00384

2
2q

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TECNICAS NO-USUALES EN TOPOLOGIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A:

MARIA DEL CARMEN HERENDIRA GOMEZ LAVEAGA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ Y CERVANTES

MEXICO, D.F. 1999

A MIS PADRES
(IN MEMORIAN)

A LUIS Y NUESTROS HIJOS, ALEJANDRO, ERNESTO Y AURORA

A PASCUAL Y AURORA COLAVITA

Durante la realización de este trabajo recibí permanentemente la asistencia y ayuda del Dr. Adalberto García Maynez, a quien agradezco su amistad y el haberme dirigido esta tesis.

En la redacción de este trabajo recibí interesantes sugerencias y comentarios de la Dra. Silvia de Neymet y del Dr. Rigoberto Vera, a quienes agradezco sinceramente su valiosa ayuda.

Título de la tesis:

"TECNICAS NO-USUALES EN TOPOLOGIA"

Grado y nombre del tutor o director de tesis:

DR. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ Y CERVANTES

Institución de adscripción del tutor o director de tesis:

INSTITUTO DE MATEMATICAS, UNAM

Resumen de la tesis: (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina, como máximo en 25 renglones a un espacio, sin salir de la extensión de este cuadro.)

Se introduce la definición de elementos indistinguibles en el modelo no-usual $^*X$ de un espacio uniforme X. Se demuestra que la relación determinada por los elementos indistinguibles es de equivalencia en el modelo no-usual $^*X$, donde la clase de equivalencia a la cual pertenece cada x de X coincide con su mónada $M(x)$ (respecto a la topología inducida por la uniformidad U de X), concepto definido por A. Robinson. A partir del concepto de indistinguible se obtienen definiciones equivalentes en el modelo no-usual de filtro de Cauchy, ultrafiltro, convergencia de un filtro, etc. y con estas nuevas definiciones y de otras ya conocidas se demuestran algunos teoremas, y en algunos casos estas demostraciones resultan sorprendentemente más cortas que las conocidas.
Se demuestra que para cada espacio uniforme (X,U), su modelo no-usual $^*X$ admite una uniformidad muy natural $^*U$, de tal manera que (X,U) resulta un subespacio uniforme de $(^*X,^*U)$ y tal que este último contiene una completación de (X,U).

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE, EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA, QUEDARÁ SUSPENDIDO EL TRÁMITE DEL EXAMEN

Fecha de solicitud: ______________________

Firma del alumno

Acompaño los siguientes documentos:

- Nombramiento del jurado del examen de grado
- Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del jurado
- Copia de la última revisión de estudios
- Comprobante de pago de derechos por registro del grado

Biblioteca del Plantel

Entrega ejemplares de tesis

Biblioteca Central

SUMMARY

In this work the notion of indistinguishable element in the non-standard model *X of an uniform space X is introduced. The relation determined by these indistinguishable elements is an equivalence relation in the non-standard model *X, where the equivalence class to which belongs every x of X coincides with his monade (concept defined by A. Robinson) M(x), respect to the topology induced by the uniformity U of X . Using the indistinguishable concept new definitions appears in the non-standard model *X, equivalent to the definitions in the standard space, like Cauchy filter, ultrafilter, convergence of a filter, etc. and with these new definitions some theorems can be proved and, in the most of times, this demonstrations are shortest than the standard known.

For every uniform space (X , U), his non-standard model *X admits a very natural uniformity *U , such way that (X , U) results an uniform subspace of (*X , *U) and such that (*X , *U) contains a completation of (X , U).

INTRODUCCION

Desde el surgimiento de las técnicas conocidas como no usuales (non-standard) , a partir de la lógica , [Robinson 1] , se han hecho grandes intentos de presentar estas técnicas como herramienta alternativa en la resolución de problemas de la matemática , ahora conocida como "usual " , (standard).

Después de los resultados de Robinson , que justificaron y formalizaron el desarrollo del cálculo en el espíritu de Leibniz , se han realizado grandes y excelentes esfuerzos en :

(1) Presentar las técnicas no usuales , de la manera más rápida y sencilla , usando la mínima herramienta lógica posible , [Davis] , [Luxemburg 2] , [Keisler] .

(2) Usar estas técnicas como alternativa en la enseñanza y desarrollo de la matemática elemental, para difundir las técnicas no usuales como una nueva opción en ciertas áreas de la matemática , [Henle] , [Robert] . Un esfuerzo notable realizado en esta dirección es el de H. J. Keisler [Keisler] .

(3) Areas de la matemática abstracta , como Análisis , Topología , Sistemas Dinámicos , Variable Compleja , Ecuaciones Diferenciales , Teoría de Probabilidades, etc., han sido estudiadas y trabajadas con las técnicas no usuales mostrando la eficiencia de éstas, [Davis], [Nelson 2], [Luxemburg 1].

(4) Resolver problemas usuales de matemáticas, donde el más conocido es el de Bernstein - Robinson, [Robinson 3].

(5) Presentar nueva axiomática para la matemática, incluyendo desde su nacimiento el concepto usual y no usual, [Nelson 1].

En este trabajo pretendemos aplicar las técnicas no usuales en espacios uniformes, mostrando que, además de que estas técnicas son eficientes en estas áreas, el proceso de completar espacios, de alguna manera, constituye un proceso similar al de extensión de espacios.

Se considera en $^*X$ la relación de ser indistinguible como una relación natural de la técnica no usual y se compara esta relación con la de cercanía en espacios uniformes.

Este trabajo se divide en tres capítulos:

(I) Capítulo I .- Introducción del Modelo no usual.

De una manera informal introducimos las nociones básicas de la construcción del modelo no usual a fin de hacer, aunque muy superficialmente, autocontenido el conjunto de estas notas. Para tener información más clara y precisa sobre el tema ver [Luxemburg 2], [Davis] y [Robinson 1].

(II) Capítulo II .- Antecedentes Topológicos.

Se presentan aquí los prerrequisitos topológicos y se introducen algunos resultados de técnicas no-usuales aplicadas a topología, que ya son conocidos, y que usaremos en el capítulo III.

(III) Capítulo III .- Espacios Uniformes y su completación.

El trabajo que se realiza en estas notas está basado en el concepto de filtro sobre un conjunto, así que, vinculamos los filtros sobre X con ciertos subconjuntos de *X. Se introduce aquí el concepto de indistinguible y se le relaciona con la idea de filtro. Estudiamos, con técnicas no-usuales, espacios uniformes y en particular, exhibimos una completación de un espacio uniforme X como cierto subconjunto en *X con una uniformidad inducida por la de X.

CAPITULO I

PRESENTACION DEL MODELO NO-USUAL

1.- FILTROS

Para la construcción del modelo no-usual necesitaremos el concepto de filtro y algunas de sus propiedades.

Dado un conjunto A, denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de subconjuntos de A.

Definición: Si I es un conjunto no vacío y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$, diremos que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre I si :

(i) $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica $B \in \mathcal{F}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ implica $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) $\phi \notin \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{F}$.

Nota: Una consecuencia inmediata de la definición es que cualquier intersección finita de elementos de un filtro es también elemento del filtro.

Ejemplos:

(1) Sea I un conjunto no vacío y $A_0 \subseteq I$, $A_0 \neq \phi$.

$\mathcal{F} = \{ A \subseteq I \mid A_0 \subseteq A \}$ es un filtro sobre I.

En particular $\mathcal{F} = \{ I \}$ es un filtro sobre I

(2) Sea I un conjunto infinito.

$\mathcal{F} = \{ A \subseteq I \mid I - A \text{ es finito} \}$ es un filtro sobre I.

Ahora, sea I un conjunto no vacío y consideremos

$$\mathcal{G} = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro sobre I} \}$$

Ordenamos este conjunto por inclusión, es decir, $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Respecto a esta relación de orden, { I } es un elemento mínimo.

A un elemento máximal respecto a esta relación de orden se le llama un <u>ultrafiltro</u>, en otras palabras :

<u>Definición:</u> $\mathcal{F}$ es un <u>ultrafitro</u> sobre I si :

(1) $\mathcal{F}$ es un filtro sobre I

(2) Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}'$ es un filtro sobre I, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

<u>Ejemplo:</u>

Sea $x \in I$. Entonces $\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{P}(I) \mid x \in A \}$ es un ultrafiltro sobre I.

Daremos ahora una caracterización de ultrafiltros.

<u>Teorema 1.1.1</u> .- Son equivalentes las siguientes afirmaciones para un filtro $\mathcal{F}$ sobre I .

(1) $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre I .

(2) Si $A \subseteq I$, entonces $A \in \mathcal{F}$ o $I - A \in \mathcal{F}$.

(3) $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A_i \in \mathcal{F}$ para alguna $i = 1, \ldots, n$

(4) Si $A \subseteq I$, entonces $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \cap F \neq \phi$ para cada $F \in \mathcal{F}$

Teorema 1.1.2 .- Si $\mathcal{F}_0$ es un filtro sobre I , entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$.

Definición: Un filtro $\mathcal{F}$ se llama δ-incompleto si existe una sucesión $F_n \in \mathcal{F}$, n = 1, 2 , . . . , tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_n \notin \mathcal{F}$. Se llama δ-completo si no es δ-incompleto .

Proposición 1.1.3 .- Si un filtro $\mathcal{F}$ es δ-incompleto , entonces existe una sucesión $H_n \in \mathcal{F}$, n = 1, 2, . . . , estrictamente decreciente tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_n \notin \mathcal{F}$.

Definición: Un filtro $\mathcal{F}$ se llama libre si $\bigcap \{ F \mid F \in \mathcal{F} \} = \phi$

Proposición 1.1.4 .- Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro δ-incompleto entonces $\mathcal{F}$ es libre .

Teorema 1.1.5 .- Un ultrafiltro es δ-incompleto si y sólo si existe una partición $\{ I_n \mid n \in N \}$ de I tal que $I_n \notin \mathcal{F}$ para n = 1, 2, ...

2.- LA ESTRUCTURA S Y SUS PROPIEDADES

Sea S un conjunto , cuyos elementos llamaremos "individuos" y supongamos que para cada $x \in S$ se tiene $x \neq \phi$ y $x \cap S = \phi$. Así pues, cuando hablemos de los individuos, no consideraremos a sus elementos .

Construiremos , a partir de S , una estructura en la que aparecen todos los conjuntos que se necesitan en la matemática usual .

Definimos S_n , para n = 1, 2, . . . como sigue:

$S_0 = S$

$S_1 = S_0 \cup P(S_0)$

$S_n = S_{n-1} \cup P(S_{n-1})$

Sea $\widehat{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$. Llamaremos a $\widehat{S}$ la <u>superestructura con individuos S .</u>

Cada elemento de S se llamará un individuo de $\widehat{S}$, y cada elemento de $\widehat{S} - S$ se llamará un conjunto o entidad de $\widehat{S}$.

Notemos que $\phi \in S_1$

<u>Proposición 1.2.1</u> .-

(1) Si $x \in \widehat{S}$ entonces $x \in S$ o $x \subseteq \widehat{S}$

(2) Si $x \in \widehat{S} - S$ entonces $P(x) \in \widehat{S}$

(3) Si $y \subseteq x$ y $x \in \widehat{S} - S$ entonces $y \in \widehat{S}$

(4) Sea $x \in \widehat{S} - S$ y $x \cap S = \phi$. Si $y = \bigcup_{z \in x} z$ entonces $y \in \widehat{S}$.

(5) $S_i \in \widehat{S}$ para cada i = 0, 1, 2,...

(6) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \widehat{S}$ entonces $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \} \in S$

(7) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \widehat{S} - S$ entonces $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n \in \widehat{S}$

(8) Si $x, y \in \widehat{S}$ entonces $(x, y) \in \widehat{S}$

(9) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \widehat{S}$ y $n \geq 2$, entonces $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \widehat{S}$

Teorema 1.2.2 .- Si $x, y \in \widehat{S} - S$ entonces $x \times y \in \widehat{S}$.

Corolario 1.2.3 .- Si $x \in \widehat{S} - S$ entonces $x^n \in \widehat{S}$ para toda $n = 1, 2, \ldots$

Teorema 1.2.4 .- Si $x, y \in \widehat{S} - S$ y $f : x \to y$ es una función entonces

(1) $f \in \widehat{S}$

(2) Si $a \in x$ entonces $f(a) \in \widehat{S}$

(3) Si $A \subseteq x$ entonces $f(A) \in \widehat{S}$

Teorema 1.2.5 .- Sean $J, V \in \widehat{S} - S$, y para cada $j \in J$, sea $x_j \in V - S$.

Entonces

(1) $\bigcup_{j \in J} x_j \in \widehat{S}$

(2) $\prod_{j \in J} x_j \in \widehat{S}$

3.- LENGUAJE

Una vez construída la estructura $\widehat{S}$, es necesario establecer con cierto grado de formalidad , un lenguaje que nos permita expresar las proposiciones que hablen sobre $\widehat{S}$, así como poder determinar cuándo una proposición es verdadera o falsa .

Las fórmulas que se usan en todo lenguaje L se construyen a partir de ciertos símbolos básicos :

(I) Los símbolos atómicos de L son :

(i) Conectivos : $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, que respectivamente son "y" , "o" , "implica" , "si y sólo si" y "no".

(ii) Variables : Una sucesión infinita numerable que usualmente denotaremos por x , y ,... con o sin índices .

(iii) Cuantificadores : existencial $\exists$ y universal $\forall$

(iv) Paréntesis : Son símbolos auxiliares que se usan para agrupar fórmulas como usualmente se hace en matemáticas .

(v) Predicados Básicos : $\in$, = (pertenece a , igual , respectivamente), con un lugar abierto a izquierda y derecha de ellos .

(vi) Constantes Extralógicas : Es un conjunto de símbolos , de los cuales hay suficientes como para ser puestos en correspondencia biunívoca con las entidades de alguna superestructura que nos interese . En el caso que nos ocupa, nuestro conjunto de constantes estará en correspondencia biunívoca con todas las entidades de S , así que podemos considerar a S el conjunto de constantes del lenguaje L , y en este caso nos referiremos a S como una L-estructura .

(II) Fórmulas Atómicas : $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, donde los símbolos α , β , denotan constantes o variables .

(III) Fórmulas Bien Formadas : Las fórmulas bien formadas (f.b.f.) se obtienen de las fórmulas atómicas al aplicar sucesivamente los conectivos y cuantificadores . Los paréntesis se usan para evitar ambigüedades en la formación de las fórmulas .

Así pues, si V y W son f.b.f., entonces $V \wedge W$, $V \vee W$, $\neg V$, $V \Rightarrow W$, $V \Leftrightarrow W$, $\forall x\ (V)$, $\exists x\ (V)$, donde x denota una variable arbitraria y x no aparece en V bajo el signo de un cuantificador, son f.b.f..

En $\forall x (V)$ y $\exists x (V)$, V se llama el alcance del cuantificador.

Una variable x se llama libre en una f.b.f. si no está afectada por un cuantificador, es decir, x no aparece en la forma $\forall x$ o $\exists x$, o en el alcance de un cuantificador.

Una f.b.f. se llama proposición si cada variable está en el alcance de un cuantificador. En cualquier otro caso se llamará predicado.

Muchas de las proposiciones que aparecen en lógica se suelen probar por inducción sobre el número de cuantificadores (cuando éstos aparecen en la proposición) para lo cual notamos que cada f.b.f. es equivalente a una del tipo $V = (q_n\ x_n) \dots (q_1 x_1) W$, donde $q_1, \dots, q_n$ son $\exists$ o $\forall$ y W ya no tiene cuantificadores, es decir, cualquier fórmula puede ser escrita de tal manera que todos los cuantificadores estén al principio de ella.

En nuestro estudio sólo consideraremos aquellas f.b.f. que tienen la propiedad de que todos los cuantificadores aparecen en la forma siguiente:

$$\forall x \ \ x \in A \ \ P(x) \quad \text{y} \quad \exists x \ \ x \in A \ \ P(x)$$

donde A es una entidad de $\hat{S}$, y llamaremos a éstas f.b.f. admisibles. Esto es, una f.b.f. es admisible si el dominio de cada uno de los cuantificadores que aparecen en ella (A, en la forma anterior), es una entidad de $\hat{S}$.

Finalmente, hemos llegado a mostrar cuáles son las fórmulas que se usan para expresar propiedades o proposiciones de la estructura $\hat{S}$. Una vez que tenemos todo el conjunto de fórmulas de la teoría asociada a $\hat{S}$, sólo nos falta indicar cuál es la asignación del valor de verdad de las proposiciones.

Las fórmulas atómicas $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ con α y β constantes serán verdaderas si lo son bajo la interpretación conjuntista, es decir, $\alpha \in \beta$ es verdadera si α es un elemento de β, y $\alpha = \beta$ es verdadera si como conjuntos son iguales.

A partir de la verdad de las fórmulas atómicas se define la verdad de las fórmulas compuestas por inducción sobre el grado de complejidad, por ejemplo, $V \wedge W$ es verdadera si y sólo si V y W lo son; $\neg V$ es verdadera si y sólo si V es falsa; $\exists x \; x \in a \; V(x)$ es verdadera si y sólo si existe un elemento b de a tal que $V(b)$ es verdadera.

Las asignaciones de verdad de los demás conectivos se obtienen de las primeras dos, y para el cuantificador universal recordemos que $\forall x \, P(x) \equiv \neg\left(\exists x \, \neg P(x)\right)$.

De todo lo anterior observamos que después de asignar los valores de verdad a las fórmulas atómicas, para el resto de las fórmulas es a través del valor de verdad de conectivos desde el punto de vista de la lógica proposicional, y la asignación de verdad de proposiciones con cuantificadores es la usual.

4.- MODELO NO USUAL

Un modelo no usual de orden superior de $\hat{S}$ es una *L-estructura $*(\hat{S})$ en la cual la L-estructura $\hat{S}$ es una inmersión propia, y para la cual todas las proposiciones admisibles de $\hat{S}$ que son verdaderas en $\hat{S}$, lo son también en $*(\hat{S})$, bajo esta inmersión, con una interpretación adecuada de los símbolos en $*(\hat{S})$.

Construiremos ahora un modelo no usual de $\hat{S}$.
El conjunto de constantes con las que trabajaremos está construído a partir de $\hat{S}$ de la siguiente manera:

Consideremos I un conjunto infinito y sea

$$\hat{S}^I = \{ a : I \rightarrow \hat{S} \mid a \text{ es función} \}$$

Para la construcción de las f.b.f., como en el caso usual, se tienen los conectivos, símbolos auxiliares, cuantificadores y variables.

Dispondremos de dos predicados básicos que por similitud denotaremos $=$ y $\in$.

Para terminar la presentación de esta teoría solo falta la asignación de verdad de las f.b.f. admisibles para lo cual usaremos un ultrafiltro $\mathcal{F}$ δ-incompleto sobre I.

Nota : Para hacer hincapié de que la asignación de verdad depende del ultrafiltro dado $\mathcal{F}$, denotaremos los predicados básicos como $\underset{F}{=}$ y $\underset{F}{\in}$.

Asignación de verdad de fórmulas atómicas :

Si $a, b \in \widehat{S}^I$, entonces

$a \underset{F}{=} b$ es verdadera si y sólo si $\{ i \in I \mid a(i) = b(i) \} \in \mathcal{F}$

$a \underset{F}{\in} b$ es verdadera si y sólo si $\{ i \in I \mid a(i) \in b(i) \} \in \mathcal{F}$

Nota : Para simplificar nuestra expresión usaremos $a \underset{F}{=} b$ para expresar que la fórmula $a \underset{F}{=} b$ es verdadera y lo mismo para $a \underset{F}{\in} b$.

Una vez asignado el valor de verdad para las fórmulas atómicas , para las demás se asigna el valor de verdad en la forma usual .

Antes de continuar , sería conveniente hacer una recapitulación de lo que hemos hecho hasta ahora .

Nuestro objetivo hasta el momento ha sido tratar de formalizar la idea de lo que es una teoría asociada a un conjunto básico, y con este fin procedimos de la siguiente manera:

(1) Construímos un conjunto de constantes para referirnos a todos los conjuntos que pueden aparecer a partir de un conjunto básico.

(2) Para el desarrollo de la teoría usamos dos predicados básicos primarios, que en este caso hemos simbolizado con $=$ y $\in$.

(3) Usando conectivos, cuantificadores, paréntesis, variables, constantes y los predicados básicos, construimos las fórmulas del lenguaje que son, en nuestro caso, las fórmulas bien formadas admisibles, obteniendo así:

  (a) las proposiciones del lenguaje, que son aquellas f.b.f. admisibles que no tienen variables libres.

  (b) los predicados que son las f.b.f. admisibles que sí tienen variables libres.

(4) Una vez establecidas las proposiciones admisibles del lenguaje se construyó una asignación de verdad, que en nuestro caso, lo hicimos a partir de los predicados básicos y de ahí, por inducción sobre el grado de complejidad.

Resumiendo, hemos construido dos teorías, $\widehat{S}$ y $\widehat{S}^I$, de las cuales lo importante son sus constantes, fórmulas, predicados básicos y asignación de verdad.

En general y para fijar ideas, para $i = 1, 2$ denotamos con:

T_i = la teoría i

C_i = constantes de la teoría i

F_i = f.b.f. de la teoría i

$\underset{i}{=}$ = predicado básico de la teoría i

$\underset{i}{\in}$ = predicado básico de la teoría i

v_i = v_i : {proposiciones de la teoría i } $\longrightarrow$ { V , F }, la asignación de verdad de la teoría i .

Nuestra pretensión es vincular las dos teorías desarrolladas hasta el momento .

Observemos que si $\varphi : C_1 \longrightarrow C_2$ es una función , ésta induce otra , que denotaremos también por φ , de fórmulas asociadas a T_1 en fórmulas asociadas a T_2 :

$$W = W(a_1, \dots, a_n, \underset{1}{=}, \underset{1}{\in}) \mapsto \varphi(W) = W(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n), \underset{2}{=}, \underset{2}{\in})$$

donde $a_1, \dots, a_n$ son todas las constantes que aparecen en W , y no hacemos énfasis en remarcar que W pudo haber sido formulada con conectivos , cuantificadores , etc. , es decir , $\varphi(W)$ es la misma fórmula W , pero donde se han cambiado las constantes a_i por $\varphi(a_i)$ e $\underset{1}{=}, \underset{1}{\in}$ por $\underset{2}{=}, \underset{2}{\in}$ respectivamente .

Entonces tenemos el siguiente diagrama :

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[rr] & & C_2 \\
F_1 \arrow[rr] & & F_2 \\
\cup & & \cup \\
\{\text{prop. de } T_1\} \arrow[rr] \arrow[dr, "v_1"'] & & \{\text{prop. de } T_2\} \arrow[dl, "v_2"] \\
& \{ V , F \} &
\end{tikzcd}
$$

En nuestro caso construiremos una función $\varphi : \widehat{S} \longrightarrow \widehat{S}^I$, inmersión propia , tal que si W es una proposición bien formada admisible de la teoría usual , se tiene :

$$
\begin{array}{c}
W \text{ es verdadera respecto a } v_1 \text{ si y sólo si} \\
\varphi (W) \text{ es verdadera respecto a } v_2 \qquad\qquad (*)
\end{array}
$$

Es decir , el diagrama anterior será conmutativo en este caso .

Por otro lado construiremos , para cada $i \in I$, funciones $\psi_i : \widehat{S}^I \longrightarrow \widehat{S}$ que inducen respectivas funciones de $F\mathfrak{s}^I$ en $F\mathfrak{s}$, que , aunque no tendrán a nivel individual la capacidad de hacer verdadero el resultado como (*) , tomadas en su conjunto permitirán obtener el siguiente resultado :

Si W es una proposición bien formada en el lenguaje *L , W es verdadera respecto a v_2 si y sólo si $\psi_i (W)$ es verdadera para casi todo i de I , en el sentido que $\{ i \in I \mid \psi_i (W) \text{ es verdadera} \} \in \mathcal{F}$.

Nos proponemos, a continuación, presentar una inmersión φ de $\hat{S}$ en $\hat{S}^I$, que denotaremos $a \longmapsto {}^*a$ tal que, para cualquier fórmula verdadera V, asociada a $\hat{S}$, se tenga que *V es verdadera, lo que mostrará que la teoría no usual asociada a $\hat{S}$ es un modelo no usual de la teoría usual.

La función que consideraremos de $\hat{S}$ en $\hat{S}^I$ es la inmersión natural $a \longmapsto {}^*a$, dada por ${}^*a(i) = a$ para toda i de I, es decir, identificamos los elementos de $\hat{S}$ con las funciones constantes de $\hat{S}^I$.
Nos falta probar que bajo esta inmersión, la asignación

$$\{\text{f.b.f. admisibles asociadas a } \hat{S}\} \xrightarrow{{}^*(\ )} \{\text{f.b.f. admisibles asociadas a } \hat{S}^I\}$$

cumple con:

<u>Principio de Transferencia</u>: V es verdadera si y sólo si *V es verdadera.

La demostración, para fórmulas atómicas es inmediata, ya que se obtiene directamente de la definición. Sin embargo postergamos la demostración en general.

<u>Proposición 1.4.1.-</u>

(i) $a = b$ en $\hat{S}$ si y sólo si ${}^*a \underset{F}{=} {}^*b$ en $\hat{S}^I$

(ii) $a \in b$ en $\hat{S}$ si y sólo si ${}^*a \underset{F}{\in} {}^*b$ en $\hat{S}^I$

La demostración del Principio de Transferencia es sencilla en un sentido, pero en el otro es más delicado, por lo que no sólo de este estudio obtendremos la demostración, si no que tendremos más información de este universo no usual que nos será útil posteriormente.

Las relaciones $\underset{F}{=}$ y $\underset{F}{\in}$ en $\hat{S}^I$ tienen un comportamiento como la igualdad y pertenencia de la teoría de conjuntos, es decir,

<u>Proposición 1.4.2</u>.- Sean $a, b \in \hat{S}^I$. Entonces

(i) Es verdadera una y sólo una de

$$a \underset{F}{=} b \quad \text{o} \quad a \underset{F}{\neq} b$$

(ii) Es verdadera una y sólo una de

$$a \underset{F}{\in} b \quad \text{o} \quad a \underset{F}{\notin} b$$

<u>Proposición 1.4.3</u>.- Sean $a, b \in \hat{S}^I$. Entonces $a \underset{F}{=} b$ si y sólo si para cada $c \in \hat{S}^I$ se tiene que $a \underset{F}{\in} c$ si y sólo si $b \underset{F}{\in} c$.

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Supongamos $a \underset{F}{=} b$ y $a \underset{F}{\in} c$, donde $c \in \hat{S}^I$. Entonces

$A_1 = \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F}$ y $A_2 = \{i \in I \mid a(i) \in c(i)\} \in \mathcal{F}$

Por lo tanto $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$, pero

$$
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 &= \{i \in I \mid a(i) = b(i) \wedge a(i) \in c(i)\} \\
&= \{i \in I \mid a(i) = b(i) \wedge b(i) \in c(i)\} \\
&\subseteq \{i \in I \mid b(i) \in c(i)\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\{i \in I \mid b(i) \in c(i)\} \in \mathcal{F}$, y así $b \underset{F}{\in} c$.

Análogamente se demuestra que $b \underset{F}{\in} c$ implica $a \underset{F}{\in} c$.

$\Leftarrow$) Como $a \underset{F}{\in} \{a\}_F$, donde $\{a\}_F(i) = \{a(i)\}$ para cada $i \in I$, entonces, por hipótesis tenemos que $b \underset{F}{\in} \{a\}_F$, y esto significa que $\{i \in I \mid b(i) \in \{a\}_F(i)\} \in \mathcal{F}$

Pero $b(i) \in \{a\}_F(i)$ implica que $b(i) = a(i)$

Por lo tanto $a \underset{F}{=} b$.

□

Sea $W(a_1, \ldots, a_n, \underset{F}{=}, \underset{F}{\in})$ una f.b.f. en $\hat{S}^I$. Si $i \in I$, por $W(i)$ denotaremos a la f.b.f. en $\hat{S}$ dada por $W(a_1(i), \ldots, a_n(i), =, \in)$.

<u>Teorema 1.4.4 (Teorema de J. Løs)</u> .- Sea V una f.b.f. admisible en $\hat{S}^I$. Entonces V es verdadera si y sólo si $\{ i \in I \mid V(i) \text{ es verdadera} \} \in \mathcal{F}$

<u>Demostración</u>

Lo haremos por inducción sobre el número de ocurrencias k en V de los símbolos $\neg$, $\wedge$ y $\exists$. Los símbolos $\vee$ y $\forall$ se obtienen de los anteriores tomando $\neg \wedge$ y $\neg \exists \neg$ respectivamente.

Si $k = 0$ entonces V es de la forma $a \underset{F}{=} b$ o $a \underset{F}{\in} b$. Pero esto significa, en el primer caso, que $\{ i \in I \mid a(i) = b(i) \} \in \mathcal{F}$, y en el segundo, que $\{ i \in I \mid a(i) \in b(i) \} \in \mathcal{F}$.

Supongamos ahora que el teorema es verdadero para cada V, donde el número de ocurrencias de los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\exists$ es k, y sea W una f.b.f. admisible tal que el número de ocurrencias en W de los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\exists$ es $k+1$.

<u>1er. caso</u>: $W = \neg V$

Si W es verdadera, entonces V es falsa y esto último,por hipótesis, implica que $\{ i \in I \mid V(i)$ es falsa$\} \in \mathcal{F}$, por lo que $\{ i \in I \mid \neg V(i)$ es verdadera $\} \in \mathcal{F}$. Concluimos entonces que $\{ i \in I \mid W(i)$ es verdadera $\} \in \mathcal{F}$.

Los pasos son reversibles

<u>2do. caso</u>: $W = V_1 \wedge V_2$

Si W es verdadera entonces V_1 y V_2 son verdadera, lo que implica que $\{i \in I \mid V_1(i)$ es verdadera $\} \in \mathcal{F}$ y $\{ i \in I \mid V_2(i)$ es verdadera$\} \in \mathcal{F}$, por lo que concluimos que

$\{ i \in I \mid V_1(i)$ es verdadera $\} \cap \{ i \in I \mid V_2(i)$ es verdadera $\} =$

$\{ i \in I \mid (V_1 \wedge V_2)(i)$ es verdadera $\} \in \mathcal{F}$. Es decir,

$\{ i \in I \mid W(i)$ es verdadera $\} \in \mathcal{F}$.

Los pasos son reversibles.

<u>3er. caso</u>: $W = (\exists x)(x \underset{F}{\in} a) V(x)$

Sea $A = \{ i \in I \mid (\exists x)(x \in a(i)) V(i)(x)$ es verdadera $\}$

$\Rightarrow$) Supongamos que W es verdadera y sea $b \underset{F}{\in} a$ tal que $V(b)$ es verdadera. Así que, por hipótesis de inducción,

$$B = \{ i \in I \mid b(i) \in a(i) \wedge V(i)(b(i)) \} \in \mathcal{F}.$$

Pero como $B \subseteq A$, entonces $A \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A \in \mathcal{F}$. Para cada $i \in A$, sea $c_i \in a(i)$ tal que $V(c_i)$ es verdadera.

Definimos :

$$b(i) = \begin{cases} c_i & \text{si } i \in A \\ \phi & \text{si } i \notin A \end{cases}$$

Entonces b satisface que $b \underset{F}{\in} a$ y $V(b)$ es verdadera.

Por lo tanto $W \equiv (\exists x)(x \underset{F}{\in} a) V(x)$ es verdadera.

□

Si V es una f.b.f. admisible en $\widehat{S}$, denotaremos por $*V$ a la f.b.f. admisible en $\widehat{S}^I$, al reemplazar en V todas las constantes a que aparecen en V por las correspondientes constantes $*a$, sin cambiar las variables y los paréntesis.

Teorema 1.4.5 (Principio de Transferencia).- Una proposición admisible V en $\widehat{S}$ es verdadera si y sólo si $*V$ es verdadera en $\widehat{S}^I$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que V es verdadera.

Para demostrar que $^*V$ es verdadera usaremos el Teorema de Los, es decir, veremos que $A = \{ i \in I \mid {}^*V(i) \text{ es verdadera} \} \in \mathcal{F}$.

Pero $^*V(i) \equiv V$. Entonces $A = I$ y por ser $\mathcal{F}$ un filtro, tenemos entonces que $A \in \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $^*V$ es verdadera.

$\Leftarrow$) Supongamos que $^*V$ es verdadera. Entonces, por el Teorema de Los, $A = \{ i \in I \mid {}^*V(i) \text{ es verdadera} \} \in \mathcal{F}$, y como $\phi \notin \mathcal{F}$, entonces $A \neq \phi$ y así $^*V(i)$ (que sabemos es V) es verdadera para alguna i de I. Concluimos, entonces, que V es verdadera.

$\square$

A partir de elementos de $\hat{S}^I$ podemos formar otros, tomando f.b.f. admisibles en $\hat{S}^I$, como sigue:

Si $a, a_1, \ldots, a_n$ son elementos de $\hat{S}^I$ y $V(x)$ es una f.b.f. admisible de S^I, donde x es una variable libre (y cualesquiera otras están ligadas), definimos $\{ x \in_F a \mid V(x; a_1, \ldots, a_n) \}_F$ como el elemento de $\hat{S}^I$ dado por:

$$\{ x \in_F a \mid V(x; a_1, \ldots, a_n)\}_F (i) = \left\{ x \in a(i) \mid V(x; a_1(i), \ldots, a_n(i))\right\}$$

Veamos algunas construcciones basadas en la definición anterior, y por su similitud a las construcciones usuales introduciremos notaciones conocidas.

Sean $a, a_1, \ldots, a_n \in_F \hat{S}^I$, $i \in I$

(1) $\{a\}_F(i) = \{a(i)\}$

(2) $(a_1 \underset{F}{\cup} \ldots \underset{F}{\cup} a_n)(i) = a_1(i) \cup \ldots \cup a_n(i)$

(3) $(a_1 \underset{F}{\cap} \ldots \underset{F}{\cap} a_n)(i) = a_1(i) \cap \ldots \cap a_n(i)$

(4) $(a_1 \underset{F}{-} a_2)(i) = a_1(i) - a_2(i)$

(5) $\{a_1, \ldots, a_n\}_F(i) = \{a_1(i), \ldots, a_n(i)\}$

(6) $(a_1, \ldots, a_n)_F(i) = (a_1(i), \ldots, a_n(i))$

(7) $(a_1 \underset{F}{\times} \ldots \underset{F}{\times} a_n)(i) = (a_1(i) \times \ldots \times a_n(i))$

(8) Si b es una relación binaria en S^I y $b \underset{F}{\subseteq} c \times d$

$(\operatorname{dom} b)_F(i) = \operatorname{dom} b(i)$

$(\operatorname{rang} b)_F(i) = \operatorname{rang} b(i)$

Se puede ver fácilmente que :

(1) $\{a\}_F \underset{F}{=} \{x \mid x \underset{F}{=} a\}$

(2) $a_1 \underset{F}{\cup} \ldots \underset{F}{\cup} a_n \underset{F}{=} \{x \mid x \underset{F}{\in} a_1 \vee \ldots \vee x \underset{F}{\in} a_n\}_F$

(3) $a_1 \underset{F}{\cap} \ldots \underset{F}{\cap} a_n \underset{F}{=} \{x \mid x \underset{F}{\in} a_1 \wedge \ldots \wedge x \underset{F}{\in} a_n\}_F$

(4) $a_1 \underset{F}{-} a_2 \underset{F}{=} \{x \mid x \underset{F}{\in} a_1 \wedge x \underset{F}{\notin} a_2\}_F$

(5) $\{a_1, \ldots, a_n\}_F \underset{F}{=} \{x \mid x \underset{F}{=} a_1 \vee \ldots \vee x \underset{F}{=} a_n\}_F$

(6) $(a_1, \ldots, a_n)_F \underset{F}{=} \{\{a_1\}_F, \{a_1, a_2\}_F, \ldots, \{a_1, \ldots, a_n\}_F\}_F$

(7) $a_1 \underset{F}{\times} \ldots \underset{F}{\times} a_n \underset{F}{=} \{y \mid (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(x_1 \underset{F}{\in} a_1) \ldots (x_n \underset{F}{\in} a_n)\, y \underset{F}{=}$

$(x_1, \ldots, x_n)_F\}_F$

La inmersión de $\widehat{S}$ en $\widehat{S}^I$, $a \longmapsto {}^*a$ con ${}^*a(i) = a$ para toda i de I, tiene las siguientes propiedades :

Consideremos ϕ, el conjunto vacío . Recordemos que ${}^*\phi(i) = \phi$ para toda i de I , así que se cumple , por ejemplo , que ${}^*\phi \underset{F}{\subsetneq} a$ para cualquier conjunto a de $\widehat{S}^I$. Por similitud , denotaremos ${}^*\phi = \phi$.

(1) Si $a, b \in \widehat{S}$ y $a \subsetneq b$ entonces ${}^*a \underset{F}{\subsetneq} {}^*b$.

(2) Si $a, b \in \widehat{S}$ y $a \in b$ entonces ${}^*a \underset{F}{\in} {}^*b$.

(3) Para cada a en $\widehat{S}$, ${}^*\{a\} \underset{F}{=} \{{}^*a\}_F$.

(4) Si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos de $\widehat{S}$, entonces

(i) Si $a_1, \ldots, a_n \notin S$, se tiene :

$$ {}^*\left[\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right] \underset{F}{=} \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i \quad \text{y} \quad {}^*\left[\bigcap_{i=1}^{n} a_i\right] \underset{F}{=} \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i $$

(ii) ${}^*\{a_1, \ldots, a_n\} \underset{F}{=} \{{}^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}_F$

(iii) ${}^*(a_1, \ldots, a_n) \underset{F}{=} ({}^*a_1, \ldots, {}^*a_n)_F$

(iv) Si $a_1, \ldots, a_n \notin S$

$$ {}^*(a_1 \times \ldots \times a_n) \underset{F}{=} {}^*a_1 \underset{F}{\times} \ldots \underset{F}{\times} {}^*a_n $$

(5) Si $a, b \in \widehat{S} - S$ entonces ${}^*(a - b) \underset{F}{=} {}^*a \underset{F}{-} {}^*b$.

(6) Si $b \in \widehat{S}$ es una relación binaria , entonces

(i) ${}^*(\text{dom } b) \underset{F}{=} \text{dom } {}^*b$

(ii) ${}^*(\text{rang } b) \underset{F}{=} \text{rang } {}^*b$

(iii) Para cada $a \in \mathrm{dom}\, b$ se tiene $^*(b(a)) \underset{F}{=} {}^*b(^*a)$.

Teorema 1.4.6.- Sea $V(x)$ una f.b.f. admisible en $\hat{S}$ con variable libre x, y sea $A = \{ x \in a \mid V(x) \}$ donde a es una entidad arbitraria de $\hat{S}$. Entonces $^*A \underset{F}{=} \{ x \underset{F}{\in} {}^*a \mid {}^*V(x) \}$.

Demostración

Veremos que $^*A(i) = \{ x \underset{F}{\in} {}^*a \mid {}^*V(x) \}(i)$ para cada $i \in I$.

Sea $i \in I$. $^*A(i) = A$, y por otro lado

$$[\{ x \underset{F}{\in} {}^*a \mid {}^*V(x)\}_F](i) = \{ x \in {}^*a(i) \mid {}^*V(x)(i)\}$$
$$= \{ x \in a \mid V(x) \}$$
$$= A$$

Por lo tanto

$$^*A \underset{F}{=} \{ x \underset{F}{\in} {}^*a \mid {}^*V(x) \}_F$$

□

La inmersión $\hat{S} \longrightarrow {}^*\hat{S}$ nos permite identificar cada elemento a de S con $^*a$ de $^*S$ como nos lo dice el siguiente teorema :

Teorema 1.4.7.- Si $A \subseteq S$, entonces $A \subseteq {}^*A$ y $^*A \cap S = A$.

Demostración

Sea $a \in A$. Por el Principio de Transferencia tenemos que $^*a \in {}^*A$, y como $^*a = a$, entonces $a \in {}^*A$. Esto muestra que $A \subseteq {}^*A$ y también que $A \subseteq {}^*A \cap S$.

Inversamente , si $a \in {}^*A \cap S$, como $a \in S$, entonces ${}^*a = a$ y así , es verdad que ${}^*a \in {}^*A$ y por el Principio de Transferencia , $a \in A$.

$\square$

5.- ENTIDADES INTERNAS

Definición : Una entidad a de $\hat{S}^I$ se llama interna si existe un número natural n tal que $a \underset{F}{\in} {}^*S_n$. Las entidades que no son internas se llaman externas .

Definición : Una entidad interna se llama usual si existe $b \in \hat{S}$ tal que ${}^*b \underset{F}{=} a$.

El conjunto $\bigcup_{n \geq 0} {}^*S_n$ de todas las entidades internas se llama la ultrapotencia de S con respecto al ultrafiltro F , y lo denotaremos por ${}^*\hat{S}$.

Es importante hacer notar que existen entidades internas que no son usuales . Esto lo veremos en el siguiente teorema , donde usaremos el hecho de que el ultrafiltro F es δ-incompleto .

Teorema 1.5.1 : Existen entidades internas que no son usuales .

Demostración :

Sea $a \in \hat{S} - S_0$ tal que a contiene una infinidad de elementos , y sea $\{ b_n \mid n \in N \} \subseteq a$, donde $b_n \neq b_m$ si $n \neq m$.

Tomemos ahora una partición $\{ I_n \}_{n \in N}$ de I tal que $I_n \notin \mathcal{F}$. Esto lo podemos hacer ya que $\mathcal{F}$ es δ-incompleto .

Definimos $b \in {}^*S$ por $b(i) = b_n$ si $i \in I_n$. Tenemos que :

1o./ $b \underset{F}{\in} {}^*a$, ya que $\{ i \in I \mid b(i) \in {}^*a(i) \} = I \in \mathcal{F}$.

2o./ b es interno :

Como $a \in S_n$ para alguna $n > 0$, entonces , para cada $i \in I$, $b(i) \in a$. Entonces $b(i) \in S_{n-1}$ y así $b \underset{F}{\in} {}^*S_{n-1}$.

3o/ b no es usual

Supongamos que $b \underset{F}{=} {}^*c$, donde $c \in \hat{S}$. Entonces

$$A = \{ i \in I \mid b(i) = {}^*c(i) \} \in \mathcal{F} .$$

Por lo tanto $A \neq \phi$, y por la definición de b , entonces $A = I_n$ para alguna $n \in N$, lo que contradice que $I_n \notin \mathcal{F}$. Por lo tanto , b no puede ser usual .

$\square$

<u>Teorema 1.5.2</u>.- Una entidad a es interna si y sólo si a es un elemento de una entidad usual .

<u>Teorema 1.5.3</u>.- Si $a \in b$ y $b \in {}^*S_n$ $(n \geq 1)$, entonces $a \in {}^*S_{n-1}$, es decir , cada elemento de una entidad interna es interno .

Uno de los problemas que se presentan en las aplicaciones es poder decidir si un conjunto de entidades internas es interno o no . Por esto , un método que se usa con frecuencia es aplicar de alguna manera el Principio de Transferencia , encontrando que este conjunto viola una cierta propiedad que debería poseer .

Definición.- Una relación R de A a B, se llama concurrente si dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(R)$ existe $b \in B$ tal que $(a_1, b), \ldots, (a_n, b) \in R$.

Por último , un resultado muy usado en las aplicaciones de esta construcción es el siguiente teorema :

Teorema 1.5.4 (Teorema de Concurrencia) .- Si R es una relación de A a B que es concurrente en S, entonces existe $\beta \in {}^*B$ tal que para cada $a \in \mathrm{dom}(R)$, $({}^*a, \beta) \in {}^*R$.

Para la demostración se construye un I específico y se considera un ultrafiltro , que hace verdadero el teorema . Así que en las aplicaciones donde se necesita usar el Teorema de Concurrencia se supone que el modelo tiene esta propiedad .

EJEMPLO

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales y supongamos $\mathbf{R} \subseteq S$. Como es un campo ordenado, las operaciones y la relación de orden pueden ser extendidas a $^*\mathbf{R}$ .Para simplificar la notación denotaremos estas extensiones por los mismos símbolos , es decir , si $a,b \in {}^*\mathbf{R}$ entonces $a + b$ denotará $a \,{}^*\!+ b$, etc . Usando el Principio de Transferencia , podemos concluir que $({}^*\mathbf{R}, +, \cdot, <)$ es un campo ordenado que tiene a $(\mathbf{R}, +, \cdot, <)$ como subcampo ordenado .

A cada elemento de $^*\mathbf{R}$ lo llamaremos <u>hiperreal</u> .

Si $\mathbf{N}$ es el conjunto de los números naturales ,como $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, entonces por el Teorema 1.5.1 tenemos que $\mathbf{N} \subset {}^*\mathbf{N} \subseteq {}^*\mathbf{R}$, donde $\mathbf{N} \neq {}^*\mathbf{N}$.

Investiguemos un poco cómo es $^*\mathbf{N}$.

<u>Teorema 1</u>.- Si $H \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ entonces $H > n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

<u>Demostración</u>

Sea $H \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ y supongamos que $H \leq n$ para alguna $n \in \mathbf{N}$, y sea n_0 la mínima n con esta propiedad .

Por otro lado $H \geq 0$ para toda $H \in {}^*\mathbf{N}$ ya que , $\forall\, n \in \mathbf{N}\ n \geq 0$, y por transferencia, $\forall\, n \in {}^*\mathbf{N}\ n \geq 0$. Como $H \neq 0$ ya que $H \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$, tenemos que $0 < H \leq n_0$, y de aquí

$$n_0 - 1 \leq H \leq n_0 .$$

Aplicando el Principio de Transferencia a la fórmula

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall m \in \mathbf{N}\ n - 1 \leq m \leq n \Rightarrow m = n - 1 \vee m = n$$

tenemos que

$$\forall n \in {}^*\mathbf{N} \ \forall m \in {}^*\mathbf{N} \ n-1 \leq m \leq n \Rightarrow m = n-1 \ \vee \ m = n$$

Por lo tanto $H = n_0 - 1$ o $H = n_0$. Pero esto último es imposible puesto que $H \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$. Concluimos entonces que $H > n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

$\square$

<u>Corolario</u> .- Existe $H \in {}^*\mathbf{R}$ tal que $H > r$ para todo $r \in \mathbf{R}^+$.

<u>Demostración</u>

Es inmediato por la propiedad arquimediana de $\mathbf{R}$.

Hemos demostrado entonces que existen en ${}^*\mathbf{R}$ elementos H que son mayores que cualquier número real, y como ${}^*\mathbf{R}$ es un campo entonces H^{-1} es positivo pero menor que cualquier número real positivo.

<u>Definición</u> : Sea α un número hiperreal. α se llama <u>finito</u> si existen números reales r_1 y r_2 tales que $r_1 \leq \alpha \leq r_2$. α se llama <u>infinito</u> si no es finito. α se llama <u>infinitesimal</u> si $|\alpha| < r$ para todo número real positivo r.

<u>Observación</u> : Notemos de la definición que el único número real que es infinitesimal es 0.

<u>Definición</u> : Dos números hiperreales α y β están infinitamente cercanos, y lo denotaremos por $\alpha \approx \beta$, si $\alpha - \beta$ es infinitesimal.

Teorema 2 : $\approx$ es una relación de equivalencia en $^*\mathbf{R}$.

Teorema 3 : Si a, b, c, d son números hiperreales tales que $a \approx b$ y $c \approx d$, entonces :

(1) $a + c \approx b + d$

Teorema 4 : Cada número hiperreal finito está infinitamente cercano a uno y sólo un número real .

Demostración

Sea α un hiperreal finito con $\alpha \notin \mathbf{R}$. Entonces existen números reales a y b tales que $a < \alpha < b$.

Sea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < \alpha\}$. Demostraremos que el supremo de A está infinitamente cercano a α .

$A \neq \phi$ ya que $a \in A$. Además A está acotado superiormente por b . Entonces A tiene supremo que denotamos por r_0 .

Probaremos que para todo $r \in \mathbf{R}^-$ $|r_0 - \alpha| < r$.

Sea $r \in \mathbf{R}^-$. Como $r_0 = \sup. A$, entonces $r_0 - r$ ya no es cota superior de A , así que existe $x \in A$ tal que $r_0 - r < x$, y como $x < \alpha$, entonces $r_0 - \alpha < r$.

Por otro lado , $\alpha < r_0 + r$ ya que si $r_0 + r < \alpha$ entonces $r_0 + r \in A$ y así $r_0 + r \leq r_0$ lo que no puede suceder ya que r es positivo. Entonces $-r < r_0 - \alpha$ y de aquí $|r_0 - \alpha| < r$.

Por lo tanto $r_0 - \alpha$ es infinitesimal y entonces $\alpha \approx r_0$. Además como $\approx$ es transitiva , y por la observación anterior tenemos que r_0 es único .

CAPITULO II

1.- ANTECEDENTES TOPOLÓGICOS

En este capítulo presentaremos los prerrequisitos topológicos para el tercer capítulo ; además introduciremos definiciones equivalentes en el modelo no usual , de algunos tipos de espacios topológicos .

Sea X un conjunto y $\tau \subseteq \wp(X)$.

Definición .- (X, τ) es un espacio topológico si se cumplen las tres condiciones siguientes :

(i) Si $U, W \in \tau$ entonces $U \cap W \in \tau$

(ii) Si $U_i \in \tau$ para cada $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

(iii) $\phi \in \tau, X \in \tau$

Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos .

Recordemos que para dar una topologia sobre un conjunto X , es suficiente , para cada elemento x de X , exhibir un sistema de vecindades de x .

Definición .- Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Una vecindad de A es cualquier subconjunto de X que contiene un abierto que contiene a A.

Proposición 2.1.1 .- Un subconjunto A de un espacio topológico X es vecindad de cada uno de sus puntos si y sólo si A es abierto.

Proposición 2.1.2 .- Sea (X, τ) un espacio topológico y para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}(x)$ el conjunto de todas las vecindades de x. Entonces $\mathcal{B}(x)$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Si $A \in \mathcal{B}(x)$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{B}(x)$.

(2) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(x)$ entonces $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{B}(x)$

(3) $x \in A$ para cada $A \in \mathcal{B}(x)$

(4) Si $A \in \mathcal{B}(x)$ entonces existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que para cada $y \in B$, $A \in \mathcal{B}(y)$.

Estas cuatro propiedades del conjunto de vecindades de x determinan la topología, es decir:

Proposición 2.1.3 .- Supongamos que para cada elemento x de un conjunto X se tiene dado un conjunto $\mathcal{B}(x)$ de subconjuntos de X que satisfacen las cuatro propiedades de la proposición 2.1.2 . Entonces existe una única topología τ sobre X, tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es el conjunto de vecindades de x en esta topología.

Definición .- En un espacio topológico (X, τ), una base (o sistema fundamental) de vecindades de un punto x de X es cualquier conjunto de vecindades $\mathcal{D}$ de x tal que para cada vecindad A de x existe una vecindad $B \in \mathcal{D}$ tal que $B \subseteq A$.

Definición .- Una base de la topología τ de un espacio topológico X es cualquier conjunto $\eta \subseteq \tau$ tal que cada subconjunto abierto de X es unión de conjuntos que pertenecen a η .

Proposición 2.1.4 .- Sea (X , τ) un espacio topológico . Para que un conjunto $\eta \subseteq \tau$ sea una base de τ es necesario y suficiente que para cada $x \in X$, $\{ A \in \eta \mid x \in A \}$ sea un sistema fundamental de vecindades de x .

Definición .- Sea $f : X \rightarrow Y$ una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y y sea $x \in X$. f es continua en x si para cada vecindad B de $f(x)$, $f^{-1}(B)$ es una vecindad de x .

2 .- FILTROS

En el capítulo I introdujimos la definición de filtro y ultrafiltro y dimos algunos ejemplos . En esta sección estudiaremos filtros sobre un espacio topológico .

Definición .- Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ sobre un conjunto X, se dice que $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Si, además $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ se dice que $\mathcal{F}'$ es estrictamente más fino que $\mathcal{F}$.

Proposición 2.2.1 .- Una condición necesaria y suficiente para que exista un filtro sobre X que contenga a un conjunto $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X, es que cualquier subconjunto finito de $\mathcal{G}$ tenga intersección no vacía.

Proposición 2.2.2 .- Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\{ A \subseteq X \mid A \supseteq B$, para alguna $B \in \mathcal{B} \}$ es un filtro si y sólo si $\mathcal{B}$ tiene las siguientes propiedades:

(1) La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{B}$ contiene un conjunto de $\mathcal{B}$.

(2) $\mathcal{B} \neq \phi$ y $\phi \notin \mathcal{B}$.

Definición .- Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ es una base de filtro si satisface (1) y (2) de la proposición 2.2.2. Dos bases de filtro son equivalentes si generan el mismo filtro.

Proposición 2.2.3 .- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ es una base de $\mathcal{F}$ si y sólo si cada conjunto de $\mathcal{F}$ contiene un conjunto de $\mathcal{G}$.

Proposición 2.2.4 .- Dos bases de filtro $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ sobre un conjunto X son equivalentes si y sólo si cada conjunto de $\mathcal{G}$ contiene un conjunto de $\mathcal{G}'$ y cada conjunto de $\mathcal{G}'$ contiene un conjunto de $\mathcal{G}$.

Ejemplos :

(1) Sea X un conjunto con más de un elemento y $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A_1 \cap A_2 \neq \phi$. Sean

$\mathcal{G} = \{ A_1, A_2, A_1 \cap A_2 \}$ y $\mathcal{F} = \{ B \subseteq X \mid B \supseteq C$ para alguna $C \in \mathcal{G} \}$

$\mathcal{G}$ es una base de $\mathcal{F}$.

(2) El conjunto de todas las vecindades de un punto x de un espacio topológico X es un filtro sobre X y cualquier sistema fundamental de vecindades de x es una base de este filtro.

<u>Definición</u> .- Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. $\mathcal{F}$ converge a un punto x de X (y se denota $\mathcal{F} \to x$) si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades $\mathcal{B}(x)$ de x. A x se le llama punto límite de $\mathcal{F}$. Una base $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ converge a x si $\mathcal{F}$ converge a x.

<u>Proposición 2.2.5</u> .- Una base de filtro $\mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X converge a x si y sólo si cada conjunto de un sistema fundamental de vecindades de x contiene a un conjunto de $\mathcal{G}$.

<u>Proposición 2.2.6</u> .- Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X converge a un punto x si y sólo si cada ultrafiltro que es más fino que $\mathcal{F}$ converge a x.

<u>Definición</u> .- Sea X un espacio topológico y $x \in X$. x es punto de acumulación de una base de filtro $\mathcal{G}$ sobre X si $x \in \bigcap \{ \overline{A} \mid A \in \mathcal{G} \}$, donde $\overline{A}$ es la cerradura de A.

Definición .- Dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$' se mezclan si cada conjunto de $\mathcal{F}$ intersecta a cada conjunto de $\mathcal{F}$'.

Proposición 2.2.7 .- Un punto x de un espacio topológico X es de acumulación de un filtro $\mathcal{G}$ si y sólo si $\mathcal{G}$ y el filtro de vecindades de x se mezclan.

Proposición 2.2.8 .- Un punto x de un espacio topológico X es de acumulación de un filtro $\mathcal{F}$ si y sólo si existe un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que converge a x.

Corolario 2.2.9 .- Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ converge a un punto x si y sólo si x es un punto de acumulación de $\mathcal{U}$.

Proposición 2.2.10 .- El conjunto de puntos de acumulación de una base de filtro sobre un espacio topológico X es cerrado en X.

3.- ALGUNOS TIPOS DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En esta sección presentaremos algunos tipos de espacios topológicos, con los que trabajaremos en el capitulo III.

Definición .- Sea (X, τ) un espacio topológico.

1.- X es $\mathbf{T_1}$ si dados $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un abierto que contiene a p y no a q, y un abierto que contiene a q y no a p.

2.- X es $\mathbf{T_2}$ (o de **Hausdorff**) si cada par de puntos distintos de X tienen vecindades ajenas.

3.- X es **completamente regular** si para cada $B \subseteq X$ cerrado y cada $p \in X - B$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(p) = 0$ y $B \subseteq f^{-1}(1)$.

4.- X es **compacto** si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Para el caso de espacios uniformes trabajaremos con la definición introducida por [Bourbaki.] :

Definición .- Una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto no vacio X es un conjunto de subconjuntos de $X \times X$ que satisfacen :

(1) Cada subconjunto de $X \times X$ que contiene a un elemento de $\mathcal{U}$ pertenece a $\mathcal{U}$.

(2) Cada intersección finita de elementos de $\mathcal{U}$ pertenece a $\mathcal{U}$.

(3) Cada elemento de $\mathcal{U}$ contiene a la diagonal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$.

(4) Si $V \in \mathcal{U}$ entonces $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

(5) Para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subseteq V$.

donde

$$V^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in V \} \text{ y}$$

$$W^2 = \{ (x,z) \mid \exists y \in X \;\; (x,y),(y,z) \in W \}$$

A los conjuntos de la uniformidad se les llama <u>conectores</u>.

De la definición podemos ver claramente que una uniformidad sobre X es un filtro sobre $X \times X$, por lo que estaremos en condiciones de aplicar los resultados obtenidos sobre filtros.

Dada una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X y $V \in \mathcal{U}$ definimos:

$$V(x) = \{ y \in X \mid (x,y) \in V \}$$

<u>Definición</u>.- Un conjunto $\mathcal{V}$ de subconjuntos de $X \times X$ es un sistema fundamental de conectores de una uniformidad sobre X si $\mathcal{V}$ satisface:

(1) La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{V}$ contiene un conjunto de $\mathcal{V}$.

(2) Cada conjunto de $\mathcal{V}$ contiene a la diagonal Δ.

(3) Para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $V' \in \mathcal{V}$ tal que $V' \subseteq V^{-1}$.

(4) Para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W^2 \subseteq V$.

<u>Proposición 2.3.1</u> .- Sea X un conjunto, $\mathcal{U}$ una uniformidad sobre X y para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}(x) = \{ V(x) \mid V \in \mathcal{U} \}$. Entonces existe una única topología sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ es el filtro de vecindades de x en esta topología.

<u>Demostración</u>

Utilizando la proposición 2.1.3 es suficiente demostrar que $\mathcal{B}(x)$ satisface las cuatro propiedades de la proposición 2.1.2 :

(1) Si $V(x) \in \mathcal{B}(x)$ y $V(x) \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{B}(x)$

Sea $U = V \cup (\{x\} \times B)$. Como $V \subseteq U$ entonces $U \in \mathcal{U}$. Además

$$\begin{aligned} U(x) &= (V \cup (\{x\} \times B))(x) \\ &= V(x) \cup (\{x\} \times B)(x) \\ &= V(x) \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B = U(x) \in \mathcal{B}(x)$.

(2) Si $V_1(x), \ldots, V_n(x) \in \mathcal{B}(x)$ entonces $V_1(x) \cap \ldots \cap V_n(x) \in \mathcal{B}(x)$.

Esto es inmediato, ya que

$V_1(x) \cap \ldots \cap V_n(x) = (V_1 \cap \ldots \cap V_n)(x)$

(3) $x \in V(x) \quad \forall\ V \in \mathcal{U}$, ya que $\Delta_X \subseteq V$.

(4) Si $V(x) \in \mathcal{B}(x)$ entonces existe $W(x) \in \mathcal{B}(x)$ tal que para cada $y \in W(x)$, $V(x) \in \mathcal{B}(y)$.

Sea $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subseteq V$. Entonces $W(x) \subseteq V(x)$.

Para cada $y \in W(x)$, veremos que $W(y) \subseteq V(x)$ y de aquí, por (1), $V(x)$ será una vecindad de y.

Si $z \in W(y)$ entonces $(y, z) \in W$. Pero como $(x, y) \in W$ entonces $(x, z) \in W^2$ y, por lo tanto, $(x, z) \in V$.

Concluimos que $z \in V(x)$.

$\square$

<u>Definición</u>.- Un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es un conjunto X junto con una uniformidad $\mathcal{U}$.

<u>Definición</u>.- Sean X y X' espacios uniformes. Una función $f: X \to X'$ es uniformemente continua si para cada conector V' de X' existe un conector V de X tal que $(x, y) \in V$ implica $(f(x), f(y)) \in V'$.

Proposición 2.3.2 .- Cada función uniformemente continua entre dos espacios uniformes es continua.

Definición.- Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio uniforme $(X , \mathcal{U})$ es un filtro de Cauchy si para cada conector V de $\mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \times A \subseteq V$.

Proposición 2.3.3 .- Si $\mathcal{F}$ es un filtro minimal de Cauchy, entonces cada conjunto de $\mathcal{F}$ tiene interior no vacío que además pertenece a $\mathcal{F}$.

Proposición 2.3.4 .- Sea X un espacio uniforme y $x \in X$. El filtro de vecindades $\mathcal{B}(x)$ de x es un filtro de Cauchy minimal.

Proposición 2.3.5 .- Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, entonces x es punto de acumulación de $\mathcal{F}$ si y sólo si x es punto límite de $\mathcal{F}$.

Proposición 2.3.6 .- Sobre un espacio uniforme $(X , \mathcal{U})$, cada filtro convergente es de Cauchy.

En general, el recíproco de la proposición 2.3.5 no es verdadero, es decir, un filtro de Cauchy en un espacio uniforme no necesariamente es convergente.

Definición.- Un espacio uniforme es completo si cada filtro de Cauchy converge.

Según la proposición 2.3.5 y por la definición de espacio completo, en un espacio completo los filtros de Cauchy son los convergentes.

Teorema 2.3.7 .- Sea $V_0, V_1, \ldots$ una sucesión de conectores de un espacio uniforme X, donde $V_0 = X \times X$, $V_{i+1}^3 \subseteq V_i$ para $i = 1,2, \ldots$.
Entonces existe una seudométrica ρ sobre X tal que para cada $i \geq 1$

$$\{ (x, y) \mid \rho(x, y) < \frac{1}{2^i} \} \subseteq V_i \subseteq \{ (x, y) \mid \rho(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \}$$

Demostración

Sean $x, y \in X$ y consideremos todas las sucesiones finitas $x_0, x_1, \ldots, x_k$ tal que $x_0 = x$ y $x_k = y$, y $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$.
Definimos $\rho(x, y)$ como la máxima cota inferior de los números

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}}$$

Se puede ver fácilmente que ρ es una seudométrica.
Por otro lado, de la definición de ρ se sigue que

$$V_i \subseteq \{ (x, y) \mid \rho(x, y) \leq \frac{1}{2^i} \}$$

Ahora veremos que si $\rho(x, y) < \frac{1}{2^i}$ entonces $(x, y) \in V_i$, es decir, si $x_0, x_1, \ldots, x_k$ es una sucesión tal que $x_0 = x$ y $x_k = y$ y $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, entonces

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_k}} < \frac{1}{2^i} \Rightarrow (x_0, x_k) \in V_i \qquad (*)$$

Demostraremos esta última afirmación por inducción sobre k.
Empecemos con $k = 1$

Si $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^i}$ y $(x_0, x_1) \in V_{i_1}$ entonces $i < i_1$ y así $V_{i_1} \subseteq V_i$ y, por lo tanto, $(x_0, x_1) \in V_i$.

Supongamos ahora $m > 1$ y que $(*)$ es verdadero para toda $k < m$

Sea $\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$ con $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$ para $j = 1, \ldots, m$

entonces sucede que $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i-1}}$ o $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Podemos suponer que $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{1}{2^{i-1}}$.

Sea $n \in \mathbf{N}$ el número máximo menor o igual a m-1 tal que

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_n}} < \frac{1}{2^{i+1}}$$

Si $n < m-1$ entonces

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_n}} + \frac{1}{2^{i_{n+1}}} \geq \frac{1}{2^{i+1}}$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2^{i_{n+2}}} + \ldots + \frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^{i+1}}$$

y, así, por hipótesis de inducción, tenemos que $(x_0, x_n) \in V_{i-1}$ y $(x_{n+1}, x_m) \in V_{i-1}$.

Pero $\frac{1}{2^{i_{n+1}}} < \frac{1}{2^i}$ implica que $i + 1 \leq i_{n+1}$ y $(x_n, x_{n+1}) \in V_{i_{n+1}} \subseteq V_{i+1}$ y así concluimos que $(x_0, x_m) \in V_{i+1}{}^3 \subseteq V_i$.

Si $n = m-1$ entonces

$(x_0, x_{m-1}) \in V_{i-1}$ y como $\frac{1}{2^{i_m}} < \frac{1}{2^i}$ entonces $i + 1 \leq i_m$ y así $(x_{m-1}, x_m) \in V_{i-1}$ por lo que $(x_0, x_m) \in V_{i-1}{}^2 \subseteq V_i$.

□

Proposición 2.3.8 .- Si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme y τ la topología inducida por $\mathcal{U}$, entonces (X, τ) es completamente regular.

Demostración

Sean $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$.

Como $X - F$ es abierto que contiene a x, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) \subseteq X - F$ y así $F \cap V(x) = \phi$.

Definimos $f : X \to [0, 1]$ por $f(y) = \min\{1, \rho_0(x, y)\}$, donde $\rho_0 = 2\rho$ y ρ es la seudométrica del teorema 2.3.6 con $V_1 = V$.

Entonces $f(x) = \min\{1, \rho_0(x, x)\} = 0$ y $f(F) = 1$ ya que $\rho_0(x, y) \geq 1$ para cada $y \in F$ (porque si $\rho_0(x, y) < 1$ entonces $y \in V(x)$).

$\square$

Definición.- Un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X si $\overline{A} = X$, es decir, si cada conjunto abierto no vacío G de X intersecta a A.

Proposición 2.3.9 .- Sea X un espacio uniforme y sea A un subconjunto denso de X tal que cada base de filtro de Cauchy sobre A converge en X. Entonces X es completo.

Teorema 2.3.10 .- (Teorema de Completación) .- Sea $(X , \mathcal{U})$ un espacio uniforme . Entonces existe un espacio uniforme completo $\overline{X}$, y una función uniformemente continua $\iota : X \to \overline{X}$ tal que $\iota (X)$ es denso en $\overline{X}$.

Demostración

Sea $\overline{X}$ el conjunto de filtros de Cauchy minimales sobre X . Definiremos una estructura uniforme sobre $\overline{X}$ como sigue :

Sea V un conector simétrico (e.d. $V = V^{-1}$) de X y sea

$$\overline{V} = \{ (\mathcal{H} , \mathcal{D}) \mid \mathcal{H},\mathcal{D} \in \overline{X} \text{ y existe } A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D} \text{ tal que } A \times A \subseteq V \}$$

Demostraremos que $\mathcal{V} = \{ \overline{V} \mid V$ es conector de $X \}$ es un sistema fundamental de conectores de una estructura uniforme sobre $\overline{X}$:

(1) Si V_1 , V_2 son conectores simétricos de X , entonces $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \overline{V_1 \cap V_2}$ ya que si $(\mathcal{H} , \mathcal{D}) \in \overline{V_1} \cap \overline{V_2}$, tenemos que existe $A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ tal que $A \times A \subseteq V_1$, y existe $B \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ tal que $B \times B \subseteq V_2$, y así $(A \cap B) \times (A \cap B) \subseteq V_1 \cap V_2$, con $A \cap B \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$. Por lo tanto $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \in \mathcal{V}$.

(2) Puesto que cada $\mathcal{H} \in \overline{X}$ es un filtro de Cauchy , entonces para cada conector simétrico V , existe $A \in \mathcal{H}$ tal que $A \times A \subseteq V$ y así $(\mathcal{H} , \mathcal{H}) \in \overline{V}$ para todo conector simétrico V .

(3) Los conjuntos $\overline{V}$ son simétricos por definición , así que $\overline{V} = \overline{V}^{-1}$.

(4) Sean V y W conectores simétricos de X tales que $W^2 \subseteq V$. Entonces $\overline{W}^2 \subseteq \overline{V}$. En efecto , sean $\mathcal{H}, \mathcal{D} , \mathcal{E} \in \overline{X}$ tales que $(\mathcal{H} , \mathcal{D})$, $(\mathcal{D} , \mathcal{E}) \in \overline{W}$. Mostraremos que $(\mathcal{H} , \mathcal{E}) \in \overline{V}$.

Sean $A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}$ y $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ tales que $A \times A \subseteq W$ y $B \times B \subseteq W$. Como $A \cap B \in \mathcal{D}$ entonces $A \cap B \neq \phi$ y así

$(A \cup B) \times (A \cap B) \subseteq W$ y $(A \cap B) \times (A \cup B) \subseteq W$, por lo que $(A \cup B) \times (A \cup B) \subseteq W^2 \subseteq V$ y $A \cup B \in \mathcal{H} \cap \mathcal{E}$. Así que $\overline{W}^2 \subseteq \overline{V}$.

Definimos $\iota : X \to \overline{X}$ de la siguiente manera:

Si $x \in X$, sea $\iota(x) = \mathcal{B}(x)$, donde $\mathcal{B}(x)$ es el filtro de vecindades de x.

ι está bien definida ya que $\mathcal{B}(x)$ es un filtro minimal de Cauchy, (prop. 2.3.4).

ι es uniformemente continua:

Sean V y W conectores simétricos de X tales que $W^3 \subseteq V$. Veremos que si $(x, y) \in W$ entonces $(\iota(x), \iota(y)) = (\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(y)) \in \overline{V}$. Pero si $(x, y) \in W$ entonces $W(x) \cup W(y) \in \mathcal{B}(x) \cap \mathcal{B}(y)$ y además $(W(x) \cup W(y)) \times (W(x) \cup W(y)) \subseteq W^3$. Así podemos concluir que $(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(y)) \in \overline{W}^3 \subseteq \overline{V}$.

$\iota(X)$ es denso en $\overline{X}$:

Sea $\overline{V}$ un conector de $\overline{X}$ y $\mathcal{H} \in \overline{X}$. Debemos demostrar que $\overline{V}(\mathcal{H}) \cap \iota(X) \neq \phi$.

Como $\mathcal{H}$ es de Cauchy, entonces existe $A \in \mathcal{H}$ tal que $A \times A \subseteq V$. Por la proposición 2.3.3 $\text{Int.}(A) \in \mathcal{H}$. Sea $x \in \text{Int.}(A)$, entonces $\text{Int.}(A) \in \mathcal{B}(x)$, y $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(x)) \in \overline{V}$, por lo que $\overline{V}(\mathcal{H}) \cap \iota(X) \neq \phi$.

$(\overline{X}, \mathcal{V})$ es completo:

Por la proposición 2.3.9 es suficiente demostrar que cada filtro de Cauchy sobre $\iota(X)$ converge.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre ¿(X). Entonces ¿$^{-1}(\mathcal{F})$ es una base de un filtro de Cauchy $\mathcal{G}$ sobre X. Sea $\mathcal{H}$ un filtro de Cauchy minimal menos fino que $\mathcal{G}$. Entonces ¿$(\mathcal{H})$ es una base de un filtro de Cauchy sobre ¿(X), y $\mathcal{F} =$ ¿$($¿$^{-1}(\mathcal{F}))$ es más fino que el filtro cuya base es ¿$(\mathcal{H})$. Pero este último converge en $\overline{X}$, por lo que $\mathcal{F}$ también converge. De donde, $\overline{X}$ es completo

□

4.- APLICACIONES DEL MODELO NO-USUAL A ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Dado un espacio topológico (X, τ), usaremos las técnicas no-usuales para establecer condiciones equivalentes de algunos conceptos topológicos. Supondremos que $X \subseteq S$. Entonces, por el Teorema 1.4.7, $X \subseteq {}^*X$ y cada subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ pertenece a S, en particular $\tau \in S$.

Notación: Para cada $x \in X$, escribimos $\tau_x = \{ G \in \tau \mid x \in G \}$.

Definición.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. La mónada de x, que denotaremos Mon(x), está dada por

$$\mathrm{Mon}(x) = \bigcap \{ {}^*G \mid G \in \tau_x \}$$

Teorema 2.4.1.- Para cada $x \in X$ existe un conjunto interno $D \in {}^*\tau_x$ tal que $D \subseteq Mon(x)$.

Demostración

Sea $R = \{ (p, q) \mid p \in \tau_x, q \in \tau_x, q \subseteq p \}$. Mostraremos que R es concurrente (ver definición en la pág. 28).

Sean $A_1, \dots, A_n \in Dom(R) = \tau_x$. Entonces $B = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau_x$ satisface $(A_j, B) \in R$, para $j = 1, \dots, n$. De aquí concluimos que R es concurrente. Por tanto, por el Teorema de Concurrencia (Teor. 1.5.4), existe $D \in {}^*S$ tal que para toda $A \in \tau_x$, $({}^*A, D) \in {}^*R$. Entonces, como es verdadera

$$(\forall p \in \tau_x)(\forall q \in \tau_x)((p, q) \in R \Rightarrow q \subseteq p)$$

tenemos que $D \subseteq {}^*A$ para cada $A \in \tau_x$, y, por lo tanto,

$$D \subseteq \cap \{ {}^*A \mid A \in \tau_x \} = Mon(x)$$

□

Teorema 2.4.2 .- Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $G, F \subseteq X$. Entonces

(1) G es abierto si y sólo si $Mon(x) \subseteq {}^*G$ para toda $x \in G$

(2) F es cerrado si y sólo si dado $\alpha \in {}^*F$, si $\alpha \in Mon(x)$, entonces $x \in F$

Demostración

(1) $\Rightarrow$) Inmediato de la definición de mónada.

$\Leftarrow$) Supongamos que $Mon(x) \subseteq {}^*G$ para cada $x \in G$

Por el teorema 2.4.1 , existe $D \in {}^*\tau_x$ tal que $D \subseteq Mon(x)$. Por lo tanto $D \subseteq {}^*G$.

Entonces tenemos que

$(\exists D \in {}^*\tau_x)(D \subseteq {}^*G)$

Por el Principio de Transferencia (Teor. 1.4.5)

$(\exists D \in \tau_x)(D \subseteq G)$

Por lo tanto, G es abierto .

(2) $\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado , que $\alpha \in {}^*F$ y que $\alpha \in Mon(x)$.

Si $x \notin F$ entonces $Mon(x) \subseteq {}^*X - {}^*F$ ya que $X - F$ es abierto y $x \in X - F$. Por lo tanto, $\alpha \in {}^*X - {}^*F$, lo que contradice la hipótesis .

$\Leftarrow$) Supongamos que para toda $\alpha \in {}^*F$, si $\alpha \in Mon(x)$ entonces $x \in F$, y supongamos que F no es cerrado .

Como $X - F$ no es abierto , por (1) , existe entonces $x \in X - F$ tal que $Mon(x) \not\subseteq {}^*(X - F) = {}^*X - {}^*F$, y esto último significa que existe $\alpha \in Mon(x)$ tal que $\alpha \notin {}^*X - {}^*F$, así que $\alpha \in {}^*F$, y por hipótesis , entonces $x \in F$, lo que es una contradicción .

Concluimos que F es cerrado . □

Teorema 2.4.3 .- X es de Hausdorff si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \neq y$ entonces $Mon(x) \cap Mon(y) = \phi$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que X es Hausdorff y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Existen $G \in \tau_x$ y $H \in \tau_y$ tal que $G \cap H = \phi$. Entonces $^*G \cap {}^*H = \phi$.

Así, $\text{Mon}(x) \cap \text{Mon}(y) \subseteq {}^*G \cap {}^*H = \phi$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \neq y$ entonces $\text{Mon}(x) \cap \text{Mon}(y) = \phi$, y supongamos que X no es Hausdorff.

Entonces existen $x, y \in X$ tal que para cualesquiera $G \in \tau_x$ y $H \in \tau_y$, $G \cap H \neq \phi$. Así que es verdadera :

$$(\forall G \in \tau_x)(\forall H \in \tau_y)(\exists z \in G)(z \in H)$$

y por Transferencia

$$(\forall G \in {}^*\tau_x)(\forall H \in {}^*\tau_y)(\exists z \in G)(z \in H) \qquad (*)$$

Pero por el teorema 2.4.1, existe $D \in {}^*\tau_x$ tal que $D \subseteq \text{Mon}(x)$ y existe $D' \in {}^*\tau_y$ tal que $D' \subseteq \text{Mon}(y)$, pero por $(*)$ existe $z \in D \cap D'$ así que $\text{Mon}(x) \cap \text{Mon}(y) \neq \phi$, lo cual contradice la hipótesis.

□

<u>Teorema 2.4.4</u> .- Un espacio topológico X es compacto si y sólo si para cada $\alpha \in {}^*X$, existe $x \in X$ tal que $\alpha \in \text{Mon}(x)$.

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto y sea $\alpha \in {}^*X$ y supongamos que para toda $x \in X$, $\alpha \notin \text{Mon}(x)$.

Entonces, para cada $x \in X$, existe $G_x \in \tau_x$ tal que $\alpha \notin {}^*G_x$.

$\{ G_x \mid x \in X \}$ es una cubierta abierta de X y como es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}$.

Por Transferencia, tenemos entonces que ${}^*X = {}^*G_{x_1} \cup \ldots \cup {}^*G_{x_n}$, y por lo tanto $\alpha \in {}^*G_{x_i}$ para alguna $i = 1, \ldots, n$, pero esto último contradice el hecho de que $\alpha \notin {}^*G_x$ para toda $x \in X$. Por lo tanto, $\alpha \in \mathrm{Mon}(x)$ para alguna $x \in X$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\alpha \in {}^*X$ existe $x \in X$ tal que $\alpha \in \mathrm{Mon}(x)$, y supongamos que X no es compacto.

Existe una cubierta abierta $\mathcal{H}$ de X que no admite subcubierta finita.

Consideremos la siguiente relación:

$$R = \{ (H, x) \mid H \in \mathcal{H},\ x \in X \text{ y } x \notin H \}$$

$R \neq \phi$ y R es concurrente, ya que si $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ entonces, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $x \notin H_1 \cup \ldots \cup H_n$, así que $(H_i, x) \in R$ para $i = 1, \ldots, n$.

Por el Teorema de Concurrencia existe $\alpha \in {}^*X$ tal que $({}^*H, \alpha) \in {}^*R$ (e.d. $\alpha \notin {}^*H$) para cada $H \in \mathcal{H}$. Pero $\alpha \in \mathrm{Mon}(x)$ para alguna $x \in X$ y como $x \in H$ para alguna $H \in \mathcal{H}$, entonces $\mathrm{Mon}(x) \subseteq {}^*H$ y así $\alpha \in {}^*H$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es compacto.

$\square$

Con este tipo de "traducciones" de conceptos topológicos al lenguaje de mónadas se obtienen muchos resultados conocidos de topología de una manera elegante y sencilla como:

Teorema .- Un subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.

Demostración

Sea $F \subseteq K$, donde F es cerrado y K es compacto, y sea $\alpha \in {}^*F$.

Entonces $\alpha \in {}^*K$ y, como K es compacto, entonces existe $x \in K$ tal que $\alpha \in$ Mon. (x), y ya que F es cerrado, tenemos $x \in F$. De aquí concluimos que F es compacto.

En el caso de un espacio métrico (X , d), la métrica d se extiende a una función ${}^*d : {}^*X \times {}^*X \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ que tiene, aplicando el Principio de Transferencia a las propiedades de d, las siguientes propiedades:

Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in {}^*X$ tenemos

(1) ${}^*d(\alpha, \beta) \geq 0$, ${}^*d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$

(2) ${}^*d(\alpha, \beta) = {}^*d(\beta, \alpha)$

(3) ${}^*d(\alpha, \gamma) \leq {}^*d(\alpha, \beta) + {}^*d(\beta, \gamma)$

Como una base de vecindades para un punto $x \in X$ está dada por $\{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{R}^+ \}$ donde $B_r(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$, la mónada tiene la siguiente descripción:

$$\mathrm{Mon}(x) = \bigcap \{ {}^*G \mid G \in \tau_x \} = \bigcap \{ {}^*B_r(x) \mid r \in \mathbb{R}^+ \}$$

$$= \{ \alpha \in {}^*X \mid {}^*d(\alpha, x) \text{ es infinitesimal} \}$$

CAPITULO III

1.- ELEMENTOS INDISTINGUIBLES Y FILTROS

Definimos en $^*X$ la siguiente relación:

Sean $\alpha,\beta \in {}^*X$. Diremos que α es indistinguible de β, y lo denotaremos $\alpha \sim \beta$, si dado $A \subseteq X$, $\alpha \in {}^*A \Leftrightarrow \beta \in {}^*A$.

Proposición 3.1.1 .- $\alpha \sim \beta$ si y sólo si dado $A \subseteq X$, si $\alpha \in {}^*A$ entonces $\beta \in {}^*A$.

Demostración

$\Rightarrow$) Inmediato

$\Leftarrow$) Sea $B \subseteq X$ y supongamos que $\beta \in {}^*B$.

Si tuviéramos que $\alpha \notin {}^*B$ entonces $\alpha \in {}^*X - {}^*B = {}^*(X - B)$, y, por hipótesis, tendríamos que $\beta \in {}^*X - {}^*B$, lo que contradice que $\beta \in {}^*B$.

$$\therefore\ \alpha \in {}^*B$$

Proposición 3.1.2.- La relación $\sim$ es de equivalencia.

Denotaremos con $i(\alpha) = \{\ \beta \in {}^*X \mid \alpha \sim \beta\ \}$

Proposición 3.1.3.- Si $x \in X$ y $\alpha \sim x$, entonces $\alpha = x$, es decir, $i(x) = \{x\}$

Demostración

Como $x \in X$, tenemos que $A = \{x\}$ es un subconjunto de X y como $x \in {}^*A = {}^*\{x\} = \{x\}$ y $\alpha \sim x$ obtenemos que $\alpha \in {}^*A$. Así $\alpha = x$.

$\square$

La proposición 3.1.3 conduce al siguiente problema :

Si para $x \in X$, $i(x) = \{x\}$, ¿cómo será $i(\alpha)$ para $\alpha \in {}^*X - X$?

Más adelante podremos responder esta pregunta.

<u>Teorema 3.1.4</u>.- Sean $f : X \to Y$ una función y $\alpha, \beta \in {}^*X$. Si $\alpha \sim \beta$, entonces ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$.

<u>Demostración</u>

Sea $A \subseteq Y$ tal que ${}^*f(\alpha) \in {}^*A$. Así $\alpha \in ({}^*f)^{-1}({}^*A)$.

Como

$({}^*f)^{-1}({}^*A) = \{x \in {}^*X \mid {}^*f(x) \in {}^*A\} = {}^*\{x \in X \mid f(x) \in A\} = {}^*(f^{-1}(A))$

tenemos que $\alpha \in {}^*(f^{-1}(A))$ y como $\alpha \sim \beta$ concluimos $\beta \in {}^*(f^{-1}(A))$.

$$\therefore\ {}^*f(\beta) \in {}^*A$$

Por lo tanto ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$. $\square$

Las técnicas no usuales son muy eficientes en el estudio de filtros, para lo cual presentaremos algunos resultados.

<u>Definición</u>.- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. El <u>germen</u> de $\mathcal{F}$, que denotaremos con $g(\mathcal{F})$, es

$$g(\mathcal{F}) = \bigcap\{{}^*F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

$g(\mathcal{F})$ no necesariamente es un conjunto interno ; sin embargo, éste contiene un conjunto interno, propiedad que nos será de gran utilidad para obtener algunos resultados muy interesantes.

Teorema 3.1.5.- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Entonces existe $B \in {}^*\mathcal{F}$ tal que $B \subseteq g(\mathcal{F})$.

Demostración

Definimos la siguiente relación R sobre $\mathcal{F}$:

$R = \{(A,B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid B \subseteq A\}$

R es una relación concurrente ya que:

si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ entonces $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y $(A_i, B) \in R$ para $i = 1, \dots, n$.

Por el Teorema de Concurrencia tenemos

$$\exists\, D \in {}^*\mathcal{F} \;\; \forall\, F \in \mathcal{F} \quad ({}^*F, D) \in {}^*R$$

lo que significa que existe $D \in {}^*\mathcal{F}$ tal que $D \subseteq g(\mathcal{F})$.

$\square$

La importancia del germen radica en que nos permite recuperar el filtro original, como lo indica el siguiente resultado que es una consecuencia del teorema 3.1.5.

Corolario 3.1.6.- Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A\}$$

Demostración

1) Si $A \in \{A \subseteq X \mid g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A\}$ entonces $g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A$ y por el teorema 3.5 obtenemos que

$$\exists\, D \in {}^*\mathcal{F} \quad D \subseteq {}^*A$$

y por el Principio de Transferencia concluimos que

$$\exists\, D \in \mathcal{F} \quad D \subseteq A$$

Por lo tanto $A \in \mathcal{F}$.

2) Claramente $\mathcal{F} \subseteq \{A \subseteq X \mid g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A\}$ $\sqsupset$

Otra consecuencia del teorema 3.1.5 es

Corolario 3.1.7.- Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces $g(\mathcal{F}) \neq \varnothing$

Demostración

Como $\mathcal{F}$ es un filtro , tenemos que para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \varnothing$ y así por el Principio de Transferencia para todo $A \in {}^*\mathcal{F}$, tenemos $A \neq \varnothing$ y por el teorema 3.1.5 concluimos el resultado .

$\sqsupset$

Veamos ahora algunas propiedades de $g(\mathcal{F})$.

Teorema 3.1.8.- Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ filtros sobre X . Entonces

(1) $\alpha \in g(\mathcal{F}) \Rightarrow i(\alpha) \subseteq g(\mathcal{F})$

(2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \Rightarrow g(\mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F})$

(3) $\mathcal{A}$ base de $\mathcal{F} \Rightarrow g(\mathcal{F}) = \bigcap\{{}^*A \mid A \in \mathcal{A}\}$

(4) $g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}') = g(\mathcal{F}) \cup g(\mathcal{F}')$

(5) Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son tales que $F \cap F' \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $F' \in \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$ es el filtro generado por $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ entonces

$$g(\mathcal{F} \vee \mathcal{F}') = g(\mathcal{F}) \cap g(\mathcal{F}')$$

(6) $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}' \Leftrightarrow g(\mathcal{F}) \neq g(\mathcal{F}')$

(7) Si $g(\mathcal{F}) = i(\alpha)$ con $\alpha \in g(\mathcal{F})$ entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

Demostración

(1) y (2) son inmediatos

(3) Sabemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ y que dado $F \in \mathcal{F}$ existe $A_F \in \mathcal{A}$ tal que $A_F \subseteq F$. De aquí obtenemos

$\bigcap\{{}^*A \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcap\{{}^*A_F \mid F \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap\{{}^*F \mid F \in \mathcal{F}\} = g(\mathcal{F})$

La inclusión $g(\mathcal{F}) \subseteq \bigcap\{{}^*A \mid A \in \mathcal{A}\}$ es inmediata.

(4) $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'$, así que por (2) tenemos

$$g(\mathcal{F}) \subseteq g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}') \text{ y } g(\mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}')$$

De aquí que

$$g(\mathcal{F}) \cup g(\mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}')$$

Por otro lado, supongamos que $\alpha \notin g(\mathcal{F}) \cup g(\mathcal{F}')$. Esto significa que existen $F \in \mathcal{F}$ y $F' \in \mathcal{F}'$ tal que $\alpha \notin {}^*F \cup {}^*F' = {}^*(F \cup F')$. Como $F \cup F' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$, tenemos que $\alpha \notin g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}')$.

Concluimos entonces que

$$g(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F}) \cup g(\mathcal{F}').$$

(5) Como $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$ entonces $g(\mathcal{F} \vee \mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F}) \cap g(\mathcal{F}')$.

Por otro lado, si $\alpha \notin g(\mathcal{F} \vee \mathcal{F}')$ entonces existe $F \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$ tal que $\alpha \notin {}^*F$. Pero dado $F \in \mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$ existen $F' \in \mathcal{F}$ y $F'' \in \mathcal{F}'$ tales que $F' \cap F'' \subseteq F$.

Como $\alpha \notin {}^*F$, tenemos que $\alpha \notin {}^*(F' \cap F'') = {}^*F' \cap {}^*F''$

por lo que $\alpha \notin {}^*F'$ o $\alpha \notin {}^*F''$

Por lo tanto $\alpha \notin g(\mathcal{F}) \cap g(\mathcal{F}')$.

(6) Claramente $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \Rightarrow g(\mathcal{F}) = g(\mathcal{F}')$

Ahora, si $g(\mathcal{F}) = g(\mathcal{F}')$, entonces, por el corolario 3.1.6, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

(7) Supongamos que $g(\mathcal{F}) = i(\alpha)$ y sea $A \subseteq X$.

Tenemos que $\alpha \in {}^*A$ o $\alpha \in {}^*X - {}^*A = {}^*(X - A)$ y de aquí concluimos que

$$i(\alpha) \subseteq {}^*A \quad \text{o} \quad i(\alpha) \subseteq {}^*X - {}^*A$$

Así que

$$A \in \mathcal{F} \quad \text{o} \quad X - A \in \mathcal{F}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

$\equiv$

Consideremos ahora la construcción de filtros sobre X a partir de subconjuntos de $^*X$.

Sea $\mathfrak{a} \subseteq {}^*X$, $\mathfrak{a} \neq \varnothing$. Definimos

$$\mathcal{F}(\mathfrak{a}) = \{A \subseteq X \mid \mathfrak{a} \subseteq {}^*A\}$$

$\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ tiene las siguientes propiedades:

<u>Proposición 3.1.9</u>.- Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ subconjuntos no vacios de $^*X$. Entonces

(1) $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ es un filtro sobre X.

(2) Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ entonces $\mathcal{F}(\mathfrak{a}) \supseteq \mathcal{F}(\mathfrak{b})$

Se usará varias veces que $\mathcal{F}(g(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$

<u>Proposición 3.1.10</u> Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces $g(\mathcal{F}) = i(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in g(\mathcal{F})$. Por lo tanto, los ultrafiltros sobre X son los filtros de la forma $\mathcal{F}(i(\alpha))$.

<u>Demostración</u>

Sea $\alpha \in g(\mathcal{F})$. Como $i(\alpha) \subseteq g(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}(g(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha))$ y como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, concluimos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(i(\alpha))$.

Por otro lado tenemos que

$$g(\mathcal{F}(i(\alpha)) = \bigcap \{{}^*A \mid A \in \mathcal{F}(i(\alpha))\} = \bigcap \{{}^*A \mid i(\alpha) \subseteq {}^*A\} = \bigcap \{{}^*A \mid \alpha \in {}^*A\}$$

$$= i(\alpha).$$

De aquí que $g(\mathcal{F}(i(\alpha))) = i(\alpha)$.

Proposición 3.1.11.- Sea $\alpha \in {}^*X$. Si $i(\alpha)$ es finito, entonces $\alpha \in X$, y así se tiene

$$i(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha\} & \text{si } \alpha \in X \\ \text{conjunto infinito} & \text{si } \alpha \notin X \end{cases}$$

Demostración

Supongamos que $i(\alpha) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(i(\alpha))$. Consideremos $D \in {}^*\mathcal{F}$ tal que $D \subseteq g(\mathcal{F}) = i(\alpha)$ (D existe por el Teor. 3.1.5).

Es verdadera la siguiente afirmación:

$$\exists D \in {}^*\mathcal{F} \;\; \exists \alpha_1 \in {}^*X \;\dots\; \exists \alpha_n \in {}^*X \;\; D \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

y por el Principio de Transferencia obtenemos

$$\exists D \in \mathcal{F} \;\; \exists x_1 \in X \;\dots\; \exists x_n \in X \;\; D \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$$

Ahora, como $g(\mathcal{F}) = i(\alpha) \subseteq {}^*D \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$, obtenemos que $\alpha = x_1$ o $\alpha = x_2$ o ... o $\alpha = x_n$, y de aquí $\alpha \in X$ y por la proposición 3.1..3, concluimos que $i(\alpha) = \{\alpha\}$.

La descripción de los ultrafiltros sobre X nos permite obtener rápidamente los siguientes resultados conocidos.

Corolario 3.1.12.- (1) Cada filtro está contenido en un ultrafiltro.

(2) Cada filtro es intersección de ultrafiltros.

Demostración

(1) Para cualquier filtro $\mathcal{F}$ y $\alpha \in g(\mathcal{F})$ tenemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha))$

(2) $\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{F}(i(\alpha)) \mid \alpha \in g(\mathcal{F})\}$

$\square$

Hemos visto que el germen de un filtro es cerrado bajo elementos indistinguibles, así que pondremos nuestro interés en los subconjuntos a de $^*X$ que tienen la propiedad de que si $\alpha \in a$ entonces $i(\alpha) \subseteq a$.

Tenemos así el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{lcl} \{\text{filtros sobre } X\} & & \{a \subseteq {}^*X \mid \alpha \in a \Rightarrow i(\alpha) \subseteq a\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{ultrafiltros sobre } X\} & & \{i(\alpha) \mid \alpha \in {}^*X\} \end{array}$$

Observación: En general no es cierto que cada subconjunto de $^*X$, que sea cerrado bajo indistinguibles, sea germen de un filtro sobre X.

Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $X = R$, el conjunto de los números reales.

Tenemos que $R \subseteq {}^*R$ y además, R es cerrado bajo indistinguibles, ya que $i(x) = \{x\}$

Así que $\mathcal{F}(R) = \{A \subseteq R \mid R \subseteq {}^*A\} = \{R\}$

y de aquí

$$g(\mathcal{F}(R = \bigcap\{{}^*A \mid A \in \mathcal{F}(R)\} = {}^*R \neq R$$

2.-ESPACIOS UNIFORMES

En esta sección trabajaremos con espacios uniformes. El primer resultado que obtenemos es acerca de la relación en *X que determina una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X.

Teorema 3.2.1.- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \times X$. $\mathcal{F}$ es una uniformidad sobre X si y sólo si $g(\mathcal{F})$ es una relación de equivalencia sobre *X.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{F}$ es una uniformidad sobre X.

Probaremos que $\mu = g(\mathcal{F}) = \bigcap\{{}^*V \mid V \in \mathcal{F}\} \subseteq {}^*X \times {}^*X$ es una relación de equivalencia.

(1) Sea $V \in \mathcal{F}$. Tenemos que

$$\forall x \in X \quad (x,x) \in V$$

Entonces, por el Principio de Transferencia,

$$\forall x \in {}^*X \quad (x,x) \in {}^*V$$

(2) Sea $(\alpha,\beta) \in \mu$.. Debemos demostrar $\forall\, V \in \mathcal{F} \quad (\beta,\alpha) \in {}^*V$.

Sea $V \in \mathcal{F}$. Entonces $(\alpha,\beta) \in {}^*(V^{-1})$ ya que $V^{-1} \in \mathcal{F}$.

Pero tenemos que

$$*(V^{-1}) = *\{(\alpha,\beta) \in X \times X \mid (\beta,\alpha) \in V\}$$
$$= \{(\alpha,\beta) \in *X \times *X \mid (\beta,\alpha) \in *V\}$$
$$= (*V)^{-1}$$

Por lo tanto, $(\beta,\alpha) \in *V$, y de aquí obtenemos que $(\beta,\alpha) \in \mu$.

(3) Sean (α,β), $(\beta,\gamma) \in \mu$. Debemos demostrar que $\forall\ V \in \mathcal{F}\quad (\alpha,\gamma) \in *V$.

Sea $V \in \mathcal{F}$. Sabemos que existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W^2 \subseteq V$.

Como (α,β), $(\beta,\gamma) \in *W$, entonces $(\alpha,\gamma) \in (*W)^2$.

Pero tenemos que

$$(*W)^2 = \{(\alpha,\gamma) \in *X \times *X \mid \exists\ \beta \in *X\ \ (\alpha,\beta), (\beta,\gamma) \in *W\}$$
$$= *\{(\alpha,\gamma) \in X \times X \mid \exists\ \beta \in X\ \ (\alpha,\beta), (\beta,\gamma) \in W\}$$
$$= *(W^2)$$

Así que $(\alpha,\gamma) \in *(W^2) \subseteq *V$ y de aquí se sigue que

$$(\alpha,\gamma) \in \mu$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $g(\mathcal{F}) \subseteq *X \times *X$ es relación de equivalencia sobre $*X$

Como $\mathcal{F}$ es un filtro sobre $X \times X$ sólo nos falta demostrar que

(i) Si $V \in \mathcal{F}$ entonces $\forall\ x \in X\ (x,x) \in V$.

Como $g(\mathcal{F})$ es de equivalencia y $g(\mathcal{F}) \subseteq *V$ para cada $V \in \mathcal{F}$, entonces es verdadera la siguiente afirmación:

$$\forall\ x \in *X \quad (x,x) \in *V$$

así que, por el Principio de Transferencia, tenemos que

$$\forall\ x \in X \quad (x,x) \in V$$

(ii) Si $V \in \mathcal{F}$, entonces existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \subseteq V^{-1}$.

Sea $V \in \mathcal{F}$. Recordemos que podemos recuperar el filtro a través de su germen:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(g(\mathcal{F})) = \{A \subseteq X \times X \mid g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A\}$$

y como $g(\mathcal{F})$ es de equivalencia tenemos que $g(\mathcal{F})^{-1} = g(\mathcal{F})$. Como $g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*V$ entonces $g(\mathcal{F}) = g(\mathcal{F})^{-1} \subseteq ({}^*V)^{-1} = {}^*(V^{-1})$. Así, por el teorema 3.1.5

$$\exists D \in {}^*\mathcal{F} \quad D \subseteq {}^*(V^{-1})$$

y, por el Principio de Transferencia, obtenemos

$$\exists D \in \mathcal{F} \quad D \subseteq V^{-1}$$

(iii) Si $V \in \mathcal{F}$, entonces existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W^2 \subseteq V$.

Sea $V \in \mathcal{F}$. Sabemos, por el t eorema 3.1.5, que existe $D \in {}^*\mathcal{F}$ tal que $D \subseteq g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*V$ y, como $g(\mathcal{F})$ es de equivalencia entonces

$$\exists D \in {}^*\mathcal{F} \quad D^2 \subseteq {}^*V$$

Por el Principio de Transferencia,

$$\exists D \in \mathcal{F} \quad D^2 \subseteq V$$

De (i), (ii) y (iii) concluimos que $\mathcal{F}$ es una uniformidad sobre X.

$\boxminus$

<u>Notación</u>: Sea $\mu = g(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre X. Si $(\alpha,\beta) \in \mu$ escribiremos $\alpha \approx \beta$ y diremos que α y β son cercanos y denotaremos con $\mu(\alpha)$ a la clase de equivalencia de α, así que

$$\mu(\alpha) = \{\beta \in {}^*X \mid \alpha \approx \beta\}$$

Recordemos además que podemos recuperar $\mathcal{U}$ a partir de μ:

$$\mathcal{U} = \{V \subseteq X \times X \mid \mu \subseteq {}^*V\}$$

Ejemplo : Ya hemos visto que la relación i de ser indistinguible es de equivalencia en $^*X$. Recordemos que

$$\begin{aligned} i &= \{ (\alpha, \beta) \in {}^*X \times {}^*X \mid \alpha \sim \beta \} \\ &= \{ (\alpha, \beta) \mid \text{dado } A \subseteq X \;\; \alpha \in {}^*A \Rightarrow \beta \in {}^*A \} \end{aligned}$$

Consideremos el filtro en $X \times X$ inducido por $\mathcal{F}(i)$.

Veremos que $g(\mathcal{F}(i)) = i$.

Basta demostrar que $g(\mathcal{F}(i)) \subseteq i$, ya que la otra contensión siempre se cumple.

Supongamos que $(\alpha, \beta) \notin i$, entonces $\exists\, A \subseteq X$ tal que $\alpha \in {}^*A$ y $\beta \notin {}^*A$. Entonces $\beta \in {}^*X - {}^*A$ y así

$$(\alpha, \beta) \notin {}^*B = ({}^*A \times {}^*A) \cup \big(({}^*X - {}^*A) \times ({}^*X - {}^*A)\big)$$

donde $B = (A \times A) \cup \big((X - A) \times (X - A)\big)$

Pero tenemos que $B \in \mathcal{F}(i)$ ya que $i \subseteq {}^*B$ porque si $(\gamma, \delta) \in i$ y $\gamma \in {}^*A$ entonces $\delta \in {}^*A$ y de aquí $(\gamma, \delta) \in {}^*B$; si $\gamma \in {}^*X - {}^*A$ entonces $\delta \in {}^*X - {}^*A$ y así $(\gamma, \delta) \in {}^*B$. De donde $(\alpha, \beta) \notin g(\mathcal{F}(i))$.

$$\therefore\ g(\mathcal{F}(i)) \subseteq i$$

Por lo tanto $g(\mathcal{F}(i)) = i$ y por el teorema 3.2.1 $\mathcal{F}(i)$ es una uniformidad sobre X . La topología que induce esta uniformidad es la discreta .

Consideremos ahora un espacio topológico (X, τ). Veremos que la mónada de un punto $p \in X$ coincide con $\mu(p)$ cuando consideramos a X con la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}$.

<u>Teorema 3.2.2</u>.- Sea $(X, \mathcal{U}, \tau(\mathcal{U}))$ un espacio uniforme , donde $\tau(\mathcal{U})$ es la topología sobre X inducida por $\mathcal{U}$. Entonces

$$\mu(x) = \mathrm{Mon}(x) \quad \forall x \in X$$

<u>Demostración</u>

$\{ V(x) \mid V \in \mathcal{U} \}$ es una base del filtro de vecindades $\mathcal{B}(x)$ de x , de manera que

$$\mathrm{Mon.}(x) = \bigcap \{ {}^*(V(x)) \mid V \in \mathcal{U} \} = g(\mathcal{B}(x))$$

pero como ${}^*(V(x)) = {}^*V(x)$ y $\bigcap \{ {}^*V(x) \mid V \in \mathcal{U} \} = \mu(x)$, tenemos entonces que

$$\mu(x) = \mathrm{Mon.}(x)$$

□

En los espacios uniformes el trabajo con filtros es fundamental , así que aplicaremos lo que hemos visto de ellos a un espacio uniforme.

De aquí en adelante supondremos que $(X, \mathcal{U}, \tau(\mathcal{U}))$ es un espacio uniforme.

Teorema 3.2.3.- Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. Entonces:

(1) $\mathcal{F}$ converge a x $\Leftrightarrow$ $g(\mathcal{F}) \subseteq \mu(x)$

(2) $\mathcal{F}$ se acumula en x $\Leftrightarrow$ $g(\mathcal{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing$

(3) $\mathcal{F}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ $g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu$

Demostración

(1) $\mathcal{F}$ converge a x si y sólo si $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{F}$

y $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{F}$ si y sólo si $g(\mathcal{F}) \subseteq g(\mathcal{B}(x)) = \mu(x)$

(2) $\Rightarrow$) Si $\mathcal{F}$ se acumula en x, entonces existe un filtro $\mathcal{F}'$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ y $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{F}'$. Así que

$$g(\mathcal{F}') \subseteq g(\mathcal{F}) \cap \mu(x)$$

y como $g(\mathcal{F}') \neq \varnothing$, entonces $g(\mathcal{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing$

$\Leftarrow$) Supongamos que $g(\mathcal{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing$ y sea $\alpha \in g(\mathcal{F}) \cap \mu(x)$.

Como $i(\alpha) \subseteq g(\mathcal{F}) \cap \mu(x)$ entonces

$$\mathcal{F}(g(\mathcal{F})) \cup \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha))$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}(g(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha)) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha))$$

y de aquí concluimos que $\mathcal{F}$ se acumula en x.

(3) Supongamos que $\mathcal{F}$ es de Cauchy. Probaremos que

$$g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu$$

Para esto tomemos $V \in \mathcal{U}$ y $\alpha , \beta \in g(\mathcal{F})$. Como $\mathcal{F}$ es de Cauchy entonces, dado $V \in \mathcal{U}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subseteq V$.

Así que

$$(\alpha , \beta) \in g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq {}^*F \times {}^*F \subseteq {}^*V$$

Por lo tanto concluimos que

$$g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu$. Debemos demostrar que $\mathcal{F}$ es de Cauchy.

Sea $V \in \mathcal{U}$. Por el teorema 3.1.5 sabemos que existe $D \in {}^*\mathcal{F}$ tal que $D \subseteq {}^*g(\mathcal{F})$. Entonces

$$D \times D \subseteq g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu \subseteq {}^*V$$

Así que

$$\exists D \in {}^*\mathcal{F} \quad D \times D \subseteq {}^*V$$

y por el Principio de Transferencia

$$\exists D \in \mathcal{F} \quad D \times D \subseteq V ,$$

por lo que $\mathcal{F}$ es de Cauchy.

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior tenemos:

Corolario 3.2..4.- Un filtro $\mathcal{F}$ es de Cauchy si y sólo si $g(\mathcal{F}) \subseteq \mu(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in g(\mathcal{F})$ $(\alpha, \beta \in g(\mathcal{F}) \Rightarrow \alpha \approx \beta)$.

Cororlario 3.2.5.- Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(i(\alpha))$. $\mathcal{F}$ es de Cauchy si y sólo si $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$.

Corolario 3.2.6.- Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy y $\mathcal{F}'$ es un filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}'$ es de Cauchy.

Corolario 3.2.7.- Si $\mathcal{F}$ es un filtro que converge a x, entonces $\mathcal{F}$ es de Cauchy.

Teorema 3.2.8.- Un espacio uniforme X es completo si y sólo si cada ultrafiltro de Cauchy converge.

Demostración

$\Rightarrow$) Inmediato de la definición de espacio completo.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy y, por Teor. 3.1.12 (1), sea $\mathcal{F}(i(\alpha))$ un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$, con $\alpha \in g(\mathcal{F})$. Entonces

$$i(\alpha) \subseteq g(\mathcal{F})$$

Como $g(\mathcal{F}) \times g(\mathcal{F}) \subseteq \mu$ y $\alpha \in g(\mathcal{F})$ tenemos que

$$g(\mathcal{F}) \subseteq \mu(\alpha)$$

De aquí $\mathcal{F}(i(\alpha))$ es de Cauchy y entonces, por hipótesis, $\mathcal{F}(i(\alpha))$ converge a un elemento $x \in X$, y esto significa entonces que $i(\alpha) \subseteq \mu(x)$.

De aquí tenemos que $\mu(x) = \mu(\alpha)$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ converge a x.

$\square$

Corolario 3.2.9.- Un espacio uniforme X es completo si y sólo si, $\forall\alpha$ $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$, implica que existe $x \in X$ tal que $\alpha \approx x$.

Veamos la inclusión $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$ con más detenimiento:

Teorema 3.2.10.- $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$ si y sólo si $\forall V \in \mathcal{U}$ $\exists x \in X$ $(\alpha, x) \in {}^*V$

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$ y sea $V \in \mathcal{U}$

Como $\mathcal{F}(i(\alpha))$ es de Cauchy, entonces, dada $V \in \mathcal{U}$, existe $F \in \mathcal{F}(i(\alpha))$ tal que $F \times F \subseteq V$.

Así que ${}^*F \times {}^*F \subseteq {}^*V$ y además $i(\alpha) \subseteq {}^*F$

Para cualquier $x \in F$, $x \in {}^*F$ y, como $\alpha \in {}^*F$, entonces tenemos que $(\alpha, x) \in {}^*F \times {}^*F$

De aquí que

$$(\alpha, x) \in {}^*V$$

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $x \in X$ tal que $(\alpha, x) \in {}^*V$.

Debemos demostrar que para cada $V \in \mathcal{U}$ y cada $\beta \in i(\alpha)$, $(\alpha, \beta) \in {}^*V$.

Sea $V \in \mathcal{U}$ y sea $W \in \mathcal{U}$ simétrico tal que $W^2 \subseteq V$. Por hipótesis sabemos que existe $x \in X$ tal que $(\alpha, x) \in {}^*W$

Así que $\alpha \in {}^*W(x)$. Por lo tanto, $\beta \in {}^*W(x)$ y de aquí $(x, \beta) \in {}^*W$, y como $(x, \alpha) \in {}^*W$ y ${}^*W$ es simétrico (ya que W lo es) entonces $(\alpha, \beta) \in ({}^*W)^2$

Pero como $({}^*W)^2 = {}^*(W^2)$ y ${}^*(W^2) \subseteq {}^*V$ entonces $(\alpha, \beta) \in {}^*V$

Por lo tanto $\beta \in \mu(\alpha)$ y así $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$.

$\square$

Teorema 3.2.11.- Sea X un espacio uniforme. X es compacto si y sólo si X es completo y cada ultrafiltro es de Cauchy.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto.

Basta probar que cada ultrafiltro converge, porque entonces es de Cauchy, y por el Teor. 3.2.8, se tiene que X es completo.

Sea $\mathcal{F}(i(\alpha))$ un ultrafiltro. Como X es compacto tenemos que existe $x \in X$ tal que $\alpha \in \text{Mon}(x) = \mu(x)$ (Teor. 3.2.2).

Debemos demostrar que $g(\mathcal{F}(i(\alpha))) \subseteq \mu(x)$, lo cual, por el Teor. 3.2.3, equivale a que $\mathcal{F}(i(\alpha))$ converge a x..

Sean $\beta \in g(\mathcal{F}(i(\alpha)) = i(\alpha)$ y G un abierto tal que $x \in G$.

Entonces, de $\alpha \in Mon(x) = \bigcap\{{}^*G \mid G \in \tau_X\}$ se sigue que $\alpha \in {}^*G$ y de aquí $\beta \in {}^*G$.

$$\therefore\ \beta \in \mu(x)$$

Concluimos entonces que $\mathcal{F}(i(\alpha))$ es de Cauchy y converge a $x \in X$.

$\Leftarrow$) Para demostrar que X es compacto, veremos que dada $\alpha \in {}^*X$, $\alpha \approx x$ para alguna $x \in X$ (Teor. 2.4.4)

Como $\mathcal{F}(i(\alpha))$ es un ultrafiltro, es de Cauchy, y como X es completo, entonces $\mathcal{F}(i(\alpha))$ converge a un elemento $x \in X$. De aquí que $\alpha \approx x$.

Por lo tanto X es compacto.

$\equiv$

<u>Proposición 3.2.12</u> .- Sea (X, d) un espacio métrico y $\alpha \in {}^*X$. Entonces $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) en X que se "acumula" en α, en el sentido de que dado $r \in \mathbf{R}^+$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que ${}^*d(x_n, \alpha) < r$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Dado $n \in \mathbf{N}$ construiremos $x_n \in X$ tal que ${}^*d(x_n, \alpha) < \frac{1}{n}$

Como $V_{\frac{1}{n}} = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \frac{1}{n}\}$ es un conector de la uniformidad $\mathcal{U}_d$ inducida por d, por el teorema 3.2.10, dado

$V_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{U}_d$, existe $x \in X$ tal que $(\alpha, x) \in {}^*(V_{\frac{1}{n}})$. Eligiendo como x_n una $x \in X$ con esta propiedad, tenemos que ${}^*d(x_n, \alpha) < \frac{1}{n}$, y así tenemos la sucesión (x_n) con la propiedad deseada.

$\Leftarrow$) Sea (x_n) una sucesión que se acumula en α . Basta probar que para toda $V \in \mathcal{U}_d$ existe $x \in X$ tal que $(x, \alpha) \in {}^*V$, esto por el teorema 3.2.10.

Si $V \in \mathcal{U}_d$, existe $r \in R^+$ tal que $V_r \subseteq V$, ya los V forman una base de la uniformidad. Como (x_n) se acumula en α, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que ${}^*d(x_N, \alpha) < r$. Por lo tanto, $(x_N, \alpha) \in {}^*V$.

□

Como podemos ver, en espacios métricos, dos conceptos muy parecidos son :

(a) "α es cercano a un usual", (e.d. existe $x \in X$ tal que ${}^*d(x, \alpha)$ es infinitesimal) y

(b) "α es de acumulación de sucesiones de X, ($i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$)

Es claro de $\mu(x) = \text{Mon}(x) = \{\alpha \in {}^*X \mid {}^*d(\alpha, x) \text{ es infinitesimal}\}$ que

$\{ \alpha \in {}^*X \mid \exists\, x \in X \quad \alpha \in \mu(x) \} \subseteq \{ \alpha \in {}^*X \mid i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha) \}$

y por el corolario 3.2.9 aplicado a espacios métricos obtenemos la espléndida caracterización de espacios métricos completos :

<u>Teorema 3.2.13</u>.- Un espacio métrico (X , d) es completo si y sólo si "cercano a usual" es lo mismo que ser de "acumulación" de puntos de X .

Observación : Teniendo en cuenta la caracterización de espacios completos , en el caso de **R** , el conjunto de los números reales, podemos hacer el siguiente comentario sobre el concepto de indistinguible :

Sea $\alpha \in {}^{*}\mathbf{R}$, entonces

$$i(\alpha) \begin{cases} \subseteq \mu(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ es finito} \\ \not\subset \mu(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ es infinito} \end{cases}$$

es decir , si α se puede acotar por dos números reales , los indistinguibles de α son cercanos entre sí ; en caso contrario, existen indistinguibles de α separados de α en el sentido que la "distancia" es mayor que un real positivo .

Uniformidad sobre *X

Veremos ahora que la uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X induce una uniformidad $\mathcal{U}(*)$ sobre *X de tal manera que el espacio uniforme $({}^{*}X , \mathcal{U}(*))$ contiene un subespacio $(\mathcal{C}, \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(*))$ tal que:

(1) $(X, \mathcal{U}_X)$ es denso en $(\mathcal{C}, \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(*))$.

(2) $(\mathcal{C}, \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(*))$ es completo.

donde $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(*)$ es la uniformidad de *X restringida a $\mathcal{C}$.

Definamos , pues , $\mathcal{U}(*)$:

Sea $\mathcal{U}(*) = \{ {}^*V \mid V \in \mathcal{U} \}$

$\mathcal{U}(*)$ es un sistema fundamental de conectores de una uniformidad sobre ${}^*X$, ya que:

(1) $\forall x \in X \quad (x, x) \in V$

Así que, por el Principio de Transferencia, tenemos que:

$$\forall x \in {}^*X \quad (x, x) \in {}^*V$$

(2) Sean ${}^*V_1, {}^*V_2 \in \mathcal{U}(*)$

Existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq V_1 \cap V_2$

Por lo tanto:

$$\text{Existe } {}^*W \in \mathcal{U}(*) \text{ tal que } {}^*W \subseteq {}^*V_1 \cap {}^*V_2$$

(3) Sea ${}^*V \in \mathcal{U}(*)$

Existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq V^{-1}$. De donde ${}^*W \subseteq {}^*(V^{-1})$

Pero ${}^*(V^{-1}) = ({}^*V)^{-1}$ (pág. 62)

Concluimos entonces que

$$\text{Existe } {}^*W \in \mathcal{U}(*) \text{ tal que } {}^*W \subseteq ({}^*V)^{-1}$$

(4) Sea ${}^*V \in \mathcal{U}(*)$

Existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subseteq V$. De donde ${}^*(W^2) \subseteq {}^*V$

y como

$$({}^*W)^2 = {}^*(W)^2, \text{ (pág. 62)}$$

tenemos que

$$\text{Existe } {}^*W \in \mathcal{U}(*) \text{ tal que } ({}^*W)^2 \subseteq {}^*V$$

Teorema 3.2.14.- Sean $(X , \mathcal{U}_1)$ y $(Y , \mathcal{U}_2)$ espacios uniformes y sea $f : X \rightarrow Y$ una función uniformemente continua. Entonces $*f : *X \rightarrow *Y$ es uniformemente continua.

Demostración

Sea $*W$ un elemento de la base de la uniformidad $\mathcal{U}_2(*)$

Por hipótesis existe $V \in \mathcal{U}_1$ tal que $(f \times f) (V) \subseteq W$

Por lo tanto

$*V \in \mathcal{U}_1(*)$ es tal que $(*f \times *f) (*V) \subseteq *W$

De aquí concluimos que $*f$ es uniformemente continua.

□

Construcción de una completación de X

Consideremos el espacio uniforme $(*X , \mathcal{U}(*))$ y sea

$$\mathcal{C} = \{ \alpha \in *X \mid i(\alpha) \subseteq \mu (\alpha) \}$$

$\{ *V \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \mid *V \in \mathcal{U}(*) \}$ es la uniformidad $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(*)$ sobre $\mathcal{C}$ inducida por la uniformidad $\mathcal{U}(*)$ de $*X$.

Teorema 3.2.15 .- El espacio uniforme $\mathcal{C}$ construido arriba es una completación de X .

Demostración

(1) $X \subseteq \mathcal{C} \subseteq *X$

(2) X es denso en $\mathcal{C}$

Sea $V \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathcal{C}$

Debemos demostrar que $X \cap {}^*V(\alpha) \neq \emptyset$.

Como $i(\alpha) \subseteq \mu(\alpha)$ entonces, por el Cor. 3.2.5 $\mathcal{F}(i(\alpha))$ es de Cauchy .Entonces dado $V \in \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{F}(i(\alpha))$ tal que $A \times A \subseteq V$.

Como $\alpha \in {}^*A$ se tiene ${}^*A \subseteq {}^*V(\alpha)$, así que

$$\emptyset \neq A \subseteq {}^*A \subseteq {}^*V(\alpha)$$

Por lo tanto, $X \cap {}^*V(\alpha) \neq \emptyset$

(3) Cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre X converge en $\mathcal{C}$

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre X y sea $\mathcal{F}(i(\alpha))$ un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(i(\alpha))$.

$\mathcal{F}(i(\alpha))$ converge a α en $\mathcal{C}$ ya que si $V \in \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{F}(i(\alpha))$ tal que $A \times A \subseteq V$, y, como $\alpha \in {}^*A$, tenemos que

$${}^*A \subseteq {}^*V(\alpha).$$

Entonces α es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$ y, como $\mathcal{F}$ es de Cauchy, se concluye que $\mathcal{F}$ converge a α.

□

Veremos, para terminar esta sección , algunos resultados sobre espacios compactos y uniformidades compatibles .

Teorema 3.2.16.- Si (X, τ) es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces existe una única uniformidad $\mathcal{U}$ tal que $\tau = \tau(\mathcal{U})$.

Demostración

Unicidad

Supongamos que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son uniformidades tales que $\tau(\mathcal{U}_1) = \tau(\mathcal{U}_2) = \tau$.

Basta demostrar que $\mu_1 = \mu_2$, donde $\mu_i = g(\mathcal{U}_i)$ para $i = 1,2$.

Sea $(\alpha, \beta) \in \mu_1$

Como X es compacto, por el teorema 2.4.4 existen $x, y \in X$ tales que $\alpha \in \mu_1(x)$ y $\beta \in \mu_1(y)$, es decir, $(x, \alpha) \in \mu_1$ y $(y, \beta) \in \mu_1$. Ahora, como $(\alpha, \beta) \in \mu_1$ y μ_1 es una relación de equivalencia en $^*X$, entonces $(x, y) \in \mu_1$ y así $\mu_1(x) = \mu_1(y)$. Por último, por ser X de Hausdorff se tiene que $x = y$.

Por lo tanto $\alpha, \beta \in \mu_1(x)$

Pero como $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ inducen la misma topología, tenemos que $\forall x \in X$ $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, y así $\alpha, \beta \in \mu_2(x)$.

Por lo tanto $(\alpha, \beta) \in \mu_2$.

Análogamente se demuestra que $\mu_2 \subseteq \mu_1$.

Existencia

Sea $\mu(x)$ la mónada de x, y

$$\lambda = \bigcup \{ \mu(x) \times \mu(x) \mid x \in X \}$$

Entonces

(1) λ es una relación de equivalencia.

λ es reflexiva ya que :

Dada $\alpha \in {}^*X$, por ser X compacto, existe $x \in X$ tal que $\alpha \in \mu(x)$, y por lo tanto $(\alpha , \alpha) \in (\mu(x) \times \mu(x)) \subseteq \lambda$.

Claramente es simétrica.

Es transitiva, ya que :

Si $(\alpha , \beta), (\beta , \gamma) \in \lambda$ entonces $(\alpha , \beta) \in \mu(x) \times \mu(x)$ y $(\beta , \gamma) \in \mu(y) \times \mu(y)$ para alguna $x \in X$ y alguna $y \in X$. De lo anterior tenemos que $\beta \in \mu(x) \cap \mu(y)$. Pero como X es Hausdorff, entonces $x = y$.

Por lo tanto $(\alpha , \gamma) \in \mu(x) \times \mu(x) \subseteq \lambda$.

(2) $\lambda(y) = \mu(y) \quad \forall y \in X$

Como X es Hausdorff, entonces $\mu(x) \cap \mu(y) = \phi$ si $x \neq y$.

Así que si $x \neq y$ entonces $(\mu(x) \times \mu(x))(y) = \phi$. Por lo tanto :

$$\lambda(y) = [\bigcup_{x \in X} (\mu(x) \times \mu(x))](y) = (\mu(y) \times \mu(y))(y) = \mu(y).$$

(3) Sea $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\lambda) = \{ V \subseteq X \times X \mid \lambda \subseteq {}^*V \}$ el filtro en X generado por λ.

Demostraremos que $\lambda = g(\mathcal{F}(\lambda))$, y así tendremos que $\mathcal{U}$ es una uniformidad.

(i) Claramente $\lambda \subseteq g(\mathcal{F}(\lambda))$.

(ii) $g(\mathcal{F}(\lambda)) \subseteq \lambda$.

Sean $\alpha, \beta \in {}^*X$, y supongamos que $(\alpha, \beta) \notin \lambda$.

Como X es compacto $\alpha \in \mu(x)$ y $\beta \in \mu(y)$ para alguna $x \in X$ y para alguna $y \in X$, con $x \neq y$.

Exhibiremos $V \in \mathcal{F}(\lambda)$ tal que $(\alpha, \beta) \notin {}^*V$ y así $(\alpha,\beta) \notin g(\mathcal{F}(\lambda))$.

Como X es Hausdorff y compacto, entonces $X \times X$ es Hausdorff y compacto, Δ es cerrado en $X \times X$ y de aquí Δ es compacto. Como $(x, y) \neq (z, z)$ para cada $z \in X$ (por ser $x \neq y$), entonces, por ser $X \times X$ Hausdorff, para cada $z \in X$ existen H_z, K_z y G_z, abiertos en X, tales que $(x, y) \in H_z \times K_z$ y $(z, z) \in G_z \times G_z$ y $(H_z \times K_z) \cap (G_z \times G_z) = \phi$.

Ahora, puesto que $\Delta \subseteq \bigcup_{z \in X} (G_z \times G_z)$ y Δ es compacto entonces existen $z_1, \ldots, z_n \in X$ tales que

$$\Delta \subseteq (G_{z_1} \times G_{z_1}) \cup \ldots \cup (G_{z_n} \times G_{z_n}).$$

Entonces tenemos que $(x, y) \in (\bigcap_{i=1}^{n} H_{z_i}) \times (\bigcap_{i=1}^{n} K_{z_i})$ y así

$$(\alpha,\beta) \in {}^*[(\bigcap_{i=1}^{n} H_{z_i}) \times (\bigcap_{i=1}^{n} K_{z_i})]$$

y como $(\bigcap_{i=1}^{n} H_{z_i}) \times (\bigcap_{i=1}^{n} K_{z_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} (G_{z_i} \times G_{z_i})) = \phi$, entonces $(\alpha, \beta) \notin {}^*(\bigcup_{i=1}^{n} (G_{z_i} \times G_{z_i}))$.

Pero $V = (\bigcup_{i=1}^{n} (G_{z_i} \times G_{z_i})) \in \mathcal{F}(\lambda)$ y $\lambda \subseteq {}^*V$.

Por lo tanto $(\alpha, \beta) \notin g(\mathcal{F}(\lambda))$.

Resumiendo, hemos demostrado que $\lambda = g(\mathcal{F}(\lambda))$ es una relación de equivalencia, y por lo tanto $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\lambda)$ es una uniformidad (teorema 3.2.1) y por (2) de la demostración $\tau = \tau(\mathcal{U})$.

□

Es fácil ver que hay espacios compactos que no son uniformizables:
Si $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, (X, τ) es compacto pero no uniformizable.

El próximo teorema nos muestra que en el caso de que la topología de un espacio compacto (X, τ) esté inducida por una uniformidad ésta debe ser única.

Teorema 3.2.17.- Sean (X, τ) compacto y $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ uniformidades compatibles con τ. Entonces $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Demostración

Sean μ y λ las relaciones de equivalencia en $^*X$ inducidas por $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ respectivamente. Tenemos que para cada $x \in X$,

$$\mathrm{Mon}(x) = \mu(x) = \lambda(x)$$

Como X es compacto entonces para cada $\alpha \in {}^*X$ existe $x \in X$ tal que $\alpha \in \mu(x) = \lambda(x)$. Esto último implica que $\mu = \lambda$ y de aquí concluimos que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

EJEMPLO

Usando los resultados anteriores en el caso de un anillo de Dedekind D con la topología P-ádica inducida por un ideal primo P , podemos construir la completación descrita en [Robinson 2] , como caso particular .

Sea D un anillo de Dedekind y P un ideal primo de D . La topología P-ádica sobre D es la topología que tiene como sistema fundamental de vecindades del cero al conjunto de potencias del ideal P . Con esta topología D se convierte en un anillo topológico y más aún , la topología está inducida por la uniformidad $\mathcal{U}$ (P) con base de conectores los $V_n = \{ (x , y) \in D \times D \mid x - y \in P^n \}$. En este caso *D es también un anillo , *P un ideal primo y la mónada del cero es :

$$\mu_P (0) = \mu_P = \bigcap \{ {}^*(P^n) \mid n \in N \}$$

que permite , por aditividad , describir las mónadas de los demás elementos de *D , como :

$$\mu_P (\alpha) = \alpha + \mu_P$$

En este caso se demuestra además que μ_P es un ideal primo de *D y que $\mu_P \cap D = \{ 0 \}$.

Consideremos ahora nuestra completación , teniendo en cuenta las siguientes inclusiones :

$$D \subseteq C_P \subseteq {}^*D$$

donde $C_P = \{ \alpha \in {}^*D \mid i (\alpha) \subseteq \mu_P(\alpha) \}$.

En este caso, C_P es un subanillo de $^*D$, ya que:

Si $\alpha, \beta \in C_P$, entonces $i(\alpha) \subseteq \mu_P(\alpha)$ e $i(\beta) \subseteq \mu_P(\beta)$, y por el teorema 3.2.10

$\forall n \in N \ \exists x \in D \ \ x - \alpha \in {}^*(P^n)$ y

$\forall n \in N \ \exists x \in D \ \ x - \beta \in {}^*(P^n)$,

así que

(1) $(x+y)-(\alpha+\beta) \in {}^*(P^n)$ y, por lo tanto, $i(\alpha+\beta) \subseteq \mu_P(\alpha+\beta)$

(2) $xy - \alpha\beta = (x-\alpha)(y-\beta) + \alpha(y-\beta) + \beta(x-\alpha) \in {}^*(P^n)$ y así

$i(\alpha\beta) \subseteq \mu_P(\alpha\beta)$

Ahora, C_P / μ_P es la completación tradicional de D en la topología P-ádica.

BIBLIOGRAFÍA

[Bourbaki] N. Bourbaki . General Topology , Part 1 , Ed. Addison Wesley

[Davis] Martin Davis . Applied non-standard analyisis . Pure & Applied Mathematics . John Wiley & Sons . 1977

[Engelking] Engelking Riszard , General Topology , Heldermann Verlag , Berlin , 1989.

[García-Maynez] García-Maynez y Tamariz , Topología General , Ed. Porrúa , S. A. . 1988

[Henle] Henle - Kleinberg , Infinitesimal Calculus , The MIT Press

[Keisler] H. Jerome Keisler . Elementary Calculus , Ed. Prindle, Weber & Schmidt Inc.

[Luxemburg 1] W.A.I. Luxemburg - K.D. Stroyan . Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press. 1976

[Luxemburg 2] W.A.I. Luxemburg . What is non-standard analysis? . American Math. Monthly. 1973

[Nelson 1] E. Nelson . Internal set theory , a new approach to N.S.A. Bull. Am. Math. Soc. 83

[Nelson 2] E. Nelson. Radically elementary probability theory . Princ. Univ. Press

[Robert] Robert Alain . Nonstandard Analysis . Ed. John Wiley & Sons

[Robinson 1] A. Robinson . Non-standard analysis theory , studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland. 1966

[Robinson 2] A. Robinson. Non-standard theory of Dedekind rings. Proc. Roy. Acad. Sci. Amsterdam A70 (1967)

[Robinson 3] Bernstein - Robinson. Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos. Pacific Journal of Math. 16 (3) (1966)