

00382

Lej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

pcj

Grado en Ciencias Exactas  
1957

TRANSPORTE ELECTRONICO EN SISTEMAS  
MESOSCOPICOS: UN ENFOQUE BASADO EN  
MATRICES DE DISPERSION ALEATORIAS  
A UNA Y VARIAS ENERGIAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS  
( F I S I C A )  
P R E S E N T A :  
VICTOR ARTURO GOPAR SANCHEZ

MEXICO, D. F.

1999

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

272847.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION

DISCONTINUA.

## Agradecimientos

Numerosas por nombrar son las personas que de una u otra manera han ayudado en la elaboración de esta tesis, a todas ellas expreso mi agradecimiento.

De manera especial agradezco a Pier por su paciencia para conmigo y el entusiasmo hacia la Física que me transmitió todos estos años y por supuesto, los cafés que compartimos.

También a los Dres. : Eleuterio Castaño Tostado, Gastón García Calderón, Francois Leyvraz Waltz, Guillermo Monsiváis Galindo, Pedro Pereyra y Víctor Romero Rochín, doy mi agradecimiento por sus comentarios que ayudaron a mejorar la tesis.

Por último, deseo expresar mi agradecimiento a todos en casa. Simplemente, sin ellos todo esto hubiera sido imposible.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La matriz de dispersión y su relevancia para el transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos.</b>	<b>11</b>
2.1	La matriz de dispersión $S$ .	12
2.2	Un ejemplo de la matriz $S$ : potencial $\delta$ .	13
2.3	Propiedades generales de la matriz $S$ .	15
2.4	El transporte electrónico cuántico visto como un problema de dispersión.	15
2.5	Teoría de matrices aleatorias para $S$ : enfoque microscópico.	18
2.6	Teoría de matrices aleatorias para $S$ : enfoque de la teoría de la información.	21
2.7	El kernel de Poisson para un canal: muestreo de $S$ sobre el eje de la energía.	22
2.7.1	Verificación del kernel de Poisson utilizando un potencial $\delta$ .	24
2.8	El Kernel de Poisson para un canal: muestreo de $S$ sobre el ensemble.	25
2.9	El kernel de Poisson para $N$ canales.	27
2.10	Ejemplos de aplicaciones del kernel de Poisson a cavidades.	29
2.10.1	Aplicaciones a sistemas sin procesos directos, $\langle S \rangle = 0$ .	29
2.10.2	Aplicaciones a sistemas en presencia de procesos directos. $\langle S \rangle \neq 0$ .	30
<b>3</b>	<b>Función de <math>S</math> a dos energías: el tiempo de retardo y su aplicación a la capacitancia de un condensador mesoscópico.</b>	<b>33</b>
3.1	Distribución del tiempo de retardo para un canal, $w(\tau)$ .	34
3.2	Aplicación de $w(\tau)$ : Distribución de la admitancia de un capacitor mesoscópico.	42

<b>4</b>	<b>Reducción del problema de dispersión con <math>\langle S \rangle \neq 0</math> a <math>\langle S \rangle = 0</math> para funciones de <math>S</math> a una y varias energías.</b>	<b>47</b>
4.1	Relación entre matrices de dispersión con y sin procesos directos.	48
4.2	Reducción del problema de dispersión con $\langle S \rangle \neq 0$ a $\langle S \rangle = 0$ .	50
4.3	Distribución del tiempo de retardo para $\langle S \rangle \neq 0$ .	53
<b>5</b>	<b>Ergodicidad y el kernel de Poisson en un sistema desordenado unidimensional.</b>	<b>59</b>
5.1	Hipótesis utilizadas para la deducción del kernel de Poisson.	60
5.2	Discrepancias con el kernel de Poisson.	61
5.3	Sistema desordenado unidimensional: Proceso telegráfico aleatorio.	62
5.4	Distribución de $S$ sobre el ensemble.	63
5.4.1	Características generales del sistema telegráfico.	64
5.4.2	Comparación de la distribución de $S$ sobre el ensemble con el kernel de Poisson.	67
5.5	Distribución de $S$ sobre la energía.	70
<b>6</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>79</b>
<b>7</b>	<b>Apéndice A.</b>	<b>81</b>
7.1	$\langle S \rangle$ constante a una energía fija ( $ka \gg 1$ ).	81
7.2	$\frac{\xi}{a}$ constante a una energía fija ( $ka \gg 1$ ).	83
7.3	Aumento de $\xi$ con la disminución de anchura media de los potenciales ( $ka \ll 1$ ).	84

# Capítulo 1

## Introducción

En la década pasada una serie de experimentos realizados en circuitos eléctricos muy pequeños ( $\sim \mu\text{m}$ ) abrieron una nueva línea de investigación en la Física: el estudio del transporte electrónico en “sistemas mesoscópicos”. Aquellos primeros experimentos mostraron efectos de interferencia cuántica, vistos hasta esa fecha únicamente en el vacío, por ejemplo el efecto Aharonov-Bohm<sup>1</sup>[1, 2]. Aunado a estos experimentos el estudio de la matriz de dispersión cobró un gran auge debido a su relevancia en el entendimiento del proceso de transporte en los nuevos sistemas mesoscópicos. En esta tesis, presentamos precisamente un estudio de la matriz de dispersión enfocado al transporte electrónico en dichos sistemas.

Los sistemas mesoscópicos son circuitos eléctricos del orden de unas cuantas micras; de hecho, el término mesoscópico se aplica a estos sistemas para hacer referencia a sus tamaños típicos, intermedios entre las dimensiones microscópicas y macroscópicas. Una característica esencial de estos circuitos es la conservación de la coherencia de fase de la función de onda de los electrones en todo el sistema; es decir,  $l_\phi > L$ , donde  $l_\phi$  es la longitud que recorre un electrón a través de la muestra sin que su función de onda pierda la coherencia de fase y  $L$  el tamaño característico del sistema. Usualmente se habla de coherencia en ondas que viajan libremente; en nuestro contexto, los electrones son dispersados y se habla de coherencia en el sentido siguiente: el cambio en la fase de la función de onda de los electrones al ser dispersados elásticamente está, en principio, bien determinado, en otras palabras, existe una memoria en la fase de la función de onda, aún cuando los electrones son

---

<sup>1</sup>El efecto Aharonov-Bohm establece que si un haz de electrones se divide coherentemente en dos haces de electrones y luego se recombinan en un detector de manera que el haz dividido encierre un flujo magnético  $\Phi$ , la función de onda adquiere un fase  $\delta = 2\pi\Phi/\Phi_0$ , donde  $\Phi_0 = h/e$  con  $c = 1$ .

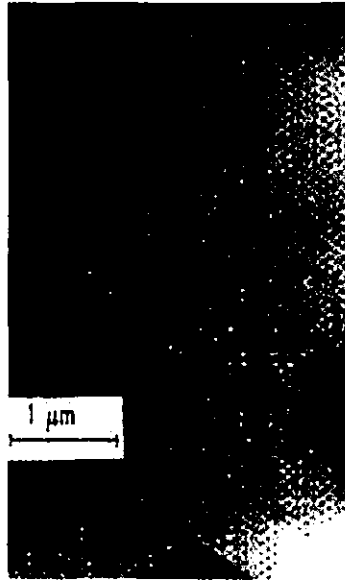


Figura 1.1: Fotografía del circuito eléctrico utilizado para observar el efecto Aharonov-Bohm. El campo magnético se aplica perpendicularmente al anillo, el cual está fabricado con Au policristalino. El ancho de los alambres con que está formado el anillo es de 38 nm, mientras que el diámetro de éste es de 829 nm. Figura tomada de [1].

dispersados. Esta propiedad de los sistemas mesoscópicos es precisamente la que hace posible observar efectos de interferencia cuántica. En los circuitos electrónicos comunes es imposible ver tales efectos, pues las dispersiones inelásticas destruyen la coherencia de fase.

La conducción electrónica se divide en dos regímenes para su estudio. En el llamado régimen difusivo, los electrones sufren una serie de colisiones elásticas con las impurezas del material, sin perder la coherencia de fase; es decir,  $l_\phi > L > l$ , donde  $l$  es el camino libre medio elástico. Para minimizar cualquier contribución fonónica que pudiera destruir la coherencia de fase, los experimentos se realizan a temperaturas muy bajas ( $\sim$  mK). En la figura 1.1 se muestra el circuito utilizado en uno de los primeros y más importantes experimentos en el campo de la Física Mesoscópica; en este experimento se logró observar el efecto Aharonov-Bohm, mencionado anteriormente. El anillo que se muestra en la figura está hecho de Au policristalino. En un metal policristalino el camino libre medio,  $l$ , es del orden de cientos de Angstroms, mientras que la longitud de coherencia,  $l_\phi$ , puede llegar a ser del orden de micrones.



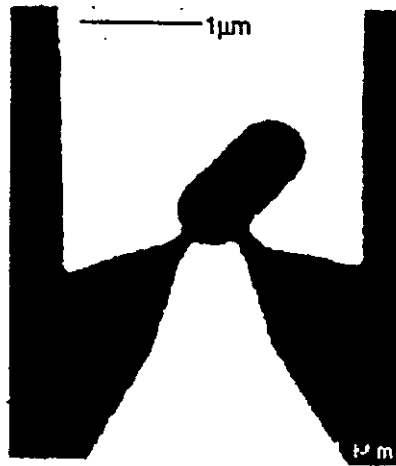


Figura 1.2: Ejemplo experimental de un punto cuántico. La cavidad balística (región oscura en forma de estadio) fabricada en GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  se encuentra conectada a dos puntos de contacto con un ancho de  $0.14\mu\text{m}$ . Figura tomada de [3].

Al otro régimen de transporte se le conoce como régimen balístico ( $l_\phi > l > L$ ). En éste, al contrario del difusivo, los electrones viajan libremente a través de la muestra y la dispersión electrónica se debe principalmente a las fronteras del sistema. Los llamados “puntos cuánticos” o “cavidades balísticas” son ejemplos de sistemas electrónicos que trabajan en este régimen —en la mayor parte de la tesis nos ocuparemos de estos sistemas— que en los últimos años han cobrado mucho interés por el estudio de sus propiedades de transporte. En la figura 1.2 se muestra una cavidad balística en forma de estadio conectada a dos puntas de prueba [3]. La microestructura está fabricada en GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  con un camino libre medio de aproximadamente  $2.6\mu\text{m}$ .

Desde el punto de vista teórico Landauer [5, 6] y Büttiker [7] trataron el transporte electrónico en sistemas mesoscópicos como un problema de dispersión y de forma natural la matriz de dispersión,  $S$ , del sistema pasó a ser fundamental en la descripción de la conducción electrónica<sup>2</sup>.

Un hecho importante es que experimentalmente no se tiene control sobre la configuración con que las impurezas se encuentran en un sistema desorde-

<sup>2</sup>Otra cantidad, relacionada con la matriz de dispersión, muy utilizada en el estudio del transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos es la matriz de transferencia [8]-[13].

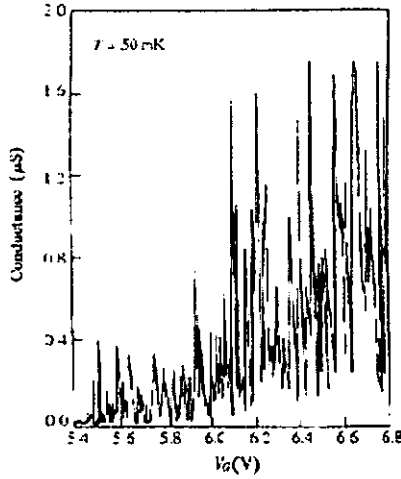


Figura 1.3: En esta gráfica se muestran las fluctuaciones en la conductancia como función del voltaje de compuerta,  $V_G$  en un transistor MOS. En este experimento  $V_G$  controla la densidad de electrones. Figura tomada de [4].

nado, por lo que los sistemas pueden ser “macroscópicamente iguales, pero microscópicamente distintos”. Esto les da un carácter estocástico a los sistemas mesoscópicos: por ejemplo, en un sistema desordenado el efecto de interferencia depende no sólo del número de dispersores, sino de la distancia relativa entre los dispersores, es decir, de la configuración particular de los dispersores en el sistema, de manera que de una muestra a otra pueden presentarse fluctuaciones en la conductancia. Experimentalmente, esas fluctuaciones se observan aplicando un campo magnético a una sola muestra, esto es, la aplicación del campo cambia la fase de los electrones, provocando que la relación de la fase entre las diferentes trayectorias de los electrones varíe aleatoriamente. Esto equivale estadísticamente a cambiar la configuración de los dispersores (se tiene otra muestra del sistema). En la figura 1.3 mostramos un ejemplo experimental donde las fluctuaciones en la conductancia se deben a que se varía la densidad de electrones en el sistema. Para el caso de las cavidades balísticas, las fluctuaciones en la conductancia se deben fundamentalmente a la dinámica caótica de estos sistemas. En los sistemas mesoscópicos se habla de dispersión cuántica caótica en el sentido que el sistema clásico equivalente presenta una dinámica caótica definida, por ejemplo, por su exponente de Liapunov; ejemplos de estos sistemas son el billar de Sinai y el estadio de Bunimovich [14].

Esta “estocasticidad” en los sistemas mesoscópicos nos lleva a plantear el

problema del transporte electrónico desde un punto de vista estadístico. Es aquí donde entra la necesidad de llevar a cabo un *análisis estadístico de la matriz de dispersión* asociada a estos sistemas, por medio de *ensembles* de matrices de dispersión.

La teoría de matrices aleatorias (RMT, *Random Matrix Theory*) introducida por Wigner y Dyson [15] en los años cincuentas en conexión con el estudio de las propiedades estadísticas de las resonancias en problemas de dispersión en núcleos, también ha servido para estudiar las propiedades de transporte en sistemas mesoscópicos con bastante éxito, tanto en el régimen difusivo como en el balístico. Pero RMT no sólo se ha aplicado con éxito a estos nuevos sistemas, sino también a problemas de dispersión de ondas en cavidades de microondas [16], o bien, en problemas de dispersión de luz en medios inhomogéneos [17]; es decir, las aplicaciones de la teoría de matrices aleatorias abarcan sistemas que van del orden de magnitud de  $10^{-15}\text{m}$  (núcleos atómicos) a  $10^{-3}\text{m}$  (cavidades de microondas). Sin embargo, todos estos sistemas con órdenes de magnitud muy distintos presentan una característica común: todos ellos presentan dispersión caótica. La conexión entre RMT y los sistemas clásicamente caóticos está dada a través de una conjetura [18, 14], la cual propone que el espectro de los sistemas clásicamente caóticos presenta las mismas propiedades de fluctuación que las predichas por la teoría de matrices estocásticas. En el capítulo siguiente veremos algunos ejemplos de aplicaciones de RMT al transporte en cavidades balísticas, realizadas en el pasado [19, 20].

Dentro de la teoría de matrices aleatorias existen diferentes puntos de vista para el estudio de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión. El enfoque microscópico desarrollado por el grupo de Heidelberg [21, 22] parte de un modelo estadístico de la matriz Hamiltoniana para construir la matriz de dispersión del sistema. Otro enfoque no hace referencia al Hamiltoniano del sistema, sino que lleva a cabo suposiciones a nivel mismo de la matriz de dispersión [23] y bajo un criterio de máxima entropía [24]-[28] se obtienen resultados que dependen únicamente de parámetros físicamente relevantes al problema. A este enfoque se le conoce como de "máxima entropía" o de "teoría de la información". Más adelante presentaremos con mayor detalle este punto de vista, pues en la tesis adoptamos un enfoque muy cercano a éste. Cabe mencionar que los modelos microscópico y de máxima entropía son equivalentes [29].

El punto de vista del análisis estadístico de la matriz  $S$  sin pasar por el Hamiltoniano de los sistemas ha tenido gran éxito; sin embargo, este enfoque ha estado restringido al estudio de funciones de  $S$  a *una sola energía*:  $F(S(E))$ . Un análisis completo de la matriz de dispersión debería incluir

el estudio de funciones de  $S$  a diferentes energías, es decir, funciones de la forma:  $F(S(E_1), S(E_2) \dots S(E_n))$ .

En esta tesis presentamos un primer avance al estudio de propiedades estadísticas de funciones de la matriz de dispersión a *diferentes energías*, dentro de un enfoque cercano al informático. También, para el caso de una sola energía, llevamos a cabo un análisis sobre las condiciones bajo las cuales las predicciones teóricas para la distribución de  $S$  concuerdan con la simulación numérica de un sistema unidimensional desordenado. Este estudio está relacionado con una propiedad fundamental para el estudio estadístico de  $S$  por medio de ensembles: la ergodicidad del ensemble de matrices de dispersión.

La tesis está estructurada de la siguiente manera. Después de esta introducción, en el capítulo siguiente damos algunos conceptos básicos sobre la matriz de dispersión, así como algunas de sus propiedades. Además, en conexión con el problema del transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos, presentamos brevemente los enfoques microscópico y de máxima entropía, desarrollados en el pasado. Debido a que haremos uso de la distribución de la matriz de dispersión, conocida desde hace tiempo como kernel de Poisson, en diferentes partes de la tesis, en este mismo capítulo 2 veremos detalladamente la deducción de tal distribución.

Una vez vistos algunos aspectos básicos de la matriz de dispersión y su estudio estadístico por medio de la teoría de matrices aleatorias, en el capítulo 3 presentamos un primer estudio realizado a una función de más de un punto, como dijimos, dentro de un enfoque cercano al informático: calculamos la distribución de la función de dos puntos o energías conocida como tiempo de retardo, para los 3 tipos de ensembles que veremos más adelante. Aunque ésta distribución ha sido calculada por otro método [30] para un solo tipo de ensemble, sobresale la sencillez con que derivamos nuestros resultados para los diferentes ensembles. La motivación física para estudiar el tiempo de retardo es su relevancia para el transporte electrónico de sistemas mesoscópicos de corriente alterna, de modo que pudimos aplicar nuestros resultados al cálculo de la distribución de capacitancias de un modelo de capacitor mesoscópico. Este fue un primer avance en las aplicaciones de la teoría de matrices estocásticas a sistemas de corriente alterna, anteriormente se habían estudiado sólo sistemas de corriente directa.

En el capítulo 4 damos un paso más en el análisis funciones de  $S$  a diferentes energías. Específicamente mostramos cómo las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión a  $n$  energías con procesos de dispersión directos

caracterizados por<sup>3</sup>  $\langle S \rangle \neq 0$  pueden reducirse al caso más simple:  $\langle S \rangle = 0$ , donde los procesos directos están ausentes. Utilizamos este resultado para extender la distribución del tiempo de retardo que obtuvimos en el capítulo 3 al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ . También, presentamos una verificación numérica para la distribución del tiempo de retardo y la función de autocorrelación de la matriz  $S$ . Este resultado es relevante, pues implica que futuros cálculos de propiedades estadísticas de funciones de la matriz de dispersión pueden llevarse a cabo para el caso de  $\langle S \rangle = 0$ , que resulta en general ser el más simple de estudiar, y luego extenderlos al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ , utilizando el resultado de este capítulo 4. Desde el punto de vista del transporte electrónico, resulta de interés estudiar procesos de dispersión con  $\langle S \rangle \neq 0$  debido a que pueden considerarse sistemas más complejos que los caracterizados por  $\langle S \rangle = 0$ .

Nuestro estudio de las propiedades de la matriz de dispersión finaliza con una función de una energía: la distribución de la matriz de dispersión llamada kernel de Poisson, deducida en el capítulo 2. Este trabajo está motivado por algunas discrepancias encontradas en la literatura con el kernel de Poisson. Mediante la simulación de un sistema unidimensional desordenado, veremos que tales desacuerdos están relacionados con la propiedad de ergodicidad del ensemble de matrices de dispersión. Finalmente, en el capítulo 6 damos las conclusiones de los diferentes problemas tratados en la tesis.

Por último, las publicaciones relacionadas con la conducción electrónica en sistemas mesoscópicos se han incrementado enormemente, en las referencias [31, 32] se hace una revisión de varios trabajos, tanto experimentales como teóricos. También son recomendables las referencias [33, 34], así como [35].

---

<sup>3</sup>A lo largo de la tesis, indicaremos con  $\langle \dots \rangle$  el promedio sobre el ensemble de las diferentes cantidades que utilizemos, a menos que se indique explícitamente otro tipo de promedio.

## Capítulo 2

# La matriz de dispersión y su relevancia para el transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos.

En este capítulo definimos y damos algunas propiedades de la *matriz de dispersión*  $S$ , cantidad fundamental en la teoría de la dispersión y objeto de estudio a lo largo de toda la tesis. Como mencionamos en la Introducción, la matriz de dispersión es una cantidad relevante para la descripción del transporte electrónico cuántico en los sistemas mesoscópicos. Por otra parte, debido a la configuración azarosa de los dispersores en un sistema desordenado o la dinámica caótica de una cavidad balística mesoscópica, se hace necesario un estudio estadístico del transporte electrónico, lo que a su vez trae como consecuencia la necesidad del estudio de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión.

El análisis estadístico de la matriz  $S$  se lleva a cabo utilizando un conjunto representativo o ensemble de matrices  $S$ . En este capítulo daremos una breve descripción de los tipos de ensembles utilizados, así como dos de los enfoques con que las propiedades estadísticas de  $S$  han sido estudiadas, ambos dentro del marco general de la teoría de matrices aleatorias: el enfoque microscópico y el de la teoría de la información o de máxima entropía. En la tesis, adoptaremos un punto de vista basado en la teoría de la información, pero el enfoque microscópico nos será de utilidad para la verificación numérica de nuestros resultados. Para finalizar el capítulo, damos brevemente algunos ejemplos donde el punto de vista de máxima entropía ha sido aplicado al transporte electrónico con éxito.

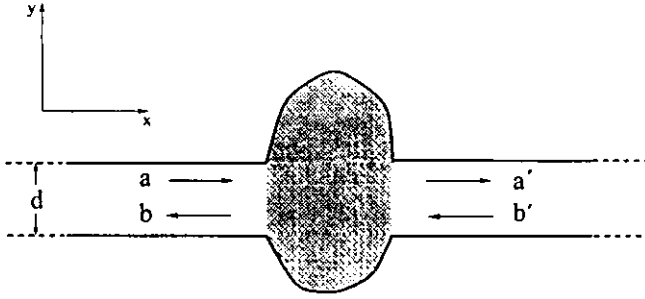


Figura 2.1: Sistema dispersor bidimensional: La parte sombreada representa a la región desordenada del sistema y conectada a ésta se encuentran dos conductores perfectos.

## 2.1 La matriz de dispersión $S$ .

Empecemos definiendo la matriz de dispersión,  $S$ . En la figura 2.1 se muestra un sistema dispersor bidimensional. Esta figura podría representar, por ejemplo, un conductor mesoscópico: supongamos que la parte sombreada de la figura es la región desordenada donde los electrones se dispersan elásticamente y a cada lado de esta región se conectan dos conductores perfectos<sup>1</sup>. Sin considerar interacciones electrón - electrón<sup>2</sup>, lo que reduce el problema al de una sola partícula y, por simplicidad, sin considerar el espín, la función de onda satisface la ecuación de Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad (2.1)$$

donde  $V(x, y)$  es el potencial en la región desordenada. Con la condición de frontera  $\Psi = 0$  en las paredes del sistema, la solución a la Ec. (2.17) fuera de la región desordenada puede escribirse como:

$$\Psi_n^\pm(x, y) \propto \sin(K_n y) \exp(\pm i k_n x), \quad (2.2)$$

donde  $K_n = \frac{n\pi}{d}$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Los números de onda  $K_n$  y  $k_n$  satisfacen la relación:

$$k^2 = K_n^2 + k_n^2 \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>La figura 2.1 también podría representar una cavidad balística mesoscópica, en cuyo caso, la parte sombreada representa la región donde los electrones viajan libremente, pero son dispersados elásticamente por las paredes de la cavidad.

<sup>2</sup>En la actualidad se producen sistemas de muy baja densidad electrónica que hacen posible que en una muy buena aproximación esta interacción sea despreciable [31].

con  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Si  $K_n < k$ , entonces  $k_n^2$  es real y  $\exp(\pm i k_n x)$  representa una onda viajera. En este caso se dice que existen  $N$  canales abiertos. Para una onda incidente con momento  $k$ ,  $N = \text{int}(kd/\pi)$ .

Utilizando la linealidad de la Ec. de Schrödinger y lejos de la zona de dispersión donde las ondas evanescentes<sup>3</sup> son despreciables, podemos desarrollar la función de onda en el conductor izquierdo como una combinación lineal de ondas viajando hacia la derecha (+) y hacia a la izquierda (-):

$$\Psi_n(x, y) = a_n \psi_n^+(x, y) + b_n \psi_n^-(x, y); \quad (2.4)$$

similarmente para el conductor perfecto derecho:

$$\Psi_n(x, y) = a'_n \psi_n^+(x, y) + b'_n \psi_n^-(x, y). \quad (2.5)$$

Ahora, definimos la matriz de dispersión  $S$  de dimensión  $2N \times 2N$  como la matriz que relaciona las ondas entrantes al sistema con las salientes:

$$\begin{bmatrix} b \\ a' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a \\ b' \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde  $a, b, a', b'$  son vectores de dimensión  $N$  formados con los coeficientes de las expansiones (2.4) y (2.5), respectivamente.

La matriz  $S$  puede escribirse de la forma

$$S = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

donde  $r, t$  ( $r', t'$ ) de dimensión  $N \times N$  son los amplitudes de reflexión y transmisión de la onda incidiendo por la parte izquierda (derecha) del conductor.

Para fijar ideas, en la sección siguiente obtenemos la matriz de dispersión para un sistema sencillo, pero ilustrativo: un potencial  $\delta$  con una barrera de potencial infinito. Este ejemplo, además, nos será de utilidad más tarde para verificar numéricamente algunos de nuestros resultados.

## 2.2 Un ejemplo de la matriz $S$ : potencial $\delta$ .

Para dar un ejemplo de la matriz de dispersión que definimos en la sección anterior, calculamos ésta para un sistema formado por un potencial  $\delta$  colocado en  $x = 0$  y una barrera de potencial infinito en  $x = -a$ , Fig. 2.2. En este caso la matriz de dispersión  $S$  es de dimensión  $1 \times 1$  (un canal) y corresponde a la amplitud de reflexión  $r$  del sistema.

<sup>3</sup>Soluciones de la forma (2.2) con  $k_n$  imaginario.



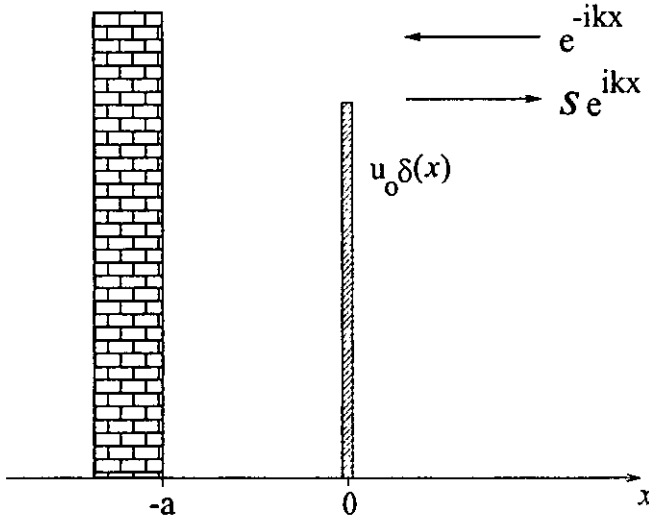


Figura 2.2: Sistema descrito en el texto para ejemplificar la matriz de dispersión.

La ecuación de Schrödinger para el sistema está dada por:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] \Psi(x) = u_0 \delta(x) \Psi(x) \quad (2.8)$$

con  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  y la solución de (2.8) puede escribirse como:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen} k(x+a) & \text{para } -a < x < 0 \\ e^{-ikx} + S e^{ikx} & \text{para } x > 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde los valores de  $A$  y  $S$  quedan determinados por la continuidad de la función de onda en  $x = 0$  y la discontinuidad de su derivada:

$$\left[ \frac{d\Psi}{dx} \right]_{x=0^-}^{x=0^+} = u_0 \Psi(0). \quad (2.10)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de las condiciones de frontera anteriores, encontramos que la matriz de dispersión está dada por la relación [33]:

$$S(k) = - \frac{(\operatorname{sen} ka + \frac{k}{u_0} \operatorname{cos} ka) + i \frac{k}{u_0} \operatorname{sen} ka}{(\operatorname{sen} ka + \frac{k}{u_0} \operatorname{cos} ka) - i \frac{k}{u_0} \operatorname{sen} ka}. \quad (2.11)$$

Como podemos ver,  $S$  es una cantidad compleja de modulo 1. Ésta es una propiedad general de las matrices de dispersión llamada *unitaridad* y es consecuencia de que el flujo de la onda incidente es igual al flujo de la saliente.

También vemos que para  $u_0 \rightarrow 0$ ,  $S = -e^{2ika}$  y para  $u_0 \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow -1$ ; en ambos límites, el valor que toma  $S$  es el correcto.

Con este ejemplo sencillo es posible estudiar otras características importantes de la matriz  $S$ , por ejemplo sus polos (ceros del denominador de la Ec. 2.33). En la Ref. [33] se estudia con detalle las propiedades de  $S$  para este sistema.

## 2.3 Propiedades generales de la matriz $S$ .

Una característica común a todos los sistemas que trataremos es que el flujo de las ondas incidentes es igual al flujo de las ondas salientes. Esta conservación de flujo se refleja en la *unitariedad* de la matriz  $S$ :

$$SS^\dagger = I. \quad (2.12)$$

Ahora bien, si el sistema es invariante ante inversiones temporales, es decir, si el Hamiltoniano conmuta con el operador de inversiones temporales, entonces  $S$ , además de ser unitaria, es simétrica:

$$S = S^T. \quad (2.13)$$

En la tesis no trataremos sistemas con espín, así que sólo mencionamos que cuando se consideran partículas con espín  $1/2$ , entonces la función de onda es un espinor y la matriz de dispersión  $S$  de  $4N \times 4N$  satisface la relación [24, 33]:

$$S = \Sigma S^T \Sigma. \quad (2.14)$$

donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

## 2.4 El transporte electrónico cuántico visto como un problema de dispersión.

Como mencionamos en la Introducción, Landauer [5, 6] fue uno de los pioneros en el tratamiento del transporte electrónico como un problema de dispersión. Posteriormente, este enfoque fue desarrollado en muchos otros trabajos [7, 31].

Landauer modeló un conductor mesoscópico como un sistema formado por una región desordenada (región con dispersores colocados al azar) y conectados a ésta dos conductores perfectos (i.e., conductores sin dispersores). A su

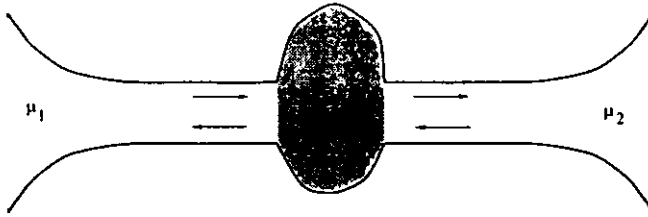


Figura 2.3: Modelo utilizado por Landauer para la descripción del transporte electrónico en un sistema mesoscópico. La región sombreada representa la zona desordenada.

vez, estos conductores se conectan a dos reservorios de electrones con potenciales químicos  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , Fig. 2.3. En la región desordenada, los electrones se dispersan elásticamente, de modo que la coherencia en la fase de la función de onda se conserva, dejando que la dispersión inelástica ocurra en los reservorios. Bajo el modelo anterior y a primer orden en  $(\mu_1 - \mu_2)$ , la conductancia  $G$  definida como el cociente entre la corriente  $I$  y el voltaje  $V = e(\mu_1 - \mu_2)$  medido dentro los reservorios [6], está dada por:

$$G = \frac{e^2}{h} T, \quad (2.16)$$

donde  $T$  es el coeficiente de transmisión dado por la traza:  $T = \text{tr}(tt^\dagger)$  y  $t$  la matriz de amplitudes de transmisión, Ec. (2.7). Ésta es la llamada fórmula de Landauer-Büttiker. Como vemos, bajo este enfoque, la matriz de dispersión pasa a ser una cantidad fundamental para la descripción del transporte electrónico. La teoría de la dispersión ha sido aplicada con éxito en sistemas que se encuentran a baja temperatura ( $\sim$  mK) y cuyo transporte electrónico se lleva a cabo utilizando corriente directa o bajas frecuencias, además de que las interacciones electrón-electrón pueden considerarse despreciables [31].

Por otra parte, en los sistemas mesoscópicos desordenados, los electrones sufren una serie de dispersiones debido a las impurezas del material, provocando que cantidades como el coeficiente de transmisión sean muy sensibles a cambios en la energía o a la configuración particular de los dispersores en el sistema. En el caso de las cavidades balísticas, la transmisión también es muy sensible a cambios en la energía y a las paredes de la cavidad. Por ejemplo, en la Fig. (2.4), tomada de la Ref. [33], se muestra el coeficiente de transmisión  $T$  en función del vector de onda,  $k$ : como vemos,  $T$  *varía fuertemente con el vector de onda*. Este tipo de comportamiento nos lleva a plantear el problema del transporte desde un punto de vista *estadístico* y así, por ejemplo, preguntarnos por el promedio y varianza del coeficiente de

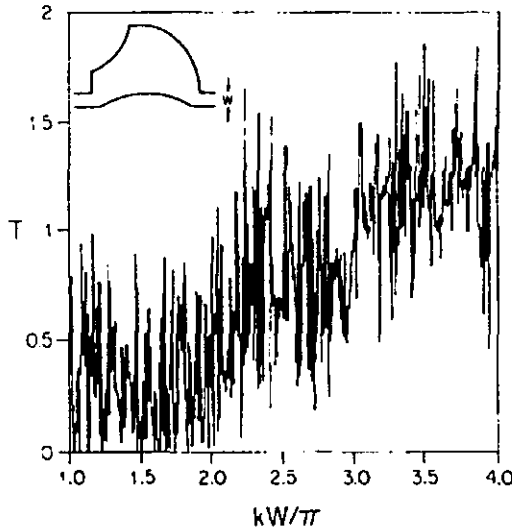


Figura 2.4: El coeficiente de transmisión como función del vector de onda,  $k$ . Dicho coeficiente resulta de la solución de la ecuación de Schrödinger con condiciones de frontera de Dirichlet para la cavidad que se muestra en la esquina superior [33].

transmisión en un cierto intervalo de energía.

El cálculo de cantidades estadísticas como el promedio o varianza de  $T$  implica el conocimiento de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión. La teoría de matrices aleatorias, introducida hace ya algunos años en otro contexto, ha servido para el estudio estadístico de la matriz  $S$  en el problema del transporte electrónico.

Existen diferentes puntos de vista en el estudio de las propiedades estadísticas de  $S$ , dentro de RMT. Uno de ellos se conoce como enfoque microscópico: en éste, la matriz de dispersión se construye a partir del Hamiltoniano del sistema en cuestión y para estudiar las propiedades estadísticas de  $S$  se propone un modelo estadístico para dicho Hamiltoniano. Otro punto de vista hace suposiciones estadísticas a nivel mismo de la matriz de dispersión, sin pasar por el Hamiltoniano del sistema. Debido a que el modelo de aproximación microscópica nos será útil para la verificación numérica de nuestros resultados, enseguida damos algunas características generales de este enfoque.

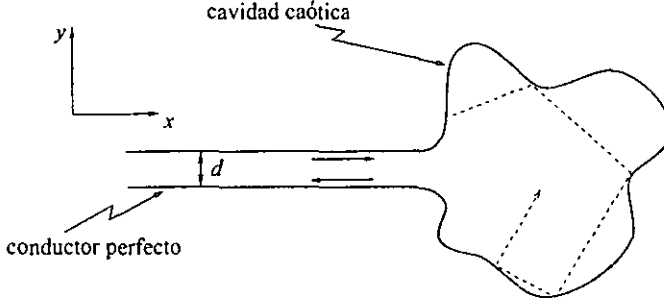


Figura 2.5: Sistema dispersor: Cavidad caótica conectada a un conductor perfecto. La línea punteada dentro de la cavidad representa una trayectoria clásica de un electrón que entra en la cavidad.

## 2.5 Teoría de matrices aleatorias para $S$ : enfoque microscópico.

Desarrollado principalmente por el grupo de Heidelberg [21, 22], el enfoque microscópico parte del Hamiltoniano del sistema dispersor, para de ahí construir la matriz de dispersión. Como en la mayor parte de la tesis trataremos con sistemas de cavidades balísticas, supongamos que la matriz de dispersión  $S$  proviene de una cavidad balística: en la figura 2.5 se muestra una cavidad caótica balística bidimensional con paredes impenetrables y conectada a ésta un conductor perfecto de ancho  $d$ .

En el conductor perfecto de la figura 2.5, la ecuación de Schrödinger está dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad (2.17)$$

donde  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ . La condición de frontera  $\Psi = 0$  en las paredes del conductor da lugar a los canales abiertos (Ec. 2.3). Supongamos que hay  $N$  canales. Ahora, si  $H_{in}$  de dimensión  $M \times M$  es la matriz Hamiltoniana de la cavidad sin el conductor perfecto conectado, es decir, la cavidad vista como un *sistema cerrado*, la matriz de dispersión  $S$  del sistema completo puede escribirse como [21, 22, 30]:

$$S(E) = -\frac{1 - iK}{1 + iK}, \quad (2.18)$$

donde

$$K = W \frac{1}{E - H_{in}} W^\dagger \quad (2.19)$$

y  $W$ , la matriz de dimensión  $N \times M$  que acopla los  $N$  canales del conductor perfecto con los  $M$  niveles de la cavidad caótica. De esta forma, tenemos una expresión para la matriz de dispersión  $S$  de dimensión  $N \times N$  en términos de los niveles de energía de la cavidad (vista como un sistema cerrado), y el acoplamiento entre los canales del conductor y los niveles de la cavidad.

En este punto el grupo de Heidelberg introduce un modelo estadístico para  $H_{in}$  y  $W$  con el fin de estudiar las propiedades estadísticas de  $S$ : como típicamente  $W$  varía poco respecto al espaciamiento medio entre niveles de  $H_{in}$ , los elementos de  $W$  se consideran independientes de la energía, suponiendo además que los elementos de  $W$  son variables independientes con distribución Gaussiana. Esta última suposición implica que no hay acoplamiento entre los  $N$  canales. En cuanto a la matriz  $H_{in}$  se propone que sus elementos pertenezcan a algunos de los ensembles GOE, GUE o GSE, que a continuación describimos.

En los años cincuenta, la Física Nuclear se encontraba en apogeo y había un gran interés por el estudio de las propiedades estadísticas de los espectros de niveles encontrados en experimentos de dispersión de neutrones por núcleos pesados. Con esta motivación Wigner introdujo la teoría de matrices aleatorias [15]. La idea de Wigner fue considerar un conjunto de matrices Hamiltonianas, es decir, un ensemble de matrices, cuyos elementos siguen una distribución (Gaussiana) de probabilidad. Así, estudiando las propiedades estadísticas de los eigenvalores y eigenfunciones de este conjunto de matrices aleatorias, Wigner logró describir con éxito algunas propiedades estadísticas de los espectros de energía: por ejemplo, la distribución de espaciamientos de niveles y fluctuaciones en el espectro de niveles de energía.

Dependiendo de la simetría ante inversiones temporales del problema, Wigner consideró tres tipos de ensembles Gaussianos: para partículas con espín entero, el Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE por sus siglas en Inglés) y etiquetado por  $\beta = 1$  se utiliza para sistemas con invariancia ante inversiones temporales, el Ensemble Gaussiano Unitario (GUE,  $\beta = 2$ ) se aplica a sistemas en los que se rompe la invariancia ante inversiones temporales y finalmente, para partículas con espín semientero y sin invariancia ante rotaciones del espín, el Ensemble Gaussiano Simpléctico (GSE,  $\beta = 4$ ) es el apropiado cuando el sistema es invariante ante inversiones temporales.

La relevancia de la teoría de matrices aleatorias de los años cincuenta en el problema del transporte se debe a que las propiedades estadísticas de los espectros de niveles obtenidos de esta teoría son las mismas que las de diferentes *sistemas cerrados* que presentan una dinámica caótica<sup>4</sup>, por ejem-

---

<sup>4</sup>Siempre y cuando la escala de tiempo sea mayor que el llamado tiempo ergódico:

plo, los llamados billares cuánticos<sup>5</sup>. Cabe mencionar que las correlaciones espectrales resultan ser independientes de las características microscópicas de los sistemas y dependen únicamente de propiedades muy generales, como su simetría ante inversiones temporales. Esta característica de "universalidad" llega a reflejarse en algunas propiedades de transporte, las fluctuaciones en la conductancia<sup>6</sup>, por ejemplo.

Regresando a la matriz  $S$ , Ec. (2.18), y con las suposiciones estadísticas anteriores para  $W$  y  $H_{in}$ , el grupo de Heidelberg simula las fluctuaciones estocásticas de  $S$ , considerando un ensemble de matrices de dispersión donde los elementos de  $W$  se mantienen fijos y los elementos de  $H_{in}$  corren sobre algunos de los ensembles Gaussianos: GOE, GUE o GSE.

Finalmente, la matriz  $S$ , Ec. (2.18), puede escribirse explícitamente en términos de los eigenvalores de  $H_{in}$  y los elementos de  $W$  por medio de la matriz  $K$  (conocida como "R-matrix" en Física Nuclear [15]):

$$S(E) = -\frac{1 - iK}{1 + iK}$$

con

$$K_{ab} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda a} \gamma_{\lambda b}}{E_{\lambda} - E}, \quad (2.20)$$

donde las  $\gamma_{\lambda a}$ 's, llamadas amplitudes reducidas, conectan los estados de la cavidad con los canales en el conductor y los  $E_{\lambda}$ 's son los niveles de energía de la cavidad (sin el conductor conectado). La matriz  $K$  en su forma más general consta de dos partes: la resonante dada por la Ec. (2.20) y otra parte,  $K^0$ , conocida como "de fondo" que describe la influencia de resonancias lejanas de la región de interés, esta matriz  $K^0$  se supone constante y su efecto se considera por medio de las propiedades estadísticas de las amplitudes  $\gamma_{\lambda a}$  de la Ec. (2.20).

Las ecuaciones (2.18) y (2.20) nos serán de utilidad para la verificación numérica de algunos de los resultados que presentamos en los siguientes capítulos de la tesis. Esto se hará generando numéricamente las variables  $\gamma_{\lambda}$  y  $E_{\lambda}$ , como veremos posteriormente.

$\tau_e = L^2/v_F l$ , donde  $L$  es el tamaño típico del sistema,  $l$  el camino libre medio y  $v_F$  la velocidad de Fermi. Para un cavidad balística,  $\tau_e \sim L/v_F$

<sup>5</sup>En las Refs. [14, 33] se muestran algunos ejemplos de diferentes sistemas con dinámica caótica que presentan propiedades estadísticas similares en su distribución de espaciamiento de niveles.

<sup>6</sup>Para un sistema mesoscópico desordenado la variancia de la conductancia  $G$ , depende únicamente de la simetría  $\beta$ , i.e.,  $\text{var}G = \frac{4e^2}{15h} \beta^{-1}$ . Estas "fluctuaciones universales" de la conductancia han sido observadas experimentalmente [31].

## 2.6 Teoría de matrices aleatorias para $S$ : enfoque de la teoría de la información.

Otro punto de vista en el estudio de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión se conoce como enfoque de la teoría de la información o de máxima entropía. En éste, como en el microscópico, se considera un ensemble de matrices de dispersión, pero a diferencia del enfoque microscópico no se hace ninguna suposición estadística para el Hamiltoniano del sistema, sino que las suposiciones estadísticas se llevan a cabo a nivel mismo de la matriz de dispersión.

Como veremos más adelante, bajo el enfoque de la teoría de la información fue posible encontrar la distribución de la matriz de dispersión [25, 27, 28], haciendo uso de hipótesis muy generales: analiticidad de  $S$ , estacionaridad y ergodicidad del ensemble de matrices dispersión. A la distribución de  $S$  se le conoce como kernel de Poisson y tiene la característica de que el único parámetro que entra en ésta es el promedio de  $S$ . El kernel de Poisson describe procesos de dispersión en los que existen dos escalas diferentes de tiempo: una asociada a procesos de dispersión de respuesta rápida, llamados *procesos directos* y otra asociada a procesos retardados o también llamados *procesos equilibrados*. Cuando los procesos de dispersión directa están presentes, la matriz de dispersión se caracteriza por que su promedio es distinto de cero, cuando estos procesos están ausentes el promedio de  $S$  es nulo.

Los enfoques microscópico y de la teoría de la información son equivalentes [29]. sin embargo éste último da una forma mucho más sencilla de estudiar las propiedades estadísticas de  $S$ , pues no hace uso de los detalles microscópicos del sistema, sino únicamente de parámetros físicamente relevantes al problema. Por otra parte, al considerar el Hamiltoniano del sistema, el enfoque microscópico tiene la ventaja de poder estudiar funciones de  $S$  que dependen de dos o más valores de la energía, por ejemplo funciones de autocorrelación [21, 37]. En este sentido, en el siguiente capítulo presentamos un avance dentro de un enfoque cercano al de la teoría de la información, presentando un estudio para una función de dos puntos o energías conocida como tiempo de retardo.

Con el fin de introducir las ideas utilizadas en el enfoque de la teoría de la información, siguiendo las Refs. [26, 34] en la sección siguiente presentamos la deducción de la distribución de  $S$  (kernel de Poisson) para el caso más sencillo de matrices de dispersión de un canal. También nos interesa presentar explícitamente la deducción del kernel de Poisson porque las hipótesis involucradas en él serán tema de estudio en el capítulo 5.



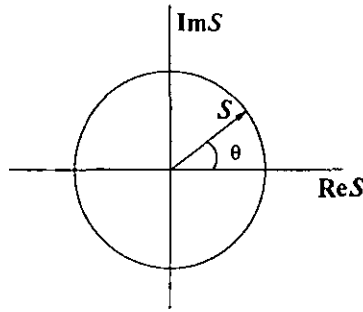


Figura 2.6: Círculo unitario sobre el que  $S$  se mueve con el cambio en la energía.

## 2.7 El kernel de Poisson para un canal: muestreo de $S$ sobre el eje de la energía.

Consideremos una matriz de dispersión<sup>7</sup>,  $S(E)$ , de dimensión  $1 \times 1$ . Como vimos en el capítulo anterior,  $S$  es unitaria y para el caso de un canal podemos escribirla como:  $S = \exp i\theta(E)$ . En el plano complejo ( $\text{Im}S$ - $\text{Re}S$ ),  $S$  se “mueve” sobre el círculo unitario conforme la energía cambia, Fig. 2.6. Ahora, supongamos que nos preguntamos por la probabilidad de encontrar  $S = \exp(i\theta(E))$  con  $\theta$  en el intervalo  $(\theta, \theta + d\theta)$  y que ésta puede escribirse como:

$$dP(S) = p(\theta)d\theta. \quad (2.21)$$

Por otro lado, calculemos el promedio de la  $k$ -ésima potencia de  $S$  sobre la energía, utilizando una Lorentziana de ancho  $I$  y centrada en  $E_0$ , como función de peso. Como veremos enseguida, la conveniencia al escoger una Lorentziana como función de peso se debe a la sencillez con que se realizan los promedios de funciones cuyos polos se encuentran en el semiplano inferior; además, como también veremos adelante, no perdemos generalidad en nuestros resultados al utilizar esta función, pues bajo ciertas condiciones estos no dependerán de la función de peso utilizada. Así, el promedio de  $S^k$  está dado por:

$$\overline{S^k(E_0, I)} = \int \frac{I/\pi}{(E - E_0)^2 + I^2} [S(E)]^k dE. \quad (2.22)$$

Para calcular el promedio, Ec. (2.22), hacemos las siguientes hipótesis:

<sup>7</sup>Esta matriz de dispersión puede provenir de diferentes tipos de sistemas: por ejemplo una cavidad balística (Fig. 2.5), un sistema desordenado (Fig. 2.1), o bien, un sistema ordenado.

i) En el plano complejo de la energía,  $S$  es *analítica* en el semiplano superior<sup>8</sup>, es decir, las únicas singularidades de  $S$  (polos de  $S$ ), ocurren en el semiplano inferior (*causalidad*).

Utilizando la hipótesis anterior y que los polos de la Lorentziana se encuentran en  $E_0 + iI$  y  $E_0 - iI$ , tenemos que la integral, Ec. (2.22), está dada por:

$$\overline{S^k(E_0, I)} = S^k(E_0 + iI); \quad (2.23)$$

de igual forma

$$\overline{S(E_0, I)} = S(E_0 + iI). \quad (2.24)$$

Por lo tanto.

$$\overline{S^k(E_0, I)} = [\overline{S(E_0, I)}]^k. \quad (2.25)$$

Es decir, el promedio de la  $k$ -ésima potencia de  $S$  es igual al promedio de  $S$  elevado a la  $k$ -ésima potencia. Como veremos enseguida, este resultado tiene como consecuencia que todos los coeficientes de la serie de Fourier para  $p(\theta)$  queden determinados por el valor de  $\overline{S}$  y por lo tanto  $p(\theta)$  queda determinada de manera única.

Utilizando la Ec. (2.21), el promedio de  $S^k$  con  $S = e^{i\theta}$  está dado por:

$$\overline{S^k} = \int S^k dP(S) \quad (2.26)$$

$$= \int e^{ik\theta} p(\theta) d\theta, \quad (2.27)$$

lo que implica, utilizando el resultado de la Eq. (2.25), que

$$\int e^{ik\theta} p(\theta) d\theta = \left[ \int e^{i\theta} p(\theta) d\theta \right]^k. \quad (2.28)$$

Esta expresión determina todos los coeficientes de la serie de Fourier de  $p(\theta)$ : escribiendo  $p(\theta)$  como

$$p(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta} \quad (2.29)$$

<sup>8</sup>  $S(E)$  cuenta con un punto ramal  $E = 0$ : en el plano complejo de  $k$ , donde  $E = k^2/2m$ ,  $S(k)$  cuenta con ceros en el semiplano superior y polos en el semiplano inferior. Debido a que  $E \propto k^2$ , tenemos dos valores posibles de  $k$  ( $\pm k$ ) para  $E$ , por lo que para mapear una hoja del plano- $k$  son necesarias dos hojas de Riemann en el plano de la energía. El corte se realiza de  $E = 0$  a  $E \rightarrow \infty$ . De esta forma, el semiplano superior del plano- $k$  se mapea en la primera hoja de Riemann del plano- $E$  y el semiplano inferior del plano- $k$  en la segunda hoja de Riemann del plano  $E$ . Para realizar la integral (2.22) supongamos entonces que ésta se lleva a cabo lejos del punto ramal.

con  $a_k = a_{-k}^*$ , ya que  $p(\theta)$  es real, tenemos que el coeficiente  $a_{-k}$  está dado por

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} p(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \bar{S}^k, \quad (2.30)$$

o bien, utilizando (2.25):

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi} \bar{S}^k. \quad (2.31)$$

Finalmente, sumando la serie. Eq. (2.29), con  $a_0 = 1/2\pi$ , llegamos a la distribución  $p(\theta)$  [38]-[26]:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\bar{S}|^2}{|S - \bar{S}|^2}, \quad (2.32)$$

donde  $S = \exp(i\theta)$ . Este es el resultado que hemos venido mencionando, conocido como *kernel de Poisson*, para un canal.

Así, la distribución,  $p(\theta)$ , propuesta al inicio de la sección existe y es única. Cabe resaltar el hecho de que  $\bar{S}$  es el único parámetro relevante en la distribución de la fase de  $S$ ; en otras palabras, ésta es la única información del sistema que necesitamos para encontrar la distribución completa de la fase de  $S$ .

El promedio  $\bar{S}$  en la Ec. (2.32) depende del centro  $E_0$  y el ancho  $I$  de la Lorentziana. Pero si hacemos la siguiente idealización: supongamos que  $S(E)$  tiene sus polos en todo el intervalo de energía  $(-\infty, \infty)$ , de modo que podemos hacer  $I \rightarrow \infty$ . Entonces, en este caso,  $\bar{S}$  se vuelve independiente<sup>9</sup> de  $E_0$  e  $I$ .

Antes de pasar a la distribución de  $S$  sobre el ensemble, veamos un ejemplo en el que verificamos el resultado anterior, Ec. (2.32).

### 2.7.1 Verificación del kernel de Poisson utilizando un potencial $\delta$ .

Consideremos nuevamente el sistema que presentamos en la sección 1.2, Fig. 2.2. Como vimos en aquella sección, la matriz de dispersión está dada por la expresión:

$$S(k) = - \frac{(\text{sen}ka + \frac{k}{u_0} \text{cos}ka) + i \frac{k}{u_0} \text{sen}ka}{(\text{sen}ka + \frac{k}{u_0} \text{cos}ka) - i \frac{k}{u_0} \text{sen}ka} \quad (2.33)$$

<sup>9</sup>En la práctica, la independencia de  $\bar{S}$  con la función de peso también se logra conforme el número de resonancias en  $I$  va en aumento. De hecho, en la siguiente sección la función de peso con la que realizaremos nuestro análisis corresponde a una "caja": peso constante e igual a  $1/\delta E$  en un intervalo de energía  $\delta E$ .

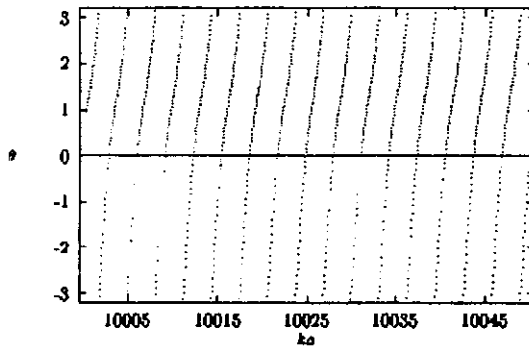


Figura 2.7: Aquí, mostramos algunas (17) de las 100 resonancias utilizadas en el muestreo de  $S$  para el sistema con el potencial  $\delta$ . Los valores de  $\theta$  indicados con puntos fueron obtenidos de la Ec. (2.33) con  $S = e^{i\theta}$ .

Con el fin de verificar el kernel de Poisson, muestreamos la matriz  $S$  sobre el eje de la energía: sobre un intervalo de 100 resonancias (Fig. 2.7), a partir de  $ka = 10.000$ , construimos un conjunto de valores  $\theta_i$  (aproximadamente 70 por resonancia), utilizando la Ec. (2.33) y  $S = e^{i\theta}$ . Dividiendo el intervalo  $(0, 2\pi)$  en 20 clases, contamos el número de fases  $\theta_i$  que caían en cada clase, construyendo de esta manera la distribución que se muestra en la figura 2.8, donde la línea continua corresponde al kernel de Poisson, Ec. (2.32), con  $\bar{S}$  extraída del mismo conjunto de valores de  $S$  de la simulación numérica. Como podemos observar, el acuerdo es excelente.

## 2.8 El Kernel de Poisson para un canal: muestreo de $S$ sobre el ensemble.

Hasta ahora hemos realizado nuestro estudio estadístico de  $S$  sobre el eje de la energía; pero nuestro interés principal es hacer el estudio sobre un conjunto de matrices de dispersión independientes, todas a la misma energía: es decir, un ensemble de matrices  $S$ . Con este propósito, en esta sección aplicamos el resultado del kernel de Poisson, Ec. (2.32), a un ensemble de matrices  $S$ . Para ello hagamos las siguientes hipótesis:

ii)  $S(E)$  es una función *estacionaria* de la energía: el promedio realizado sobre el ensemble:  $\langle S(E) \rangle$  es independiente de la energía<sup>10</sup>

<sup>10</sup>En sistemas de dispersión reales esta hipótesis puede sólo aproximarse localmente:  $\langle S(E) \rangle \approx \langle S(E + \delta E) \rangle$  con  $\delta E \ll E$ .

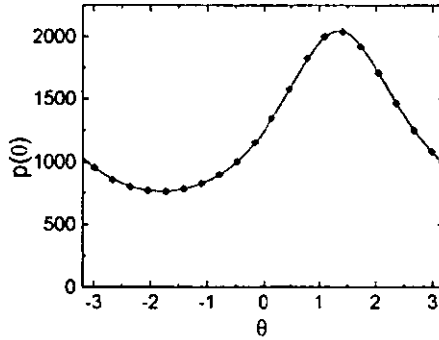


Figura 2.8: Distribución de la fase  $\theta$  para el potencial  $\delta$ . Los puntos corresponden al resultado de la simulación numérica, mientras que la línea continua corresponde al kernel de Poisson (Ec. 2.32) con  $\bar{S}$  extraída de la simulación numérica.

iii) El ensemble de matrices  $S$  es *ergódico*: el promedio sobre la energía,  $\bar{S}$ , es igual al promedio sobre el ensemble,  $\langle S \rangle$ . En la Ref. [41] la ergodicidad (o Teorema de Slutsky) se demuestra para funciones estacionarias cuya correlación tiende a cero conforme aumenta la separación entre las energías a las que se evalúa dicha correlación. En el contexto de la Física Nuclear, en [40] se demuestra la ergodicidad del ensemble de matrices  $S$ .

Utilizando la hipótesis de ergodicidad:  $\bar{S} = \langle S \rangle$  y el resultado (2.25), tenemos que:

$$\langle S^k \rangle = \langle S \rangle^k, \quad (2.34)$$

de manera que la distribución de  $\theta$ , ahora sobre el ensemble, está dada por:

$$p_{\langle S \rangle}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2}. \quad (2.35)$$

Nuevamente, la distribución de la fase está unívocamente determinada por un parámetro:  $\langle S \rangle$ . En [26] se muestran algunos ejemplos donde se verifica numéricamente la distribución anterior, Ec. (2.35).

## 2.9 El kernel de Poisson para $N$ canales.

Veamos ahora la generalización de la Ec. (2.35) al caso multicanal. Para ello consideremos matrices de dispersión  $S$  de dimensión  $N \times N$ .

Como en el caso de un canal donde el "movimiento" de  $S$  con la energía estaba restringido al círculo unitario, en el caso multicanal  $S$  se "mueve" sobre la superficie determinada por la condición de unitariedad  $SS^\dagger = I$ , en el plano generalizado formado por los ejes  $\text{Re}S_{11}$ ,  $\text{Im}S_{11}$ ,  $\text{Re}S_{12}$ ,  $\text{Im}S_{12}$ , ...,  $\text{Re}S_{NN}$ ,  $\text{Im}S_{NN}$ .

Por otra parte, la condición de analiticidad se generaliza como [25, 27, 28]:

$$\overline{[S_{a_1, b_1}(E)]^{n_1} \cdots [S_{a_k, b_k}(E)]^{n_k}} = [S_{a_1, b_1}(E + iI)]^{n_1} \cdots [S_{a_k, b_k}(E + iI)]^{n_k}, \quad (2.36)$$

la cual bajo la hipótesis de ergodicidad:  $\bar{S} = \langle S \rangle$  se expresa como:

$$\langle (S_{a_1, b_1})^{n_1} \cdots (S_{a_k, b_k})^{n_k} \rangle = \langle S_{a_1, b_1} \rangle^{n_1} \cdots \langle S_{a_k, b_k} \rangle^{n_k} \quad (2.37)$$

Ahora, como en la Ec. (2.21), supongamos que la diferencial de probabilidad  $dP_{(S)}^{(\beta)}(S)$  puede escribirse de la forma:

$$dP_{(S)}^{(\beta)}(S) = p_{(S)}^{(\beta)}(S) d\mu_\beta(S). \quad (2.38)$$

En esta última ecuación hemos introducido la cantidad  $d\mu(S)$ , llamada medida invariante. Como veremos enseguida, esta cantidad es una medida razonable para el conjunto de matrices  $S$  que pertenecen a un ensemble, pues da un peso igual a todas las matrices  $S$  que satisfacen la transformación que definen a dicho ensemble. Así, el promedio de  $S$  evaluado con la medida invariante es igual a cero; es decir, la medida invariante describe adecuadamente a la dispersión en ausencia de procesos directos.

Antes de continuar con la generalización del kernel de Poisson al caso multicanal, hagamos un paréntesis para dar algunas características de  $d\mu(S)$ .

La medida invariante para las matrices de dispersión surge del enfoque propuesto por Dyson para el estudio de las propiedades estadísticas de  $S$  en problemas de dispersión en Física Nuclear. En este enfoque, alternativo al de Wigner, no se hace referencia al Hamiltoniano del sistema y las propiedades de  $S$  se estudian considerando diferentes tipos de ensembles de matrices  $S$  que dependen de la simetría ante inversiones temporales. La medida invariante da un peso igual a todas las matrices que satisfacen las constricciones de alguno de los tipos de ensembles. Esta noción de "iguales probabilidades" para las matrices  $S$  se introduce precisamente por medio de la medida invariante y se expresa formalmente como [24, 25, 28]:

$$d\mu^\beta(S) = d\mu^\beta(S'), \quad (2.39)$$

donde  $\beta = 1, 2$  o  $4$  etiqueta al tipo de ensemble, como en los ensembles Gaussianos, mientras que  $S'$  está dada por  $S$  por medio de una relación de automorfismo que define a cada ensemble. Se definen tres tipos de ensembles llamados ensembles circulares.

En el *ensemble circular ortogonal* (COE, de sus siglas en Inglés) etiquetado por  $\beta = 1$ ,  $S'$  está dada por la relación:

$$S' = USU^T, \quad (2.40)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria fija y arbitraria. Este ensemble se aplica a sistemas que son invariantes ante inversiones temporales.

En el *ensemble circular unitario* (CUE,  $\beta = 2$ ),  $S'$  se relaciona con  $S$  por medio de:

$$S' = USV, \quad (2.41)$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices unitarias arbitrarias y fijas. Este caso es apropiado para sistemas sin invariancia ante inversiones temporales.

Por último, en el *ensemble circular simpléctico* (CSE,  $\beta = 4$ ),  $S'$  está dada por:

$$S' = US\tilde{U}, \quad (2.42)$$

donde  $\tilde{U} = \Sigma^T U^T \Sigma$  y  $\Sigma$  dada por la Ec. (2.15). Este ensemble se utiliza para partículas con espín  $1/2$ .

Por otra parte, si  $\exp(i\phi_j)$  son los eigenvalores de la matriz unitaria  $S$ , la medida invariante está dada por [38, 24]:

$$d\mu(S) = \prod_{j < k} |e^{i\phi_j} - e^{i\phi_k}|^\beta d\mu(U) \prod_i d\phi_i, \quad (2.43)$$

siendo  $U$  la matriz que diagonaliza a  $S$ :  $(U^{-1}SU)_{nm} = \delta_{nm} \exp(i\phi_n)$ ,  $U$  es ortogonal, unitaria o simpléctica, dependiendo del ensemble:  $\beta = 1, 2, 4$ , respectivamente.

Regresando a la generalización del kernel de Poisson, teníamos que la diferencial de probabilidad  $dP_{(S)}(S)$  estaba dada por el producto de la probabilidad  $p_{(S)}(S)$  y la medida invariante  $d\mu(S)$ :

$$dP_{(S)}^{(\beta)}(S) = p_{(S)}^{(\beta)}(S) d\mu_\beta(S), \quad (2.44)$$

con  $d\mu_\beta(S)$  dada por la Ec. (2.43). En cuanto a la distribución  $p_{(S)}^{(\beta)}(S)$  con  $S$  satisfaciendo las condiciones de analiticidad y ergodicidad, ésta se conoce

## 2.10 Ejemplos de aplicaciones del kernel de Poisson a cavidades 29

desde hace algún tiempo [38, 28] y está dada por:

$$p_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) = V_{\beta}^{-1} \frac{[\det(I - \langle S \rangle \langle S \rangle^{\dagger})]^{(\beta N + 2 - \beta)/2}}{|\det(I - S \langle S \rangle^{\dagger})|^{\beta N + 2 - \beta}}, \quad (2.45)$$

donde  $V_{\beta}$  es una constante de normalización. La Ec. (2.45) se conoce como *kernel de Poisson* y, como podemos ver, para  $N = 1$  se reduce a la distribución encontrada en la sección anterior, Ec.(2.35). Sin embargo, a diferencia del caso de un canal, la distribución dada por la Ec. (2.45) no es única, es decir, las condiciones de analiticidad y ergodicidad no fijan  $p_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S)$  unívocamente. Pero el kernel de Poisson dado por (2.45) tiene la característica de ser la distribución [39] que maximiza la entropía  $\mathcal{S}$ , o minimiza la información  $\mathcal{I} = -\mathcal{S}$ , definida la entropía como [27, 28]:

$$\mathcal{S}[p] = - \int p_{\langle S \rangle} \ln p_{\langle S \rangle}(S) d\mu(S). \quad (2.46)$$

El kernel de Poisson ha sido aplicado con éxito al transporte electrónico, tanto en sistemas donde los procesos de dispersión directos son importantes como en sistemas donde tales procesos están ausentes. Enseguida damos brevemente algunos ejemplos donde el kernel de Poisson ha sido aplicado con éxito.

## 2.10 Ejemplos de aplicaciones del kernel de Poisson a cavidades.

### 2.10.1 Aplicaciones a sistemas sin procesos directos, $\langle S \rangle = 0$ .

Como hemos mencionado, la dispersión en ausencia de procesos directos se caracteriza por  $\langle S \rangle = 0$ , en este caso  $dP_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) = d\mu_{\beta}(S)$ . Es decir, las propiedades estadísticas de  $S$  están descritas por alguno de los ensembles circulares:  $\beta = 1, 2$  o  $4$ , que definimos en la sección anterior. Existe una gran cantidad de trabajos sobre aplicaciones de los ensembles circulares al estudio del transporte [32]-[36]. Por ejemplo, para una cavidad balística conectada al exterior por dos alambres con  $N$  canales abiertos, como las que se muestran en la figura 2.9, la media y la varianza del coeficiente de transmisión,  $T$ , están dadas por [19]:

$$\langle T \rangle^{\beta} - N/2 = -\delta_{1\beta} \frac{N}{4N + 2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{4} \delta_{1\beta}, \quad (2.47)$$



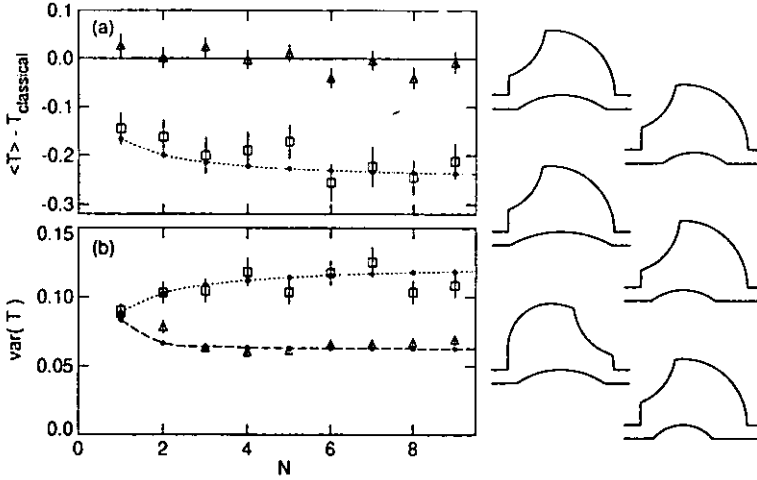


Figura 2.9: Comparación de los resultados de la simulación numérica (triángulos y cuadros) con las predicciones teóricas para el valor medio y varianza de  $T$ . Los triángulos indican el caso de campo magnético nulo que corresponde al ensemble  $\beta = 1$ , mientras que los cuadros indican campo magnético distinto de cero, correspondiente al caso CUE ( $\beta = 2$ ). Figura tomada de [19].

$$\text{var}(T) = \frac{N(N+1)^2}{(2N+1)^2(2N+3)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \text{ COE} \quad (2.48)$$

$$= \frac{N^2}{4(4N^2-1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \text{ CUE} \quad (2.49)$$

Como vemos, en el límite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\text{var}(T)$  depende únicamente de la simetría  $\beta$ . A este resultado se le conoce como fluctuaciones universales de la conductancia. En la figura 2.9 se comparan los resultados teóricos, dados por las ecuaciones anteriores para el promedio y varianza de  $T$  con los de la simulación numérica. Los resultados numéricos se obtuvieron resolviendo la ecuación de Schrödinger con condiciones de frontera de Dirichlet para las seis cavidades diferentes que se muestran en la figura 2.9. Estas cavidades tienen un “tope” (curvatura en la parte inferior de las cavidades) para asegurar que no haya procesos directos, de modo que  $\langle S \rangle = 0$ . Como vemos el acuerdo es muy bueno en todos los casos que se muestran en la figura.

### 2.10.2 Aplicaciones a sistemas en presencia de procesos directos, $\langle S \rangle \neq 0$ .

La presencia de procesos directos se caracteriza por valores de  $\langle S \rangle \neq 0$ . Con la distribución de  $S$  dada por el kernel de Poisson es posible encontrar la

## 2.10 Ejemplos de aplicaciones del kernel de Poisson a cavidades31

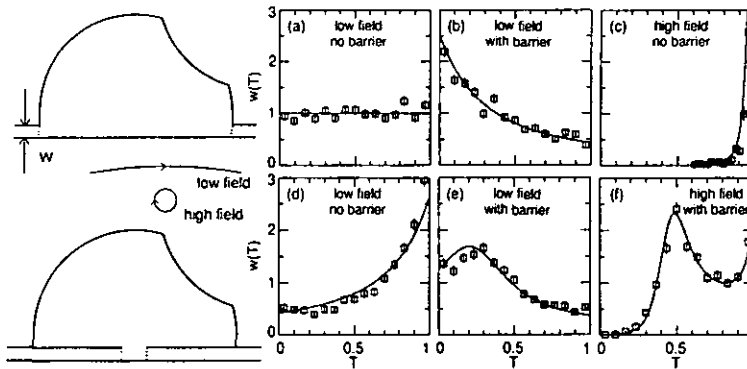


Figura 2.10: Para un canal, los cuadros indican los resultados de la simulación numérica bajo diferentes intensidades del campo magnético. Campo magnético bajo significa un radio de ciclotrón,  $r_c$ , más grande que el tamaño de la cavidad ( $r_c = 55W$ ), mientras que para campo magnético alto  $r_c=1.4W$ . Figura tomada de [20].

distribución completa del coeficiente de transmisión,  $T$ . Recordemos que  $T$  está dado por  $\text{Tr}(tt^\dagger)$ . Para el caso de un canal, la distribución de la transmisión  $W(T)$  se calcula en [20]. En la figura 2.10 se muestran los resultados de [20], donde se comparan los resultados teóricos con los de la simulación numérica para las cavidades que se muestran en la misma figura: la línea continua corresponde a la predicción teórica, mientras que los cuadros indican los resultados numéricos. El acuerdo es muy bueno en todos los casos.

Se ha avanzado mucho en el estudio de las propiedades estadísticas de  $S$  utilizando RMT, así como en las aplicaciones al transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos. Sin embargo, dentro del enfoque de la teoría de la información, el estudio de  $S$  ha estado restringido a *funciones estadísticas de  $S$  de un solo punto o energía* y sus aplicaciones a sistemas de corriente directa.

En el siguiente capítulo veremos un primer avance hacia las aplicaciones de RMT a sistemas de corriente alterna y para ello será necesario el estudio estadístico de una *función de dos puntos*, llamada tiempo de retardo.



## Capítulo 3

# Función de $S$ a dos energías: el tiempo de retardo y su aplicación a la capacitancia de un condensador mesoscópico.

El estudio de las propiedades estadísticas de  $S$  ha tenido un gran avance. Por ejemplo, en el capítulo anterior presentamos la distribución completa de la matriz de dispersión conocida como kernel de Poisson, así como algunas de sus aplicaciones al transporte electrónico en cavidades mesoscópicas. Sin embargo, dentro del enfoque de la teoría de la información, dicho estudio ha estado restringido a *funciones a una sola energía* y sus aplicaciones, a sistemas mesoscópicos de corriente directa.

En este capítulo presentamos un estudio realizado a una *función de  $S$  de dos puntos*: el tiempo de retardo y su aplicación a sistemas de corriente alterna. Los resultados de este capítulo se encuentran en la Ref. [42], de la cual se anexa una copia al final de la tesis.

En general, estamos interesados en las propiedades estadísticas de funciones de  $S$  a dos energías cualesquiera:  $F(S(E_1), S(E_2))$ . Este caso ha escapado del enfoque de la teoría de la información para su estudio, no así para el punto de vista microscópico que describimos en el capítulo pasado, donde, por ejemplo, se ha calculado la función de autocorrelación de las matrices de dispersión [21, 37]. En cuanto al tiempo de retardo,  $\tau$ , algunas de sus propiedades estadísticas han sido ya estudiadas. Por ejemplo, en [43] se calcula la distribución de  $\tau$  para un sistema unidimensional desordenado, utilizando un enfoque llamado “invariant imbedding”; en [30], se calcula la distribución de  $\tau$  para una cavidad, utilizando métodos supersimétricos.

Como un primer avance en el estudio de funciones de  $S$  a dos energías, utilizando un enfoque basado en el de la teoría de la información, en la sección siguiente analizamos la función más sencilla de dos puntos: el tiempo de retardo,  $\tau$ . En ausencia de procesos directos ( $\langle S \rangle = 0$ ), calculamos su distribución  $w(\tau)$  para el caso de un canal. La motivación física para estudiar el tiempo de retardo se debe a su relevancia para el transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos de corriente alterna, como veremos posteriormente.

### 3.1 Distribución del tiempo de retardo para un canal, $w(\tau)$ .

El tiempo de retardo  $\tau$  es una cantidad relacionada con la noción del tiempo que permanece una partícula en cierta región. En el problema de la dispersión de ondas, una forma de medir el tiempo de retardo es tomar la diferencia entre los centroides de las onda dispersada y una que no sufre tal dispersión, haciendo la medición en puntos muy lejanos de la región dispersora. Midiendo de esta forma  $\tau$ , Wigner introdujo el tiempo de retardo para problemas de dispersión para matrices de un canal [44]. Más tarde Smith [45] expresó  $\tau$  en términos de la matriz de dispersión para  $N$  canales<sup>1</sup>:

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi N} \text{Re} \left[ -i \text{Tr} \left( \frac{1}{S(E)} \frac{\partial S(E)}{\partial E} \right) \right], \quad (3.1)$$

donde  $\Delta$  es el espaciamiento medio entre niveles y  $N$  el número de canales. Para el caso de un canal, utilizando  $S = e^{i\theta(E)}$ , el tiempo de retardo se reduce a la expresión:

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{\partial \theta(E)}{\partial E}. \quad (3.2)$$

Ésta es la cantidad cuyas propiedades estadísticas estamos interesados en estudiar, en particular su distribución,  $w(\tau)$ . Para ello consideraremos un ensemble de matrices  $S$  con  $\langle S \rangle = 0$ , es decir, en ausencia de procesos directos. En el capítulo siguiente trataremos el caso de la presencia de procesos directos.

Pero antes de entrar propiamente en el cálculo de la distribución de  $\tau$ , veamos algunas características de la función  $\theta'(E) = \partial \theta(E) / \partial E$ , Ec. (3.2), que nos serán de utilidad.

<sup>1</sup>Como en [46], introducimos el tiempo de retardo adimensional,  $\tau$ .

En el capítulo pasado, vimos que  $S$  puede escribirse en términos de la matriz  $K$  como [Ec. (2.18)]:

$$S(E) = -\frac{1 - iK(E)}{1 + iK(E)}.$$

Para un canal  $S = e^{i\theta(E)}$ , mientras que  $K$  está dada por, de la Ec. (2.20):

$$K(E) = \sum_{\lambda} \frac{\Gamma_{\lambda}}{E_{\lambda} - E} \tag{3.3}$$

y las anchuras  $\Gamma_{\lambda}$ , por:

$$\Gamma_{\lambda} = \sum_{i=1}^{\beta} [\gamma_{\lambda}^{(i)}]^2, \tag{3.4}$$

donde  $\beta = 1, 2, \text{ o } 4$  etiqueta el tipo de ensemble. Los polos  $E_{\lambda}$  de  $K(E)$  siguen una de las distribuciones de los ensembles Gaussianos (ortogonal, unitario o simpléctico) y las amplitudes  $\gamma_{\lambda}^{(i)}$  son variables independientes con distribución Gaussiana, de manera que las  $\Gamma_{\lambda}$ 's siguen una distribución  $\chi^2$  con  $\beta$  grados de libertad.

Por otro lado, la función  $\theta'(E)$  permanecerá invariante si sumamos una constante:  $2\phi$  a la fase  $\theta(E)$ . Esta invariancia puede expresarse en términos de la matriz  $K(E)$ : de la Ec. (2.18) vemos que  $K(E)$  puede escribirse de la forma:

$$K(E) = \tan \frac{\theta(E)}{2}; \tag{3.5}$$

definiendo la función  $h(E)$  como:

$$h(E) \equiv \frac{\theta'(E)}{2}, \tag{3.6}$$

tenemos que  $h(E)$  es invariante ante la transformación:

$$K_{\phi} = \frac{K + \tan \phi}{1 - K \tan \phi}, \tag{3.7}$$

con  $\phi$  constante. Por este motivo, Wigner [47, 48] llamó a la función  $h(E)$  "derivada invariante". De esta última ecuación, observamos que los polos de la  $K$  transformada,  $K_{\phi}$ , se encuentran en:

$$K = \cot \phi. \tag{3.8}$$

Este resultado se muestra esquemáticamente en la figura 3.1. A nivel de la

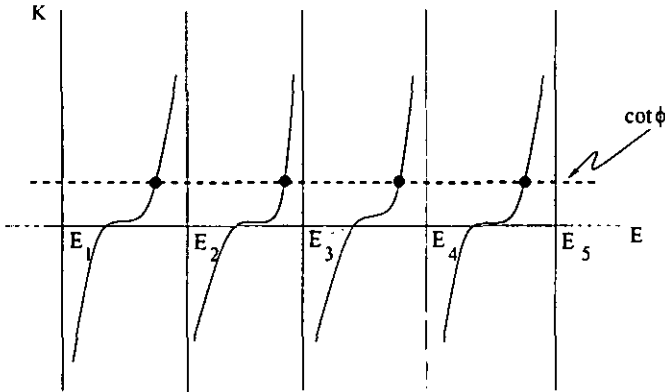


Figura 3.1: Indicados con círculos, los polos de la función transformada  $K_\phi$  se encuentran en las intersecciones de  $\cot\phi$  con la función  $K(E)$ .

matriz de dispersión, la transformación (3.7):  $\theta/2 \rightarrow \theta/2 + \phi$  implica que:

$$S \rightarrow e^{i\phi} S e^{i\phi}. \quad (3.9)$$

Ahora, veamos el valor de  $h(E)$  en los polos. Para esto, expresemos la función  $h(E)$  en términos de  $K(E)$ , haciendo uso de la Ec. (3.5):

$$h(E) = \frac{K'(E)}{1 + K(E)^2} \quad (3.10)$$

y sustituyendo la Ec. (3.3):

$$h(E) = \frac{\sum_\lambda \frac{\Gamma_\lambda}{(E_\lambda - E)^2}}{1 + \left(\sum_\lambda \frac{\Gamma_\lambda}{E_\lambda - E}\right)^2}, \quad (3.11)$$

encontramos que  $h(E)$  evaluada en el polo  $E_\lambda$  está dada por el inverso de la anchura:

$$h(E_\lambda) = \frac{1}{\Gamma_\lambda}. \quad (3.12)$$

Por último, la integral  $h(E)$  desde un polo, digamos  $E_1$ , al siguiente,  $E_2$ , es igual a  $\pi$ :

$$\int h(E) dE = \left[ \tan^{-1} K(E) \right]_{E_1}^{E_2} = \pi. \quad (3.13)$$

Esto implica que dada  $h(E)$  y un polo de  $K(E)$ , los demás polos quedan determinados, es decir, si integramos  $h(E)$  desde el polo  $E_\lambda$ , el siguiente polo  $E_{\lambda+1}$  se encontrará en el punto donde la integral de  $h(E)$  sea igual a  $\pi$ . En la figura 3.2 se representan estos resultados.

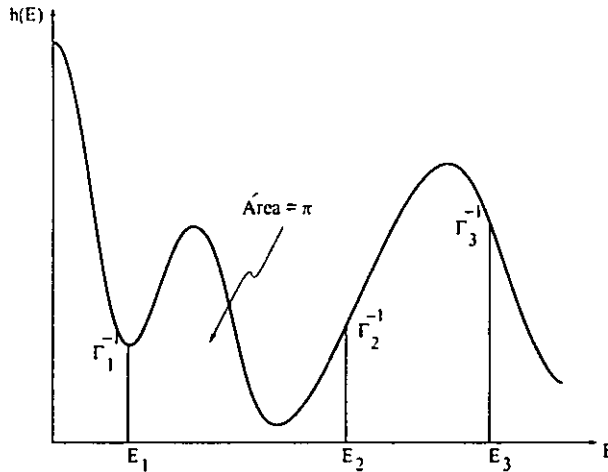


Figura 3.2: Representación de la función  $h(E)$ . En los polos,  $h(E)$  es igual al inverso de las anchuras  $\Gamma_\lambda$  y el área bajo la curva  $h(E)$  entre un polo y el siguiente es igual a  $\pi$ .

Una vez vistas algunas características de  $h(E)$ , pasemos al cálculo de la distribución de  $\tau$ . En general, de la ecuación (3.1), vemos que la distribución de  $\tau$  depende de la distribución conjunta  $p(\theta(E), \theta'(E))$ . Para el caso de un canal, utilizando las Ecs. (3.5) y (3.6), la distribución conjunta está dada por el promedio:

$$p(\theta, \theta') = \langle \delta(\theta - 2 \tan^{-1} K(E)) \delta(\theta' - 2h(E)) \rangle \tag{3.14}$$

$$= \frac{1}{2} \langle \delta(\theta - 2 \tan^{-1} K(E)) \delta(\theta'/2 - h(E)) \rangle, \tag{3.15}$$

donde, indicamos con  $\langle \dots \rangle$  el promedio sobre las variables aleatorias<sup>2</sup>  $E_\lambda$ . Usando la identidad:  $\delta(x - f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$ , donde  $f(x_i) = 0$ , reescribimos la primera función  $\delta$  como:

$$\delta(\theta - 2 \tan^{-1} K) = \frac{1}{\theta'} \sum_\lambda \delta(E - E_\lambda) \tag{3.16}$$

<sup>2</sup>Podemos verificar que la definición utilizada para la distribución conjunta (Ec. 3.14) es una buena definición. Por simplicidad tomemos, el caso de una sola variable aleatoria con distribución dada por:  $p(x) = \langle \delta(x - f(y)) \rangle$ , si  $g$  es la distribución normalizada de  $y$ , entonces  $\int p(x) dx = \int g(y) dy \int \delta(x - f(y)) dx = 1$ , es decir,  $p(x)$  está normalizada; los momentos -los cuales definen a una distribución- de  $x$  están bien definidos; calculemos el  $k$ -ésimo momento:  $\langle x^k \rangle = \int x^k p(x) dx = \int g(y) dy \int x^k \delta(x - f(y)) dx$ . Integrando respecto de  $x$ , encontramos que  $\langle x^k \rangle = \int [f(y)]^k g(y) dy$ . Así, en principio, podemos calcular cualquier cantidad estadística, utilizando la definición de distribución como en la Ec. (3.14).



**Función de  $S$  a dos energías: el tiempo de retardo y su aplicación  
38 a la capacitancia de un condensador mesoscópico.**

con  $\theta(E_\lambda) = 0$ . La suma de la ecuación anterior es igual a la densidad microscópica de niveles:  $\rho = \sum_\lambda \delta(E - E_\lambda)$ . Ahora, como los polos de  $K_\phi$  se encuentran en  $K = \cot\phi$ , Ec. (3.8), y

$$K(E) = \tan \frac{\theta(E)}{2} = \cot \left( \frac{\pi - \theta(E)}{2} \right) \quad (3.17)$$

entonces, definiendo la densidad de niveles:

$$\rho_\phi = \sum_\lambda \delta(E - E_\lambda(\phi)) \quad (3.18)$$

y utilizando la Ec. (3.17), la distribución conjunta  $p(\theta, \theta')$ , Ec. (3.14), puede escribirse como:

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\theta'} \langle \rho_{\frac{\pi-\theta}{2}} \delta(\theta'/2 - h) \rangle, \quad (3.19)$$

Finalmente, integrando sobre la energía la ecuación anterior y denotando por  $\Delta$  a la densidad media de niveles tenemos:

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\Delta\theta'} Q_{\frac{\pi-\theta}{2}} \left( \frac{\theta'}{2} = \frac{1}{\Gamma_\lambda} \right), \quad (3.20)$$

donde hemos usado que  $h(E_\lambda) = 1/\Gamma_\lambda$ , Ec. (3.12), y denotado por  $Q_\phi$  a la distribución de los inversos de las anchuras  $1/\Gamma_\lambda$ .

En este punto aplicamos una conjetura propuesta por Wigner [47, 48] respecto a los niveles de energía o polos  $E_\lambda$  y a las anchuras o residuos,  $\Gamma_\lambda$ . La conjetura propone:

*Las distribuciones estadísticas del espaciamiento de niveles y de los residuos permanecen invariantes ante la transformación (3.7).*

La afirmación anterior es una conjetura que verificamos numéricamente, tanto para los niveles de energía como para los residuos, en los casos de interés: niveles de energía  $E_\lambda$  con distribución dada por alguno de los ensembles Gaussianos  $\beta = 1, 2$  o  $4$  y  $\gamma_\lambda$ 's con distribución Gaussiana. En todos los casos, la propuesta de la conjetura fue verificada, dentro de las barras de error estadístico.

En términos de la distribución  $Q_\phi$ , la conjetura implica que:

$$Q_\phi(1/\Gamma_\lambda) = Q(1/\Gamma_\lambda), \quad (3.21)$$

es decir, la distribución de los inversos de las  $\Gamma$ 's no depende de  $\phi$ . Esto significa, de la Ec. (3.20), que  $\theta$  y  $\theta'$  son variables independientes, de manera

que la distribución conjunta puede escribirse como el producto de las distribuciones de  $\theta$  y  $\theta'$ :  $p(\theta, \theta') = g(\theta)P(\theta')$ . Como la fase  $\theta$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , pues  $\langle S \rangle = 0$ , entonces  $g(\theta) = 1/2\pi$ , de manera que:

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} P(\theta'). \quad (3.22)$$

De esta forma, usando la Ec. (3.21):

$$P(\theta') = \frac{\pi}{\Delta\theta'} Q(\theta'/2 = 1/\Gamma_\lambda) \quad (3.23)$$

Sólo resta encontrar la distribución de los inversos de las anchuras. Como hemos mencionado, las  $\Gamma_\lambda$ 's siguen una distribución  $\chi^2$  con  $\beta$  grados de libertad. Sea  $u$ , por ejemplo, una variable aleatoria con distribución  $\chi^2$ :

$$\chi_\beta^2(u) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} u^{\frac{\beta-2}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}u}, \quad (3.24)$$

y calculemos la distribución de su inverso:  $1/u$ . Haciendo el cambio de variable  $u \rightarrow 1/u$  con  $du \rightarrow du/u^2$ , encontramos que la distribución de  $u^{-1}$ ,  $Q_\beta$ , está dada por:

$$Q_\beta(u^{-1}) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} u^{-\frac{\beta+2}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}\frac{1}{u}}. \quad (3.25)$$

Reescribiendo ahora la Ec. (3.23) como:

$$P(\theta'/2) = \frac{2\pi}{\Delta\theta'} Q(\theta'/2 = 1/\Gamma_\lambda) \quad (3.26)$$

e introduciendo el tiempo de retardo adimensional,  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{\partial\theta}{\partial E}, \quad (3.27)$$

en ambos lados de la Ec. (3.26), tenemos finalmente, sustituyendo (3.25) en (3.26), que la distribución del tiempo de retardo está dada por:

$$w_\beta(\tau) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \frac{e^{-\frac{\beta}{2\tau}}}{\tau^{\frac{\beta+4}{2}}}. \quad (3.28)$$

Utilizando métodos supersimétricos y para  $\beta = 2$ , Fyodorov [30] calcula la distribución de  $\tau$ , la cual concuerda con nuestro resultado. Como una

verificación a la distribución  $w(\tau)$  que encontramos, realizamos una simulación numérica para cada uno de los ensembles:  $\beta = 1, 2$  y  $4$ . La simulación se llevó a cabo generando un ensemble de tiempos de retardo, utilizando la ecuación (3.11): los eigenvalores  $E_\lambda$  son el resultado de la diagonalización de matrices de dimensión  $200 \times 200$  cuyos elementos siguen una distribución Gaussiana<sup>3</sup>, de acuerdo con cada uno de los ensembles,  $\beta$ . En cuanto a las amplitudes  $\gamma_\lambda$  en la Ec. (3.11), éstas, como dijimos anteriormente, también siguen una distribución Gaussiana. En la figura 4.2 comparamos los resultados de la simulación numérica con los teóricos, Ec. (3.28). Como podemos ver, el acuerdo es muy bueno en todos los casos.

---

<sup>3</sup>Con un generador de números al azar se puede crear un conjunto de variables,  $z$ 's, con distribución Gaussiana, utilizando la transformación [49]:  $z = A\sqrt{-2\ln y_1} \cos y_2$ , donde  $y_1$  y  $y_2$  son variables al azar con probabilidad uniforme en el intervalo  $(0,1)$ ; bajo esta transformación  $z$  sigue la distribución:  $p(z) = (2\pi A)^{1/2} \exp(-z^2/2A^2)$ .

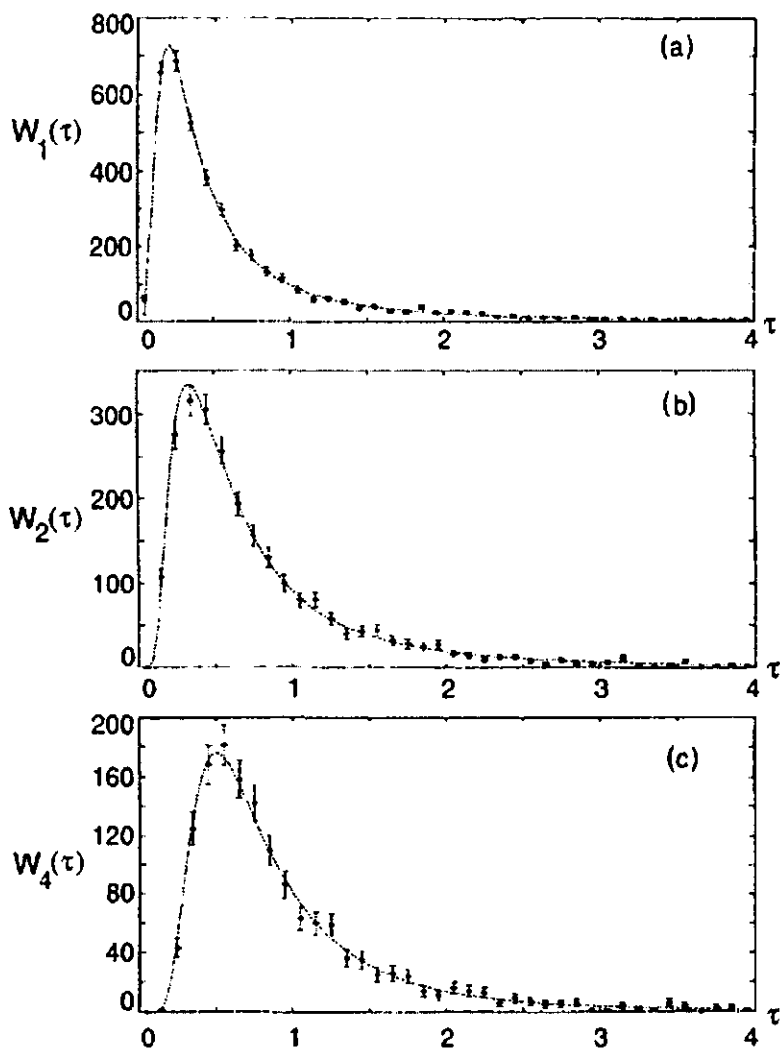


Figura 3.3: Verificación de la distribución  $w(\tau)$ , Ec. (3.28), para los casos ortogonal, unitario y simpléctico: (a), (b) y (c), respectivamente. La línea punteada corresponde al resultado teórico y los cuadros, con su barra de error por muestra finita, al resultado de la simulación numérica. En todos los casos el acuerdo es muy bueno.

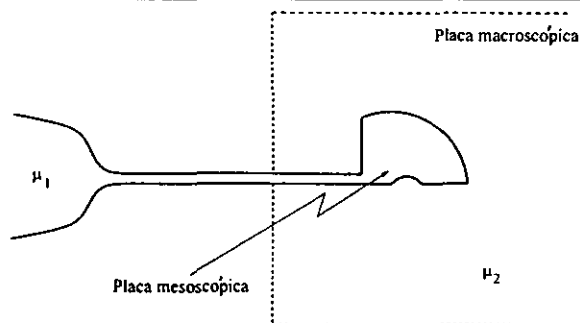


Figura 3.4: Condensador mesoscópico formado por una placa mesoscópica conectada a un reservorio con potencial químico  $\mu_1$  y, en un segundo plano, una placa macroscópica (línea punteada) conectada a un reservorio con potencial químico  $\mu_2$ . La placa mesoscópica se encuentra conectada capacitivamente a la macroscópica.

### 3.2 Aplicación de $w(\tau)$ : Distribución de la admitancia de un capacitor mesoscópico.

Una de las motivaciones físicas para el estudio del tiempo de retardo se debe a su relevancia en el transporte electrónico en sistemas mesoscópicos de corriente alterna. En varios trabajos realizados por Büttiker y colaboradores [50, 51] se presentan las ideas que relacionan la matriz de dispersión con diferentes cantidades del transporte en circuitos mesoscópicos de corriente alterna. Aquí, daremos sólo algunos de los conceptos básicos que dan lugar a la relación entre  $\tau$  y la admitancia de un condensador mesoscópico [50].

Comúnmente se considera que el campo eléctrico se anula exactamente en la superficie de un conductor y como consecuencia, la capacitancia de un condensador es una cantidad que depende únicamente de la geometría del sistema y no de las propiedades en sí de éste. Sin embargo, esto no es totalmente cierto ya que el campo eléctrico penetra al conductor una distancia del orden de la longitud de apantallamiento de Thomas-Fermi<sup>4</sup>, la cual es generalmente despreciable para un sistema macroscópico, pero puede no serlo para un sistema de las dimensiones de un sistema mesoscópico. Esta penetración no despreciable del campo eléctrico lleva a una revisión de la capacitancia de un condensador mesoscópico.

<sup>4</sup>Para un potencial que varía poco en comparación con la longitud de onda del electrón, la aproximación de Thomas-Fermi supone que el potencial químico en un punto es proporcional a la densidad de electrones en ese punto. Bajo esta aproximación, la longitud de apantallamiento de Thomas-Fermi,  $l_s$ , es proporcional a la densidad de estados,  $D$ :  $l_s = 1/k_s^2$  con  $k_s^2 = 4\pi D(E_F)$  [52].

La capacitancia usual, que llamaremos "capacitancia geométrica",  $C_e$ , relaciona la carga eléctrica en las placas del capacitor con el voltaje entre ellas; para un capacitor mesoscópico surge una cantidad más compleja llamada "capacitancia electroquímica",  $C_\mu$ , que relaciona la carga con el potencial electroquímico. Esta nueva capacitancia es la que depende de las propiedades del conductor con que están hechas la placas, por medio de la densidad de estados en ellas. En [50] se presentan diferentes sistemas para los que se calcula  $C_\mu$  y se muestra explícitamente el efecto de la longitud de apantallamiento.

El sistema que estudiamos (Fig. 3.4) consiste de un capacitor formado por una placa mesoscópica y una macroscópica, cada una de ellas conectada a reservorios con potenciales químicos  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente. La placa mesoscópica está conectada al reservorio por medio de un conductor perfecto. Para aplicar nuestros resultados para  $w(\tau)$  de la sección anterior, suponemos que la placa mesoscópica es una cavidad balística como las que presentamos en el capítulo anterior, donde la teoría de matrices aleatorias ha sido aplicada con éxito, además, el conductor perfecto conectado a la placa mesoscópica contiene un solo canal abierto.

Las placas del capacitor están acopladas sólo capacitivamente, por lo que no existe la posibilidad de transporte por corriente directa. Si aplicamos al capacitor un voltaje oscilante  $U(\omega)$ , Büttiker encuentra que la admitancia  $g^I(\omega)$ , definida como  $\delta I(\omega)/\delta U(\omega)$ , donde  $I(\omega)$  es la corriente, está dada por [50, 51]:

$$g^I(\omega) = \frac{g(\omega)}{1 + \frac{i}{\omega C_e} g(\omega)} \equiv -i\omega C_\mu + \dots, \quad (3.29)$$

a primer orden en  $\omega$ . Las cantidades  $g^I(\omega)$  y  $g(\omega)$  denotan las admitancias para el sistema interactuante (en la aproximación de Thomas-Fermi) y el sistema no interactuante, respectivamente. A temperatura cero,  $g(\omega)$  está dada en términos de la matriz de dispersión  $S(E)$ , asociada a la cavidad balística y el conductor perfecto:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= -i\omega e^2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \text{Tr} \left[ S^\dagger(E) \frac{\partial S(E)}{\partial E} \right] \right\} + \dots \\ &= -i\omega e^2 N\tau/\Delta + \dots, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $N$  es el número de canales,  $\Delta$ , el espaciamiento medio de niveles de la cavidad y  $\tau$ , el tiempo de retardo adimensional:

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi N} \frac{\partial \theta}{\partial E}. \quad (3.31)$$

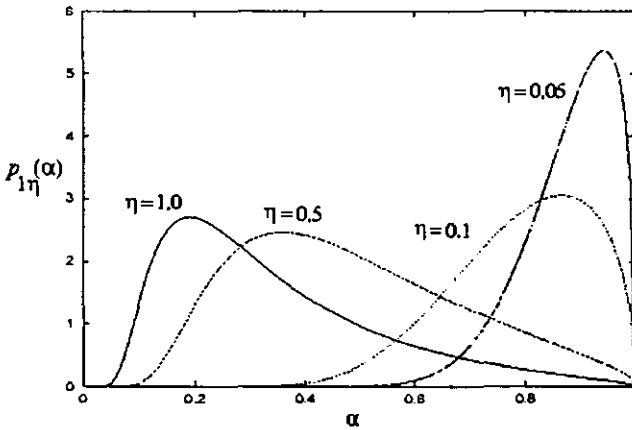


Figura 3.5: Distribución de la capacitancia adimensional  $\alpha = C_\mu/C_\alpha$  para diferentes valores de  $\eta$ .

Sustituyendo (3.30) en (3.29), expresamos la admitancia en función del tiempo de retardo como:

$$g^I(\omega) = -i\omega C_e \alpha + \dots, \quad (3.32)$$

donde  $\alpha$  es el cociente de las capacitancias:

$$\alpha = C_\mu/C_e = \frac{\tau}{\tau + \eta} \quad (3.33)$$

con

$$\eta = \frac{C_e}{N \frac{e^2}{\Delta}}. \quad (3.34)$$

Podemos verificar que en el límite macroscópico, recuperamos la expresión conocida para la admitancia: en este límite, el espaciamiento medio de niveles de la cavidad mesoscópica,  $\Delta$ , tiende a cero por lo que  $\eta \rightarrow 0$ , entonces, a primer orden en  $w$ ,  $g^I(\omega) \approx -i\omega C_e$ .

Ahora, apliquemos nuestro resultado para  $w(\tau)$  de la sección anterior para calcular la distribución de la admitancia o equivalentemente la distribución de  $\alpha$ , Ec. (3.33), para el caso de un canal. Despejando  $\tau$  de la Ec. (3.33), tenemos:

$$\tau = \frac{\eta \alpha}{1 - \alpha}. \quad (3.35)$$

Haciendo el cambio de variable dado por la Ec. anterior en  $w(\tau)$ , Ec. (3.28), encontramos que la distribución de  $\alpha$ ,  $p(\alpha)$ , está dada por:

$$p_{\beta, \eta}(\alpha) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2} (1 - \alpha)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \frac{1}{\eta^{\frac{\beta+2}{2}} \alpha^{\frac{\beta+4}{2}}} e^{-\beta \frac{1-\alpha}{2\eta\alpha}}, \quad (3.36)$$

donde  $0 \leq \alpha < 1$ . En la figura 3.5 se muestra  $p(\alpha)$  para distintos valores de  $\eta$ , como podemos ver, conforme disminuye el valor de  $\eta$ , el ancho de la distribución disminuye, es decir, la distribución de  $\alpha$  se aproxima al caso macroscópico: para  $\eta \ll 1$ ,  $p(\alpha) \rightarrow \delta(1 - \alpha)$ .

En este capítulo hemos calculado la distribución de una función de dos puntos: el tiempo de retardo, para un canal y cualquier simetría:  $\beta = 1, 2$  y  $4$ . Este fue el primer avance hecho en el estudio de funciones de más de un punto, utilizando un enfoque cercano al de la teoría de la información: para calcular la distribución del tiempo de retardo fue necesario recurrir a la invariancia de los eigenvalores de la energía y los residuos de la matriz  $K$  ante la transformación (3.7) y no únicamente a suposiciones estadísticas a nivel mismo de la  $S$ , como es la filosofía del enfoque de la teoría de la información. Cabe mencionar que posteriormente a este trabajo, Brouwer et. al. [53] lograron la extensión de la distribución  $w(\tau)$  al caso multicanal, para  $\langle S \rangle = 0$ , así como la demostración de la conjetura de Wigner.

Por otra parte, nuestro interés se centra no sólo en funciones a dos energías, sino en funciones de la matriz de dispersión a  $n$  energías y aunque, el problema general de funciones a dos energías cualesquiera está aún abierto, en el capítulo siguiente presentamos un resultado aplicable a funciones a  $n$  puntos que permite reducir el problema de la dispersión con procesos directos al caso donde dichos procesos están ausentes. Este resultado nos servirá para extender la distribución del tiempo de retardo que recién encontramos para  $\langle S \rangle = 0$  al caso  $\langle S \rangle \neq 0$ .



**Función de  $S$  a dos energías: el tiempo de retardo y su aplicación  
46 a la capacitancia de un condensador mesoscópico.**

---

## Capítulo 4

# Reducción del problema de dispersión con $\langle S \rangle \neq 0$ a $\langle S \rangle = 0$ para funciones de $S$ a una y varias energías.

En el capítulo pasado estudiamos una función de la matriz de dispersión a dos puntos. continuando con el estudio de funciones de  $S$  a más de una energía, presentamos enseguida un resultado aplicable a funciones de  $n$  puntos: mostramos cómo el análisis de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión en presencia de procesos directos puede reducirse al caso más sencillo: dispersión en ausencia de dichos procesos.

Como mencionamos anteriormente, el enfoque de la teoría de la información describe dos escalas de tiempo distintas: una asociada a procesos de dispersión de respuesta rápida, caracterizados por un valor de  $S$  promedio distinto de cero, y otra asociada con tiempos de respuesta lentos. El problema de la dispersión con  $\langle S \rangle \neq 0$  es de interés físico, en particular en el problema del transporte en sistemas mesoscópicos, porque su solución permite la descripción de sistemas de mayor complejidad que aquellos sistemas de dispersión donde los procesos directos están ausentes, caracterizados por  $\langle S \rangle = 0$ .

El resultado principal que presentamos en este capítulo nos será de utilidad para extender la distribución del tiempo de retardo para un canal y  $\langle S \rangle = 0$  del capítulo al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ . Para verificar dicha extensión, construimos numéricamente, como en el capítulo anterior, un ensemble de tiempos de retardo provenientes de matrices de dispersión con  $\langle S \rangle = 1/2$  y comparamos la distribución de  $\tau$  obtenida del ensemble con la distribución

teórica,  $w_{\langle S \rangle = 1/2}(\tau)$ . También, verificamos numéricamente nuestro resultado, utilizando la función de autocorrelación  $C(E)$  para matrices  $S$  de dimensión  $2 \times 2$  con simetrías  $\beta = 1$  y  $2$ ; veremos que con la aplicación de nuestro resultado podemos ir de  $C(E)$  con  $\langle S \rangle = 0$  a  $C(E)$  con  $\langle S \rangle = 1/2$ . Al final de la tesis se encuentra una copia de la Ref. [54], donde se presentan los resultados de este capítulo.

## 4.1 Relación entre matrices de dispersión con y sin procesos directos.

Como hemos mencionado, el problema de la dispersión con procesos directos es relevante para el problema del transporte electrónico, pues permite la consideración de sistemas más complejos que aquellos donde  $\langle S \rangle = 0$ . Por ejemplo, supongamos que tenemos una cavidad conectada a un conductor perfecto y dentro de este último se encuentra una barrera de potencial, Fig. 4.1. Si un grupo de electrones incide por el lado izquierdo de la barrera, una parte de ellos podrá atravesarla por tunelaje y entrará en la cavidad, pero otra parte de los electrones se “reflejará” en la barrera. A estos electrones que no entran en la cavidad se dice que sufren procesos directos de dispersión, contribuyendo a que  $\langle S \rangle$  sea distinto de cero.

En el capítulo 2, mostramos algunos ejemplos de sistemas más complejos donde los procesos de dispersión directa son importantes, Fig. 2.10, por lo que  $\langle S \rangle \neq 0$ . También en ese capítulo, vimos que la diferencial de probabilidad para la matriz  $S$  en presencia de procesos directos puede escribirse como:

$$dP_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) = p_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) d\mu_{\beta}(S), \quad (4.1)$$

donde  $d\mu_{\beta}(S)$  es la medida invariante de cada uno de los ensembles circulares y  $p_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S)$  está dado por el kernel de Poisson.

La reducción del problema con  $\langle S \rangle \neq 0$  a  $\langle S \rangle = 0$  tiene la ventaja de tratar con una densidad de probabilidad constante:

$$dP^{(\beta)}(S) = d\mu_{\beta}(S), \quad (4.2)$$

es decir, la distribución de la matriz de dispersión está dada por alguno de los ensembles circulares:  $\beta = 1, 2$  o  $4$ .

Desde hace tiempo [38] se conoce un grupo de transformaciones que mapea matrices  $S$  en presencia de procesos directos a matrices  $S'$  sin tales procesos. La transformación, por ejemplo para  $\beta = 1$ , es la siguiente [38, 27, 55]:

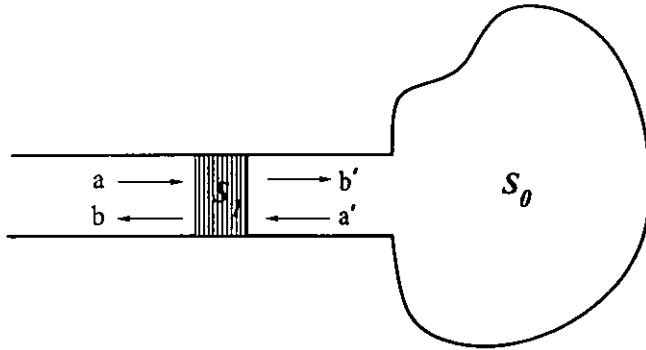


Figura 4.1: Un ejemplo de un sistema dispersor donde se producen procesos directos ( $\langle S \rangle \neq 0$ ).  $S_1$  es la matriz de dispersión asociada a la barrera de potencial y  $S_0$  a la cavidad.

$$S' = R(S - \langle S \rangle)(I - \langle S \rangle^* S)^{-1} (R^*)^{-1}, \quad (4.3)$$

donde la matriz  $R$  satisface la relación:

$$R(I - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger) R^\dagger = I. \quad (4.4)$$

Una transformación de la forma dada por la Ec. (4.3) puede obtenerse utilizando el ejemplo anterior de la cavidad con una barrera de potencial en la entrada. Siguiendo [29] deducimos enseguida tal transformación.

En la figura 4.1 se muestra una cavidad balística cuya matriz de dispersión (sin considerar la barrera de potencial) es  $S_0$ . Para esta matriz  $\langle S_0 \rangle = 0$ , es decir, suponemos que no tenemos procesos directos de dispersión y a la barrera de potencial le asociamos una matriz fija  $S_1$ .

Nuestro propósito es encontrar la matriz de dispersión  $S$  del sistema completo: es decir, cavidad y barrera de potencial. Para ello, debemos de combinar adecuadamente las matrices  $S_0$  y  $S_1$ . Estas dos matrices relacionan a los vectores de  $N$  componentes:  $a, b, a'$  y  $b'$ , Fig. 4.1, a través de las ecuaciones:

$$a' = S_0 b', \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} = S_1 \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

donde  $S_0$  es una matriz de dimensión  $N \times N$  y  $S_1$  de dimensión  $2N \times 2N$ :

$$S_1 = \begin{bmatrix} r_1 & t'_1 \\ t_1 & r'_1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Como hemos designado usualmente,  $r_1$  y  $t_1$  de dimensión  $N \times N$ , así como  $r'_1$  y  $t'_1$ , son las amplitudes de reflexión y transmisión, respectivamente.

De la Ec. (4.6) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b = r_1 a + t'_1 a' \quad (4.8)$$

$$b' = t_1 a + r_1 a', \quad (4.9)$$

eliminando las amplitudes  $a'$  y  $b'$  de estas dos últimas ecuaciones, haciendo uso de la Ec. (4.5), encontramos que:

$$b = \left[ r_1 + t'_1 (S_0^{-1} - r'_1)^{-1} t_1 \right] a, \quad (4.10)$$

pero por definición, la matriz que relaciona las amplitudes entrantes  $a$  con las salientes  $b$  es la matriz de dispersión  $S$  del sistema completo:

$$b = S a, \quad (4.11)$$

por lo tanto, la regla de combinación para las matrices  $S_0$  y  $S_1$  está dada por:

$$S = r_1 + t'_1 S_0 (1 - r'_1 S_0)^{-1} t_1. \quad (4.12)$$

Despejemos ahora  $S_0$  de la Ec. (4.12):

$$S_0^{-1} = [r'_1 t'^{-1}_1 (S - r_1) + t_1] (S - r_1) t'_1, \quad (4.13)$$

sustituyendo la relación:  $r'_1 = -t'^{-1}_1 r_1 t'_1$ , obtenida de la unitariedad de  $S_1$  ( $S_1^\dagger S_1 = I$ ), en la Ec. (4.13), encontramos finalmente:

$$S_0 = t'^{-1}_1 (S - r_1) (1 - r_1^\dagger S)^{-1} t'_1. \quad (4.14)$$

Como podemos observar, esta transformación, Ec. (4.14), es de la misma forma<sup>1</sup> que la Ec. (4.3). La Ec. (4.14) será fundamental para el análisis que presentamos en la sección siguiente.

## 4.2 Reducción del problema de dispersión con $\langle S \rangle \neq 0$ a $\langle S \rangle = 0$ .

En el capítulo 2 introducimos la medida para las matrices  $S$ ,  $d\mu_\beta(S)$ , invariante ante cada una de las transformaciones de simetría  $\beta$ , que definen a cada

<sup>1</sup>Para  $\beta = 1$ , como es el caso de la Ec. (4.3),  $t'_1 = t_1$ .

## 4.2 Reducción del problema de dispersión con $\langle S \rangle \neq 0$ a $\langle S \rangle = 0$ . 51

tipo de ensemble. Como la medida invariante da igual peso a todas las posibles matrices  $S$  del ensemble, el promedio de  $S$  pesada con  $d\mu_\beta(S)$  es cero. Cuando el promedio de  $S$  es distinto de cero, la densidad de probabilidad está dada por el kernel de Poisson (capítulo 2):

$$p_{\langle S \rangle}^{(\beta)}(S) = V_\beta^{-1} \frac{[\det(I - \langle S \rangle \langle S \rangle^\dagger)]^{(\beta N + 2 - \beta)/2}}{|\det(I - S \langle S \rangle^\dagger)|^{\beta N + 2 - \beta}}, \quad (4.15)$$

donde  $V_\beta$  es una constante de normalización y  $N$  el número de canales.

Ahora consideremos la transformación que obtuvimos en la sección anterior, Ec. (4.14), o bien la Ec. (4.3). Esta última transformación se utilizó en [55] con el fin de simplificar el análisis de funciones de  $S$  a una energía para el caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ ; se buscaba una transformación cuyas matrices de dispersión resultantes tuvieran una densidad de probabilidad constante, reemplazando así, a la densidad de probabilidad dada por el kernel de Poisson. En la misma referencia [55], y en [38], se demuestra que si la distribución a una sola energía de  $S$  está dada por la Ec. (4.15) entonces la distribución de  $S'$  está dada por la medida invariante  $d\mu_\beta(S')$ , de modo que  $\langle S' \rangle = 0$ . También se demuestra que la distribución de  $S'$  es independiente de la matriz  $R$ . Para la transformación (4.14) esto implica, identificando a  $r_1$  con  $\langle S \rangle$  [29], que la distribución de  $S_0$  está dada por la medida invariante  $d\mu_\beta(S_0)$ , de modo que  $\langle S_0 \rangle = 0$ , y además es independiente de  $t_1$  y  $t'_1$ . En otras palabras, con  $r_1 = \langle S \rangle$ , la Ec. (4.14) transforma el problema de dispersión con procesos directos ( $\langle S \rangle \neq 0$ ) a uno sin procesos directos ( $\langle S \rangle = 0$ ), donde las matrices de dispersión son funciones estocásticas estacionarias a una energía.

Supongamos ahora que para cada energía  $E$ , aplicamos la transformación (4.14) a  $S(E)$ , con el mismo valor de  $\langle S \rangle$  en cada transformación. Bajo estas condiciones demostramos enseguida la siguiente afirmación:

**Enunciado 4.2.1** *Las propiedades estadísticas conjuntas de las matrices transformadas  $S_0(E_1), S_0(E_2), S_0(E_3)$ , etc. son precisamente aquellas asociadas con el problema de dispersión en ausencia de procesos directos, caracterizados por  $\langle S_0 \rangle = 0$ .*

Es decir, la transformación (4.14) relaciona a  $S(E)$  con  $S_0(E)$ , está última con promedio cero, donde las matrices de dispersión son funciones estocásticas estacionarias de la energía [41].

A continuación, damos la demostración del enunciado anterior para el caso del ensemble circular ortogonal ( $\beta = 1$ ). En este ensemble, las matrices  $S$  son unitarias y simétricas. La demostración para los otros ensembles ( $\beta = 2$  y 4) es similar al caso que presentamos.

Supongamos que  $\langle S \rangle$  es diagonal y real <sup>2</sup>. Como hemos visto, la matriz de dispersión  $S$  puede expresarse en términos de las amplitudes  $\gamma_\lambda$  y los niveles de energía  $E_\lambda$ , por medio de la matriz  $K$ , como [Ec. (2.18)]:

$$S(E) = [1 + iK(E)][1 - iK(E)]^{-1},$$

donde  $K(E)$  está dada por [Ec. (2.20)]:

$$K_{ab}(E) = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\lambda a} \gamma_{\lambda b}}{E_\lambda - E}.$$

Las amplitudes  $\gamma_{\lambda a}$  son variables reales descorrelacionadas con distribución Gaussiana y las energías  $E_\lambda$  siguen la estadística del ensemble Gaussiano Ortogonal con espaciamiento medio entre niveles  $\Delta$ . Por otra parte, el promedio de  $S$  está dado por la relación [56]:

$$\langle S(E) \rangle_{ab} = (1 - y_{aa})(1 + y_{bb})^{-1} \delta_{ab}, \quad (4.16)$$

donde

$$y_{aa} = \frac{\pi \langle \gamma_{\lambda a}^2 \rangle}{\Delta}. \quad (4.17)$$

De la misma forma que  $S$  puede expresarse en términos de  $K(E)$ , para  $S_0$  tenemos:

$$S_0(E) = [1 + iK_0(E)][1 - iK_0(E)]^{-1} \quad (4.18)$$

con

$$\langle S_0(E) \rangle_{ab} = (1 - y_{aa}^0)(1 + y_{bb}^0)^{-1} \delta_{ab}. \quad (4.19)$$

Despejando  $K_0(E)$  de la Ec. (4.18) :

$$K_0 = i(1 - S_0)(1 + S_0)^{-1} \quad (4.20)$$

y sustituyendo la transformación (4.14) con  $S(E)$  dada por la Ec. (2.18) y  $r_i = \langle S \rangle$ , encontramos que:

$$(K_0)_{ab} = y_{aa}^{-1/2} K_{ab} y_{bb}^{-1/2}. \quad (4.21)$$

Es decir, bajo la transformación (4.14), las  $\gamma_{\lambda a}$ 's se ven afectadas sólo por la constante  $y_{aa}^{-1/2}$  :  $\gamma_{\lambda a} \rightarrow y_{aa}^{-1/2} \gamma_{\lambda a}$ , que es justamente el factor necesario, Ec. (4.17), para hacer:  $\langle S_0(E) \rangle = 0$ , pues  $y_{aa}^0 = 1$ , Ec. (4.19).

Entonces, bajo la transformación (4.14), las  $\gamma_{\lambda a}$ 's varían únicamente por una constante y los niveles de energía permanecen invariantes. Por lo tanto, las propiedades estadísticas de la matriz transformada  $S_0(E)$  son las mismas que las de  $S(E)$ , pero sin procesos directos. De esta forma, el enunciado 4.2.1 queda demostrado.

<sup>2</sup>En la referencia [56] se demuestra que el caso de  $\langle S \rangle$  arbitraria puede reducirse al de  $\langle S \rangle$  diagonal y real, es decir, se reduce al caso que suponemos.

### 4.3 Distribución del tiempo de retardo para $\langle S \rangle \neq 0$ .

En esta sección, aplicamos el enunciado 4.2.1 para extender la distribución del tiempo de retardo que obtuvimos en el capítulo 2 para  $\langle S \rangle = 0$  al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ . Como verificación, comparamos los resultados de una simulación numérica del problema con nuestro resultado teórico.

De la transformación (4.14) con  $r_1 = \langle S \rangle$ , sin el factor  $t_1^*/t_1$  que resulta irrelevante para la distribución de  $S_0$  [55], tenemos que:

$$S_0(S) = (S - \langle S \rangle)(1 - \langle S \rangle^* S)^{-1}. \quad (4.22)$$

Ya que estamos interesados en el tiempo de retardo, el cual es proporcional a  $d\theta/dE$  y para un canal  $S = e^{i\theta}$ , resulta conveniente despejar  $S$  de la Ec. (4.22):

$$S = (1 + S_0 \langle S \rangle^*)^{-1} (S_0 + \langle S \rangle). \quad (4.23)$$

Derivando ambos lados de esta ecuación respecto a la energía, utilizando  $S_0 = e^{i\theta_0}$ , tenemos:

$$\frac{d\theta}{dE} = \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|1 + \langle S \rangle^* e^{i\theta_0}|^2} \frac{d\theta_0}{dE}, \quad (4.24)$$

o bien<sup>3</sup>,

$$\theta' = f(\theta_0)\theta'_0, \quad (4.25)$$

con

$$f(\theta_0) = [1 - |\langle S \rangle|^2] |1 + \langle S \rangle^* e^{i\theta_0}|^{-2}. \quad (4.26)$$

De las ecuaciones anteriores, vemos que para calcular la distribución del tiempo de retardo es necesario encontrar la distribución conjunta de  $\theta_0$  y  $\theta'_0$ :  $p_0^\beta(\theta_0, \theta'_0)$ . Pero en el capítulo pasado, vimos que  $\theta_0$  y  $\theta'_0$  son estadísticamente independientes, de modo que<sup>4</sup>:

$$p_0^\beta(\theta_0, \theta'_0) = \frac{1}{2\pi} P_0^\beta(\theta'_0), \quad (4.27)$$

donde  $P_0(\theta'_0)$  es básicamente la distribución del tiempo de retardo que encontramos en el capítulo pasado.

Regresando a la distribución de  $\theta'$ ,  $P_{\langle S \rangle}^\beta(\theta')$ , de la Ec. (4.25) escribimos ésta como:

<sup>3</sup> $\theta'$  y  $\theta'_0$  indican  $d\theta/dE$  y  $d\theta_0/dE$ , respectivamente.

<sup>4</sup>Indicamos con el subíndice cero a las distribuciones con  $\langle S \rangle = 0$ .



$$P_{\langle S \rangle}^{\beta}(\theta') = \langle \delta[\theta' - f(\theta_0)\theta'_0] \rangle \quad (4.28)$$

$$= \iint \delta[\theta' - f(\theta_0)\theta'_0] dp(\theta_0, \theta'_0) \quad (4.29)$$

y usando la Ec. (4.27):

$$P_{\langle S \rangle}^{\beta}(\theta') = \frac{1}{2\pi} \iint \delta(\theta' - f(\theta_0)\theta'_0) P_0^{\beta}(\theta'_0) d\theta_0 d\theta'_0. \quad (4.30)$$

Integrando respecto a  $\theta'_0$ , usando la igualdad:  $\delta(a - bx) = \delta(a/b - x)/|b|$ , tenemos que:

$$P_{\langle S \rangle}^{\beta}(\theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta_0)} P_0^{\beta}(\theta'/f(\theta_0)) d\theta_0 \quad (4.31)$$

donde  $f(\theta_0) > 0$ , Ec. (4.26).

Introduciendo, como anteriormente, el tiempo de retardo adimensional:

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi} \theta', \quad (4.32)$$

en la Ec. (4.31), encontramos que la distribución del tiempo de retardo,  $w_{\langle S \rangle}^{\beta}(\tau)$ , está dada por:

$$w_{\langle S \rangle}^{\beta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta_0)} w_0^{\beta}(\tau/f(\theta_0)) d\theta_0, \quad (4.33)$$

donde  $w_0^{\beta}$  es justamente la distribución del tiempo de retardo que encontramos en el capítulo 3 para el caso de  $\langle S \rangle = 0$ , Ec. (3.28). Entonces sustituyendo  $w_0^{\beta}$  en la ecuación anterior, tenemos finalmente:

$$w_{\langle S \rangle}^{\beta}(\tau) = \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{3/2}}{2\pi \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \tau^{2+\frac{\beta}{2}}} \int_0^{2\pi} [f(\theta_0)]^{1+\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\beta}{2\tau} f(\theta_0)} d\theta_0 \quad (4.34)$$

con  $f(\theta_0)$  dado por la Ec. (4.26). De esta forma, el cálculo de la distribución del tiempo de retardo para un valor arbitrario de  $\langle S \rangle$  ha quedado reducido a cuadraturas.

Notamos que la Ec. (4.34) se reduce correctamente a la distribución que encontramos en el capítulo pasado para  $\langle S \rangle = 0$ , pues en este caso  $f(\theta_0) = 1$ , Ec. (4.26). También, hemos verificado numéricamente que nuestro resultado concuerda con el presentado en [30], donde los autores encuentran analíticamente la distribución de  $\tau$  para el caso  $\beta = 2$ .

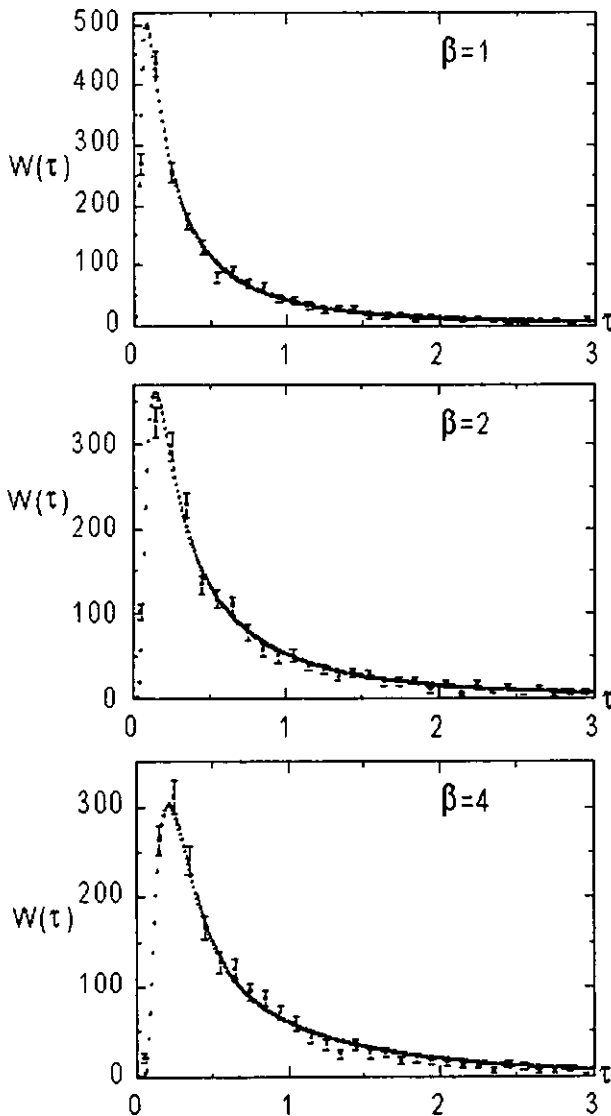


Figura 4.2: Distribución del tiempo de retardo para los 3 ensembles ( $\beta = 1, 2$  y  $4$ ) con  $\langle S \rangle = 1/2$ . Los puntos con su barra de error por muestra finita son el resultado de la simulación numérica. El resultado teórico, derivado de la integración numérica de la Ec. (4.34), se indica con cruces. Como vemos el acuerdo es muy bueno en los 3 casos.

Como una verificación más a la distribución que encontramos, Ec. (4.34), realizamos una simulación numérica del problema. De la misma forma que como explicamos en el capítulo anterior, construimos un ensemble de tiempos de retardo a partir de las resonancias  $E_\lambda$ , para cada uno de los ensembles Gaussianos, y las amplitudes  $\gamma_{\lambda a}$  con distribución Gaussiana. Escogimos el valor de  $\langle S \rangle = 1/2$  para llevar a cabo nuestra verificación. Para conseguir este promedio de  $S$ , la varianza de la distribución Gaussiana de las  $\gamma$ 's está por (Ec. 4.16):

$$\frac{\pi \langle \gamma_{\lambda a}^2 \rangle}{\Delta} = \frac{1}{3} . \quad (4.35)$$

de modo que  $\langle S \rangle = 1/2$ . Los resultados se muestran en las figura 4.2, para  $\beta = 1, 2$  y 4. Como vemos el acuerdo es muy bueno en todos los casos.

También, verificamos el enunciado 4.2.1 para matrices  $S$  de dimensión  $2 \times 2$  y simetrías  $\beta = 1$  y 2, utilizando una función a dos energías cualquiera: la función de autocorrelación,  $C(E)$ . Nuevamente, construimos numéricamente dos ensembles de matrices  $S$  de dimensión  $2 \times 2$ , uno con promedio  $\langle S \rangle = 0$  y el otro con  $\langle S \rangle = (1/2)I$ , donde  $I$  es la matriz unidad, y calculamos la función de autocorrelación:

$$C_{\langle S \rangle}(E) = \langle S_{11}^*(0) S_{11}(E) \rangle_{\langle S \rangle} - \langle S_{11}^*(0) \rangle_{\langle S \rangle} \langle S_{11}(E) \rangle_{\langle S \rangle} , \quad (4.36)$$

para ambos ensembles. En la figura 4.3 se muestran los resultados: con círculos el caso de  $\langle S \rangle = 0$  y con rombos el caso de  $\langle S \rangle = (1/2)I$ . A este último caso ( $\langle S \rangle = (1/2)I$ ) aplicamos la transformación (4.14). El resultado de esta operación se muestra con cuadros en la misma figura 4.3. Como podemos ver, el resultado de la aplicación de la transformación es consistente con el caso de  $\langle S \rangle = 0$ , verificándose así el enunciado (4.2.1).

En resumen, en este capítulo hemos encontrado que el estudio de las propiedades estadísticas de la matriz de dispersión, entendida ésta como una función estacionaria de la energía, en presencia de procesos directos, caracterizados por  $\langle S \rangle \neq 0$ , puede reducirse al problema de dispersión en la ausencia de procesos directos, que es mucho más sencillo de tratar. Esto implica que futuros estudios de las propiedades estadísticas de funciones de  $S$  pueden concentrarse en el análisis del caso de la ausencia de procesos directos ( $\langle S \rangle = 0$ ) y extenderse al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ , por medio del resultado que hemos encontrado en este capítulo.

Por otra parte, hemos visto cómo las propiedades estadísticas de funciones de  $S$  a una energía han sido descritas adecuadamente por el kernel de Poisson (capítulo 2) y en el caso de la función de dos puntos: el tiempo de retardo, por un enfoque cercano al informático (capítulos 3 y 4). Sin embargo, en

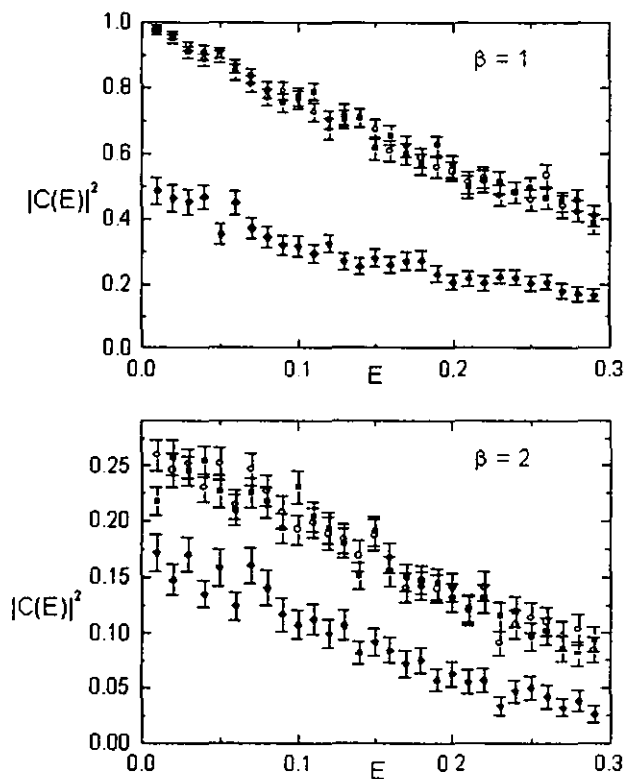


Figura 4.3: El cuadrado de la función de autocorrelación  $C(E)$  para el elemento  $S_{11}$ . Los círculos y diamantes corresponden al caso  $\langle S \rangle = 0$  y  $\langle S \rangle = 1/2$ , respectivamente. Los cuadros corresponden a la aplicación de la transformación (4.14) al caso  $\langle S \rangle = 1/2$ : el resultado es consistente con el caso  $\langle S \rangle = 0$ , para ambas simetrías,  $\beta$ .

la literatura existen algunos ejemplos donde la distribución de la fase de la matriz de dispersión no concuerda con la dada por el kernel de Poisson. En el capítulo siguiente investigaremos las posibles causas de tales discrepancias.

## Capítulo 5

# Ergodicidad y el kernel de Poisson en un sistema desordenado unidimensional.

En este capítulo trataremos una propiedad fundamental para la teoría de ensembles de matrices de dispersión,  $S$ , y sus aplicaciones: *la ergodicidad del ensemble de matrices  $S$* . Como a lo largo de toda la tesis, enfocaremos nuestro estudio al transporte electrónico, aunque la propiedad de ergodicidad trasciende a todas las aplicaciones de la teoría de ensembles de matrices de dispersión. En la Mecánica Estadística, la propiedad de ergodicidad permite sustituir promedios de cantidades de interés físico realizados sobre un ensemble (resultado teórico) por promedios temporales (resultado experimental). En nuestro caso, el hecho de que un ensemble de  $S$  sea ergódico nos permite igualar promedios sobre la energía con promedios sobre el ensemble:  $\bar{S} = \langle S \rangle$ .

En el capítulo 2, dedujimos de manera explícita la distribución de matrices  $S$  de un canal, conocida desde hace tiempo como kernel de Poisson. Bajo las hipótesis utilizadas en la deducción vimos que la distribución de  $S$  es única y depende sólo del parámetro  $\langle S \rangle$ .

Como hemos visto en la tesis, el uso de ensembles de matrices de dispersión ha tenido gran éxito en la descripción de propiedades de transporte en los sistemas mesoscópicos [32, 33, 34] y en la teoría de reacciones nucleares, en el pasado. Sin embargo, en la literatura [57, 58, 59] han surgido algunos trabajos cuyos resultados no concuerdan con la teoría de matrices aleatorias. Por ejemplo, en [57, 58] se muestran las distribuciones de la fase de la matriz de dispersión de dimensión  $1 \times 1$  para un sistema desordenado unidimensional de longitud infinita y, como veremos en el capítulo, estas distribuciones son diferentes a las que se derivan del kernel de Poisson. Precisamente, en este

capítulo investigamos cuáles de las hipótesis involucradas en la deducción del kernel de Poisson para matrices de un canal no se satisfacen, dando lugar a discrepancias como las que se presentan en [57, 58]. Para llevar a cabo este estudio, utilizamos un sistema unidimensional desordenado, como el utilizado en [58].

## 5.1 Hipótesis utilizadas para la deducción del kernel de Poisson.

En esta sección recordamos las hipótesis involucradas en la deducción del kernel de Poisson para matrices  $S$  de dimensión  $1 \times 1$ , que presentamos en el capítulo 2. Las hipótesis son las siguientes:

i) En el plano complejo de la energía.  $S$  es *analítica* en el semiplano superior. Con esta suposición, encontramos que la distribución de  $S$  está dada por el kernel de Poisson [Ec. (2.32)]:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\bar{S}|^2}{|S - \bar{S}|^2}, \tag{5.1}$$

donde  $S = \exp(i\theta)$  y  $\bar{S}$  es el promedio de la matriz de dispersión sobre el eje de la energía.

Las otras dos hipótesis utilizadas son:

ii)  $S(E)$  es una función *estacionaria* de la energía: el promedio realizado sobre el ensemble:  $\langle S(E) \rangle$  es independiente de la energía<sup>1</sup>.

iii) El ensemble de matrices  $S$  es *ergódico*: el promedio sobre la energía,  $\bar{S}$ , es igual al promedio sobre el ensemble,  $\langle S \rangle$ . En la Ref. [41] la ergodicidad (o Teorema de Slutsky) se demuestra para funciones estacionarias cuya correlación tiende a cero conforme aumenta la separación entre las energías a las que se evalúa dicha correlación.

Bajo estas dos hipótesis (ii y iii), tenemos que la distribución de  $S$  sobre el ensemble está dada por [Ec. (2.35)]:

$$p_{\langle S \rangle}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2}, \tag{5.2}$$

donde  $\langle S \rangle$  indica el promedio de  $S$  sobre el ensemble.

Como hemos señalado, la distribución dada por el kernel de Poisson depende únicamente de un parámetro: el promedio de la matriz de dispersión.

---

<sup>1</sup>En sistemas de dispersión reales esta hipótesis puede sólo aproximarse localmente:  $\langle S(E) \rangle \approx \langle S(E + \delta E) \rangle$  con  $\delta E \ll E$ .

## 5.2 Discrepancias con el kernel de Poisson.

Bajo las hipótesis i, ii y iii, la distribución completa de  $S$  está unívocamente determinada en función de su promedio. En el capítulo 2, llevamos a cabo una verificación numérica de esta distribución. Sin embargo, existen algunos ejemplos en la literatura [57, 58] que no concuerdan con el kernel de Poisson.

Dos de los modelos de sistemas desordenados unidimensionales en los que se han encontrado discrepancias son: un sistema unidimensional con potencial aleatorio Gaussiano,  $V(x)$ , con valor medio igual a cero y correlación  $\langle V(x)V(x') \rangle \propto \delta(x - x')$ . Este sistema se conoce como "sistema desordenado con potencial de ruido blanco". El otro modelo consiste de un conjunto de barreras y pozos de potencial con altura y profundidad fijas,  $V$ , pero con anchura aleatoria,  $x_i$ . A este modelo se le llama "proceso telegráfico aleatorio" [58] y se reduce al de ruido blanco en el límite en que el ancho de los potenciales tiende a cero y la altura y profundidad de estos mismos tiende a infinito, manteniendo constante el producto de estas cantidades: es decir,  $\langle x_i \rangle V^2 = D$  con  $\langle x_i \rangle \rightarrow 0$ ,  $V \rightarrow \infty$  y  $D$  constante<sup>2</sup>.

Veamos un ejemplo específico de las discrepancias mencionadas. En la Ref. [57], Kim calcula la distribución de la fase,  $\theta$ , de la matriz de dispersión para un sistema con potencial de ruido blanco. Esto lo lleva a cabo mediante la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas derivadas de la ecuación de Schrödinger. En la figura 5.1 se muestran algunas de las distribuciones,  $p(\theta)$ , obtenidas por Kim para diferentes valores del parámetro  $C = k\xi$ , donde  $k$  es el vector de onda incidente y  $\xi$  la longitud de localización. Podemos observar que conforme el valor de  $k\xi$  disminuye, la distribución  $p(\theta)$  va tomando formas más complicadas (varios puntos de inflexión, por ejemplo) que la alejan de una posible descripción mediante el kernel de Poisson<sup>3</sup>.

El propósito de las siguientes secciones será investigar cuáles de las hipótesis utilizadas en la deducción del kernel de Poisson no se están cumpliendo y dan lugar a las discrepancias como las mencionadas arriba.

<sup>2</sup>En cuanto a los métodos de estudio empleados en estos sistemas se encuentran el "invariant embedding approach", métodos supersimétricos y diferentes métodos numéricos [57, 59].

<sup>3</sup>Para valores grandes de  $k\xi$  ( $\sim 1000$ ), Kim obtiene una distribución prácticamente constante para  $p(\theta)$ . En el caso del kernel de Poisson, la distribución constante de la fase se obtiene en el caso particular de  $\bar{S} = 0$ .



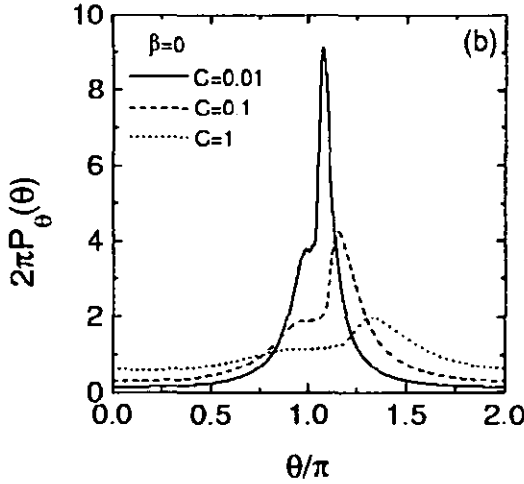


Figura 5.1: Distribución de la fase de la matriz de dispersión para diferentes valores de  $C = k\xi$ , donde  $k$  es el vector de onda incidente y  $\xi$  la longitud de localización. Figura tomada de la Ref. [57].

### 5.3 Sistema desordenado unidimensional: Proceso telegráfico aleatorio.

El modelo que adoptamos para nuestro estudio y que describimos abajo con más detalle, es el mismo utilizado en [58]: el proceso telegráfico aleatorio, pero a diferencia de [58], donde la energía de la onda incidente es menor que la altura de las barreras de potencial, aquí utilizamos una energía para la onda incidente mayor que la altura de los potenciales; hicimos esto con el propósito de tener mayor libertad para escoger el intervalo de energía donde realizar el muestreo de  $S$ .

El sistema que analizaremos consiste de un conjunto de barreras de potencial con altura fija  $V$  y pozos de profundidad  $-V$ , colocados alternadamente, Fig. 5.2, mientras que las anchuras de los potenciales,  $x_i$ , varían al azar siguiendo una distribución de Poisson con valor medio  $a (= \langle x_i \rangle)$ .

En [57, 58] el sistema es infinitamente largo, de manera que el sistema desordenado refleja totalmente a una onda incidente. Simulamos numéricamente esta situación haciendo que la longitud,  $L$ , del sistema sea mucho mayor que la longitud de localización,  $\xi$ , de modo que el coeficiente de transmisión sea mucho menor que 1.

Los parámetros de entrada que tenemos a nuestra disposición en la simu-

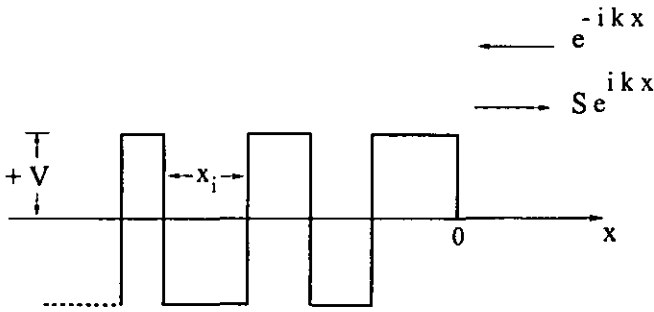


Figura 5.2: Sistema desordenado unidimensional: proceso telegráfico estocástico. La altura de los potenciales está fija ( $\pm V$ ), mientras que las anchura,  $x_i$ , varía aleatoriamente con valor medio  $a$ .

lación son: el ancho medio de los potenciales,  $a$ , y la energía de la onda incidente,  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ , donde  $k$  es el vector de onda incidente. Por conveniencia utilizaremos los parámetros adimensionales  $ka$  y  $\epsilon = E/V$ . La simulación numérica se llevo a cabo combinando las matrices de dispersión de cada una de los potenciales.

En las siguientes secciones presentamos algunos de los resultados de la simulación del sistema descrito, bajo diferentes situaciones físicas; es decir, bajo diferentes valores de  $ka$  y energía,  $\epsilon$ .

## 5.4 Distribución de $S$ sobre el ensemble.

En esta sección presentamos los resultados de la distribución de la fase,  $\theta$ , derivada de la simulación numérica de un conjunto de sistemas desordenados independientes, es decir, un ensemble de sistemas telegráficos. Para los diferentes casos que estudiamos, comparamos esta distribución con el kernel de Poisson, Ec. (5.2), con  $\langle S \rangle$  extraída de la simulación.

Antes de comparar los resultados de la simulación numérica con el kernel de Poisson, veamos algunas características generales del sistema descrito en la sección anterior. Estas características muestran un acuerdo cualitativo con algunos resultados ya conocidos, lo que da una mayor confianza a la simulación numérica.

$\epsilon$	$ka=3000 \nabla$		$ka = 640 \square$		$ka = 12.5 \diamond$	
	$ \langle S \rangle $	$k\xi$	$ \langle S \rangle $	$k\xi$	$ \langle S \rangle $	$k\xi$
1.02	0.74	1345	0.75	288	0.73	6
1.1	0.53	2800	0.53	630	0.53	11
1.5	0.27	9425	0.24	2200	0.24	37
2.1	0.18	20600	0.17	4800	0.17	90
3.15	0.09	55140	0.08	15080	0.08	215
3.6	0.06	75440	0.07	16840	0.07	285

Tabla 5.1: Valores de  $|\langle S \rangle|$  y  $k\xi$  a la energía  $\epsilon$  para los 3 casos:  $ka = 3000, 640, 12.5$ , donde  $a = \langle x_i \rangle$ . Estos datos se muestran de manera gráfica en la figura 5.3.

### 5.4.1 Características generales del sistema telegráfico.

En la figura 5.3 (tabla 5.1) mostramos el módulo de  $\langle S \rangle$  como función de la cantidad adimensional <sup>4</sup>  $k\xi$ . La figura muestra tres casos diferentes de  $ka$ , donde  $a = \langle x_i \rangle$ : 12.5, 640 y 3000, cada uno de ellos a las energías  $\epsilon$ : 1.02, 1.1, 1.5, 2.0, 3.15 y 3.6.

a) Primero veamos el comportamiento de  $\langle S \rangle$  a una energía fija. En la figura 5.3 podemos observar que a una  $\epsilon$  dada, el valor de  $\langle S \rangle$  es prácticamente constante para cada uno de los tres valores de  $ka$ . Este comportamiento se explica con mayor detalle en el apéndice A, pero básicamente se debe a que  $S$  depende de los anchos de los potenciales, de la forma  $S = S(\{\text{sen}kx_i\})$ , de manera que cuando  $ka$  es suficientemente grande (para nuestro sistema esto significa  $ka \gtrsim 10$ ), los valores posibles de  $kx_i$  cubren rápidamente el intervalo completo  $(0, 2\pi)$ , haciendo  $\langle S \rangle$  independiente de la anchura de los potenciales, es decir de  $ka$ . Este razonamiento para explicar el por qué  $\langle S \rangle$  se mantiene constante a una energía dada, se sostiene mientras  $ka$  sea suficientemente grande ( $ka \gtrsim 10$ ), para  $ka \lesssim 10$  el valor de  $\langle S \rangle$  disminuye<sup>5</sup>. En la figura 5.4 mostramos esquemáticamente el comportamiento de  $\langle S \rangle$  mencionado anteriormente. Los valores para  $ka$  corresponden a una energía fija de  $\epsilon = 1.1$ .

b) Otra característica que encontramos a una energía fija y para  $ka$ 's grandes ( $\gtrsim 10$ ) es que el cociente  $\xi/a$  se mantiene constante: sobre la línea horizontal de la Fig. 5.4, el cociente  $\xi/a \approx 1$  es aproximadamente constante.

<sup>4</sup>Calculamos la longitud de localización utilizando la relación [60]:  $\langle \ln T \rangle = -L/\xi$

<sup>5</sup>Efectivamente, como veremos más adelante, por ejemplo para  $ka = 2$  a la energía  $\epsilon = 1.1$ , encontramos que el valor de  $\langle S \rangle$ , (Ec. 5.7) es menor que el encontrado a la misma energía, pero con  $ka = 12.5$  (Ec. 5.5) y  $ka = 640$  (Ec. 5.6).

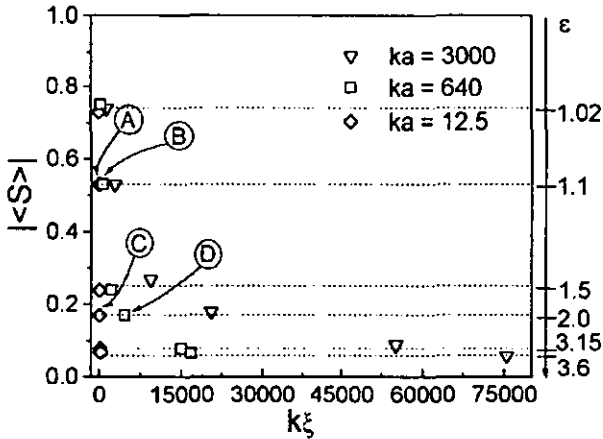


Figura 5.3:  $|\langle S \rangle|$  vs  $k\xi$  para diferentes valores de  $ka$ : 3000, 640 y 12.5 a las energías,  $\epsilon$ : 1.02, 1.1, 1.5, 2.0, 3.15 y 3.6 (Tabla 5.4.1). Las líneas punteadas horizontales resaltan el comportamiento casi constante de  $|\langle S \rangle|$  a una energía fija, para los valores de  $ka$  mencionados.

La explicación de este comportamiento es fundamentalmente la misma que la dada arriba cuando  $\langle S \rangle$  se mantiene constante: el cociente  $\xi/a$  está relacionado con el coeficiente de transmisión  $T$  del sistema por medio de la relación  $\langle \ln T \rangle = -Na/\xi$ , donde  $N$  es el número de barreras de potencial. Es precisamente el  $\ln T$  la función que depende, como  $\langle S \rangle$  en el caso anterior, de la anchura de los potenciales de la forma  $\{\text{sen}kx_i\}$  (En el apéndice A se da una explicación con mayor detalle). Continuando a una energía fija, si disminuimos el ancho medio  $a$  de los potenciales de manera que  $ka \lesssim 10$ , el valor de  $k\xi$  aumenta conforme  $ka$  disminuye. La curva de la figura 5.4 refleja tal comportamiento. Este aumento en la longitud de localización para valores de  $ka$  pequeños se debe a que el coeficiente de reflexión de cada dispersor tiende a cero, provocando un aumento en el coeficiente de transmisión del sistema, lo que a su vez provoca un aumento en la longitud de localización (ver apéndice A).

c) Ahora veamos qué pasa cuando la energía varía. Para una  $ka$  fija, en la figura 5.3 vemos que cuando  $\epsilon$  aumenta, el valor de  $|\langle S \rangle|$  disminuye,

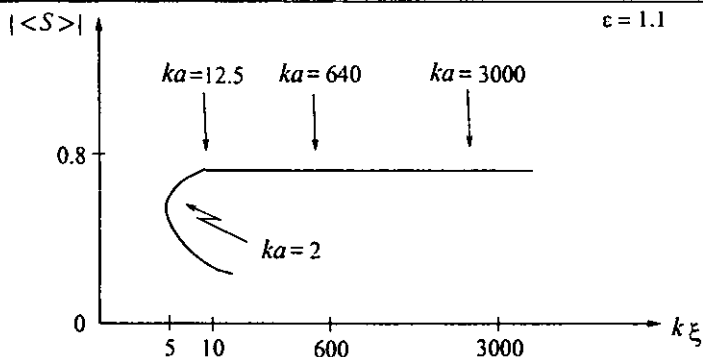


Figura 5.4: Esquema del comportamiento de  $|\langle S \rangle|$  contra  $k\xi$  a una energía fija:  $\epsilon = 1.1$ .

tendiendo a cero conforme la energía de incidencia aumenta. Para  $\langle S \rangle = 0$ , el kernel de Poisson, Ec. (5.2), predice una distribución constante ( $1/2\pi$ ) para la fase de  $S$ . Esta distribución uniforme de la fase para altas energías concuerda con la aproximación conocida como “random phase approximation”, la cual supone justamente en el límite de altas energías que la distribución de la fase de  $S$  es constante. Esta aproximación se utiliza frecuentemente con el fin de simplificar algunos cálculos algebraicos [59].

Por último mencionamos el hecho siguiente: cuando el cociente  $\xi/a$  va en aumento, el valor de  $\langle S \rangle$  disminuye; esto ocurre tanto en el caso de una energía fija (con  $ka \lesssim 10$ , Fig. 5.4), como cuando  $\epsilon$  aumenta ( $ka$  fija, Fig. 5.3). Este comportamiento de  $\langle S \rangle$  con  $\xi/a$  nos sugiere la idea que cada potencial “visto” por la función de onda, contribuye a la “aleatorización” de la fase de la matriz de dispersión, de modo que cuando la longitud de localización,  $\xi$ , es mucho mayor que el ancho medio,  $a$ , de los potenciales, la fase de  $S$  se distribuye uniformemente en el intervalo  $(0, 2\pi)$ .

Una vez vistas algunas de las características de nuestro sistema, pasemos ahora a la comparación de algunas de las distribuciones obtenidas de la simulación numérica con las correspondientes distribuciones dadas por el kernel de Poisson para un canal, Ec. (5.2):

$$p_{\langle S \rangle}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2},$$

donde las  $\langle S \rangle$ 's son extraídas de la simulación numérica.

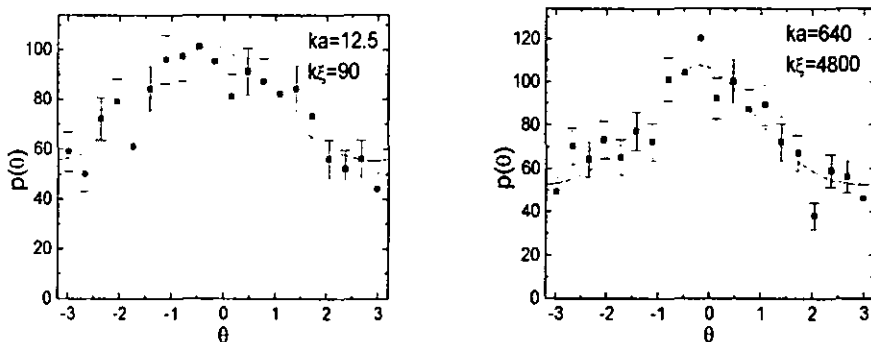


Figura 5.5: Distribución de la fase  $\theta$  a la energía  $\epsilon = 2.1$ . Los valores de  $P(\chi^2)$  son: 14.9 y 18.8, para  $ka = 12.5$  y  $640$ , respectivamente.

### 5.4.2 Comparación de la distribución de $S$ sobre el ensemble con el kernel de Poisson.

En las figuras (5.5) y (5.6) mostramos las distribuciones de la fase,  $\theta$ , de  $S$ , a dos energías distintas, para los casos de  $ka = 12.5$  y  $ka = 640$ . Los valores de  $\langle S \rangle$  correspondientes a esas figuras con su respectivo error por muestra finita son (los siguientes valores de  $\langle S \rangle$  corresponden a los puntos indicados con las letras A, B, C y D en la Fig. 5.3):

1)  $\epsilon = 2.1$

$$C : \langle S \rangle = (0.14 \pm 0.02) - i(0.03 \pm 0.02) \text{ para } ka = 12.5, \quad (5.3)$$

$$D : \langle S \rangle = (0.17 \pm 0.02) - i(0.03 \pm 0.02) \text{ para } ka = 640. \quad (5.4)$$

2)  $\epsilon = 1.1$

$$A : \langle S \rangle = (0.54 \pm 0.02) - i(0.05 \pm 0.02) \text{ para } ka = 12.5, \quad (5.5)$$

$$B : \langle S \rangle = (0.55 \pm 0.02) + i(0.00 \pm 0.02) \text{ para } ka = 640. \quad (5.6)$$

Como podemos ver en ambas figuras, (5.5) y (5.6), el acuerdo<sup>6</sup> entre la distribución obtenida de la simulación numérica y el kernel de Poisson es

<sup>6</sup>Para cuantificar este acuerdo, calculamos la función  $P(\chi^2)$ . En todas las distribuciones que presentamos, el intervalo  $(0, 2\pi)$  se divide en 20 clases.

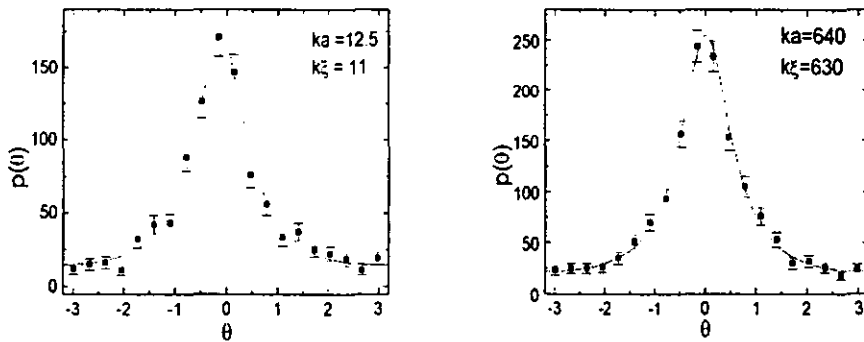


Figura 5.6: Distribución de la fase  $\theta$  a la energía  $\epsilon = 1.1$ . Los valores de  $P(\chi^2)$  son: 20.4 y 8.0, para  $ka = 12.5$  y 640, respectivamente.

muy bueno, dentro de las barras de error estadístico por muestra finita. De hecho, todas las distribuciones correspondientes a los puntos de la Fig. (5.3) tienen un buen acuerdo con el kernel de Poisson respectivo.

Pero veamos ahora uno de los casos que hemos venido anunciando: un caso donde tenemos un desacuerdo con el kernel de Poisson y veamos bajo qué circunstancias ocurre esto.

A una energía fija, digamos  $\epsilon = 1.1$ , hacemos que la longitud de localización disminuya más y más; esto se logra disminuyendo la anchura media,  $a$ , de los potenciales: nos movemos hacia la izquierda sobre la línea horizontal con  $\epsilon = 1.1$  de la figura 5.3 (ver también el esquema de la Fig. 5.4). Disminuyendo  $ka$  a valores menores que 10 (a la misma energía,  $\epsilon = 1.1$ ), el valor de  $\langle S \rangle$  disminuye. Por ejemplo, para  $ka = 2$ ,  $k\xi = 3$  y

$$\langle S \rangle = (0.29 \pm 0.02) - i(0.25 \pm 0.02) \text{ para } ka = 2 \quad (5.7)$$

Como indicamos, este valor de  $\langle S \rangle$  es menor que el obtenido en (5.5) y (5.6) a la misma energía. En la Fig. 5.7 se muestra la distribución del kernel de Poisson con el valor de  $\langle S \rangle$  anterior. Como podemos observar, para este valor de  $k\xi$ , el kernel de Poisson no concuerda más con la distribución obtenida de la simulación<sup>7</sup>. Si seguimos disminuyendo aún más la anchura de los

<sup>7</sup>Cabe mencionar que la distribución obtenida de la simulación numérica tiene una forma similar a uno de los casos reportados en [57], para  $k\xi = 0.1$ , Fig. 5.1.

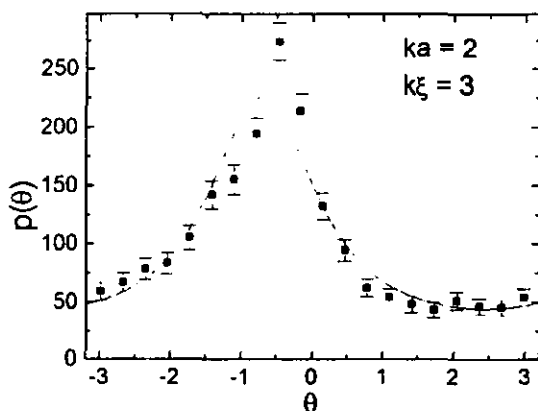


Figura 5.7: Distribución de  $\theta$  a la energía:  $\epsilon = 1.1$  .  $P(\chi^2) = 50.3$

potenciales, es decir, seguimos disminuyendo el valor de  $ka$ , la longitud de localización incrementa su valor (Fig. 5.4) y nuevamente recuperamos el acuerdo con el kernel de Poisson: en la Fig. 5.8 para  $ka = 0.3$  a la energía  $\epsilon = 1.1$  tenemos que  $k\xi \approx 8$  y encontramos nuevamente un acuerdo con el kernel de Poisson (para este caso  $\langle S \rangle = 0.02 - i0.09$ ).

Los resultados mencionados arriba, todos ellos obtenidos de muestreos sobre ensembles, nos llevan a concluir que el parámetro  $k\xi$  juega un papel decisivo para la descripción adecuada de distribución de  $S$  por medio del kernel de Poisson: *si el valor de  $k\xi$  es suficientemente pequeño<sup>8</sup> ( $\approx 3$ ) el kernel de Poisson no describe adecuadamente la distribución de la fase de la matriz de dispersión.*

La pregunta que surge ante este desacuerdo es: ¿cuál o cuáles de las hipótesis (analiticidad, estacionaridad y ergodicidad) que dan lugar a la distribución del kernel de Poisson no se satisfacen cuando la longitud de localización es pequeña? Para responder a esta pregunta recurrimos al estu-

<sup>8</sup> Este resultado recuerda al comportamiento encontrado por Kim: las distribuciones de la fase (Fig. 5.1) se ven más alejadas de una posible descripción por el kernel de Poisson conforme el valor de  $k\xi$  disminuye.



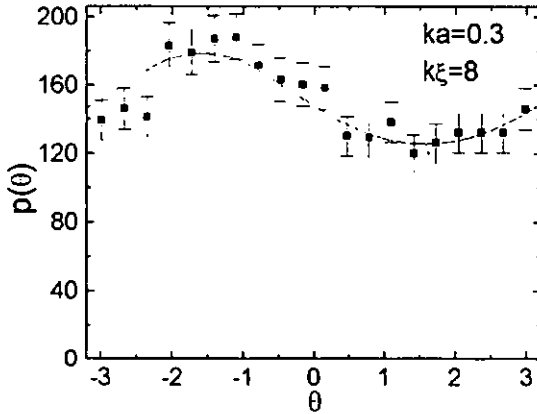


Figura 5.8: Distribución de  $\theta$  a la energía:  $\epsilon = 1.1$  .  $P(\chi^2) = 8.8$  .

dio estadístico de la matriz de dispersión sobre el eje de la energía, donde únicamente requerimos de la analiticidad de la matriz  $S$ .

## 5.5 Distribución de $S$ sobre la energía.

Con el fin de averiguar cuáles de las hipótesis utilizadas en la deducción del kernel de Poisson no se cumplen, provocando las diferencias entre los resultados de la simulación numérica y el kernel de Poisson (Fig. 5.7), en esta sección presentamos un estudio estadístico de  $S$  sobre la energía, utilizando una sola muestra para cada caso que presentamos.

Recordemos que en un principio, el kernel de Poisson obtenido de un muestreo sobre la energía, Ec.(5.1), se dedujo utilizando solamente la analiticidad de la matriz  $S$ . Para un sistema desordenado finito como el que estamos utilizando,  $S$  es analítica (en [61] y [62] se hace un estudio de los polos de la matriz de dispersión para un barrera de potencial y una conjunto finito de barreras, respectivamente). Se conoce a las resonancias que se encuentran justo arriba del potencial como “barrier-top resonances” [63]. Como en el capítulo 2 donde mostramos algunas de las resonancias para el problema con

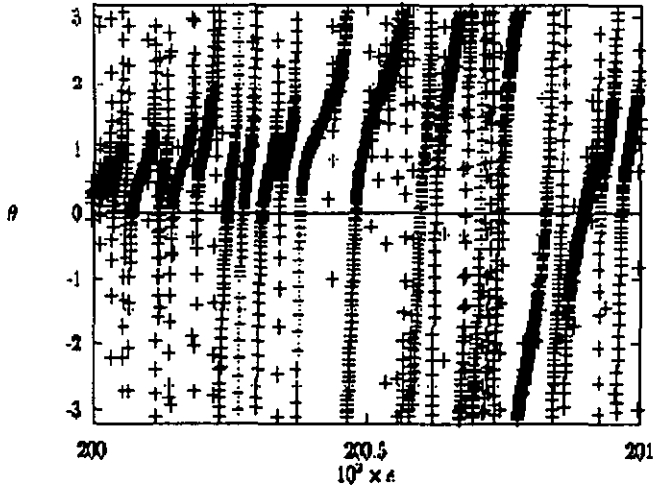


Figura 5.9: Evolución de la fase de  $S$  como función de la energía para un miembro del ensemble. El caso que mostramos es:  $ka = 640$  y ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 2.1$ . Aquí se muestra sólo una fracción de la ventana completa.

el potencial  $\delta$  a fin de tener una imagen del espacio muestral, en la figura 5.9 tenemos algunas de las resonancias que surgen del sistema telegráfico. Estas resonancias pertenecen al espacio muestral de un caso que veremos más adelante:  $ka = 640$  con una ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 2.1$ .

Para llevar a cabo el muestreo de  $S$  sobre el eje de la energía debemos tener cuidado con el tamaño del intervalo,  $\delta E$ , sobre el que se realiza este muestreo:  $\delta E$  debe ser pequeño, de manera que el promedio  $\langle S \rangle$  pueda considerarse constante en todo el intervalo<sup>9</sup>; es decir, con esta última característica queremos aproximarnos a la propiedad de estacionaridad. Con las condiciones anteriores en mente, escogimos como tamaño del intervalo  $\delta E$  un 10% de la energía de la onda incidente, obteniendo como resultado, en todos los casos que estudiamos, una variación de aproximadamente 10-17% en el valor de  $\langle S \rangle$ , dentro del intervalo  $\delta E$ . Entonces, bajo el criterio anterior consideramos que  $S$  es aproximadamente estacionaria.

Enseguida presentamos los resultados del promedio  $\bar{S}$  sobre la ventana en la energía.  $\delta E$ . La ventanas que utilizamos en los diferentes casos están centradas en las energías que empleamos en la sección anterior ( $\epsilon = 2.1$  y  $1.1$ ) para los ensembles. También, calculamos numéricamente la varianza de  $\bar{S}$  sobre 25 muestras independientes y finalmente, utilizando una caja como

<sup>9</sup>Si además queremos que  $\bar{S}$  sea independiente de la función de peso, entonces  $\delta E$  debe ser suficientemente grande para tener un buen muestreo de  $S$  y lograr tal independencia.

función de peso<sup>10</sup> calculamos la distribución de  $S$ . Primero veamos los resultados que encontramos para el caso<sup>11</sup>  $\epsilon = 2.1$ .

1) Distribución de  $S$  en la vecindad de  $\epsilon = 2.1$

a) Para  $ka = 12.5$ ,  $k\xi \approx 90$  y la ventana  $\delta E$  contiene aproximadamente 35 resonancias. Promediando  $\bar{S}$  sobre 25 muestras independientes del sistema desordenado<sup>12</sup>, encontramos que.

$$\langle \bar{S} \rangle = 0.116 + i0.002 \quad (5.8)$$

y varianza

$$\delta \bar{S} = 0.050 + i0.031, \quad (5.9)$$

donde  $\delta \bar{S} = \sqrt{\text{var}(\text{Re}\bar{S})} + i\sqrt{\text{var}(\text{Im}\bar{S})}$ . En la figura (5.10) mostramos la distribución de la fase  $\theta$  de  $S$  de una de las 25 muestras; como podemos observar, el acuerdo entre la distribución de la simulación y el kernel de Poisson, Ec. (5.1), con  $\bar{S}$  extraído de la simulación numérica, es muy bueno. También, comparando los promedios sobre ensemble (5.3) y sobre energía (5.8), vemos que éstos concuerdan, dentro de la fluctuación estadística.

b) Para  $ka = 640$ , la densidad de potenciales es menor que en el caso anterior y la longitud de localización aumenta. El número de resonancias para este caso es aproximadamente 1200 y  $k\xi \approx 4800$ , mientras que:

$$\langle \bar{S} \rangle = 0.164 - i0.002 \quad (5.10)$$

con

$$\delta \bar{S} = 0.004 + i0.003. \quad (5.11)$$

Para una de las muestras del sistema desordenado, en la figura (5.11) se presentan la distribución de la fase obtenida de la simulación numérica y el kernel de Poisson; como en el caso anterior, el acuerdo es muy bueno. Nuevamente, observamos que los promedios de  $S$  sobre ensemble y energía, (5.10) y (5.4), respectivamente, coinciden, dentro de la fluctuación estadística.

Hagamos notar un hecho importante: a la misma energía,  $\epsilon = 2.1$ , la fluctuación (5.11) obtenida para el caso de  $ka = 640$  con  $k\xi = 4500$  es un orden de magnitud menor que la fluctuación (5.9), para  $ka = 12.5$  con  $k\xi \approx 90$ . Es decir, cuando el valor de la longitud de localización aumenta, el

<sup>10</sup>Función de peso constante e igual a  $1/\delta E$  en un intervalo de energía  $\delta E$ .

<sup>11</sup>Etiquetamos la ventana  $\delta E$  o intervalo de energía sobre el realizamos el muestreo por su valor en el centro del intervalo; así,  $\epsilon = 1.1$  corresponde al intervalo: (1.05,1.15).

<sup>12</sup>Todos los resultados que presentaremos se realizaron sobre 25 muestras independientes.

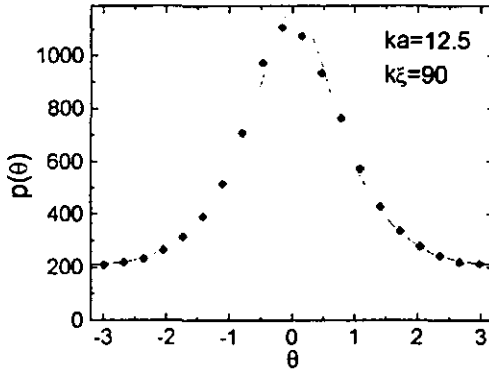


Figura 5.10: Distribución de la fase  $\theta$  para los valores:  $ka = 12.5$  y ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 2.1$ .

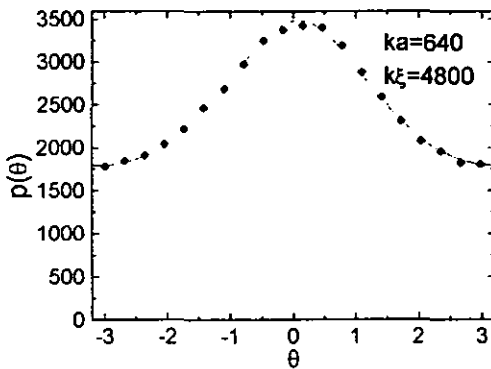


Figura 5.11: Distribución de la fase  $\theta$  para los valores:  $ka = 640$  y ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 2.1$ .

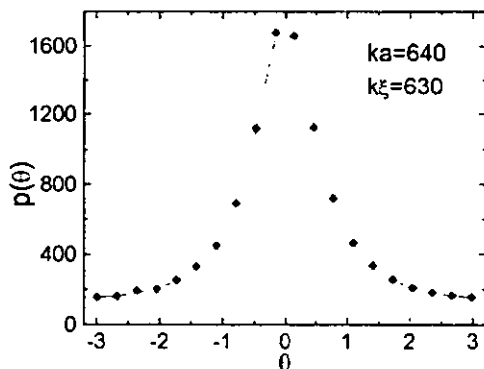


Figura 5.12: Distribución de la fase  $\theta$  para los valores:  $ka = 640$  y ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 1.1$ .

tamaño de las fluctuaciones  $\delta\bar{S}$  disminuye. Este comportamiento es relevante para el muestreo sobre el ensemble hecho en la sección anterior, pues nos indica que conforme el valor de  $k\xi$  disminuye, la ergodicidad, expresada por la igualdad:  $\bar{S} = \langle S \rangle$ , pierde sentido, ya que las fluctuaciones  $\delta\bar{S}$  son cada vez mayores.

2) Distribución de  $S$  en la vecindad de  $\epsilon = 1.1$

Ahora, veamos qué pasa cuando disminuimos la energía de la onda incidente.

a) Para  $ka = 640$ ,  $k\xi = 630$  y  $\delta E$  contiene aproximadamente 200 resonancias. En este caso:

$$\langle \bar{S} \rangle = 0.540 - i0.001 \tag{5.12}$$

con

$$\delta\bar{S} = 0.002 + i0.002. \tag{5.13}$$

En la Fig. (5.12) mostramos la distribución de la fase de  $S$  para una muestra del sistema desordenado; como podemos ver, el acuerdo es excelente entre la distribución numérica y la dada por el kernel de Poisson. Pero veamos qué sucede en el caso de menor longitud de localización.

b) Para  $ka = 12.5$ ,  $k\xi \approx 11$  y la ventana  $\delta E$  contiene sólo del orden

de 10 resonancias. Para este caso tenemos que:

$$\langle \bar{S} \rangle = 0.451 - i0.051 \quad (5.14)$$

con

$$\delta \bar{S} = 0.063 + i0.045. \quad (5.15)$$

Como en el caso anterior de  $\epsilon = 2.1$ , vemos que la fluctuación  $\delta \bar{S}$  aumentó al disminuir el valor de  $k\xi$ . Para una de las 25 muestras del sistema desordenado, en la figura 5.13 mostramos la distribución de  $\theta$ . Ahora vemos que tenemos un total desacuerdo entre la distribución numérica y la dada por el kernel de Poisson. Sin embargo, hay que recordar que hemos estado utilizando una caja como función de peso, suponiendo que el muestreo de  $S$  es independiente de la función de peso, lo que había sucedido hasta el presente caso. El kernel de Poisson, Ec. (5.1), se dedujo, en un principio (capítulo 2), utilizando como función de peso una Lorentziana, de manera que con esta función de peso el resultado debe ser válido. Para verificar esto último, aplicamos una función de peso Lorentziana a los mismos datos que dieron lugar a la distribución de la figura 5.13. El resultado se muestra en la figura 5.14 y como podemos observar, ahora tenemos un acuerdo entre las distribución numérica y el kernel de Poisson. La deducción inmediata de este resultado es que el número de resonancias ( $\sim 10$ ) no es suficiente para llevar a cabo la sustitución de la de la función de peso Lorentziana por la de una caja. Pero más allá de esto, el resultado anterior implica que nos estamos alejando de la hipótesis (ii) de estacionaridad; es decir, bajo esta hipótesis  $\bar{S}$  es independiente de la función de peso y en este caso con  $k\xi \approx 11$  no se está satisfaciendo tal independencia. Pudiera pensarse en aumentar el número de resonancias dentro del intervalo  $\delta E$ , aumentando el tamaño de éste, pero también hay que recordar que el tamaño de  $\delta E$  está restringido por la misma condición de estacionaridad.

En la sección anterior 1.4, muestreamos la matriz de dispersión sobre un ensemble y encontramos que cuando  $k\xi$  disminuía lo suficiente ( $\sim 3$ ), el kernel de Poisson se alejaba de la distribución de  $S$  obtenida de la simulación numérica. En esta sección hemos encontrado que la disminución del valor del parámetro  $k\xi$  implica que nos estamos alejando de las condiciones bajo las cuales el kernel de Poisson se dedujo, en particular nos *alejamos de la hipótesis de estacionaridad, lo que implica un alejamiento de la ergodicidad del ensemble*<sup>13</sup>: al utilizar un ensemble de matrices  $S$  se espera que  $\bar{S}$  sea igual

<sup>13</sup>Cabe mencionar que recientemente hemos estudiado la distribución de la fase de  $S$  para un canal, utilizando los niveles de energía,  $E_\lambda$ , correspondientes a un GOE para

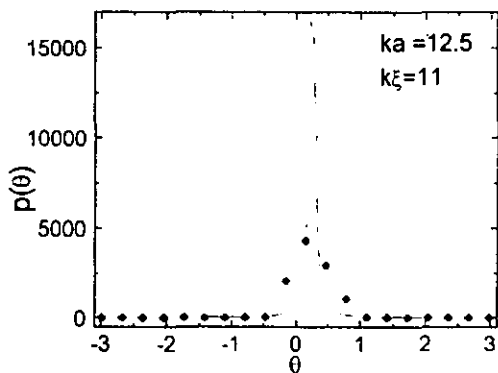


Figura 5.13: Distribución de la fase  $\theta$  para los valores:  $ka = 12.5$  y ventana en la energía centrada en  $\epsilon = 1.1$  .

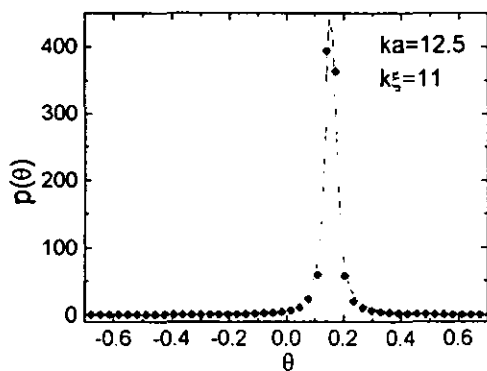


Figura 5.14: Distribución de la fase  $\theta$ , utilizando una función de peso Lorentziana para los valores:  $ka = 12.5$  y ventana centrada en  $\epsilon = 1.1$  .

a  $\langle S \rangle$ , independientemente de la función de peso utilizada en el muestreo, pero en cambio hemos visto que las fluctuaciones de  $\bar{S}$  aumentan al disminuir  $k\xi$ .

En resumen, una de las propiedades fundamentales que surgen por la utilización de ensembles en el estudio de cantidades estadísticas de interés físico es la llamada propiedad de ergodicidad. Bajo las hipótesis de analiticidad, estacionaridad y ergodicidad para la matriz  $S$ , tenemos un resultado conocido como kernel de Poisson que nos da, de manera única para el caso de matrices  $S$  de  $1 \times 1$ , la distribución de la matriz de dispersión sobre el ensemble. Sin embargo, existen algunos ejemplos en la literatura cuyos resultados no concuerdan con el kernel de Poisson. Con esta motivación, en este capítulo investigamos cuáles de las hipótesis involucradas en la deducción del kernel de Poisson se estaban violando, dando lugar a tales discrepancias.

Hemos encontrado que las diferencias con el kernel de Poisson surgen para valores pequeños de  $k\xi$ . Esto mismo ocurre en la ref. [57], donde podemos observar que las discrepancias con el kernel de Poisson se hacen cada vez más notorias conforme  $k\xi$  disminuye (Fig 5.1).

Mediante el estudio estadístico de  $S(E)$  sobre el eje de la energía encontramos que conforme el valor de  $k\xi$  aumenta nos acercamos más hacia la condición ideal de estacionaridad y por tanto, hacia las condiciones en las que el ensemble de matrices  $S$  es ergódico: *nos acercamos a las condiciones de aplicabilidad del kernel de Poisson.*

En un esquema sencillo resumimos el comportamiento descrito arriba: en la figura 5.15 mostramos la fluctuación  $\delta\bar{S}$  (digamos la parte real) como función del parámetro  $k\xi$ , a una energía dada. Como podemos observar, conforme  $k\xi$  aumenta  $\delta\bar{S}$  disminuye, cobrando mayor sentido la igualdad:  $\bar{S} = \langle S \rangle$ .

Como vemos, la propiedad de ergodicidad no siempre se satisface bajo cualquier condición, por lo que la suposición de que un ensemble sea ergódico debe considerarse con cuidado. Para las cavidades balísticas que hemos tratado en la tesis existe evidencia numérica [34] que los ensembles de matrices  $S$  satisfacen aproximadamente la propiedad de ergodicidad.

---

construir la matriz de dispersión, Ecs. (2.18), (2.20). Bajo las mismas condiciones de estacionaridad donde encontramos un desacuerdo con el kernel de Poisson en el caso del sistema telegráfico, para el caso de  $S$  construida a partir de un GOE no encontramos discrepancias con el kernel de Poisson. Las causas de este comportamiento distinto entre el caso telegráfico y la matriz  $S$  obtenida de un GOE, bajo las mismas condiciones de estacionaridad, aún no son claras, pero creemos que la localización en el sistema telegráfico juega un papel importante para tal diferencia.



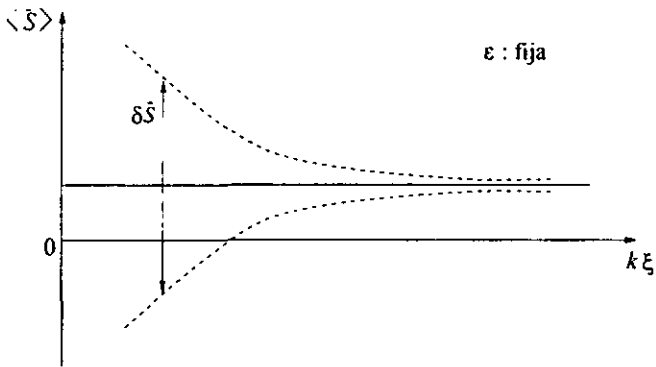


Figura 5.15: Disminución de las fluctuaciones  $\delta\bar{S}$  con el aumento en la longitud de localización.

# Capítulo 6

## Conclusiones.

Desde el surgimiento del estudio del transporte electrónico en los sistemas mesoscópicos por medio de la matriz de dispersión, el análisis de las propiedades estadísticas de  $S$  y sus aplicaciones al transporte mediante ensembles de matrices  $S$  ha tenido gran éxito. En particular, uno de los enfoques que ha contribuido en el estudio estadístico de la matriz de dispersión y sus aplicaciones al transporte electrónico, es de la teoría de la información. Este enfoque se distingue de otros, por ejemplo el microscópico, por emplear únicamente información muy general y físicamente relevante: conservación de flujo, analiticidad de  $S$ , simetría ante inversiones temporales y el promedio  $\langle S \rangle$ . Esta característica de no entrar en los detalles microscópicos de los sistemas hace que el análisis de las propiedades estadísticas de  $S$  se simplifique. en comparación con otros enfoques. Sin embargo, el punto de vista de la teoría de la información ha estado restringido a funciones de  $S$  a una sola energía y por tanto sus aplicaciones.

En esta tesis, realizamos un avance hacia el estudio de funciones de matrices de dispersión a *más de una energía*, dentro de un enfoque cercano al informático. Para llevar a cabo tal avance fue necesaria una mayor información que la utilizada para funciones de un punto. Se obtuvo tal información de una conjetura de Wigner sobre la invariancia de la distribución de los residuos y el espaciamiento de niveles energía pertenecientes a alguno de los ensembles Gaussianos (GOE, GUE y GSE), ante la transformación (3.7). Con esta información, en el capítulo 3 logramos estudiar una función a dos energías: el tiempo de retardo. Pudimos calcular la distribución del tiempo de retardo para las 3 simetrías,  $\beta = 1, 2$  y  $4$ . Además, debido a la relevancia de esta cantidad en el transporte electrónico en sistemas de corriente alterna, presentamos una primera aplicación de la teoría de matrices estocásticas a este tipo de sistemas: aplicamos nuestro resultado para calcular la distribu-

ción de la admitancia de un condensador mesoscópico.

Otro avance, en el en el sentido expuesto arriba, fue la reducción del problema de dispersión con procesos directos, caracterizados por  $\langle S \rangle \neq 0$ , a uno sin tales procesos ( $\langle S \rangle = 0$ ) para funciones de  $S$  a  $n$  energías. En el pasado, tal reducción se conocía únicamente para funciones de  $S$  a una sola energía. Este resultado que presentamos en el capítulo 4 implica que futuros cálculos de las propiedades estadísticas de  $S$  pueden reducirse al caso más sencillo: ausencia de procesos directos y de ahí extenderse al caso de  $\langle S \rangle \neq 0$ , utilizando el resultado del capítulo 4.

Por otro lado, motivados por algunas discrepancias encontradas en la literatura con el kernel de Poisson, en el capítulo 5 estudiamos las hipótesis de las cuales se deduce éste. Utilizando un sistema unidimensional desordenado como en los que se han visto tales diferencias: un sistema telegráfico aleatorio, encontramos que las discrepancias surgen de la pérdida de estacionaridad y por tanto de la ergodicidad del ensemble de matrices  $S$ , cuando la longitud de localización del sistema disminuye suficientemente. Este estudio nos lleva a tener cuidado con suponer de antemano la satisfacción de la ergodicidad para un sistema desordenado. Mientras las condiciones de analiticidad, estacionaridad y ergodicidad se satisfagan para el ensemble de matrices  $S$ , el kernel de Poisson describirá adecuadamente las propiedades estadísticas de las matrices de dispersión. Pero el problema no está cerrado aún, como mencionamos, tenemos un ejemplo (GOE) que bajo las mismas condiciones de estacionaridad donde el kernel de Poisson no concuerda con la distribución numérica de  $S$  para el caso desordenado, para el GOE, el kernel de Poisson sí describe adecuadamente la distribución de  $S$ . Creemos que la localización en el sistema desordenado juega un papel muy importante para tal diferencia.

En esta tesis hemos llevado a cabo algunos avances en el estudio de funciones de  $S$  a más de una energía, dentro de un enfoque basado en el de la teoría de la información. Sin embargo, aún queda abierto el problema general de la distribución de funciones de  $S$  a cualquier energía, por ejemplo, la distribución conjunta de  $S$  a dos energías cualquiera<sup>1</sup>:  $w(S) = w(S(E_1), S(E_2))$  o aún más, la distribución a  $n$  energías:  $w(S) = w(S(E_1), S(E_2), \dots, S(E_n))$ . El problema no es trivial y en este momento no sabemos que otra información estadística sea necesaria para resolverlo, pero esperamos que el estudio que hemos realizado ayude a la solución del problema general.

<sup>1</sup>Como mencionamos en el capítulo 3, dentro del enfoque microscópico se han logrado estudiar funciones a cualesquiera dos energías; por ejemplo, en [21, 37] se calcula la función de autocorrelación de la matriz  $S(E)$ .

# Capítulo 7

## Apéndice A.

### 7.1 $\langle S \rangle$ constante a una energía fija ( $ka \gg 1$ ).

Consideremos una función  $F$  que depende de  $N$  variables aleatorias<sup>1</sup>  $x_i$ , así como del parámetro  $\epsilon$ , es decir.

$$F = F(\{\text{sen}kx_i\}, \epsilon), \quad (7.1)$$

donde  $k^2 \propto \epsilon$ . Si las variables  $x_i$  siguen una distribución de Poisson con valor medio  $a$ , entonces el promedio de  $F$  sobre las variables aleatorias está dado por:

$$\langle F \rangle = \int_0^\infty F(\{\text{sen}kx_i\}, \epsilon) \prod_i \frac{e^{-x_i/a}}{a} dx_i \quad (7.2)$$

$$= \int_0^\infty F(\{\text{sen}ka \frac{x_i}{a}\}, \epsilon) \prod_i \frac{e^{-x_i/a}}{a} dx_i. \quad (7.3)$$

En general,  $\langle F \rangle$  será una función de  $ka$ ,  $N$  y  $\epsilon$ :  $\langle F \rangle = f(ka, N, \epsilon)$ , pero si el valor de  $ka$  es grande<sup>2</sup>, es decir,  $ka \gg 1$ , entonces el argumento de la función seno:  $ka \frac{x_i}{a}$ , con  $\langle x_i \rangle = a$ , cubrirá rápida y completamente el intervalo  $(0, 2\pi)$ , haciendo  $\langle F \rangle$  independiente de  $ka$ . De esta forma tenemos que  $\langle F \rangle$  es una función de  $N$  y  $\epsilon$ :

$$\langle F \rangle = f(N, \epsilon). \quad (7.4)$$

Por otra parte, la matriz de dispersión del sistema telegráfico es una función de la forma (7.1). Para exhibir esta afirmación, escribimos la matriz

<sup>1</sup>Para el sistema telegráfico, estas variables corresponden a las anchuras de las barreras y pozos de potencial que forman al sistema.

<sup>2</sup>Para el sistema telegráfico que estamos simulando, esto significa  $ka \gtrsim 10$ .

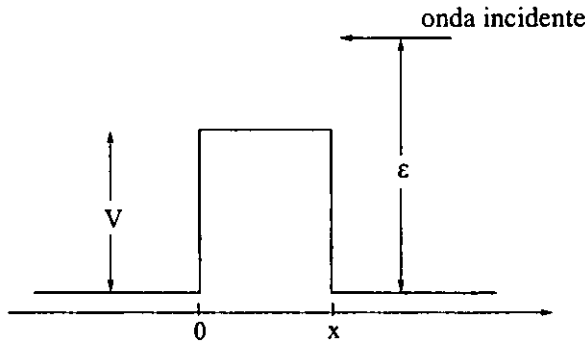


Figura 7.1: Barrera de potencial con matriz de dispersión  $S_1$ , Ec. (7.6).

de dispersión  $S_1$  de una barrera de potencial, como aquéllas que forman al sistema telegráfico.

Sean  $x$  y  $V$ , el ancho y la altura de la barrera de potencial, respectivamente (figura (7.1)). Entonces la matriz de dispersión

$$S_1 = \begin{bmatrix} r_1 & t_1 \\ t_1 & r_1' \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

asociada a la barrera está dada por:

$$S_1 = \frac{e^{-ikx}}{\cos k'x - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \operatorname{sen} k'x} \begin{bmatrix} -ie^{ikx} \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} \operatorname{sen} k'x & 1 \\ 1 & -ie^{-ikx} \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} \operatorname{sen} k'x \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

donde  $k'^2 \propto k^2 - V$ .

La matriz de dispersión total  $S$  del sistema telegráfico será una combinación de las matrices de dispersión, de la forma de  $S_1$ , de cada uno de los potenciales que constituyen al sistema, por lo que  $S$  es una función de la forma (7.1). Entonces, aplicando el argumento anterior para  $F$  a  $S$ , tenemos que para  $ka \gg 1$ :

$$\langle S \rangle = f(N, \epsilon) \quad (7.7)$$

Por otro lado, si  $\langle S \rangle$  se vuelve independiente de  $N$  para  $N \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\langle S \rangle = f(\epsilon); \quad (7.8)$$

hemos verificado numéricamente tal independencia, agregando potenciales a una muestra del sistema telegráfico, manteniendo la densidad de potenciales fija: notamos que  $\langle S \rangle$  no variaba a partir de un cierto número de potenciales, en cada caso estudiado. Este comportamiento se puede entender físicamente

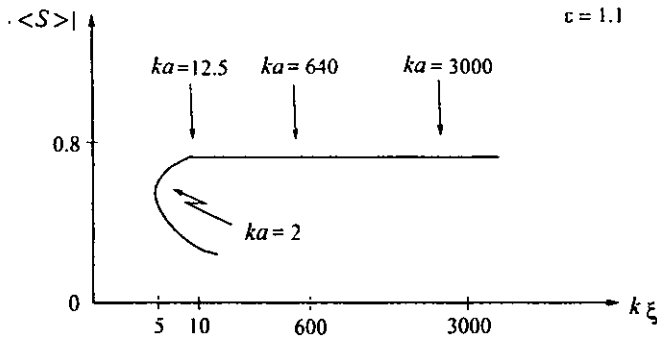


Figura 7.2: Esquema del comportamiento de  $|\langle S \rangle|$  a una energía fija.

si consideramos que la longitud de localización de nuestro sistema es mucho menor que la longitud del sistema, de modo que al agregar potenciales en un extremo del sistema, la función de onda no se ve afectada por la inclusión de estos potenciales.

## 7.2 $\frac{\xi}{a}$ constante a una energía fija ( $ka \gg 1$ ).

Otra cantidad que depende de las variables aleatorias  $x_i$  de la misma forma que  $F$ , Ec.(7.1), es el coeficiente transmisión  $T = |t|^2$ ; de hecho, la amplitud de transmisión  $t$  es parte de la matriz  $S$  (por ejemplo,  $t_1$  en la Ec. (7.5)) y, como acabamos de ver,  $S$  es de la forma de la Ec. (7.1). A su vez,  $T$  está relacionada con el cociente  $a/\xi$  por medio de la relación:

$$\langle \ln T \rangle = -\frac{L}{\xi} \tag{7.9}$$

$$= N \frac{a}{\xi}, \tag{7.10}$$

donde hemos utilizado que  $a = L/N$ , siendo  $N$  el número de barreras de potencial. Aplicando el resultado de la sección anterior, Ec. (7.4), a la cantidad  $\langle \ln T \rangle$ , tenemos que:

$$\langle \ln T \rangle = N f(\epsilon). \tag{7.11}$$

Como en la sección anterior para  $S$ , ahora la cantidad  $\langle \ln T \rangle / N$  es independiente de  $N$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Finalmente, usando las Ecs. (7.10) y (7.11):

$$f(\epsilon) = \frac{\xi}{a} \tag{7.12}$$

Este es el comportamiento de  $\xi/a$  en la línea horizontal en la figura 7.2, que encontramos numéricamente.

### 7.3 Aumento de $\xi$ con la disminución de anchura media de los potenciales ( $ka \ll 1$ ).

Ahora veamos el caso contrario a las secciones anteriores: consideremos que la anchura de los potenciales es pequeña, de modo que  $ka \ll 1$ . Utilizando nuevamente el ejemplo de una barrera de potencial con matriz de dispersión dada por la Ec. (7.6), tenemos que la amplitud de reflexión para esta barrera está dada por:

$$r_1 = \frac{i \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} \operatorname{sen} k'x}{\cos k'x - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \operatorname{sen} k'x}. \quad (7.13)$$

Suponiendo que  $k'x \ll 1$ , hacemos la siguiente aproximación para  $r_1$ :

$$r_1 \approx \frac{i \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} k'x}{1 - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} k'x} \approx i \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} k'x. \quad (7.14)$$

Es decir, a una energía fija, el coeficiente de reflexión  $R_1 = |r_1|^2 \rightarrow 0$  conforme el ancho de la barrera disminuye, o bien, la transmisión  $T_1 = 1 - |r_1|^2 \rightarrow 1$ .

Si consideramos ahora un conjunto de potenciales donde cada uno de ellos tiene un coeficiente de reflexión  $\ll 1$ , entonces el coeficiente de la reflexión total del sistema está dada por la suma de cada una de las reflexiones de los potenciales. Esta aproximación se le conoce como "weak-scattering limit"[11].

Regresando al sistema telegráfico, el resultado anterior implica que la transmisión total  $T$  aumenta conforme el ancho medio de los potenciales,  $a$ , se hace cada vez más pequeño<sup>3</sup> y como la longitud de localización está dada por:

$$\xi = -\frac{L}{\langle \ln T \rangle}, \quad (7.15)$$

entonces cuando  $T$  aumenta, la longitud de localización también aumenta, provocando el comportamiento representado por la curva de la figura 7.2.

<sup>3</sup>Para el sistema telegráfico esto sucede a partir de  $ka \lesssim 10$ .

# Bibliografía

- [1] Webb, R. A., Washburn, S. et. al., *Physica A*, **140**, 175 (1986).
- [2] Schwarzschild Bertram, *Physics Today*, enero, 17 (1986).
- [3] C. M. Marcus, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins y A. C. Gossard, *Phys. Rev. B*, **48**, 2460 (1993).
- [4] A.B. Fowler, J. J. Wainer y R. A. Webb, *IBM J. Res. Dev.*, **32**, 372 (1988).
- [5] Landauer. R., *Phil. Mag.*, **21**, 863, (1970).
- [6] Landauer. R., *Rev. Mod. Phys.*, **71**, S306 (1999).
- [7] Büttiker M., *IBM J. Res. Dev.*, **32**, 317 (1988).
- [8] P. A. Mello, P. Pereyra y N. Kumar, *Annals of Phys.*, **181**, 290 (1988).
- [9] Pier A. Mello, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1089 (1988).
- [10] Pier A. Mello y A. Douglas Stone, *Phys. Rev. B*, **44**, 3559 (1991).
- [11] Pier A. Mello y Steven Tomsovic, *Phys. Rev. B*, **46**, 15963 (1992).
- [12] Víctor A. Gopar, Moisés Martínez y Pier A. Mello, *Phys. Rev. B*, **50**, 2502 (1994).
- [13] Víctor A. Gopar, Moisés Martínez y Pier A. Mello, *Phys. Rev. B*, **51**, 16917 (1995).
- [14] O. Bohigas, *Chaos and Quantum Physics* editado por M.-J, A Voros y J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam), p. 87 (1990).



- [15] Una recopilación de los trabajos de Wigner y Dyson se encuentran en : C. E. Porter, *Stastical Theory of Spectra: Fluctations* (Academic Press, 1965 ). Ver también: Rev. Mod. Phys., T. A. Brody, J. Flores, J. Bruce French, P. A. Mello, A. Pandey, Samuel S. M. Wong, **53**, 385 (1981).
- [16] H.-J. Stöckmann y J. Stein, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2215 (1990).
- [17] Isaac Freund y Michael Rosenbluh, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2328 (1988).
- [18] O. Bohigas, M.J. Giannoni y C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [19] H.U. Baranger y Pier A. Mello, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 142 (1994).
- [20] H.U. Baranger y Pier A. Mello, *Europhys. Lett.* **33**, 465 (1996).
- [21] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller y M. R. Zirnbauer, *Phys. Rep.* **129**, 367 (1985).
- [22] Thomas Guhr, Axel Mueller-Groeling, Hans A. Weidenmüller, *Phys.Rept.* **299**, 189. (1998).
- [23] T. J. Krieger, *Ann. of Phys.*, **42**, 375 (1967).
- [24] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.*, **3**, 140 (1962).
- [25] P. A. Mello y T. H. Seligman, *Nuclear Physics*, **A 344**, 489 (1980).
- [26] G. Lopez, P.A. Mello y T. H. Seligman, *Z. Phys. A*, **302**, 351 (1981).
- [27] Pedro Pereyra Padilla, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (1983).
- [28] Pier A. Mello, Pedro Pereyra y Thomas H. Seligman, *Ann. Phys.* **161**, 254 (1985).
- [29] P. W. Brouwer, *Phys. Rev. B*, **51**, 16878 (1995).
- [30] Y.V. Fyodorov y H.-J. Sommers, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4709 (1996).
- [31] C.W.J. Beenakker y H. van Houten, *Sol. State Phys.*, **44**, 1 (1991).
- [32] C.W.J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.*, **69**, 731 (1997).
- [33] Mello, P. A., *Mesoscopic Quantum Physics* editado por E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard y Zinn-Justin (Elsevier Science, 1994).

- [34] Pier A. Mello y Harold Baranger, *Waves Random Media*, **9**, 105 (1999).
- [35] Supriyo Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1997).
- [36] Víctor A. Gopar, Moisés Martínez, Pier A. Mello y Harold Baranger, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**, 881 (1996).
- [37] C. Lewenkopf y H. A. Weidenmüller, *Ann. Phys.*, **212**, 53 (1991).
- [38] L.K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains*, (Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1963).
- [39] C. Ibarra y P. Pereyra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, L539 (1985).
- [40] J. B. French, P. A. Mello y A. Pandey, *Physics Letters*, **80 B**, 17 (1978).
- [41] A.M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Prentice-Hall, 1962).
- [42] Víctor A. Gopar, Pier A. Mello y Markus Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3005, (1996).
- [43] A. M. Jayannavar, G.Y. Vijayagovindan, y N. Kumar, *Z. Phys. B* **75**, 77 (1989).
- [44] Eugene P. Wigner, *Phys. Rev.*, **98**, 145 (1955).
- [45] Felix T. Smith, *Phys. Rev.*, **118**, 349 (1960).
- [46] M. Bauer, P. A. Mello y K. W. McVoy, *Z. Phys. A*, **293**, 151 (1979).
- [47] Eugene P. Wigner, *Ann. Math.* **53**, 36 (1951).
- [48] Eugene P. Wigner, *Ann. Math.* **55**, 7 (1952).
- [49] C. E. Porter y N. Rosenzweig, *Suomalaisen Tiedeakatemia Toimituksia*, (Ann. Acad. Sci. Fennicae) **AVI 44** (1960).
- [50] M. Büttiker, *J. Phys. Cond. Matt.* **5**, 9361 (1993).
- [51] M. Büttiker, H. Thomas and A. Prêtre, *Phys. Lett.* **180A**, 364 (1993); *Z. Phys. B* **94**, 133 (1994); M. Büttiker, A. Prêtre and H. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 4114 (1993).

- [52] Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, sixth edition. (John Wiley & Sons, New York, 1986).
- [53] P.W. Brouwer, K. M. Frahm y C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997).
- [54] Víctor A. Gopar y Pier A. Mello, *Europhys. Lett.*, **42**, 131 (1998).
- [55] Friedman W. y Mello P. A., *Ann. Phys.*, **161**, 76 (1985).
- [56] Engelbrecht C. A. y Weindenmüller H. A., *Phys. Rev. C*, **8**, 859 (1973); Hofmann H. M., Richert J., Tepel J. W. y Weindenmüller H. A., *Ann. Phys.* **90**, 403 (1975); Nishioka H. y Weindenmüller H. A., *Phys. Lett. B.*, **157**, 101 (1985).
- [57] Kihong Kim, *Phys. Rev. B*, **58**, 6153 (1998).
- [58] P. L. Sulem, *Physica* **70**, 190 (1973).
- [59] A. M. Jayannavar, G.Y. Vijayagovindan, y N. Kumar, *Z. Phys. B* **75**, 77 (1989); R. Rammal y B. Doucot, *J. Physique* **48**, 509 (1987); Alain Comtet y Christophe Texier, cond-mat/9707046; Christophe Texier y Alain Comtet, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4220, (1999).
- [60] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, D. S. Fisher, *Phys. Rev. B*, **22**, 3519 (1980).
- [61] H. M. Nussenzveig, *Nuclear Physics*, **11**, 499 (1959).
- [62] Gastón García Calderón, Roberto Romo y Alberto Rubio, *Phys. Rev. B*, **56**, 4845 (1997).
- [63] W. A. Friedman y C. J. Goebel, *Ann. Phys.* **104**, 145 (1977); K. W. McVoy, *Escuela Latinoamericana de Física 1977, Notas de Física*, **1** 93 (1978).

## Mesoscopic Capacitors: A Statistical Analysis

Víctor A. Gopar,<sup>1</sup> Pier A. Mello,<sup>1</sup> and Markus Büttiker<sup>2</sup><sup>1</sup>Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 01000 México, D.F., México<sup>2</sup>Département de Physique Théorique, Université de Genève, CH-1211 Genève 4, Switzerland

(Received 1 May 1996)

The capacitance of mesoscopic samples depends on their geometry and physical properties, described in terms of characteristic times scales. The resulting ac admittance shows sample to sample fluctuations. Their distribution is studied here—through a random-matrix model—for a chaotic cavity capacitively coupled to a backgate: it is observed from the distribution of scattering time delays for the cavity, which is found analytically for the orthogonal, unitary, and symplectic universality classes, one mode in the lead connecting the cavity to the reservoir and no direct scattering. The results agree with numerical simulations. [S0031-9007(96)01262-8]

PACS numbers: 73.23.Ps, 05.45.+b

The elementary notion of capacitance of a system of conductors, as a quantity determined solely by the geometry, has to be revised if the electric field is not completely screened at the surface of the conductors. In fact, the penetration distance of the field is of the order of the Thomas-Fermi screening length, which may be appreciable for a mesoscopic conductor: the standard description of a capacitor in terms of the *geometric capacitance*  $C_e$  (that relates the charge  $Q$  on the plate to the voltage  $U$  across the capacitor) gives way, in the mesoscopic domain, to a more complex entity  $C_\mu$ , the *electrochemical capacitance* (that relates  $Q$  to the electrochemical potential of the reservoirs), which depends on the properties of the conductors [1]. This fact, in turn, has important consequences for the ac current induced in the system when the electrochemical potentials are subject to a nonzero-frequency time variation [1].

The electrochemical nature of the capacitance has been relevant to a number of experiments [2] and has been discussed theoretically by several authors [1,3,4]. Remarkably, it has been found that the resulting ac admittance can be described in terms of characteristic time scales related to energy derivatives of scattering matrix elements.

It is well known that, as a result of quantum interference, the dc conductance of mesoscopic structures shows strong fluctuations as a function of the Fermi energy or the magnetic field, as well as from sample to sample. A statistical analysis of this phenomenon has been done, for diffusive transport in disordered structures, using microscopic perturbative and macroscopic random-matrix theories [5], and for ballistic microstructures—cavities in which impurity scattering can be neglected so that only scattering from the boundaries is important—whose classical dynamics is chaotic, using semiclassical, field theoretic and random-matrix approaches [6,7].

An extension of the above random-matrix studies to include the ac admittance of mesoscopic structures is the subject of the present investigation.

In this Letter we shall confine our discussion to the geometry shown in Fig. 1. In this system there is, of course, no dc transport, but there may be an ac current, determined by the admittance [1,3]

$$g^l(\omega) = \frac{g(\omega)}{1 + (i/\omega C_e)g(\omega)} = -i\omega C_\mu + \dots \quad (1)$$

written in the Thomas-Fermi approximation and to lowest order in the frequency  $\omega$ . Here,  $g(\omega)$ ,  $g^l(\omega)$  denote the admittance for the noninteracting and interacting system, respectively, the former being given, for zero temperature, by

$$g(\omega) = -\omega i e^2 \left\{ \frac{1}{2\pi i} \text{Tr} \left[ S^l(E) \frac{\partial S(E)}{\partial E} \right] \right\} + \dots \\ = -i\omega e^2 N\tau/\Delta + \dots \quad (2)$$

Here,  $S(E)$  is the  $N \times N$  scattering matrix for the system formed by the cavity and the lead,  $N$  being the number of propagating modes, or open channels, in the lead;  $\Delta$  is the mean level spacing for the cavity (the inverse of the level density). Following [8], we have introduced the *dimensionless time delay*

$$\tau = \frac{\Delta}{2\pi N} \frac{\partial \theta}{\partial E} \quad (3)$$

where  $\exp(i\theta) = \det S$ . We then write  $g^l(\omega)$  of Eq. (1) as

$$g^l(\omega) = -i\omega C_e \alpha + \dots \quad (4)$$

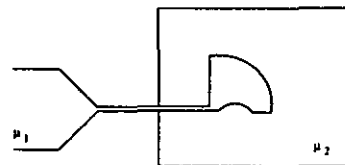


FIG. 1. Mesoscopic capacitor: A cavity (thick line) is connected via a perfect lead to reservoir 1 and capacitively coupled to a macroscopic back gate (thin line) connected to reservoir 2. The cavity is ballistic, and its classical dynamics is chaotic.

where the dimensionless capacitance  $\alpha$  is given by

$$\alpha = C_\mu/C_e = \frac{\tau}{\tau + \eta} \quad (5)$$

and

$$\eta = \frac{C_e}{N(\epsilon^2/\Delta)}. \quad (6)$$

Notice that, for a macroscopic cavity,  $\eta \ll 1$ , so that  $\alpha \approx 1$  and  $g^I(\omega) \approx -i\omega C_e$ .

The *one-energy* statistical distribution of the  $S$  matrix for ballistic cavities larger than the Fermi wavelength has been modeled successfully through an "equal *a priori* probability" ansatz (known as a "circular ensemble") [6,7], when the classical dynamics is chaotic and direct processes through the microstructure can be neglected, so that, as a result, the averaged  $S$  vanishes,  $\bar{S} = 0$ . It is clear, through, that the time delay  $\tau$  of Eq. (3) is a *two-energy* function and thus requires more information for its statistical study. The distribution of  $\tau$ ,  $w(\tau)$ , has been studied for a one-dimensional disordered system within the invariant imbedding formalism in [9]. In another approach, an underlying Hamiltonian described by a Gaussian ensemble was assumed and the problem analyzed using supersymmetry techniques: the two-point correlation function for the  $S$  matrix elements was derived in [10]; phase-shift times for unitary symmetry,  $N$  and  $\bar{S}$  arbitrary were studied in [11]. Reference [12] finds an approximation to  $w(\tau)$ . We concentrate, in what follows, on  $w(\tau)$  for arbitrary symmetry (orthogonal, unitary, and symplectic, identified as  $\beta = 1, 2$ , and  $4$ , respectively).  $N = 1$  and  $\bar{S} = 0$ : we show that this case can be treated using an old conjecture by Wigner [13,14]. We believe that the simplicity of the argument is appealing and gives an interesting perspective to the problem and a unified point of view for arbitrary  $\beta$ . We also remark that, for ballistic cavities, the case of just one open channel,  $N = 1$ , is very relevant from an experimental point of view, since cases of small  $N$  have been realized in the laboratory [15]. We find below

$$w_\beta(\tau) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \frac{e^{-\beta/2\tau}}{\tau^{(\beta+4)/2}}, \quad (7)$$

where  $0 \leq \tau < \infty$ . For  $\beta = 2$ , this result agrees with that of Ref. [11]. The main result of the present paper, i.e., the  $\beta$  dependent distribution of the dimensionless capacitance  $\alpha$  [ $\alpha$  is related to the ac admittance via Eq. (4)], then follows as

$$p_{\beta,\eta}(\alpha) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} \frac{(1-\alpha)^{\beta/2}}{\eta^{(\beta+2)/2} \alpha^{(\beta+4)/2}} e^{-\beta(1-\alpha)/2\eta\alpha}, \quad (8)$$

for  $0 \leq \alpha \leq 1$ . A plot of  $p_{1,\eta}(\alpha)$  for various values of  $\eta$  is presented in Fig. 2. For a macroscopic cavity,  $\eta \rightarrow 0$  and  $p_{\beta,\eta}(\alpha) \rightarrow \delta(1-\alpha)$ . We now derive the distribution of time delays, Eq. (7).

We write  $S$  for  $N = 1$  as

$$S(E) = \frac{1 + iK(E)}{1 - iK(E)} = e^{i\theta(E)}. \quad (9)$$

For pure resonance scattering the  $K$  function can be given the sum-over-resonance form [13,14]

$$K(E) = \sum_\lambda \frac{\Gamma_\lambda}{E_\lambda - E}, \quad (10)$$

where the "widths"  $\Gamma_\lambda$  for a given symmetry class  $\beta$  can be written in terms of real amplitudes  $\gamma_\lambda^{(i)}$  as

$$\Gamma_\lambda = \sum_{i=1}^{\beta} [\gamma_\lambda^{(i)}]^2. \quad (11)$$

The quantity  $\theta'(E)/2 = h(E)$  was studied extensively by Wigner [13,14]; it is called the "invariant derivative," because it remains invariant under the transformation

$$K_\phi = \frac{K + \tan \phi}{1 - K \tan \phi}, \quad (12)$$

$\phi$  being constant; since  $K = \tan(\theta/2)$ , (12) takes  $\theta/2$  to  $\theta/2 + \phi$ , and hence  $S$  to  $e^{i\phi} S e^{i\phi}$ . Both  $K$  and its transforms have the form  $K = \tan \int_c^E h(E) dE$ ,  $c$  being different for different transforms. Starting from one pole  $E_1$  of  $K$ , one can obtain the next one by determining the abscissa  $E_2$  so that the area under  $h(E)$  between  $E_1$  and  $E_2$  is  $\pi$ . Moreover, at a pole  $E_\lambda$  we have  $\Gamma_\lambda = 1/h(E_\lambda)$ . These relations are shown in Fig. 3. The levels and widths of the transforms of  $K$  can be obtained by a similar construction, starting at another abscissa.

From (9) and (10) we find the energy average of  $S(E)$  as

$$\overline{S(E)} = S(E + i) = \frac{1 - i}{1 + i}, \quad (13)$$

where  $i \rightarrow \infty$  [16] and  $i = \pi \bar{\Gamma}/\Delta$ . For  $\overline{S(E)} = 0$  [circular ensemble, invariant under (12)], we have  $i = 1$ . In this case (referred to in Refs. [13,14] as that of a "normalized"  $R$  function) Wigner proposes the conjecture: *the*

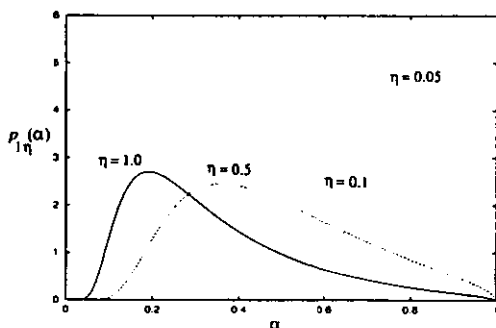


FIG. 2. The probability density of  $\alpha$ —the ratio of the electrochemical to the geometric capacitance—for the orthogonal case [Eq. (8)], for a number of values of  $\eta$ .

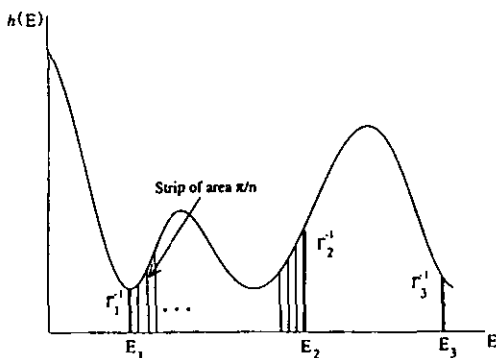


FIG. 3. The invariant derivative  $h(E)$ . The  $E_\lambda$  are the poles of  $K(E)$  and the  $\Gamma_\lambda$  the corresponding widths. Replicas of  $K$  with the same width distribution (according to Wigner's conjecture) are generated via the transformation (12) and used to subdivide the area between successive levels into  $n$  strips.

statistical distributions of level spacings and residues are invariant under the transformation (12).

The above statement is a "conjecture," not a "theorem," and it is not clear, *a priori*, for what distributions, if any, it is fulfilled. Wigner, in his papers, proposes it for "most statistical distributions." The conjecture, in relation with the residue distribution, was verified numerically for the case in which the energy levels entering Eq. (10) are constructed from a Gaussian orthogonal, unitary, or symplectic ensemble, and the  $\gamma_\lambda^{(i)}$  of Eq. (11) as independent Gaussian variables: the residue distribution was found to remain invariant, within the statistical error bars of the numerical simulation. On the other hand, the conjecture is seen, in our numerical studies, to be violated for a spectrum of statistically independent energy levels following a Poisson distribution.

Call  $Q(h)$  the probability density of the inverse widths  $h(E_\lambda) = h_\lambda$  and  $P(h)$  the probability density of  $h$  across the energy axis, irrespective of whether we are at resonance or not;  $P(h)$  is related to  $w(\tau)$  as  $w(\tau) = (\pi/\Delta)P(\pi\tau/\Delta)$ . Assuming the above conjecture, Ref. [14] shows that

$$P(h) = \frac{\pi}{h\Delta} Q(h). \tag{14}$$

This relation can be understood by means of a very simple argument. Consider, for one given  $K$ , the following level-average:

$$\langle f(h) \rangle_\lambda = \frac{1}{m} \sum_{\lambda=1}^m f(h_\lambda), \tag{15}$$

for an arbitrary function  $f$ . From Fig. 3 we see that we cannot replace the sum in this equation by an integral. However, using the transformation (12) we can construct

"replicas" of  $K$ , all having the same distribution of  $h_\lambda$ ; we do this  $n$  times, in such a way that the area between two successive levels is subdivided into  $n$  strips of area  $\pi/n$  each. Now we have a fine mesh, the sum over which can be approximated by an integral, using a density  $nh/\pi$ , since the base of one of the above strips, at the place where  $h$  is the local value of the curve, is  $\pi/nh$ . We then arrive at the above relation (14).

If we use, in (14), the variable  $u = \pi/h\Delta$  (and denote the distributions with a hat), we have

$$\hat{P}(u) = u\hat{Q}(u). \tag{16}$$

On the left-hand side (LHS)  $u$  can be thought of in terms of  $\tau$  of Eq. (3) as  $u = 1/\tau$ ; at resonance,  $u$  takes the value  $u_\lambda = \pi\Gamma_\lambda/\Delta$ , which is the relevant variable on the right-hand side (RHS) of Eq. (16). Thus, knowing the distribution of widths  $\hat{Q}(u)$ , Eq. (16) allows finding  $\hat{P}(u)$  [17].

For the three universality classes  $\beta = 1, 2, 4$  and independent Gaussian variables  $\gamma_\lambda^{(i)}$ , the distribution  $\hat{Q}(u)$  is the  $\chi^2$  distribution function with  $\beta$  degrees of freedom,

$$\hat{Q}_\beta(u) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} u^{(\beta-2)/2} e^{-(\beta/2)u}; \tag{17}$$

Eq. (16) then gives  $\hat{P}(u)$ , from which we find the distribution of time delays  $w_\beta(\tau)$  of Eq. (7). We notice the remarkable fact that, while  $w_\beta(\tau)$  certainly depends on the distribution of widths, other characteristics of the spectrum become lumped together in the invariance property contemplated in Wigner's conjecture.

A numerical verification (using the simulation explained above in relation with Wigner's conjecture) of  $w_\beta(\tau)$  of Eq. (7) is shown in Fig. 4 for the three symmetry classes  $\beta = 1, 2, 4$ : in all cases the agreement is seen to be very good.

To summarize, we have found the statistical distribution of capacitances  $p_{\beta,\gamma}(\alpha)$ , Eq. (8),  $\alpha$  being defined in Eqs. (4) and (5), for the system shown in Fig. 1, whose essential element is a mesoscopic capacitor. The plate coupled to the back gate is a chaotic cavity; the experimentally relevant situation of one open channel ( $N = 1$ ) is considered and the possibility of direct reflection by the cavity is neglected. The essential ingredient that is needed is the statistical distribution  $w_\beta(\tau)$ , Eq. (7), of time delays  $\tau$  associated with the scattering from the cavity. It is shown that  $w_\beta(\tau)$  can be obtained in a very simple way from a conjecture by Wigner, whose validity, in turn, is verified numerically for the three symmetry classes: orthogonal, unitary, and symplectic. The resulting  $w_\beta(\tau)$  compares very well with the results of numerical simulations, for the three classes. The statistical analysis of the admittance of mesoscopic conductors provides additional information on such systems not contained in the investigation of dc transport properties, and thus points to an interesting avenue of future research.

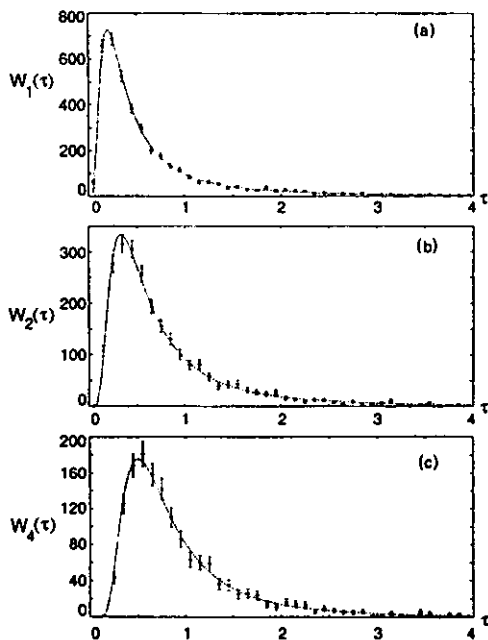


FIG. 4. The distribution  $W_\beta(\tau)$  of time delays for one channel and in the absence of direct processes, for the (a) orthogonal, (b) unitary, and (c) symplectic universality classes. The dotted curves are proportional to the theoretical probability density given by Eq. (7). The points with the finite-sample error bar are the results of the numerical simulation described in the text: 200-dimensional matrices were used in the three cases. The agreement is excellent.

Part of this work was supported by the DGAPA, México, and the Swiss National Science Foundation.

[1] M. Büttiker, *J. Phys. Condens. Matter* 5, 9361 (1993).

[2] J. Lambe and R. C. Jaklevic, *Phys. Rev. Lett.* 22, 1371 (1969); T. P. Smith III, W. J. Wang, and P. J. Stiles, *Phys. Rev. B* 34, 2995 (1986); P. Lafarge *et al.*, *Z. Phys. B* 85, 327 (1991); R. C. Ashoori *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 68, 3088 (1992); W. Chen *et al.*, *ibid.* 73, 146 (1994).

[3] M. Büttiker, H. Thomas, and A. Prêtre, *Phys. Lett.* 180A, 364 (1993); *Z. Phys. B* 94, 133 (1994); M. Büttiker, A. Prêtre, and H. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* 70, 4114 (1993).

[4] M. Macucci, K. Hess, and G. J. Iafrate, *J. Appl. Phys.* 77, 3267 (1995); K. Natori, *J. Appl. Phys.* 78, 4543 (1995).

[5] *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (North-Holland, New York, 1991); C. W. J. Beenakker and H. van Houten, in *Solid State Physics*, edited by H. Ehrenreich and D. Turnbull (Academic Press, New York, 1991).

[6] H. U. Baranger and P. A. Mello, *Phys. Rev. Lett.* 73, 142 (1994); see *Europhys. Lett.* 33, 465 (1996), for the extension to  $\bar{S} \neq 0$ . See also references contained therein.

[7] R. A. Jalabert, J.-L. Pichard, and C. W. J. Beenakker, *Europhys. Lett.* 27, 255 (1994).

[8] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* 98, 145 (1955); F. T. Smith, *Phys. Rev.* 118, 349 (1960); M. Bauer, P. A. Mello, and K. W. McVoy, *Z. Phys. A* 293, 151 (1979).

[9] A. M. Jayannavar, G. Y. Vijayagovindan, and N. Kumar, *Z. Phys. B* 75, 77 (1989).

[10] C. H. Lewenkopf and H. A. Weidenmüller, *Ann. Phys. (N.Y.)* 212, 53 (1991).

[11] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, *Phys. Rev. Lett.* 76, 4709 (1996).

[12] P. Šeba, K. Zyczkowski, and J. Zakrzewski, Report No. chaos-dyn/9603005.

[13] E. P. Wigner, *Ann. Math.* 53, 36 (1951); *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47, 790 (1951).

[14] E. P. Wigner, *Ann. Math.* 55, 7 (1952).

[15] See, for instance, M. J. Berry *et al.*, *Surf. Sci.* 305, 480 (1994); I. H. Chan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 74, 3876 (1995).

[16] H. Feshbach, in *Reaction Dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1973).

[17] The integral of the LHS of (16) is 1 from normalization; the fact that the integral of the RHS is also 1 means  $\langle u \rangle_Q = 1$ , which is consistent with  $t = 1$ , as required right after Eq. (13). Similarly, from the normalization of  $\hat{Q}(u)$ , Eq. (16) shows that  $\langle 1/u \rangle_P = 1$ , and hence  $\langle \tau \rangle_w = 1$ .

## The problem of quantum chaotic scattering with direct processes reduced to the one without

V. A. GOPAR<sup>1</sup>(\*) and P. A. MELLO<sup>2</sup>(\*\*)

<sup>1</sup> *Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México  
01000 México D.F., México*

<sup>2</sup> *Département de Physique Théorique, Université de Genève  
CH-1211 Genève 4, Switzerland*

(received 13 October 1997; accepted in final form 4 March 1998)

PACS. 05.45+b – Theory and models of chaotic systems.

PACS. 73.23–b – Mesoscopic systems.

PACS. 73.23Ps – Other electronic properties of mesoscopic systems.

**Abstract.** – We show that the study of the statistical properties of the scattering matrix  $S$  for quantum chaotic scattering in the presence of direct processes (characterized by  $\bar{S} \neq 0$ ,  $\bar{S}$  being the average  $S$ -matrix) can be reduced to the simpler case where direct processes are absent ( $\bar{S} = 0$ ). Our result is verified with a numerical simulation of the two-energy autocorrelation for two-dimensional  $S$ -matrices. It is also used to extend Wigner's time delay distribution for one-dimensional  $S$ -matrices, recently found for  $\bar{S} = 0$ , to the case  $\bar{S} \neq 0$ ; this extension is verified numerically. As a consequence of our result, future calculations can be restricted to the simpler case of no direct processes.

The problem of chaotic wave scattering is of great interest in nuclear, molecular and mesoscopic physics, in optics and in the microwave domain. Common features have been found for system sizes spanning such a large range because of the generality of the phenomena involved.

In quantum-mechanical scattering problems with a chaotic classical dynamics one aims at studying the statistical properties of the scattering matrix  $S$ . Recently, this study has been further motivated by experiments on quantum electronic transport in mesoscopic systems [1], where a cavity is connected to  $L$  leads, the  $l$ -th lead supporting  $N_l$  open channels or modes. The dimensionality of the  $S$ -matrix in this problem is  $n = \sum_{l=1}^L N_l$ .

The *one-energy* statistical distribution of the  $S$ -matrix has been described successfully by an *information-theoretic* model that incorporates precisely the *physical information* that is relevant for a wide class of systems [2]-[4]. That information specifies: 1) General properties:

---

(\*) E-mail: gopar@fenix.ifisicacu.unam.mx

(\*\*) On leave from Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 01000 México D.F., México. E-mail: mello@fenix.ifisicacu.unam.mx



i) *flux conservation* (giving rise to unitarity of the  $S$ -matrix), ii) *causality* and the related analytical properties of  $S(E)$  in the complex-energy plane, and iii) the presence or absence of time-reversal and spin-rotation symmetry, that determines the *universality class*: orthogonal, unitary or symplectic (designated as  $\beta = 1, 2, 4$ ) [5], [6] and restricts further the structure of  $S$ : unitary symmetric, unitary or unitary self-dual, respectively. 2) A specific property: the ensemble average  $\langle S \rangle$ , identified with the energy average  $\bar{S}$ , also known as the *optical  $S$ -matrix* [7], which controls the presence of *prompt*, or *direct processes* in the scattering problem. In this procedure one constructs the statistical distribution of  $S$  using only the above physical information --expressible entirely in terms of  $S$  itself - without ever invoking any statistical assumption for the underlying Hamiltonian, that never enters the analysis. The resulting  $S$ -matrix distribution, known as *Poisson's kernel*, reproduces well the statistical scattering properties of ballistic cavities with a chaotic classical dynamics [4].

The joint statistical distribution of the  $S$ -matrix at *two or more energies* has escaped, so far, an analysis within the philosophy described above (some aspects of the two-point problem have been studied assuming an underlying Hamiltonian described by a Gaussian ensemble, as in refs. [8], [9]). An approach coming close to that philosophy was initiated in ref. [10], with a study of the simplest quantity of a two-point character: the statistical distribution of the time delay --that involves the energy derivative of  $S$ -- arising in the scattering process [11]. The physical motivation in ref. [10] was the study of the electrochemical capacitance of a mesoscopic system [12]: a cavity was attached to one lead supporting one open channel (so that  $S = e^{i\theta}$  is a  $1 \times 1$  matrix), for arbitrary  $\beta$  and  $\bar{S} = 0$ . It was based on a conjecture by Wigner [13], that assumes invariance of the statistics of poles and residues of the related  $K$ -matrix under the same transformation  $S \rightarrow e^{i\theta/2} S e^{i\theta/2}$  that defines the invariant one-point measure [14] which, in the one-channel case, is  $d\theta/2\pi$ . That study was generalized to an arbitrary number of channels in refs. [15], [16], again for  $\bar{S} = 0$ : Wigner's conjecture was formulated and proved as the invariance of the  $k$ -point probability distribution of  $S$  under the transformation that defines the invariant measure for the universality class  $\beta$ .

Of physical importance is the case  $\bar{S} \neq 0$ : it corresponds to situations where direct processes are not negligible. For example, the case  $\bar{S} = 0$  may describe chaotic cavities with ballistic point contacts, while the coupling to leads containing tunnel barriers produces direct reflection and thus  $\bar{S} \neq 0$  [4], [17]. A more complex combination of direct processes is described in [4].

In the present article we find a transformation that relates the  $k$ -point distribution of the  $n$ -dimensional  $S$ -matrix for the case  $\bar{S} \neq 0$  to that for  $\bar{S} = 0$ , thus relating the problems in the presence and in the absence of direct processes. In ref. [18], the problem with a nondiagonal  $\bar{S}$  was reduced to that with a diagonal and real  $\bar{S}$ . Here we show that the problem can be reduced further to one characterized by  $\bar{S} = 0$ . That transformation, used in the past in relation with one-point functions [19], contains only  $S$  and its average  $\bar{S}$ . It is used here to extend to  $\bar{S} \neq 0$  the time-delay distribution of ref. [10] and is verified by comparing our results with some known ones and with numerical simulations. It is also verified numerically for the two-point correlation function of  $2 \times 2$   $S$ -matrices. We believe that our result is appealing because of its conceptual simplicity and may open the way for further studies in this field.

We first summarize the information-theoretic model of refs. [2]-[4]. The starting point is the measure  $d\mu^{(\beta)}(S)$  for  $n \times n$   $S$ -matrices, that remains *invariant* under the symmetry operation for the universality class  $\beta$  [5], [6], [14]. The ensemble average of  $S$  vanishes for the invariant measure, and so does the prompt component. An ensemble for which  $\langle S \rangle = \bar{S} \neq 0$  contains more information than the invariant-measure: it can be constructed as  $p_S^{(\beta)}(S) d\mu^{(\beta)}(S)$  and the information associated with it is defined as  $\int p_S^{(\beta)}(S) \ln [p_S^{(\beta)}(S)] d\mu^{(\beta)}(S)$ . We assume to be far from thresholds and recall that  $S(E)$  is *analytic* in the upper half of the complex-energy plane (causality) [20]. The study of the statistical properties of  $S$  is simplified by idealizing

$S(E)$ , for real  $E$ , as a *stationary random function* satisfying the condition of *ergodicity*, which in turn implies the equivalence of energy and ensemble averages [21]. We thus have the *analyticity-ergodicity* requirements (AE), that imply  $\langle S_{ab}^p S_{cd}^q \dots \rangle = \langle S_{ab} \rangle^p \langle S_{cd} \rangle^q \dots$ , so that averages of products of  $S$ -matrix elements not involving complex conjugation can be written in terms of the matrix  $\langle S \rangle = \bar{S}$ . The one-energy probability density of  $S$

$$\rho_{\bar{S}}^{(\beta)}(S) = V_{\beta}^{-1} \frac{[\det(I - \bar{S}\bar{S}^{\dagger})]^{(\beta n + 2 - \beta)/2}}{|\det(I - S\bar{S}^{\dagger})|^{\beta n + 2 - \beta}}, \tag{1}$$

with  $V_{\beta}$  a normalization constant, is known as Poisson's kernel: it satisfies the AE requirements [2] and the associated information is less than or equal to that of any other probability density satisfying AE for the same  $\bar{S}$  [3]. In eq. (1), the elements of  $S$  are assumed to be complex numbers for  $\beta = 1, 2$  and quaternions (see ref. [5], p. 126) for  $\beta = 4$ .

Now consider the transformation

$$S_0 = t_1'^{-1}(S - r_1)(1 - r_1^{\dagger}S)^{-1}t_1^{\dagger}, \tag{2}$$

where  $r_1, t_1, r_1', t_1'$  are the  $n \times n$  blocks of the auxiliary scattering matrix

$$S_1 = \begin{bmatrix} r_1 & t_1' \\ t_1 & r_1' \end{bmatrix}, \tag{3}$$

which has the symmetry associated with the universality class  $\beta$ . The transformation (2) can be interpreted as follows [16]. Imagine bunching the  $L$  leads into a "superlead" containing  $n$  incoming and  $n$  outgoing waves. Along the superlead, between the cavity and infinity, we connect a fictitious scatterer described by  $S_1$ : since there are  $n$  incoming and  $n$  outgoing waves on either side of the scatterer,  $S_1$  is  $2n$ -dimensional. The resulting scattering matrix is the  $S_0$  of eq. (2). One can prove [2], [16], [17], [19] the statement: if the one-energy distribution of  $S$  is Poisson's measure (1) and we identify  $r_1$  in the transformation (2) with  $\bar{S}$ , the one-energy distribution of  $S_0$  is the invariant measure  $d\mu^{(\beta)}(S_0)$ ; i.e. eq. (2) with  $r_1 = \bar{S}$  transforms the problem with direct processes to one without ( $\bar{S}_0 = 0$ ), as far as the one-energy distribution goes. Also, one can show [2], [19] that the distribution of the resulting  $S_0$  is independent of the choice of  $t_1$  and  $t_1'$ , as long as they belong to a unitary matrix  $S_1$ .

Now suppose that *at every energy  $E$*  we subject  $S(E)$  to the transformation (2), always with the same  $\bar{S}$ . We prove below the following statement: *the joint statistical properties of the transformed  $S_0(E_1), S_0(E_2), \dots$  are precisely the ones associated with the problem without direct processes, characterized by  $\bar{S}_0 = 0$* . In other words, the above transformation relates  $S(E)$ , understood as a *stationary random function of energy*, for a problem with direct processes to one without.

We prove the above statement for  $S$  unitary and symmetric ( $\beta = 1$ ), the proof for the other symmetries being similar. Consider first the case of  $\bar{S}$  diagonal and real.  $S$  can be written in terms of the real amplitudes  $\gamma_{\lambda a}$ 's and the energy levels  $E_{\lambda}$ 's, as

$$S(E) = [1 + iK(E)][1 - iK(E)]^{-1}, \tag{4}$$

where the  $K$ -matrix is given by

$$K_{ab}(E) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda a} \gamma_{\lambda b}}{E_{\lambda} - E}. \tag{5}$$

The  $\gamma_{\lambda a}$ 's are uncorrelated Gaussian variables and the  $E_\lambda$ 's follow the statistics of the Gaussian orthogonal ensemble [5], [6], with average spacing  $\Delta$ .  $\overline{S}(E)$  is given by [18]

$$\overline{S(E)}_{ab} = (1 - y_{aa})(1 + y_{bb})^{-1} \delta_{ab}, \quad (6)$$

where  $y_{aa} = \pi \langle \gamma_{\lambda a}^2 \rangle / \Delta$ . Just as  $S$  and  $K$  are related by eq. (4), the transformed  $S_0$ , eq. (2), can be written in terms of a matrix  $K_0$  given by

$$K_0 = i(1 - S_0)(1 + S_0)^{-1}. \quad (7)$$

Substituting the transformation (2) into (7), with  $S$  given by (4), we finally find

$$(K_0)_{ab} = y_{aa}^{-1/2} K_{ab} y_{bb}^{-1/2}. \quad (8)$$

Thus, the  $\gamma_{\lambda a}$ 's are rescaled by a constant ( $\gamma_{\lambda a} \rightarrow y_{aa}^{-1/2} \gamma_{\lambda a}$ ), which is the appropriate one to ensure  $\overline{S_0(E)} = 0$ . Therefore, under the transformation (2), the  $\gamma_{\lambda a}$ 's retain their Gaussian distribution, while the energy levels  $E_\lambda$ 's are unchanged. We conclude that the statistical properties of the transformed random function  $S_0(E)$  are the same as those of a statistical  $S(E)$  matrix without direct processes. This proves our statement for  $\overline{S}$  diagonal and real. The case of arbitrary  $\overline{S}$  can now be reduced to the above one using the results of ref. [18].

As a first application, we extend to  $\overline{S} \neq 0$  the time-delay distribution found in ref. [10] for one spatial channel,  $\overline{S} = 0$  and arbitrary  $\beta$ . We consider eq. (2) for  $n = 1$ , with  $r_1 = \overline{S}$ ; omitting the unimportant phase factor  $t_1^*/t_1$ , we have

$$S_0(S) = (S - \overline{S})(1 - \overline{S}^* S)^{-1}, \quad (9)$$

where  $S_0$  and  $S$  can be written as  $S_0 = \exp[i\theta_0]$ ,  $S = \exp[i\theta]$ .

We are interested in the time delay [11]  $\theta' = d\theta/dE$ ; we express it in terms of  $\theta_0$  and  $\theta'_0 = d\theta_0/dE$  as

$$\theta' = d\theta/dE = \left[ 1 - |\overline{S}|^2 \right] \left| 1 + \overline{S}^* e^{i\theta_0} \right|^{-2} d\theta_0/dE \equiv f(\theta_0) \theta'_0. \quad (10)$$

To find the distribution of  $\theta'$  we need the joint distribution of  $\theta_0$  and  $\theta'_0$ ,  $P_0^{(\beta)}(\theta_0, \theta'_0)$ , which, being the one for no direct processes, factorizes as [15], [16]

$$P_0^{(\beta)}(\theta_0, \theta'_0) = P_0^{(\beta)}(\theta'_0)/2\pi. \quad (11)$$

It is convenient to express eqs. (10) and (11) in terms of the variables  $u$ ,  $u_0$  defined as

$$u = 2\pi/\theta' \Delta, \quad u_0 = 2\pi/\theta'_0 \Delta_0, \quad (12)$$

where  $\Delta$  and  $\Delta_0$  denote the average level spacing for the problems described by  $S$  and  $S_0$ , respectively. The above proof shows that  $\Delta = \Delta_0$ , since the energy levels  $E_\lambda$  are unchanged by the transformation (2). Thus, using (12) and  $u_0 = 2\pi/\theta'_0 \Delta$ , eq. (10) becomes

$$u = u_0/f(\theta_0). \quad (13)$$

The joint distribution of the statistically independent variables  $\theta_0$ ,  $u_0$  (see eq. (11)), needed to find the distribution of  $u$ , is given by

$$P_0^{(\beta)}(\theta_0, u_0) = P_0^{(\beta)}(u_0)/2\pi, \quad (14)$$

where  $P_0^{(\beta)}(u_0)$  was obtained in eqs. (16), (17) of ref. [10] (and denoted there by  $\hat{P}(u)$ ) as

$$P_0^{(\beta)}(u_0) = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2)} u_0^{\beta/2} e^{-(\beta/2)u_0}. \quad (15)$$

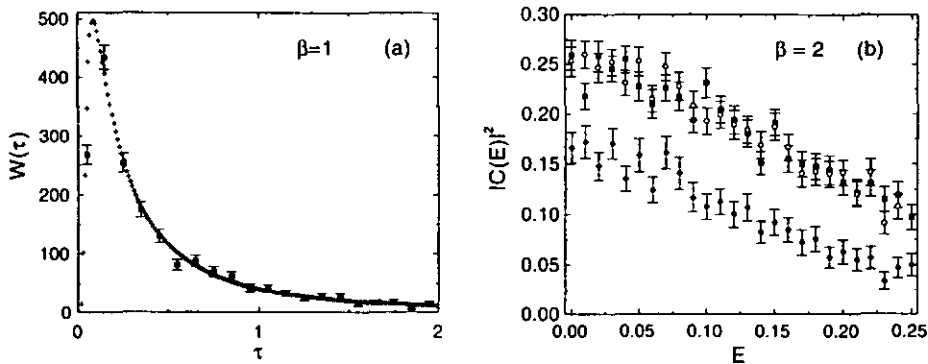


Fig. 1. - (a) The distribution of time delays for one channel and in the presence of direct processes ( $\bar{S} = 1/2$ ), for  $\beta = 1$ . The crosses are proportional to the theoretical probability density of eq. (17), that was integrated numerically. The points with the finite-sample error bar are the results of the numerical simulation described in the text. The agreement is excellent. (b) The square of the autocorrelation function of the  $S_{11}$  element of a two-channel  $S$ -matrix for  $\beta = 2$  as a function of the energy separation, obtained from a numerical simulation. The open circles and diamonds correspond to  $\bar{S} = 0$  and  $(1/2)I$ , respectively. The squares are the result of applying the transformation (2) to the data for  $\bar{S} = (1/2)I$ : they are seen to be consistent with the correlation for  $\bar{S} = 0$ .

From (13)-(15) we write the distribution of  $u$ ,  $P_{\bar{S}}^{(\beta)}(u) = \langle \delta [u - u_0/f(\theta_0)] \rangle$ , as

$$P_{\bar{S}}^{(\beta)}(u) = \frac{1}{2\pi} \int f(\theta_0) P_0^{(\beta)}(f(\theta_0)u) d\theta_0 = \frac{(\beta/2)^{\beta/2}}{2\pi\Gamma(\beta/2)} u^{\beta/2} \int_0^{2\pi} [f(\theta_0)]^{1+\beta/2} e^{-\frac{\beta}{2}uf(\theta_0)} d\theta_0. \tag{16}$$

For the dimensionless time delay  $\tau = 1/u = \theta' \Delta/2\pi$  we finally find the probability density

$$w_{\bar{S}}^{(\beta)}(\tau) = \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\beta/2}}{2\pi\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\tau^{2+\frac{\beta}{2}}} \int_0^{2\pi} [f(\theta_0)]^{1+\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}\tau f(\theta_0)} d\theta_0. \tag{17}$$

The calculation of  $w_{\bar{S}}^{(\beta)}(\tau)$  for arbitrary  $\bar{S}$  and  $\beta$  is thus reduced to quadratures [ $f(\theta_0)$  is known, eq. (10)] and the result coincides with our previous one [10] for  $\bar{S} = 0$ .

Equation (17) is compared in fig. 1(a) with a numerical simulation that generates an ensemble of one-dimensional  $S$ 's from resonances sampled from an unfolded Gaussian ensemble for  $\beta = 1$ , the coupling amplitudes to the channel being independent Gaussian variables whose variance ensures  $\bar{S} = 1/2$ . The agreement is very good. Such a comparison was also made for  $\beta = 2, 4$ , although it is not illustrated here. For  $\beta = 2$ , ref. [9] gives  $w_{\bar{S}}^{(\beta)}(\tau)$  in analytical form in terms of Bessel functions: we could not prove analytically the equivalence with our result; however, numerically the two are indistinguishable.

As a further verification of our statement, consider the autocorrelation function  $c_{\bar{S}}(E) = \langle S_{11}^*(0)S_{11}(E) \rangle_{\bar{S}} - \langle S_{11}^*(0) \rangle_{\bar{S}} \langle S_{11}(E) \rangle_{\bar{S}}$ . The quantity  $|c_{\bar{S}}(E)|^2$  was calculated by generating numerically two ensembles of  $2 \times 2$   $S$ -matrices, with  $\bar{S} = 0$  and  $(1/2)I$ , respectively,  $I$  being the unit matrix. To the data for  $\bar{S} = (1/2)I$  the transformation (2) was applied: the results shown in fig. 1 (b) are seen to be consistent with  $|c_{\bar{S}=0}(E)|^2$ .

Summarizing, we have found a transformation that relates the  $S$ -matrix  $S(E)$ , understood as a stationary random function of energy, for a problem with direct processes ( $\bar{S} \neq 0$ ) to one without ( $\bar{S} = 0$ ). An application was made to extend Wigner's time-delay distribution for one-channel  $S$ -matrices, from  $\bar{S} = 0$  to  $\bar{S} \neq 0$ . A number of numerical simulations were made as a verification of our transformation. Our result implies that future work on the statistical properties of the  $S$ -matrix can be restricted to the simpler case  $\bar{S} = 0$ , and extended to the case  $\bar{S} \neq 0$ —corresponding to more complex scattering systems with direct processes—using the procedure described in this paper.

\*\*\*

Part of this work was supported by DGAPA, DGSCA and CONACyT, México, and by the Swiss National Science foundation. PAM is grateful to the École de Physique de l'Université de Genève for its hospitality during the time most of this work was accomplished.

#### REFERENCES

- [1] See HUIBERS A. G., SWITKES M., MARCUS C. M., CAMPMAN K. and GOSSARD A. C., preprint cond-mat/9708170 and references therein.
- [2] HUA L. K., *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domain* (Amer. Math. Soc., Providence, RI) 1963.
- [3] MELLO P. A., PEREYRA P. and SELIGMAN T. H., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **161** (1985) 276.
- [4] BARANGER H. U. and MELLO P. A., *Europhys. Lett.*, **33** (1996) 465.
- [5] MEHTA M. L., *Random Matrices* (Academic, New York) 1991.
- [6] PORTER C. E., *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic, New York) 1965.
- [7] FESHBACH H., *Topics in the Theory of Nuclear Reactions*, in *Reaction Dynamics* (Gordon and Breach, New York) 1973.
- [8] LEWENKOPF C. H. and WEIDENMÜLLER H. A., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **212** (1991) 53.
- [9] See FYODOROV Y. V. and SOMMERS H.-J., *J. Math. Phys.*, **38** (1997) 1918 and references therein.
- [10] GOPAR V., MELLO P. A. and BÜTTIKER M., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3005.
- [11] WIGNER E. P., *Phys. Rev.*, **98** (1955) 145; SMITH F. T., *Phys. Rev.*, **118** (1960) 349; BAUER M., MELLO P. A. and MC VOY K. W., *Z. Phys. A*, **293** (1979) 151.
- [12] BÜTTIKER M., THOMAS H. and PRÊTRE A., *Phys. Lett. A*, **180** (1993) 364; *Z. Phys. B*, **94** (1994) 133; BÜTTIKER M., PRÊTRE A. and THOMAS H., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 4114.
- [13] WIGNER E. P., *Ann. Math.*, **53** (1951) 36; *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951) 790; *Ann. Math.*, **55** (1952) 7.
- [14] DYSON F. J., *J. Math. Phys.*, **3** (1962) 140.
- [15] BROUWER P. W., FRAHM K. M. and BEENAKKER C. W. J., preprint chao-dyn/9705015.
- [16] BROUWER P. W., Doctoral Thesis, University of Leyden (1996).
- [17] BROUWER P. W., *Phys. Rev. B*, **51** (1995) 16878.
- [18] ENGELBRECHT C. A. and WEIDENMÜLLER H. A., *Phys. Rev. C*, **8** (1973) 859; HOFMANN H. M., RICHERT J., TEPEL J. W. and WEIDENMÜLLER H. A., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **90** (1975) 403; NISHIOKA H. and WEIDENMÜLLER H. A., *Phys. Lett. B*, **157** (1985) 101.
- [19] FRIEDMAN W. and MELLO P. A., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **161** (1985) 276.
- [20] MC VOY K. W., *Nuclear Resonance Reactions and S-matrix analyticity*, in *Fundamentals in Nuclear Theory* (International Atomic Energy Agency, Vienna) 1967.
- [21] YAGLOM A. M., *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* R. A. SILVERMAN. Tr. (Prentice-Hall) 1962.