96
2tj

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS PARA LA SELECCION DE PORTAFOLIOS DE INVERSION: TEORIA Y APLICACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

S A R A V A R G A S L O P E Z

DIRECTOR: MAT. J. AGUSTIN CANO GARCES

270667

1999

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Modelos para la Selección de Portafolios de Inversión: Teoría y Aplicación"

realizado por Sara Vargas López

con número de cuenta 9136297-5, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. J. Agustín Cano Garcés
Propietario	Act. Aurora Valdés Michel
Propietario	Mat. Vinicio Pérez Fonseca
Suplente	Act. Pedro Aguilar Beltrán
Suplente	Mat. Adrián Girard Islas

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

A mis amados Padres,
que en vida y en muerte
siempre han estado y estarán conmigo,
gracias por darme la vida,
gracias por darme su amor,
gracias por darme su ejemplo
que es la mejor enseñanza;
y gracias por creer y confiar en mí,
sin lo cual no habría superado
los retos que se me han presentado.

Gracias a mis amados hermanos,
por ser mis amigos de toda la vida,
por apoyarme y estar junto a mí.

Gracias a mi querida U.N.A.M.,
por formarme como profesionista,
y por permitirme ser universitaria.
Ayer, hoy y siempre.

Gracias a mis queridos maestros y profesores,
que a lo largo de mi vida como estudiante,
han compartido conmigo sus conocimientos,
y sin los cuales no habría concluido mi meta.

Indice

Modelos para la Selección de Portafolios de Inversión: Teoría y Aplicación

CAPÍTULO 2.
Modelos de Portafolios

CAPÍTULO 3
Aplicación de los Modelos de Portafolios

CAPÍTULO 4
Paquete de Aplicación

Anexos

Anexo 1

Anexo 2

Introducción

En los últimos años el sector financiero ha tenido un desarrollo constante, en gran medida por la Globalización de los Mercados Financieros, en donde una decisión tomada en el otro lado del mundo puede afectarnos; por lo anterior los inversionistas se interesan en una eficaz selección y gestión de portafolios, conscientes de la importancia de una adecuada gestión que por un lado maximice la rentabilidad y por otro minimice los niveles de riesgos existentes.

Las decisiones financieras son tomadas en condiciones de incertidumbre, por lo que el riesgo es punto clave para la selección de inversiones. Es así que surgió la necesidad de encontrar mecanismos que permitieran acercarse a la realidad y poder tomar decisiones acertadas en la selección de inversiones.

En el año de 1952 Harry Markowitz propuso lo que es hoy la Teoría Clásica de Portafolios de Inversión y el Criterio de la Media-Varianza como criterio de selección, en donde los puntos de análisis son el riesgo y el rendimiento de las inversiones.

El Modelo de Markowitz tiene por objetivo determinar a través de programación cuadrática, la combinación óptima de acciones dado un nivel de riesgo. Este modelo tuvo problemas para su aplicación, sobre todo cuando las variables son numerosas (es posible elegir entre varios tipos de acciones), es por eso que hasta los años ochentas con el desarrollo de las computadoras se logró aplicar más comúnmente.

Los estudios sobre el tema han continuado, por lo que han surgido numerosos modelos alternativos que presentan simplificaciones al Modelo de Markowitz, como el Modelo de Índice Simple propuesto por William Sharpe en 1963 y más recientemente el Modelo de Desviación Absoluta propuesto por Hiroshi Konno en 1991.

Es importante hacer notar que los expertos del tema han propuesto modelos, es decir, aproximaciones a la realidad y que siempre existe la posibilidad de que no se den los resultados esperados, y por lo tanto se generen pérdidas en las inversiones.

El tema de portafolios de inversión es extenso y obligado para aquella persona que tenga deseos de dedicarse a las finanzas. En mi experiencia, el tema la mayor parte de las veces, no es visto con detenimiento y los casos que se resuelven en clase son casos sencillos y de pocas variables, por lo que este trabajo tiene como objetivo explicar los principales puntos de la Teoría y Modelos de selección, así como ejemplificar su aplicación con datos reales.

La presente tesis en la primera parte está dedicada a explicar la Teoría de Portafolios, así como los planteamientos de selección de Markowitz, Sharpe y Desviación Absoluta.

En la segunda parte los modelos se aplicaron a casos reales con rendimientos de acciones, que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores durante el período de Enero de 1996 a Junio de 1997.

En el tercer capitulo se realiza un análisis comparativo entre los diferentes portafolios óptimos resultantes, llegando a la conclusión de que el Modelo de Desviación Absoluta es un buen modelo alternativo al de Markowitz.

Finalmente el capitulo cuarto está dedicado a la propuesta de un paquete de selección, basado en los Modelos de Desviación Absoluta, Índice Simple y Markowitz, que permite obtener de manera sencilla un portafolio óptimo

CAPÍTULO 1

Teoría de Portafolios

1.1 SELECCIÓN DE UNA INVERSIÓN

En el Mercado de Valores existen cientos de acciones en las cuales es posible invertir, pero ¿Cómo decidir que acciones producirán mayores rendimientos?. Tomando períodos[1] de observación, se puede notar que la cotización de las acciones varía constantemente, debido a que en cada período existen diversos factores y circunstancias asociadas (Repunte del valor de las acciones por productividad de la empresa, derechos decretados, caída del mercado asiático, etc.) que determinan el rendimiento de las acciones.

A pesar de no poder conocer con certeza el rendimiento futuro de las acciones, cualquier inversionista desearía saber de antemano el rendimiento que tendrán en el período siguiente o al menos pronósticos; así tratando de resolver este problema, la **Teoría de Portafolios** supone que el rendimiento de las acciones es una variable aleatoria[2] (es decir, toma valores aleatorios en cada periodo y con probabilidad entre 0 y 1).

Volviendo a la pregunta inicial, ¿Cómo decidir que acción conviene más?, lo primero que se pensaría es utilizar el Rendimiento Esperado como medida de rentabilidad, porque permitiría conocer la tendencia central del rendimiento, sin embargo, este parámetro no bastaría para tomar una decisión, ya que al estar involucradas probabilidades, existe lo que se conoce como una situación de riesgo; dada la posibilidad de pérdida en el futuro resulta necesario considerar otro parámetro que permita cuantificar dicho riesgo. Si el comportamiento de una acción es estable, las desviaciones de su rentabilidad esperada serán pequeñas; en cambio, si la acción es volátil sus desviaciones serán mayores, es por eso que a mayor Varianza mayor volatilidad y por lo tanto mayor desconocimiento del futuro; por lo tanto el parámetro adecuado para medir el riesgo es la Varianza y/o la Desviación Estándar[3].

La Teoría de Portafolios utiliza el Rendimiento Esperado de la acción como medida de rentabilidad y la Varianza y/o la Desviación Estándar como medida de

[1] Días, meses, años, etc

[2] Se suponen valores aleatorios discretos

[3] Originalmente se planteaba como medida de riesgo a la Varianza pero en años recientes autores como Weston Fred empezaron a utilizar la Desviación Estándar, ya que al minimizar la Varianza se minimiza la Desviación Estándar además de que su significado es más claro

riesgo, además supone que el inversionista está dispuesto a elegir entre inversiones sólo en base a estos dos parámetros.

Si se conoce la función de distribución de probabilidad, se pueden calcular el Rendimiento Esperado y la Varianza, sin embargo, si no se conoce, se puede prever cuales serán los posibles rendimientos futuros y la probabilidad de que sucedan, esto es:

1.1.1 RENDIMIENTO ESPERADO esta medida sirve para conocer la tendencia central del rendimiento de una acción y consiste en multiplicar cada rendimiento por la probabilidad de que suceda.

$$E(R) = \sum_{t=1}^{T} P_t R_t$$

donde:

T es el número de rendimientos posibles.

P_t es la probabilidad de que se dé el rendimiento R_t y $\sum_{t=1}^{T} P_t = 1$.

1.1.2 VARIANZA del rendimiento de una inversión, se determina multiplicando la probabilidad de cada rendimiento por las desviaciones del rendimiento al cuadrado, es decir:

$$Var(R) = E\left[(R - E(R))^2\right] = \sum_{t=1}^{T} P_t (R_t - E(R))^2$$

De la Varianza se deriva la **DESVIACIÓN ESTÁNDAR**, la cual es una medida de dispersión que indica en que medida el resultado diverge del Rendimiento Esperado.

$$\sigma(R) = \sqrt{Var(R)}$$

Sin embargo, los rendimientos posibles son infinitos, por lo que no es posible determinarlos todos; al prever la función de probabilidad de los rendimientos únicamente se consideran algunos de éstos, por lo que la previsión sobre el comportamiento futuro suele ser poco confiable.

Afortunadamente en la práctica no es necesario establecer explícitamente las distribuciones, ya que se cuenta con la información histórica del comportamiento de las acciones, es decir, una muestra de los rendimientos posibles, con la que es posible estimar los parámetros de la distribución, los cuales se determinan:

$$Media\ estimada = \hat{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

$$Varianza\ estimada = \hat{\sigma} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} (r_t - \hat{r})^2$$

donde:

r_i es un dato de la muestra $i = 1...T$.

T es el número de datos en la muestra.

Al utilizar la información histórica para caracterizar el comportamiento de las acciones, se ha aceptado el supuesto de que en el futuro su comportamiento no diferirá en gran manera del pasado. Es asi que la Estadística proporciona los medios adecuados para estimar los parámetros de la población y utilizarlos como indicadores para tomar una decisión acerca del rendimiento futuro de la acción[4].

[4] Se debe recordar que esto es siempre y cuando no se cuente con informacion valiosa sobre alguna situación extraordinaria en el futuro

1.2 PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

1.2.1 DEFINICIÓN

Un portafolio es una combinación de activos financieros (generalmente acciones y bonos), objeto de estudio de la Teoría de la Cartera o Teoría de Portafolios, la cual trata de la selección de portafolios óptimos, es decir, aquellos que proporcionan el rendimiento más alto posible en cualquier grado de riesgo o el riesgo más bajo posible en cualquier rendimiento.

Para un portafolio de inversión al igual que para una sola inversión, la Varianza y el Rendimiento Esperado son las medidas de riesgo y rentabilidad; así los inversionistas toman sus decisiones únicamente considerando estos dos parámetros.

1.2.2 RENDIMIENTO ESPERADO DE UN PORTAFOLIO

El rendimiento que produce la acción i es la cantidad que se invierte en ella multiplicada por la tasa de rendimiento de esa acción, esto es $d_i R_i$, de modo que el valor de la acción i después de un período de inversión es:

$$d_i + d_i R_i = d_i(1 + R_i)$$

donde:

d_i es el capital del inversionista colocado en la acción i.

Si $C = \sum_{i=1}^{N} d_i$ es el capital total del inversionista y $C R_p$ el rendimiento que produce el portafolio, entonces:

El rendimiento del portafolio después de un período de inversión es:

$$C R_p = \sum_{i=1}^{N} d_i R_i$$

$$\Rightarrow \qquad R_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i R_i}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{C} R_i$$

Si se denota a $X_i = \frac{d_i}{C} = \frac{Cantidad \quad Invertida \quad en \quad la \quad acción \quad i}{Capital \quad Total \quad del \quad inversionista}$

de modo que: $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad i = 1......N$

Se concluye que el rendimiento sobre un portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos de los valores individuales que lo componen. En general, si existen N activos el rendimiento sobre el portafolio es:

$$R_p = X_1 R_1 + X_2 R_2 + ... + X_N R_N$$

y el Rendimiento Esperado es:

$$E(R_p) = X_1 E(R_1) + ... + X_N E(R_N)$$

1.2.3 VARIANZA DE UN PORTAFOLIO

La Varianza de un portafolio es:

$$Var(R_p) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i R_i \right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i R_i - \sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i (R_i - E(R_i)) \right)^2 \right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i (R_i - E(R_i)) \right) \left(\sum_{j=1}^{N} X_j (R_j - E(R_j)) \right) \right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j (R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j)) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j E\left[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j)) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j Cov(R_i, R_j) \qquad i = 1......N$$

donde:

$Cov(R_i, R_j)$ es la covarianza[5] entre el rendimiento de la acción i y el rendimiento de la acción j.

Y la **DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE UN PORTAFOLIO**

$$\sigma_p = \sqrt{Var(R_p)}$$

1.2.4 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

El rendimiento como variable aleatoria utiliza el coeficiente de correlación para determinar la relación entre los rendimientos de dos tipos de acciones y se define como:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

El coeficiente de correlación puede tomar valores, $-1 < \rho_{ij} < 1$, cuando no están perfectamente correlacionadas las acciones i y j.

Si	$\rho_{ij} = 0$	Significa que las acciones i y j son independientes.
Si	$\rho_{ij} = 1$	Significa que las acciones i y j están correlacionadas.
Si	$\rho_{ij} = -1$	Significa que las acciones i y j están inversamente correlacionadas.

[5] La Covarianza al igual que el Rendimiento Esperado y la Varianza puede ser estimada de una muestra, esto es $\hat{cov}(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \hat{r}_i)(r_{jt} - \hat{r}_j) \qquad t = 1 \ldots T$

1.3 CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE UN PORTAFOLIO

El conjunto de elecciones Desviación Estándar-Media $\{(\sigma_1\mu_1),(\sigma_2\mu_2),\ldots\ldots(\sigma_N\mu_N)\}$ se llama ***Conjunto de Oportunidades*** de portafolio, porque lista todos los portafolios posibles que existen en el Mercado para el inversionista.

Si se grafican los puntos de dicho conjunto, la forma de éste variará dependiendo del número de activos financieros entre los cuales se pueda seleccionar el portafolio, de los coeficientes de correlación existentes entre cada par de activos financieros y de si se permiten ventas en corto.[6]

En el planteamiento original de la Teoría se establece que no se permiten ventas en corto, por lo que en los puntos siguientes también se supone.

1.3.1 CONJUNTO DE OPORTUNIDADES EN UN PORTAFOLIO CON DOS TIPOS DE ACCIONES

Suponiendo la posibilidad de invertir en dos tipos de acciones a y b, a continuación se desarrollan 3 situaciones básicas:

- Si $\rho_{ab} = 1$

  La Desviación Estándar de un portafolio de dos acciones, substituyendo el valor de ρ_{ab} queda como:

$$\sigma_p = \sqrt{X_a^2\sigma_a^2 + (1 - X_a)^2\sigma_b^2 + 2X_a(1 - X_a)\sigma_a\sigma_b}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\left[X_a\sigma_a + (1 - X_a)\sigma_b\right]^2}$$

[6] Al proceso en el cual un inversionista puede vender una acción que no posee ,se le conoce como vender en corto y se representa con $X_i < 0$

entonces: (1) $\sigma_p = X_a\sigma_a + (1 - X_a)\sigma_b$

$$(2)\quad E(R_p) = X_a E(R_a) + (1 - X_a)E(R_b)$$

X_a es el porcentaje de inversión en la acción a y $(1 - X_a)$ el porcentaje de la inversión en la acción b. De (1) se obtiene que:

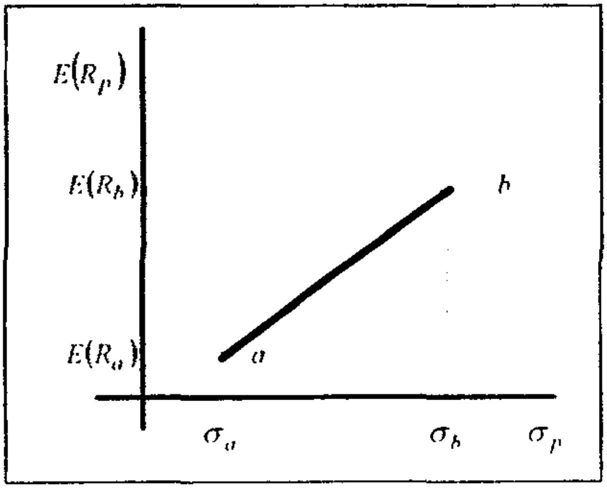
$$X_a = \frac{\sigma_p - \sigma_b}{\sigma_a - \sigma_b}$$

Substituyendo esta expresión en (2), es posible ver que la relación entre σ_p y $E(R_p)$ representa un segmento de línea recta (gráfica1.1).

$$E(R_p) = X_a\left[E(R_a) - E(R_b)\right] + E(R_b)$$

$$= \frac{\sigma_p - \sigma_b}{\sigma_a - \sigma_b}\left[E(R_a) - E(R_b)\right] + E(R_b)$$

$$= \sigma_p \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a - \sigma_b} - \sigma_b \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a - \sigma_b} + E(R_b)$$



Gráfica 1.1

- Si $\rho_{ab} = -1$

La Desviación Estándar del portafolio y el Rendimiento Esperado del portafolio quedan como sigue:

$$\sigma_p = \sqrt{X_a^2 \sigma_a^2 + (1 - X_a)^2 \sigma_b^2 - 2X_a(1 - X_a)\sigma_a\sigma_b}$$

$$\sigma_p = \sqrt{[X_a\sigma_a - (1 - X_a)\sigma_b]^2} \quad o \quad \sqrt{[-X_a\sigma_a + (1 - X_a)\sigma_b]^2}$$

entonces:

$$(1) \quad \sigma_p = X_a\sigma_a - (1 - X_a)\sigma_b \quad o \quad -X_a\sigma_a + (1 - X_a)\sigma_b$$

$$(2) \quad E(R_p) = X_a E(R_a) + (1 - X_a)E(R_b)$$

De (1) se obtiene que:

$$X_a = \frac{\sigma_p + \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \quad o \quad \frac{-\sigma_p + \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}$$

Substituyendo esta expresión en (2), se ve que la relación entre σ_p y $E(R_p)$ representa a dos segmentos de líneas rectas que se interceptan (gráfica 1.2).

$$E(R_p) = \frac{\sigma_p + \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}\left[E(R_a) - E(R_b)\right] + E(R_b)$$

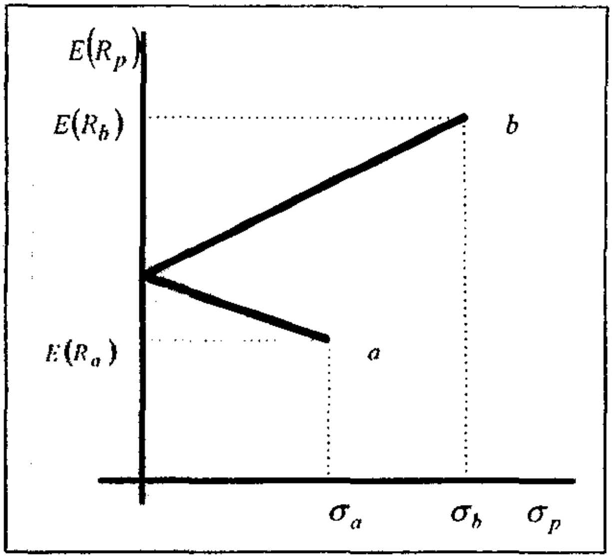
$$= \sigma_p \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a + \sigma_b} + \sigma_b \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a + \sigma_b} + E(R_b)$$

o

$$E(R_p) = \frac{-\sigma_p + \sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}\left[E(R_a) - E(R_b)\right] + E(R_b)$$

$$= -\sigma_p \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a + \sigma_b} + \sigma_b \frac{E(R_a) - E(R_b)}{\sigma_a + \sigma_b} + E(R_b)$$

X_a es el porcentaje de inversión en la acción a y $(1-X_a)$ el porcentaje de inversión en la acción b.



Gráfica 1.2

♦ Si $-1 < \rho_{ab} < 1$

La Desviación Estándar del portafolio y el Rendimiento Esperado del portafolio quedan como sigue:

$$(1) \quad \sigma_p = \sqrt{X_a^{\,2}\sigma_a^2 + (1-X_a)^2\sigma_b^2 + 2X_aX_b\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}$$

$$(2) \quad E(R_p) = X_aE(R_a) + (1-X_a)E(R_b)$$

De (1) se tiene que:

$$\sigma_p^2 = X_a^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}) + 2X_a(\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2) + \sigma_b^2$$

$$\Rightarrow \quad X_a^2 + 2X_a\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} = \frac{\sigma_p^2 - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}$$

Completando el cuadrado se tiene que:

$$\left(X_a + \frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right)^2 = \frac{\sigma_p^2 - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} + \left(\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad X_a = \pm\sqrt{\frac{\sigma_p^2 - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} + \left(\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right)^2} - \frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}$$

Substituyendo X_a en (2), se ve que la relación entre σ_p y $E(R_p)$ representa una curva.

$$E(R_p) = \left[\pm\sqrt{\frac{\sigma_p^2 - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} + \left(\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right)^2} - \frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right]\big(E(R_a) - E(R_b)\big) + E(R_b)$$

$$E(R_p) + \left[\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right]\big(E(R_a) - E(R_b)\big) - E(R_b) = \pm\sqrt{\frac{\sigma_p^2 - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} + \left(\frac{\sigma_a\sigma_b\rho_{ab} - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right)^2}\,\big(E(R_a) - E(R_b)\big)$$

Si se denota:

$$K = -\left[\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right]\big(E(R_a) - E(R_b)\big) + E(R_b)$$

$$W = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}} - \left[\frac{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b - \sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}\right]^2$$

Se tiene:

$$[E(R_p)-K]^2 = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b}(E(R_a)-E(R_b))^2 - W(E(R_a)-E(R_b))^2$$

$$\frac{[E(R_p)-K]^2}{-W(E(R_a)-E(R_b))^2}+\frac{\sigma_p^2}{(\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b)W}=1$$

Con esto se concluye que la forma del conjunto de oportunidades es un segmento de rama derecha de hipérbola horizontal[7] con centro en el punto $(0,K)$[8].

Para comprender esto, se presenta el siguiente ejemplo:

Suponiendo que existen las acciones a y b, las cuales tienen $\rho_{ab}=0$ y los siguientes datos:

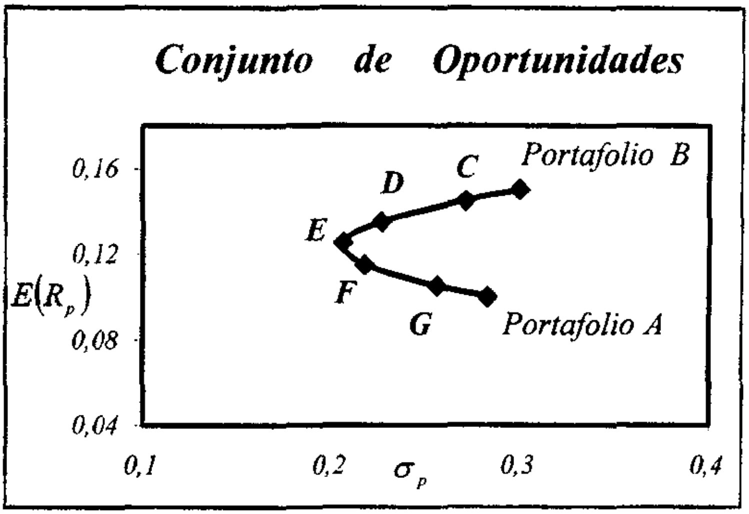
Acción	*Rendimiento Esperado*	*Varianza*
A	.10	.08
B	.15	.09

Si varían los porcentajes de inversión, se generan los siguientes portafolios:

Portafolio	*Porcentaje de inversión en la acción a* X_a	$E(R_p)$	σ_p
B	0	.15	0.3
C	.1	.145	0.2714774
D	.3	.135	0.226495
E	.5	.125	0.2061553
F	.7	.115	0.2174856
G	.9	.105	0.2563201
A	1	.10	0.2828427

[7] $W>0$ y $\sigma_a^2+\sigma_b^2-2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b>0 \quad \forall\ \rho_{ij}$

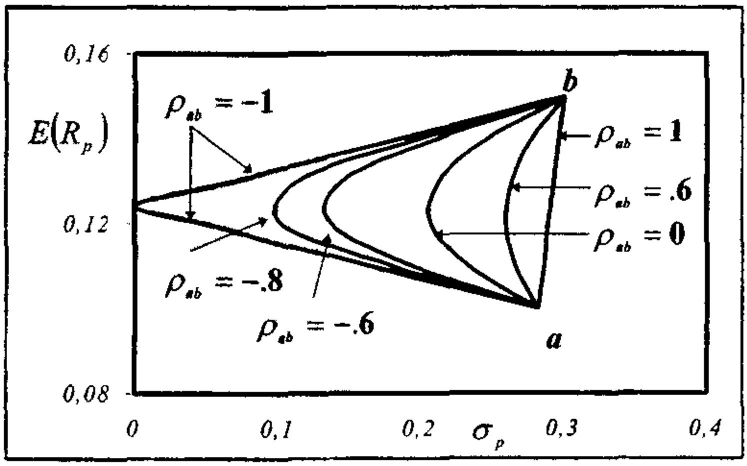
[8] Si se permitieran ventas en corto el conjunto de oportunidades sería la rama derecha completa de la hipérbola.



Gráfica 1.3

En la gráfica 1.3[9], se muestran los puntos que representan los portafolios que se generan al variar el porcentaje de inversión en las acciones *A* y *B*, en donde los extremos de la curva representan a portafolios compuestos por una acción.

En general, la representación gráfica del conjunto de oportunidades en el caso de dos tipos de acciones, presenta la forma que se ve en la gráfica 1.4:



Gráfica 1.4

---

[9] Los puntos de esta gráfica forman parte de la hipérbola $-\frac{\left(E(R_p)-.1235294118\right)^2}{.0006228373702}+\frac{\sigma_p^2}{.0423529411}=1$

Como se puede ver en la gráfica 1.4, cuando los rendimientos de las acciones están inversamente correlacionados, se generan dos líneas que se interceptan con el eje de $E(R_p)$ y si están perfectamente correlacionados, se genera la línea que une a los puntos a y b.

En cambio, cuando no están perfectamente correlacionados, se genera parte de la rama de una hipérbola horizontal, dependiendo del coeficiente de correlación la curva será más o menos "cerrada", de modo que a medida que el coeficiente se acerque a -1 la rama de la hipérbola será más "cerrada".

Si existe la posibilidad de invertir en tres tipos de acciones a, b y c, las situaciones no cambian, fijando el monto de inversión de una acción y variando el capital restante en las demás acciones, la relación entre el Rendimiento Esperado y la Desviación Estándar queda representada por una hipérbola, esto es:

Si $X_a = C \qquad C \in \Re$ entonces:

$$E(R_p) = C\,E(R_a) + (1 - C - X_c)E(R_b) + X_c E(R_c)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\begin{aligned} &C^2\sigma_a^2 + (1-C-X_c)^2\sigma_b^2 + X_c^2\sigma_c^2 + 2CX_c\sigma_a\sigma_c\rho_{ac} + 2C(1-C-X_c)\sigma_a\sigma_b\rho_{ab} \\ &+ 2X_c(1-C-X_c)\sigma_b\sigma_c\rho_{bc} \end{aligned}}$$

Despejando X_c de la expresión de la Desviación Estándar y substituyéndola en el Rendimiento Esperado, se concluye que gráficamente este conjunto de portafolios tiene la forma de una rama de hipérbola horizontal [10]. Para cada valor posible de C queda definido un segmento de una rama de hipérbola horizontal, de modo que el conjunto de oportunidades es la unión de todos los posibles segmentos de hipérbolas, es decir, una superficie curva sólida donde cada punto interior representa un portafolio.

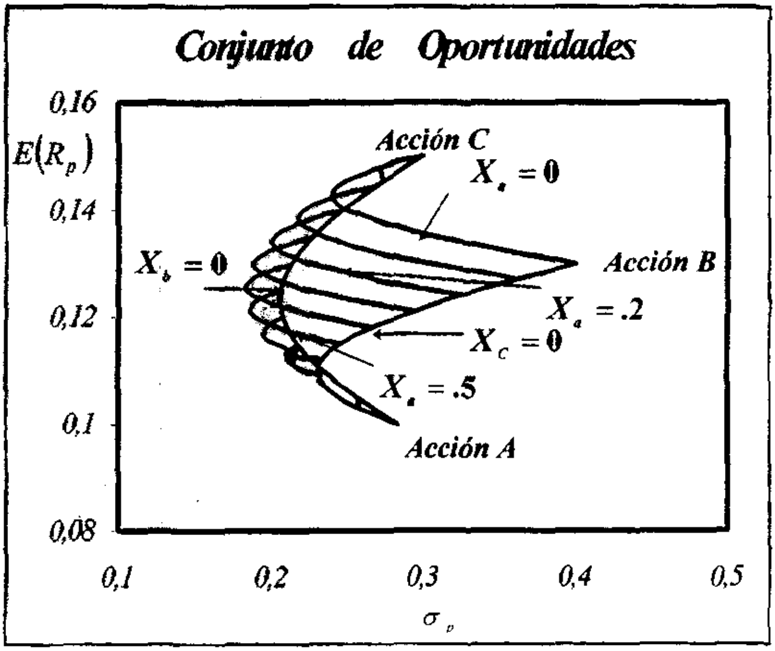
En el siguiente ejemplo numérico se supone que los coeficientes de correlación son cero y que existe la posibilidad de invertir en tres tipos de acciones:

---

[10] Anexo 3

Acción	*Rendimiento Esperado*	*Varianza*
A	.1	.08
B	.13	.16
C	.15	.09

En la gráfica 1.5 son representados algunos puntos del conjunto de oportunidades cuando se tiene la posibilidad de invertir en tres tipos de acciones. Cada una de las curvas que se ven, se generan al fijar el porcentaje de inversión en la acción *A*. Al fijar $X_a = 0$, se genera la curva que va del punto que representa la acción *B*, al punto que representa la acción *C*. A medida que se aumenta el peso de la acción *A* en el portafolio, la curva se va trasladando hacia el punto que representa la acción *A*. Cada una de estas curvas se cortan con las hipérbolas resultantes de fijar $X_b = 0$ y $X_c = 0$.



Gráfica 1.5

Si existe la posibilidad de invertir en N acciones, la situación es similar, ya que al *fijar montos de inversión en N-2 tipos de acciones, sólo queda como variable* alguna X_s. El conjunto de puntos que representan a este conjunto de portafolios es un segmento de rama de hipérbola, de modo que al variar los porcentajes de inversión, se genere un segmento de hipérbola para cada combinación posible de C's.

En general, si existe la posibilidad de invertir en N acciones, el conjunto de oportunidades está definido como:

$$C = \left\{ (u,v) \in R^2 \,\middle|\, u = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \;;\; v = \sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) \right\}$$

donde: $$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad X_i > 0 \qquad i = 1 \ldots\ldots N$$

La forma general de conjunto de oportunidades es una superficie sólida curva producto de la unión de diferentes ramas de hipérbolas horizontales.

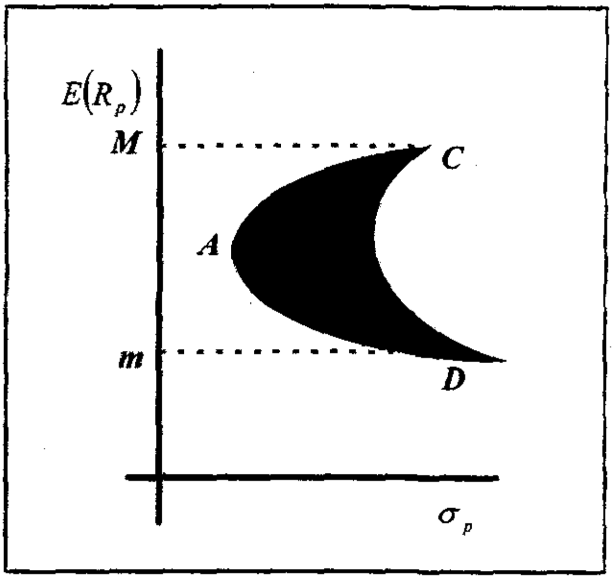
1.3.2 Y 1.3.3 CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE VARIANZA MÍNIMA Y EL CONJUNTO EFICIENTE

El conjunto de oportunidades de un portafolio, se encuentra en una franja que va *del máximo* Rendimiento Esperado al *mínimo* Rendimiento Esperado posible.

Si se denota:

$$M = max\left\{ E(R_i) \mid i = 1 \ldots N \right\} \text{ y } m = min\left\{ E(R_i) \mid i = 1 \ldots N \right\}$$

$$\Rightarrow \qquad E(R_p) \in [m, M]$$



Gráfica 1.6

En la gráfica 1.6, la curva que va del punto D al punto C pasando por el punto A recibe el nombre de ***Conjunto de Oportunidades de Varianza Mínima***, ya que proporciona la Varianza Mínima posible y por lo tanto la Desviación Estándar Mínima en *un rendimiento dado*.

El punto A representa el portafolio que tiene la Varianza Mínima Global y el punto C representa el portafolio que posee el mayor Rendimiento Esperado posible. El conjunto de puntos que van del punto A al punto C recibe el nombre de ***Conjunto de Portafolios Eficientes o Frontera Eficiente***. El criterio que se sigue para determinar la eficiencia se conoce con el nombre del ***Criterio Media-Varianza***[11].

Un portafolio P_o es eficiente, si no existe otro portafolio que lo domine.

El portafolio A domina al portafolio B si y sólo si:

$$E(R_A) \geq E(R_B) \quad y \quad \sigma^2(R_A) \leq \sigma^2(R_B)$$

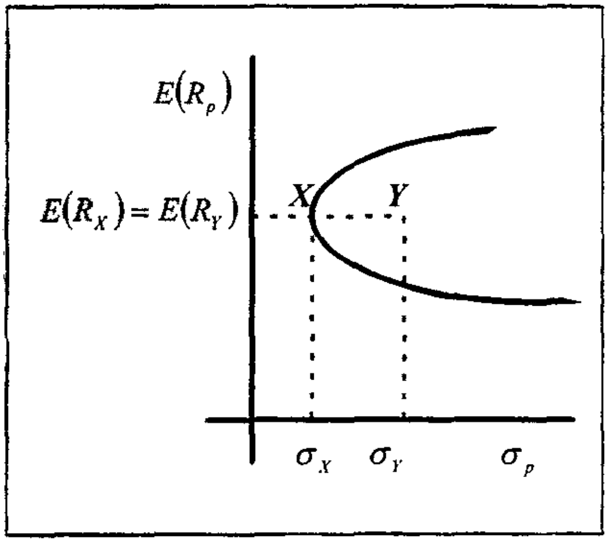
[11] Anexo 4.

En otras palabras P_o es eficiente:

- Si existe otro portafolio que proporcione mayor Rendimiento Esperado, éste debe tener mayor Varianza que P_o.

- Si existe otro portafolio que proporcione menor Varianza, éste debe tener un Rendimiento Esperado menor que P_o.

Los inversionistas aversos al riesgo elegirán únicamente aquellos portafolios que se encuentren en el conjunto eficiente, para ejemplificar ésto, en la gráfica 1.7 se tienen los portafolios X y Y, los cuales tienen el mismo Rendimiento Esperado $(E(R_X)=E(R_Y))$, sin embargo, una persona aversa al riesgo preferirá el portafolio X sobre el Y por tener una Desviación Estándar menor.



Gráfica 1.7

1.4 TEORÍA DE CAPITAL DE MERCADO

1.4.1 EL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE UN PORTAFOLIO FORMADO POR UN ACTIVO LIBRE DE RIESGO Y UNO CON RIESGO.

Si además de poder invertir en activos riesgosos (acciones), es posible pedir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo, los portafolios formados por una acción riesgosa y la tasa libre de riesgo tendrán como rendimiento:

$$R_p = aX + (1-a)R_f$$

Su Rendimiento Esperado será:

$$E(R_p) = a\,E(X) + (1-a)\,R_f$$

y su Desviación Estándar será:

$$\sigma_p = a\sigma(X)$$

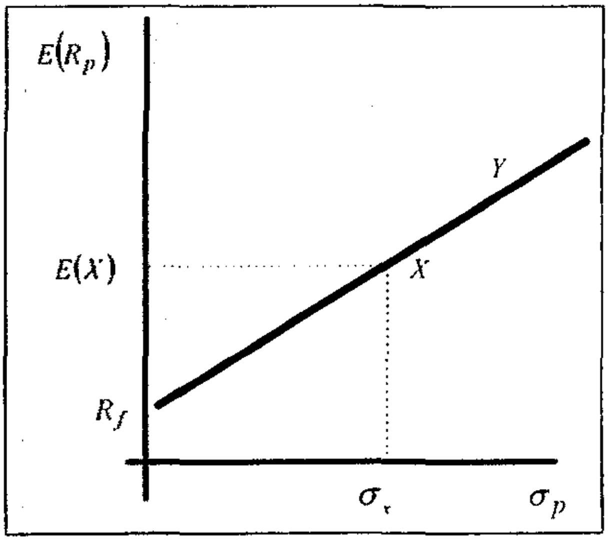
donde:

a es el porcentaje invertido en la acción X.
R_f es la tasa libre de riesgo.

Despejando $a = \dfrac{\sigma_p}{\sigma(X)}$, substituyéndola en el Rendimiento Esperado se tiene que:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= a\left(E(X) - R_f \right) + R_f \\ &= \frac{\sigma_p}{\sigma(X)}\left(E(X) - R_f \right) + R_f \end{aligned}$$

En la gráfica 1.8, el punto $(0, R_f)$ representa el portafolio en el que todo el capital se encuentra invertido a una tasa R_f, es decir, todo el capital se ha otorgado a préstamo; el segmento $R_f - X$ representa cuando se invierte "a %" del capital en la acción X; el segmento $X - Y$ representa los casos en que se invierte más del "100%" de capital en la acción X, es decir, cuando se ha recibido algún préstamo y el punto $X = (\sigma(X), E(X))$ representa aquel portafolio en el cual el "100%" del capital es invertido en la acción X.



Gráfica 1.8

1.4.2 LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES Y PORTAFOLIO DE MERCADO

La Teoría de Capital de Mercado busca explicar la realidad, sin embargo, los procesos que se siguen en los mercados financieros son complejos, por lo que es necesario establecer situaciones y supuestos que simplifiquen la realidad. La Teoría de Capital de Mercado requiere que existan condiciones de equilibrio y para que un mercado esté en equilibrio existen los siguientes supuestos:

- Los inversionistas tienen la posibilidad de recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo.

- Los inversionistas que participan en el mercado son aversos al riesgo y buscan maximizar el valor esperado de los rendimientos. Además de que toman sus decisiones de inversión en base al Rendimiento Esperado y Desviación Estándar de la distribución de los rendimientos, es decir, seleccionan sus portafolios óptimos de acuerdo al Criterio de Media-Varianza.

- Todos los inversionistas tienen el mismo horizonte de decisión, es decir, concuerdan en la definición del período que abarca su decisión.

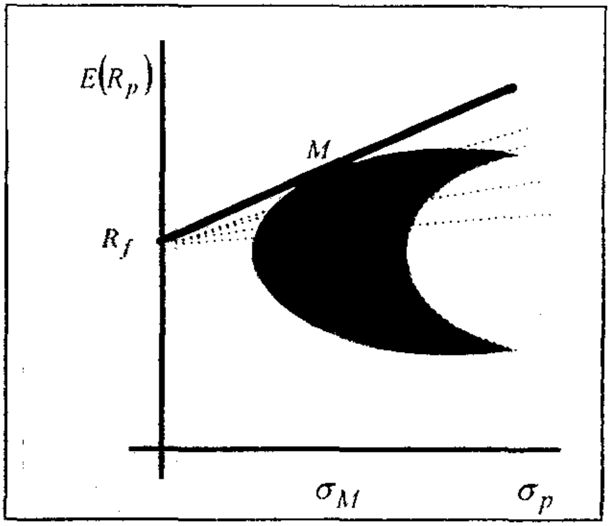
- En el mercado las acciones son infinitamente divisibles, la información es gratuita y está al alcance de todos los inversionistas; además no existen costos de transacción, ni impuestos que afecten las operaciones.

- Los inversionistas concuerdan sobre las perspectivas del futuro en términos de Rendimiento Esperado y Varianza, por lo que perciben el mismo conjunto de oportunidades.

Si no existen condiciones de equilibrio, existen presiones de cambio; estas presiones en el mercado se ven reflejadas en la variación de los precios de las acciones. En condiciones de equilibrio no existen presiones de cambio y una vez que el equilibrio es alcanzado, se mantiene.

Cuando un inversionista tiene un porcentaje de inversión positivo en el activo libre de riesgo, significa que ha prestado fondos (invierte en la tasa libre de riesgo); en cambio, si tiene un porcentaje de inversión negativo en el activo libre de riesgo, significa que ha recibido un préstamo. En condiciones de equilibrio la suma de los fondos que se solicitan en préstamo es igual a la suma de los fondos que se desean prestar.

Si se toman portafolios compuestos por N acciones riesgosas y se anexa la posibilidad de recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo, quedan definidos portafolios compuestos por $N+1$ activos financieros. Al graficar quedan definidas una infinidad de rectas, que representan los posibles portafolios formados por el activo libre de riesgo y los diferentes portafolios compuestos por N acciones.



Gráfica 1.9

Bajo estas condiciones surge lo que se conoce como la ***Línea del Mercado de Capitales***. Esta Línea es tangente con el conjunto eficiente (cuando no existen préstamos) en el punto M y en ella están los portafolios que producen el Rendimiento Esperado más alto para cada nivel de riesgo, en otras palabras, todos los portafolios eficientes se encuentran en la Línea del Mercado de Capitales y cualquier otro portafolio puede ser dominado por algún portafolio que se encuentre en ésta (gráfica 1.9).

En condiciones de equilibrio, los inversionistas que sean aversos al riesgo seleccionarán el portafolio representado por el punto M como portafolio riesgoso óptimo, esto no significa que todos los inversionistas escogen el mismo portafolio, algunos prestan fondos, otros reciben fondos y otros ninguna de las dos cosas, pero cada inversionista distribuye su capital en riesgo en la misma composición que el portafolio representado por el punto M. Los inversionistas conservadores prestarán algo de su capital y el resto lo invertirán en el portafolio de M; en cambio, los menos conservadores pedirán prestado, pero el portafolio que eligen se encuentra en la Línea del Mercado de Capitales. Como todos los inversionistas distribuyen su capital de acuerdo a la composición del portafolio representado por el punto M, a continuación se puede ver que este portafolio tiene que ser el Portafolio de Mercado.

Si X_i es la proporción del capital que cualquier inversionista coloca en la acción i, C_j representa el capital total del inversionista j y V_{ij} es el valor de mercado de la acción i en poder del inversionista j, esto es $V_{ij} = X_i C_j$, entonces si existen m inversionistas:

$$\sum_{j=1}^{m} V_{ij} = \sum_{j=1}^{m} X_i C_j = X_i \sum_{j=1}^{m} C_j = X_i C$$

$$\sum_{j=1}^{m} V_{ij} = V_i$$

C representa el capital total invertido en el mercado, V_i representa el valor del mercado de las acciones *i*, entonces $V_i = X_i C$. Pero el total C del capital invertido en el mercado debe ser igual a la suma de los valores totales de mercado de todas las *N* acciones, es decir:

$$C = \sum_{i=1}^{N} V_i \quad \text{entonces } V_i = X_i \sum_{i=1}^{N} V_i \ \text{ y } \ X_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i} > 0$$

Así el porcentaje de inversión en la acción i, es el cociente entre el valor de mercado de los títulos del activo y la suma de los valores de mercado de todos los títulos del mercado, lo cual es precisamente la definición de ***Portafolio de Mercado.***

$$X_i = \frac{P_i Q_i}{\sum_{i=1}^{N} P_i Q_i} = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i} \qquad i = 1 \ldots N$$

donde:

P_i representa el precio por unidad de la acción i.

Q_i representa el número de acciones i que existen en el mercado.

Por lo tanto la Línea del Mercado de Capitales es tangente con el conjunto de oportunidades en el punto representado por el Portafolio de Mercado, lo que representa la intercompensación entre rendimiento y riesgo en un mercado en equilibrio. Con esto se puede ver que la Desviación Estándar para un portafolio eficiente es la medida adecuada para el riesgo.

La Línea del Mercado de Capitales tiene la siguiente ecuación:

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}\sigma_p$$

donde:

$E(R_p)$ es la tasa esperada de rendimiento de los portafolios formados por el activo libre de riesgo y el Portafolio de Mercado.

R_f es la tasa libre de riesgo.

$E(R_M)$ es la tasa esperada de rendimiento sobre el Portafolio de Mercado.

$\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$ es la tasa de mercado de intercambio entre el riesgo y rendimiento.

A la pendiente se le conoce en un mercado en equilibrio como ***el precio del riesgo*** e indica el Rendimiento Esperado que puede recibir, si riesgo adicional es aceptado (mayor Desviación Estándar) y a la vez muestra el precio de la reducción del riesgo en el decremento del Rendimiento Esperado.

1.4.3 LA RECTA DEL MERCADO DE VALORES

La Línea del Mercado de Capitales únicamente representa la relación entre Rendimiento Esperado y riesgo para portafolio eficientes, sin embargo, existe una relación entre el Rendimiento Esperado y el riesgo de cualquier acción o portafolio sin importar que éste no sea eficiente.

Tomando el portafolio compuesto por el Portafolio de Mercado y la acción *i*, se tiene que:

$$E(R_p) = X_i E(R_i) + X_M E(R_M)$$

$$\sigma_p^2 = X_i^2\sigma_i^2 + (1 - X_i)^2\sigma_M^2 + 2X_i(1 - X_i)\sigma_{iM}$$

$$X_i + X_M = 1$$

Variando el porcentaje de inversión en la acción *i*, se obtienen diferentes portafolios, los cuales al ser graficados son representados por una curva, esta curva debe ser tangente[12] a la Línea del Mercado de Capitales en el punto que representa al Portafolio de Mercado. Si el Rendimiento Esperado es visto como una función de la Desviación Estándar, la derivada de ésta evaluada en el punto que representa al Portafolio de Mercado, debe ser igual a la pendiente de la Línea del Mercado de Capitales, esto es:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial E(R)}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial E(R_p)/\partial X_i}{\partial \sigma_p/\partial X_i} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

Calculando las derivadas se tiene que:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial X_i} = E(R_i) - E(R_M)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial X_i} = \frac{X_i\left(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{iM}\right) + \sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_p}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial E(R)}{\partial \sigma_p} = \frac{\left(E(R_i) - E(R_M)\right)\sigma_p}{X_i\left(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{iM}\right) + \sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

Evaluando en $X_i = 0$ y $\sigma_p^2 = \sigma_M^2$

[12] La curva debe ser tangente, ya que si no lo fuera, implicaría que la Línea del Mercado de Capitales no es la frontera eficiente.

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{\left(E(R_i) - E(R_M) \right) \sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

Igualando con la pendiente de la Línea del Mercado de Capitales se tiene que:

$$\frac{\left(E(R_i) - E(R_M)\right) \sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

$$E(R_i) - E(R_M) = \frac{\left(E(R_M) - R_f\right)\left(\sigma_{iM} - \sigma_M^2\right)}{\sigma_M^2}$$

$$E(R_i) = E(R_M) + \frac{\left(E(R_M) - R_f\right)\left(\sigma_{iM}\right)}{\sigma_M^2} - E(R_M) + R_f$$

De esta relación se llega a la ecuación de ***La Recta del Mercado de Valores***:

$$E(R_i) = R_f + \frac{\left(E(R_M) - R_f\right) \sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

La Recta del Mercado de Valores proporciona la relación que existe en condiciones de equilibrio entre el Rendimiento Esperado y el riesgo de cualquier activo financiero, el cual es medido por la Covarianza entre la acción i y el Portafolio de Mercado.

En equilibrio todas las acciones y portafolios estarán representados en la Recta del Mercado de Valores, ya que:

Por definición la Covarianza entre una acción i y el Portafolio de Mercado es:

$$\sigma_{iM} = \sum_{t=1}^{T} P_t (R_{it} - E(R_i))(R_{Mt} - E(R_M)) \qquad i = 1 \ldots N$$

Si se tiene el portafolio Z compuesto por N activos financieros, se tiene que:

$$R_Z = \sum_{j=1}^{N} X_j R_j \qquad j = 1 \ldots N$$

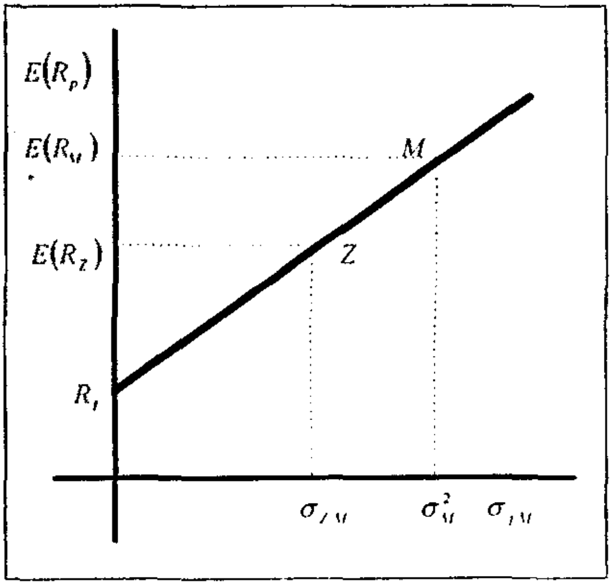
Entonces la Covarianza entre el portafolio Z y el Portafolio de Mercado es:

$$\sigma_{ZM} = \sum_{t=1}^{T} P_t (R_{Zt} - E(R_Z))(R_{Mt} - E(R_M))$$

$$= \sum_{t=1}^{T} P_t \left(\sum_{j=1}^{N} X_j R_{jt} - \sum_{j=1}^{N} X_j E(R_j) \right) (R_{Mt} - E(R_M)) = \sum_{j=1}^{N} X_j \sum_{t=1}^{T} P_t (R_{jt} - E(R_j))(R_{Mt} - E(R_M))$$

$$\sigma_{ZM} = X_1 \sigma_{1M} + X_2 \sigma_{2M} + \ldots\ldots + X_N \sigma_{NM}$$

Por lo tanto cualquier combinación posible de valores genera un punto $(\sigma_{ZM}, E(R_Z))$, el cual se encuentra contenido en la Recta del Mercado de Valores (gráfica 1.10).



Gráfica 1.10

La Teoría de Capital de Mercado propone que existe una relación lineal entre el rendimiento de cualquier acción i y el rendimiento del Portafolio de Mercado, la cual es representada gráficamente por la Línea Característica de la acción y contiene el punto $(E(R_M), E(R_i))$.

La ecuación de la ***Línea Característica*** de la acción puede ser escrita como:

$$(1) \qquad R_i = a_i + \beta_i \, R_M \quad \text{de modo que:} \quad E(R_i) = a_i + \beta_i \, E(R_M)$$

Si la Línea característica representa la relación entre la acción i y el Portafolio de Mercado, debe ser posible determinar la Covarianza que existe entre éstos a partir de la posición de la linea característica y de las probabilidades de los valores de R_M. La Covarianza de acuerdo con la línea característica de la acción es:

$$\sigma^*_{iM} = \sum_{t=1}^{T} P_t (R^*_{it} - E(R_i))(R_{tM} - E(R_M))$$

donde:

R^*_{it} es el valor determinado por la Línea Característica y los valores de R_{tM}.

P_t es la probabilidad de que se de R_{tM}.

Substituyendo (1) en la Covarianza, se tiene que:

$$\sigma^*_{iM} = \sum_{t=1}^{T} P_t (R^*_{it} - E(R_i))(R_{tM} - E(R_M))$$

$$\sigma^*_{iM} = \sum_{t=1}^{T} P_t ((a_i + \beta_i R_{tM}) - (a_i + \beta_i E(R_M))(R_{tM} - E(R_M))$$

$$\sigma^*_{iM} = \beta_i \sum_{t=1}^{T} P_t (R_{tM} - E(R_M))(R_{tM} - E(R_M))$$

$$\sigma^*_{iM} = \beta_i \sum_{t=1}^{T} P_t (R_{tM} - E(R_M))^2 = \beta_i \, \sigma^2_M$$

Como se requiere que la Covarianza estimada de acuerdo a la **Línea** Característica sea igual a la covarianza real ($\sigma^{*}_{iM} = \sigma_{iM}$), se concluye que:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M}$$

donde:

β_i es la pendiente de la Línea Característica y se le conoce como la *beta* de la acción.

Este parámetro mide la *volatilidad* del rendimiento de la acción i respecto a los cambios en el rendimiento del Portafolio de Mercado. Esta medida es importante, ya que a partir de ella se llega otra medida que permite medir la volatilidad de un portafolio a partir de la volatilidad de cada una de las acciones que lo componen. Como se vió antes:

$$\sigma_{ZM} = X_1\sigma_{1M} + X_2\sigma_{2M} + \ldots\ldots + X_N\sigma_{NM}$$

Entonces la *volatilidad de un portafolio* en términos de la volatilidad de las acciones es:

$$\beta_Z\sigma^2_M = X_1\beta_1\sigma^2_M + X_2\beta_2\sigma^2_M + \ldots\ldots + X_N\beta_N\sigma^2_M$$

$$\Rightarrow \beta_Z = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \ldots\ldots + X_N\beta_N$$

La Varianza de una acción de acuerdo a la Línea Característica, se le conoce como ***riesgo sistemático*** de la acción, porque depende totalmente de la relación que existe entre la acción i y el Portafolio de Mercado:

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{T} P_t((a_i + \beta_i R_M) - (a_i + \beta_i E(R_M))^2$$

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{T} P_t(\beta_i(R_M - E(R_M)))^2 = \beta_i^2\sigma^2_M$$

En equilibrio todos los puntos que representan la relación entre los rendimientos de la acción *i* y el rendimiento del Portafolio de Mercado, se encuentran en la Línea Característica de la acción *i*, sin embargo, la ecuación de la Línea Característica es una aproximación a la realidad y cabe la posibilidad de que esto no sea así; y que la Varianza real de la acción sea otra. A la diferencia entre la Varianza real y el riesgo sistemático de la acción se le conoce como ***riesgo no sistemático*** de la acción, porque no depende de la relación entre la acción *i* y el Portafolio de Mercado.

Como la relación entre riesgo sistemático y volatilidad es la misma para acciones y portafolios, entonces el ***riesgo sistemático de un portafolio*** es:

$$\sigma_p = \beta_p \sigma_M$$

De lo anterior se concluye que el riesgo de un portafolio o acción está compuesto de dos tipos de riesgo: ***sistemático*** (no diversificable) y ***no sistemático*** (diversificable).

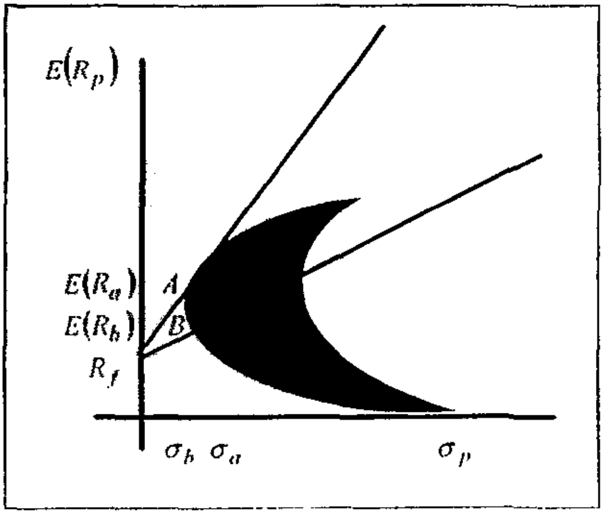
1.5 TÉCNICAS PARA CALCULAR LA FRONTERA EFICIENTE

Para calcular la frontera eficiente, existen cuatro situaciones básicas de supuestos en las que se da la selección de portafolio y éstas son:

- Se permiten ventas en corto, así como recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo.
- Se permiten ventas en corto, pero recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo no es posible.
- La ventas en corto no son permitidas, pero recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo es posible.
- Las ventas en corto no son permitidas, ni recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo.

A) SE PERMITEN VENTAS EN CORTO, ASÍ COMO RECIBIR Y OTORGAR PRÉSTAMOS

Si existe la posibilidad de recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo, implica la existencia de un portafolio que es preferido sobre los otros, esto se puede ver en la gráfica 1.11:



Gráfica 1.11

En la gráfica anterior, los puntos A y B representan a los portafolios riesgosos A y B, con la existencia de la tasa libre de riesgo quedan definidas dos rectas que pasan por el punto $(0, R_f)$, la recta que contiene el segmento $R_f - B$ representa los portafolios que se generan al variar el monto de la inversión en el portafolio B y la recta que contiene el segmento $R_f - A$ representa los portafolios en los que varía el monto de la inversión en el portafolio A. Se puede ver gráficamente que la frontera eficiente es aquella recta que posea la mayor pendiente. En este caso la recta que contiene el segmento $R_f - A$ representa la frontera eficiente de los portafolios, ya que cualquier otro portafolio es dominado con algún portafolio en esta recta.

En general, para determinar que recta es la frontera eficiente, es necesario determinar el portafolio que maximiza la pendiente de la recta, que se genera al variar los montos de inversión entre la tasa libre de riesgo y cualquier portafolio formado por activos riesgosos, es decir:

$$Max \qquad \theta = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

$$s.a. \; \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Este problema puede ser resuelto mediante la substitución de la restricción en la función objetivo y resolverse como un problema de maximización sin restricciones. Entonces se tiene que:

$$R_f = 1 * R_f = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right) R_f = \sum_{i=1}^{N} X_i R_f$$

Substituyendo esto en la función objetivo:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i \left(E(R_i) - R_f \right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \right)^{1/2}}$$

El siguiente paso es determinar la derivada de la función respecto a X_k e igualar a cero, esto es:

$$\frac{d\theta}{dX_k}=\left[\sum_{i=1}^{N}x_i(E(R_i)-R_f)\right]\left[-\left(\sum_{i=1}^{N}X_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}X_iX_j\sigma_{ij}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\left(X_k\sigma_k^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}X_j\sigma_{kj}\right)+\left[\sum_{i=1}^{N}X_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}X_iX_j\sigma_{ij}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\left(E(R_k)-R_f\right)\right]=0$$

Multiplicando por la Desviación Estándar queda que:

$$-\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i(E(R_i)-R_f)}{\sum_{i=1}^{N}X_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}X_iX_j\sigma_{ij}}\right]\left[X_k\sigma_k^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}X_j\sigma_{kj}\right]+\left[E(R_k)-R_f\right]=0$$

definiendo a λ como $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N}X_i(E(R_i)-R_f)}{\sum_{i=1}^{N}X_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}X_iX_j\sigma_{ij}}\right]$

Se tiene que:

$$-\lambda\left[X_k\sigma_k^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}X_j\sigma_{kj}\right]+\left[E(R_k)-R_f\right]=0$$

Entonces:

$$\frac{d\theta}{dX_i}=-\left(\lambda X_1\sigma_{1i}+\lambda X_2\sigma_{2i}+\ldots\ldots+\lambda X_i\sigma_i^2+\ldots\ldots+\lambda X_N\sigma_{Ni}\right)+E(R_i)-R_f=0$$

Si se define $Z_i = \lambda X_i$ y se despeja $E(R_i) - R_f$ para toda i, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
E(R_1) - R_f &= Z_1\sigma_1^{\,2} + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{13} + \ldots\ldots + Z_N\sigma_{1N} \\
E(R_2) - R_f &= Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^{\,2} + Z_3\sigma_{23} + \ldots\ldots + Z_N\sigma_{2N} \\
&\vdots \\
E(R_N) - R_f &= Z_1\sigma_{1N} + Z_2\sigma_{2N} + Z_3\sigma_{3N} + \ldots\ldots + Z_N\sigma_N^{\,2}
\end{aligned}
$$

Una vez que se determina el valor de Z_i, como $Z_i = \lambda X_i$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda\, X_i = \lambda$$

Por lo que es posible determinar el valor de los porcentajes de inversión:

$$X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{N} Z_i}$$

El paso siguiente es evaluar los porcentajes de inversión en el hessiano de θ[13], de modo que calculando los determinantes de las N *submatrices cuadradas de* KxK a lo largo de su diagonal, si los signos de los determinantes tienen el mismo signo que $(-1)^K$ $K = 1\ldots N$, se trata de un máximo local.[14]

Una vez que se han determinado los porcentajes de inversión del portafolio que maximiza la pendiente, es posible determinar la frontera eficiente, en este caso tiene la siguiente ecuación:

---

[13] Matriz simétrica de NxN, cuya entrada (i, j) es $\frac{\partial^2 \theta}{\partial X_i \, \partial X_j}$

[14] LINTNER, J. en The evaluation of risk assets and the selection of risk investments in stock portfolio and capital budgets, the review of economics and statistics, Vol. XLVII, Feb. 1965. Demostró que aquel portafolio que $\frac{\partial \theta}{\partial X_i} = 0$ $i = 1 \ldots N$, es un máximo absoluto.

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R^*) - R_f}{\sigma^*} \sigma_p$$

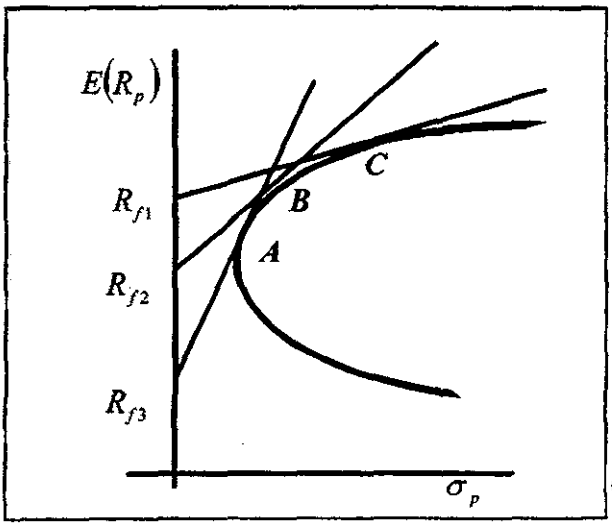
donde:

$E(R^*)$ es el Rendimiento Esperado que produce el portafolio que maximiza la pendiente.

σ^* es la Desviación Estándar que produce el portafolio que maximiza la pendiente.

B) SE PERMITEN VENTAS EN CORTO, PERO RECIBIR Y OTORGAR PRÉSTAMOS NO ES POSIBLE.

Para resolver este caso es necesario suponer que es posible pedir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo, de modo que se pueda encontrar posteriormente el portafolio asociado que maximiza la pendiente para esa tasa libre de riesgo. Como se puede ver en la gráfica 1.12, de manera intuitiva, si se toman diferentes tasas libres de riesgo y se determina el portafolio que maximiza la pendiente para cada valor de R_f, se irán generando puntos de la frontera eficiente.



Gráfica 1.12

En el caso anterior, cuando eran posibles las ventas en corto, pedir y otorgar préstamos, se tenía un sistema de ecuaciones en el que se sustituían diferentes valores, si el sistema de ecuaciones se simplifica y se hace que únicamente dependa de la tasa libre de riesgo como parámetro, al resolverlo la incógnita quedará en términos de la tasa libre de riesgo, esto es:

$$(1) \quad Z_k = C_{0K} + C_{1K} R_f \qquad k = 1 \ldots N$$

donde:

C_{0k} y C_{1k} son constantes.

Una vez que Z_k queda en función de R_f, es posible hacer variar R_f y determinar varios puntos de la frontera eficiente.

COEFICIENTE GENERAL DE DOS PORTAFOLIOS

Para determinar el valor de los coeficientes C_{0k} y C_{1k} existe un método sencillo, el cual consiste en resolver el sistema simultáneo de N ecuaciones para dos valores de $R_f\left(R_{f1} \text{ y } R_{f2}\right)$, de modo que se obtengan dos valores para Z_k $\left(Z_{k1} \text{ y } Z_{k2}\right)$. Posteriormente se substituyen estos valores en (1), quedando definido el sistema de ecuaciones:

$$Z_{k1} = C_{0k} + C_{1k} R_{f1} \qquad k = 1 \ldots\ldots N$$
$$Z_{k2} = C_{0k} + C_{1k} R_{f2}$$

En este sistema las incógnitas son los valores de C_{0k} y C_{1k}, al resolverlo será posible substituir los resultados en (1), de modo que al variar los valores de la tasa libre de riesgo, será posible determinar los porcentajes de inversión de cada uno de los portafolios eficientes y por lo tanto generar portafolios de la frontera eficiente.

C) LAS VENTAS EN CORTO NO SON PERMITIDAS, PERO RECIBIR Y OTORGAR PRÉSTAMOS ES POSIBLE

Este caso es análogo al que permite ventas en corto, así como recibir y otorgar préstamos a una tasa libre de riesgo; la única diferencia es que los inversionistas no pueden tener porcentajes de inversión negativos, por lo que ahora el problema que se quiere resolver es:

$$Max \quad \theta = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i$$

Este es un problema de programación cuadrática y para resolverlo se pueden utilizar diferentes métodos, los cuales pueden ser consultados en obras de autores diversos.[15]

D) LAS VENTAS EN CORTO NO SE PERMITEN, NI RECIBIR Y OTORGAR PRÉSTAMOS.

En este caso el conjunto eficiente se determina mediante la minimización del riesgo para cada uno de los posibles Rendimientos Esperados, de modo que si se especifican éstos y se minimiza el riesgo, es posible obtener un punto en la frontera eficiente. El problema que se desea resolver es:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) = E(R_p)$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i$$

[15] WINSTON, WAYNE L. Introduction to Mathematical Programming Applications and Algorithms, Pws-Kent, Boston 1991.

Variando el Rendimiento Esperado entre el Rendimiento del portafolio con Varianza mínima y el Rendimiento del portafolio con Varianza máxima, se podrá trazar la frontera eficiente. Al igual que en el caso anterior el problema es de programación cuadrática y para resolverlo se pueden consultar obras de autores diversos.[16]

[16] WINSTON, WAYNE L. Introduction to Mathematical Programming Applications and Algorithms, Pws-Kent, Boston 1991.

1.6 DIVERSIFICACIÓN DE UN PORTAFOLIO

Se conoce con el nombre de ***Diversificación*** a la disminución del riesgo en un portafolio a medida que en él aumenta el número de acciones que participan.

Para entender esto, es necesario recordar que la Varianza se define como:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j Cov(R_i, R_j) \quad i = 1 \ldots\ldots N$$

donde:

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i

N es el número de acciones en el portafolio

Si se supone que se invierte la misma cantidad en cada acción, se tiene que:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^2} Cov(R_i, R_j)$$

Esta expresión puede ser separada en dos partes: Varianzas y Covarianzas

$$Var(R_p) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Cov(R_i, R_j)$$

Suponiendo que la Varianza más grande es L y que $\overline{Cov(R_i, R_j)}$ es el promedio de las Covarianzas, entonces se tiene que:

$$Var(R_p) \leq \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} L + \frac{1}{N^2}(N^2 - N)\overline{Cov(R_i, R_j)}$$

$$= \frac{1}{N^2}(NL) + \left(\frac{N^2}{N^2}\right)\overline{Cov(R_i, R_j)} - \frac{1}{N}\overline{Cov(R_i, R_j)}$$

$$= \frac{L}{N} + \overline{Cov(R_i, R_j)} - \frac{1}{N} Cov(R_i, R_j)$$

Si a esta expresión se le calcula el límite cuando N tiende a infinito, es posible ver que:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{L}{N} + \overline{Cov(R_i, R_j)} - \frac{1}{N}\overline{Cov(R_i, R_j)} = \overline{Cov(R_i, R_j)}$$

Así es posible observar que a medida que un portafolio está más diversificado, su riesgo tiende a ser el promedio de las Covarianzas de sus acciones.

1.6.1 COMPONENTES DEL RIESGO

Es posible ver en este punto que el riesgo de un portafolio se compone de dos partes o tipos de riesgo:

$$Var(R_p) = Riesgo \quad no \quad diversificable + Riesgo \quad diversificable$$

El ***Riesgo no diversificable,*** es decir, aquel que está relacionado con el mercado, es:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Cov(R_i, R_j)$$

El ***Riesgo diversificable,*** es decir, aquel que se puede eliminar mediante la diversificación, ya que a medida que el número de acciones aumenta éste tenderá a ser cero, es:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2$$

CAPÍTULO 2

Modelos de Portafolios

2.1 MODELO CLÁSICO DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN: FORMULACIÓN DE MARKOWITZ

La Teoría moderna de portafolios de inversión tiene sus fundamentos en el trabajo realizado por Harry Markowitz (1952 y 1959)[1]; la mayoria de las investigaciones subsecuentes siguen la dirección marcada por él. En general su trabajo desarrolla el tema de la selección de portafolios eficientes y propone como criterio de eficiencia al Criterio Media-Varianza.

2.1.1 SUPUESTOS

Este modelo sigue los siguientes supuestos:

- Los inversionistas son racionales, es decir, prefieren un Rendimiento Esperado alto a uno bajo.
- Los inversionistas consideran indeseable la variabilidad del rendimiento. La variabilidad va asociada con riesgo, el cual es medido por la Varianza y por la Desviación Estándar de los rendimientos (es decir, el inversionista es averso al riesgo en el sentido de que prefiere un portafolio que posea una Desviación Estándar pequeña a uno con una Desviación Estándar grande).
- Los rendimientos de las acciones siguen una distribución normal.
- Los inversionistas buscan maximizar su utilidad esperada.

[1] MARKOWITZ,HARRY M., Portfolio, Efficient Diversification of Investments, John Wiley and Sons, 1959.
Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. VII, No.1 (Marzo, 1952).

El proceso de selección tiene dos fases:

1. ***Fase objetiva***: Determinar el conjunto de portafolios eficientes de un universo de N acciones, de acuerdo al Criterio de Media-Varianza CMV. Un portafolio eficiente Po es aquel que cumple, que si existiera un portafolio que tuviera un Rendimiento Esperado mayor, es por que tiene una Varianza mayor que Po; y si existiera un portafolio con Varianza menor es porque tiene un Rendimiento Esperado menor que Po, además de que es un portafolio legítimo, es decir, excluye ventas en corto.[2]

2. ***Fase subjetiva***: Seleccionar el portafolio eficiente que proporcione al inversionista la combinación de valores más agradable.

2.1.2 PLANTEAMIENTO GENERAL

El Trabajo de Markowitz no cuenta con un planteamiento de problema de optimización, por lo que no determina un portafolio único, si no que proporciona un conjunto de portafolios eficientes, es decir, cada portafolio proporciona el mínimo riesgo dado un nivel de Rendimiento Esperado. A través de esto se soluciona la primera fase en la selección de un portafolio. Sin embargo, se desconoce la función de utilidad del inversionista, por lo que la segunda fase de la selección puede ser solucionada planteando el problema de varias formas.

Un planteamiento que solucionaría la segunda fase en la selección de un portafolio, es plantearlo como un problema de optimización que minimice la Varianza, sujeto a un nivel de Rendimiento Esperado mínimo seleccionado por el inversionista, lo cual permitiría satisfacer las preferencias subjetivas del inversionista. El problema a resolver sería:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{N} E(R_i)X_i \geq \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad X_i \geq 0 \qquad i = 1.....N$$

[2] El valor de las $X_i > 0 \quad i = 1...N$

donde:

σ_{ij} es la Covarianza entre los rendimientos de la acción i y la acción j.

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i.

$E(R_i)$ es el Rendimiento Esperado de la acción i.

β es el rendimiento mínimo que le gustaría al inversionista recibir.

Otro planteamiento que podría seguirse es el del Modelo de Sharpe, en éste se integra una medida de aversión al riesgo y debe variar dependiendo la actitud al riesgo del inversionista:

$$Max \sum_{i=1}^{N} X_i E(Ri) - A \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$s.a \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i > 0 \qquad i = 1.....N$$

donde:

σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de la acción i y la acción j.

A es un coeficiente de aversión al riesgo $(A > 0)$.

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i.

$E(R_i)$ es el Rendimiento Esperado de la acción i.

2.1.3 DESVENTAJAS

Si bien este modelo es la base de la Teoría moderna de portafolios, en la práctica no suele ser usado en portafolios a gran escala; los inversionistas prefieren ahorrar tiempo y trabajo utilizando modelos de equilibrio que brindan grandes simplificaciones al problema original.

Algunas de las causas son:

- La carga de calcular los $N(N+1)/2$ parámetros de la matriz de covarianza a través de datos históricos o proyecciones futuras. Este es el principal motivo por el que no se utiliza este modelo, si se piensa que en la Bolsa Mexicana de Valores cotizan más de 200 tipos diferentes de acciones, para aplicarlo se tendrían que calcular más de 20,100 parámetros; además de que esta situación se agravaría, si se tratara de un mercado internacional.

- El criterio para determinar el conjunto de portafolios eficientes concuerda con la Teoría de la Utilidad, sólo si la percepción del riesgo que tiene el inversionista es adecuada, es decir, sus preferencias son representadas a través de una función de utilidad cuadrática[3] o a través de una función de utilidad cóncava, si los rendimientos se distribuyen normalmente.

- La Validez de la distribución de los rendimientos, esto es que muchos inversionistas e investigadores no están convencidos del supuesto de que los rendimientos se distribuyen normalmente.

[3] Anexo 4

2.2 MODELO DEL INDICE SIMPLE: MODELO DE SHARPE

Este modelo fue propuesto por William F. Sharpe[4] en 1963, con el objetivo de simplificar el problema planteado por Markowitz, ya que a medida que analiza un número mayor de acciones, se torna más complejo y laborioso calcular las covarianzas existentes entre cada par de acciones.

Este modelo facilita en gran medida la selección de un portafolio, gracias al conjunto de supuestos que simplifican las comparaciones entre las acciones y reduce los parámetros por calcular.

2.2.1 SUPUESTOS

- Los inversionistas son racionales, es decir, prefieren un Rendimiento Esperado alto a uno bajo.

- Los inversionistas son aversos al riesgo, es decir, prefieren una Varianza menor a una mayor.

- Los inversionistas toman sus decisiones de acuerdo al Criterio Media-Varianza.

- Existe una relación entre las diferentes acciones y algún indicador de mercado. De tal modo, que el rendimiento de una acción es determinado por el nivel de algún indicador de mercado[5], esto es:

$$R_i = A_i + \beta_i I + e_i \qquad i = 1 \ldots\ldots N$$

donde:

A_i es el componente de la acción i independiente del mercado.

β_i es una constante que mide el cambio esperado en el rendimiento de la acción i respecto al indicador de mercado.

e_i es un variable aleatoria , que mide el error aleatorio.

I es el nivel de un indicador de mercado.

---

[4] WILLIAM F. SHARPE, A Simplified Model for Portfolio Analysis, Managament Science, Enero, 1963.

[5] De manera intuitiva es posible ver que cuando el mercado sube de acuerdo a algún indicador, muchas acciones tienden a subir de precio y cuando el mercado anda a la baja, muchas acciones tienden a decrecer en su precio

e_i e I son variables aleatorias y cada una tiene una distribución de probabilidad con Media y Desviación Estándar.

- El nivel futuro del indicador de mercado es determinado por dos factores, esto es:

$$I = A_{n+1} + e_{n+1}$$

donde:

A_{n+1} es un parámetro que indica el valor esperado de I

e_{n+1} es la variable aleatoria que mide el error del parámetro A_{n+1}.

- $E(e_{n+1}) = 0$
- $Var(e_{n+1}) = Q_{n+1}$
- $E(e_i) = 0$ y $Var(e_i) = Q_i$ $\quad i = 1 \ldots\ldots N$
- $C(e_i, e_j) = 0$ $\quad j = 1 \ldots\ldots N \quad i = 1 \ldots\ldots N \quad i \neq j$
- $C(I, e_i) = 0$ $\quad i = 1 \ldots\ldots N$
- El valor del Rendimiento Esperado de una acción esta dado por:

$$E(R_i) = E(A_i + \beta_i\, I + e_i) = E(A_i) + E(\beta_i\, I) + E(e_i) = A_i + \beta_i\, E(I)$$

- La Varianza por:

$$Var(R_i) = E\left[\left(A_i + \beta_i\, I + e_i - E\left(A_i + \beta_i\, I + e_i \right) \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\left(A_i + \beta_i\, I + e_i - A_i - \beta_i\, E(I) \right)^2 \right] = E\left[\left(\beta_i\, I + e_i - \beta_i E(I) \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\left(\beta_i \left(I - E(I) \right) + e_i \right)^2 \right] = E\left[\beta_i^2 \left(I - E(I) \right)^2 \right] + E\left(e_i^2 \right)$$

$$= \beta_i^2\, Var(I) + Var(e_i)$$

- $Cov(R_i, R_j) = E\left[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j)) \right] = E\left[\beta_i (I - E(I)) \beta_j (I - E(I)) \right]$

$$= E\left[\beta_i \, \beta_j (I - E(I))^2 \right] = \beta_i \, \beta_j \, E\left[(I - E(I))^2 \right] = \beta_i \, \beta_j \, Var(I)$$

De acuerdo a lo anterior, el rendimiento de un portafolio es:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \, (A_i + \beta_i \, I + e_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(A_i + e_i \right) + \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right] I$$

Se define $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$ entonces:

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{i=1}^{N} X_i (A_i + e_i) + X_{n+1} \, I \\ &= \sum_{i=1}^{N} X_i (A_i + e_i) + X_{n+1} \left(A_{n+1} + e_{n+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} X_i (A_i + e_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto el Rendimiento Esperado de un portafolio será:

$$E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_i (A_i + e_i) \right) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i \, A_i$$

Y la Varianza del rendimiento de un portafolio será:

$$Var(R_p) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_i (A_i + e_i) - \sum_{i=1}^{N+1} X_i \, A_i \right)^2 \right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_i \, e_i \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 E\left(e_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 Q_i$$

2.2.2 PLANTEAMIENTO GENERAL

El problema es planteado como sigue:

$$
\begin{aligned}
Max \sum_{i=1}^{N+1} X_i A_i - A \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 Q_i \\
s.a. \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\
\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i = X_{n+1} \\
X_i \geq 0 \qquad i = 1..N
\end{aligned}
$$

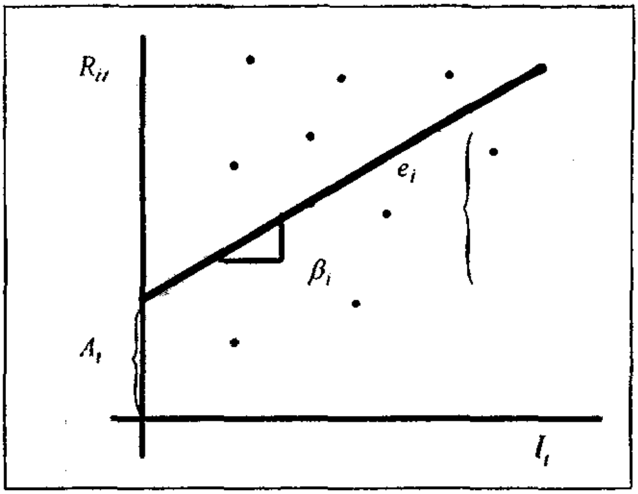
donde:

A es un coeficiente de aversión al riesgo $(A > 0)$.

El Modelo de Índice Simple requiere de la estimación de los valores de A_i, β_i y Q_i para cada unas de las diferentes N acciones, además de A_{n+1} y e_{n+1} para calcular I.

2.2.3 ESTIMACIÓN DE LAS BETAS

Para la estimación de las betas de las acciones es necesario contar con una base histórica de datos, a partir de la cual se realice análisis de regresión, basándose en el principio de mínimos cuadrados. De tal modo, que en el eje de las abscisas se encuentra como variable el Indicador de mercado en el tiempo t y en el eje de las ordenadas el rendimiento de la acción i en el tiempo t (gráfica 2.1). Al utilizar la regresión lineal para calcular los parámetros se garantiza los supuestos simplificadores del modelo.



Gráfica 2.1

Entonces la beta se calcula:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{N}\left[(I_t - E(I))(R_{it} - E(R_i))\right]}{\sum_{t=1}^{N}\left[I_t - E(I)\right]^2}$$

$$A_i = E(R_i) - \beta_i E(I)$$

2.2.4 CARACTERÍSTCAS DEL MODELO

A continuación se explican la beta y diversificación de un portafolio bajo los supuestos del Modelo de Índice Simple.

LA BETA DE UN PORTAFOLIO

Define la beta de un portafolio β_i como el peso ponderado de las betas individuales de cada acción en el portafolio, donde los pesos son la fracción del portafolio en cada acción, es decir:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$$

DIVERSIFICACIÓN

Como se sabe la Varianza de un portafolio es:

$$Var(R_p) = \sigma_p^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

Substituyendo los supuestos del modelo queda la Varianza como:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \left(\beta_i^2 Var(I) + Var(e_i) \right) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j Var(I)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 Var(I) + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Var(e_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j Var(I)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j Var(I) + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Var(e_i)$$

Si se supone que el inversionista invierte la misma cantidad de dinero en cada una de las N acciones, entonces la Varianza puede ser escrita como:

$$Var(R_p) = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right) Var(I) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} Var(e_i)$$

$$= \beta_p^{\,2} Var(I) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} Var(e_i)$$

En este punto se puede ver nuevamente que el riesgo de un portafolio se compone de dos tipos de riesgo.

$$Var(R_p) = Riesgo \quad no \quad diversificable + Riesgo \quad diversificable$$

El ***Riesgo no diversificable,*** el cual indica el riesgo de las relaciones entre las acciones y el indicador, es decir, aquel que está relacionado con el mercado, sería:

$$\beta_p^2 Var(I)$$

El ***Riesgo diversificable,*** es decir, el riesgo asociado con características particulares de cada acción y el cual puede ser eliminado mediante la diversificación, sería:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} Var(e_i)$$

2.2.5 VENTAJAS Y DESVENTAJAS SOBRE EL MODELO DE MARKOWITZ

Ventajas

- La ventaja principal de este modelo, es que reduce notablemente los parámetros que es necesario estimar, en el Modelo de Markowitz es necesario estimar $N(N+1)/2$ parámetros; en cambio, en este modelo únicamente se necesitan estimar $3N+2$ parámetros.

Desventajas

- No necesariamente la relación entre el indicador de mercado y las acciones es lineal. Este modelo se desarrollo básicamente por la Teoría de Capital de Mercado y en ella efectivamente la relación entre el rendimiento de las acciones y el rendimiento del Portafolio de Mercado es lineal, sin embargo, en la Teoría de Capital de Mercado existen supuestos simplificadores muy grandes, que en la realidad difícilmente se dan y para este modelo no se suponen.

- Una objeción a este modelo es que quizá sea demasiado asumir que el rendimiento de las acciones únicamente está determinado por la relación con un solo indicador, cuando en los mercados pueden existir varios y de características diferentes.

2.3 MODELO DE DESVIACIÓN ABSOLUTA

Este modelo fue propuesto en 1991por Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaki,[6] con el objeto de remover muchas de las dificultades que tiene el planteamiento clásico, pero conservando sus ventajas sobre modelos de equilibrio. En otras palabras, resuelve el problema de calcular un extenso número de parámetros y evita las grandes simplificaciones de la realidad que tienen los modelos de equilibrio.

2.3.1 SUPUESTOS

- Los inversionistas son racionales, es decir, prefieren un Rendimiento Esperado alto a uno bajo.
- Los inversionistas son aversos al riesgo, es decir, prefieren una Varianza menor a una mayor.
- Los inversionistas toman sus decisiones de acuerdo al Criterio Media-Varianza.

Se propone la función $W(x)$ como medida de riesgo en lugar de la Desviación Estándar propuesta en el Modelo de Markowitz y de hecho estas medidas son equivalentes, si los rendimientos se distribuyen de manera normal.

$$W(x) = E\left[\left| \sum_{i=1}^{n} R_i X_i - \sum_{i=1}^{n} E(R_i) X_i \right| \right]$$

[6] HIROSHI KONNO AND HIROAKI YAMAZAKI, Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and it's Applications to Tokyo Stock Market, Managament Science, Mayo 1991

2.3.2 EQUIVALENCIA ENTRE EL MODELO DE MARKOWITZ Y MODELO DE DESVIACIÓN ABSOLUTA

Teorema

Si $(R_1, R_2, \ldots R_n)$ es normal multivariada, entonces:

$$W(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma(x)$$

Dado $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N)$ la Media de $(R_1, R_2, \ldots R_n)$ y $(\pi_{ij}) \in R_{nxn}$ la matriz de Covarianza, entonces $\sum_{i=1}^{N} R_i X_i$ es normal con Media $\sum_{i=1}^{N} \mu_i X_i$ y su Desviación Estándar es: $\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}}$

Por lo tanto:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \int_{\infty}^{\infty} |u| \exp - \frac{u^2}{2\sigma^2(x)}\,du$$

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \int_{-\infty}^{0} |u| \exp - \frac{u^2}{2\sigma^2(x)}\,du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \int_{0}^{\infty} |u| \exp - \frac{u^2}{2\sigma^2(x)}\,du$$

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x)} \left(\sigma^2(x) + \sigma^2(x) \right)$$

$$W(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma(x)$$

Lo anterior implica que minimizar $W(x)$ es equivalente a minimizar $\sigma(x)$, si $(R_1, R_2, \ldots R_n)$ es normal multivariada, entonces el planteamiento equivalente al de Markowitz es:

$$Min \quad W(x) = E\left[\; \left| \sum_{i=1}^{N} R_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{N} R_i X_i \right) \right| \;\right]$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{N} E(R_i) X_i > \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad 0 < X_i < \mu_i \qquad i = 1 \ldots N$$

donde :

β es el rendimiento mínimo que el inversionista acepta.

μ_i es el porcentaje máximo que es posible invertir en la acción i.

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i.

INFORMACIÓN INICIAL Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Dadas R_{it} la realización de la variable R_i durante el período t ($t = 1 \ldots T$), se puede estimar $E(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T}$, a través de datos históricos o proyecciones futuras.

Por lo que $W(x)$ se puede aproximar como sigue:

$$E\left[\; \left| \sum_{i=1}^{N} R_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{N} R_i X_i \right) \right| \;\right] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{N} \left(R_{it} - E(R_i) \right) X_i \right|$$

2.3.3 PLANTEAMIENTO GENERAL

Si se denota $A_{it} = R_{it} - E(R_i)$, entonces queda:

$$Min \quad \frac{\sum_{t=1}^{T}\left| \sum_{i=1}^{N} A_{it} X_i \right|}{T}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{N} E(R_i) X_i \geq \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad 0 < X_i < \mu_i \qquad i = 1 \ldots N$$

Lo cual es equivalente al problema de Programación Lineal:

$$Min \quad \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T}$$

$$s.a. \qquad Y_t + \sum_{i=1}^{N} A_{it} X_i \geq 0 \qquad t = 1 \ldots T$$

$$Y_t - \sum_{i=1}^{N} A_{it} X_i \geq 0 \qquad t = 1 \ldots T$$

$$\sum_{i=1}^{N} E(R_i) X_i \geq \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad 0 < X_i < \mu_i \qquad i = 1 \ldots N$$

donde:

β es el rendimiento mínimo que el inversionista acepta.

μ_i es el porcentaje máximo que es posible invertir en la acción i.

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i.

2.3.4 VENTAJAS SOBRE EL MODELO DE MARKOWITZ

- No tener que calcular la matriz de Covarianza, además de que fácilmente se puede agregar información al modelo en caso de aparecer una nueva acción en el mercado.

- El número de parámetros que es necesario estimar, depende del número de períodos que se consideran en la muestra ($N * T$) y su estimación se realiza con gran facilidad.

- Resolver un problema de programación lineal es más sencillo que resolver un problema de programación cuadrática.

- El óptimo tiene a lo más $2T - 2$ componentes mayores que cero, si no existen restricciones en el porcentaje máximo de inversión de las acciones.

- Se puede usar a T como variable de control para el número de acciones diferentes en el portafolio.

CAPÍTULO 3

Aplicación de los Modelos de Portafolios

3.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

En este capítulo se realiza un análisis comparativo usando los Modelos de Markowitz, Desviación Absoluta e Índice Simple; utilizando datos históricos de una muestra de 30 acciones que cotizaron en la BMV. Dichas acciones son:

1	ACCELSA B	16	GFESA B
2	APASCO	17	GFNORTE A
3	ARGOSB	18	GMEXICO B
4	AUTLANB	19	GSERFIN A
5	BANACCI A	20	KOF L
6	CELANES B1	21	LIVEPOL 1
7	CEMEXA	22	PEÑOLES
8	CERAMIC UB	23	POSADAS A
9	CIFRA A	24	SANBORN L
10	DESC A	25	SANLUIS A
11	DINA	26	TELMEX A
12	ELEKTRA CPO	27	TLEVISA CPO
13	FEMSA B	28	TMM A
14	GEO B	29	VISA
15	GFB A	30	VITRO

Cada modelo tiene un planteamiento general diferente, por lo que se aplicó el siguiente planteamiento a los tres modelos:

$$Min\ (\ Riesgo\ \ del\ \ Portafolio\ )^{1}$$
$$Rendimiento\ \ Esperado\ \ del\ \ Portafolio^{1} \geq \beta$$
$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$
$$0 \leq X_i \leq \mu_i \quad i = 1 \ldots N$$

donde:

X_i es el porcentaje de inversión en la acción i.

μ_i es el límite superior de inversión posible en la acción tipo i.

β es el nivel mínimo de ganancia que el inversionista acepta.

[1] La expresión de riesgo del portafolio, así como la del Rendimiento Esperado del portafolio varían dependiendo del modelo.

Al planteamiento anterior se le añadieron las restricciones que le corresponden de acuerdo a los supuestos de cada modelo. El proceso para seleccionar el portafolio óptimo de acuerdo al planteamiento de Markowitz tiene dos fases, primero seleccionar un conjunto de portafolios que sea eficiente y posteriormente seleccionar un portafolio eficiente que satisfaga las preferencias subjetivas del inversionista. En los tres planteamientos de selección de portafolio no se conoce la función de utilidad del inversionista y cada uno de ellos resuelve de manera diferente la segunda fase de este proceso.

El Modelo de Índice Simple maximiza la función objetivo $E(R_p) - A\sigma_p^2$, esta expresión es la que permite seleccionar subjetivamente aquel portafolio que sea preferible para el inversionista.

El Modelo de Desviación Absoluta utiliza el hecho de que el inversionista puede fijar la tasa de rendimiento mínima que le gustaría recibir.

Como se vió en el capítulo anterior Markowitz no propone un planteamiento general, sin embargo, *cualquiera de los planteamientos de optimización antes* mencionados no contradicen la formulación propuesta por Markowitz. Buscando que en el proceso de selección subjetiva estuvieran en las misma condiciones los problemas de optimización, se decidió tomar como planteamiento general aquel que minimiza el riesgo del portafolio.

A continuación se escriben los tres modelos de acuerdo al planteamiento general a seguir:

3.1.1 MODELO DE MARKOWITZ

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) \geq \beta \\
& \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \\
0 \leq X_i \leq \mu_i \qquad & i = 1 \ldots\ldots N
\end{aligned}
$$

3.1.2 MODELO DE ÍNDICE SIMPLE

$$Min \quad \sum_{i=1}^{N+1} X_i^2 Q_i$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{N+1} X_i A_i \geq \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i = X_{n+1}$$

$$0 \leq X_i \leq \mu_i \qquad i = 1.........N$$

donde:

A_i es el componente de la acción i independiente del mercado.

β_i es una constante que mide el cambio esperado en el rendimiento. de la acción i respecto al indicador de mercado.

Q_i es el parámetro que mide el error aleatorio del rendimiento.

3.1.3 MODELO DE DESVIACIÓN ABSOLUTA

$$Min \quad \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T}$$

$$Y_t + \sum_{i=1}^{N} A_{it} X_i \geq 0$$

$$Y_t - \sum_{i=1}^{N} A_{it} X_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i E(R_i) \geq \beta$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$0 < X_i < \mu_i \quad i = 1.....N$$

donde:

A_{it} es la desviación de la acción i en el tiempo t.

3.2 COMPARACIÓN DE PORTAFOLIOS

Se prepararon tres conjuntos de datos, que provienen de los periodos de Enero a Junio de 1996, de Julio a Diciembre de 1996 y de Enero a Junio de 1997. Para la resolución de los problemas se utilizó LINDO/ PC 5.0 (91) versión estudiantil. Este programa permite resolver problemas de Programación lineal y cuenta con la posibilidad de resolver problemas de Programación cuadrática, por lo que fue posible emplearlo para la resolución de los problemas de acuerdo a los tres Modelos. Para la solución del problema de acuerdo al planteamiento del Modelo de Índice Simple, se utilizó como indicador de mercado el Indice de Precios y Cotizaciones[2] durante los tres periodos.

Enero-Junio96	*Julio-Diciembre96*	*Enero-Junio97*
3006,34	3040,99	3582,07
2968,07	3293,15	3805,39
2923,95	3305,44	3786,86
3166,73	3289,78	3768,48
3248,64	3325,77	3911,07
3202,06	3309,2	4313,96

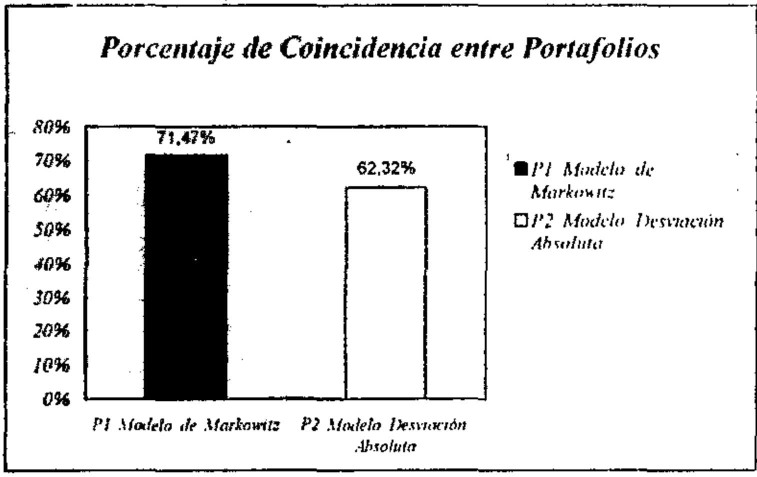
A partir de este momento se llamará al portafolio resultante del Modelo de Markowitz P1, al portafolio resultante del Modelo de Desviación Absoluta P2 y al portafolio resultante del Modelo de Índice Simple P3.

La primera observación es la similitud que existe entre los portafolios P1 y P2 en el número promedio de acciones que lo componen, situación que no sucede con el portafolio P3, el cual en todos los niveles de rendimiento presenta mayor diversificación.

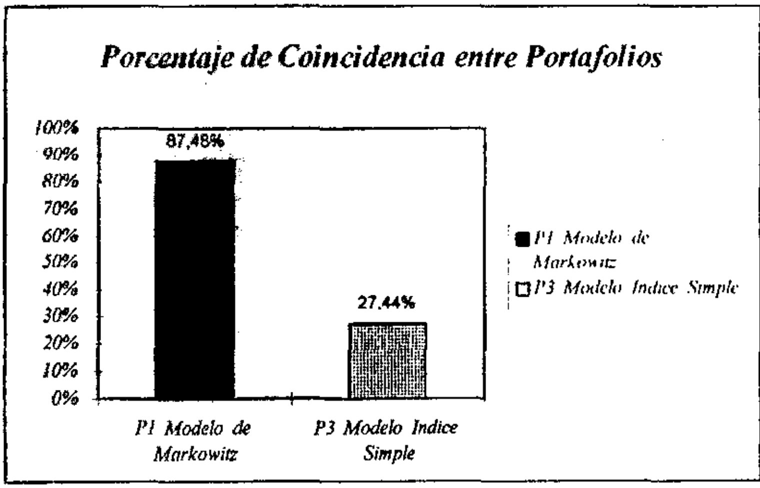
Sumando el peso de las acciones que coinciden en cada portafolio, se pudo observar que el portafolio de Markowitz y de Desviación Absoluta coinciden en un alto porcentaje. En la gráfica 3.1 se puede ver que en promedio el 71.47% de las acciones en el portafolio de Markowitz representa el 62.32% en el portafolio de Desviación Absoluta.

[2] Promedio mensual

Comparando el Portafolio de Markowitz con el de Índice simple se puede notar que los porcentajes de coincidencia son significativamente más pequeños y desiguales que entre el de Markowitz y Desviación Absoluta. En la gráfica 3.2 se puede ver que en promedio el 87.48% de las acciones del portafolio de Markowitz representa tan sólo el 27.44% del portafolio de Índice Simple.



Gráfica 3.1



Gráfica 3.2

Periodo Enero-Junio96
Pesos de Acciones Coincidentes

	Modelo de Markowitz	*Modelo de Desviación Absoluta*
β=.03 μ=.3	0,66624	0,84561
β=.03 μ=.5	0,79045	0.808745
β=.03 μ=.7	0,874229	0,595335
β=.03 μ=.9	0,874229	0.595335
β=.03 μ=1	0,874229	0,595335
β=.05 μ=.3	0,721129	0,676037
β=.05 μ=.5	0,987256	1
β=.05 μ=.7	0,987256	1
β=.05 μ=.9	0,987256	1
β=.05 μ=1	0,987256	1
β=.06 μ=.3	1	1
β=.06 μ=.5	0,96035	0,959999
β=.06 μ=.7	1	1
β=.06 μ=.9	1	1
β=.06 μ=1	1	1
β=.07 μ=.3	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=.07 μ=.5	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=.07 μ=.7	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=.07 μ=.9	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=.07 μ=1	1	1

Periodo Enero-Junio96
Pesos de Acciones Coincidentes

	Modelo de Markowitz	*Modelo de Indice Simple*
β=,03 μ=,3	1	0,542125
β=,03 μ=,5	1	0,418425
β=,03 μ=,7	1	0,218125
β=,03 μ=,9	1	0,218125
β=,03 μ=1	1	0.218125
β=,05 μ=,3	1	0,611971
β=,05 μ=,5	1	0,54129
β=,05 μ=,7	1	0,54129
β=,05 μ=,9	1	0,54129
β=,05 μ=1	1	0,54129
β=,06 μ=,3	1	0,98007
β=,06 μ=,5	0,965707	0,828803
β=,06 μ=,7	0,89282	0,66339
β=,06 μ=,9	0,89282	0,66339
β=,06 μ=1	0,89282	0,66339
β=,07 μ=,3	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=,07 μ=,5	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=,07 μ=,7	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=,07 μ=,9	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β=,07 μ=1	0,95581	0,92562

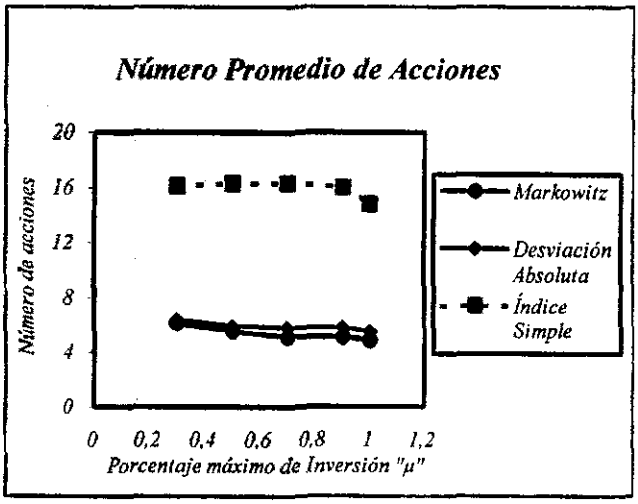
Período Julio-Diciembre96 Pesos de Acciones Coincidentes		
	Modelo de Markowitz	*Modelo de Desviación Absoluta*
β .03 μ .3	0,795358	0,466569
β .03 μ .5	0,23928	0,24728
β .03 μ .7	0,23928	0,24728
β .03 μ .9	0,23928	0,24728
β .03 μ 1	0,23928	0,24728
β .05 μ .3	0,946561	0,952243
β .05 μ .5	0,946561	0,952243
β .05 μ .7	0,946561	0,952243
β .05 μ .9	0,946561	0,952243
β .05 μ 1	0,946561	0,952243
β .06 μ .3	0,92848	0,93191
β .06 μ .5	0,99272	0,92593
β .06 μ .7	1	0,923929
β .06 μ .9	1	0,923929
β .06 μ 1	1	0,923929
β .07 μ .3	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .5	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .7	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .9	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ 1	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE

Período Julio-Diciembre96 Pesos de Acciones Coincidentes		
	Modelo de Markowitz	*Modelo de Indice Simple*
β .03 μ .3	1	0,16644
β .03 μ .5	1	0,151458
β .03 μ .7	1	0,151458
β .03 μ .9	1	0,151458
β .03 μ 1	1	0,151458
β .05 μ .3	1	0,170029
β .05 μ .5	1	0,169204
β .05 μ .7	1	0,169204
β .05 μ .9	1	0,169204
β .05 μ 1	1	0,169204
β .06 μ .3	1	0,106867
β .06 μ .5	1	0,106634
β .06 μ .7	1	0,092103
β .06 μ .9	1	0,092103
β .06 μ 1	1	0,092103
β .07 μ .3	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .5	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .7	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ .9	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE
β .07 μ 1	NO FACTIBLE	NO FACTIBLE

Período Enero-Junio97 Pesos de Acciones Coincidentes		
	Modelo de Markowitz	Modelo de Desviación Absoluta
$\beta=.03$ $\mu=.3$	0,539672	0,333296
$\beta=.03$ $\mu=.5$	0,537093	0,225235
$\beta=.03$ $\mu=.7$	0,537093	0,208157
$\beta=.03$ $\mu=.9$	0,537093	0,208157
$\beta=.03$ $\mu=1$	0,537093	0,208157
$\beta=.05$ $\mu=.3$	0,533601	0,350135
$\beta=.05$ $\mu=.5$	0,537093	0,311588
$\beta=.05$ $\mu=.7$	0,537093	0,323997
$\beta=.05$ $\mu=.9$	0,537093	0,323997
$\beta=.05$ $\mu=1$	0,537093	0,323997
$\beta=.06$ $\mu=.3$	0,482082	0,360494
$\beta=.06$ $\mu=.5$	0,507438	0,360494
$\beta=.06$ $\mu=.7$	0,507438	0,381357
$\beta=.06$ $\mu=.9$	0,507438	0,381357
$\beta=.06$ $\mu=1$	0,507438	0,381357
$\beta=.07$ $\mu=.3$	0,474088	0,436524
$\beta=.07$ $\mu=.5$	0,495065	0,429049
$\beta=.07$ $\mu=.7$	0,495065	0,438707
$\beta=.07$ $\mu=.9$	0,495065	0,438707
$\beta=.07$ $\mu=1$	0,495065	0,438707

Período Enero-Junio97 Pesos de Acciones Coincidentes		
	Modelo de Markowitz	Modelo de Indice Simple
$\beta=.03$ $\mu=.3$	0,605192	0,174543
$\beta=.03$ $\mu=.5$	0,638493	0,132687
$\beta=.03$ $\mu=.7$	0,638493	0,095625
$\beta=.03$ $\mu=.9$	0,638493	0,095625
$\beta=.03$ $\mu=1$	0,638493	0,095625
$\beta=.05$ $\mu=.3$	0,603271	0,181997
$\beta=.05$ $\mu=.5$	0,638493	0,14014
$\beta=.05$ $\mu=.7$	0,638493	0,098274
$\beta=.05$ $\mu=.9$	0,638493	0,088737
$\beta=.05$ $\mu=1$	0,638493	0,088737
$\beta=.06$ $\mu=.3$	0,717622	0,249663
$\beta=.06$ $\mu=.5$	0,748728	0,192497
$\beta=.06$ $\mu=.7$	0,748728	0,135341
$\beta=.06$ $\mu=.9$	0,748728	0,126611
$\beta=.06$ $\mu=1$	0,748728	0,126611
$\beta=.07$ $\mu=.3$	0,773579	0,22379
$\beta=.07$ $\mu=.5$	0,803544	0,172735
$\beta=.07$ $\mu=.7$	0,803544	0,12166
$\beta=.07$ $\mu=.9$	0,803544	0,116304
$\beta=.07$ $\mu=1$	0,803544	0,116304

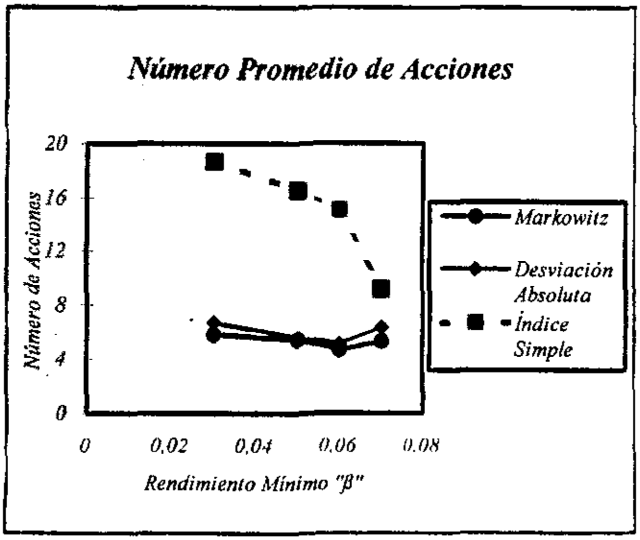
El porcentaje de coincidencia de P1 respecto a P3 es muy alto, pero pierde significancia, ya que el porcentaje de coincidencia de P3 respecto a P1 es muy bajo, ésto se debe a que el portafolio P3 está conformado por casi todas las acciones entre las que es posible invertir, aunque sus porcentajes de inversión son ínfimos.



En la gráfica 3.3 se puede notar que el número promedio de acciones diferentes en el portafolio óptimo de acuerdo a Markowitz y de acuerdo con Desviación Absoluta, tienen un número similar para cada porcentaje máximo de inversión.

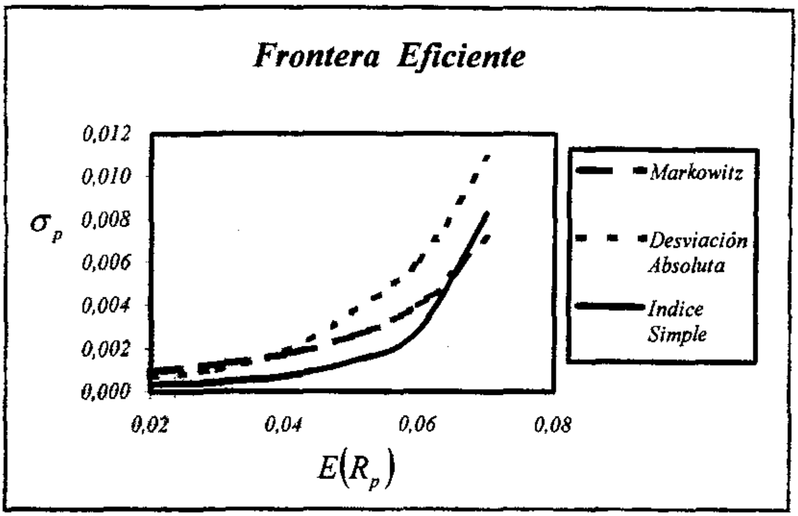
Gráfica 3.3

A medida que la restricción de porcentaje máximo de inversión aumenta, en los tres Modelos el número promedio de acciones diferentes también disminuye.



En la gráfica 3.4 se puede observar que el portafolio de Markowitz y el de Desviación Absoluta tienen un número promedio de acciones diferentes similar para cada rendimiento mínimo, en cambio, el portafolio de acuerdo al Modelo de Índice Simple sigue un comportamiento totalmente distinto.

Gráfica 3.4



Gráfica 3.5

En general el tamaño del portafolio óptimo en los Modelos de Desviación Absoluta y Markowitz es más pequeño que en el de Índice Simple, ya que el portafolio óptimo en el Modelo de Índice Simple cuenta en promedio con un porcentaje mayor de acciones con peso menor al 1%, como puede verse en el cuadro que sigue:

	Modelo de Markowitz P1	*Modelo de Desviación Absoluta P2*	*Modelo de Índice Simple P3*
Número Promedio de Acciones	5.31	5.86	15.88
Promedio de acciones con un peso menor al 1%	.0392157	.137254	3.019607
Promedio de acciones con un peso igual al máximo $X_i = \mu_i$ en un portafolio	.2941176	.254902	.3137255

Conclusiones

El Modelo de Índice Simple fue creado como alternativa al Modelo de Markowitz, proporcionando las ventajas de simplificación de parámetros. Sin embargo, en la práctica la composición de los portafolios es ciertamente diferente, debido a los grandes supuestos que posee el segundo.

Por otro lado, el Modelo de Desviación Absoluta parte de los mismos supuestos que Markowitz, además proporciona las ventajas de la facilidad en la estimación de parámetros y resolver un problema de Programación lineal en lugar de un problema de Programación cuadrática.

Los portafolios resultantes del Modelo de Markowitz y Desviación Absoluta en promedio coinciden en un alto porcentaje, tanto en el número de acciones que lo conforman como en el peso de las acciones coincidentes, de hecho en algunos casos coinciden en un 100%.

Por lo que para todos aquellos inversionistas que deseen tomar sus decisiones de acuerdo al Modelo de Markowitz, el Modelo de Desviación Absoluta es una buena alternativa.

CAPÍTULO 4

Paquete de Aplicación

Paquete de Aplicación

En el capítulo pasado se presentaron los resultados sobre la aplicación de los tres modelos, dichos resultados fueron calculados por medio de este paquete, el cual puede servir de herramienta para un usuario que desee saber como invertir su capital y que no tengan conocimientos sobre la resolución de problemas de programación cuadrática o lineal.

Este paquete permite calcular la composición del portafolio de inversión eficiente de acuerdo al rendimiento mínimo que al usuario le gustaría recibir, basándose en tres modelos diferentes: Modelo de Markowitz, Modelo de Índice Simple y Modelo de Desviación Absoluta. De modo que es posible la comparación de Portafolios.

Esta aplicación está desarrollada en Visual Basic 4.0 y sirve de interfaz entre "Lindo/PC 5.0" y el usuario. De tal modo que cuenta con las ventajas de trabajar en un ambiente de Windows, con la utilización de la hoja de calculo Excel y con las ventajas que proporciona utilizar un programa como "Lindo/PC 5.0".

El paquete permite seleccionar entre un grupo de 30 acciones debido a que la versión de "Lindo" es estudiantil, sin embargo, en caso de contar con un "Lindo" profesional sería posible seleccionar entre tantas acciones como en el mercado existan.

4.1 EJECUCIÓN

En el inicio de la aplicación se tienen las siguientes opciones para seleccionar:

Menú Principal
1. Introducir Información Histórica
2.Introducir Requerimientos de Usuario
3. Resultados
4. Salir

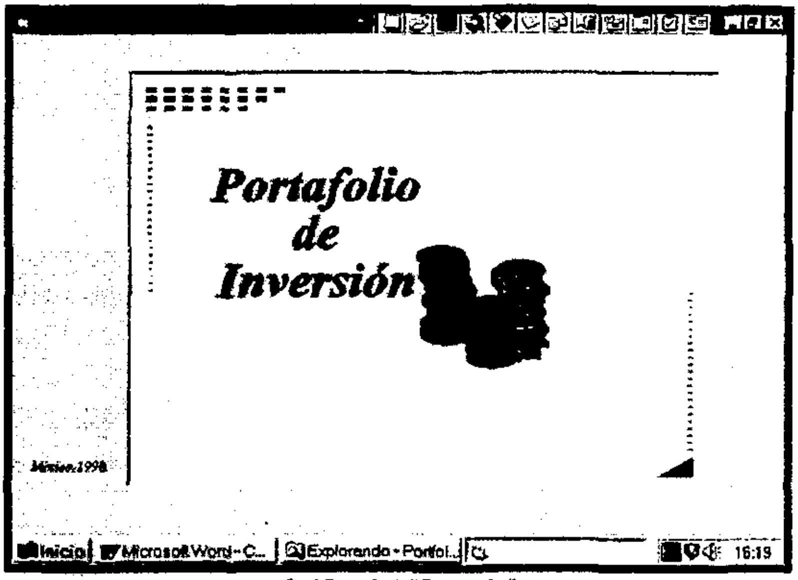


Gráfico 3.1 "Portada"

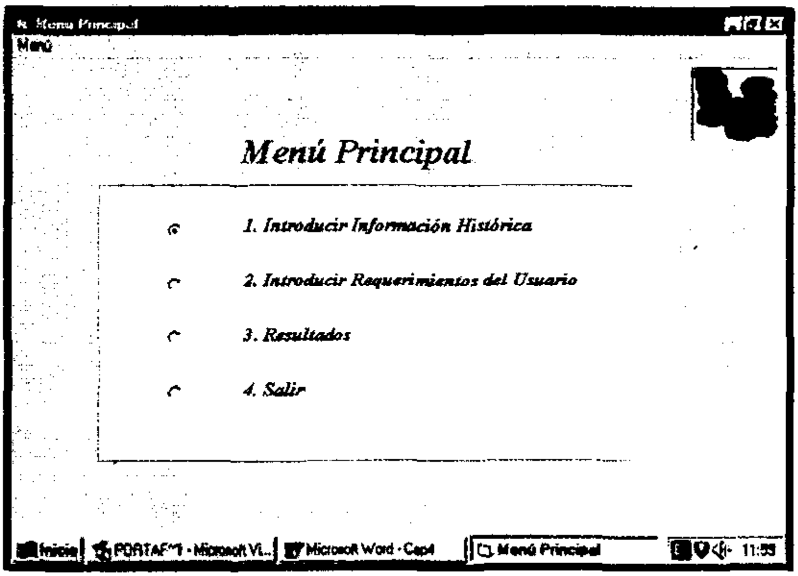


Gráfico 3.2 "Menú Principal"

1. Introducir Información Histórica

Permite que el programa llame a Excel y al archivo llamado "Datos.xls", en él aparece un cuadro en la hoja de calculo llamada "Rendimientos", el usuario debe introducir los nombres de las acciones, así como la información histórica de su comportamiento, en este caso está diseñado para tomar en cuenta seis meses y 30 acciones diferentes.

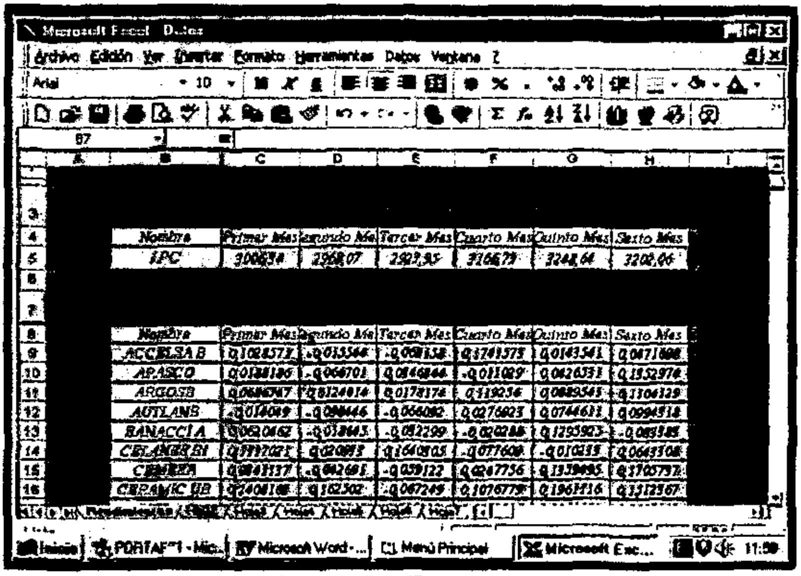


Gráfico 3.3 "Datos.xls"

2. Introducir Requerimientos de Usuario

Permite al usuario indicar a la aplicación el capital que se desea invertir, así como el rendimiento mínimo que se está dispuesto a recibir y el porcentaje máximo de inversión que es posible colocar en un sólo tipo de acción. Existen cuatro alternativas para la conformación del portafolio: Resolver el problema por "Markowitz", por "Índice Simple", por "Desviación Absoluta" o por los tres Modelos, de modo que se debe elegir alguna de estas cuatro alternativas.

Al oprimir el '*botón Calcular*' el programa llama al archivo "Datos.xls", de él *extrae la información necesaria para calcular los parámetros necesarios para la* resolución del problema de selección de inversión, de acuerdo al modelo seleccionado; posteriormente la aplicación escribe en un archivo de texto el problema, de modo que "Lindo" lo entienda y lo pueda resolver al llamarlo la aplicación; por tratarse de un programa que corre en MS-DOS es necesario teclear comandos de manera manual (ésto puede ser eliminado con la Versión de "Lindo" que corre en Windows)[1] .

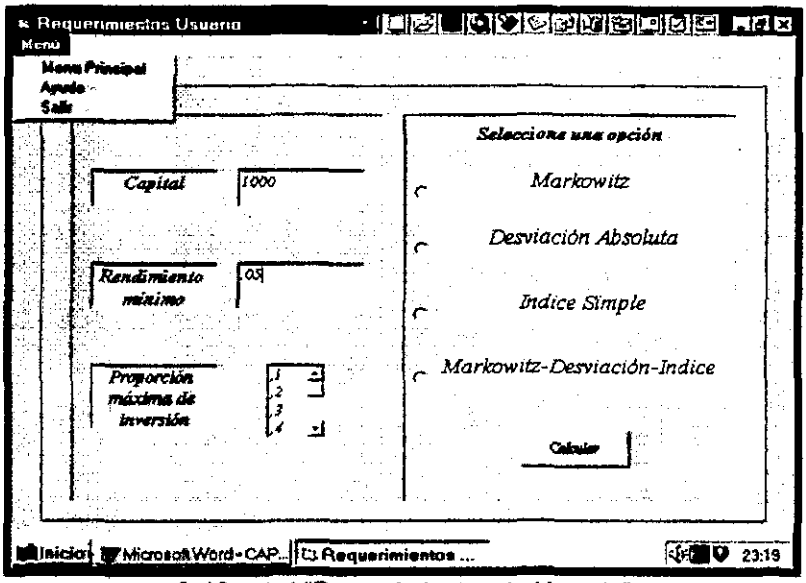


Gráfico 3.4 "Requerimientos de Usuario"

3. *Resultados*

Esta opción permite ver en pantalla la composición del portafolio óptimo o portafolios óptimos, se indica el riesgo que posee, así como su Rendimiento Esperado. Una vez que la composición del portafolio ha sido mostrada, se tiene la opción de guardar los resultados en un archivo de texto o imprimirlos.

- Si del menú se selecciona *'Imprimir'* automáticamente enviará los datos a impresión.

[1] Los comandos que se teclean en "Lindo" de manera manual son: "dive abcd"↵, el cual es el nombre del archivo que será leído con los resultados; el segundo comando que se teclea es "take abc" ↵, estas líneas de comando dan la orden de tomar el archivo de texto que antes había sido escrito y el último comando que se escribe es "go" ↵, el cual resuelve el problema. "abcd" y "abc" son los nombres que deben teclearse si se desea resolver por 'Desviación Absoluta', si se quiere resolver por 'Markowitz' se debe teclearr "abcd2" y "abc2", si se desea resolver por 'Indice Simple' se debe teclear "abcd3" y " abc3".

- Si se selecciona '*Archivo*' la aplicación pregunta al usuario el nombre del *archivo en donde desea almacenar los datos.* El archivo de salida podrá ser leído posteriormente con *wordpad.*

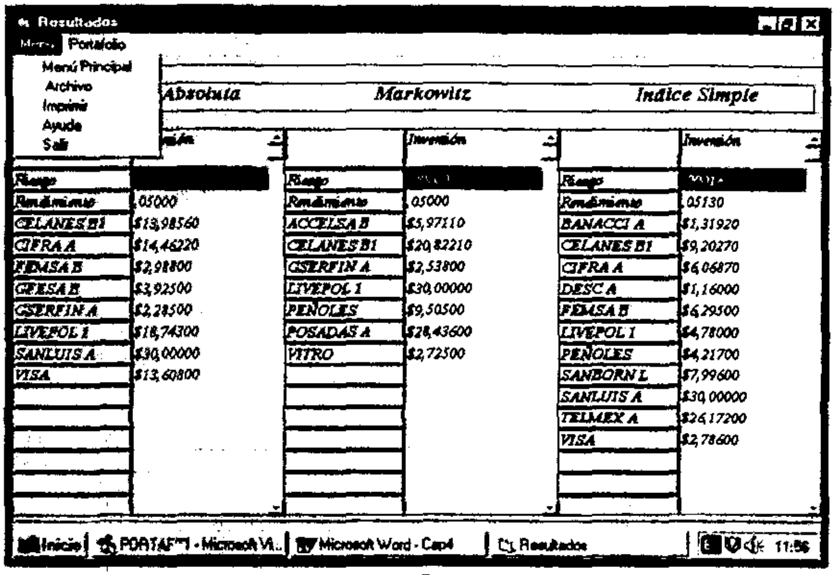


Gráfico 3.5 "Resultados"

- *Si* se desea modificar la información histórica, se debe seleccionar del '*Menú*' la opción '*Menú Principal*' y posteriormente seleccionar '*Introducir Información Histórica*'.

- Si se desea únicamente cambiar el capital por invertir, el rendimiento mínimo o el porcentaje máximo de inversión, se debe seleccionar del menú '*Portafolio*' la opción '*Nuevos requerimientos de Usuario*', lo que le permitirá al usuario regresar a la pantalla del mismo nombre y conservar la información histórica previa contenida en el archivo "Datos.xls".

4. Salir

Esta alternativa como su nombre lo indica, permite finalizar la ejecución de la aplicación.

Anexos

Anexo 1

Rendimientos

La utilidad que el inversionista percibe depende del rendimiento del portafolio, el cuál depende a su vez de los rendimientos de cada una de las diferentes acciones que conforman el portafolio.

Por lo anterior es necesario establecer una medida del rendimiento para cada tipo de acción, en general el rendimiento se calcula con la siguiente fórmula:

$$Rendimiento = \frac{Ganancias\ de\ Capital + Dividendos\ + Derechos\ Decretados}{precio\ inicial\ de\ la\ acción}$$

RENDIMIENTOS CALCULADOS DE ACUERDO A DERECHOS DECRETADOS

Existen diferentes tipos de derechos decretados sobre las acciones, dependiendo de cual se decrete, variará la forma de calcular el rendimiento, esto es:

- *Dividendos en efectivo*, son el pago de las utilidades de una empresa a sus propietarios; en este caso el rendimiento se calcula:

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1$$

donde:

R_t = Rendimiento en el tiempo t[1].

D_t = Dividendo en efectivo en el tiempo t.

P_t = Precio de la acción en el tiempo t.

P_{t-1} = Precio de la acción en el tiempo $t-1$.

[1] En este caso el intervalo que se emplea es un mes.

- *Dividendos en acciones*, son el pago de utilidades de la empresa mediante acciones, con lo que se diluye el valor de cada acción en circulación; en este caso el rendimiento se calcula:

$$R_t = \frac{P_t(A+N)}{P_{t-1}(A)} - 1$$

donde:

R_t = Rendimiento en el tiempo t.

P_t = Precio de la acción en el tiempo t.

P_{t-1} = Precio de la acción en el tiempo t-1.

N = Número de acciones nuevas por A antiguas.

- *Split*, es la división del número de acciones en un número mayor de acciones, de manera que cada acción en circulación le da el derecho a su poseedor de recibir a cambio un número determinado de nuevas acciones, sin originar cambio alguno en el capital de los propietarios; en este caso el rendimiento se calcula:

$$R_t = \frac{P_t(N)}{P_{t-1}(A)} - 1$$

donde:

R_t = Rendimiento en el tiempo t.

P_t = Precio de la acción en el tiempo t.

P_{t-1} = Precio de la acción en el tiempo t-1.

N = Número de acciones nuevas a cambio de A antiguas.

- *Split Inverso*, este caso es análogo a un Split normal, la única diferencia es que se reciben menos acciones pero de mayor valor.

- *Suscripción de acciones*, es el aumento de capital de una empresa mediante el pago de la acciones correspondientes. Dicho pago puede ser Valor Nominal o con una prima, en cuyo caso ese dinero ingresa a la empresa como prima por venta de acciones, en este caso el rendimiento se calcula:

$$R_t = \frac{P_t(A+N)-(V_S\ N)}{P_{t-1}(A)} - 1$$

donde:

R_t = Rendimiento en el tiempo t.

P_t = Precio de la acción en el tiempo t.

P_{t-1} = Precio de la acción en el tiempo t-1.

N = Número de acciones nuevas por cada A acciones antiguas.

V_s = Valor de suscripción que se tiene que pagar por cada acción nueva.

Anexo 2

Comportamiento de los Rendimientos

Para la elaboración del presente trabajo se tomaron en cuenta 30 acciones diferentes que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores durante los períodos: Enero a Junio de 1996, Julio a Diciembre de 1996 y Enero a Junio de 1997.

1	ACCELSA B	16	GFESA B
2	APASCO	17	GFNORTE A
3	ARGOSB	18	GMEXICO B
4	AUTLANB	19	GSERFIN A
5	BANACCI A	20	KOF L
6	CELANES B1	21	LIVEPOL 1
7	CEMEXA	22	PEÑOLES
8	CERAMIC UB	23	POSADAS A
9	CIFRA A	24	SANBORN L
10	DESC A	25	SANLUIS A
11	DINA	26	TELMEX A
12	ELEKTRA CPO	27	TLEVISA CPO
13	FEMSA B	28	TMM A
14	GEO B	29	VISA
15	GFB A	30	VITRO

Los rendimientos presentan las siguientes características:

Varianza	*Desviación Estándar*	*Media*
0,0073908	0,08596976	0,0280077

El principal supuesto tanto en el Modelo de Markowitz, como en el de Desviación Absoluta es que los rendimientos se distribuyen de manera normal. Buscando rectificar la veracidad de este supuesto se realizó lo siguiente:

Originalmente se tiene una muestra de 540 datos, sin embargo, como es una muestra donde se requiere estimar parámetros, se decidió aplicar la prueba de Bondad de Ajuste de Liliefors para la Normalidad a muestras más pequeñas de los rendimientos de algunas de las acciones.

Prueba de Bondad de Ajuste

Datos.

Los datos consisten en una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots X_{18}$; de tamaño 18 con función de distribución desconocida $F(x)$.

Sean

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad \text{y} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}}$$

Los estimadores de μ y σ respectivamente. Calculando los Z_i valores estandarizados:

$$Z_i = \frac{X_i - \overline{X}}{S}$$

Hipótesis

Ho: La muestra aleatoria tiene distribución normal con Media y Varianza no especificadas.

Ha: La función de distribución de las X_i's no es normal.

Estadística de prueba: Es la máxima diferencia entre $F(x)$ y la función de distribución empírica.

$$T = Sup \mid F(x) - Sn(x) \mid$$

Regla de decisión: Rechazar Ho al nivel & de significancia, si T excede el cuantil $1-\alpha$ de la distribución de T, es decir, $T > W_{1-\alpha}$.

Simetría de la Distribución

El criterio seguido para determinar la simetría es:

$$S_K = \frac{3\left(\overline{X} - mediana\right)}{S}$$

Si S_K = 0 Significa que la distribución es simetría ,es decir, $\mu = mediana$

S_K > 0 Significa que la distribución es sesgada a la izquierda.

S_K < 0 Significa que la distribución es sesgada a la derecha.

Estas pruebas se aplicaron a las acciones DESC A y ELEKTRA CPO, llegando a los siguientes resultados:

Resultados de la Prueba Aplicada a DESC A

Xi	*Zi*	*Sn (Zi)*	*F(Zi)*	*I Sn (Zi) - Fn (Zi) I*	*I Sn (Zi-1) - Fn (Zi) I*
-0,0797312	-1,62059961	0,05555556	0,0526	0,00295556	0,0526
-0,06324007	-1,37458675	0,11111111	0,0853	0,02581111	0,02974444
-0,043444	-1,07927467	0,16666667	0,1423	0,02436667	0,03118889
-0,03250251	-0,91604741	0,22222222	0,1814	0,04082222	0,01473333
-0,01435117	-0,6452678	0,27777778	0,2611	0,01667778	0,03887778
-0,01292873	-0,62404801	0,33333333	0,2676	0,06573333	0,01017778
0,0208183	-0,12061354	0,38888889	0,4522	0,06331111	0,11886667
0,02116353	-0,11546358	0,44444444	0,4562	0,01175556	0,06731111
0,02688172	-0,03016025	0,5	0,488	0,012	0,04355556
0,03108614	0,03256084	0,55555556	0,512	0,04355556	0,012
0,0325286	0,05407988	0,61111111	0,5199	0,09121111	0,03565556
0,03315571	0,06343446	0,66666667	0,5239	0,14276667	0,08721111
0,0343205	0,08080995	0,72222222	0,5319	0,19032222	0,13476667
0,06620278	0,55642686	0,77777778	0,7088	0,06897778	0,01342222
0,0889803	0,89621924	0,83333333	0,8133	0,02003333	0,03552222
0,09153534	0,93433505	0,88888889	0,8238	0,06508889	0,00953333
0,1555857	1,8898311	0,94444444	0,9699	0,02545556	0,08101111
0,1642017	2,01836415	1	0,9778	0,0222	0,03335556

De donde $T = Sup \left| F(x) - Sn(x) \right|$ = .1903222

Si α = .05 entonces $W_{.95}$ =.2. Como el cuantil es mayor que T, entonces no se rechaza la hipótesis de normalidad.

En este caso la mediana es -0.03016025, entonces S_K = 2.6433, por lo tanto la distribución de DESC A es sesgada a la izquierda y Normal.

Resultados de la Prueba Aplicada a ELEKTRA CPO

Xi	*Zi*	*Sn (Zi)*	*F(Zi)*	*I Sn (Zi) - Fn (Zi) I*	*I Sn (Zi-1) - Fn (Zi) I*
-0,09830852	-2,04651052	0,05555556	0,0207	0,03485556	0,0207
-0,0201226	-0,99249999	0,11111111	0,1611	0,04998889	0,10554444
-0,01693509	-0,94952969	0,16666667	0,1736	0,00693333	0,06248889
-0,00898195	-0,77491069	0,22222222	0,2206	0,00162222	0,05393333
0,013944	-0,53325462	0,27777778	0,2981	0,02032222	0,07587778
0,0213542	-0,43335876	0,33333333	0,3336	0,00026667	0,05582222
0,02330835	-0,40701499	0,38888889	0,3446	0,04428889	0,01126667
0,03386373	-0,26471978	0,44444444	0,3974	0,04704444	0,00851111
0,04212885	-0,15329909	0,5	0,4404	0,0596	0,00404444
0,04552256	-0,10754914	0,55555556	0,4602	0,09535556	0,0398
0,0627305	0,12442779	0,61111111	0,5478	0,06331111	0,00775556
0,0855908	0,43260345	0,66666667	0,6664	0,00026667	0,05528889
0,09064207	0,50069908	0,72222222	0,6915	0,03072222	0,02483333
0,099316	0,61763034	0,77777778	0,7291	0,04867778	0,00687778
0,10310215	0,66867113	0,83333333	0,7454	0,08793333	0,03237778
0,11615041	0,84457242	0,88888889	0,7995	0,08938889	0,03383333
0,11700703	0,85612037	0,94444444	0,8023	0,14214444	0,08658889
0,2476965	2,61792269	1	0,9955	0,0045	0,05105556

Si α = .05 entonces W_{95}=.2 Como el cuantil es mayor que T, entonces no se rechaza la hipótesis de normalidad.

En este caso la mediana es -0.15329909, entonces S_K =8.3634, por lo tanto la distribución de ELEKTRA CPO es sesgada a la izquierda y normal.

Anexo 3

Conjunto de Oportunidades

Suponiendo que existe la posibilidad de invertir en N acciones y fijando el valor de N-2 variables se tiene que: $X_i = C_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots, N-2.$

Substituyendo en la Varianza:

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^{N-2} C_i^2 \sigma_i^2 + \Big(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i - X_N\Big)^2 \sigma_{N-1}^2 + X_N^2 \sigma_N^2 + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N-2} C_i C_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\
&\quad + 2 X_N \sum_{i=1}^{N-2} C_i \sigma_i \sigma_N \rho_{iN} + 2\Big(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i - X_N\Big) \sum_{i=1}^{N-2} C_i \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{iN-1} \\
&\quad + 2 X_N \Big(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i - X_N\Big) \sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{NN-1} \\
&= X_N^2 \left(\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N-1,N} \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i^2 \sigma_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)^2 \sigma_{N-1}^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} C_i C_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + 2\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right) \sum_{i=1}^{N-2} C_i \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \\
&\quad + 2 X_N \left(\Big(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i\Big)\left(\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1} - \sigma_{N-1}^2\right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i \left(\sigma_i \sigma_N \rho_{i,N} - \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right) \right)
\end{aligned}
$$

Completando el cuadrado se tiene:

$$
\left(X_N + \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)\left(\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1} - \sigma_{N-1}^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i \left(\sigma_i \sigma_N \rho_{i,N} - \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}} \right)^2 =
$$

$$= \frac{\sigma_p^2 - \left(\sum_{i=1}^{N-2} C_{i-1}^2 \sigma_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)^2 \sigma_{N-1}^2 + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N-2} C_i C_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + 2\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right) \sum_{i=1}^{N-2} C_i \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}}$$

$$+ \left(\frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)\left(\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1} - \sigma_{N-1}^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i \left(\sigma_i \sigma_N \rho_{i,N} - \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}} \right)^2$$

Despejando X_N **se tiene que:**

$$X_N = \pm \sqrt{ \begin{aligned} & \frac{\sigma_p^2 - \left(\sum_{i=1}^{N-2} C_i^2 \sigma_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i^2 \right)^2 \sigma_{N-1}^2 + 2\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right) \sum_{i=1}^{N-2} C_i \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}} \\ & \frac{- \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{i=1}^{N-2} C_i C_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}} \\ & + \left(\frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)\left(\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1} - \sigma_{N-1}^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i \left(\sigma_i \sigma_N \rho_{i,N} - \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}} \right)^2 \end{aligned} }$$

$$- \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right)\left(\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1} - \sigma_{N-1}^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i \left(\sigma_i \sigma_N \rho_{i,N} - \sigma_i \sigma_{N-1} \rho_{i,N-1} \right)}{\sigma_N^2 + \sigma_{N-1}^2 - 2\sigma_N \sigma_{N-1} \rho_{N,N-1}}$$

Por otro lado el Rendimiento Esperado del portafolio es:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \sum_{i=1}^{N-2} C_i E(R_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i - X_N \right) E(R_{N-1}) + X_N E(R_N) \\ &= X_N \left(E(R_N) - E(R_{N-1}) \right) + \sum_{i=1}^{N-2} C_i E(R_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{N-2} C_i \right) E(R_{N-1}) \end{aligned}$$

Substituyendo X_N, se tiene que:

$$E(R_p)=\pm\sqrt{\begin{array}{l}\dfrac{\sigma_p^2-\left(\sum_{i=1}^{N-2}C_i^2\sigma_i^2+\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i^2\right)^2\sigma_{N-1}^2+2\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)\sum_{i=1}^{N-2}C_i\sigma_i\sigma_{N-1}\rho_{i,N-1}\right)}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{N,N-1}}\\ \dfrac{-\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}C_iC_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{N,N-1}}\\ +\left(\dfrac{\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)(\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}-\sigma_{N-1}^2)+\sum_{i=1}^{N-2}C_i(\sigma_i\sigma_N\rho_{iN}-\sigma_i\sigma_{N-1}\rho_{iN-1})}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}}\right)^2\end{array}}\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)$$

$$-\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)(\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}-\sigma_{N-1}^2)+\sum_{i=1}^{N-2}C_i(\sigma_i\sigma_N\rho_{iN}-\sigma_i\sigma_{N-1}\rho_{iN-1})}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}}\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{N-2}C_iE(R_i)+\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)E(R_{N-1})$$

Si se denota:

$$K=\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)(\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}-\sigma_{N-1}^2)+\sum_{i=1}^{N-2}C_i(\sigma_i\sigma_N\rho_{iN}-\sigma_i\sigma_{N-1}\rho_{iN-1})}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}}\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{N-2}C_iE(R_i)+\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)E(R_{N-1})$$

$$\beta^2=\left(\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)\left(\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}-\sigma_{N-1}^2\right)+\sum_{i=1}^{N-2}C_i\left(\sigma_i\sigma_N\rho_{iN}-\sigma_i\sigma_{N-1}\rho_{iN-1}\right)}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\sigma_{N-1}\rho_{NN-1}}\right)^2$$

$$-\omega=\frac{-\left(\sum_{i=1}^{N-2}C_{i=1}^{2}\sigma_i^2+\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)^2\sigma_{N-1}^2+\sum_{\substack{i=1}}^{N-2}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N-2}C_iC_j\,\sigma_i\,\sigma_j\,\rho_{ij}+2\left(1-\sum_{i=1}^{N-2}C_i\right)\sum_{i=1}^{N-2}C_i\,\sigma_i\,\sigma_{N-1}\,\rho_{i,N-1}\right)}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\,\sigma_{N-1}\,\rho_{N,N-1}}$$

Se tiene que:

$$\left(E(R_p)-K\right)^2=\frac{\sigma_p^2\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)^2}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\,\sigma_{N-1}\,\rho_{NN-1}}+(\beta^2-\omega)\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)^2$$

$$\frac{\left(E(R_p)-K\right)^2}{(\beta^2-\omega)\left(E(R_N)-E(R_{N-1})\right)^2}-\frac{\sigma_p^2}{\sigma_N^2+\sigma_{N-1}^2-2\sigma_N\,\sigma_{N-1}\,\rho_{NN-1}(\beta^2-\omega)}=1$$

Con esto se puede ver que se trata de una hipérbola. La expresión $\beta^2-\omega$ debe ser negativa y por lo tanto se trata de una hipérbola horizontal, ya que si fuese positiva, implicaría la existencia de Desviaciones Estándar negativas.

Anexo 4

Utilidad

Las decisiones financieras tomadas en el mercado de capitales, son tomadas en condiciones de riesgo, por lo que el criterio de decisión apropiado es el de Máximo Valor Esperado, sin embargo, existen situaciones en las que parece no ser apropiado[1]. Un motivo por el cual un inversionista no debería tomar sus decisiones basándose en el criterio de Máximo Valor Esperado, es su aversión a correr riesgos, para explicar estas situaciones se desarrolló la Teoría de la Utilidad, en la cual el criterio de Máximo Valor Esperado queda como un caso particular.

De acuerdo con la Teoría de la Utilidad cada individuo posee una función de utilidad, la cual permite representar sus preferencias respecto a un conjunto de alternativas.

$U : S \to R$ es una función de utilidad que representa una relación de preferencia $\prec$ si y sólo si:

$$U(A) \leq U(B) \Leftrightarrow A \prec B \quad A, B \in S$$

Esta función cumple con ciertos axiomas:

$$U(A) > U(B) \quad o \quad U(A) < U(B) \quad o \quad U(A) = U(B)$$

$$U(A) \geq U(B) \quad y \quad U(B) < U(C) \quad entonces \quad U(A) \geq U(C)$$

Bajo estas condiciones el criterio óptimo de decisión es el criterio de la máxima utilidad esperada:

$$E(U(A)) = \sum_{i=1}^{N} U(A_i) P_i$$

---

[1] $VME(a) = \frac{1}{2}(-\$20{,}000) + \frac{1}{2}(\$30{,}000) = \$5{,}000$

$VME(b) = \frac{1}{2}(-\$2{,}000) + \frac{1}{2}(\$3{,}000) = \$2{,}500$

El decisor elige la alternativa b a pesar de tener un VME menor que la alternativa a

donde la opción A tiene N alternativas y cada alternativa tiene una probabilidad P_i, de modo que $\sum_{i=1}^{N} P_i$.

De acuerdo con la Teoría de la Utilidad existen tres actitudes hacia el riesgo:

- *Averso al riesgo.* Es un individuo que no le gustan los riesgos, su función de utilidad se caracteriza por la propiedad de que a incrementos iguales de riqueza su satisfacción incrementa de manera decreciente, es decir, su función de utilidad respecto a la riqueza es cóncava $(U''<0)$.

- *Adicto al riesgo.* Es un individuo que está dispuesto a correr riesgos para obtener ganancias mayores, su función de utilidad se caracteriza por la propiedad de que a incrementos iguales en riqueza corresponden incrementos crecientes en su nivel de satisfacción, es decir, su función de utilidad es convexa $(U''>0)$.

- *Indiferente al riesgo.* Es un individuo que no toma en cuenta al riesgo, es decir, el nivel de su satisfacción es el nivel de riqueza que obtiene.

La Teoría moderna de portafolios emplea el Criterio de la Media-Varianza CMV[2], de acuerdo con ella las decisiones son tomadas únicamente considerando dos variables: el Rendimiento Esperado y la Varianza del portafolio. Esto en términos de la Teoría de Utilidad implica que la utilidad esperada de un inversionista depende de sólo dos variables:

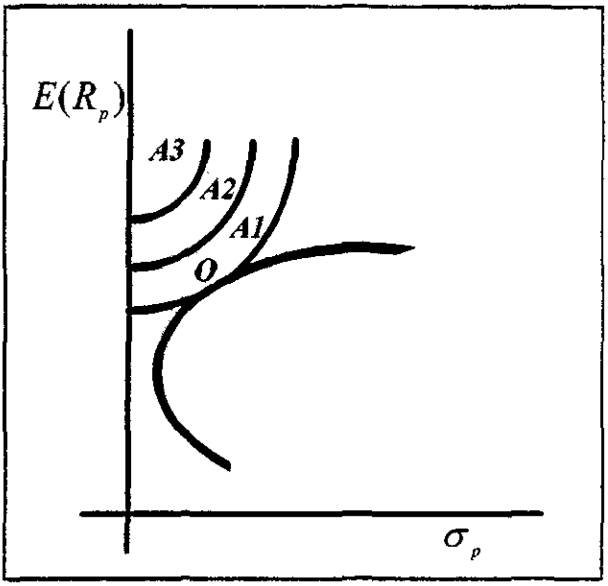
$$E(U(R_p)) = U(E(R_p), \sigma^2(R_p))$$

El inversionista debe seleccionar entre todos los portafolios posibles aquel portafolio que maximiza su utilidad esperada. Más adelante se discute que cumpliendo con los supuestos básicos de la Teoría de Portafolios, las funciones de utilidad de los inversionistas deben ser cuadráticas o cóncavas.

---

[2] Capitulo uno.

Las preferencias de los inversionistas se representan gráficamente con lo que se conoce como ***curvas de indiferencia***, en la gráfica 1 cada curva representa un nivel de utilidad, un individuo será indiferente entre cualquier combinación Rendimiento Esperado-Desviación Estándar que se encuentren en la misma curva, ya que su utilidad será la misma. El inversionista desea estar en la mayor curva de indiferencia posible para obtener la utilidad máxima, esto se logra en el punto de tangencia entre la máxima curva de indiferencia y el conjunto de portafolios eficientes, que en el caso de la gráfica 1 es el punto *O*.



Gráfica 1

En la vida práctica no se conocen las funciones de utilidad de los inversionistas, sin embargo, si los inversionistas o decisores son del mismo tipo tendrán funciones de utilidad con alguna característica común. Es adecuado establecer un criterio de eficiencia, que permita determinar un conjunto de opciones eficientes, para que cada inversionista determine entre todas estas alternativas aquella que satisfaga sus preferencias.

La Teoría de Portafolios supone dos situaciones básicas:

- El inversionista es una persona racional, de modo que prefiere más Rendimiento Esperado a menos, en términos de utilidad significa que la función de utilidad es creciente *($U' \geq 0$)* y si se supone la Varianza constante, la función $E(U(R_p))$ *debe crecer con el Rendimiento Esperado, es decir:*

(a)
$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial E(R_p)} > 0$$

Lo anterior significa que entre todos aquellos portafolios que posean la misma Varianza, será preferible aquel que posea el mayor Rendimiento Esperado, de modo que si se varía el valor de la Varianza y se determinan aquellos portafolios que son preferibles para cada Varianza posible, el conjunto de portafolios que se genera es un conjunto que no puede ser dominado por ningún otro portafolio y por lo tanto es el conjunto eficiente de acuerdo al Criterio Media-Varianza.

- El inversionista es averso al riesgo, y el riesgo se mide mediante la Varianza o Desviación Estándar, de modo que suponiendo el rendimiento constante la utilidad esperada decrece al crecer la Varianza, es decir:

(b)
$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial \sigma^2(R_p)} < 0$$

En otras palabras, entre todos aquellos portafolios que posean el mismo Rendimiento Esperado será preferible aquel que posea la menor Varianza, de modo que si se varia el valor del Rendimiento Esperado y se determinan aquellos portafolios que sean preferibles para cada Rendimiento Esperado posible, el conjunto de portafolios que se genera es un conjunto que no puede ser dominado por ningún otro portafolio y por lo tanto es el conjunto eficiente de acuerdo al Criterio Media-Varianza.

Los casos en los que se cumplen las condiciones anteriores y por lo tanto el Criterio de la Media-Varianza y la Teoría de Utilidad concuerdan son dos:

♦ Cuando la función de utilidad de los inversionistas es cuadrática

Las funciones de utilidad cuadráticas son de la forma:

$$f:\left(-\infty,\frac{1}{2k}\right)\to R \quad U(R_p)=R_p-KR_p^{\,2} \quad (k>0)$$

$$E(U(R_p))=E(R_p-kR_p^{\,2})=E(R_p)-kE(R_p^{\,2})$$

$$=E(R_p)-k\left\{\sigma^2(R_p)+E^2(R_p)\right\}=E(R_p)-KE^2(R_p)-k\sigma^2(R_p)$$

Aplicando la esperanza se tiene que:

$$\frac{\partial E(U(R))}{\partial E(R_p)}=1-2kE(R_p)$$

Esta derivada es siempre positiva, ya que por definición:

$$R_p\le\frac{1}{2k} \quad \text{entonces} \quad E(R_p)\le\frac{1}{2k}$$

El hecho de que esta derivada sea siempre positiva, significa que el inversor prefiere siempre a igualdad de riesgo el mayor Rendimiento Esperado.

La derivada de la utilidad esperada con respecto a la Varianza es:

$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial\sigma^2(R_p)}=-k<0$$

Esto significa que la utilidad esperada es decreciente con el riesgo, es decir, los inversores prefieren menor riesgo.

♦ Cuando las tasas de rendimiento tienen una distribución normal[3]

Como los inversionistas no necesariamente tiene una función de utilidad cuadrática, los investigadores buscaron otros fundamentos que justificaran el uso del Criterio de la Media-Varianza y al resultado que llegaron fue que este criterio era adecuado para una amplia clase de funciones, no necesariamente cuadráticas, a las que sólo se impone la condición de ser cóncavas y crecientes, si los rendimientos están normalmente distribuidos.

[3] La demostración formal de esta afirmación fue realizada en TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavoir Toward Risk, Review of Economics Studies, Feb 1958

Anexo 5
Resultados
Período Primero

B= 0,03 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00121

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,30000

DESC A $0,08470

ELEKTRA CPO $0,29267

GEO B $0,18824

GFNORTE A $0,08943

VISA $0,08494

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,01382

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,30000

ARGOSB $0,01690

DESC A $0,17876

ELEKTRA CPO $0,15298

GEO B $0,03450

POSADAS A $0,01684

SANBORN L $0,30000

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00438

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,04121

APASCO $0,07382

ARGOSB $0,078818

AUTLANB $0,02900

CELANES B1 $0,07097

CIFRA A $0,12110

DESC A $0,08037

ELEKTRA CPO $0,04990

GEO B $0,05652

GFESA B $0,03337

GSERFIN A $0,00936

KOF L $0,02660

LIVEPOL 1 $0,01773

PEÑOLES $0,05860

POSADAS A $0,08491

SANBORN L $0,15040

VITRO $0,01729

B= 0,03 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00107

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,48024

DESC A $0,12259

ELEKTRA CPO $0,21341

GEO B $0,12855

GFNORTE A $0,06267

LIVEPOL 1 $0,01251

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,01284

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,50000

ARGOSB $0,09436

DESC A $0,14749

ELEKTRA CPO $0,05350

LIVEPOL 1 $0,08946

SANBORN L $0,11517

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00438

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,04121

APASCO $0,07382

ARGOSB $0,078818

AUTLANB $0,02900

CELANES B1 $0,07097

CIFRA A $0,12110

DESC A $0,08037

ELEKTRA CPO $0,04990

GEO B $0,05652

GFESA B $0,03337

GSERFIN A $0,00936

KOF L $0,02660

LIVEPOL 1 $0,01773

PEÑOLES $0,05860

POSADAS A $0,08491

SANBORN L $0,15040

VITRO $0,01729

B= 0,03 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00107

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,48024

DESC A $0,12259

ELEKTRA CPO $0,21341

GEO B $0,12855

GFNORTE A $0,06267

LIVEPOL 1 $0,01251

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,01265

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,59289

ARGOSB $0,12576

DESC A $0,13269

LIVEPOL 1 $0,14865

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00438

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,04121

APASCO $0,07382

ARGOSB $0,078818

AUTLANB $0,02900

CELANES B1 $0,07097

CIFRA A $0,12110

DESC A $0,08037

ELEKTRA CPO $0,04990

GEO B $0,05652

GFESA B $0,03337

GSERFIN A $0,00936

KOF L $0,02660

LIVEPOL 1 $0,01773

PEÑOLES $0,05860

POSADAS A $0,08491

SANBORN L $0,15040

VITRO $0,01729

B= 0,03 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00107

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,480235

DESC A $0,12259

ELEKTRA CPO $0,21341

GEO B $0,12855

GFNORTE A $0,06267

LIVEPOL 1 $0,01251

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,01265

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,59289

ARGOSB $0,12576

DESC A $0,13269

LIVEPOL 1 $0,14865

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00438

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,04121

APASCO $0,07382

ARGOSB $0,078818

AUTLANB $0,02900

CELANES B1 $0,07097

CIFRA A $0,12110

DESC A $0,08037

ELEKTRA CPO $0,04990

GEO B $0,05652

GFESA B $0,03337

GSERFIN A $0,00936

KOF L $0,02660

LIVEPOL 1 $0,01773

PEÑOLES $0,05860

POSADAS A $0,08491

SANBORN L $0,15040

VITRO $0,01729

B= 0,03 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00107

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,48024

DESC A $0,12259

ELEKTRA CPO $0,21341

GEO B $0,12855

GFNORTE A $0,06267

LIVEPOL 1 $0,01251

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,01265

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,59289

ARGOSB $0,12576

DESC A $0,13269

LIVEPOL 1 $0,14865

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00438

Rendimiento 0,03000

ACCELSA B $0,04121

APASCO $0,07382

ARGOSB $0,078818

AUTLANB $0,02900

CELANES B1 $0,07097

CIFRA A $0,12110

DESC A $0,08037

ELEKTRA CPO $0,04990

GEO B $0,05652

GFESA B $0,03337

GSERFIN A $0,00936

KOF L $0,02660

LIVEPOL 1 $0,01773

PEÑOLES $0,05860

POSADAS A $0,08491

SANBORN L $0,15040

VITRO $0,01729

B= 0,05 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00432

Rendimiento 0,05000

ARGOSB $0,07604

DESC A $0,30000

ELEKTRA CPO $0,21060

GEO B $0,30000

VISA $0,11335

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,02925

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,27886

ARGOSB $0,14283

DESC A $0,30000

GEO B $0,27830

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,01417

Rendimiento 0,05038

ACCELSA B $0,04169

APASCO $0,05591

ARGOSB $0,128481

CELANES B1 $0,09467

CIFRA A $0,08611

DESC A $0,26604

ELEKTRA CPO $0,05780

GEO B $0,17576

GFESA B $0,03745

VISA $0,04187

VITRO $0,01419

Período Primero

B= 0,05 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00366

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,30276

DESC A $0,37890

GEO B $0,31833

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,02563

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,37789

DESC A $0,49918

ELEKTRA CPO $0,01273

GEO B $0,11019

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,01417

Rendimiento 0,05038

ACCELSA B $0,04169

APASCO $0,05591

ARGOSB $0,128481

CELANES B1 $0,09467

CIFRA A $0,08611

DESC A $0,26604

ELEKTRA CPO $0,05780

GEO B $0,17576

GFESA B $0,03745

VISA $0,04187

VITRO $0,01419

B= 0,05 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00366

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,30276

DESC A $0,37890

GEO B $0,31833

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,02563

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,37789

DESC A $0,49918

ELEKTRA CPO $0,01273

GEO B $0,11019

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,01417

Rendimiento 0,05038

ACCELSA B $0,04169

APASCO $0,05591

ARGOSB $0,128481

CELANES B1 $0,09467

CIFRA A $0,08611

DESC A $0,26604

ELEKTRA CPO $0,05780

GEO B $0,17576

GFESA B $0,03745

VISA $0,04187

VITRO $0,01419

B= 0,05 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00366

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,30276

DESC A $0,37890

GEO B $0,31833

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,02563

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,37789

DESC A $0,49918

ELEKTRA CPO $0,01273

GEO B $0,11019

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,01417

Rendimiento 0,05038

ACCELSA B $0,04169

APASCO $0,05591

ARGOSB $0,128481

CELANES B1 $0,09467

CIFRA A $0,08611

DESC A $0,26604

ELEKTRA CPO $0,05780

GEO B $0,17576

GFESA B $0,03745

VISA $0,04187

VITRO $0,01419

B= 0,05 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00366

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,30276

DESC A $0,37890

GEO B $0,31833

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,02563

Rendimiento 0,05000

ACCELSA B $0,37789

DESC A $0,49918

ELEKTRA CPO $0,01273

GEO B $0,11019

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,01417

Rendimiento 0,05038

ACCELSA B $0,04169

APASCO $0,05591

ARGOSB $0,128481

CELANES B1 $0,09467

CIFRA A $0,08611

DESC A $0,26604

ELEKTRA CPO $0,05780

GEO B $0,17576

GFESA B $0,03745

VISA $0,04187

VITRO $0,01419

B= 0,06 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,01130

Rendimiento 0,06000

ARGOSB $0,30000

DESC A $0,30000

GEO B $0,28113

GFESA B $0,11886

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,07799

Rendimiento 0,06000

ARGOSB $0,30000

DESC A $0,30000

GEO B $0,28113

GFESA B $0,11886

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,03817

Rendimiento 0,06088

ARGOSB $0,30000

CELANES B1 $0,01992

DESC A $0,30000

GEO B $0,25152

GFESA B $0,12855

B= 0,06 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00616

Rendimiento 0,06000

DESC A $0,50000

ELEKTRA CPO $0,02153

GEO B $0,45999

VISA $0,01847

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,04156

Rendimiento 0,06000

ACCELSA B $0,03429

ARGOSB $0,00536

DESC A $0,50000

GEO B $0,46035

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,02834

Rendimiento 0,06074

ARGOSB $0,16541

CELANES B1 $0,107318

DESC A $0,41367

ELEKTRA CPO $0,00789

GEO B $0,24972

GFESA B $0,04252

VISA $0,01344

Período Primero

B= 0,06 u=.7
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,00609
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,03891
DESC A $0,50822
GEO B $0,45286

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,03968
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,10717
DESC A $0,60481
GEO B $0.28801

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,02834
Rendimiento 0,06074
ARGOSB $0,16541
CELANES B1 $0,107318
DESC A $0,41367
ELEKTRA CPO $0,00789
GEO B $0,24972
GFESA B $0,04252
VISA $0,01344

B= 0,06 u=.9
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo .00609
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,03891
DESC A $0,50822
GEO B $0,45286

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,03968
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,10717
DESC A $0,60481
GEO B $0,28801

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,02834
Rendimiento 0,06074
ARGOSB $0,16541
CELANES B1 $0,107318
DESC A $0.41367
ELEKTRA CPO $0,00789
GEO B $0,24972
GFESA B $0,04252
VISA $0,01344

B= 0,06 u=1
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo .00609
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,03891
DESC A $0,50822
GEO B $0,45286

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,03968
Rendimiento 0,06000
ACCELSA B $0,10717
DESC A $0,60481
GEO B $0,28801

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,02834
Rendimiento 0,06074
ARGOSB $0,16541
CELANES B1 $0,107318
DESC A $0,41367
ELEKTRA CPO $0,00789
GEO B $0,24972
GFESA B $0,04252
VISA $0,01344

B= 0,07 u=1
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,01067
Rendimiento 0,07000
DESC A $0,95581
GEO B $0,04416

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,07093
Rendimiento 0,07000
DESC A $0,95581
GEO B $0,04418

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,06251
Rendimiento 0,07616
ARGOSB $0,02093
DESC A $0,92562
GFESA B $0,05344

Período Segundo

B= 0,03 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03000
CERAMIC UB $0,02373
CIFRA A $0,20917
FEMSA B $0,15147
GFNORTE A $0,00480
LIVEPOL 1 $0,01944
SANBORN L $0,3000
SANLUIS A $0,27961
TMM A $0,01176

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03010
ACCELSA B $0,03665
CERAMIC UB $0,15328
FEMSA B $0,30000
PEÑOLES $0,05928
POSADAS A $0,10870
SANLUIS A $0,21627
TMM A $0,12581

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,03077
ACCELSA B $0,06925
APASCO $0,01415
ARGOSB $0,06342
AUTLANB $0,01557
BANACCI A $0,01428
CELANES B1 $0,00279
CEMEXA $0,03264
CERAMIC UB $0,00367
CIFRA A $0,01604
DESC A $0,02018
DINA $0,00519
ELEKTRA CPO $0,01925
FEMSA B $0,03628
GEO B $0,05477
GFB A $0,01433
GFESA B $0,01267
GFNORTE A $0,00326
GMEXICO B $0,30000
GSERFIN A $0,00760
KOF L $0,01527
PEÑOLES $0,01375
POSADAS A $0,02212
SANBORN L $0,11947
SANLUIS A $0,00648
TELMEX A $0,00886
TLEVISA CPO $0,01671
TMM A $0,01489
VISA $0,06398

B= 0,03 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03000
ARGOSB $0,07285
CIFRA A $0,15706
SANBORN L $0,19109
SANLUIS A $0,23060
TLEVISA CPO $0,13795
TMM A $0,01648
VISA $0,19375

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03977
ACCELSA B $0,11363
CERAMIC UB $0,15109
FEMSA B $0,43055
POSADAS A $0,06525
SANLUIS A $0,19625
TMM A $0,04103

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,03288
ACCELSA B $0,06950
APASCO $0,01401
ARGOSB $0,06302
AUTLANB $0,01460
BANACCI A $0,01423
CELANES B1 $0,00224
CEMEXA $0,03190
CERAMIC UB $0,00338
CIFRA A $0,01577
DESC A $0,01978
DINA $0,00493
ELEKTRA CPO $0,01841
FEMSA B $0,03581
GEO B $0,05459
GFB A $0,01411
GFESA B $0,01245
GFNORTE A $0,00292
GMEXICO B $0,31357
GSERFIN A $0,00737
KOF L $0,01303
PEÑOLES $0,01362
POSADAS A $0,02159
SANBORN L $0,11873
SANLUIS A $0,00623
TELMEX A $0,00828
TLEVISA CPO $0,01855
TMM A $0,01495
VISA $0,06156

B= 0,03 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03000
ARGOSB $0,07285
CIFRA A $0,15706
SANBORN L $0,19109
SANLUIS A $0,23060
TLEVISA CPO $0,13795
TMM A $0,01648
VISA $0,19375

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03977
ACCELSA B $0,11363
CERAMIC UB $0,15109
FEMSA B $0,43055
POSADAS A $0,06525
SANLUIS A $0,19625
TMM A $0,04103

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,03288
ACCELSA B $0,06950
APASCO $0,01401
ARGOSB $0,06302
AUTLANB $0,01460
BANACCI A $0,01423
CELANES B1 $0,00224
CEMEXA $0,03190
CERAMIC UB $0,00338
CIFRA A $0,01577
DESC A $0,01978
DINA $0,00493
ELEKTRA CPO $0,01841
FEMSA B $0,03581
GEO B $0,05459
GFB A $0,01411
GFESA B $0,01245
GFNORTE A $0,00292
GMEXICO B $0,31357
GSERFIN A $0,00737
KOF L $0,01303
PEÑOLES $0,01362
POSADAS A $0,02159
SANBORN L $0,11873
SANLUIS A $0,00623
TELMEX A $0,00828
TLEVISA CPO $0,01855
TMM A $0,01495
VISA $0,06156

B= 0,03 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03000
ARGOSB $0,07285
CIFRA A $0,15706
SANBORN L $0,19109
SANLUIS A $0,23060
TLEVISA CPO $0,13795
TMM A $0,01648
VISA $0,19375

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03977
ACCELSA B $0,11363
CERAMIC UB $0,15109
FEMSA B $0,43055
POSADAS A $0,06525
SANLUIS A $0,19625
TMM A $0,04103

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,03288
ACCELSA B $0,06950
APASCO $0,01401
ARGOSB $0,06302
AUTLANB $0,01460
BANACCI A $0,01423
CELANES B1 $0,00224
CEMEXA $0,03190
CERAMIC UB $0,00338
CIFRA A $0,01577
DESC A $0,01978
DINA $0,00493
ELEKTRA CPO $0,01841
FEMSA B $0,03581
GEO B $0,05459
GFB A $0,01411
GFESA B $0,01245
GFNORTE A $0,00292
GMEXICO B $0,31357
GSERFIN A $0,00737
KOF L $0,01303
PEÑOLES $0,01362
POSADAS A $0,02159
SANBORN L $0,11873
SANLUIS A $0,00623
TELMEX A $0,00828
TLEVISA CPO $0,01855
TMM A $0,01495
VISA $0,06156

B= 0,03 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03000
ARGOSB $0,07285
CIFRA A $0,15706
SANBORN L $0,19109
SANLUIS A $0,23060
TLEVISA CPO $0,13795
TMM A $0,01648
VISA $0,19375

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,03977
ACCELSA B $0,11363
CERAMIC UB $0,15109
FEMSA B $0,43055
POSADAS A $0,06525
SANLUIS A $0,19625
TMM A $0,04103

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00006
Rendimiento 0,03288
ACCELSA B $0,06950
APASCO $0,01401
ARGOSB $0,06302
AUTLANB $0,01460
BANACCI A $0,01423
CELANES B1 $0,00224
CEMEXA $0,03190
CERAMIC UB $0,00338
CIFRA A $0,01577
DESC A $0,01978
DINA $0,00493
ELEKTRA CPO $0,01841
FEMSA B $0,03581
GEO B $0,05459
GFB A $0,01411
GFESA B $0,01245
GFNORTE A $0,00292
GMEXICO B $0,31357
GSERFIN A $0,00737
KOF L $0,01303
PEÑOLES $0,01362
POSADAS A $0,02159
SANBORN L $0,11873
SANLUIS A $0,00623
TELMEX A $0,00828
TLEVISA CPO $0,01855
TMM A $0,01495
VISA $0,06156

Período Segundo

	B= 0,05 u=,3	B= 0,05 u=,5	B= 0,05 u=,7	B= 0,05 u=,9	B= 0,05 u=1
Resultados Desviación Absoluta					
Inversión					
Riesgo	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Rendimiento	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000
APASCO	$0,24673	$0,24673	$0,24673	$0,24673	$0,24673
ARGOSB	$0,04774	$0,04774	$0,04774	$0,04774	$0,04774
ELEKTRA CPO	$0,02093	$0,02093	$0,02093	$0,02093	$0,02093
FEMSA B	$0,25400	$0,25400	$0,25400	$0,25400	$0,25400
POSADAS A	$0,18378	$0,18378	$0,18378	$0,18378	$0,18378
SANLUIS A	$0,24680	$0,24680	$0,24680	$0,24680	$0,24680

Resultados Markowitz					
Inversión					
Riesgo	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Rendimiento	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000
ACCELSA B	$0,05343	$0,05343	$0,05343	$0,05343	$0,05343
APASCO	$0,26188	$0,26188	$0,26188	$0,26188	$0,26188
ELEKTRA CPO	$0,08474	$0,08474	$0,08474	$0,08474	$0,08474
FEMSA B	$0,23742	$0,23742	$0,23742	$0,23742	$0,23742
POSADAS A	$0,10887	$0,10887	$0,10887	$0,10887	$0,10887
SANLUIS A	$0,25365	$0,25365	$0,25365	$0,25365	$0,25365

Resultados Indice Simple					
Inversión					
Riesgo	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008
Rendimiento	0,050916	0,05052	0,05052	0,05052	0,05052
ACCELSA B	$0,07237	$0,07248	$0,07248	$0,07248	$0,07248
APASCO	$0,01442	$0,01436	$0,01436	$0,01436	$0,01436
ARGOSB	$0,06505	$0,06489	$0,06489	$0,06489	$0,06489
AUTLANB	$0,01426	$0,01386	$0,01386	$0,01386	$0,01386
BANACCI A	$0,01472	$0,01470	$0,01470	$0,01470	$0,01470
CELANES B1	$0,00182	$0,00159	$0,00159	$0,00159	$0,00159
CEMEXA	$0,03244	$0,03213	$0,03213	$0,03213	$0,03213
CERAMIC UB	$0,00324	$0,00312	$0,00312	$0,00312	$0,00312
CIFRA A	$0,01613	$0,01602	$0,01602	$0,01602	$0,01602
DESC A	$0,02017	$0,02001	$0,02001	$0,02001	$0,02001
DINA	$0,00488	$0,00477	$0,00477	$0,00477	$0,00477
ELEKTRA CPO	$0,01834	$0,01799	$0,01799	$0,01799	$0,01799
FEMSA B	$0,03673	$0,03653	$0,03653	$0,03653	$0,03653
GEO B	$0,05651	$0,05644	$0,05644	$0,05644	$0,05644
GFB A	$0,01443	$0,01434	$0,01434	$0,01434	$0,01434
GFESA B	$0,01271	$0,01261	$0,01261	$0,01261	$0,01261
GFNORTE A	$0,00271	$0,00257	$0,00257	$0,00257	$0,00257
GMEXICO B	$0,30000	$0,30559	$0,30559	$0,30559	$0,30559
GSERFIN A	$0,00744	$0,00734	$0,00734	$0,00734	$0,00734
KOF L	$0,01145	$0,01052	$0,01052	$0,01052	$0,01052
PEÑOLES	$0,01402	$0,01397	$0,01397	$0,01397	$0,01397
POSADAS A	$0,02192	$0,0217	$0,0217	$0,0217	$0,0217
SANBORN L	$0,12256	$0,12225	$0,12225	$0,12225	$0,12225
SANLUIS A	$0,00625	$0,00615	$0,00615	$0,00615	$0,00615
TELMEX A	$0,00806	$0,00782	$0,00782	$0,00782	$0,00782
TLEVISA CPO	$0,01911	$0,01904	$0,01904	$0,01904	$0,01904
TMM A	$0,01557	$0,01559	$0,01559	$0,01559	$0,01559
VISA	$0,06166	$0,06066	$0,06066	$0,06066	$0,06066

Período Segundo

B= 0,06 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión
Riesgo 0,00047
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,30000
ELEKTRA CPO $0,25197
FEMSA B $0,06807
GFNORTE A $0,17093
SANLUIS A $0,20901

Resultados Markowitz

Inversión
Riesgo 0,00065
Rendimiento 0,06000
APASCO $0,07152
ARGOSB $0,30000
ELEKTRA CPO $0,30000
GFNORTE A $0,16441
SANLUIS A $0,16407

Resultados Indice Simple

Inversión
Riesgo 0,00006
Rendimiento 0,06254
ACCELSA B $0,07394
APASCO $0,01455
ARGOSB $0,06587
AUTLANB $0,01361
BANACCI A $0,01494
CELANES B1 $0,00133
CEMEXA $0,03234
CERAMIC UB $0,00302
CIFRA A $0,01618
DESC A $0,02017
DINA $0,00472
ELEKTRA CPO $0,01786
FEMSA B $0,03696
GEO B $0,05738
GFB A $0,01449
GFESA B $0,01273
GFNORTE A $0,00244
GMEXICO B $0,30000
GSERFIN A $0,00735
KOF L $0,00954
PEÑOLES $0,01416
POSADAS A $0,02182
SANBORN L $0,12410
SANLUIS A $0,00613
TELMEX A $0,00766
TLEVISA CPO $0,01931
TMM A $0,01591
VISA $0,06049

B= 0,06 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión
Riesgo 0,00041
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,50000
ELEKTRA CPO $0,18680
FEMSA B $0,07405
GFNORTE A $0,09782
SANLUIS A $0,14131

Resultados Markowitz

Inversión
Riesgo 0,00044
Rendimiento 0,06000
APASCO $0,00727
ARGOSB $0,50000
ELEKTRA CPO $0,21209
GFNORTE A $0,10004
SANLUIS A $0,18059

Resultados Indice Simple

Inversión
Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,06241
ACCELSA B $0,07397
APASCO $0,01453
ARGOSB $0,06582
AUTLANB $0,01349
BANACCI A $0,01494
CELANES B1 $0,00127
CEMEXA $0,03225
CERAMIC UB $0,00299
CIFRA A $0,01615
DESC A $0,02013
DINA $0,00469
ELEKTRA CPO $0,01778
FEMSA B $0,0369
GEO B $0,05736
GFB A $0,01446
GFESA B $0,01270
GFNORTE A $0,00240
GMEXICO B $0,30160
GSERFIN A $0,00733
KOF L $0,00927
PEÑOLES $0,01414
POSADAS A $0,02176
SANBORN L $0,12401
SANLUIS A $0,00610
TELMEX A $0,00759
TLEVISA CPO $0,01929
TMM A $0,01591
VISA $0,06021

B= 0,06 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión
Riesgo 0,00039
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,56677
ELEKTRA CPO $0,16505
FEMSA B $0,07604
GFNORTE A $0,07341
SANLUIS A $0,11870

Resultados Markowitz

Inversión
Riesgo 0,00042
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,58894
ELEKTRA CPO $0,14723
GFNORTE A $0,07419
SANLUIS A $0,18963

Resultados Indice Simple

Inversión
Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,06241
ACCELSA B $0,07397
APASCO $0,01453
ARGOSB $0,06582
AUTLANB $0,01349
BANACCI A $0,01494
CELANES B1 $0,00127
CEMEXA $0,03225
CERAMIC UB $0,00299
CIFRA A $0,01615
DESC A $0,02013
DINA $0,00469
ELEKTRA CPO $0,01778
FEMSA B $0,0369
GEO B $0,05736
GFB A $0,01446
GFESA B $0,01270
GFNORTE A $0,00240
GMEXICO B $0,30160
GSERFIN A $0,00733
KOF L $0,00927
PEÑOLES $0,01414
POSADAS A $0,02176
SANBORN L $0,12401
SANLUIS A $0,00610
TELMEX A $0,00759
TLEVISA CPO $0,01929
TMM A $0,01591
VISA $0,06021

B= 0,06 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión
Riesgo 0,00039
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,56677
ELEKTRA CPO $0,16505
FEMSA B $0,07604
GFNORTE A $0,07341
SANLUIS A $0,11870

Resultados Markowitz

Inversión
Riesgo 0,00042
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,58894
ELEKTRA CPO $0,14723
GFNORTE A $0,07419
SANLUIS A $0,18963

Resultados Indice Simple

Inversión
Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,06241
ACCELSA B $0,07397
APASCO $0,01453
ARGOSB $0,06582
AUTLANB $0,01349
BANACCI A $0,01494
CELANES B1 $0,00127
CEMEXA $0,03225
CERAMIC UB $0,00299
CIFRA A $0,01615
DESC A $0,02013
DINA $0,00469
ELEKTRA CPO $0,01778
FEMSA B $0,0369
GEO B $0,05736
GFB A $0,01446
GFESA B $0,01270
GFNORTE A $0,00240
GMEXICO B $0,30160
GSERFIN A $0,00733
KOF L $0,00927
PEÑOLES $0,01414
POSADAS A $0,02176
SANBORN L $0,12401
SANLUIS A $0,00610
TELMEX A $0,00759
TLEVISA CPO $0,01929
TMM A $0,01591
VISA $0,06021

B= 0,06 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión
Riesgo 0,00039
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,56677
ELEKTRA CPO $0,16505
FEMSA B $0,07604
GFNORTE A $0,07341
SANLUIS A $0,11870

Resultados Markowitz

Inversión
Riesgo 0,00042
Rendimiento 0,06000
ARGOSB $0,58894
ELEKTRA CPO $0,14723
GFNORTE A $0,07419
SANLUIS A $0,18963

Resultados Indice Simple

Inversión
Riesgo 0,00008
Rendimiento 0,06241
ACCELSA B $0,07397
APASCO $0,01453
ARGOSB $0,06582
AUTLANB $0,01349
BANACCI A $0,01494
CELANES B1 $0,00127
CEMEXA $0,03225
CERAMIC UB $0,00299
CIFRA A $0,01615
DESC A $0,02013
DINA $0,00469
ELEKTRA CPO $0,01778
FEMSA B $0,0369
GEO B $0,05736
GFB A $0,01446
GFESA B $0,01270
GFNORTE A $0,00240
GMEXICO B $0,30160
GSERFIN A $0,00733
KOF L $0,00927
PEÑOLES $0,01414
POSADAS A $0,02176
SANBORN L $0,12401
SANLUIS A $0,00610
TELMEX A $0,00759
TLEVISA CPO $0,01929
TMM A $0,01591
VISA $0,06021

Período Tercero

B= 0,03 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,04382

CELANES B1 $0,13404

CIFRA A $0,19106

FEMSA B $0,10903

GFESA B $0,06658

GSERFIN A $0,04269

LIVEPOL 1 $0,15657

SANLUIS A $0,30000

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimento 0.04897

ACCELSA B $0.05836

CELANES B1 $0.20766

GSERFIN A $0.03181

LIVEPOL 1 $0,30000

PEÑOLES $0.09733

POSADAS A $0.26229

VITRO $0.02233

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00015

Rendimiento 0.03117

BANACCI A $0.01305

CELANES B1 $0.08811

CIFRA A $0.06007

DESC A $0.01147

FEMSA B $0.06098

LIVEPOL 1 $0,04601

PEÑOLES $0,04042

SANBORN L $0.07917

SANLUIS A $0.30000

TELMEX A $0.27207

VISA $0,02861

B= 0,03 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,03285

CELANES B1 $0.10074

CIFRA A $0.13817

FEMSA B $0,05558

GFESA B $0,06534

GSERFIN A $0,01565

LIVEPOL 1 $0.12450

SANLUIS A $0,50000

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,05328

CELANES B1 $0.18240

GSERFIN A $0.03238

LIVEPOL 1 $0.35469

PEÑOLES $0.10140

POSADAS A $0,26798

VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00011

Rendimiento 0,03007

BANACCI A $0.00946

CELANES B1 $0.06715

CIFRA A $0.04357

DESC A $0.00634

FEMSA B $0.04568

LIVEPOL 1 $0.03479

PEÑOLES $0.03075

SANBORN L $0.05740

SANLUIS A $0.50000

TELMEX A $0.18320

VISA $0.01962

B= 0,03 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,03000

CELANES B1 $0,06868

CIFRA A $0,10568

FEMSA B $0,01485

GFESA B $0,05814

LIVEPOL 1 $0,11928

SANLUIS A $0,57978

VISA $0,03337

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,05328

CELANES B1 $0,18240

GSERFIN A $0,03238

LIVEPOL 1 $0,35469

PEÑOLES $0,10140

POSADAS A $0,26798

VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00010

Rendimiento 0,02900

BANACCI A $0,00632

CELANES B1 $0,04859

CIFRA A $0,02896

DESC A $0,00556

FEMSA B $0,03213

LIVEPOL 1 $0,02485

PEÑOLES $0,02219

SANBORN L $0,03812

SANLUIS A $0,67706

TELMEX A $0,10451

VISA $0,01167

B= 0,03 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,03000

CELANES B1 $0,06868

CIFRA A $0,10568

FEMSA B $0,01485

GFESA B $0,05814

LIVEPOL 1 $0,11928

SANLUIS A $0,57978

VISA $0,03337

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0.00000

Rendimiento 0,05328

CELANES B1 $0,18240

GSERFIN A $0,03238

LIVEPOL 1 $0.35469

PEÑOLES $0,10140

POSADAS A $0,26798

VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00010

Rendimiento 0,02900

BANACCI A $0,00632

CELANES B1 $0,04859

CIFRA A $0,02896

DESC A $0,00556

FEMSA B $0,03213

LIVEPOL 1 $0,02485

PEÑOLES $0,02219

SANBORN L $0,03812

SANLUIS A $0,67706

TELMEX A $0,10451

VISA $0,01167

B= 0,05 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,05000

CELANES B1 $0,13986

CIFRA A $0,14462

FEMSA B $0,02988

GFESA B $0,03925

GSERFIN A $0,02285

LIVEPOL 1 $0,18743

SANLUIS A $0,30000

VISA $0,13606

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0 00000

Rendimiento 0,050000

ACCELSA B $0,05971

CELANES B1 $0,20822

GSERFIN A $0,02538

LIVEPOL 1 $0,30000

PEÑOLES $0,09505

POSADAS A $0,28436

VITRO $0,02725

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00016

Rendimiento 0,05130

BANACCI A $0,01319

CELANES B1 $0,09203

CIFRA A $0,06069

DESC A $0,01160

FEMSA B $0,06295

LIVEPOL 1 $0,04780

PEÑOLES $0,04217

SANBORN L $0,07996

SANLUIS A $0,30000

TELMEX A $0,26172

VISA $0,02786

Período Tercero

B= 0,05 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05000
CELANES B1 $0,12041
CIFRA A $0,09143
DESC A $0,01970
GFESA B $0,02358
LIVEPOL 1 $0,19118
SANLUIS A $0,36961
VISA $0,18407

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05328
CELANES B1 $0,18240
GSERFIN A $0,03238
LIVEPOL 1 $0,35469
PEÑOLES $0,10140
POSADAS A $0,26798
VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00012
Rendimiento 0,05020
BANACCI A $0,00962
CELANES B1 $0,07106
CIFRA A $0,04419
DESC A $0,00847
FEMSA B $0,04765
LIVEPOL 1 $0,03658
PEÑOLES $0,03250
SANBORN L $0,05819
SANLUIS A $0,50000
TELMEX A $0,17284
VISA $0,01887

B= 0,05 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05000
CELANES B1 $0,12771
CIFRA A $0,07842
DINA $0,01199
GFESA B $0,02795
LIVEPOL 1 $0,19629
SANLUIS A $0,36603
VISA $0,19160

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05328
CELANES B1 $0,18240
GSERFIN A $0,03238
LIVEPOL 1 $0,35469
PEÑOLES $0,10140
POSADAS A $0,26796
VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00010
Rendimiento 0,04909
BANACCI A $0,00606
CELANES B1 $0,05009
CIFRA A $0,02768
DESC A $0,00534
FEMSA B $0,03234
LIVEPOL 1 $0,02535
PEÑOLES $0,02283
SANBORN L $0,03642
SANLUIS A $0,70000
TELMEX A $0,08396
VISA $0,00989

B= 0,05 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05000
CELANES B1 $0,12771
CIFRA A $0,07842
DINA $0,01199
GFESA B $0,02795
LIVEPOL 1 $0,19629
SANLUIS A $0,36603
VISA $0,19160

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05328
CELANES B1 $0,18240
GSERFIN A $0,03238
LIVEPOL 1 $0,35469
PEÑOLES $0,10140
POSADAS A $0,26796
VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00011
Rendimiento 0,04916
BANACCI A $0,00680
CELANES B1 $0,04400
CIFRA A $0,04084
DESC A $0,00771
FEMSA B $0,03434
LIVEPOL 1 $0,02432
PEÑOLES $0,02042
SANBORN L $0,05392
SANLUIS A $0,74067
VISA $0,02495

B= 0,05 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05000
CELANES B1 $0,12771
CIFRA A $0,07842
DINA $0,01199
GFESA B $0,02795
LIVEPOL 1 $0,19629
SANLUIS A $0,36603
VISA $0,19160

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,05328
CELANES B1 $0,18240
GSERFIN A $0,03238
LIVEPOL 1 $0,35469
PEÑOLES $0,10140
POSADAS A $0,26798
VITRO $0,06113

Resultados Indice Simple

Inversion

Riesgo 0,00011
Rendimiento 0,04916
BANACCI A $0,00680
CELANES B1 $0,04400
CIFRA A $0,04084
DESC A $0,00771
FEMSA B $0,03434
LIVEPOL 1 $0,02432
PEÑOLES $0,02042
SANBORN L $0,05392
SANLUIS A $0,74067
VISA $0,02495

B= 0,06 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,06000
CELANES B1 $0,13419
CIFRA A $0,08367
DESC A $0,03310
GFESA B $0,00677
LIVEPOL 1 $0,22630
SANLUIS A $0,26384
VISA $0,25211

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,07247
ACCELSA B $0,05154
CELANES B1 $0,18208
FEMSA B $0,20137
LIVEPOL 1 $0,30000
PEÑOLES $0,03417
POSADAS A $0,12842
VITRO $0,1024

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00016
Rendimiento 0,06136
BANACCI A $0,01327
CELANES B1 $0,09398
CIFRA A $0,06100
DESC A $0,01167
FEMSA B $0,06394
LIVEPOL 1 $0,04870
PEÑOLES $0,04304
SANBORN L $0,08036
SANLUIS A $0,30000
TELMEX A $0,25654
VISA $0,02748

Período Tercero

B= 0,06 u=,5

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,06000

CELANES B1 $0,13419

CIFRA A $0,08367

DESC A $0,03310

GFESA B $0,00677

LIVEPOL 1 $0,22630

SANLUIS A $0,26384

VISA $0,25211

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07663

CELANES B1 $0,15924

FEMSA B $0,20453

LIVEPOL 1 $0,34820

PEÑOLES $0,03676

POSADAS A $0,11339

VITRO $0,13785

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00012

Rendimiento 0,06027

BANACCI A $0,00970

CELANES B1 $0,07302

CIFRA A $0,04449

DESC A $0,00854

FEMSA B $0,04863

LIVEPOL 1 $0,03747

PEÑOLES $0,03338

SANBORN L $0,05858

SANLUIS A $0,50000

TELMEX A $0,16766

VISA $0,01850

B= 0,06 u=,7

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,06000

CELANES B1 $0,14646

CIFRA A $0,06181

DINA $0,02014

GFESA B $0,01411

LIVEPOL 1 $0,23490

SANLUIS A $0,25781

VISA $0,26475

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07663

CELANES B1 $0,15924

FEMSA B $0,20453

LIVEPOL 1 $0,34820

PEÑOLES $0,03676

POSADAS A $0,11339

VITRO $0,13785

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00011

Rendimiento 0,059170

BANACCI A $0,00813

CELANES B1 $0,05205

CIFRA A $0,02799

DESC A $0,00540

FEMSA B $0,03333

LIVEPOL 1 $0,02625

PEÑOLES $0,02371

SANBORN L $0,03681

SANLUIS A $0,70000

TELMEX A $0,07878

VISA $0,00952

B= 0,06 u=,9

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,06000

CELANES B1 $0,14646

CIFRA A $0,06181

DINA $0,02014

GFESA B $0,01411

LIVEPOL 1 $0,23490

SANLUIS A $0,25781

VISA $0,26475

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07663

CELANES B1 $0,15924

FEMSA B $0,20453

LIVEPOL 1 $0,34820

PEÑOLES $0,03676

POSADAS A $0,11339

VITRO $0,13785

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00011

Rendimiento 0,05862

BANACCI A $0,00848

CELANES B1 $0,04584

CIFRA A $0,03931

DESC A $0,00744

FEMSA B $0,03462

LIVEPOL 1 $0,02494

PEÑOLES $0,02121

SANBORN L $0,05188

SANLUIS A $0,74344

VISA $0,02281

B= 0,06 u=1

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,06000

CELANES B1 $0,14646

CIFRA A $0,06181

DINA $0,02014

GFESA B $0,01411

LIVEPOL 1 $0,23490

SANLUIS A $0,25781

VISA $0,26475

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07663

CELANES B1 $0,15924

FEMSA B $0,20453

LIVEPOL 1 $0,34820

PEÑOLES $0,03676

POSADAS A $0,11339

VITRO $0,13785

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00011

Rendimiento 0,05862

BANACCI A $0,00848

CELANES B1 $0,04584

CIFRA A $0,03931

DESC A $0,00744

FEMSA B $0,03462

LIVEPOL 1 $0,02494

PEÑOLES $0,02121

SANBORN L $0,05188

SANLUIS A $0,74344

VISA $0,02281

B= 0,07 u=,3

Resultados Desviación Absoluta

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07000

CELANES B1 $0,17466

CIFRA A $0,12855

DESC A $0,01205

GFB A $0,00405

GSERFIN A $0,01913

LIVEPOL 1 $0,26186

SANLUIS A $0,09969

VISA $0.30000

Resultados Markowitz

Inversión

Riesgo 0,00000

Rendimiento 0,07963

ACCELSA B $0,04416

BANACCI A $0,01831

CELANES B1 $0,17409

FEMSA B $0,28118

LIVEPOL 1 $0,30000

POSADAS A $0,05274

VITRO $0,12951

Resultados Indice Simple

Inversión

Riesgo 0,00017

Rendimiento 0,07143

BANACCI A $0,01334

CELANES B1 $0,09594

CIFRA A $0,08130

DESC A $0,01174

FEMSA B $0,06492

LIVEPOL 1 $0,04959

PEÑOLES $0,04392

SANBORN L $0,08075

SANLUIS A $0,3

TELMEX A $0,25136

VISA $0,02711

Período Tercero

B= 0,07 u=.5
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,07000
CELANES B1 $0,16794
CIFRA A $0,11650
DESC A $0,02177
GSERFIN A $0,01664
LIVEPOL 1 $0,26111
SANLUIS A $0,10940
VISA $0,30662

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,08362
BANACCI A $0,01949
CELANES B1 $0,15422
FEMSA B $0,28899
LIVEPOL 1 $0,34085
POSADAS A $0,03513
VITRO $0,16130

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,00012
Rendimiento 0,07033
BANACCI A $0,00977
CELANES B1 $0,07497
CIFRA A $0,04480
DESC A $0,00860
FEMSA B $0,04962
LIVEPOL 1 $0,03837
PEÑOLES $0,03425
SANBORN L $0,05898
SANLUIS A $0,5
TELMEX A $0,16248
VISA $0,01813

B= 0,07 u=.7
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,07000
CELANES B1 $0,16521
CIFRA A $0,04521
DINA $0,02829
GFESA B $0,00026
LIVEPOL 1 $0,27350
SANLUIS A $0,14960
VISA $0,33791

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,08362
BANACCI A $0,01949
CELANES B1 $0,15422
FEMSA B $0,28899
LIVEPOL 1 $0,34085
POSADAS A $0,03513
VITRO $0,16130

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,00011
Rendimiento 0,06923
BANACCI A $0,00520
CELANES B1 $0,05401
CIFRA A $0,02830
DESC A $0,00547
FEMSA B $0,03431
LIVEPOL 1 $0,02714
PEÑOLES $0,02458
SANBORN L $0,03721
SANLUIS A $0,7
TELMEX A $0,07360
VISA $0,00914

B= 0,07 u=.9
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,07000
CELANES B1 $0,16521
CIFRA A $0,04521
DINA $0,02829
GFESA B $0,00026
LIVEPOL 1 $0,27350
SANLUIS A $0,14960
VISA $0,33791

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,08362
BANACCI A $0,01949
CELANES B1 $0,15422
FEMSA B $0,28899
LIVEPOL 1 $0,34085
POSADAS A $0,03513
VITRO $0,16130

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,00011
Rendimiento 0,07116
BANACCI A $0,00817
CELANES B1 $0,04767
CIFRA A $0,03778
DESC A $0,00717
FEMSA B $0,03489
LIVEPOL 1 $0,02556
PEÑOLES $0,02199
SANBORN L $0,04984
SANLUIS A $0,74622
VISA $0,02067

B= 0,07 u=1
Resultados Desviación Absoluta
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,07000
CELANES B1 $0,16521
CIFRA A $0,04521
DINA $0,02829
GFESA B $0,00026
LIVEPOL 1 $0,27350
SANLUIS A $0,14960
VISA $0,33791

Resultados Markowitz
Inversión
Riesgo 0,00000
Rendimiento 0,08362
BANACCI A $0,01949
CELANES B1 $0,15422
FEMSA B $0,28899
LIVEPOL 1 $0,34085
POSADAS A $0,03513
VITRO $0,16130

Resultados Indice Simple
Inversión
Riesgo 0,00011
Rendimiento 0,07116
BANACCI A $0,00817
CELANES B1 $0,04767
CIFRA A $0,03778
DESC A $0,00717
FEMSA B $0,03489
LIVEPOL 1 $0,02556
PEÑOLES $0,02199
SANBORN L $0,04984
SANLUIS A $0,74622
VISA $0,02067

Conclusiones

Los modelos de selección tienen por objetivo proporcionar al inversionista una herramienta que permita en el futuro elegir un portafolio de inversión óptimo, sin olvidar que como cualquier modelo tiene sus deficiencias.

El trabajo desarrollado en esta tesis ha sido la recopilación y análisis de los modelos de selección, tomando como punto de partida el trabajo realizado por Markowitz, no busca decidir cual es mejor, si no compararlos en sus resultados y en los elementos necesarios para su implementación.

Ha sido enriquecedor realizar este trabajo y considero que puede servir de orientación para aquellos que deseen emprender el estudio de temas más avanzados y relacionados con portafolios de inversión.

El desarrollo de la aplicación en Visual Basic, permite ver en la vida práctica los elementos desarrollados de manera teórica en la tesis.

Al aplicar los modelos de selección se concluyeron los siguientes resultados:

- El Modelo de Índice Simple fue creado como alternativa al Modelo de Markowitz, proporcionando la ventaja de simplificar los parámetros, y basándose en una relación entre el rendimiento de las acciones y el nivel de un indicador de mercado, sin embargo, al aplicarlo la composición de los portafolios resultantes es diferente a la de los portafolios de Markowitz, esto debido a los grandes supuestos que posee el Modelo de Índice Simple.

- El Modelo de Desviación Absoluta parte de los mismos supuestos que Markowitz, además proporciona las ventajas de la facilidad en la estimación de parámetros y resolver un problema de programación lineal en lugar de un problema de programación cuadrática.

- Los portafolios resultantes del Modelo de Markowitz y Desviación Absoluta en promedio coinciden en un alto porcentaje, tanto en el número de acciones que lo conforman como en el peso de las acciones coincidentes, de hecho en algunos casos coinciden en un cien por ciento.

- Para los inversionistas que deseen tomar sus decisiones de acuerdo al Modelo de Markowitz, el Modelo de Desviación Absoluta puede ser una buena alternativa.

Bibliografía

- Elton, Edwin J./ Gruber, Martin J.
  Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
  John Wiley and Sons, 1987.

- Fama, Eugene F.
  Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments
  The Journal of Finance, Vol. XXIII, No.1 (Marzo, 1968).

- Fama, Eugene F.
  Foundations of Finance
  Basic Books Inc., 1976.

- Konno, Hiroshi/ Yamazaki, Hiroaki
  Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market
  Management Science, Vol. 32, No. 5 (Mayo, 1991), pp. 519-531.

- Konno, Hiroshi
  Piecewise Linear Risk function and Portfolio Optimization
  Journal of the Operations Research, Society of Japan,
  Vol. 33, No.2 (Junio, 1990), pp. 139-156.

- Markowitz, Harry M.
  Portfolio Selection
  The Journal of Finance, Vol. VII, No. 1 (Marzo, 1952), pp. 77-91.

- Martínez Abascal Eduardo
  Futuros y Opciones en la Gestión de Carteras
  McGraw-Hill, España, 1994.

- Messutí, Jorge/ Alvares, Adrián/ Graff, Romano
  Selección de Inversiones
  Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1992.

- Philippatos, George, C.
  Financial Management Theory and Techniques
  Holden Day Inc. 1973.

- Sharpe, William F.
  A Simplified Model for Portfolio Analysis
  Management Science, No. 9 (Enero, 1963), pp. 277-293.

- Sharpe, William F.
  Portfolio Theory and Capital Markets
  McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

- Weston, J. Fred/ Copeland, Thomas E.
  Managerial Finance
  The Dryden Press, 1989.

Indicadores Bursátiles
Publicación Mensual de la Bolsa Mexicana de Valores
Julio 1996-Diciembre1997.