prueba que $T - K$ está contenido en $C_1 \cup C_2 \cup C_3$. La otra contención es clara. Por tanto, T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$, lo que es un absurdo. Así, 3) es cierto.

Supongamos que $G_1 - K$ tiene justo dos componentes A_1 y B_1. Afirmamos que:

4) $[Cl_R(A_1)] \cap K$ y $[Cl_R(B_1)] \cap K$ son conexos y no vacíos.

Para probar 4) supongamos, por ejemplo, que $[Cl_R(A_1)] \cap K$ no es conexo. Entonces, por el Teorema 136, $[Cl_R(A_1)] \cap K$ tiene justo dos componentes D_1 y D_2. Sean D_1' y D_2' dos subcontinuos de $Cl_R(A_1)$ tales que $D_1 \subsetneq D_1'$, $D_2 \subsetneq D_2'$ y $D_1' \cap D_2' = \varnothing$. Definamos

$$T = K \cup D_1' \cup D_2' \cup [Cl_R(B_1)] .$$

Es claro que $T \in B(K)$ y que $T - K = (D_1' - K) \cup (D_2' - K) \cup B_1$. Ahora bien, como D_1 y D_2 son componentes de $[Cl_R(A_1)] \cap K$ que están contenidas propiamente en D_1' y D_2', respectivamente, y $D_1', D_2' \subset Cl_R(A_1)$, resulta que $D_1' - K$ y $D_2' - K$ son no vacíos. Claramente B_1 es no vacío. Afirmamos que:

4.1) los conjuntos $D_1' - K$, $D_2' - K$ y B_1 están mutuamente separados.

Para ver esto notemos primero que, como D_1' y D_2' son dos subconjuntos ajenos y cerrados de R, resulta que

$$Cl_R(D_1' - K) \cap (D_2' - K) \subset D_1' \cap D_2' = \varnothing$$

y

$$(D_1' - K) \cap Cl_R(D_2' - K) \subset D_1' \cap D_2' = \varnothing.$$

Por tanto, los conjuntos $D_1' - K$ y $D_2' - K$ están mutuamente separados. Ahora mostraremos que los conjuntos $D_1' - K$ y B_1 están mutuamente separados. Debido a que A_1 y B_1 son componentes de $G_1 - K$ y $G_1 - K = A_1 \cup B_1$, resulta que $Cl_R(A_1) \cap B_1 = \varnothing$ y $A_1 \cap Cl_R(B_1) = \varnothing$. Luego

$$Cl_R(D_1' - K) \cap B_1 \subset Cl_R(D_1') \cap B_1 \subset Cl_R(A_1) \cap B_1 = \varnothing.$$

Por tanto, $Cl_R(D_1' - K) \cap B_1 = \varnothing$. Notemos ahora que $D_1' - K \subset A_1$. Para ver esto, tomemos un punto $x \in D_1' - K$. Entonces $x \in Cl_R(A_1) - K$ ya que $D_1' \subset Cl_R(A_1)$. Si $x \notin A_1$, de acuerdo con 2), $x \in Fr_R(A_1) - A_1 \subset K$. Luego $x \in K$ y como esto es absurdo, $x \in A_1$. Esto prueba que $D_1' - K \subset A_1$. Luego

$$(D_1' - K) \cap Cl_R(B_1) \subset A_1 \cap Cl_R(B_1) = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos $D_1' - K$ y B_1 están mutuamente separados. De manera similar se prueba que los conjuntos $D_1' - K$ y B_1 están mutuamente separados. Así que 4.1) se cumple.

De lo anterior tenemos que T es un triodo en $B(K)$. Debido a que esto es absurdo, $[Cl_R(A_1)] \cap K$ es conexo. Tal conjunto es no vacío de acuerdo con 2). Esto prueba 4).

Definamos ahora $C_1 = [Cl_R(A_1)] \cap K$ y $D_1 = [Cl_R(B_1)] \cap K$. Tomemos una sucesión estrictamente decreciente $(t_n)_{n \geq 2}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $0 < t_n < \frac{1}{n}$ y $t_n < t_1$. Definamos $G_n = \alpha(t_n)$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $G_n \subsetneq G_{n-1}$ y que G_n satisface las propiedades a)-d) que cumple G_1. Por tanto, G_n cumple también las propiedades 2) y 3). En particular $G_n - K$ tiene a lo más dos componentes. Además $G_n \to E$.

Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $G_n - K$ posee justo dos componentes A_n y B_n. Afirmamos que podemos nombrarlas de tal manera que $A_n \subset A_{n-1}$ y $B_n \subset B_{n-1}$. En efecto, si para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $A_n, B_n \subset A_{n-1}$ entonces definimos

$$T = K \cup Cl_R(A_n) \cup Cl_R(B_n) \cup Cl_R(B_{n-1}).$$

Es claro que $T \in B(K)$ y que $T - K = A_n \cup B_n \cup B_{n-1}$. Además los conjuntos A_n, B_n y B_{n-1} son no vacíos. Afirmamos que:

5) los conjuntos A_n, B_n y B_{n-1} están mutuamente separados.

Para ver esto notemos primero que, como A_n y B_n son componentes de $G_n - K$ y $G_n - K = A_n \cup B_n$, resulta que $Cl_R(A_n) \cap B_n = \varnothing$ y $A_n \cap Cl_R(B_n) = \varnothing$. Luego, A_n y B_n están mutuamente separados. Como A_{n-1} y B_{n-1} son componentes de $G_{n-1} - K$ y $G_{n-1} - K = A_{n-1} \cup B_{n-1}$, resulta que $Cl_R(A_{n-1}) \cap B_{n-1} = \varnothing$ y $A_{n-1} \cap Cl_R(B_{n-1}) = \varnothing$. Además

$$Cl_R(A_n) \cap B_{n-1} \subset Cl_R(A_{n-1}) \cap B_{n-1} = \varnothing$$

y

$$A_n \cap Cl_R(B_{n-1}) \subset A_{n-1} \cap Cl_R(B_{n-1}) = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos A_n y B_{n-1} están mutuamente separados. De manera similar se prueba que los conjuntos B_n y B_{n-1} están mutuamente separados. Así que 5) se cumple.

De lo anterior tenemos que T es un triodo en $B\ (K)$, lo cual es un absurdo. Si $A_n, B_n \subset B_{n-1}$ entonces procediendo de manera semejante, obtenemos una contradicción. Por consiguiente, podemos suponer que $A_n \subset A_{n-1}$ y $B_n \subset B_{n-1}$.

Definamos ahora $C_n = [Cl_R(A_n)] \cap K$ y $D_n = [Cl_R(B_n)] \cap K$. Una prueba análoga a la dada en 4) hace ver que tanto C_n como D_n son conexos y no vacíos. Más aún, es claro que $C_n \subset C_{n-1}$ y $D_n \subset D_{n-1}$ así que:

$$C_n \to C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

y

$$D_n \to D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

Puesto que $Cl_R(A_n)$ y $Cl_R(B_n)$ son subcontinuos de R que intersectan a K y a $R - K$, se sigue por el Teorema 78, que $C_n, D_n \in SB(K)$. Aplicando entonces el Lema 77(e), $C, D \in SB(K)$. Entonces existen $M_1, M_2 \in m(K)$ tales que $M_1 \subset C$ y $M_2 \subset D$. Notemos que, para cada natural n,

$$C \subset C_n \subset Cl_R(A_n) \subset G_n$$

y

$$D \subset D_n \subset Cl_R(B_n) \subset G_n.$$

Más aún, $G_n \to E$. Por tanto, $C \subset E$ y $D \subset E$. Luego $M_1, M_2 \subset E$ y, como estos conjuntos son elementos minimales de $SB(K)$, necesariamente $M_1 = M_2 = E$. Por consiguiente $C = D = E$. Así pues

6) si para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n - K$ posee (justo) dos componentes A_n y B_n, entonces $C_n = [Cl_R(A_n)] \cap K$ y $D_n = [Cl_R(B_n)] \cap K$ son subcontinuos que contienen a E.

Supongamos ahora que existe $t \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que $G_t - K$ es conexo. Seguimos suponiendo que $G_1 - K$ tiene dos componentes. Sea m el primer número natural tal que $G_m - K$ es conexo. Hagamos $A_m = G_m - K$. Como $G_{m-1} - K$ posee (justo) dos componentes A_{m-1} y B_{m-1}, podemos suponer sin perder generalidad que $A_m \subset A_{m-1}$. Si para alguna $n > m$ sucede que

$G_r - K$ tiene (justo) dos componentes A_n y B_r, entonces A_n, $B_r \subset A_r$. Por tanto, procediendo como antes, resulta que

$$T = K \cup Cl_R(A_r) \cup Cl_R(B_r) \cup Cl_R(I_{m-1})$$

es un triodo en $B_r(K)$. Esto es absurdo, así que $A_r = G_r - K$ es conexo para cada $r > m$. Además, por una prueba similar a la efectuada en la parte 4), cada $C_n = [Cl_R(A_n)] \cap K$ es un subcontinuo de R y además $C_n \subset C_{n-1}$, así que $C_n \to C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Aplicando de nueva cuenta el Teorema 78, tenemos que cada $C_n \in SB(K)$. Por consiguiente, de acuerdo con el Lema 77(e), $C \in SB(K)$. Entonces existe $M \in m(K)$ tal que $M \subset C$.

Notemos que:

$$C \subset C_r \subset Cl_R(A_r) \subset G_r$$

así que $C \subset E$. Entonces $M \subset E$ y, como tanto M como E son elementos minimales en $SB(K)$, $M = E$. Luego, $C = E$. Así pues:

7) si existe un primer natural m tal que $G_m - K$ es conexo entonces para cada $n > m$, $A_n = G_n - K$ es conexo y, además, $C_n = [Cl_R(A_n)] \cap K$ es un subcontinuo que contiene a E.

Notemos que en ambos casos, tanto si cada $G_n - K$ es disconexo como si existe $t \geq 2$ tal que $G_t - K$ es conexo entonces hemos conseguido una subsucesión $(n_i)_i$ de $(n)_n$ tal que $(A_{n_i})_i$ es una sucesión decreciente de componentes de $G_{n_i} - K$, tales que $C_{n_i} = [Cl_R(A_{n_i})] \cap K$ constituye una sucesión decreciente de subcontinuos de K que contienen a E. Todo esto se realizó partiendo del hecho de que $G_1 - K$ posee (justo) dos componentes.

Supongamos ahora que $G_1 - K$ es conexo. Tomemos la sucesión decreciente $(t_n)_n$ de antes y definamos $G_n = o(t_n)$. Entonces $G_n \to E$. Si para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $G_n - K$ no es conexo, entonces posee (justo) dos componentes A_n y B_n. Por tanto, siguiendo las ideas que nos llevaron a 6) y a 7), obtenemos una subsucesión $(n_i)_i$ de $(n)_n$ con las propiedades mencionadas antes.

Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n - K$ es conexo. Definamos para cada natural n, $A_n = G_n - K$ y $C_n = [Cl_R(A_n)] \cap K$. Por el Teorema

136. C_n posee a lo más dos componentes. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n tiene (justo) dos componentes K_n y L_n entonces, por el Teorema 78, $K_n, L_n \in SB(K)$. Afirmamos que podemos nombrar las componentes K_n y L_n de C_n, de tal manera que $K_{n+1} \subset K_n$ y $L_{n+1} \subset L_n$. En efecto, si para alguna $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1}, L_{n+1} \subset K_n$ entonces K_{n+1}, L_{n+1} y L_n son tres elementos ajenos dos a dos y en la semifrontera de K. Luego, por el Teorema 135, existe un triodo $T \in B_\epsilon(K)$, lo cual es un absurdo. Si $K_{n+1}, L_{n+1} \subset L_n$ entonces, procediendo de manera semejante, obtenemos una contradicción. Por consiguiente, podemos suponer que $K_{n+1} \subset K_n$ y $L_{n+1} \subset L_n$. Luego

$$K_n \to K_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

y

$$L_n \to L_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n.$$

Ahora bien, por el Lema 77(c), $K_0, L_0 \in SB(K)$. Tomemos $M_1, M_2 \in m(K)$ tales que $M_1 \subset K_0$ y $M_2 \subset L_0$. Notemos que:

$$K_0 \subset K_n \subset A_n \subset G_n$$

y

$$L_0 \subset L_n \subset A_n \subset G_n$$

por lo que $K_0, L_0 \subset E$. Luego $M_1, M_2 \subset E$ y, como son elementos minimales en $SB(K)$, necesariamente $M_1 = M_2 = E$. Entonces $K_0 = L_0 = E$ y, por consiguiente, $K_0 \cap L_0 \neq \varnothing$, lo que es un absurdo. Esto significia que, sin perder generalidad, podemos suponer que cada C_n es conexo y no vacío. Luego $(C_n)_n$ es una sucesión decreciente de elementos en $SB(K)$ y entonces $C_n \to C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Procediendo como antes, llegamos a que $C = E$ y así garantizamos también la existencia de una subsucesión $(n_i)_i$ de $(n)_n$ con las propiedades antes mencionadas.

Resumiento, siempre es posible encontrar una subsucesión $(n_i)_i$ de $(n)_n$ tal que $(A_{n_i})_i$ es una sucesión decreciente de componentes de $G_{n_i} - K$ (en su defecto, A_{n_i} es $G_{n_i} - K$) tales que, si definimos $C_{n_i} = [Cl_R(A_{n_i})] \cap K$ entonces $(C_{n_i})_i$ es una sucesión decreciente de subcontinuos de K tales que, para cada $i \in \mathbb{N}$

i) $C_{n_i} \in SB(K)$,

ii) $E \subset C_{n_i}$ y

iii) $C_{n_i} \to E$.

Hagamos $E_i = Cl_R(A_{n_i})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Es claro que cada E_i es un subcontinuo de R. Mostraremos ahora que E_i satisface las propiedades 1.-5. del teorema y que, además, $E_i \cap H = \varnothing$.

Tomemos $i \in \mathbb{N}$. Para mostrar que $E_i - K$ es conexo y no vacío veremos que $E_i - K = A_{n_i}$. Para ver esto tomemos un punto $x \in E_i - K$. Entonces $x \in [Cl_R(A_{n_i})] - K$ por lo que, si $x \notin A_{n_i}$, $x \in [Fr_R(A_{n_i})] - A_{n_i} \subset K$ de acuerdo con 2). Luego $x \in K$, lo cual es absurdo. Así pues $x \in A_{n_i}$ y con esto $E_i - K \subset A_{n_i}$. Es claro que $A_{n_i} \subset E_i - K$ por lo que $E_i - K = A_{n_i}$ y 2. se cumple.

Como $E_i \subset G_{n_i}$ y, además, $G_{n_i} \cap H = \varnothing$ y $H(K, K \cup G_{n_i}) < \varepsilon$, resulta que $E_i \cap H = \varnothing$ y $H(K, K \cup E_i) < \varepsilon$. Para mostrar 3. y 4., notemos que:

$$\begin{aligned}
E_i \cap K &= [Cl_R(A_{n_i})] \cap K \\
&= [A_{n_i} \cap K] \cup ([Fr_R(A_{n_i})] \cap K) \\
&= [Fr_R(A_{n_i})] \cap K \\
&\subset Fr_R(A_{n_i}) = Fr_R(E_i - K).
\end{aligned}$$

Así pues, $E_i \cap K = C_{n_i} \in SB(K)$ y $E_i \cap K \subset Fr_R(E_i - K)$. Como $E \subset C_{n_i}$, resulta que $E_i \cap K$ es conexo y contiene a E. Esto prueba que E_i satisface 3. y 4. Ahora bien, $E \subset E_i$, $A_{n_i} \cap K = \varnothing$, $A_{n_i} \subset E_i$ y $E \subset K$. Por tanto, $E \subsetneq E_i$. Esto prueba que E_i satisface 1.

Notemos ahora que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$E_i = Cl_R(A_{n_i}) \subset Cl_R(A_{n_{i+1}}) = E_{i+1}.$$

Por tanto, $(E_i)_i$ es una sucesión decreciente. Además, como $E \subset E_i \subset G_{n_i}$ y $G_{n_i} \to E$, sucede que $E_i \to E$. Esto termina la prueba del teorema. ∎

Como una aplicación del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 139 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Sea $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo, y sean $A, B \in C(K) - \{K\}$ tales que $K = A \cup B$ y $H(A, K) < \varepsilon$. Si $m(K)$ tiene un elemento E tal que $E \subset A - B$, entonces $A \cap B$ es conexo y no vacío.*

Demostración. Si $A \cap B$ no es conexo, entonces tiene al menos dos componentes C y D. Tomemos $C', D' \in C(B)$ tales que $C \subsetneq C'$, $D \subsetneq D'$ y $C' \cap D' = \varnothing$. Como $E \cap B = \varnothing$, por el Teorema 138, existe un subcontinuo E' de R tal que $E \subsetneq E'$, $E' - K$ es no vacío, $E' \cap B = \varnothing$ y $H(K, K \cup E') < \varepsilon$.

Sea $T = A \cup C' \cup D' \cup E'$. Notemos que

$$T \subset A \cup B \cup E' = K \cup E' \subset N(\varepsilon, K)$$

y $K \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, T)$ ya que $A \subset T$. Por tanto $T \in B_\varepsilon(K)$. Ahora bien, como $E' \cap B = \varnothing$, resulta que $E' \cap K \subset A - B$ y, como consecuencia de esto,

$$T - A = (C' - A) \cup (D' - A) \cup (E' - K).$$

Como C es una componente de $A \cap B$ que está contenida propiamente en el subconjunto conexo C' de B, resulta que $C' \not\subseteq A$. Luego $C' - A \neq \varnothing$. De manera similar se prueba que $D' - A \neq \varnothing$. Es claro que $E' - K \neq \varnothing$. Debido a que $E' \cap B = \varnothing = C' \cap D'$ y a que $C', D' \subset B$, sucede que, dos a dos, los conjuntos $C' - A$, $D' - A$ y $E' - K$ están mutuamente separados. De aquí que T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$. Debido a que esto es absurdo, $A \cap B$ es conexo. Es claro que $A \cap B$ es no vacío. ∎

En presencia de dos elementos E y F en $m(K)$, el siguiente teorema garantiza que E y F se pueden "inflar" de manera que las respectivas "infladas" sólo se tocan en K.

Teorema 140 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y no degenerado de un continuo R. Sea $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Si $m(K)$ tiene al menos dos elementos E y F entonces existen dos sucesiones decrecientes $(E_n)_n$ y $(F_n)_n$ en $C(R)$ tales que $E_n \to E$, $F_n \to F$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

1. $E \subsetneq E_n$ *y* $F \subsetneq F_n$.

2. *$E_n - K$ y $F_n - K$ son conexos y no vacíos,*

3. *$E_n \cap K$ y $F_n \cap K$ son conexos y están en $SB(K)$,*

4. *$E \subset E_n \cap K \subset Fr_R(E_n - K)$,*

5. *$F \subset F_n \cap K \subset Fr_R(F_n - K)$,*

6. *$E_n \cap F_n \subset K$,*

7. *$H(K, K \cup E_n) < \varepsilon$ y $H(K, K \cup F_n) < \varepsilon$,*

8. *si $T_n = K \cup E_n \cup F_n$ entonces $H(T_n, K) < \varepsilon$.*

Más aún, si $H_1, H_2 \in 2^R$ son tales que $E \cap H_1 = \varnothing$ y $F \cap H_2 = \varnothing$ entonces cada E_n y cada F_n se puede construir de manera que $E_n \cap H_1 = \varnothing$ y $F_n \cap H_2 = \varnothing$.

Demostración. Tomemos dos elementos $H_1, H_2 \in 2^R$ tales que $E \cap H_1 = \varnothing$ y $F \cap H_2 = \varnothing$. Como E y F son elementos minimales distintos de $SB(K)$, podemos fijar un punto $e \in E - F$ y un punto $f \in F - E$. Luego $E \cap (H_1 \cup \{f\}) = \varnothing$ y $F \cap (H_2 \cup \{e\}) = \varnothing$. Por tanto, aplicando el Teorema 138, existen dos sucesiones decrecientes $(E_i)_i$ y $(F_i)_i$ en $C(R)$ tales que $E_i \to E$, $F_i \to F$ y para cada $i \in \mathbb{N}$

a) $E \subsetneq E_i$ y $F \subsetneq F_i$,

b) $E_i - K$ y $F_i - K$ son conexos y no vacíos,

c) $E_i \cap K$ y $F_i \cap K$ son conexos y están en $SB(K)$,

d) $E \subset E_i \cap K \subset Fr_R(E_i - K)$,

e) $F \subset F_i \cap K \subset Fr_R(F_i - K)$,

f) $E_i \cap (H_1 \cup \{f\}) = \varnothing$ y $F_i \cap (H_2 \cup \{e\}) = \varnothing$,

g) $H(K, K \cup E_i) < \varepsilon$ y $H(K, K \cup F_i) < \varepsilon$.

Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $T_i = K \cup E_i \cup F_i$. Afirmamos que:

1) para cada $i \in \mathbb{N}$, $H(K, T_i) < \varepsilon$.

En efecto, sea $i \in \mathbb{N}$. Por la propiedad *g)*

$$T_i = (K \cup E^i) \cup (K \cup F^i) \subset N(\varepsilon, K).$$

Además, es claro que $K \subset T_i \subset N(\varepsilon, T_i)$, así que $H(K, T_i) < \varepsilon$. Afirmamos ahora que:

2) para cada $i \in \mathbb{N}$, F_i no está contenido en $E_i \cup K$.

En efecto, si por el contrario, $F_i \subset E_i \cup K$ entonces $F_i - K \subset E_i$. Luego, aplicando *e)*

$$F \subset Fr_R(F_i - K) \subset Cl_R(F_i - K) \subset E_i$$

y, en particular $f \in E_i$ lo cual contradice f). Esto prueba 2). De manera similar tenemos que:

3) para cada $i \in \mathbb{N}$, E_i no está contenido en $F_i \cup K$.

Afirmamos ahora que:

4) para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $j(i) \geq i$ tal que $E_i \cap F_{j(i)} \subset K$.

Para ver 4), tomemos $i \in \mathbb{N}$ y supongamos que $E_i \cap F_j \not\subset K$ para toda $j \geq i$. Ahora bien, para cada $j \geq i$ definamos

$$\mathcal{H}_j = \{C \subset E_i \cap F_j : C \text{ es una componente de } E_i \cap F_j \text{ tal que } C \cap K = \varnothing\}.$$

Afirmamos que:

4.1) para cada $j \geq i$, $\mathcal{H}_j$ tiene a lo más dos elementos.

En efecto, sea $j \geq i$ y supongamos que $\mathcal{H}_j$ tiene al menos tres elementos C_1, C_2 y C_3. Como $F_j \subset F_i$ y por 3) $E_i \not\subset F_i \cup K$, sucede que $E_i \not\subset F_j \cup K$. Por tanto, E_i es un subcontinuo de R tal que $E_i \cap F_j \neq \varnothing$ y $E_i - F_j \neq \varnothing$. Luego, aplicando el Teorema 136, existen tres subcontinuos ajenos dos a dos C_1', C_2' y C_3' de $E_i \cup F_j$ tales que, para cada $i = 1, 2, 3$, $C_i \subsetneq C_i'$, $C_i' - F_j \neq \varnothing$ y $C_i' \cap K = \varnothing$. Más aún, por el mismo Teorema 136, el conjunto

$$T = F_j \cup C_1' \cup C_2' \cup C_2'$$

es un triodo. Definamos $T' = K \cup T$. Notemos que

$$T' \subset K \cup F_i \cup E_i = T_i \subset N(\varepsilon, K)$$

y $K \subset T' \subset N(\varepsilon, T')$. Entonces $T' \in B(K)$. Puesto que ninguna C'_l interseca a K, el conjunto T' es un triodo en $B(K)$. Esto es absurdo, y por tanto 4.1) se cumple. Afirmamos ahora que:

4.2) existe $j_0 \geq i$ tal que $\mathcal{H}_j = \emptyset$ para cada $j \geq j_0$.

Para ver 4.2), supongamos que para cada $j \geq i$ existe $j' \geq j$ tal que $\mathcal{H}_{j'} \neq \emptyset$. Dada $j \geq i$ tal que $\mathcal{H}_j \neq \emptyset$, denotaremos por C_1^j y C_2^j a los elementos de $\mathcal{H}_j$ y, convendremos que $C_1^j \neq C_2^j$ (en el caso en que $\mathcal{H}_j$ posea solamente un elemento, convendremos que $C_1^j = C_2^j$).

Tomemos ahora $j_1 \geq i$ tal que $\mathcal{H}_{j_1} \neq \emptyset$. Como el conjunto

$$\mathcal{U}_1 = \left\{A \in C(R) : A \subset R - (C_1^{j_1} \cup C_2^{j_1})\right\}$$

es abierto en $C(R)$ y tiene a F, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(F) \subset \mathcal{U}_1$. En vista de que $F_j \to F$, existe $J_1 \in \mathbb{N}$ tal que $J_1 \geq j_1$ y $F_j \in B_{\delta_1}(F)$ para cada $j \geq J_1$. Tomemos ahora $j_2 \geq J_1$ tal que $\mathcal{H}_{j_2} \neq \emptyset$. Notemos que $F_{j_2} \in B_{\delta_1}(F)$, así que $F_{j_2} \cap (C_1^{j_1} \cup C_2^{j_1}) = \emptyset$. Luego $j_2 > j_1$. Notemos ahora que el conjunto

$$\mathcal{U}_2 = \left\{A \in C(R) : A \subset R - (C_1^{j_2} \cup C_2^{j_2})\right\}$$

es abierto en $C(R)$ y tiene a F. Entonces, existe $\delta_2 > 0$ tal que $\delta_2 < \delta_1$ y $B_{\delta_2}(F) \subset \mathcal{U}_2$. Tomemos $J_2 \in \mathbb{N}$ tal que $J_2 \geq j_2$ y $F_j \in B_{\delta_2}(F)$ para cada $j \geq J_2$. Sea $j_3 \geq J_2$ tal que $\mathcal{H}_{j_3} \neq \emptyset$. Notemos que $F_{j_3} \in B_{\delta_2}(F) \subset \mathcal{U}_2$, así que $F_{j_3} \cap (C_1^{j_2} \cup C_2^{j_2}) = \emptyset$. Luego $j_3 > j_2$ y, en consecuencia, $j_3 \geq J_1$. Por tanto $F_{j_3} \in B_{\delta_1}(F)$ y, de aquí que, $F_{j_3} \cap (C_1^{j_1} \cup C_2^{j_1}) = \emptyset$.

Notemos que los conjuntos $C_1^{j_1}, C_1^{j_2}$ y $C_1^{j_3}$ son ajenos dos a dos y no intersectan a K. Además, para cada $l = 1, 2, 3$, $C_1^{j_l} \subset F_{j_l}$. Por tanto, existen tres subcontinuos ajenos dos a dos G_1, G_2 y G_3, tales que para cada $l = 1, 2, 3$, $C_1^{j_l} \subsetneq G_l \subset F_{j_l}$ y $G_l \cap K = \emptyset$. Dada $l \in \{1, 2, 3\}$, $C_1^{j_l}$ es una componente de $E_i \cap F_{j_l}$, que está propiamente contenida en el subconjunto conexo G_l de F_{j_l}. Por tanto, $G_l - E_i \neq \emptyset$.

Definamos ahora

$$T = K \cup E_i \cup G_1 \cup G_2 \cup G_3.$$

Como $F_{j_3} \subset F_{j_2} \subset F_{j_1} \subset F_i$, sucede que

$$T \subset K \cup E_i \cup F_i = T_i \subset N(\varepsilon, K).$$

Además $K \subset T \subset N(\varepsilon, T)$. Por tanto, $T \in B_\varepsilon(K)$. Más aún, como $G_l \cap K = \varnothing$ para cada $l = 1, 2, 3$, resulta que

$$T - (K \cup E_i) = (G_1 - E_i) \cup (G_2 - E_i) \cup (G_3 - E_i).$$

Notemos que los conjuntos $G_1 - E_i$, $G_2 - E_i$ y $G_3 - E_i$ son no vacíos. Además, debido a que los continuos G_1, G_2 y G_3 son ajenos dos a dos, sucede que los conjuntos $G_1 - E_i$, $G_2 - E_i$ y $G_3 - E_i$ están, dos a dos, mutuamente separados. Por tanto, T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$. Como esto es absurdo, 4.2) es cierto.

De acuerdo con 4.2), si $j \geq j_0$ y C es una componente de $E_i \cap F_j$, entonces $C \cap K \neq \varnothing$. Consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{L}_j = \{C \subset E_i \cap F_j : C \text{ es una componente de } E_i \cap F_j \text{ tal que } C - K \neq \varnothing\}.$$

Afirmamos que:

4.3) para cada $j \geq j_0$, $\mathcal{L}_j$ tiene a lo más dos elementos.

En efecto, sea $j \geq j_0$ y supongamos que $\mathcal{L}_j$ tiene al menos tres elementos C_1, C_2 y C_3. Para cada $l = 1, 2, 3$, resulta que $C_l \cap K \neq \varnothing$, ya que $j \geq j_0$. Entonces podemos considerar una componente D_l de $C_l \cap K$. Por el Teorema 78, $D_l \in SB(K)$. Esto significa que $SB(K)$ tiene tres elemenos ajenos dos a dos. Luego, por el Teorema 135, existe un triodo en $B_\varepsilon(K)$. Como esto es absurdo, 4.3) es cierto. Afirmamos ahora que:

4.4) existe $m_0 \geq j_0$ tal que $\mathcal{L}_j = \varnothing$ para cada $j \geq m_0$.

Para probar 4.4), supongamos que para cada $j \geq j_0$, existe $j' \geq j$ tal que $\mathcal{L}_{j'} \neq \varnothing$. Entonces podemos encontrar una subsucesión $(j_l)_l$ de $(j)_{j \geq j_0}$ tal que $\mathcal{L}_{j_l} \neq \varnothing$ para cada $l \in \mathbb{N}$. Notemos que si $l < s$ y $C \in \mathcal{L}_{j_s}$ entonces

$$C \subset E_i \cap F_{j_s} \subset E_i \cap F_{j_l}.$$

Por tanto, existe una componente D de $E_i \cap F_{j_l}$ tal que $C \subset D$. Dado que $C - K \neq \varnothing$, $D \in \mathcal{L}_{j_l}$. Esto significa que cada elemento de $\mathcal{L}_{j_s}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{L}_{j_l}$. En particular, si $l > 1$ entonces cada elemento de $\mathcal{L}_{j_l}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{L}_{j_1}$.

Ahora bien, $\mathcal{L}_{j_1}$ tiene a lo más dos elementos D_1^1 y D_2^1. Definamos

$$U_1 = \left\{ l > 1 : \mathcal{L}_{j_l} \text{ tiene un elemento contenido en } D_1^1 \right\}$$

y

$$V_1 = \left\{ l > 1 : \mathcal{L}_{j_l} \text{ tiene un elemento contenido en } D_2^1 \right\}.$$

Debido a que cada elemento de $\mathcal{L}_{j_l}$ está contenido en D_1^1 o en D_2^1, alguno de los conjuntos U_1 o V_1es infinito. Supongamos, sin perder generalidad, que U_1 es infinito. Sean $C_1 = D_1^1$, $r_1 = 1$ y $r_2 = mín U_1$. Entonces $\mathcal{L}_{j_{r_2}}$ tiene a lo más dos elementos $D_1^{r_2}$ y $D_2^{r_2}$ y, sin perder generalidad, $D_1^{r_2} \subset D_1^{r_1}$. Si $D_2^{r_2} \subset D_2^{r_1}$ o bien $D_2^{r_2} = \varnothing$ entonces definimos $C_2 = D_1^{r_2}$. Si $\varnothing \neq D_2^{r_2} \subset D_1^{r_1}$, definimos

$$U_2 = \{ l > r_2 : \mathcal{L}_{j_l} \text{ tiene un elemento contenido en } D_1^{r_2} \}$$

y

$$V_2 = \{ l > r_2 : \mathcal{L}_{j_l} \text{ tiene un elemento contenido en } D_2^{r_2} \}.$$

Debido a que cada elemento de $\mathcal{L}_{j_l}$ $(l > r_2)$ está contenido en $D_1^{r_2}$ o en $D_2^{r_2}$, alguno de los conjuntos U_2 y V_2 es infinito. Supongamos, sin perder generalidad, que U_2 es infinito. Sean $C_2 = D_1^{r_2}$ y $r_3 = mín U_2$. Procediendo como antes, es posible encontrar un elemento $D_1^{r_3}$ de $\mathcal{L}_{j_{r_3}}$ tal que $D_1^{r_3} \subset D_1^{r_2}$ y el conjunto

$$U_3 = \{ l > r_3 : \mathcal{L}_{j_l} \text{ tiene un elemento contenido en } D_1^{r_3} \}$$

es infinito. Sean $C_3 = D_1^{r_3}$ y $r_4 = mín U_3$. Siguiendo los argumentos de antes, encontramos una subsucesión $(j_{r_m})_m$ de $(j_l)_l$ y una sucesión decreciente $(C_m)_m$ tales que $r_1 = 1$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, $C_m \in \mathcal{L}_{j_{r_m}}$. Entonces, $C_m \to C_0 = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$.

Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $C_m \cap K \neq \varnothing$ y $C_m - K \neq \varnothing$. Más aún, $C_m \subset E_i \cap F_{j_{r_m}}$ y $F_{j_{r_m}} \to F$. Entonces, $C_0 \subset E_i \cap F$. Ahora bien, $E_i \cap F \subset F \subset K$, por lo que $C_0 \subset K$. Más aún, por el Teorema 79, $C_0 \in SB(K)$.

Tenemos entonces que C_0 es un elemento de $SB(K)$ que está contenido en el elemento minimal F de $SB(K)$. Luego $C_0 = F$. Esto implica que

$$F = C_0 \subset E_i \cap F \subset E_i$$

y en particular $f \in E_i$. Esto contradice f) y prueba, así, 4.4).

Para terminar la prueba de 4), basta definir $j(i) = m_0$. Ahora bien, debido a que la sucesión $(E_i)_i$ es decreciente y a que $j(i) \geq i$

$$E_{j(i)} \cap F_{j(i)} \subset E_i \cap F_{j(i)} \subset K.$$

Definamos ahora $n_1 = j(1)$ y, para cada $l \geq 2$, $n_l = j(n_{l-1} + 1)$. En vista de $a) - g)$ y 1), las sucesiones $(E_{n_l})_l$ y $(F_{n_l})_l$ satisfacen las propiedades 1.-8. del teorema y, además, $E_{n_l} \cap H_1 = \varnothing$ y $F_{n_l} \cap H_2 = \varnothing$ para cada $l \in \mathbb{N}$. Más aún, resulta que $E_{n_l} \to E$ y $F_{n_l} \to F$. ∎

En el siguiente resultado mostramos que si $SB(K)$ posee al menos dos elementos minimales E y F tales que $E \cap F \neq \varnothing$ y $E \cup F \neq K$ entonces es posible conseguir triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 141 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R. Supongamos que $m(K)$ tiene al menos dos elementos E y F tales que $E \cap F \neq \varnothing$ y $E \cup F \neq K$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Como $E \cup F \neq K$, existe un punto $k \in K - (E \cup F)$. Por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R, tales que:

a) $E \subsetneq E'$ y $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap K$ y $F' \cap K$ son conexos,

d) $E' \cap F' \subset K$,

e) $k \notin E' \cup F'$,

f) si $T = K \cup E' \cup F'$ entonces $T \in B_\varepsilon(K)$.

De acuerdo con f), el continuo $T = K \cup E' \cup F'$ está en $B_\varepsilon(K)$. Definamos $B = (E' \cup F') \cap K$. Como $E \cap F \neq \varnothing$, utilizando a), y c), deducimos que B es un subcontinuo de T. Más aún, es fácil ver que:

$$T - B = [K - (E' \cup F')] \cup [E' - K] \cup [F' - K].$$

Ahora bien, por b), $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos. Además, de acuerdo con e), $K - (E' \cup F')$ es no vacío. Afirmamos ahora que:

1) los conjuntos $E' - K$, $F' - K$ y $K - (E' \cup F')$ están mutuamente separados.

En efecto, de acuerdo con d)

$$Cl_R(E' - K) \cap (F' - K) \subset E' \cap (F' - K) = \varnothing$$

y

$$(E' - K) \cap Cl_R(F' - K) \subset (E' - K) \cap F' = \varnothing.$$

Por tanto, los conjuntos $E' - K$ y $F' - K$ están mutuamente separados. Notemos ahora que

$$Cl_R(E' - K) \cap [K - (E' \cup F')] \subset E' \cap [K - (E' \cup F')] = \varnothing$$

y

$$(E' - K) \cap Cl_R([K - (E' \cup F')]) \subset (E' - K) \cap K = \varnothing.$$

Por tanto, los conjuntos $E' - K$ y $K - (E' \cup F')$ están mutuamente separados. De la misma manera se prueba que los conjuntos $F' - K$ y $K - (E' \cup F')$ están mutuamente separados. Esto muestra 1).

Tenemos de lo anterior que T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$, lo cual es absurdo. ∎

Ahora mostraremos que si $SB(K)$ posee al menos dos elementos minimales E y F tales que $E \cup F = K$ entonces es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 142 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R. Supongamos que $m(K)$ tiene al menos dos elementos E y F tales que $E \cup F = K$. Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Fijemos un punto $e \in E - F$ y un punto $f \in F - E$. Por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R tales que:

a) $E \subsetneq E'$ y $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap K$ y $F' \cap K$ son conexos,

d) $e \notin F'$ y $f \notin E'$,

e) $E' \cap F' \subset K$,

f) $H(K, K \cup E') < \varepsilon$ y $H(K, K \cup F') < \varepsilon$.

Definamos $E_0 = E' \cap K$ y $F_0 = F' \cap K$. Notemos que:

$$K = (E' \cap K) \cup (F' \cap K) = E_0 \cup F_0 \tag{6.3}$$

y que

$$E_0 \cap F_0 = E' \cap F' \cap K = E' \cap F'$$

ya que $E' \cap F' \subset K$. En vista de que $e \in E_0 - F_0$ y $f \in F_0 - E_0$, E_0 y F_0 son subcontinuos propios de K. Afirmamos que:

1) si existe un subcontinuo propio L de E_0 tal que $E_0 \cap F_0 \subset L$ entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$

Para ver 1), supongamos que L es un subcontinuo propio de E_0 tal que $E_0 \cap F_0 \subset L$. Definamos $A_1 = E_0$, $A_2 = F_0 \cup L$, $A = A_1 \cup A_2$, $B_1 = A_1 \cup E'$, $B_2 = A_2 \cup F'$ y $B = B_1 \cup B_2$. Es claro que A_1 y A_2 son subcontinuos propios de A, que B_1 y B_2 son subcontinuos propios de B, y que $A_1 \subsetneq B_1$, $A_2 \subsetneq B_2$ y $A \subsetneq B$. Notemos ahora que:

$$A_1 \cap A_2 = E_0 \cap (F_0 \cup L) = (E_0 \cap F_0) \cup (E_0 \cap L) = L,$$

y que

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (A_1 \cup E') \cap (A_2 \cup F') \\ &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap E') \cup (A_1 \cap F') \cup (E' \cap F') \\ &= L \cup (F_0 \cap E') \cup (L \cap E') \cup (E_0 \cap F') \cup (E_0 \cap F_0) = L \end{aligned}$$

ya que

$$F_0 \cap E' = F' \cap K \cap E' \subset E_0 \cap F_0 \subset L$$

y

$$E_0 \cap F' = E' \cap K \cap F' \subset L.$$

Puesto que L es un subcontinuo de R, por el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto prueba 1).

Supongamos ahora que no existe dicho subcontinuo L. Entonces $E_0 \cap F_0$ no es conexo. Fijemos una componente C de $E_0 \cap F_0$ y sea $\alpha_1 : I \to C(R)$ un arco ordenado de C a E_0. Definamos $\alpha : I \to C(R)$ como $\alpha(t) = F_0 \cup \alpha_1(t)$. Es claro que α es una función continua tal que $\alpha(0) = F_0$, $\alpha(1) = K$ y $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ siempre que $s \leq t$. Sea $t_0 = min\{t \in I : \alpha(t) = K\}$. Entonces, $\alpha(t) = K$ para cada $t \geq t_0$. Ahora bien, por la continuidad de α, existe $0 < t_1 < t_0$ tal que $H(\alpha(t_1), K) < \varepsilon$. Entonces, $L = \alpha(t_1)$ es un subcontinuo propio de K y podemos por tanto tomar un punto $x \in K - L$. Claramente $x \in E_0 - F_0$. Afirmamos que:

2) $\alpha_1(t_1)$ no intersecta a todas las componentes de $E_0 \cap F_0$.

En efecto, si $\alpha_1(t_1)$ intersecta a todas las componentes de $E_0 \cap F_0$, entonces $\alpha_1(t_1) \cup (E_0 \cap F_0)$ es un subcontinuo propio de E_0 que contiene a $E_0 \cap F_0$ (es propio pues no tiene al punto x), lo cual es absurdo. Esto prueba 2).

En vista de lo anterior, existe una componente D de $E_0 \cap F_0$ tal que $\alpha_1(t_1) \cap D = \emptyset$. Sean $D' \in C(E_0)$ y $G \in C(E_0)$ tales que $D \subsetneq D'$, $\alpha_1(t) \subsetneq G$ y $D' \cap G = \emptyset$. Hacemos $L' = L \cup G$. Entonces $L' \in C(K)$ y

$$D' \cap L' = (D' \cap L) \cup (D' \cap G) = (D' \cap F_0) \cup (D' \cap \alpha_1(t)) = D' \cap F_0 \subset F_0.$$

Así que $L \subsetneq L'$, $D \subsetneq D'$ y $L' \cap D' \subset F_0$. Definamos $T = L' \cup D' \cup F'$. Aseguramos que:

$$T - L = (L' - L) \cup (D' - L) \cup (F' - K).$$

En efecto, sea $y \in T - L$. Entonces

$$y \in (L' - L) \cup (D' - L) \cup (F' - L).$$

Supongamos, para efectos de la demostración, que $y \in F' - L$. Como

$$F' = F_0 \cup (F' - K) \subset L \cup (F' - K)$$

y $y \notin L$, resulta que $y \in F' - K$. Esto prueba que

$$T - L \subset (L' - L) \cup (D' - L) \cup (F' - K).$$

La otra contención es clara. Ahora bien, los conjuntos $L' - L$ y $F' - K$ son no vacíos. Como D es una componente de $E_0 \cap F_0$ que está contenida propiamente en el subconjunto conexo D' de E_0, resulta que $D' \not\subset F_0$. Entonces existe un punto $y \in D' - F_0$. Dado que $L' \cap D' \subset F_0$, $y \notin L'$. De esta manera, debido a que $L \subset L'$, resulta que $y \notin L$. Esto prueba que $D' - L$ es no vacío. Afirmamos ahora que:

3) los conjuntos $L' - L$, $D' - L$ y $F' - K$ están mutuamente separados.

En efecto, como $L' \subset K$

$$Cl_R(L' - L) \cap (F' - K) \subset K \cap (F' - K) = \varnothing,$$

de donde $Cl_R(L' - L) \cap (F' - K) = \varnothing$. Ahora bien, como $F_0 \subset L \subset L'$, $(L' - L) \cap F_0 = \varnothing$, o lo que es lo mismo, $(L' - L) \cap F' \cap K = \varnothing$ ya que $F_0 = F' \cap K$. En vista de que $L' \subset K$, resulta en realidad que $(L' - L) \cap F' = \varnothing$. Luego

$$(L' - L) \cap Cl_R(F' - K) \subset (L' - L) \cap F' = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos $L' - L$ y $F' - K$ están mutuamente separados. Como $D' \subset E_0 \subset K$, sucede que

$$Cl_R(D' - L) \cap (F' - K) \subset K \cap (F' - K) = \varnothing,$$

de donde $Cl_R(D' - L) \cap (F' - K) = \varnothing$. Ahora bien, $F_0 \subset L$, así que $(D' - L) \cap F_0 = \varnothing$. Esto significa que $(D' - L) \cap F' \cap K = \varnothing$ y, como $D' \subset K$, lo anterior equivale a que $(D' - L) \cap F' = \varnothing$. De esta manera

$$(D' - L) \cap Cl_R(F' - K) \subset (D' - L) \cap F' = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos $D' - L$ y $F' - K$ están mutuamente separados. Por último, como $L' \cap D' \subset F_0 \subset L$

$$Cl_R(L' - L) \cap (D' - L) \subset L' \cap (D' - L) = \varnothing$$

y

$$(L' - L) \cap Cl_R(D' - L) \subset (L' - L) \cap D' = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos $L' - L$ y $D' - L$ están mutuamente separados. De esta manera, 3) se cumple.

De lo anterior resulta que T es un triodo en R. Más aún, como

$$T = L' \cup D' \cup F' \subset K \cup F' \subset N(\varepsilon, K)$$

y $K \subset N(\varepsilon, L) \subset N(\varepsilon, T)$, resulta que T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$, lo cual es absurdo y termina la prueba del teorema ∎

Combinando los Teoremas 141 y 142 tenemos el siguiente resultado

Teorema 143 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R. Supongamos que $m(K)$ tiene al menos dos elementos E y F tales que $E \cap F \neq \varnothing$. Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien, para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

¿Qué sucede si los elementos minimales de $SB(K)$ no se intersectan? Como consecuencia del Teorema 135, si $m(K)$ tiene al menos tres elementos ajenos dos a dos entonces es posible encontrar triodos arbitrariamente cercanos a K. Resta entonces considerar dos casos: cuando $m(K)$ tiene solamente un elemento, y cuando $m(K)$ tiene exactamente dos elementos ajenos. El siguiente teorema, presenta condiciones bajo las cuales, en el caso de dos minimales ajenos, es posible encontrar triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 144 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R, tal que $m(K)$ tiene exactamente dos elementos E y F. Supongamos que $E \cap F = \varnothing$. Si existe un subcontinuo propio de K que contiene a $E \cup F$ entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Supongamos, además, que existe un subcontinuo propio L de K, tal que $E \cup F \subset L$. Fijemos $k \in K - L$. Por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R tales que:

a) $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap K$ y $F' \cap K$ son conexos,

d) $H(K, K \cup E') < \varepsilon$ y $H(K, K \cup F') < \varepsilon$,

e) $k \notin E' \cup F'$,

f) $E' \cap F' = \varnothing$.

Definamos $C = L \cup (E' \cap K) \cup (F' \cap K)$. Como $E \cup F \subset L$, $E \subset E' \cap K$ y $F \subset F' \cap K$, tenemos que C es un subcontinuo de K. Es claro que $k \notin C$. Consideremos ahora el conjunto $T = K \cup E' \cup F'$. Es claro que $C \subset T$ y que:

$$T - C = (K - C) \cup (E' - K) \cup (F' - K).$$

Más aún, los conjuntos $K - C$, $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos. Afirmamos que:

1) los conjuntos $K - C$, $E' - K$ y $F' - K$ están mutuamente separados.

En efecto, como $E' \cap F' = \varnothing$, los conjuntos $E' - K$ y $F' - K$ están mutuamente separados. Notemos ahora que

$$Cl_R(K - C) \cap (E' - K) \subset K \cap (E' - K) = \varnothing,$$

de donde $Cl_R(K - C) \cap (E' - K) = \varnothing$. Ahora bien, como $E' \cap K \subset C$, resulta que $(K - C) \cap E' = \varnothing$. Luego

$$(K - C) \cap Cl_R(E' - K) \subset (K - C) \cap E' = \varnothing.$$

Esto prueba que los conjuntos $K - C$ y $E' - K$ están mutuamente separados. De manera similar se prueba que los conjuntos $K - C$ y $F' - K$ están mutuamente separados. Así, 1) se cumple.

Tenemos de lo anterior que T es un triodo en R. Notemos ahora que:

$$T = (K \cup E') \cup (K \cup F') \subset N(\varepsilon, K)$$

y que $K \subset T \subset N(\varepsilon, T)$. Entonces T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$, lo cual es absurdo y termina la prueba del teorema. ∎

Ahora mostraremos que si K es descomponible y $SB(K)$ tiene exactamente dos elementos minimales y ajenos, entonces es posible entontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien triodos arbitrariamente cercanos a K.

Teorema 145 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R, tal que $o(K)$ tiene exactamente dos elementos E y F. Supongamos que K es descomponible y que $E \cap F = \varnothing$. Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $T \in B_\varepsilon(K)$ es un triodo. Entonces, por el Teorema 141

1) no existe un subcontinuo propio de K que contiene a $E \cup F$.

Afirmamos que:

2) si existen $A, B \in C(K) - \{K\}$ tales que $K = A \cup B$ y $E \subset (A - B) \cup (B - A)$ entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

En efecto, supongamos que existen $A, B \in C(K) - \{K\}$ tales que $K = A \cup B$ y $E \subset (A - B) \cup (B - A)$. Ya que $A - B$ y $B - A$ son conjuntos separados, y E es conexo, podemos suponer que $E \subset A - B$. Tomemos $L \in C(K)$ tal que $A \subset L \subsetneq K$ y $H(K, L) < \varepsilon$. Es claro que $K = L \cup B$, de donde $B - L \neq \varnothing$. Consideraremos ahora los casos en que $F \cap L \neq \varnothing$ y $F \cap L = \varnothing$.

Supongamos primero que $F \cap L = \varnothing$. Entonces, dado que $K = L \cup B$, resulta que $F \subset B - L$. Sea C la componente de $B - L$ que contiene a F. Por el Teorema 137, $Cl_R(C) \cap L \neq \varnothing$. Así que $L \cup Cl_R(C)$ es un subcontinuo de K que contiene a E y a F. Luego, por 1), $K = L \cup Cl_R(C)$. Entonces $K = L \cup C$, por lo que, $B - L$ es conexo.

Definimos $M = Cl_R(B - L)$. Por el párrafo anterior, M es un subcontinuo de B. Ahora bien, como $E \subset L - B$, $F \subset B - L$ y $M \subset B$, tenemos que $E \subset L - M$ y $F \subset M - L$. Por tanto L y M son subcontinuos propios de K tales que $L \cup M = K$. Además $H(K, L) < \varepsilon$ por lo que, de acuerdo con el Teorema 139, $L \cap M$ es conexo. Ahora bien, por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R tales que:

a) $E \subsetneq E'$ y $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap F' = \emptyset$,

d) $E' \cap M = \emptyset$ y $F' \cap L = \emptyset$.

Hagamos $A_1 = L$, $A_2 = M$, $A' = A_1 \cup A_2$, $B_1 = A_1 \cup E'$, $B_2 = A_2 \cup F'$ y $B' = B_1 \cup B_2$. Es claro que $A' = K$, $A_1, A_2 \neq A'$, $B_1, B_2 \neq B'$, $A_1 \subsetneq B_1$ y $A_2 \subsetneq B_2$. Notemos ahora que:

$$\begin{aligned} B_0 = B_1 \cap B_2 &= (L \cup E') \cap (M \cup F') \\ &= (L \cap M) \cup (F' \cap L) \cup (E' \cap M) \cup (E' \cap F') \\ &= L \cap M. \end{aligned}$$

Entonces $B_0 = L \cap M = A_1 \cap A_2 \in C(A')$. Por tanto, aplicando el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K = A' \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto termina la prueba para el caso en que $F \cap L = \emptyset$.

Supongamos ahora que $F \cap L \neq \emptyset$. Entonces, por 1), $L \cup F$ no es un subcontinuo propio de K. Por tanto $K = L \cup F$. Más aún, debido a que $E \subset L - F$ y a que $H(L, K) < \varepsilon$, por el Teorema 139, $L \cap F$ es conexo. Ahora bien, por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R tales que:

a) $E \subsetneq E'$, $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap K$ y $F' \cap K$ son conexos y no vacíos,

d) $E' \cap F' = \emptyset$.

Afirmamos que:

2.1) $F' \cap L$ es conexo y no vacío.

Para ver 2.1), notemos primero que $K = L \cup (F' \cap K)$. Más aún, $H(L, K) < \varepsilon$ y por a) y d), $E \subset L - (F' \cap K)$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 139, $L \cap (F' \cap K) = F' \cap L$ es conexo y no vacío. Esto prueba 2.1).

Hagamos ahora $A_1 = L$, $A_2 = F$, $A' = A_1 \cup A_2$, $B_1 = A_1 \cup E'$, $B_2 = F'$ y $B' = B_1 \cup B_2$. Es claro que $A' = K$, $A_1, A_2 \neq A'$, $B_1, B_2 \neq B'$, $A_1 \subsetneq B_1$ y $A_2 \subsetneq B_2$. Notemos que, por 2.) y d)

$$B_0 = B_1 \cap B_2 = (L \cap F') \cup (E' \cap F') = L \cap F' \in C(A').$$

Como $E \subset E' \cap L \subset A_1$ y $E' \cap F' = \emptyset$, sucede que $A_1 - B_0 \neq \emptyset$. Debido a que el subconjunto F de $F' = A_2$, no está contenido en L, $A_2 - B_0 \neq \emptyset$. Tomando un punto en $E' - K$ resulta que $B_1 - (A_1 \cup B_2) \neq \emptyset$ y, tomando un punto en $F' - K$, resulta que $B_2 - (A_2 \cup B_1) \neq \emptyset$. Por tanto, aplicando el Teorema 98, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K = A' \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto termina la prueba de 2).

De manera similar tenemos que:

3) si existen $A, B \in C(K) - \{K\}$ tales que $K = A \cup B$ y $F \subset (A - B) \cup (B - A)$, entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Ahora bien, como K es descomponible, existen $A, B \in C(K) - \{K\}$ tales que $K = A \cup B$. Si $E \cap (A \cap B) = \emptyset$, entonces $E \subset (A - B) \cup (B - A)$ y 2) garantiza una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Llegamos a la misma conclusión si $F \cap (A \cap B) = \emptyset$. Supongamos, por tanto, que $E \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ y $F \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Entonces, $A \cup E \cup F$ es un subcontinuo de K que no es propio, de acuerdo con 1). Luego, $K = A \cup E \cup F$.

Si $E \subset A$ entonces $K = A \cup F$. Ahora bien, debido a que A es un subcontinuo propio de K, $F - A \neq \emptyset$. Esto significa que A y F son dos subcontinuos propios de K, tales que $K = A \cup F$ y $E \subset A - F$. Luego, por 2), existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Llegamos a la misma conclusión si $F \subset A$. Supongamos, por tanto, que $E - A$ y $F - A$ son no vacíos.

Tenemos entonces que $K = A \cup E \cup F$, $E - A \neq \emptyset$ y $F - A \neq \emptyset$. Ahora bien, por el Teorema 140, existen dos subcontinuos E' y F' de R tales que:

a) $E \subsetneq E'$ y $F \subsetneq F'$,

b) $E' - K$ y $F' - K$ son no vacíos,

c) $E' \cap F' = \varnothing$.

Hagamos $A_1 = A \cup E$, $A_2 = A \cup F$, $B_1 = A_1 \cup E'$, $B_2 = A_2 \cup F'$ y $C = B_1 \cup B_2$. Es claro que $A_1 \cup A_2 = K$, $A_1 \subsetneq K$, $A_2 \subsetneq K$, $B_1 \subsetneq C$, $B_2 \subsetneq C$, $A_1 \subsetneq B_1$ y $A_2 \subsetneq B_2$. Notemos ahora que

$$A_1 \cap A_2 = A \cup (E \cap F) = A$$

y que

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap F') \cup (A_2 \cap E') \cup (E' \cap F') \\ &= A \cup (A \cap F') \cup (E \cap F') \cup (A \cap E') \cup (F \cap E') \\ &= A \end{aligned}$$

ya que $A \cap F' \subset A$, $A \cap E'$ y $E \cap F' = \varnothing = F \cap E'$. De esta manera, $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = A \in C(K)$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto termina la prueba. ∎

Combinando los Teoremas 143 y 145, tenemos el siguiente resultado, que generaliza al Teorema 102.

Teorema 146 *Supongamos que K es un subcontinuo propio y descomponible de un continuo R. Si $m(K)$ tiene al menos dos elementos entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(R)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Por tanto, quedan a considerar los siguientes casos:

1. K es indescomponible, $m(K) = \{E, F\}$ y $E \cap F = \varnothing$.

2. $m(K)$ posee solamente un elemento.

En el Teorema 148, probaremos que si K es indescomponible y $C(R) - \{K\}$ es conexo por trayectorias, entonces es posible entontrar triodos arbitrariamente cercanos a K. Para esto, utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 147 (Krasinkiewicz) *[26, Teorema 1.50] Sean X un continuo indescomponible y $\Lambda \subset 2^X$ un continuo conexo por trayectorias. Si $\bigcup \Lambda = X$ y $\Lambda \cap C(X) \neq \varnothing$ entonces $X \in \Lambda$.*

Teorema 148 *Sean R un continuo y K un subcontinuo propio y no degenerado de R. Supongamos que K es indescomponible y que $C(R) - \{K\}$ es conexo por trayectorias. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in$ [illegible](K).*

Demostración. Afirmamos que:

1) para cada $a \in K$, existe $E_a \in SB(K)$ tal que $a \in E_a \subsetneq K$.

Para ver esto tomemos un punto $a \in K$. Como $C(R) - \{K\}$ es conexo por trayectorias y $\{a\}, R \in C(R) - \{K\}$, existe una trayectoria $\alpha : I \to C(R) - \{K\}$ de $\{a\}$ a R. Consideremos la función $\beta : I \to C(R)$ definida para cada $t \in I$ como

$$\beta(t) = \bigcup \alpha([0, t]).$$

Utilizando la continuidad de α y de la función unión (Teorema 28), resulta que β es continua. Además, $\beta(0) = \{a\}$, $\beta(1) = R$ y $\beta(s) \subset \beta(t)$ siempre que $s \leq t$. Sean $t_0 = máx\{t \in I : \beta(t) \subset K\}$ y $E_a = \beta(t_0)$. Es claro que $a \in E_a \subset K$. Además, para cada $t \in [0, t_0]$

$$\alpha(t) \subset \bigcup \alpha([0, t_0]) = \beta(t_0) = E_a \subset K. \tag{6.4}$$

Definimos $\Lambda = \alpha([0, t_0])$. De acuerdo con (6.4), $\Lambda \subset C(K)$. Más aún, Λ es conexo por trayectorias y $E_a = \beta(t_0) = \bigcup \Lambda$. Ahora bien, si $\bigcup \Lambda = K$ entonces por el Teorema 147, $K \in \Lambda$. Esto significa que $K = \alpha(t)$ para alguna $t \in [0, t_0]$. Esto contradice el hecho de que la trayectoria α no pasa por K. Por tanto $\bigcup \Lambda \neq K$, y de esta manera, E_a es un subconjunto propio de K.

Notemos ahora que, como $\beta(1) = R \not\subset K$, $t_0 < 1$. Por tanto, la función $\gamma = \beta|_{[t_0,1]}$ es continua, $\gamma(t_0) = E_a$ y, de acuerdo a la elección de t_0, $\gamma(t) - K \neq \emptyset$ para cada $t > t_0$. Esto prueba que $E_a \in SB(K)$ y, así 1) se cumple. Notemos que E_a está en la composante de a en K (ver Definición 42).

Como K es indescomponible, por el Teorema 43, podemos tomar tres puntos a, b y c en distintas composantes de K. De acuerdo con 1), existen $E_a, E_b, E_c \in SB(K)$ tales que $a \in E_a \subsetneq K$, $b \in E_b \subsetneq K$ y $c \in E_c \subsetneq K$. Entonces $b, c \notin E_a$, $a, c \notin E_b$ y $a, b \notin E_c$. De nueva cuenta, por el Teorema 43,

2) los conjuntos E_a, E_b y E_c son ajenos dos a dos.

Tenemos, de lo anterior, que $SB(K)$ posee tres elementos ajenos dos a dos. Entonces, por el Teorema 135, para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$. ∎

Quedan, por tanto, por considerar los siguientes casos:

1. K es indescomponible, $m(K) = \{E, F\}$, $E \cap F = \varnothing$ y $C(R) - \{K\}$ no es conexo por trayectorias.

2. $m(K)$ posee solamente un elemento.

En la siguiente sección estudiaremos el segundo caso, cuando R es el residuo de una compactación métrica de la recta real. El primer caso no aparecerá en la prueba de que las compactaciones métricas de la recta real tienen hiperespacio único.

6.4 El Caso Conexo.

6.4.1 Introducción.

En esta sección, mostraremos que la clase de las compactaciones métricas de la recta real, que tienen residuo conexo y no degenerado, está C-determinada. A lo largo de esta sección, la letra X representará un continuo tal que $X = V \cup R$, en donde $V \cup R$ es una compactación métrica del espacio $V = (-\infty, \infty)$, con residuo conexo y no degenerado R. Convendremos que R_1 y R_2 son los respectivos residuos de las compactaciones $Cl_X([0, \infty))$ de $[0, \infty) \subset V$ y $Cl_X((-\infty, 0])$ de $(-\infty, 0] \subset V$. Entonces $R = R_1 \cup R_2$ y, como R es conexo, $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$.

6.4.2 Localizando 2-celdas o Triodos.

Por lo visto en la sección anterior, si K es un subcontinuo propio y descomponible de R, y $SB(K)$ tiene al menos dos elementos minimales, entonces es posible encontrar una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien existen triodos arbitrariamente cercanos a K. En esta subsección, veremos que la misma conclusión se tiene cuando $SB(K)$ posee justo un elemento minimal, contenido propiamente en K, cuando R es el residuo convexo y no degenerado de una compactación métrica de la recta real. Para esto, el siguiente resultado será de gran utilidad.

Teorema 149 *Supongamos que $X = V \cup R$ es una compactación métrica de la recta real $V = (-\infty, \infty)$ con residuo convexo y no degenerado R. Para cada subcontinuo propio K de R definamos*

$$\mathcal{M}_K = \{A \in C(K) : \text{existe una sucesión } (A_n)_n \text{ en } C(V) \text{ tal que } A_n \to A\}.$$

Entonces $\mathcal{M}_K$ es un subconjunto cerrado de $C(K)$ tal que $F_1(K) \subset \mathcal{M}_K$.

Demostración. Para ver que $F_1(K) \subset \mathcal{M}_K$, tomemos un punto $a \in K$. Como R es el residuo de la compactación, existe una sucesión $(a_n)_n$ en V tal que $a_n \to a$. Entonces $(\{a_n\})_n$ es una sucesión en $C(V)$ que converge a $\{a\} \in C(K)$. Por tanto $\{a\} \in \mathcal{M}_K$. Esto prueba que $F_1(K) \subset \mathcal{M}_K$.

Para ver que $\mathcal{M}_K$ es cerrado, tomemos un elemento $B \in Cl_{C(K)}(\mathcal{M}_K)$. Entonces existe una sucesión, $(B_n)_n$, en $\mathcal{M}_K$ tal que $B_n \to B$. Como cada $B_n \in \mathcal{M}_K$, existe una sucesión, $(A_i^n)_i$, en $C(V)$ tal que $A_i^n \to B_n$. Es claro que $B \in C(K)$. Ahora bien, para cada $j \in \mathbb{N}$, tomemos un elemento $A_{i_j}^j$ tal que $H(B_j, A_{i_j}^j) < \frac{1}{2j}$. Definamos $C_j = A_{i_j}^j$.

Veremos a continuación que la sucesión $(C_j)_j$ converge a B. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Como $B_n \to B$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Sea $J \geq N$ tal que $\frac{1}{2J} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $j \geq J$. Entonces, como $j \geq N$, $H(B_j, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además $H(B_j, C_j) < \frac{1}{2j}$. Ahora bien, como $j \geq J$, $\frac{1}{2j} \leq \frac{1}{2J} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto,

$$H(C_j, B) \leq H(C_j, B_j) + H(B_j, B) < \frac{1}{2j} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De esta manera, $(C_j)_j$ es una sucesión en $C(V)$ tal que $C_n \to B$. Así que $B \in \mathcal{M}_K$. Esto prueba que $\mathcal{M}_K$ es cerrado en $C(K)$. ∎

La inclusión define en $\mathcal{M}_K$ un orden parcial. A continuación, veremos que $\mathcal{M}_K$ admite elementos maximales con respecto a este orden parcial.

Teorema 150 *Cada conjunto de la forma $\mathcal{M}_K$ posee elementos maximales, con respecto a la inclusión. Más aún, si $a \in K$ entonces existe un elemento maximal E en $\mathcal{M}_K$, tal que $a \in E$.*

Demostración. Tomemos un elemento $a \in K$ y definamos

$$\mathcal{L}_a = \{A \in \mathcal{M}_K : a \in A\}.$$

Por el teorema anterior, $\{a\}$ es un elemento en $\mathcal{M}_K$, que claramente tiene al punto a. Entonces $\mathcal{L}_a$ es no vacío. Afirmamos que:

1) $\mathcal{L}_a$ es cerrado en $\mathcal{M}_K$.

En efecto, sea $A \in Cl_{\mathcal{M}_K}(\mathcal{L}_a)$. Entonces existe una sucesión $(A_n)_n$ en $\mathcal{L}_a$ tal que $A_n \to A$. Por tanto, para cada natural n, $A_n \in \mathcal{M}_K$ y $a \in A_n$. Luego $a \in A$ y, como $\mathcal{M}_K$ es cerrado, $A \in \mathcal{M}_K$. Esto prueba que $A \in \mathcal{L}_a$. Como consecuencia de esto, $\mathcal{L}_a$ es cerrado en $\mathcal{M}_K$.

Tomemos ahora una función de Whitney $\mu : C(K) \to [0, \mu(K)]$. Como $\mathcal{L}_a$ es cerrado en $\mathcal{M}_K$, y $\mathcal{M}_K$ es cerrado en $C(K)$, resulta que $\mathcal{L}_a$ es cerrado en $C(K)$. Luego $\mu(\mathcal{L}_a)$ es cerrado en $[0, \mu(K)]$. Además, debido a que $\{a\} \in \mathcal{L}_a$, $0 \in \mu(\mathcal{L}_a)$. Entonces $\mu(\mathcal{L}_a)$ es un subconjunto cerrado y no vacío del compacto $[0, \mu(K)]$. De esta manera, existe $t_0 = máx\mu(\mathcal{L}_a)$.

Sea $E \in \mathcal{L}_a$ tal que $\mu(E) = t_0$. Entonces $E \in \mathcal{M}_K$ y $a \in E$. Si existe $F \in \mathcal{M}_K$ tal que $E \subset F$ entonces $t_0 = \mu(E) \leq \mu(F)$. Además $a \in E \subset F \in \mathcal{M}_K$, por lo que $F \in \mathcal{L}_a$. Luego, $\mu(F) \leq t_0 = \mu(E)$. De aquí que $\mu(E) = \mu(F)$. Por tanto, $E = F$. Esto muestra que E es maximal en $\mathcal{M}_K$. ∎

En el siguiente teorema, mostramos que los elementos maximales de $\mathcal{M}_K$, están en $SB(K)$.

Teorema 151 *Supongamos que $X = V \cup R$ es una compactación métrica de la recta real $V = (-\infty, \infty)$, con residuo conexo y no degenerado R. Sea K un subcontinuo propio y no degenerado de R. Si E es un elemento maximal de $\mathcal{M}_K$ entonces $E \in SB(K)$.*

Demostración. Como $E \in \mathcal{M}_K$, existe una sucesión $(E_n)_n$ en $C(V)$ tal que $E_n \to E$. Para efectos de la demostración, supongamos que $E \neq K$ y sea $\mu : C(X) \to [0, \mu(X)]$ una función de Whitney. Definamos $t_0 = \mu(E)$. Es claro que $0 \leq t_0 < \mu(K)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 26, existe $\eta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$ entonces $H(A, B) < \varepsilon$. Tomemos un número $t_0 < t < \mu(K)$ tal que $t - t_0 < \eta$. Ya que la sucesión de subcontinuos $([-m, m])_m$ de $C(V)$ converge a X y $E_n \in C(V)$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \subset [-m_n, m_n]$ y $\mu([-m_n, m_n]) > t$. Como $\mu(E_n) \to t_0$, podemos suponer que $\mu(E_n) < t$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomando un arco ordenado de E_n a $[-m_n, m_n]$, es posible encontrar un subcontinuo L_n de V tal que $E_n \subset L_n$ y $\mu(L_n) = t$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que la sucesión $(L_n)_n$ converge a un subcontinuo L de X. Luego, $t = \mu(L_n) \to \mu(L)$. Por tanto, $\mu(L) = t$. Afirmamos que:

1) $E \subsetneq L$.

Para probar 1) notemos que, como cada E_n está contenido en L_n, al tomar el límite, $E \subset L$. Si $E = L$, entonces $t_0 = \mu(E) = \mu(L) = t$, lo cual contradice el hecho de que $t_0 < t$. Luego $E \subsetneq L$.

Tenemos de lo anterior, que $E \subsetneq L$ y $\mu(L) - \mu(E) = t - t_0 < \eta$. Por tanto $H(E, L) < \varepsilon$. Ahora bien, como E es un elemento maximal de $\mathcal{M}_K$, L no puede estar contenido en K. Entonces, por el Teorema 79, $E \in SB(K)$. ∎

En el siguiente teorema, resolvemos el caso de un minimal propio en la semifrontera.

Teorema 152 *Supongamos que $X = V \cup R$ es una compactación métrica de la recta real $V = (-\infty, \infty)$, con residuo conexo y no degenerado R. Sea K un subcontinuo propio y no degenerado de R tal que $K \notin \mathcal{M}_K$. Si $SB(K)$ posee sólamente un elemento minimal propiamente contenido en K entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$.*

Demostración. Supongamos que no hay ningún triodo $T \in B_\varepsilon(K)$. Supongamos también que E es el único elemento minimal de $SB(K)$ y que $E \neq K$. Fijemos un elemento $e \in E$ y sea M un elemento maximal en $\mathcal{M}_K$ tal que $e \in M$. Debido a que $K \notin \mathcal{M}_K$, M es un subconjunto propio de K. Más aún, por el Teorema 151, $M \in SB(K)$. Luego, $E \subset M$.

Tomemos $M' \in C(K)$ tal que $M \subsetneq M' \subsetneq K$ y $H(M', K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijemos un punto $x \in K - M'$ y sea N un elemento maximal en $\mathcal{M}_K$, tal que $x \in N$. Entonces, $x \in N - M'$. Como N es maximal en $\mathcal{M}_K$, $N \in SB(K)$, según el Teorema 151. Luego, $E \subset N$. Ahora bien, como N y M son elementos maximales distintos en $\mathcal{M}_K$, existe un punto $m \in M - N$. Entonces, $m \notin E$. Consideraremos ahora los casos en que $N \cap M'$ es conexo, y $N \cap M'$ es disconexo.

Supongamos primero que $N \cap M'$ es disconexo. Si $N \cap M'$ posee al menos tres componentes entonces es fácil construir un triodo T con corazón M', tal que $T \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(M')$ y entonces $T \in B_\varepsilon(K)$. Supongamos, por tanto, que $N \cap M'$ posee justo dos componentes C y D. Entonces una de ellas, por ejemplo C, contiene a E. Sea $N' \in C(N)$ tal que $C \subsetneq N'$ y $N' \cap D = \varnothing$.

Debido a que C es una componente de $N \cap M'$, que está contenida propiamente en el subconjunto conexo N' de N, tenemos que $N' - M' \neq \varnothing$. Más aún, $N' \cap M' = C$. Para ver esto notemos que, por un lado es claro que $C \subset N' \cap M'$. Tomemos ahora un punto $y \in N' \cap M'$ y, supongamos que $y \notin C$. Entonces, $y \in N \cap M' = C \cup D$. Esto implica que $y \in D$, pues $y \notin C$. Luego, $y \in N' \cap D$, lo cual es absurdo. Por tanto, $N' \cap M' \subset C$. De esta manera, $N' \cap M' = C$. Esto muestra que $N' \cap M'$ es conexo.

En vista de que $N' - M' \neq \varnothing$, podemos fijar un punto $n \in N' - M'$. Por el Teorema 138, existe un subcontinuo E' de R tal que

a) $E \subsetneq E'$,

b) $E' - K$ es no vacío,

c) $E' \cap K$ es conexo y está en $SB(K)$,

d) $H(K, K \cup E') < \varepsilon$,

e) $n, m \notin E'$.

Definamos

$$T = M' \cup N' \cup E'$$

y

$$A = (E' \cap K) \cup (M' \cap N').$$

Como $E'\cap K \in SB(K)$, $E \subset E'\cap K$. Por tanto $E'\cap K$ es un conexo que intersecta tanto a M' como a N'. De aquí se deduce que T es un continuo. Afirmamos que:

1) $H(T,K) < \varepsilon$.

En efecto, por un lado $T \subset K \cup E' \subset N(\varepsilon, K)$ y, por otro, $K \subset N(\varepsilon, M') \subset N(\varepsilon, T)$, ya que $M' \subset T$. Por tanto $H(T,K) < \varepsilon$. Esto prueba 1). Afirmamos ahora que:

2) T es un triodo.

En efecto, como $E \subset C = M' \cap N'$ y $E \subset E' \cap K$, A es conexo. Además, en vista de que $A \subset K$,

$$T - A = (M' - A) \cup (N' - A) \cup (E' - K).$$

Ahora bien, debido a que $m \in M - N$, $M \subset M'$, $N' \subset N$ y $m \notin E'$, resulta que $m \in M' - A$. Como $n \in N' - M'$ y $n \notin E'$, sucede que $n \in N' - A$. Entonces $M' - A$, $N' - A$ y $E' - K$ son no vacíos. Afirmamos que:

2.1) los conjuntos $M' - A$, $N' - A$ y $E' - K$ están mutuamente separados.

En efecto, como $C = M' \cap N' \subset A$,

$$Cl_X(M' - A) \cap (N' - A) \subset M' \cap (N' - A) = \emptyset$$

y

$$(M' - A) \cap Cl_X(N' - A) \subset (M' - A) \cap N' = \emptyset.$$

Por tanto, los conjuntos $M' - A$ y $N' - A$ están mutuamente separados. Ahora bien, como $M' \subset K$,

$$Cl_X(M' - A) \cap (E' - K) \subset M' \cap (E' - K) \subset K \cap (E' - K) = \emptyset.$$

Debido a que $E' \cap M' \subset E' \cap K \subset A$

$$(M' - A) \cap Cl_X(E' - K) \subset (M' - A) \cap E' = \emptyset.$$

Esto muestra que los conjuntos $M' - A$ y $E' - K$ están mutuamente separados. De manera similar se prueba que los conjuntos $N' - A$ y $E' - K$ están mutuamente separados. Esto prueba 2.1).

Tenemos, de lo anterior, que T es un triodo en $B_\varepsilon(K)$. Esta contradicción concluye la prueba en el caso en que $N \cap M'$ es disconexo. Supongamos ahora que $N \cap M'$ es conexo. Por el Teorema 138, existe un subcontinuo E' de R tal que

a) $E \subsetneq E'$,

b) $E' - K$ es no vacío,

c) $E' \cap K$ es conexo y está en $SB(K)$,

d) $H(K, K \cup E') < \varepsilon$,

e) $x, m \notin E'$.

Definamos

$$T = M' \cup N \cup E'$$

y

$$A = (E' \cap K) \cup (M' \cap N).$$

Procediendo como en 1) y 2), resulta que T es un triodo con corazón A, tal que $T \in B_\varepsilon(K)$. Esta contradicción termina la prueba del teorema. ∎

Ahora mostraremos que, cuando $X = V \cup R$ es una compactación métrica del espacio $V = (-\infty, \infty)$ con residuo conexo y no degenerado R, los subcontinuos propios y no degenerados, K, de R que nos van a interesar, no son elementos de $\mathcal{M}_K$ y, además, los elementos minimales de su semifrontera, son subconjuntos propios de K.

Teorema 153 *Supongamos que $X = V \cup R$ y $Y = W \cup S$ son compactaciones métricas de los espacios $V = W = (-\infty, \infty)$, con residuos conexos y no degenerados R y S, respectivamente. Supongamos, además, que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos y que $h : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo. Sean R_1 y R_2 los respectivos residuos de las compactaciones $Cl_{C(X)}([0, \infty))$ de $[0, \infty) \subset V$ y $Cl_{C(X)}((-\infty, 0])$ de $(-\infty, 0] \subset V$. Si $w \in W$ es tal que*

$$K = h(\{w\}) \in C(R) - (F_1(R) \cup \{R, R_1, R_2\})$$

entonces:

1. $K \notin \mathcal{M}_K$.

2. *los elementos minimales en $SB(K)$, son subconjuntos propios de K.*

Demostración. Para ver que 1. supongamos, por el contrario, que $K \in \mathcal{M}_K$. Entonces existe una sucesión $(K_n)_n$ en $C(Y)$ tal que $K_n \to K$. Afirmamos que:

1) $K \in C(R_1) \cup C(R_2)$.

En efecto, como el conjunto

$$\mathcal{U} = \{A \in C(X) : A \subset X - \{0\}\},$$

es abierto en $C(X)$ y tiene a K, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(K) \subset \mathcal{U}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \in B_\delta(K)$ para cada $n \geq N$. Entonces, $K_n \subset (X - \{0\}) \cap Y = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ para cada $n \geq N$. Por tanto, es posible conseguir una subsucesión $(K_{n_m})_m$ de $(K_n)_n$ tal que $K_{n_m} \subset (-\infty, 0)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, o bien, $K_{n_m} \subset (0, \infty)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En el primer caso, $(K_{n_m})_m$ es una sucesión tal que $K_{n_m} \subset Cl_{C(X)}((-\infty, 0]) = (-\infty, 0] \cup R_2$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, $K \subset Cl_{C(X)}((-\infty, 0])$. Como $K \cap Y = \emptyset$, resulta que $K \subset R_2$. De aquí que $K \in C(R_2)$. En el segundo caso, procediendo de manera similar, resulta que $K \in C(R_1)$. Esto prueba 1).

Supongamos que $K \in C(R_1)$. Entonces, por hipótesis, $K \in C(R_1) - \{R_1\}$. Por tanto, existe un punto $r \in R_1 - K$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $K \subset U$ y $r \notin U$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, K) \subset U$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $K_n \in B_\varepsilon(K)$. Entonces, $K_n \subset N(\varepsilon, K) \subset U$ para cada $n \geq N$. Consideremos la componente, C, de U que contiene a K.

Como Y es conexo en pequeño en w resulta, por el Teorema 35, que $C(Y)$ es conexo en pequeño en $\{w\}$. Luego, $C(X)$ es conexo en pequeño en K y entonces, por el Teorema 37, existe $M \geq N$ tal que $K_n \subset C$ para cada $n \geq M$. Entonces, C es un conjunto conexo que intersecta a R_1 y a $(0, \infty)$. Luego $R_1 \subset C$ y, en particular, $r \in C \subset U$. Esto es absurdo. Si suponemos ahora que $K \in C(R_2)$ entonces, un razonamiento similar, produce otra contradicción. De esta manera, 1. es cierto.

Supongamos ahora que 2. no es cierto. Entonces $m(K) = \{K\}$. Tomemos un punto $a \in K$. Sea M un elemento maximal de $\mathcal{M}_K$ tal que $a \in M$. Por el Teorema 151, $M \in SB(K)$. Luego $M = K$. Entonces $K \in \mathcal{M}_K$. Debido a que esto contradice 1., 2. es cierto. Esto termina la prueba del teorema. ∎

6.4.3 El Teorema.

Estamos por fin en condiciones de probar que las compactaciones métricas de la recta real que tienen residuo conexo y no degenerado, están C-determinadas.

Teorema 154 *Las compactaciones métricas del espacio* $(-\infty,\infty)$ *que tienen residuo conexo y no degenerado están C-determinadas.*

Demostración. Sean $X = R\cup V$ y $Y = S\cup W$ dos compactaciones métricas de los espacios $V = W = (-\infty,\infty)$, con residuos conexos y no degenerados R y S, respectivamente. Supongamos que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos y sea $h : C(Y)\to C(X)$ un homeomorfismo.

Consideremos los respectivos residuos R_1 y R_2 de las compactaciones $Cl_X([0,\infty))$ de $[0,\infty)\subset V$ y $Cl_X((-\infty,0])$ de $(-\infty,0]\subset V$. Afirmamos que:

1) si $w\in W$ entonces no existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $h(\{w\})\in\mathcal{D}-o(\mathcal{D})$.

En efecto, sea $w\in W$ y definamos $K = h(\{w\})$. Si existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K\in\mathcal{D}-o(\mathcal{D})$, entonces $\mathcal{D}' = h^{-1}(\mathcal{D})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{w\}\in\mathcal{D}'-o(\mathcal{D}')$. Ahora bien, como $w\in W$, existe $\varepsilon>0$ tal que $N(\varepsilon,\{w\})\subset W$. Más aún, por el Teorema 96, existe un triodo $T\in B_\varepsilon(\{w\})$. Entonces $T\subset N(\varepsilon,\{w\})\subset W$ y, de esta manera, T es un triodo contenido en una recta. Esto es absurdo, así que 1) se cumple. Afirmamos ahora que:

2) $h(F_1(W))\subset F_1(V)\cup[C(R)-F_1(R)]\cup\{X\}$.

Para ver esto, supongamos que 2) no es cierto y tomemos un punto $w\in W$. Hagamos $K = h(\{w\})$. Entonces $K\in F_1(R)$ o bien K es un subcontinuo propio y no degenerado de X que intersecta a V.

Como $C(Y)$ es localmente conexo en $\{w\}$, tenemos que $C(X)$ es localmente conexo en K. Debido a que R es el residuo de la compactación, $C(X)$ no es localmente conexo en ninguno de los puntos de $F_1(R)$. Luego $K\notin F_1(R)$ y, de esta manera, K es un subcontinuo propio y no degenerado de X que intersecta a V.

Si $V \subset K$ entonces $X = Cl_X(V) \subset K$, así que $K = X$. Como esto es absurdo, V no está contenido en K. Por tanto, existen $a, b \in V$ tales que $b < a$ y $[b, a] \cap K = \varnothing$. Definamos $V_1 = [a, \infty)$, $V_2 = (-\infty, b]$ y $X_0 = V_1 \cup R \cup V_2$. Claramente K es un subcontinuo no degenerado de X_0 tal que $K \cap (V_1 \cup V_2) \neq \varnothing$ y $a, b \notin K$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 129, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto contradice 1), así que 2) se cumple.

Puesto que $\{X\}$ es un punto aislado del espacio $F_1(V) \cup [C(R) - F_1(R)] \cup \{X\}$, se sigue que:

3) $h\,(F_1(W)) \subset F_1(V) \cup [C(R) - F_1(R)]$.

Probaremos ahora que:

4) $h\,(F_1(W)) \subset F_1(V) \cup \{R, R_1, R_2\}$.

Para ver esto, supongamos que 4) no es cierto y tomemos un punto $w \in W$. Hagamos $K = h(\{w\})$. Entonces $K \in C(R) - (F_1(R) \cup \{R, R_1, R_2\})$. Afirmamos que:

4.1) $C(X) - \{K\}$ es conexo por trayectorias.

En efecto, por el Teorema 34, $C(Y) - \{\{w\}\}$ es conexo por trayectorias. Luego, $C(X) - \{h\,(\{w\})\} = C(X) - \{K\}$ es conexo por trayectorias. Esto prueba 4.1).

Definamos

$$\mathcal{M}_K = \{A \in C(K) : \text{existe una sucesión } (A_n)_n \text{ en } C(V) \text{ tal que } A_n \to A\}.$$

Por el Teorema 153, $K \notin \mathcal{M}_K$ y, además, los elementos minimales en $SB(K)$ están contenidos propiamente en K. Ahora bien, de acuerdo con los Teoremas 146, 148 y 152, o bien existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$, o bien para cada $\varepsilon > 0$, existe un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$. De acuerdo con la parte 1), el primer caso no se cumple. Supongamos, por tanto, que es posible encontrar triodos arbitrariamente cercanos a K.

Sea $\delta > 0$ tal que $N(\delta, \{w\}) \subset W$. Por la continuidad de h^{-1} existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$h^{-1}(B_\varepsilon(K)) \subset B_\delta(\{w\}).$$

Tomemos un triodo $T \in B_\varepsilon(K)$. Por el Teorema 48, existe una 3-celda $\mathcal{T}$ en $C(X)$ tal que $T \in \mathcal{T} \subset B_\varepsilon(K)$. Entonces $\mathcal{T}_0 = h^{-1}(\mathcal{T})$ es una 3-celda en $C(Y)$ tal que

$$\mathcal{T}_0 \subset h^{-1}(B_\varepsilon(K)) \subset B_\delta(\{w\}).$$

Definamos $T_0 = \bigcup \mathcal{T}_0$. Entonces T_0 es un subcontinuo de Y. Tomemos un punto $v \in T_0$ y sea $L \in \mathcal{T}_0$ tal que $v \in L$. Entonces, $L \in B_\delta(\{w\})$, por lo que $L \subset N(\delta, \{w\}) \subset W$, de donde, $v \in W$. Esto significa que T_0 es un subcontinuo de W. Ahora bien, es claro que $\mathcal{T}_0 \subset C(T_0)$, así que el hiperespacio $C(T_0)$ contiene una 3-celda. Luego, T_0 contiene un triodo. Dado que $T_0 \subset W$, resulta entonces que W contiene un triodo. Como esto es absurdo, 4) es cierto.

Afirmamos ahora que:

5) $h(F_1(W)) \subset F_1(V)$.

Para ver 5), supongamos primero que R_1 es degenerado. Entonces, $R = R_1 \cup R_2 = R_2$. Más aún, de acuerdo con 3), $h(F_1(W)) \cap F_1(R) = \varnothing$. Luego, por 4)

$$h(F_1(W)) \subset F_1(V) \cup \{R\}.$$

Puesto que $\{R\}$ es un punto aislado del espacio $F_1(V) \cup \{R\}$, se sigue que $h(F_1(W)) \subset F_1(V)$. Si R_2 es degenerado, siguiendo un razonamiento similar, obtenemos que $h(F_1(W)) \subset F_1(V)$.

Supongmos ahora que R_1 y R_2 son no degenerados. Entonces el conjunto $\{R, R_1, R_2\}$ es aislado con respecto al espacio $F_1(V) \cup \{R, R_1, R_2\}$. Luego, $h(F_1(W)) \subset F_1(V)$. Esto prueba 5).

Tomando cerraduras en 5), obtenemos que

$$Cl_{C(X)}(h(F_1(W))) \subset Cl_{C(X)}(F_1(V)).$$

Ahora bien:

$$l_{C(X)}(h(F_1(W))) = h\left(Cl_{C(Y)} F_1(W))\right) = h(F_1(W) \cup F_1(S)) = h(F_1(Y))$$

$$Cl_{C(X)}(F_1(V)) = F_1(V) \cup F_1(B) = F_1(X).$$

Por tanto,

6) $h(F_1(Y)) \subset F_1(X)$.

Como $h^{-1} : C(X) \to C(Y)$ también es un homeomorfismo, tenemos por argumentos análogos, que:

7) $h^{-1}(F_1(X)) \subset F_1(Y)$.

O, equivalentemente, $F_1(X) \subset h(F_1(Y))$. Entonces $h(F_1(Y)) = F_1(X)$, así que, $F_1(Y)$ es homeomorfo a $F_1(X)$. Por tanto, Y es homeomorfo a X. ∎

Capítulo 7

Arco-continuos Indescomponibles.

7.1 Introducción.

En el Capítulo 2, probamos que los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único (ver Teorema 63). En 1997, Sergio Macías estudió la clase de los continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos y probó que dichos continuos están C-determinados (ver [24, Teorema 3]). En este capítulo probaremos que dichos continuos tienen hiperespacio único. Para simplificar la escritura, consideremos la siguiente definición.

Definición 155 *Un continuo indescomponible X es un* ***arco-continuo indescomponible*** *si todos los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos*

7.2 El Teorema.

Como mencionamos, Sergio Macías probó el siguiente:

Teorema 156 *[24, Teorema 3] Los arco-continuos indescomponibles están C-determinados.*

Como mostró Sam B. Nadler, Jr., el arco y la curva cerrada simple, son los únicos continuos cuyo hiperespacio de subcontinuos se puede encajar en el plano.

Teorema 157 (Nadler) *[26, Teorema 3.9] Si X es un continuo entonces $C(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Recordemos que si K es un subcontinuo de un continuo X entonces

$$C(K, X) = \{A \in C(X) : K \subset A\}.$$

Teorema 158 *Los arco-continuos indescomponibles tienen hiperespacio único.*

Demostración. Sean X un arco-continuo indescomponible y Y un continuo tales que $C(Y)$ es homeomorfo a $C(X)$. Supongamos que $h : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo. Afirmamos que:

1) Y es atriódico.

En efecto, si Y contiene un triodo entonces $C(Y)$ y como consecuencia también $C(X)$, contienen una 3-celda. Luego X contiene un triodo (Teorema 49). Esto contradice el hecho de que todos los subcontinuos propios y no degenerados de X, son arcos. Por tanto Y es atriódico. Afirmamos ahora que:

2) $X \notin h\left(F_1(Y)\right)$.

Para probar 2) tomemos un punto $y \in Y$. Por el Teorema 34, $C(Y) - \{\{y\}\}$ es conexo por trayectorias, así que $C(X) - \{h(\{y\})\}$ es conexo por trayectorias. Ahora bien, como X es indescomponible, $C(X) - \{X\}$ no es conexo por trayectorias (Teorema 58). Por tanto $h(\{y\}) \neq X$ y, así, 2) se cumple. Afirmamos ahora que:

3) para cada $y \in Y$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un arco $A \in B_\varepsilon\left(h\left(\{y\}\right)\right)$ tal que A y $h\left(\{y\}\right)$ están contenidos en diferentes composantes de X.

En efecto, tomemos un punto $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ y definamos $K = h(\{y\})$. Debido a que X es un arco-continuo indescomponible y a que por 2), $X \notin h\left(F_1(Y)\right)$, resulta que K es un singular o un arco. Supongamos que $K \in F_1(X)$. Entonces existe un punto $x \in X$ tal que $K = \{x\}$. Como las composantes de X son densas y X tiene un número infinito de ellas (Teorema 43), existe un punto $a \in B_\varepsilon(x)$ tal que K y $\{a\}$ están contenidos en diferentes composantes de X. Sea A un subcontinuo propio de X tal que $\{a\} \subsetneq A \in B_\varepsilon(K)$. Es claro que A es un arco en X tal que A y K están contenidos en diferentes composantes de X y $A \in B_\varepsilon(K)$.

Supongamos ahora que $K \notin F_1(X)$. Entonces K es un arco ab en X. Afirmamos que:

> 3.1) no existe un arco ce en X tal que, en el orden natural del arco ce, $c < a < b < e$.

Para ver 3.1), supongamos que existe un arco ce en X tal que $c < a < b < e$. Entonces existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K = ab \in [\mathcal{D} - o(\mathcal{D})]$ (a saber $\mathcal{D} = C(ce)$). Luego $\mathcal{D}' = h^{-1}(\mathcal{D})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}' - o(\mathcal{D}')$. Entonces, por el Teorema 96, existen triodos arbitrariamente cercanos a $\{y\}$. Esto contradice 1) y prueba 3.1).

De acuerdo con 3.1), cada $B \in C(K, X) - \{X\}$ satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

i) $B = ab_0$ para algún punto $b_0 \in B$ tal que, en el orden natural del arco ab_0, $b \leq b_0$.

ii) $B = a_0b$ para algún punto $a_0 \in B$ tal que, en el orden natural del arco a_0b, $a_0 \leq a$.

Supongamos, sin perder generalidad, que cada elemento de $C(K, X) - \{X\}$ satisface i). Sea $\mu : C(X) \to I$ una función de Whitney normalizada. Definamos $t_0 = \mu(K)$. Es claro que $0 < t_0 < 1$.

Ahora bien, X tiene un número infinito de composantes y cada una de ellas es densa en X. Por tanto, para cada natural n, existe $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ tal que $\{a\}$ y $\{a_n\}$ están contenidos en diferentes composantes de X. Tomemos, para cada natural n, un subcontinuo A_n de X tal que $a_n \in A_n$ y $\mu(A_n) = t_0$. Supongamos, sin perder generalidad, que $A_n \to A_0$ para algún $A_0 \in C(X)$. Entonces $t_0 = \mu(A_n) \to \mu(A_0)$, de donde $\mu(A_0) = t_0$. Como $0 < t_0 < 1 = \mu(X)$ y todos los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos, A_0 es un arco en X. Afirmamos que:

> 3.2) $a \in A_0$ y, además, A_0 y K son comparables.

En efecto, debido a que $a_n \to a$, $A_n \to A_0$ y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a \in A_0$. Supongamos ahora que A_0 y K no son comparables. Definamos $B = A_0 \cup K$. Como $a \in A_0 \cap K$, B es un subcontinuo de X. Ahora bien, debido a que X es indescomponible y al hecho de que A_0 y K no son comparables, B es un subcontinuo propio de X. Entonces $B \in C(K,X) - \{X\}$ y por i), $B = ab_0$ para algún punto $b_0 \in B$ tal que, en el orden natural del arco ab_0, $b \leq b_0$. Como consecuencia de esto, y del hecho de que $a \in A_0$, resulta que $A_0 \subset K$ o $K \subset A_0$. Esto es un absurdo, y así, 3.2) se cumple.

En vista de 3.2) y el hecho de que $\mu(A_0) = t_0 = \mu(K)$, resulta que $A_0 = K$. Esto significa que $A_n \to K$, así que existe $A_n \in B_\varepsilon(K)$. Puesto que $\mu(A_n) = t_n < 1 = \mu(X)$, A_n es un arco en X. Además, por la elección de A_n, A_n y K están contenidos en diferentes composantes de X. Esto prueba 3). Afirmamos ahora que:

4) $h(Y) = X$.

En efecto si, por el contrario, $h(Y) \neq X$ entonces existe un subcontinuo propio Y_0 de Y tal que $h(Y_0) = X$. Tomemos un punto $y \in Y - Y_0$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \cap Y_0 = \emptyset$. Por la continuidad de h^{-1} en $h(\{y\})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h^{-1}(B_\varepsilon(h(\{y\}))) \subset B_\delta(\{y\})$. De acuerdo con 3), es posible encontrar un arco $A \in B_\varepsilon(h(\{y\}))$ tal que A y $h(\{y\})$ están contenidos en diferentes composantes de X. Notemos que $h^{-1}(A) \in B_\delta(\{y\})$, así que $h^{-1}(A) \cap Y_0 = \emptyset$.

Como X es indescomponible $C(X) - \{X\}$ no es conexo por trayectorias. Luego $C(Y) - \{h^{-1}(X)\} = C(Y) - \{Y_0\}$ no es conexo por trayectorias. Afirmamos que:

4.1) $\{y\}$ y $h^{-1}(A)$ se encuentran en la misma componente por trayectorias de $C(Y) - \{Y_0\}$.

Para ver esto, sean $\alpha, \beta : I \to C(Y)$ arcos ordenados de $\{y\}$ a Y y de $h^{-1}(A)$ a Y, respectivamente. Entonces la función $\gamma : I \to C(Y)$ definida como

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una trayectoria en $C(Y)$ de $\{y\}$ a $h^{-1}(A)$. Como $y \notin Y_0$ y $h^{-1}(A) \cap Y_0 = \varnothing$ resulta que $Y_0 \notin \gamma(I)$. Esto prueba 4.1). Como consecuencia inmediata, resulta que:

4.2) $h(\{y\})$ y A se encuentran en la misma componente por trayectorias de $C(X) - \{X\}$.

Entonces existe una trayectoria $\chi : I \to C(X) - \{X\}$ de $h(\{y\})$ a A. Definamos $\Lambda = \chi(I)$. Como A y $h(\{y\})$ están contenidos en diferentes composantes de X, resulta que $\bigcup \Lambda = X$. Luego, por el Teorema 147, $X \in \Lambda$ lo cual es un absurdo. Esto prueba 4).

Ahora bien, debido a que X es indescomponible, $C(X) - \{X\}$ no es conexo por trayectorias (Teorema 58). Luego, de acuerdo con 4), $C(Y) - \{h^{-1}(X)\} = C(Y) - \{Y\}$ no es conexo por trayectorias. Entonces, utilizando nuevamente el Teorema 58

5) Y es indescomponible.

Afirmamos ahora que:

6) Y es un arco-continuo indescomponible.

Para probar 6), tomemos un subcontinuo propio y no degenerado A de Y. Como $C(A)$ es conexo por trayectorias, $\Lambda = h(C(A))$ es un subconjunto conexo por trayectorias de $C(X)$. Si $\bigcup \Lambda = X$ entonces, por el Teorema 147, $X \in \Lambda$ así que $X = h(B)$ para algún $B \in C(A)$. De acuerdo con 4) y el hecho de que h es una función inyectiva, resulta que $B = Y$. Entonces $Y = A$, lo cual es un absurdo. Por tanto $\bigcup \Lambda \neq X$ y, si hacemos $X_0 = \bigcup \Lambda$, resulta que X_0 es un subcontinuo propio de X. Entonces $X_0 \in F_1(X)$, o bien X_0 es un arco en X.

Notemos que $h(C(A)) = \Lambda \subset C(\bigcup \Lambda) = C(X_0)$ así que

$$C(A) \subset h^{-1}(C(X_0))$$

y, de esta manera, $X_0 \notin F_1(X)$. Por tanto X_0 es un arco en X. Luego $C(X_0)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$. Consecuentemente $h^{-1}(C(X_0))$ se puede encajar en

$\mathbb{R}^2$, y de acuerdo con la contención de arriba, $C(A)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$. Entonces A es un arco o una curva cerrada simple, según el Teorema 157.

Supongamos que A es una curva cerrada simple y fijemos un punto $a \in A$. Sea κ la composante de Y que contiene a A. Por la densidad de κ, existe un punto $b \in \kappa$ tal que $b \notin A$. Es claro que $a, b \in \kappa$, así que existe un subcontinuo propio C de Y tal que $a, b \in C$. Luego $A \cup C$ es un subcontinuo propio y no degenerado de Y, por lo que $A \cup C$ es un arco o una curva cerrada simple en Y, que contiene a la curva cerrada simple A. Entonces $A \cup C = A$ y en particular $b \in A$. Como esto es absurdo, A no es una curva cerrada simple en Y. Por tanto A es un arco en Y y, así 6) se cumple.

Por 6), tenemos que Y es un continuo arco-continuo idescomponible tal que, por hipótesis, $C(Y)$ es homeomorfo a $C(X)$. Entonces, por el Teorema 156, Y es homeomorfo a X. ∎

Capítulo 8

Abanicos Suaves y Z-conjuntos.

8.1 Introducción.

En el presente capítulo estudiaremos el problema de si los abanicos suaves tienen hiperespacio único. Empezaremos con una serie de definiciones y resultados básicos sobre abanicos suaves. Luego, en la siguiente sección, utilizaremos la noción de Z-conjunto, así como el teorema de Toruńczyk, para posteriormente probar que los abanicos suaves no tienen hiperespacio único. A lo largo de este capítulo, si X es un abanico y $x, y \in X$ entonces xy representará al arco en X con extremos x y y, cuando $x \neq y$ y $xy = \{x\}$ si $x = y$. Por tanto, xy y yx denotan el mismo conjunto

Definición 159 *Sean X un continuo conexo por trayectorias, $\mathfrak{r}$ un número cardinal y p un punto de X. Entonces p es un **punto de orden** $\mathfrak{r}$ **en** X, si p es el punto extremo común de $\mathfrak{r}$ arcos en X que se intersectan justo en p, y $\mathfrak{r}$ es mínimo con esta propiedad.*

Por ejemplo, si X es un n-odo simple con vértice p entonces p es un punto de orden n en X. Si p es un punto de orden $\mathfrak{r}$ en X entonces escribimos $ord_p X = \mathfrak{r}$.

Definición 160 *Sean X un continuo conexo por trayectorias y p un punto en X. Entonces:*

1. *p es un **punto extremo de** X si $ord_p X = 1$.*

2. *p es un **punto de ramificación de** X si $ord_p X \geq 3$.*

El conjunto de los puntos extremos de un continuo conexo por trayectorias X, se denotará por $E(X)$.

8.1.1 Abanicos Suaves.

En esta subsección, presentamos la definición de un abanico suave así como un teorema de caracterización de los abanicos suaves.

Definición 161 *Un dendroide (ver Definición 51) X es un* ***abanico*** *si X tiene solamente un punto de ramificación, llamado el* ***vértice*** *de X.*

Si t es el vértice de un abanico X entonces, como se comenta en [7, p. 6],

$$X = \bigcup_{e\in E(X)} te.$$

Definición 162 *Un abanico X con vértice t es* ***suave*** *si para cualquier sucesión $(a_n)_n$ en X tal que $a_n \to a \in X$, se sigue que la sucesión de arcos $(ta_n)_n$ es convergente y $ta_n \to ta$.*

Si $X = \bigcup_{e\in E(X)} te$ es un abanico con vértice t entonces decimos que dos puntos a y b están **en la misma pata** de X, si existe un punto extremo e de X tal que $ab \subset te$.

8.2 Z-conjuntos.

En el artículo [12], Sam B. Nadler Jr. y Carl Eberhart probaron el siguiente resultado.

Teorema 163 *[12, Corolario 3.3] Los abanicos suaves están C-determinados.*

Es natural preguntarse si la clase de los abanicos suaves tiene hiperespacio único. En este capítulo responderemos dicha pregunta, pero antes escribiremos una serie de resultados y definiciones que utilizaremos más adelante.

Definición 164 *El* ***cubo de Hilbert*** *se define como el espacio $Q = \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, en donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [0,1]$.*

Definición 165 *Un continuo X es* ***homogéneo*** *si para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(p) = q$.*

Teorema 166 *[23] El cubo de Hilbert Q es homogéneo.*

Recordemos que si P es un subcontinuo de un continuo X entonces $C(P,X)$ denota el conjunto de los subcontinuos de X que contienen a P. Algunas veces el conjunto $C(P,X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q y, una manera de hacer ver esto es utilizando el teorema de Toruńczyk. Dicho teorema está basado en las nociones de retracto absoluto y de Z-funciones, por lo que a continuación las definimos.

Definición 167 *Un subconjunto A de un espacio X es un* **retracto** *de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Un espacio métrico X es un* **retracto absoluto** *(abreviado AR) si cada vez que X sea homeomorfo a un subconjunto cerrado B de un espacio métrico Y entonces resulta que B es un retracto de Y.*

En el artículo [11] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 168 *[11, Teorema 2] Para cada $P \in C(X)$, $C(P,X)$ es un AR.*

Si (Y,ρ) es un espacio métrico con métrica ρ, y $f,g : Y \to Y$, consideraremos la métrica

$$D(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

La función identidad en Y será denotada por 1_Y. Diremos que una función $g : Y \to Y$ se puede aproximar por funciones $f : Y \to Y$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe una función $f : Y \to Y$ tal que $D(f,g) < \varepsilon$.

Definición 169 *Un subconjunto cerrado A de un continuo X es un* **Z-conjunto** *en X, si 1_X se puede aproximar por funciones $f : X \to X$ tales que $f(X) \cap A = \varnothing$. Una función $f : X \to X$ es una* **Z-función,** *si $f(X)$ es un Z-conjunto en X.*

En otras palabras, un subconjunto cerrado A de un continuo X es un Z-conjunto en X, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f_\varepsilon : X \to X$ tal que $f_\varepsilon(X) \cap A = \varnothing$ y $D(f_\varepsilon, 1_X) < \varepsilon$. El siguiente resultado muestra que los subconjuntos cerrados de Z-conjuntos, son Z-conjuntos.

Teorema 170 *Supongamos que A es un Z-conjunto en X. Si B es un subconjunto cerrado de A, entonces B es un Z-conjunto en X.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es un Z-conjunto en X, existe una función continua $f : X \to X$ tal que $D(f, 1_X) < \varepsilon$ y $f(X) \cap A = \emptyset$. Entonces $f(X) \cap B = \emptyset$ y $D(f, 1_X) < \varepsilon$ así que B es un Z-conjunto en X. ∎

Teorema 171 (Teorema de Toruńczyk) *[29] Supongamos que el espacio métrico y compacto X, es un AR tal que 1_X se puede aproximar por Z-funciones. Entonces X es homeomorfo al cubo de Hilbert Q.*

A lo largo de este capítulo, si los espacios X y Y son homeomorfos, escribiremos $X \approx Y$. Recordemos que un *arco libre*, en un continuo X, es un arco $\alpha \subset X$ tal que el interior de α en X es no vacío. El teorema de Toruńczyk sirve para dar una prueba muy elegante del importante teorema de Curtis y Schori, que enunciamos a continuación (ver [29, p. 39]).

Teorema 172 (Teorema de Curtis-Schori) *[4] Si X es un continuo localmente conexo y sin arcos libres entonces $C(X) \approx Q$.*

Curtis y Schori también probaron el siguiente resultado.

Teorema 173 *[5] Sean X un continuo localmente conexo y $P \in C(X)$. Si $X - P$ es un subconjunto no vacío de X y sin arcos libres, entonces $C(P, X) \approx Q$.*

A continuación, enunciaremos otros criterios bajo los cuales $C(p, X)$ es un cubo de Hilbert.

Teorema 174 *Sea X un continuo. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existen $A \in C(p, X)$ y $f : C(p, X) \to C(p, A)$ tales que $C(p, A)$ es un Z-conjunto en $C(p, X)$ y $D\left(f, 1_{C(p,X)}\right) < \varepsilon$. Entonces $C(p, X) \approx Q$.*

Demostración. Por el Teorema 168, $C(p, X)$ es un AR. Más aún, de acuerdo con las hipótesis del teorema, la identidad $1_{C(p,X)}$ se puede aproximar por Z-funciones. Por tanto, según el teorema de Toruńczyk, $C(p, X) \approx Q$. ∎

Definición 175 *Sean X un continuo y $A \in C(p, X)$. Decimos que A **cubre a p** si*

$$\{p\} \in Int_{C(p,X)}(C(p, A)).$$

Por tanto $A \in C(p, X)$ no cubre a p, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $B \in C(p, X)$ tal que $B \not\subseteq A$ y $H(B, \{p\}) < \varepsilon$.

Teorema 176 (Eberhart) *[11, Teorema 6] Supongamos que la identidad 1_X puede aproximarse por funciones $f : X \to X$ tales que $f(p) = p$ y $f(X)$ no cubre a p. Entonces $C(p, X) \approx Q$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe una función $f : X \to X$ tal que $f(p) = p$, $A = f(X)$ no cubre a p y $D(f, 1_X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f(p) = p$, la función inducida $C(f)$ de f en $C(X)$, manda $C(p, X)$ en $C(p, A)$. Es decir,

$$\tilde{f} = C(f)_{|C(p,X)} : C(p, X) \to C(p, A).$$

Afirmamos que:

1) $D\left(\tilde{f}, 1_{C(p,X)}\right) < \varepsilon$.

Para ver esto, tomemos $B \in C(p, X)$ y un punto $y \in \tilde{f}(B)$. Entonces existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Como $D(f, 1_X) < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $d(y, b) = d(f(b), b) < \frac{\varepsilon}{2}$ y, con esto, $y \in N\left(\frac{\varepsilon}{2}, B\right)$. De aquí que $\tilde{f}(B) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, B\right)$. De manera similar se prueba que $B \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, \tilde{f}(B)\right)$ y, así, $H\left(B, \tilde{f}(B)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, $D\left(\tilde{f}, 1_{C(p,X)}\right) < \varepsilon$. Afirmamos ahora que:

2) $C(p, A)$ es un Z-conjunto en $C(p, X)$.

Para ver esto, tomemos $\delta > 0$. Como A no cubre a p, existe $B \in B_\delta(\{p\}) \cap C(p, X)$ tal que $B \not\subseteq A$. Definamos $g : C(p, X) \to C(B, X)$ como $g(D) = D \cup B$ para $D \in C(p, X)$. Claramente g es una función continua tal que $D\left(g, 1_{C(p,X)}\right) < \delta$, pues $B \in B_\delta(\{p\})$. Además, como $B - A \neq \varnothing$, la imagen de g no intersecta a $C(p, A)$. Por tanto, $C(p, A)$ es un Z-conjunto en $C(p, X)$.

En vista de 1) y 2) se sigue, por el Teorema 174, que $C(p, X) \approx Q$. ∎

En la justificación de que la familia de los abanicos suaves no tienen hiperespacio único, utilizaremos además los siguientes resultados:

Teorema 177 (De la Homogeneidad de Anderson) *[2] Supongamos que $h : A \to B$ es un homeomorfismo entre Z-conjuntos en el cubo de Hilbert Q. Entonces h se puede extender a un homeomorfismo de Q en Q.*

Teorema 178 (De la Suma de Handel) *[15] Supongamos que $A \approx B \approx Q \approx A \cap B$ y que $A \cap B$ es un Z-conjunto en A. Entonces $A \cup B \approx Q$*

En el artículo [12], Eberhart y Nadler dan un modelo para el hiperespacio de los subcontinuos de un abanico suave. Si X es un abanico suave con vértice t y $E(X) = \{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ entonces definimos

$$N[C(X)] = \{tx : x \in X\}$$

y

$$T[C(X)] = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C(te_\alpha).$$

Teorema 179 *[12, Teorema 3.1] Sea X un abanico suave con vértice t. Entonces*

1. *$C(X) = C(t, X) \cup T[C(X)]$ y $T[C(X)]$ es cerrado en $C(X)$.*
2. *$C(t, X) \cap T[C(X)] = N[C(X)]$ y $N[C(X)]$ es un Z-conjunto en $C(t, X)$.*
3. *si X tiene una cantidad infinita (respectivamente, exactamente n, $2 < n < \infty$) de puntos extremos, entonces $C(t, X) \approx Q$ (respectivamente, $C(t, X) \approx I^n$).*
4. *$T[C(X)] \approx (X \times I)/(\{t\} \times I)$.*

8.3 Abanicos Suaves e Hiperespacio Único.

En [22], A. Illanes probó que los abanicos no están C-determinados. Por tanto, no tienen hiperespacio único. En la tesis de licenciatura de M. Boege ([3, Capítulo 4]), se pueden consultar el ejemplo y la prueba de Illanes con más detalle. Como ya mencionamos, en [12], se prueba que si X y Y son abanicos suaves tales que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y son homeomorfos (ver [3, Capítulo 3] para una prueba detallada de este resultado) ¿Qué más podemos decir?, ¿será cierto que los abanicos suaves tienen hiperespacio único? En esta sección responderemos en negativo a dicha pregunta.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los puntos $t = (1, 0)$ y $e = (2, 0)$. Definamos para cada natural n, $e_n = (2, \frac{1}{n})$ y sea $X = te \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} te_n)$. Es claro que X

es un abanico suave (ver Figura 8.1(a)). Sea E_1 el disco en $\mathbb{R}^2$, acotado por la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1. Entonces, afirmamos que el continuo $Y_1 = E_1 \cup X$ no es homeomorfo a X y satisface que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y_1)$. Más aún, si E_2 es la dendrita sin arcos que definimos en (1.4) de la Subsección 1.7.4, entonces afirmamos que el dendroide $Y_2 = E_2 \cup X$ no es homeomorfo a X y satisface que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y_2)$. En la Figura 8.1(b) se muestra el continuo Y_1 y en la Figura 8.2 el continuo Y_2.

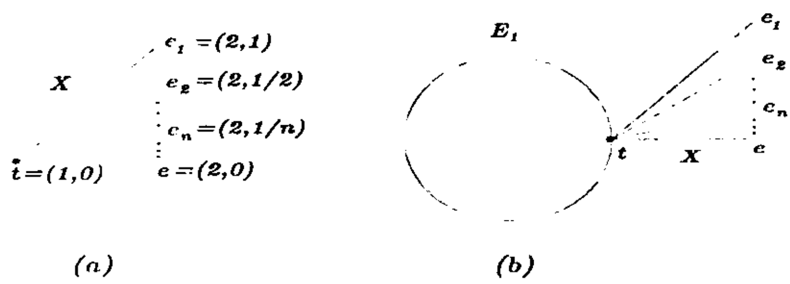

Figura 8.1:

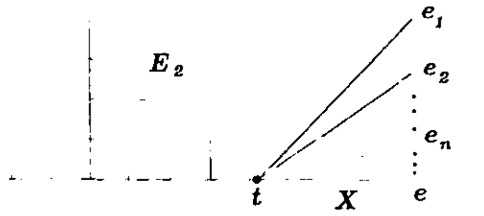

Figura 8.2:

Teorema 180 *Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *los continuos* $X = te \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} te_n)$, $Y_1 = E_1 \cup X$ *y* $Y_2 = E_2 \cup X$ *(ver Figuras 8.1 y 8.2). Entonces* $C(X) \approx C(Y_1) \approx C(Y_2)$.

Demostración. Tomemos $i \in \{1,2\}$. Es claro que $E_i \cap X = \{t\}$. Notemos que:

1) $C(Y_i) = C(X) \cup C(t, Y_i) \cup C(E_i)$.

Veremos que $C_i = C(t, Y_i) \cup C(E_i)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert Q. Para esto, notemos que, de acuerdo con el teorema de Curtis y Schori (Teorema 172)

2) $C(E_i) \approx Q$.

Afirmamos ahora que:

3) $C(t, Y_i) \approx Q$.

Para ver esto, tomemos $\varepsilon > 0$. De acuerdo con el Teorema 176, basta mostrar que existe una función $f_i : Y_i \to Y_i$ tal que $D(f_i, 1_{Y_i}) < \varepsilon$, $f_i(t) = t$ y $f_i(Y_i)$ no cubre a t.

Supongamos primero que $i = 1$. Definamos $E_1^+ = \{(x, y) \in E_1 : y \geq 0\}$, y consideremos la proyección $\pi_1 : E_1^+ \to [-1, 1]$ definida como $\pi_1(x, y) = x$ siempre que $(x, y) \in E_1^+$. Tomemos un número $x_0 \in (0, 1)$ tal que $E_\varepsilon = \pi_1^{-1}([x_0, 1]) \in B_\varepsilon(\{t\})$. Sean $F = Cl_{E_1}(E_1 - E_\varepsilon)$ y

$$F_0 = \pi_1^{-1}(x_0) \cup ([x_0, 1] \times \{0\}).$$

Entonces $F_0 \subset E_\varepsilon$ y $F = (E_1 - E_\varepsilon) \cup F_0$ (ver Figura 8.3).

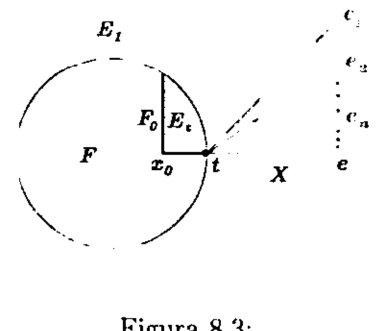

Figura 8.3:

Sea $r : E_1 \to F$ un retracción tal que $r(E_\varepsilon) = F_0$. Definamos $f_1 : Y_1 \to Y_1$ como sigue:

$$f_1(y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \in X, \\ r(y), & \text{si } y \in E_1. \end{cases}$$

Como r es una retracción, $X \cap E_1 = \{t\}$ y $t \in F$, f está bien definida y $f_1(t) = t$. Además, $f_1(Y_1) = X \cup F$. Mostraremos ahora que $D(f_1, 1_{Y_1}) < \varepsilon$. Para esto, basta con mostrar que $d\,(y, f_1(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $y \in E_\varepsilon$. Tomemos entonces $y \in E_\varepsilon$. Luego, debido a que $r(E_\varepsilon) = F_0 \subset E_\varepsilon$, $f_1(y) = r(y) \in E_\varepsilon$. Por tanto, $d\,(f_1(y), t) < \frac{\varepsilon}{4}$. También $d\,(y, t) < \frac{\varepsilon}{4}$ así que, por la desigualdad del triángulo, $d\,(y, f_1(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera, $D(f_1, 1_{Y_1}) < \varepsilon$.

Para probar que $f_1(Y_1) = X \cup F$ no cubre a t, tomemos $\delta > 0$. Sea $x \in (x_0, 1)$ tal que $B = \pi_1^{-1}([x, 1]) \in B_\delta(\{t\})$. Entonces $B \in C(t, Y_1)$ y $B \not\subseteq X \cup F = f_1(Y_1)$. Luego, $f_1(Y_1)$ no cubre a t. Esto termina la prueba de 3) para el caso $i = 1$.

Supongamos ahora que $i = 2$. Consideremos la función proyección $\pi : E_2 \to [-1, 1]$ dada por $\pi((x, y)) = x$ siempre que $(x, y) \in E_2$. Definamos $F = [-1, 1] \times \{0\}$. Por construcción, $F \subset E_2$ y cada punto $(x, 0) \in F$, con $-1 < x < 1$, tiene orden dos o tres en E_2. Tomemos un punto $x_0 \in (0, 1)$ tal que $ord_{(x_0,0)}E_2 = 3$ y $E_\varepsilon = \pi^{-1}([x_0, 1]) \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(\{t\})$ (ver Figura 8.4).

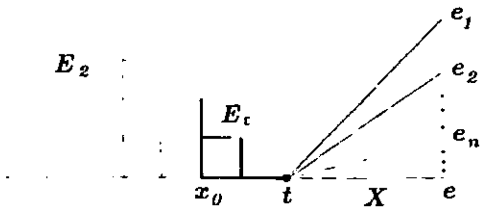

Figura 8.4:

Definamos $f_2 : Y_2 \to Y_2$ como sigue:

$$f_2(y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \in Cl_{Y_2}(Y_2 - E_\varepsilon) \\ \pi(y), & \text{si } y \in E_\varepsilon \end{cases}$$

Notemos que f_2 está bien definida y que $f_2(t) = t$. Además, $f_2(Y_2) \subset X \cup (E_2 - E_2') \cup \pi(E_2')$. Mostraremos ahora que $D(f_2, 1_{Y_2}) < \varepsilon$. Para esto, basta con mostrar que $d(y, f_2(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $y \in E_2'$. Tomemos entonces $y \in E_2'$. Como $y, \pi(y) \in E_2' \subset N\left(\frac{\varepsilon}{4}, \{t\}\right)$, resulta que $d(y,t) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(t, f_2(y)) = d(t, \pi(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Luego, por la desigualdad del triángulo, $d(y, f_2(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, $D(f_2, 1_{Y_2}) < \varepsilon$.

Para probar que $f_2(Y_2)$ no cubre a t, tomemos $\delta > 0$. Sea $x \in (x_0, 1)$ tal que $B = \pi^{-1}([x,1]) \in B_\delta(\{t\})$. Entonces, $B \in C(t, Y_2)$ y $B \not\subset X \cup (E_2 - E_2') \cup \pi(E_2') \supset f_2(Y_2)$. Luego, $f_2(Y_2)$ no cubre a t. Esto termina la prueba de 3) para el caso $i = 2$. Por consiguiente, 3) es cierto. Afirmamos ahora que:

4) $C(t, Y_i) \cap C(E_i) = C(t, E_i) \approx Q$

En efecto, consideremos la función $g_i = f_i|_{E_i}$, en donde f_i es la función que se definió en la parte 3). Claramente $g_i : E_i \to E_i$, $g_i(t) = t$, $D(1_{E_i}, g_i) < \varepsilon$ y $g_i(E_i)$ no cubre a t. Por tanto, aplicando nuevamente el Teorema 176, resulta que $C(t, E_i) \approx Q$. Más aún, afirmamos que:

5) $C(t, E_i)$ es un Z-conjunto en $C(t, Y_i)$.

Para ver esto, fijemos una sucesión $(c_n)_n$ en $X - \{t\}$ tal que $c_n \to t$ y $c_n \in tc_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : C(t, Y_i) \to C(t, Y_i) - C(t, E_i)$ como $f_n(B) = B \cup tc_n$. Entonces, $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones tales que $f_n \to 1_{C(t,Y_i)}$ (con respecto a la métrica D) y $f_n(C(t, Y_i)) \cap C(t, E_i) = \emptyset$. Por tanto, $C(t, E_i)$ es un Z-conjunto en $C(t, Y_i)$. Esto prueba 5).

Como consecuencia de lo anterior, y del teorema de la suma de Handel (Teorema 178), resulta que:

6) $C_i = C(t, Y_i) \cup C(E_i) \approx Q$.

Definamos ahora

$$N[C(X)] = \{ta : a \in X\}$$

y

$$T[C(X)] = C(te) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(te_n).$$

Por el teorema de Eberhart y Nadler (Teorema 179), $C(X) = C(t, X) \cup T[C(X)]$. Debido a que X tiene una cantidad infinita de puntos extremos, por la parte 3. del Teorema 179,

7) $C(t, X) \approx Q$.

Definamos ahora $\mathcal{B} = Fr_{C(X)}(C(t, X))$. Notemos que:

$$\begin{aligned} C(X) &= C(t,X) \cup [C(X) - C(t,X)] \\ &= C(t,X) \cup Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X)) \end{aligned}$$

y

$$C(X) = C(t,X) \cup T[C(X)].$$

Por tanto, en vista de que $T[C(X)]$ es cerrado en $C(X)$ (parte 1. del Teorema 179),

8) $Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X)) \subset T[C(X)]$.

Notemos ahora que:

9) $N[C(X)] \subset Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X))$.

Para probar esto, tomemos $A \in N[C(X)]$. Entonces, $A = tx$ para algún $x \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Si $x = t$ entonces tomemos $y \in B_\varepsilon(t)$ tal que $y \neq t$. Claramente, $\{y\} \in B_\varepsilon(A) \cap (C(X) - C(t,X))$. Si $x \neq t$, tomando $y \in tx \cap B_\varepsilon(t)$ tal que $y \neq t$, resulta que $yx \in B_\varepsilon(A) \cap (C(X) - C(t,X))$. Por tanto, $A \in Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X))$. Esto prueba 9). Afirmamos ahora que:

10) $T[C(X)] = Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X))$.

En efecto, si esto no es así, de acuerdo con 8), existe $A \in T[C(X)] - Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X))$. Entonces, por 9), $A \notin N[C(X)]$. Sin embargo, puesto que

$$C(X) = C(t,X) \cup Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X)),$$

se sigue que $A \in C(t,X) \cap T[C(X)] = N[C(X)]$. De este absurdo se tiene 10). Afirmamos ahora que:

11) $\mathcal{B} = N[C(X)]$.

En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = Fr_{C(X)}(C(t,X)) &= C(t,X) \cap Cl_{C(X)}(C(X) - C(t,X)) \\ &= C(t,X) \cap T[C(X)] \\ &= N[C(X)].\end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de Nadler y Eberhart (Teorema 179) tenemos que:

12) $\mathcal{B}$ es un Z-conjunto en $C(t,X)$.

Afirmamos ahora que:

13) $\mathcal{B}$ es un Z-conjunto en $\mathcal{C}_i = C(t,Y_i) \cup C(E_i)$.

Para probar 13), utilizaremos el hecho de que los continuos Y_1 y Y_2 tienen la propiedad de Kelley (ver Definición 53). Afirmamos primero que:

13.1) existe una función de Whitney $\mu : C(Y_i) \to [0,\infty)$ de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(te_n) = \mu(te)$.

En efecto, por el Teorema 179, $T[C(X)]$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Además, $C(X)$ es un subconjunto cerrado de $C(Y_i)$. Por tanto, $T[C(X)]$ es un subconjunto cerrado de $C(Y_i)$. Claramente, $T[C(X)]$ es no vacío. Si $A \in T[C(X)]$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \in C(te_n)$, o bien $A \in C(te)$. Denotemos por $l(A)$ a la longitud de A. Entonces $0 \leq l(A) \leq 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $l(te_n) = 1 = l(te)$. Definamos $\omega : T[C(X)] \to [0,\infty)$ como

$$\omega(A) = l(A).$$

Entonces $\omega(A) = 0$ si y sólo si $A \in T[C(X)] \cap F_1(X)$ y $\omega(A) < \omega(B)$ siempre que $A, B \in T[C(X)]$ y $A \subsetneq B$. No es difícil probar que ω es continua. Por tanto, ω es una función de Whitney en $T[C(X)]$. Entonces, por el Teorema 27, existe una función de Whitney $\mu : C(Y_i) \to [0,\infty)$ que extiende a ω. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(te_n) = \omega(te_n) = l(te_n) = 1 = l(te) = \omega(te) = \mu(te).$$

Esto prueba 13.1).

Por 13.1), existe una función de Whitney $\mu : C(Y_i) \to [0,\infty)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(te_n) = \mu(te)$. Consideremos la función $L_\mu : C(Y_i)\times[0,\mu(Y_i)] \to C(Y_i)$ dada por:

$$L_\mu(A,s) = \begin{cases} \bigcup\{K \in C(Y_i) : A \subset K \text{ y } \mu(K) = s\}, & \text{si } \mu(A) \leq s \\ A, & \text{si } \mu(A) \geq s. \end{cases}$$

En la Sección 1.8, mencionamos una serie de propiedades que tiene la función L_μ. A saber, $L_\mu(A,0) = A$ para cada $A \in C(Y_i)$ y $L_\mu(A,t) \subset L_\mu(A,s)$ siempre que $t \leq s$ y $A \in C(Y_i)$. También mencionamos que, cuando el continuo Y_i tiene la propiedad de Kelley, la función L_μ es continua. Por tanto, en nuestra situación, L_μ es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Con la ayuda de la función L_μ veremos que existe una función continua $f_\varepsilon : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}_i$ tal que $D(1_{\mathcal{C}_i}, f_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f_\varepsilon(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Como L_μ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $H(A,B) < \delta$ y $|s_1 - s_2| < \delta$, entonces

$$H\left(L_\mu(A,s_1), L_\mu(B,s_2)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos suponer que $\delta < 2\mu(te)$. Definamos, para cada $A \in \mathcal{C}_i$,

$$f_\varepsilon(A) = L_\mu\left(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}\right).$$

Entonces,

$$A = L_\mu\left(A,\mu(A)\right) \subset L_\mu\left(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}\right) = f_\varepsilon(A).$$

Por tanto, si $A \in C(t, Y_i)$ entonces $f_\varepsilon(A) \in C(t, Y_i)$. Si $A \in C(E_i)$ tenemos dos posibilidades: o bien $f_\varepsilon(A) \subset E_i$, o bien $f_\varepsilon(A) \cap X \neq \varnothing$. En vista de que $E_i \cap X = \{t\}$, $f_\varepsilon(A) \in \mathcal{C}_i$ en cualquier situación. Esto significa que f_ε es una función de $\mathcal{C}_i$ en $\mathcal{C}_i$. Además, por la elección de δ,

$$H\left(A, f_\varepsilon(A)\right) = H\left(L_\mu\left(A,\mu(A)\right), L_\mu\left(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo que $D(L_{\varepsilon}, f_\varepsilon) < \varepsilon$. La continuidad de f_ε se sigue de la continuidad uniforme de L_μ y la continuidad uniforme de μ.

Ahora mostraremos que $f_\varepsilon(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Para esto, tomemos un elemento $A \in \mathcal{C}_i$. Si $A \cap (E - X) \neq \varnothing$ entonces, debido a que $A \subset f_\varepsilon(A)$, $f_\varepsilon(A) \cap (E - X) \neq \varnothing$. Por tanto, $f_\varepsilon(A) \notin \mathcal{B}$ (los elementos de $\mathcal{B}$ están contenidos en X). Supongamos ahora que $A \cap (E_t - X) = \varnothing$. Entonces, $A \subset X$. Más aún, $A \in C(t, X)$. Definamos $e_0 = e$. Si existen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que $n \neq m$ y

$$A \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing \neq A \cap [te_m - \{t\}]$$

entonces, debido a que $A \subset f_\varepsilon(A)$, resulta que

$$f_\varepsilon(A) \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing \neq f_\varepsilon(A) \cap [te_m - \{t\}].$$

Luego, $f_\varepsilon(A) \notin \mathcal{B}$. Queda, por tanto, considerar el caso en que A solamente intersecta a una pata de X. En dicha situación, $A \in \mathcal{B}$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $A \subset te_n$. Consideraremos los casos en que $\mu(A) + \frac{\delta}{2} > \mu(te_n)$ y $\mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(te_n)$.

Supongamos primero que $\mu(A) + \frac{\delta}{2} > \mu(te_n)$. Como $\delta < 2\mu(te) = \mu(te_n)$, tenemos que $\mu(A) \neq 0$. Esto implica que $A \neq \{t\}$, por lo que $A \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$. Sean $\alpha_1 : I \to C(X)$ un arco ordenado de A a te_n y $\alpha_2 : I \to C(X)$ un arco ordenado de te_n a X. Definamos $\alpha : I \to C(X)$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Sea $K \in \alpha(I)$ tal que

$$\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2}.$$

Entonces, $K \subset L_\mu\left(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}\right) = f_\varepsilon(A)$. Además, $K \nsubseteq te_n$ pues $\mu(K) > \mu(te_n)$. Por tanto, $K \notin \alpha\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$. Luego, $K \in \alpha\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, de donde $te_n \subsetneq K$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $m \neq n$ y $K \cap [te_m - \{t\}] \neq \varnothing$. Como también $K \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$, A intersecta al menos a dos patas distintas de X. Luego, $f_\varepsilon(A)$ también intersecta a dichas patas. Entonces, $f_\varepsilon(A) \notin \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $\mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(te_n)$. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $m \neq n$. Entonces,

$$\mu(A) < \mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(te_n) = \mu(te_m) \leq \mu(A \cup te_m). \tag{8.1}$$

Si $A \neq \{t\}$, entonces $A \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$. De aquí que $te_m \subsetneq A \cup te_m$. Luego, por (8.1),

$$\mu(A) < \mu(A) + \frac{\delta}{2} < \mu(A \cup te_m).$$

Sea $K \in C(A, A \cup te_m)$ tal que $\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2}$. Entonces, $A \subsetneq K \subset f_\varepsilon(A)$ y $K \cap [te_m - \{t\}] \neq \varnothing$. Como también $K \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$, K intersecta a dos patas distintas de X. Luego, como ya hemos hecho ver, se sigue que $f_\varepsilon(A) \notin \mathcal{B}$.

Si $A = \{t\}$, entonces $\mu(A) = 0$. Sea $K_1 \in C(t, te_n)$ tal que $\mu(K_1) = \frac{\delta}{4}$. Notemos que $K_1 \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$, así que $te_m \subsetneq K_1 \cup te_m$. Por tanto,

$$\mu(K_1) < \mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(te_n) = \mu(te_m) < \mu(K_1 \cup te_m).$$

Sea $K \in C(K_1, K_1 \cup te_m)$ tal que $\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2}$. Entonces,

$$A \subsetneq K_1 \subsetneq K \subset f_\varepsilon(A)$$

y $K \cap [te_m - \{t\}] \neq \varnothing$. Como también $K \cap [te_n - \{t\}] \neq \varnothing$, K intersecta a dos patas distintas de X. Luego, $f_\varepsilon(A) \notin \mathcal{B}$. Esto prueba que $f_\varepsilon(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es un Z-conjunto en $\mathcal{C}_i$. De esta manera, 13) se cumple.

Ahora pensamos a $\mathcal{C}_i$ y $C(t, X)$ como cubos de Hilbert. Notemos que $1_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ es un homeomorfismo entre Z-conjuntos del cubo de Hilbert. Entonces, de acuerdo con el teorema de la homogeneidad de Anderson (Teorema 177), $1_{\mathcal{B}}$ se puede extender a un homeomorfismo $h_i : C(t, Y_i) \cup C(E_i) \to C(t, X)$. Definamos una función $g_i : C(Y_i) \to C(X)$ como sigue:

$$g_i(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in T[C(X)] \\ h_i(A), & \text{si } A \in C(t, Y_i) \cup C(E_i) \end{cases}$$

Entonces g_i es continua en $T[C(X)]$ y en $C(t,Y_i)\cup C(E_i)$. Dado que

$$\begin{aligned} T[C(X)]\cap[C(t,Y_i)\cup C(E_i)] &= [T[C(X)]\cap C(t,Y_i)]\cup[T[C(X)]\cap C(E_i)] \\ &= N[C(X)]\cup\{\{t\}\} \\ &= N[C(X)] \\ &= \mathcal{B} \end{aligned}$$

y h_i es una extensión de la función continua $1_{\mathcal{B}}$, resulta que g_i es continua. Más aún:

14) g es inyectiva.

Para ver esto, tomemos $A \in T[C(X)]$ y $B \in C(t,Y_i)\cup C(E_i)$ tales que $g_i(A) = g_i(B)$. Entonces $A = h_i(B)$. Esto implica que $A \in \operatorname{Im} h_i$, por lo que $A \in C(t,X)$. De aquí que

$$A \in T[C(X)] \cap C(t,X) = N[C(X)] = \mathcal{B}.$$

Ahora bien, debido a que h_i es un homeomorfismo que extiende a $1_{\mathcal{B}}$ y a que $A \in \mathcal{B}$, resulta que $B = A$. Esto prueba 14). Es claro que g_i es suprayectiva. Por tanto, g_i es un homeomorfismo, y con esto probamos que $C(Y_i) \approx C(X)$. ∎

Como consecuencia del teorema anterior, los abanicos suaves no están C-determinados con respecto a la familia de los dendroides.

Capítulo 9

Hiperespacio Casi Único.

9.1 Introducción.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los continuos

$$X_0 = \left\{\left(x, sen\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1\right\} \cup (\{0\} \times [-2, 1]) \tag{9.1}$$

y

$$Y_0 = \left\{\left(x, sen\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq 1\right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \cup S, \tag{9.2}$$

en donde S es un arco, con extremos $(0, -1)$ y $(1, sen1)$, tal que $S \cap X_0 = \{(0, -1), (1, sen1)\}$. El espacio X_0 es el clásico continuo seno de $\frac{1}{x}$, pero con la pata límite alargada. El continuo Y_0 es el llamado *círculo de Varsovia*. La primera impresión que uno tiene es que los hiperespacios $C(X_0)$ y $C(Y_0)$, de dichos continuos X_0 y Y_0, no son homeomorfos. Sin embargo, $C(X_0)$ y $C(Y_0)$ son homeomorfos. Este nos ha parecido un resultado sorprendente y, en el siguiente teorema probaremos un resultado más general.

Definición 181 *Un continuo X es **irreducible** con respecto a dos puntos distintos a y b de X, si no existe un subcontinuo propio A de X tal que $a, b \in A$.*

Notemos que el continuo X_0 definido en (9.1) tiene dos puntos a y b, a saber $a = (1, sen1)$ y $b = (0, -2)$, tales que X_0 es irreducible con respecto a dichos puntos. Más aún, los espacios $C(a, X_0)$ y $C(b, X_0)$ son arcos en $C(X_0)$ y el continuo Y_0 se puede obtener de X_0, agregándole un arco M tal que $M \cap X_0 = \{a,b\}$ y a y b son los extremos de M. El resultado de este capítulo, enuncia que si X es un continuo con básicamente dichas propiedades y Y se obtiene de X, agregándole un arco que intersecta solamente a los dos puntos de irreducibilidad a y b de X, entonces los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos. Más precisamente, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 182 *Sea X un continuo tal que:*

a) X es irreducible entre dos puntos a y b

b) $C(a,X)$ y $C(b,X)$ son arcos en $C(X)$,

c) siempre que $X' = A \cup X \cup B$ sea un continuo, que se obtiene añadiéndole a X dos arcos ajenos A y B, tales que $A \cap X = \{a\}$ y $B \cap X = \{b\}$, donde a es un extremo de A y b es un extremo de B, resulta que X' es homeomorfo a X.

Definamos $Y = X \cup M$, donde M es un continuo tal que $M \cap X = \{a,b\}$, y sea $\mathcal{A} = C(M,Y) - \{Y\}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, sean A_a y A_b las componentes de $A \cap X$ tales que $a \in A_a$ y $b \in A_b$. Entonces:

1. *$A = M \cup A_a \cup A_b$.*

2. *la función $f : \mathcal{A} \to C(X)$ definida como $f(A) = A_a$ es continua,*

3. *si M es un arco con extremos a y b, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$.*

Demostración. Sea $A \in C(M,Y) - \{Y\}$. Hagamos $B = M \cup A_a \cup A_b$. Por definición $M, A_a, A_b \subset A$ así que $B \subset A$. Supongamos que $B \subsetneq A$ y tomemos un punto $x \in A - B$. Sea K la componente de $A - B$ tal que $x \in K$. Entonces, $K \cup B$ es un subcontinuo de Y, K está contenido en A y es ajeno a B. Puesto que $M \subset B$, sucede que $K \cap M = \varnothing$ y, por tanto, $K \subset X$. Por definición, $K \subset A$, así que $K \subset A \cap X$. Luego, $Cl_X(K) \subset A \cap X$. Más aún, por el teorema de los golpes en la frontera (Teorema 54), $Cl_X(K) \cap B \neq \varnothing$. Luego, $Cl_X(K) \cap M \neq \varnothing$, $Cl_X(K) \cap A_a \neq \varnothing$ o bien $Cl_X(K) \cap A_b \neq \varnothing$. Debido a que $M \cap X = \{a,b\}$, tenemos que $Cl_X(K) \cap A_a \neq \varnothing$ o bien $Cl_X(K) \cap A_b \neq \varnothing$. Sin perder generalidad, supongamos que $Cl_X(K) \cap A_a \neq \varnothing$. Entonces, $Cl_X(K) \cup A_a$ es un subconjunto conexo de $A \cap X$ que contiene propiamente a la componente A_a de $A \cap X$. Esto es absurdo, y por consiguiente, $B = A$. Esto prueba 1.

Para probar 2., sea $A \in \mathcal{A}$ y consideremos una sucesión $(A_n)_n$ en $\mathcal{A}$ tal que $A_n \to A$. De acuerdo con 1., para cada natural n, $A_n = M \cup A_a^n \cup A_b^n$ y también, $A = M \cup A_a \cup A_b$. Afirmamos que:

1) $A_a^n \to A_a$.

En efecto, supongamos que $A_a^n \to B$ para algún $B \in C(X)$ tal que $B \neq A_a$. Como $a \in A_a^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sucede que $a \in B$, así que $B \in C(a, X)$. Ya que $A_a^n \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $B \subset A$. Por tanto, $B \subset A \cap X$ y $a \in B$. Como A_a es la componente de $A \cap X$ que tiene a a, concluimos que $B \subsetneq A_a$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $A_b^n \to C$ para algún $C \in C(b, X)$. Si $C \cap A_a \neq \varnothing$ entonces, por la irreducibilidad de X entre a y b, $C \cup A_a = X$. Ahora bien, como $A_b^n \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $C \subset A$. Por tanto, $X = C \cup A_a \subset A$ y entonces $Y = M \cup X \subset A$. De modo que $Y = A$. Esto es absurdo, pues $A \in \mathcal{A}$. De esta manera, $C \cap A_a = \varnothing$.

Tomemos un punto $z \in A_a - B$. Como $A_a^n \to B$ y $A_b^n \to C$,

$$A_n = M \cup A_a^n \cup A_b^n \to M \cup B \cup C.$$

También $A_n \to A$, así que $A = M \cup B \cup C$. Ahora bien, $z \in A_a \subset A = M \cup B \cup C$. $A_a \cap C = \varnothing$ y $z \notin B$. Por tanto, $z \in M$. Puesto que $A_a \subset X$, tenemos que $z \in M \cap X = \{a, b\}$. Si $z = a$, entonces $z \in B$ lo cual es absurdo. Si $z = b$, entonces $z \in C$, lo cual también es absurdo.

De lo anterior concluimos que $B = A_a$, así que $A_a^n \to A_a$ o, equivalentemente, $f(A_n) \to f(A)$. Esto prueba que f es continua.

Para probar 3., supongamos que M es un arco con extremos a y b. Definimos

$$
\begin{aligned}
C_a &= Cl_{C(Y)}(\{A \in C(a, Y) : b \notin A\}),\\
C_b &= Cl_{C(Y)}(\{A \in C(b, Y) : a \notin A\}),\\
C &= \{A \in C(Y) : a, b \in A\} \text{ y}\\
\Lambda &= C_a \cup C_b \cup C \cup C(M).
\end{aligned}
$$

Es claro que $C(Y) = C(X) \cup \Lambda$. Afirmamos que:

2) Λ es una 2-celda en $C(Y)$.

Para ver 2), construiremos modelos geométricos para C_a, C_b, C y $C(M)$. Consideremos una función de Whitney normalizada $\mu : C(Y) \to I$.

$*$ Modelo Geométrico para C_a.

Tomemos arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : I \to C(Y)$ de $\{a\}$ a X y de $\{a\}$ a M, respectivamente. Es claro que $\alpha_1(I) = C(a, X)$ y que $\alpha_2(I) = C(a, M)$. Definamos una función $\alpha : I \times I \to C_a$ como:

$$\alpha(s, t) = \alpha_1(s) \cup \alpha_2(t).$$

Es fácil ver que α es un homeomorfismo. Por tanto, C_a es una 2-celda. Notemos que en el cuadrado:

a) la imagen bajo α, del lado que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, es el conjunto $C(a, X)$.

b) la imagen bajo α, del lado que une a los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, es el conjunto $C(a, M)$.

c) la imagen bajo α, del lado que une a los puntos $(1,0)$ y $(1,1)$, es el conjunto $\{X \cup \alpha_2(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de X a Y por el lado de a).

d) la imagen bajo α, del lado que une a los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$, es el conjunto $\{M \cup \alpha_1(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de M a Y por el lado de a).

Por tanto, una descripción geométrica de C_a es la que se muestra en la Figura 9.1.

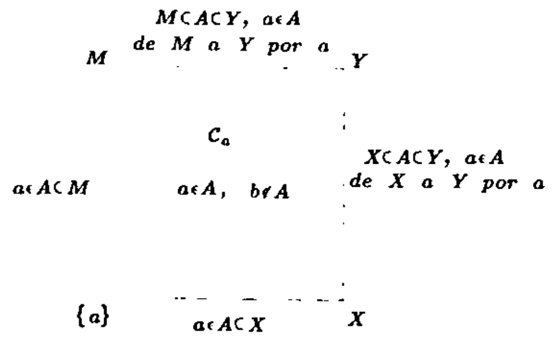

Figura 9.1:

∗ Modelo Geométrico para C_b.

Tomemos arcos ordenados $\beta_1, \beta_2 : I \to C(Y)$ de $\{b\}$ a X y de $\{b\}$ a M, respectivamente. Es claro que $\beta_1(I) = C(b, X)$ y que $\beta_2(I) = C(b, M)$. Definamos una función $\beta : I \times I \to C_b$ como:

$$\beta(s,t) = \beta_1(s) \cup \beta_2(t).$$

Es fácil ver que β es un homeomorfismo. Por tanto, C_b es una 2-celda. Notemos que en el cuadrado:

a) la imagen bajo β, del lado que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, es el conjunto $C(b, X)$.

b) la imagen bajo β, del lado que une a los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, es el conjunto $C(b, M)$.

c) la imagen bajo β, del lado que une a los puntos $(1,0)$ y $(1,1)$, es el conjunto $\{X \cup \beta_2(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de X a Y por el lado de b).

d) la imagen bajo β, del lado que une a los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$, es el conjunto $\{M \cup \beta_1(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de M a Y por el lado de b).

Por tanto, una descripción geométrica de C_b es la que se muestra en la Figura 9.2.

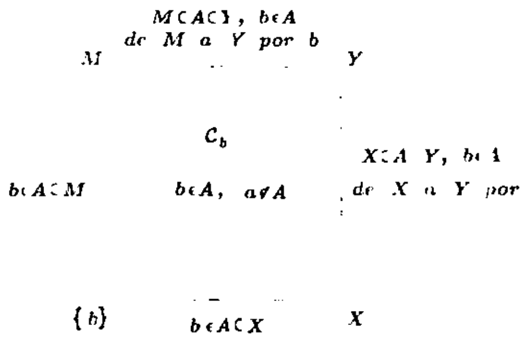

Figura 9.2:

* Modelo Geométrico para $C(M)$.

Debido a que M es un arco, $C(M)$ es un triángulo con vértices en los puntos $\{a\}$, $\{b\}$ y M. En donde:

a) el lado que une los vértices $\{a\}$ y $\{b\}$ es $F_1(M)$.

b) el lado que une los vértices $\{a\}$ y M es $C(a, M)$.

c) el lado que une los vértices $\{b\}$ y M es $C(b, M)$.

Por tanto, una descripción geométrica de $C(M)$ es la que se muestra en la Figura 9.3.

* Modelo Geométrico para $\mathcal{C}$.

Afirmamos que:

2.1) $\mathcal{C} = C(M, Y) \cup C(X, Y)$

En efecto, tomemos un elemento $A \in \mathcal{C}$. Sean C_1 y C_2 las componentes de $A \cap X$ tales que $a \in C_1$ y $b \in C_2$. Consideremos también las componentes D_1 y D_2 de $A \cap M$ tales que $a \in D_1$ y $b \in D_2$. Supongamos que $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ y $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Entonces $a \notin D_2 \cup C_2$, $b \notin C_1 \cup D_1$ y $(C_1 \cap D_2) \cup (C_2 \cap D_1) \subset$

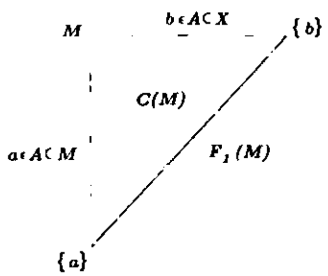

Figura 9.3:

$X \cap M = \{a, b\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(C_1 \cup D_1) \cap (C_2 \cup D_2) &= (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap C_2) \cup (D_1 \cap D_2) \\ &= (C_1 \cap D_2) \cup (C_2 \cap D_1) \\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

Notemos que $C_1 \cup C_2 \subset A \cap X$ y $D_1 \cup D_2 \subset A \cap M$. Mostraremos que $C_1 \cup C_2 = A \cap X$. Para ver esto, supongamos que existe un punto $x \in A \cap X$ tal que $x \notin C_1 \cup C_2$. Entonces, $x \in A - (C_1 \cup C_2)$. Sea K la componente de $A - (C_1 \cup C_2)$ tal que $x \in K$. Por el teorema de los golpes en la frontera (Teorema 54), tenemos que $Cl_X(K) \cap (C_1 \cup C_2) \neq \varnothing$. Supongamos, sin perder generalidad, que $Cl_X(K) \cap C_1 \neq \varnothing$. Entonces, $Cl_X(K) \cup C_1$ es un subconjunto conexo de $A \cap X$, que contiene propiamente a la componente C_1 de $A \cap X$. Esto es absurdo, así que $A \cap X = C_1 \cup C_2$. De manera similar, se prueba que $A \cap M = D_1 \cup D_2$. Luego,

$$A = (A \cap X) \cup (A \cap M) = (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2)$$

es la unión de los subconjuntos cerrados, no vacíos y ajenos $C_1 \cup D_1$ y $C_2 \cup D_2$. Esto contradice el hecho de que A es conexo. Por tanto, $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$ o bien $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. En el primer caso, debido a que X es irreducible entre a y b, y a que $a, b \in C_1 \cup C_2 \in C(X)$, resulta que $C_1 \cup C_2 = X$. Luego $A \in C(X, Y)$. En el segundo caso, debido a que M es irreducible entre a y b, y a que $a, b \in D_1 \cup D_2 \in C(M)$, resulta que $D_1 \cup D_2 = M$. Luego, $A \in C(M, Y)$.

Esto prueba que $C \subset C(X,Y) \cup C(M,Y)$. La otra contención es inmediata. De esta manera, 2.1) es cierto.

Notemos que $C(M,Y) \cap C(X,Y) = \{Y\}$. Por tanto, el modelo geométrico para C, lo obtendremos mediante los modelos geométricos para $C(M,Y)$ y $C(X,Y)$.

· Modelo Geométrico para $C(M,Y)$.

Consideremos el subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$, que se obtiene removiendo del triángulo con vértices $(\mu(M),\mu(M))$, $(\mu(M),1)$ y $(1,1)$, el lado que une a los puntos $(\mu(M),1)$ y $(1,1)$. Es claro que

$$\mathcal{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mu(M) \leq x \leq y < 1\}.$$

Consideremos también el conjunto $\mathcal{A} = C(M,Y) - \{Y\}$. Por la parte 1., sabemos que cada elemento de A de $\mathcal{A}$ se puede escribir como $A = M \cup A_a \cup A_b$. Definamos una función $g : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ como:

$$g(A) := (\mu(M \cup A_a), \mu(A))$$

Afirmamos que:

2.2) g está bien definida.

Para ver esto, tomemos un elemento $A \in \mathcal{A}$. Entonces $A = M \cup A_a \cup A_b$. Como $M \subset M \cup A_a \subset A \subsetneq Y$ resulta que

$$\mu(M) \leq \mu(M \cup A_a) \leq \mu(A) < 1$$

así que $g(A) \in \mathcal{T}$. Por tanto, g está bien definida.

2.3) g es inyectiva.

Para ver esto, tomemos dos elementos $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$. Entonces $C = M \cup C_a \cup C_b$ y $D = M \cup D_a \cup D_b$. Puesto que $C(a,X)$ es un arco en $C(X)$, resulta que $C_a \subset D_a$ o bien $D_a \subset C_a$. Sin perder generalidad supongamos que $C_a \subset D_a$. Si $C_a \subsetneq D_a$, entonces $\mu(M \cup C_a) < \mu(M \cup D_a)$ y así $g(C) \neq g(D)$. Si $C_a = D_a$, entonces $C = M \cup C_a \cup C_b$ y $D = M \cup C_a \cup D_b$.

Ahora bien, como $C(b, X)$ es un arco en $C(X)$, $C_b \subset D_b$ o bien $D_b \subset C_b$. Luego C y D son comparables. Más aún, como $C \neq D$, tenemos en realidad que $C \subsetneq D$ o bien $D \subsetneq C$. En cualquier caso, $\mu(C) \neq \mu(D)$, y así $g(C) \neq g(D)$. Esto prueba 2.3).

2.4) g es continua.

En efecto, tomemos un elemento $A \in \mathcal{A}$ y sea $(A_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $A_n \to A$. Entonces para cada natural n, $A_n = M \cup A_a^n \cup A_b^n$ y, por supuesto, $A = M \cup A_a \cup A_b$. De acuerdo con 2., $A_a^n \to A_a$, así que $M \cup A_a^n \to M \cup A_a$. Por consiguiente, $\mu(M \cup A_a^n) \to \mu(M \cup A_a)$. Esto implica que

$$g(A_n) = (\mu(M \cup A_a^n), \mu(A_n)) \to (\mu(M \cup A_a), \mu(A)) = g(A),$$

y, así, g es continua.

2.5) g es suprayectiva.

Para ver esto tomemos un punto $(s,t) \in \mathcal{T}$. Entonces $\mu(M) \leq s \leq t < 1$. Como $\mu(M) \leq s$, existe un elemento $C_a \in C(a, X)$ tal que $\mu(M \cup C_a) = s$, así que $M \cup C_a \subsetneq Y$. Por consiguiente, $C_a \subsetneq X$. Debido a que X es irreducible entre a y b, se sigue entonces que $b \notin C_a$.

Recordemos que $\beta_1 : I \to C(X)$ es un arco ordenado de $\{b\}$ a X en $C(X)$. Definamos $\beta_3 : I \to C(X)$ por $\beta_3(r) = M \cup C_a \cup \beta_1(r)$. Entonces, β_3 es una función continua. Notemos que $\mu(\beta_3(0)) = \mu(M \cup C_a \cup \{b\}) = s$ y $\mu(\beta_3(1)) = \mu(M \cup C_a \cup X) = \mu(Y) = 1$. De manera que existe $r_0 \in I$ tal que $\mu(\beta_3(r_0)) = t$. Sea $C = \beta_3(r_0) = M \cup C_a \cup \beta_1(r_0)$. Como $\mu(C) < 1$, tenemos que $C \neq Y$, así que $C_a \cup \beta_1(r_0) \neq X$. Por la irreducibilidad de X entre a y b, $C_a \cap \beta_1(r_0) = \varnothing$. Entonces, $C \cap X = C_a \cup \beta_1(r_0)$. De modo que $C \cap X$ es la unión de dos cerrados y conexos ajenos, C_a y $\beta_1(r_0)$, uno tiene a a y el otro a b. Así que C_a y $\beta_1(r_0)$ son las respectivas componentes de $C \cap X$ que contienen a a y a b. De esta manera,

$$g(C) = (\mu(M \cup C_a), \mu(C)) = (s,t).$$

Por tanto, g es suprayectiva.

2.6) g^{-1} es continua.

Para ver esto, sean $(s,t) \in \mathcal{T}$ y $(s_n,t_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{T}$ tal que $(s_n,t_n) \to (s,t)$. Tomemos $A = M \cup A_a \cup A_b \in \mathcal{A}$ tal que $g^{-1}(s,t) = A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_n = M \cup A_a^n \cup A_b^n \in \mathcal{A}$ tal que $g^{-1}(s_n,t_n) = A_n$. Entonces, $\mu(M \cup A_a) = s$, $\mu(A) = t$ y para cada natural n $\mu(M \cup A_a^n) = s_n$ y $\mu(A_n) = t_n$. Supongamos que $A_a^n \to B_0$, para algún $B_0 \in C(a,X)$. Como $C(a,X)$ es un arco en $C(X)$, $B_0 \subset A_a$ o bien $A_a \subset B_0$. Entonces, $M \cup B_0 \subset M \cup A_a$ o bien $M \cup A_a \subset M \cup B_0$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $A_b^n \to B_1$, para algún $B_1 \in C(b,X)$. Como $C(b,X)$ es un arco en $C(X)$, $B_1 \subset A_b$ o bien $A_b \subset B_1$. Sea $B = M \cup B_0 \cup B_1$. Entonces, $A_n = M \cup A_a^n \cup A_b^n \to M \cup B_0 \cup B_1 = B$. Más aún, $s_n = \mu(M \cup A_a^n) \to \mu(M \cup B_0)$, así lo que $\mu(M \cup B_0) = s$.

Ahora bien, como los conjuntos $M \cup A_a$ y $M \cup B_0$ son comparables y $\mu(M \cup A_a) = s = \mu(M \cup B_0)$, resulta que $M \cup A_a = M \cup B_0$. Entonces, debido a que los conjuntos B_1 y A_b son comparables, sucede que A y B son comparables. Como $A_n \to B$, $t_n = \mu(A_n) \to \mu(B)$, así que $\mu(B) = t$. Esto implica que $A = B$. Luego, $g^{-1}(s_n,t_n) = A_n \to A = g^{-1}(s,t)$. Por tanto, g^{-1} es continua.

Como consecuencia de lo anterior, $\mathcal{A} = C(M,Y) - \{Y\}$ es homeomorfo a $\mathcal{T}$. Así que la compactación unipuntual de $\mathcal{A}$, que es $C(M,Y)$, es homeomorfa a la compactación unipuntual de $\mathcal{T}$, que es el semidisco S_1 en $\mathbb{R}^2$ que tiene por diámetro a un arco que une a los puntos $(\mu(M),\mu(M))$ y $(1,1)$. Esto significa que el modelo geométrico de $C(M,Y)$ es un semidisco, en donde:

a) el diámetro del semidisco es el conjunto $\{M \cup \alpha_1(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de M a Y por el lado de a).

b) el arco del semidisco es el conjunto $\{M \cup \beta_1(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de M a Y por el lado de b).

Por tanto, una descripción geométrica de $C(M,Y)$ es la que se muestra en la Figura 9.4.

· Modelo Geométrico para $C(X,Y)$.

Siguiendo un razonamiento similar al desarrollado para $C(X,Y)$, resulta que un modelo geométrico para $C(X,Y)$ es un semidisco, en donde:

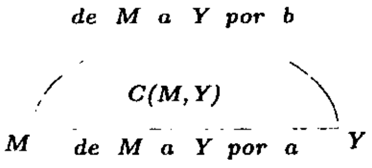

Figura 9.4:

a) el diámetro del semidisco es el conjunto $\{X \cup \alpha_2(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de X a Y por el lado de a).

b) el arco del semidisco es el conjunto $\{X \cup \beta_2(t) : t \in I\}$ (es decir, crecer de X a Y por el lado de b).

Por tanto, una descripción geométrica de $C(X,Y)$ es la que se muestra en la Figura 9.5.

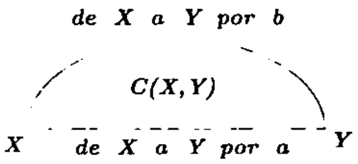

Figura 9.5:

En la Figura 9.6, mostramos que los modelos geométricos de $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$, $C(M)$, $C(M,Y)$ y $C(X,Y)$ se pueden pegar de modo que Λ es un triángulo con vértices $\{a\}$, $\{b\}$ y X, tal que:

a) el lado que une los vértices $\{a\}$ y $\{b\}$ es $F_1(M)$.

b) el lado que une los vértices $\{a\}$ y X es $C(a,X)$.

c) el lado que une los vértices $\{b\}$ y X es $C(b,X)$.

Esto prueba 2). Notemos ahora que:

3) $C(X) \cap \Lambda = C(a,X) \cup C(b,X)$.

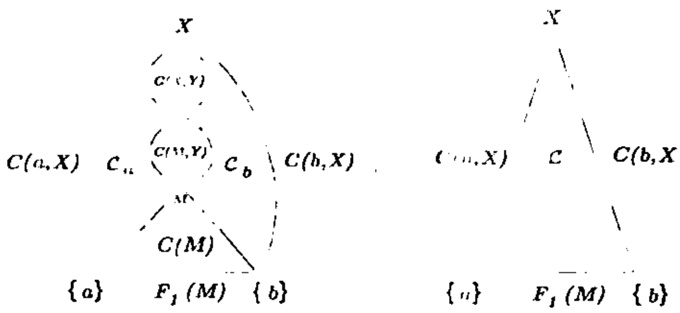

Figura 9.6:

En efecto, por la definición de Λ y por 2.1),

$$\begin{aligned} C(X)\cap\Lambda &= (C(X)\cap C_a)\cup(C(X)\cap C_b)\cup(C(X)\cap C(M))\cup \\ &\cup(C(X)\cap C(M,Y))\cup(C(X)\cap C(X,Y)) \\ &= C(a,X)\cup C(b,X). \end{aligned}$$

Fijemos dos puntos $a', b' \in M$ tales que, en el orden natural del arco M, $a < a' < b' < b$. Sean $X' = a'a \cup X \cup bb'$. Por la hipótesis c) del teorema, X' es homeomorfo a X. Sea $f : X \to X'$ un homeomorfismo. De acuerdo con la hipótesis a) del teorema, X' es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$. Mostraremos que:

4) $f(a) = a'$ y $f(b) = b'$, o bien, $f(a) = b'$ y $f(b) = a'$.

En efecto, supongamos que 4.1) no es cierto. Entonces, sin perder generalidad, $f(a) \neq a'$ y $f(b) \neq a'$. Notemos que se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones

i) $f(a), f(b) \in a'a - \{a'\}$,

ii) $f(a) \in a'a - \{a'\}$ y $f(b) \in X$,

iii) $f(a) \in a'a - \{a'\}$ y $f(b) \in bb'$,

iv) $f(a) \in X$ y $f(b) \in bb'$,

v) $f(a), f(b) \in bb'$,

vi) $f(a), f(b) \in X$

Esto implica que $f(a)$ y $f(b)$ pertenecen al siguiente respectivo subcontinuo propio de X':

i) $a'a$,

ii) $f(a)a \cup X$,

iii) $f(a)a \cup X \cup bf(b)$,

iv) $X \cup bb'$,

v) bb' y

vi) X.

Esto contradice el que X' es irreducible entre $f(a)$ y $f(b)$ y prueba 4). Supongamos, por ejemplo, que $f(a) = a'$ y $f(b) = b'$. Entonces X' es irreducible entre a' y b'.

Definamos $M' = a'b' \subset M$ y consideremos los conjuntos:

$$\mathcal{C}_{a'} = Cl_{C(Y)}\left(\{A \in C(a', Y) : b' \notin A\}\right),$$

$$\mathcal{C}_{b'} = Cl_{C(Y)}\left(\{A \in C(b', Y) : a' \notin A\}\right),$$

$$\mathcal{C}' = \{A \in C(Y) : a', b' \in A\} \text{ y}$$

$$\Lambda' = \mathcal{C}_{a'} \cup \mathcal{C}_{b'} \cup \mathcal{C}' \cup C(M')$$

Entonces, $C(Y) = C(X') \cup \Lambda'$ y, por el trabajo que hemos realizado, cambiando X por X' (observemos que X' tiene propiedades análogas a las de X) resulta que:

5) Λ' es un triángulo, homeomorfo a Λ, con vértices $\{a'\}$, $\{b'\}$ y X', en donde:

* el lado que une a los vértices $\{a'\}$ y $\{b'\}$ es $F_1(M')$,
* el lado que une a los vértices $\{a'\}$ y $\{X'\}$ es $C(a', X')$,
* el lado que une a los vértices $\{b'\}$ y $\{X'\}$ es $C(b', X')$,
* $C(X') \cap \Lambda' = C(a', X') \cup C(b', X')$.

Afirmamos que:

6) $Int_{C(Y)}(\Lambda') = \Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')]$.

Para probar 6), notemos primero que

$$[C(a', X') \cup C(b', X')] \cap Int_{C(Y)}(\Lambda') = \varnothing. \qquad (9.3)$$

En efecto, supongamos que existe $A \in [C(a', X') \cup C(b', X')] \cap Int_{C(Y)}(\Lambda')$. Tomemos $\vartheta > 0$ tal que $B_\vartheta(A) \subset \Lambda'$ y supongamos, sin perder generalidad, que $A \in C(a', X')$. Si $A = \{a'\}$ entonces, tomando un elemento $c \in a'a - \{a'\}$ tal que $diám(a'c) < \vartheta$, resulta que $\{c\} \in B_\vartheta(A)$. Luego, $\{c\} \in \Lambda'$, lo cual es un absurdo.

Supongamos que $\{a'\} \subsetneq A \subsetneq X'$. Como X' es irreducible entre a' y b', $b' \notin A$. Tomemos un punto $c \in (A \cap a'a) - \{a', a\}$ tal que $diám(a'c) < \vartheta$ y $a'c \subsetneq A$. Notemos que $A - \{c\}$ posee justo dos componentes C_1 y C_2 en donde, sin perder generalidad, $a' \in C_1$. Sea $B = C_2 \cup \{c\}$. Entonces, B es un subcontinuo de A tal que $B \in B_\vartheta(A)$. Luego, $B \in \Lambda'$. Esto es absurdo, ya que B es un subcontinuo propio de X que no posee ni a a' ni a b'

Supongamos por último que $A = X'$. Tomemos un punto $c \in (A \cap a'a) - \{a', a\}$ y un punto $e \in (A \cap bb') - \{b, b'\}$, tales que $diám(a'c) < \vartheta$ y $diám(eb') < \vartheta$. Notemos que $A - \{c, e\}$ posee justo tres componentes C_1, C_2 y C_3. Podemos nombrarlas de manera que $a' \in C_1$ y $b' \in C_3$. Sea $B = C_2 \cup \{c, e\}$. Entonces, B es un subcontinuo de A tal que $B \in B_\vartheta(A)$. Luego, $B \in \Lambda'$. Esto es absurdo, ya que B es un subcontinuo propio de X que no posee ni a a' ni a b'. Esto prueba (9.3). Por tanto,

$$Int_{C(Y)}(\Lambda') \subset \Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')].$$

Para probar la otra contención, notemos primero que, debido a que

$$C(X') \cap \Lambda' = C(a', X') \cup C(b', X'),$$

y a que $C(Y) = C(X') \cup \Lambda'$, resulta que

$$C(Y) - C(X') = \Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')].$$

Ahora bien, $C(Y) - C(X')$ es abierto en $C(Y)$. Luego,

$$\Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')]$$

es un subconjunto abierto de $C(Y)$, contenido en Λ'. De aquí que

$$\Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')] \subset Int_{C(Y)}(\Lambda').$$

De esta manera, resulta que

$$Int_{C(Y)}(\Lambda') = \Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')].$$

Esto prueba 6).

Como consecuencia inmediata de 6), tenemos que:

7) $Fr_{C(Y)}(\Lambda') = C(a', X') \cup C(b', X')$.

De manera análoga se muestra que:

8) $Int_{C(Y)}(\Lambda) = \Lambda - [C(a, X) \cup C(b, X)]$.

y

9) $Fr_{C(Y)}(\Lambda) = C(a, X) \cup C(b, X)$.

Afirmamos que:

10) $\Lambda' \subset \Lambda$.

Para ver esto, sea $A \in \Lambda'$. Como $C(M') \subset C(M) \subset \Lambda$ supongamos, para efectos de la demostración, que $A \in \mathcal{C}_{a'} \cup \mathcal{C}_{b'} \cup \mathcal{C}'$ y que $A \not\subseteq M$. En cualquier caso, debido a que A no está contenido en M e intersecta a M, $a \in A$ o bien $b \in A$. Si $a, b \in A$ resulta, por definición, que $A \in \mathcal{C} \subset \Lambda$. Si $a \in A$ y $b \notin A$, entonces $A \in \mathcal{C}_a \subset \Lambda$. Finalmente, si $b \in A$ y $a \notin A$, resulta que $A \in \mathcal{C}_b \subset \Lambda$. De esta manera se cumple 10).

Sea $\Gamma = \Lambda - Int_{C(Y)}(\Lambda')$. De acuerdo con 10) y los modelos geométricos de Λ y Λ', Γ es un hexágono con vértices $\{a\}$, X, $\{b\}$, $\{b'\}$, X' y $\{a'\}$, en donde

- el lado que une a los vértices $\{a\}$ y X es $C(a, X)$,
- el lado que une a los vértices X y $\{b\}$ es $C(b, X)$,
- el lado que une a los vértices $\{b\}$ y $\{b'\}$ es $F_1(bb')$,
- el lado que une a los vértices $\{b'\}$ y X' es $C(b', X')$,
- el lado que une a los vértices X' y $\{a'\}$ es $C(a', X')$,
- el lado que une a los vértices $\{a'\}$ y $\{a\}$ es $F_1(a'a)$.

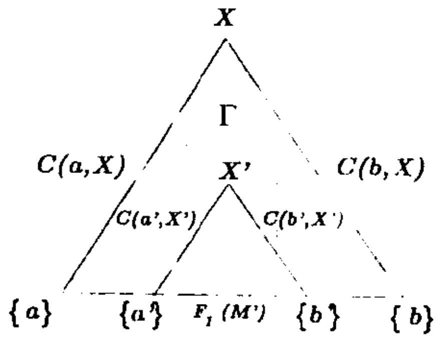

Figura 9.7:

Notemos que, por 6),

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Lambda - \{\Lambda' - [C(a', X') \cup C(b', X')]\} \\ &= (\Lambda - \Lambda') \cup \{\Lambda \cap [C(a', X') \cup C(b', X')]\} \\ &= (\Lambda - \Lambda') \cup [C(a', X') \cup C(b', X')] .\end{aligned}$$

Es decir,

$$\Gamma = (\Lambda - \Lambda') \cup [C(a', X') \cup C(b', X')] . \tag{9.4}$$

Afirmamos que:

11) $C(X') = C(X) \cup \Gamma$.

Para ver esto, sea $A \in C(X')$. Como $C(Y) = C(X') \cup \Lambda' = C(X) \cup \Lambda$, resulta que $A \in C(X) \cup \Lambda$. Supongamos que $A \in \Lambda$. Si $A \in \Lambda'$ entonces, de acuerdo con 5) y (9.4)

$$A \in C(X') \cap \Lambda' = C(a', X') \cup C(b', X') \subset \Gamma.$$

Si $A \notin \Lambda'$, entonces $A \in \Lambda - \Lambda' \subset \Gamma$, según (9.4). Por tanto, $A \in C(X) \cup \Gamma$. Esto prueba que $C(X') \subset C(X) \cup \Gamma$. Para ver la otra contención, sea $A \in C(X) \cup \Gamma$. Debido a que $C(Y) = C(X') \cup \Lambda' = C(X) \cup \Lambda$, $A \in C(X') \cup \Lambda'$. Supongamos, para efectos de la demostración, que $A \in \Lambda'$. Entonces, $A \in C(X) \cap \Lambda'$ o bien $A \in \Gamma \cap \Lambda'$. No es difícil probar que $C(X) \cap \Lambda' = \varnothing$, así que $A \in \Gamma \cap \Lambda'$. Ahora bien, por (9.4)

$$A \in C(a', X') \cup C(b', X') \subset C(X'),$$

así que $A \in C(X')$. Esto prueba que $C(X) \cup \Gamma \subset C(X')$ y, así, 11) se cumple. Afirmamos ahora que:

12) $C(X) \cap \Gamma = C(a, X) \cup C(b, X)$.

En efecto, tomando en cuenta que $C(X) \cap \Lambda' = \varnothing$ resulta, por 3) y (9.4) que

$$\begin{aligned} C(X) \cap \Gamma &= [(\Lambda - \Lambda') \cap C(X)] \cup \{[C(a', X') \cup C(b', X')] \cap C(X)\} \\ &= C(X) \cap \Lambda \\ &= C(a, X) \cup C(b, X). \end{aligned}$$

Ahora bien, de acuerdo a los modelos geométricos de Λ y Γ, Γ es un hexágono contenido en el triángulo Λ y dichos polígonos comparten los lados $C(a, X)$ y $C(b, X)$. Por tanto, es posible encontar un homeomorfismo $h : \Lambda \to \Gamma$ que no mueve al conjunto $C(a, X) \cup C(b, X)$, la unión de los lados compartidos.

Notemos que $C(Y) = C(X) \cup \Lambda$ y que $C(X') = C(X) \cup \Gamma$. Definamos una función $k : C(Y) \to C(X')$ como sigue:

$$k(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in Cl_{C(X)}\,(C(X) - \Lambda) \\ h(A), & \text{si } A \in \Lambda \end{cases}.$$

Es fácil ver que k es un homeomorfismo, así que $C(Y) \approx C(X')$. Debido a que $X' \approx X$, resulta que $C(X') \approx C(X)$. Por lo tanto, $C(Y) \approx C(X)$. ∎

9.2 El Círculo de Varsovia.

Consideremos de nuevo los continuos X_0 y Y_0, descritos en (9.1) y (9.2). Como consecuencia del teorema anterior, sabemos que $C(X_0)$ es homeomorfo a $C(Y_0)$. Como caso particular del siguiente teorema, si W es un continuo tal que $C(X_0) \approx C(W)$ entonces $W \approx X_0$ o bien $W \approx Y_0$. Por tanto, Y_0 es esencialmente el único continuo no homeomorfo a X_0, que impide que X_0 tenga hiperespacio único.

Teorema 183 *Supongamos que $X_1 = V \cup R$ es una compactación métrica del espacio $V = [a, \infty)$, cuyo residuo es un arco $R = ce$. Supongamos que $S = bc$ es un arco tal que $S \cap X_1 = \{c\}$ y sea $X = X_1 \cup S$. Si Y es un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces Y es homeomorfo a X o bien Y es homeomorfo a $X \cup T$, en donde T es un arco con extremos a y b tal que $X \cap T = \{a, b\}$.*

Demostración. Supongamos que Y es un continuo tal que $C(X) \approx C(Y)$ y sea $h : C(Y) \to C(X)$ un homeomorfismo. Afirmamos que:

1) Y es atriódico.

En efecto si, por el contrario, Y posee un triodo entonces $C(Y)$ tiene una 3-celda. Entonces $C(X)$ posee una 3-celda, lo cual implica que X contiene un triodo. Debido a que esto es absurdo, 1) se cumple. Afirmamos ahora que:

2) Y no es localmente conexo.

Para ver esto, supongamos que Y es localmente conexo. Entonces $C(Y)$ es localmente conexo. Luego $C(X)$ es localmente conexo, y por consiguiente, también X. Esto es absurdo, luego 2) es cierto. Afirmamos ahora que:

3) si $y \in Y$ entonces no existe un 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $h(\{y\}) \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$.

Para probar 3) sea $y \in Y$. Supongamos que existe un 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $h(\{y\}) \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Hagamos $\mathcal{D}' = h^{-1}(\mathcal{D})$. Es claro que $\mathcal{D}'$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{y\} \in \mathcal{D}' - o(\mathcal{D}')$. Por tanto, aplicando el Teorema 96, existen triodos arbitrariamente cercanos a $\{y\}$. Esto contradice 1) y prueba 3).

Afirmamos ahora que:

4) $h(F_1(Y)) \subset F_1(X) \cup C(a,X) \cup C(b,X) \cup C(e,R)$.

En efecto, supongamos que 4) no es cierto y tomemos un punto $y \in Y$ tal que
$$K = h(\{y\}) \notin F_1(X) \cup C(a,X) \cup C(b,X) \cup C(e,R).$$
Entonces K satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

i) K es un subcontinuo no degenerado de V tal que $a \notin K$,

ii) K es un subcontinuo no degenerado de $R \cup S$ tal que $b, e \notin K$,

iii) $K \cap (V - \{a\}) \neq \emptyset$ y $R \subsetneq K \cap (R \cup S) \subsetneq R \cup S$,

iv) $R \subsetneq K \subsetneq R \cup S$,

v) $K \in C(R, X_1)$ y $K \cap (V - \{a\}) \neq \emptyset$.

Si K es de la forma i) o bien ii) entonces es claro que existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$ contradiciendo así 3). Supongamos que K es de la forma iii). Entonces existen $x \in S - \{b, c\}$ y $f \in V - \{a\}$ tales que $K = R \cup cx \cup [f, \infty)$. Definamos $A_1 = R \cup cx$, $A_2 = R \cup [f, \infty)$, $B_1 = A_1 \cup xb$, $B_2 = A_2 \cup [f, a]$ y $B = B_1 \cup B_2$.

Es claro que A_1 y A_2 son subcontinuos propios de $K = A_1 \cup A_2$, que B_1 y B_2 son subcontinuos propios de $B = X$, que $A_1 \subsetneq B_1$ y que $A_2 \subsetneq B_2$. Notemos ahora que
$$A_1 \cap A_2 = (R \cup cx) \cap (R \cup [f, \infty)) = R \cup (cx \cap [f, \infty)) = R$$
y
$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap [f,a]) \cup (xb \cap A_2) \cup (xb \cap [f,a]) \\ &= R, \end{aligned}$$
así que $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = R \in C(X)$. Entonces, por el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto contradice 3).

Supongamos ahora que K es de la forma iv). Entonces existe $x \in S-\{b,c\}$ tal que $K = R \cup cx$. Definamos $A_1 = R$, $A_2 = xc$, $B_1 = X_1$, $B_2 = S$ y $B = B_1 \cup B_2$. Es claro que A_1 y A_2 son subcontinuos propios de $K = A_1 \cup A_2$, que B_1 y B_2 son subcontinuos propios de $X = B_1 \cup B_2$, que $A_1 \subsetneq B_1$ y que $A_2 \subsetneq B_2$. Además $A_1 \cap A_2 = \{c\}$ y $B_1 \cap B_2 = X_1 \cap S = \{c\}$. Entonces, por el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto contradice 3).

Supongamos por último que es de la forma v). Entonces existe $f \in V-\{a\}$ tal que $K = R \cup [f, \infty)$. Fijemos un punto $g \in (f, \infty)$ y sean $A_1 = R \cup [g, \infty)$, $A_2 = [g, f]$, $B_1 = A_1 \cup S$ y $B_2 = A_2 \cup [f, a]$. Entonces, es claro que A_1 y A_2 son subcontinuos propios de $K = A_1 \cup A_2$, que B_1 y B_2 son subcontinuos propios de $X = B_1 \cup B_2$, que $A_1 \subsetneq B_1$ y que $A_2 \subsetneq B_2$. Además $A_1 \cap A_2 = \{g\}$ y $B_1 \cap B_2 = \{g\}$. Entonces, por el Teorema 97, existe una 2-celda $\mathcal{D}$ en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{D} - o(\mathcal{D})$. Esto contradice 3), y prueba así 4).

Es claro que:

- $C(a, X)$ es un arco ordenado de $\{a\}$ a X en $C(X)$,
- $C(b, X)$ es un arco ordenado de $\{b\}$ a X en $C(X)$,
- $C(e, R)$ es un arco ordenado de $\{e\}$ a R en $C(X)$,
- $C(a, X) \cap F_1(X) = \{a\}$,
- $(F_1(X) \cup C(a, X)) \cap C(b, X) = \{\{b\}, X\}$,
- $(F_1(X) \cup C(a, X) \cup C(b, X)) \cap C(e, R) = \{e\}$.

Por tanto,
$$F_1(X) \cup C(a, X) \cup C(b, X) \cup C(e, R)$$
es un continuo homeomorfo a $X \cup P \cup Q$, en donde P y Q son arcos ajenos, los extremos de P son a y b, un extremo de Q es e, $P \cap X = \{a, b\}$ y $Q \cap X = \{e\}$. Entonces, de acuerdo con 4), podemos considerar que Y es un subcontinuo de $X \cup P \cup Q$. Más aún, por 1) y 2), Y es un subcontinuo no localmente conexo y atriódico de $X \cup P \cup Q$.

Ahora bien, si Y es un subcontinuo no localmente conexo de $X \cup P \cup Q$, entonces Y es homeomorfo a uno de los siguientes continuos:

i) X,

iii) X_1,

iv) $X \cup P$,

v) $X \cup Q$,

vi) $X \cup P \cup Q$

Si $Y \approx X_1$ entonces Y es una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Entonces Y tiene hiperespacio único (Teorema 118). Debido a que $C(X) \approx C(Y)$, lo anterior implica que X es un también una compactación métrica de un semirayo con residuo no degenerado. Esto es absurdo, por lo que Y no es homeomorfo a X_1.

Notemos que $X \cup Q$ es un triodo con corazón R y que $X \cup Q \subset X \cup P \cup Q$. Por tanto, los continuos $X \cup Q$ y $X \cup P \cap Q$ contienen triodos. De esta manera, como Y es un subcontinuo atriódico y no localmente conexo de $X \cup P \cup Q$, necesariamente Y es homeomorfo a X, o bien Y es homeomorfo a $X \cup P$. Esto termina la demostración. ∎

De manera similar, se prueba el siguiente teorema.

Teorema 184 *Supongamos que $X_1 = V \cup R$ es una compactación métrica del espacio $V = [a, \infty)$, cuyo residuo es un arco $R = ce$. Supongamos que $S = ac$ es un arco tal que $S \cap X_1 = \{a, c\}$ y sea $X = X_1 \cup S$. Si Y es un continuo tal que $C(X)$ y $C(Y)$ son homeomorfos, entonces Y es homeomorfo a X o bien Y es homeomorfo a $X_1 \cup T$, en donde T es un arco con extremos e y f tal que $X_1 \cap T = \{c\}$.*

Por tanto, esencialmente el único continuo no homeomorfo al círculo de Varsovia Y_0, que impide que Y_0 tenga hiperespacio único, es el continuo X_0.

DEDICATORIA DICK.

A todos aquellos que participaron en esos gloriosos seminarios de los jueves por la noche. A todas aquellas decepciones, porque gracias a ellas este trabajo llegó a su fin. A quien solo me utilizo como descanso emocional y salida de paso, a quien nunca le interesé, a quien sólo estuvo por el momento. A Philip K. Dick, por su forma magra y esquizofrénica de haceme ver el mundo. A la chica de los cabellos oscuros, Wrocław. A esas decepciones que me llevaron a refugiarme cada vez más y más en el mundo de los hiperespacios. Muchas gracias.

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo Coahuila. 1994.

[2] R. D. Anderson, *Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals*, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), 216-220.

[3] M. Boege, *C-determinación en abanicos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., 1998.

[4] D. W. Curtis y R.M. Schori, *2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.

[5] D. W. Curtis y R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19-38.

[6] R. E. Chandler, *Hausdorff Compactifications*, Marcel Decker, Inc. New York and Basel, 1976.

[7] J. J. Charatonik, *On Fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 54 (1967).

[8] J. J. Charatonik, *Open Mappings of Universal Dendrites*, Bull Pol. Acad. Sci. 28 (1980), 489-494.

[9] R. Duda, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph I*, Fund. Math. 62 (1968), 265-286.

[10] R. Duda, *Correction to the paper "On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I"*, Fud. Math., 69 (1970), 207-211.

[11] C. Eberhart, *Intervals of Continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 220-224.

[12] C. Eberhart y S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 279-288.

[13] J. T. Goodykoontz, Jr., *Connectedness im kleinen and local connectedness in 2^X and $C(X)$*, Pac. J. Math. 53 (1974), 387-397.

[14] J. T. Goodykoontz, Jr., *More on connectedness im kleinen and local connectedness in $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 65, No. 2 (1977), 357-364.

[15] M. Handel, *On certain sums of Hilbert cubes*, General Topology Appl. 9 (1978), 19-28.

[16] J. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1988.

[17] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1948.

[18] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*. Fund. Mat. 130 (1988), 57-65.

[19] A. Illanes, *Semi-boundaries in hyperspaces*, Top. Proc. Vol. 16 (1991), 63-87.

[20] A. Illanes y S.B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[21] A. Illanes, *Chainable continua are not C-determined*, por aparecer en Topology Appl.

[22] A. Illanes, *Fans are not C-determined*, por aparecer en Colloq. Math.

[23] Ott-Heinrich Keller, *Die homoimorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilberstshen raum*, Math. Ann., 105 (1931), 748-758.

[24] S. Macías, *On C-determined continua*. Glasnik Mat., 32, No. 52 (1997), 259-262.

[25] A. Mercado, *Propiedades topológicas de continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo Coahuila, 1998.

[26] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

[27] S. B. Nadler, Jr, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1992.

[28] R. H. Sorgenfrey, *Concerning triodic continua*, Amer. J. of Math., 66 (1944), 439-460.

[29] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math., 106 (1980), 31-40.

[30] H. Whitney, *Regular families of curves I*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 18 (1932), 255-278.

[31] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28 (1942).