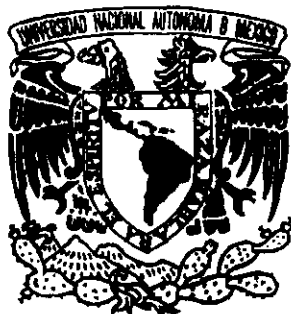


00386 I  
2  
2ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

EL EFECTO DE LOS CHOQUES GRAVITACIONALES  
EN EL SISTEMA DE CUMULOS GLOBULARES  
GALACTICO

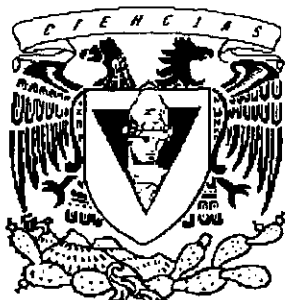


T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMIA)

P R E S E N T A

FIDEL CRUZ PEREGRINO



DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS ALBERTO AGUILAR CHIU

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1999



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

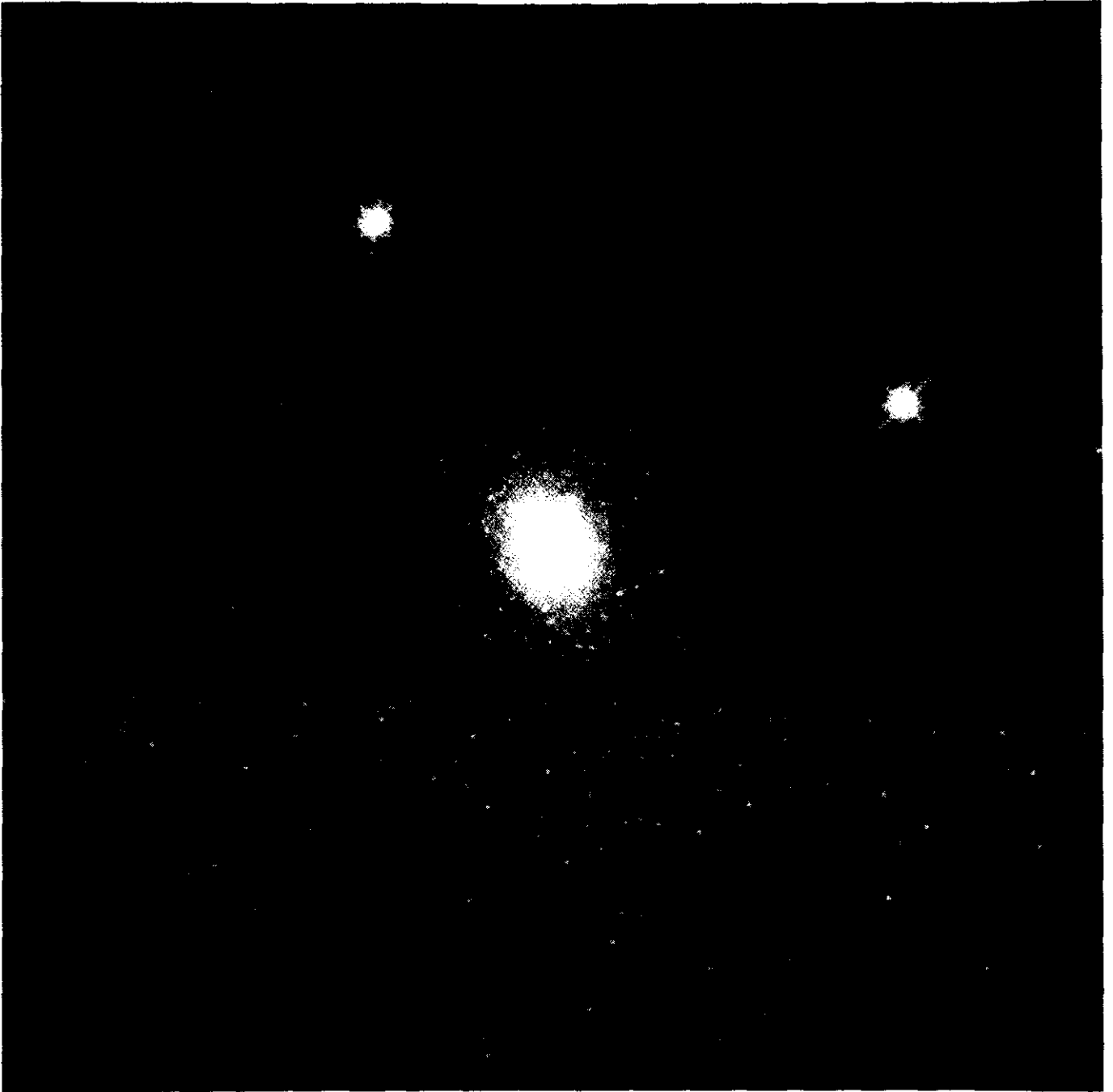


Fig. 0.0.-- Cúmulo globular G1, en órbita alrededor de la galaxia de Andrómeda (M31). La región más brillante en el centro contiene cerca de 300,000 estrellas. Este cúmulo se encuentra a una distancia de 130,000 años luz ( $\sim 40$  kpc) del centro de Andrómeda y es el cúmulo globular más brillante en el grupo local de galaxias. Se cree que este cúmulo se formó poco después del comienzo del Universo, y al igual que algunos cúmulos de la Vía Láctea, éstos son una pieza primordial en la comprensión de las primeras etapas en la formación galáctica. Esta imagen es el resultado de combinar diferentes imágenes tomadas en luz visible y del cercano infrarrojo en julio de 1994, con el telescopio espacial Hubble (HST). El crédito de esta imagen corresponde a Michael Rich, Kenneth Mighell, and James D. Neill (de la Universidad de Columbia); y a Wendy Freedman (de Carnegie Observatories), y a la NASA.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Luis A. Aguilar por su gran apoyo durante el desarrollo este trabajo. Por su constante preocupación en mi formación académica, y por enseñarme a ser crítico y honesto en la investigación científica.

También deseo expresar mi agradecimiento a la Dra. Chistine Allen, Dr. Pedro Colín, Dr. Hector Velazquez, Dr. Jesús Gonzalez, Dr. Marco Martos y al Dr. Ivannio Puerari; por haber aceptado ser los sinodales, y por sus acertadas críticas y sugerencias al texto, las cuales ayudaron a enriquecer este trabajo.

Al Dr. Daniel Carpintero, por las agradables conversaciones (aunque no me guste el futbol), y por contribuir con sus ideas para la realización para el desarrollo de esta tesis. Al Dr. Steve Levine, quien siempre está dispuesto a conversar sobre dinámica, computadoras y tequila.

A todo el personal del Instituto de Astronomía. A Luis Salas, Mauricio Tapia, Joaquín Bohigas, Marco Moreno y Manuel Alvarez, con quienes siempre es posible conversar de cualquier cosa. A los computólogos, Benjamin Hernandez y Edgar Saenz, quienes resuelven todo problema, a menos que sea culpa de DGSCA. A las bibliotecarias, Maria Elena y Georgina, quienes siempre encontraron los libros que nunca encontré. Al personal administrativo, Renee Graef, Martín Muñoz, Paco Martínez y Roberto Zambrano, quienes siempre me ayudaron en todo lo que administrativamente era posible. Y por supuesto gracias al buen Gabriel Leyva, por los paseos en San Diego; y a Tomas Farlow, por el café de los domingos por la tarde.

Le agradezco al Instituto de Astronomía, UNAM, en Ensenada y en CU, por el apoyo y todas las facilidades prestadas durante el desarrollo de este trabajo. A DGAPA -UNAM, por la beca con la que fué posible tener una vida decorosa.

A mi familia, a mis padres, Filadelfo y Amelia, y a mis hermanos, Hector, Irene, Martha y Amelia, por mantenerse unidos en todo momento y en todo lugar. Y por estar siempre conmigo, a pesar de la distancia.

A Pahola, por su infinita paciencia y su indispensable compañía. A la familia Sanchez Garayzar, por su incondicional apoyo desde que me adoptaron.

Por último, a todas esas personas que he conocido, y que en su momento creyeron en mi, y en la importancia de este trabajo. A todas ellas mi profundo agradecimiento.

# EL EFECTO DE LOS CHOQUES GRAVITACIONALES EN EL SISTEMA DE CÚMULOS GLOBULARES GALÁCTICO

Fidel Cruz Peregrino  
*Instituto de Astronomía, UNAM*

Director de Tesis: Luis A. Aguilar  
*Instituto de Astronomía, UNAM*

## RESUMEN

El fenómeno de los choques gravitacionales es uno de los procesos que determinan la evolución del sistema de cúmulos globulares galáctico. Históricamente su estudio se ha realizado con diversas aproximaciones: *aproximación de impulso*, *oscilador armónico forzado* y *el problema restringido de tres cuerpos*. Hemos retomado estas aproximaciones de manera progresiva para obtener un entendimiento gradual de las características más importantes de este fenómeno, tanto en el régimen impulsivo como en el adiabático.

En este trabajo se presenta, por primera vez, un conjunto de simulaciones numéricas autoconsistentes de un cúmulo globular, con un número realista de partículas, con una distribución de masa acorde a las observadas y en presencia de un campo de marea realista. La evolución de los cúmulos se sigue durante 10 períodos orbitales. Hemos estudiado los cambios en masa y energía que experimentan los cúmulos, así como los cambios en su estructura. Analizamos como es que ocurre la inyección de energía en las regiones internas del cúmulo, encontrando que el calentamiento en los casos más impulsivos tiende a comportarse como el dado en la *aproximación de Spitzer* (1958) y en el caso aproximadamente adiabático como la *aproximación de Weinberg* (1994a).

Encontramos que la evolución global de los cúmulos, debida a su interacción con el bulbo galáctico, está dominada por dos procesos; claramente diferenciados por la manera como ocasionan la pérdida de masa del sistema. El primero es el desbordamiento del lóbulo de Roche, que es una consecuencia del truncamiento espacial que la parte estática del campo de marea impone sobre el cúmulo, ocasionando una pérdida de masa que depende sensiblemente del tamaño del cúmulo respecto a su lóbulo de Roche. El segundo es el calentamiento por choques gravitacionales, que inyecta energía a las estrellas del cúmulo debido a la variación del campo de marea. Este proceso se manifiesta por medio de pulsos en el incremento de la energía del cúmulo, que a diferencia del anterior, no es autolimitante; porque inyecta energía de manera continua sobre las estrellas del cúmulo.

El incremento en la energía de las estrellas, por choques gravitacionales, es función de su energía de ligadura y de la excentricidad del cúmulo. Para las estrellas menos ligadas el calentamiento es más importante en órbitas muy excéntricas (límite impulsivo), disminuyendo junto con el valor de la excentricidad, pero aumentando el número de estrellas, con mayor energía de ligadura, que pueden ser afectadas (límite adiabático).

Encontramos que la tasa de destrucción, por período orbital, aumenta con la excentricidad de la órbita. Sin embargo, por unidad de tiempo esta dependencia no es importante, porque los cúmulos en órbitas muy excéntricas experimentan menos encuentros con el bulbo que aquéllos en órbitas menos excéntricas, llegando a ser comparable la tasa de destrucción en ambos casos.

A partir de la tasa de destrucción, por unidad de tiempo, hemos evaluado los cambios que experimenta una supuesta distribución inicial de cúmulos globulares ( $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$ ), como función de su distancia media galáctica. Encontramos una ausencia de cúmulos de baja concentración a menos de 2 kpc del centro galáctico, resultado que es consistente con la distribución observada del sistema de cúmulos globulares galácticos, la cual muestra un decrecimiento del número de cúmulos globulares hacia el centro galáctico, y en particular para los cúmulos de baja concentración.

Este trabajo es una primera aproximación autoconsistente para estudiar el efecto de los choques de marea sobre los cúmulos globulares.

4.5.3	Pérdida de masa . . . . .	73
4.5.4	Evolución diferencial de la energía y la masa . . . . .	73
4.5.5	Estructura . . . . .	74
4.5.6	Cambios en la geometría . . . . .	75
4.6	Comparación Entre el Código de Armónicos Esféricos y el de Árbol . . . . .	76
4.6.1	Comparación para la simulación A50l . . . . .	77
4.7	Conclusiones . . . . .	78
<b>5</b>	<b>RESULTADOS DE LA SIMULACION DE N-CUERPOS</b>	<b>81</b>
5.1	Cambios Totales . . . . .	81
5.1.1	Cambios en la energía y la masa de los cúmulos . . . . .	81
5.1.2	Consideraciones sobre el desbordamiento del lóbulo de Roche . . . . .	83
5.1.3	Consideraciones sobre los choques de marea . . . . .	85
5.1.4	Cambios globales en la estructura . . . . .	85
5.2	Cambios como Función del Tiempo . . . . .	87
5.2.1	Diferencias en la evolución temporal entre los choques y el desbordamiento . . . . .	89
5.2.2	Ajuste a la variación de la energía . . . . .	90
5.2.3	Ajuste a la variación de la masa . . . . .	91
5.2.4	Tiempo característico y de destrucción . . . . .	93
5.3	Eficiencia del Choque Dentro del Cúmulo . . . . .	93
5.3.1	Calentamiento por período orbital . . . . .	93
5.3.2	Promedio de los cambios en la energía . . . . .	101
5.3.3	Calentamiento por unidad de tiempo . . . . .	101
5.4	Tasa de Destrucción en los Choques Gravitacionales . . . . .	101
5.4.1	Tasa de destrucción por período orbital . . . . .	103
5.4.2	Tasa de destrucción en el tiempo de Hubble . . . . .	103
5.4.3	Discusión . . . . .	103
5.5	Resultados Generales . . . . .	104
<b>6</b>	<b>DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES</b>	<b>107</b>
6.1	Desbordamiento vs. Calentamiento . . . . .	107
6.2	Calentamiento en la Estructura del Cúmulo . . . . .	107
6.3	Calentamiento y Tasa de Destrucción por Período Orbital . . . . .	108
6.4	Calentamiento y Tasa de Destrucción en el Tiempo de Hubble . . . . .	108
6.4.1	Implicaciones en la evolución del sistema de cúmulos globulares . . . . .	108
6.5	Conclusiones y Trabajo Futuro . . . . .	110
	<b>APÉNDICES</b>	<b>113</b>
A	Modelos de King . . . . .	113
A.1	El Modelo analítico . . . . .	113
A.2	El modelo numérico . . . . .	115
B	Escalamiento en Simulaciones Numéricas y Unidades . . . . .	117
C	Tabla de parámetros iniciales . . . . .	118
D	Resultados . . . . .	120
D.1	Orbitas del cúmulo . . . . .	120
D.2	Posiciones y velocidades . . . . .	120
D.3	Radios lagrangianos, $E$ , $M$ , $c^t$ y $\rho_0$ . . . . .	120
D.4	Semiejes del elípsoide . . . . .	120
D.5	Diagramas de Botlinger . . . . .	120

# Índice General

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1	¿Qué son los Cúmulos Globulares?	1
1.2	Propiedades de los Cúmulos Globulares	2
1.2.1	Distancia	2
1.2.2	Número y distribución	2
1.2.3	Brillo superficial	3
1.2.4	Luminosidad	4
1.2.5	Masa y el cociente masa luminosidad	4
1.2.6	Tamaño y estructura	4
1.2.7	Abundancia química y cinemática	5
1.2.8	Forma espacial	6
1.3	Procesos Dinámicos de Evolución de los Cúmulos Globulares	6
1.3.1	Evaporación	6
1.3.2	Evolución estelar	8
1.3.3	Fricción dinámica	8
1.3.4	Campos gravitacionales externos	9
1.4	Correlaciones con la Posición en la Galaxia	11
1.4.1	Masa	11
1.4.2	Tamaño y densidad	11
1.4.3	Concentración	11
1.4.4	Tiempos de relajación	11
1.4.5	Discusión	11
1.5	Origen de los Cúmulos Globulares	12
1.6	Modelos y Trabajos Anteriores	13
1.6.1	Modelos para la evolución de los cúmulos globulares	13
1.6.2	Trabajos sobre destrucción de cúmulos globulares	13
1.7	Objetivos y Plan de la Tesis	15
<b>2</b>	<b>TEORÍA</b>	<b>19</b>
2.1	Aproximación de Impulso	19
2.2	Aproximación con la Corrección Adiabática	20
2.2.1	Teoría adiabática e invariantes adiabáticos	20
2.2.2	Corrección adiabática	22
2.3	Oscilador Armónico Forzado por una Fuerza de Marea Periódica	23
2.3.1	Solución por teoría de perturbaciones	25
2.3.2	Solución numérica	25
2.3.3	Comparación de la solución numérica y las aproximaciones analíticas.	29
2.4	Aproximación con el Problema de Tres Cuerpos	34
2.4.1	Implementación numérica del problema	34



2.4.2	Condiciones Iniciales . . . . .	35
2.4.3	Resultados . . . . .	36
2.4.4	Orbitas circulares . . . . .	37
2.4.5	Orbitas elípticas . . . . .	37
2.4.6	Discusión . . . . .	43
2.5	Conclusiones . . . . .	45
<b>3</b>	<b>MODELOS DEL POTENCIAL GALACTICO</b>	<b>47</b>
3.1	Introducción . . . . .	47
3.2	Modelo de Allen y Santillán . . . . .	47
3.2.1	Bulbo . . . . .	49
3.2.2	Halo . . . . .	49
3.2.3	Disco . . . . .	49
3.3	Modelo de Bahcall, Schmidt y Soneira . . . . .	49
3.3.1	Componente central . . . . .	50
3.3.2	Bulbo . . . . .	50
3.3.3	Halo . . . . .	51
3.3.4	Disco . . . . .	51
3.4	Modelo de Ostriker y Caldwell . . . . .	51
3.4.1	Bulbo . . . . .	51
3.4.2	Halo . . . . .	53
3.4.3	Disco . . . . .	53
3.5	Comparación y Selección del Modelo . . . . .	53
3.5.1	Comparación de las distribuciones. . . . .	53
3.5.2	Comparación de los efectos dinámicos. . . . .	55
3.5.3	Discusión e implementación numérica . . . . .	55
3.6	Construcción de Nuestro Modelo. . . . .	56
3.6.1	Distribución esférica para la masa del disco . . . . .	56
3.6.2	Bulbo y halo . . . . .	57
3.7	Conclusiones . . . . .	57
<b>4</b>	<b>SIMULACIÓN DE N-CUERPOS</b>	<b>59</b>
4.1	¿Por qué Necesitamos un Número Realista de Partículas? . . . . .	59
4.2	El Código de N-Cuerpos . . . . .	60
4.2.1	Método del árbol jerárquico . . . . .	61
4.2.2	Código de armónicos esféricos . . . . .	61
4.2.3	Expansión del cúmulo . . . . .	64
4.2.4	Calentamiento numérico . . . . .	66
4.2.5	Cúmulo en órbita circular . . . . .	66
4.3	Diseño de los Experimentos . . . . .	67
4.3.1	Orbitas del cúmulo . . . . .	67
4.3.2	Masa y densidad inicial . . . . .	67
4.3.3	Escenarios físicos . . . . .	69
4.4	Experimentos . . . . .	69
4.4.1	Notación . . . . .	69
4.4.2	Condiciones iniciales . . . . .	69
4.5	Análisis . . . . .	72
4.5.1	Definiciones . . . . .	72
4.5.2	Energías . . . . .	72

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Todo<sup>1</sup> parece indicar que los cúmulos globulares<sup>2</sup> se formaron junto con las componentes más antiguas de la Galaxia, hace aproximadamente  $10^{10}$  años. Su apariencia actual es consecuencia de las condiciones físicas y químicas durante el proceso de formación galáctica, de su evolución interna, y de su interacción con el ambiente galáctico en el que se encuentran.

Por lo anterior, es natural utilizar el sistema de cúmulos globulares para obtener información sobre las primeras etapas de la formación galáctica. Para esto es necesario entender los procesos que, a través del tiempo, cambiaron sus propiedades originales. Igual que un arqueólogo necesita conocer los efectos que la erosión tiene sobre los restos de una civilización antigua, nosotros también debemos entender los procesos dinámicos y estelares que cambiaron su apariencia inicial.

Los procesos dinámicos y estelares que determinan la evolución de un cúmulo globular tienden a su destruirlo, y por tanto, se modifican sus propiedades originales, así como del sistema. Para obtener información sobre dichas propiedades, es necesario modelar los procesos responsables de tal evolución, por lo que se requiere conocer disciplinas tan diversas como: la dinámica de sistemas estelares, la evolución estelar y la evolución química de la Galaxia, así como de métodos analíticos y numéricos de modelaje, y contar con la mejor base de datos observacionales posible.

En este capítulo se hace una revisión de las propiedades más importantes de los cúmulos globulares, en particular de aquéllas que muestran una correlación con su distancia galactocéntrica. Se describen brevemente los procesos dinámicos y estelares que determinan la evolución de los cúmulos globulares, poniendo especial énfasis en aquéllos que tienen alguna relación con factores externos al cúmulo. Se discute la importancia de los choques gravitacionales<sup>3</sup> en la evolución de los cúmulos globulares, y revisamos en detalle los trabajos que se han desarrollado sobre este tema, destacando el grado de avance que cada uno de ellos

presenta.

Finalmente, presentamos la motivación de este trabajo y sus objetivos. Se proponen las líneas a seguir para tener una mejor comprensión del proceso de destrucción de los cúmulos globulares por los choques gravitacionales.

### 1.1 ¿Qué son los Cúmulos Globulares?

Los cúmulos globulares se definen clásicamente como sistemas de apariencia esférica (ver Fig. 0) integrados por  $10^5$ – $10^6$  estrellas de Población II, con edades aproximadas de  $10^{10}$  años<sup>4</sup>, pobres en metales, en órbitas más o menos excéntricas y sin mostrar un confinamiento hacia el disco galáctico. Se puede decir que forman parte del halo galáctico (Meylan y Heggie 1997). La distribución espacial de los cúmulos globulares fué utilizada por Shapley (1930), para el estudio de la estructura de nuestra Galaxia (ver van de Kamp 1965 y Sawyer Hogg 1965, quienes presentan una discusión sobre el desarrollo del trabajo de Shapley en los cúmulos globulares); y por Trumpler (1930) como indicadores de la evolución química y dinámica del halo.

Hoy en día se considera a los cúmulos globulares como laboratorios, en su conjunto o de manera individual, donde es posible comprobar teorías sobre la evolución dinámica de sistemas estelares, sobre la evolución estelar y sobre los procesos de formación galáctica. La existencia de estos sistemas también impone una edad mínima para el universo. De lo anterior es claro que su estudio es uno de los campos más ricos y de gran importancia en la astronomía moderna.

A continuación listamos algunos artículos de revisión en el estudio de los cúmulos globulares: sobre su forma y estructura (King 1985, Meylan y Prior 1993); sobre su dinámica (Lightman y Shapiro 1978, Elson *et al.* 1987, Meylan y Heggie 1997); sobre sus propiedades globales (Zinn 1988, Meylan y Heggie 1997); sobre su cinemática (Webbink 1988); sobre su abundancia química (Bell 1988); sobre su origen y formación (van den Bergh 1994, Larson 1990, Meylan y Heggie 1997); sobre su destrucción (Aguilar 1993); y discusiones sobre las implicaciones de los

<sup>1</sup>La evidencia observacional

<sup>2</sup>En este trabajo sólo haremos referencia a los cúmulos globulares pertenecientes a nuestra Galaxia

<sup>3</sup>En este trabajo los choques gravitacionales se refieren a la variación promedio del potencial que experimentan las estrellas de un sistema estelar debido a la presencia de un sistema externo.

<sup>4</sup>Existe un considerable debate sobre la dispersión en las edades de los cúmulos globulares (Dickens *et al.* 1991, Meylan y Heggie 1997 y Sarajedini, Chaboyer y Demarque 1997).

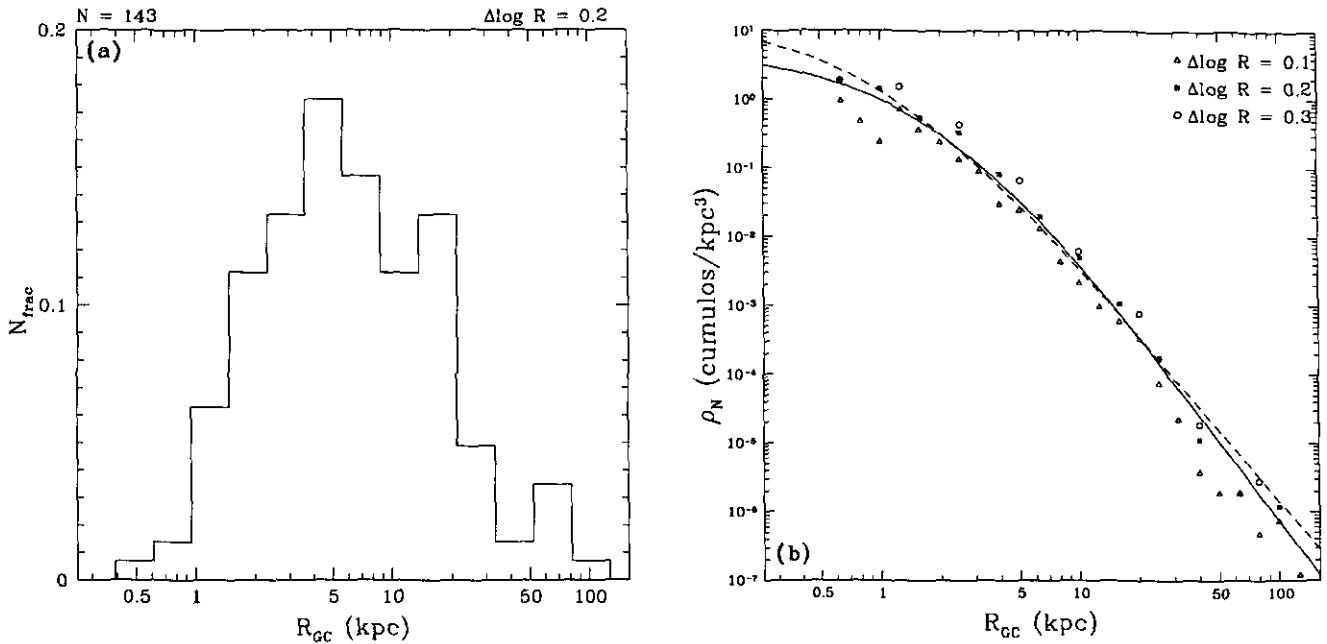


Fig. 1.1.— En (a) se muestra la de distribución de cúmulos como función de su distancia galactocéntrica. En (b) se tiene el número de cúmulos por unidad de volumen. Los diferentes símbolos representan el tamaño del intervalo en el cual se promedió para obtener el valor del punto. Las líneas, punteada y sólida, son ajustes empíricos propuestos por Djorgovski y Meylan (1994). Datos proporcionados por S. Djorgovski.

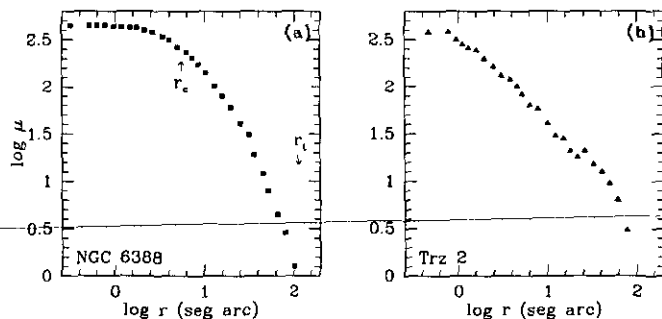


Fig. 1.2.— Perfiles de brillo superficial para los cúmulos NGC 6388 y Terzan 2. En (a), se tiene el caso donde los datos ajustan un modelo de King. En (b) se muestra el caso de un cúmulo en la etapa de colapso central, ver discusión en § 1.3.1 (tomados de Djorgovski y King 1986).

datos observacionales y teóricos (Webbink 1983, Trager *et al.* 1993, Djorgovski 1993 y Djorgovski *et al.* 1994, Harris 1996).

## 1.2 Propiedades de los Cúmulos Globulares

### 1.2.1 Distancia

El valor de algunas de las propiedades de los cúmulos globulares depende de la distancia a la que estos se encuentran, razón por la cual su determinación es fundamental. El método más general consiste en medir la magnitud aparente de las estrellas *RR* Lira, las cuales se encuentran

dentro de los cúmulos, y están en la rama horizontal del diagrama Hertzsprung–Russell. La magnitud absoluta ( $M_v$ ) de estas estrellas es función de la metalicidad del cúmulo ( $[Fe/H]$ ), y está dada por  $M_v(RR)=0.20[Fe/H] + 1.00$  (Harris, *et al.* 1991). A partir de esta relación se obtiene el módulo de distancia al cúmulo.

### 1.2.2 Número y distribución

El número de cúmulos globulares que se conoce es de 150, aunque se cree que el número total es un poco mayor (Harris 1996). Es posible que algunos cúmulos no sean visibles debido al oscurecimiento del material interestelar cerca del plano y del bulbo galáctico, y que otros aún no hayan sido identificados como tales.

En la Fig. 1.1a se muestra la distribución de los cúmulos globulares por kiloparsec. Vemos que la mayor parte de ellos se encuentran entre 1 kpc y 30 kpc; notamos la ausencia de éstos a menos de 1 kpc del centro galáctico, así como una aparente disminución de su número entre los 40 kpc y 65 kpc (Harris 1976, Zinn 1985 y Armandroff *et al.* 1992), y sólo unos cuantos entre los 65 kpc y 125 kpc. Los cúmulos más alejados del centro galáctico están a 100 kpc (Pal 4) y a 125 kpc (AM 1).

En la Fig. 1.1b se muestra la densidad numérica de cúmulos globulares como función de su distancia galactocéntrica. Los datos muestran que la densidad aumenta conforme nos acercamos al centro galáctico hasta los  $\sim 0.6$  kpc. Las curvas, que ahí se muestran, son dos ajustes propuestos de manera empírica por Djorgovski (1994), con la cual intenta determinar el número de cúmulos que

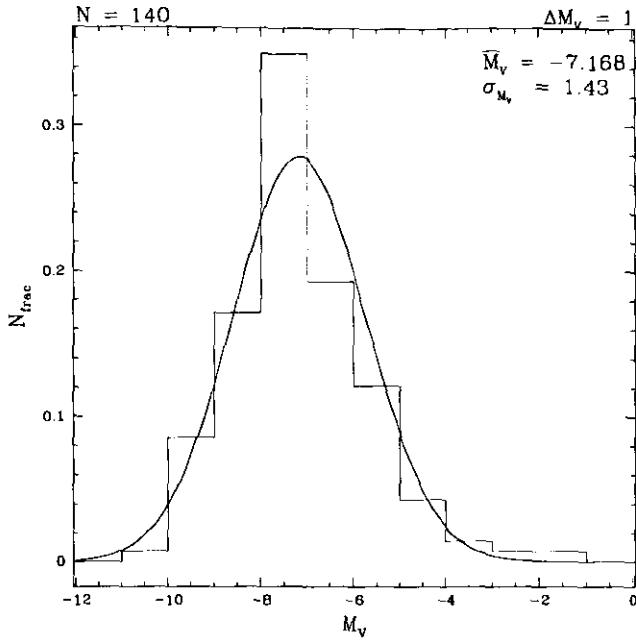


Fig. 1.3.— Función de luminosidad para el sistema de cúmulos globulares galáctico. Se ha ajustado una Gaussiana con los parámetros indicados arriba a la derecha. Notamos que la distribución es ligeramente asimétrica alrededor del valor medio, con un sesgo de 0.77. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

no es posible observar en las regiones centrales de la Galaxia. La distribución que él propone es de la forma

$$\rho_N(R_{GC}) = \rho_0^c \left( 1 + \frac{R_{GC}}{R_{GC}^c} \right)^{-\alpha} \quad (2-1)$$

donde  $R_{GC}$  es la distancia galactocéntrica,  $\rho_0^c$  la densidad central,  $R_{GC}^c$  es el factor de escala espacial y  $\alpha$  el exponente de la distribución. La línea sólida corresponde a los valores de  $\alpha=4$ ,  $\rho_0^c=5 \text{ \#/kpc}^3$  y  $R_{GC}^c=2 \text{ kpc}$ , mientras que la línea de trazo a los valores de  $\alpha=3.5$ ,  $\rho_0^c=15 \text{ \#/kpc}^3$  y  $R_{GC}^c=1 \text{ kpc}$ . Estas dos curvas ajustan de manera satisfactoria los datos observados. Sin embargo, en la región central difieren en su pendiente y su valor máximo. De lo anterior se estima que el número de cúmulos que no son observados es de uno a diez, para  $\alpha=4$  y  $\alpha=3.5$ , respectivamente.

La ley de potencias,  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$ , es semejante a la que siguen las estrellas del halo estelar (Harris, 1976), y muy diferente a la que se supone tiene el halo oscuro  $\sim R_{GC}^{-2}$  (ver discusión en §3 sobre las diferentes componentes de la Galaxia).

Otra manera de estimar el número de cúmulos que no es observado, es la que utilizan Barbuy *et al.* (1998), quienes estudian la distancia a los cúmulos que se encuentran dentro de un radio de  $5^\circ$  alrededor del centro galáctico. Ellos reportan 17 cúmulos dentro del área de estudio, estando todos ellos entre el Sol y el centro galáctico. Estos autores concluyen que del otro lado del bulbo galáctico

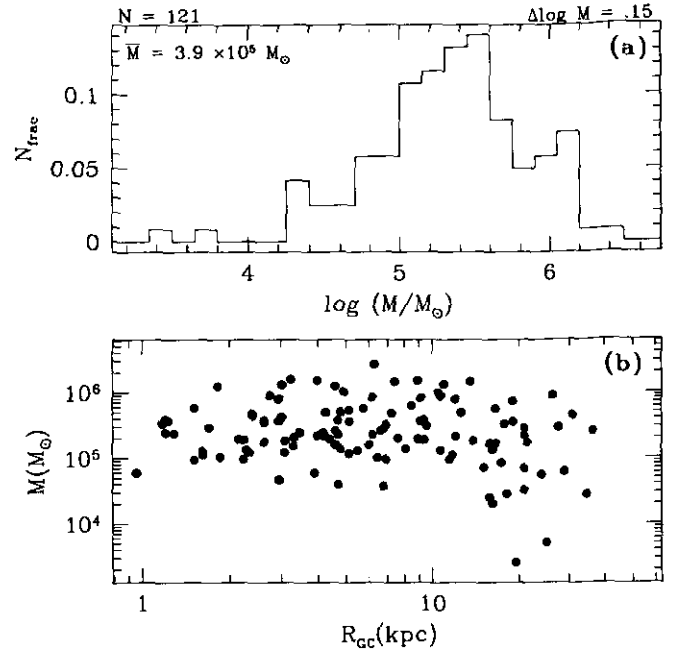


Fig. 1.4.— En (a) se muestra la distribución de masas de los cúmulos globulares galácticos (ver texto para detalles). Aproximadamente el 30% de los valores se obtiene por métodos dinámicos, el resto considerando un cociente masa luminosidad de 2.3. En (b) se muestra la masa de los cúmulos globulares como función de su distancia al centro galáctico. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

debe haber cerca de 15 cúmulos que no es posible observar debido a la extinción interestelar del gas y polvo en esa dirección.

El número de cúmulos que oculta el disco debe ser pequeño, alrededor de un 5% del total<sup>5</sup>. El decremento aparente de cúmulos en las regiones centrales de la Galaxia, también se puede deber a que no los haya, por tanto, existe algún proceso que inhibe la existencia de cúmulos a radios galactocéntricos menores a 1 kpc o 2 kpc. Otra posible explicación, es que como estos se mueven más rápido cerca de su perigaláctico, la mayor parte del tiempo los observamos lejos del centro galáctico.

### 1.2.3 Brillo superficial

Una de las principales características de un cúmulo globular es su perfil radial de brillo superficial ( $\mu$ ). En la Fig. 1.2a se muestra un ejemplo típico de dicho perfil. En la Fig. 1.2b se muestra este perfil para un cúmulo que se encuentra en la etapa de colapso central (ver discusión en § 1.3.1).

De la Fig. 1.2a, vemos que el perfil es plano en el centro del cúmulo, generalmente asociado con una distribución

<sup>5</sup>Valor que se obtiene de considerar que el ancho del disco es de  $\approx 20^\circ$  en latitud galáctica y su extensión de  $360^\circ$  y un perfil de distribución empírica propuesta por Djorgovski y Meylan (1994)

de masa isotérmica, que decae exponencialmente conforme aumenta el radio.

Este perfil se parametriza por tres cantidades: el radio central ( $r_c$ )<sup>6</sup>, que es el radio donde el brillo superficial tiene la mitad del su valor máximo; radio de marea ( $r_t$ ), que es el radio donde el brillo superficial tiende asintóticamente a cero (generalmente se obtiene con un ajuste a los datos, King 1962); y  $\mu(0)$ , que es el valor central (y máximo) de la distribución. En la mayoría de los casos el brillo superficial decae abruptamente en las regiones externas del cúmulo.

#### 1.2.4 Luminosidad

El gran número de estrellas que se encuentran en los cúmulos globulares, sobre todo en las regiones centrales, hace que éstos sistemas sean conspicuos. Su magnitud visual absoluta ( $M_V$ ) se puede obtener a partir de su magnitud aparente, su distancia, y haciendo la corrección por extinción (que depende de su latitud galáctica). La función de luminosidad para el sistema de cúmulos globulares galáctico se muestra en la Fig. 1.3. Debido a la forma de esta distribución se ajustó una distribución Gaussiana con un valor medio de  $M_V = -7.17$  y una dispersión de  $\sigma_{M_V} = 1.43$ . Van den Bergh (1993a), hace notar que la forma de esta distribución claramente distingue al sistema de cúmulos globulares de los cúmulos galácticos abiertos, que muestran una función de luminosidad que crece monótonicamente hacia luminosidades bajas. Harris (1991) hace una revisión de los trabajos que se han realizado en sistemas de cúmulos globulares extragalácticos. Reporta que el valor medio de la magnitud absoluta para estos sistemas es de  $-7.1$ . Esto parece sugerir que es un valor independiente del tipo de galaxia a la que se encuentran asociados, lo que ha sido utilizado como un indicador secundario de distancia a otras galaxias (ver referencias en § 4.2 Rowan y Robinson 1985).

#### 1.2.5 Masa y el cociente masa luminosidad

La masa, para la mayor parte de los cúmulos se estima a partir de su luminosidad, suponiendo un cociente masa luminosidad ( $\Upsilon = M/L$ ). Sin embargo, esta se puede inferir directamente de su dispersión de velocidades, por medio de modelos que suponen equilibrio virial dentro del cúmulo. Desafortunadamente, el número de cúmulos en los se ha determinado su dispersión de velocidades es del 30% del total de éstos (ver referencias de § 6.1 de Meylan y Heggie 1997).

Mandushev *et al.* (1991) aplica los modelos de King (1966) para encontrar la masa de 32 cúmulos globulares, a los cuales se les conoce su dispersión de velocidades. Los cocientes de masa luminosidad que ellos reportan van de 0.6 a 2.9, con un valor promedio de 1.21. Pryor y Meylan (1993) utilizan modelos de King considerando un espectro

de masas para las estrellas del cúmulo. Ellos determinan la masa para 56 cúmulos globulares. El valor promedio que ellos reportan es de  $\Upsilon$  de 2.3 en unidades solares.

La distribución de masa para el sistema de cúmulos globulares se muestra en la Fig. 1.4a. El 30% de los valores son el resultado de calcular directamente la masa, mientras que el resto se obtienen a partir de la luminosidad del cúmulo utilizando el valor promedio del cociente masa luminosidad  $\Upsilon = 2.3$  (Pryor y Meylan 1993). Vemos que los valores de la masa van de  $2.5 \times 10^3 M_\odot$  (AM-4) a  $2.4 \times 10^6 M_\odot$  ( $\omega$  Centauro). La mayor parte de los cúmulos tienen masas entre  $8 \times 10^4$  y  $10^6 M_\odot$ , con un valor medio de  $3.9 \times 10^5 M_\odot$ . Esta distribución muestra un pico secundario centrado en  $1.5 \times 10^6 M_\odot$ , que decae abruptamente hacia valores mayores.

#### 1.2.6 Tamaño y estructura

La estructura de un cúmulo globular se puede caracterizar por medio de dos parámetros independientes de longitud. Los parámetros radiales más usados son  $r_c$ ,  $r_t$  y  $r_h$ . Este último se define como el radio que contiene la mitad del brillo total integrado, y algunos otros autores lo identifican como el radio que contiene la mitad de la masa del cúmulo (Spitzer 1987, p.5). Uno de estos parámetros radiales suele ser sustituido por la llamada concentración del cúmulo, que se define como  $c = \log(r_t/r_c)$ .

En las Fig. 1.5a-1.5c, se muestran las distribuciones de valores para  $r_c$ ,  $c$  y  $r_h$ . Para  $r_c$  y  $r_h$  ambas distribuciones son unimodales centradas alrededor de 0.98 pc y 3.12 pc, respectivamente. Vemos que hay una gran dispersión alrededor de los valores promedio.

En la Fig. 1.5b se muestra la distribución de los valores de la concentración para los cúmulos globulares. Vemos que es aproximadamente unimodal centrada alrededor de 1.3. Se ha sombreado el número fraccional de cúmulos (17%) que ha alcanzado la etapa de *colapso central*, que observacionalmente se manifiesta como una ley de potencias en la parte central de la curva de brillo superficial (Djorgovski y King 1986 y discusión en § 1.3).

En la Fig. 1.2b, se muestra el perfil radial del brillo superficial para un cúmulo que ha alcanzado el colapso central. Los puntos se pueden ajustar con una ley de potencias con exponente igual a -1. En este caso es posible determinar los valores de  $r_t$  y  $r_h$ , pero no para  $r_c$ , que tiende a 0.

En principio es posible asociar un tamaño a cada cúmulo globular usando  $r_c$ ,  $r_t$  o  $r_h$ . Sin embargo, el valor de  $r_c$  cambia debido a los procesos dinámicos dentro del cúmulo y  $r_t$  es difícil de determinar, porque en las regiones externas del cúmulo su extensión se determina por conteos de estrellas, que se pueden confundir con las estrellas de campo (cúmulos cerca del plano ó del bulbo galáctico), o por tener magnitud aparente muy grande (cúmulos lejanos al Sol). Por otro lado, el valor de  $r_t$  varía con la posición del cúmulo respecto al centro galáctico (ver ec. 4-11).

Al asociar un tamaño a cada cúmulo es posible de-

<sup>6</sup>Para evitar confusiones se decidió usar las abreviaciones que se usan en las publicaciones en inglés. El significado se da en el glosario de términos al final de los apéndices.

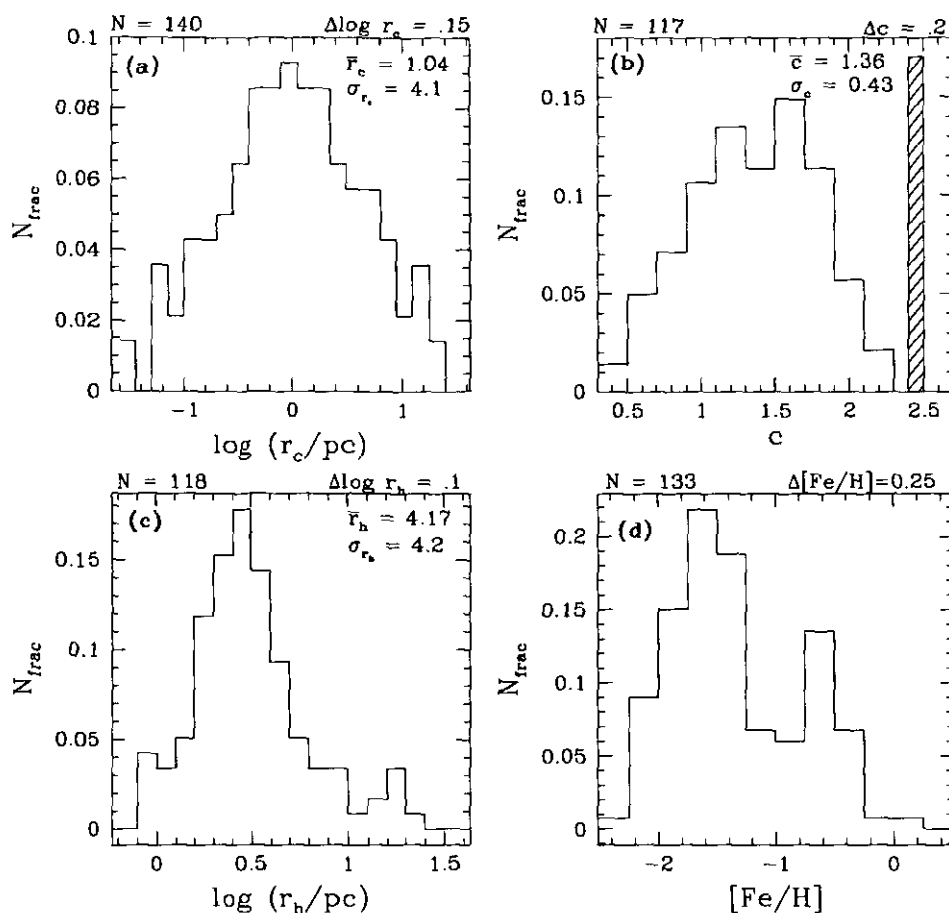


Fig. 1.5.— Histogramas de la distribución de los valores observados de: (a), radio central ( $r_c$ ); (b), concentración ( $c$ ), la parte sombreada indica la parte fraccional de cúmulos que se encuentran en la fase de colapso central, que corresponde al 17% de la muestra; (c), radio mediano de masa ( $r_h$ ) y (d), metalicidad ( $[\text{Fe}/\text{H}]$ ). En la parte superior de las gráficas se indica el número de cúmulos en cada muestra, el tamaño del intervalo considerado, el valor promedio y la desviación estándar de cada valor. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

terminar cantidades como la densidad promedio, tiempo dinámico de cruce, etc, lo que no sería posible si la escala espacial asociada esta variando en el tiempo.

Por lo anterior se toma a  $r_h$  como el tamaño característico de cada cúmulo, porque no muestra variación en escalas de tiempo del orden de  $\sim 10$  tiempos de relajación (ver definición más adelante), y además resulta ser proporcional a la energía total del cúmulo (Lightman y Shapiro 1978, Murphy *et al.* 1990).

### 1.2.7 Abundancia química y cinemática

La abundancia química de los cúmulos globulares se estudia a partir de sus índices fotométricos y de los anchos equivalentes en las líneas de absorción en sus espectros. Zinn (1985, 1991), con base en la distribución de la metalicidad (ver Fig. 1.5d) y de la información cinemática, sugiere la existencia de dos subsistemas: uno llamado de disco grueso, relativamente rico en metales ( $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -0.5$ ), de rápida rotación ( $V_{rot} \approx 193 \text{ km s}^{-1}$ ) y con una distri-

bución espacial achatada y sobrepuesta al disco galáctico; y otro de halo, pobre en metales ( $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -1.7$ ), de baja rotación ( $V_{rot} \approx 43 \text{ km s}^{-1}$ ) con una distribución espacial esférica alrededor del centro galáctico.

Una cantidad que al parecer esta relacionada con la metalicidad de los cúmulos es el gradiente de población estelar en la banda de inestabilidad de las estrellas RR Lira, que se mide con el cociente  $C \equiv (B - R)/(B + V + R)$ , donde  $B$ ,  $V$ ,  $R$ , es el número de estrellas azules, variables y rojas que se encuentran en la rama horizontal, respectivamente. Van den Bergh (1991, 1993b) utiliza los índices de metalicidad y el parámetro  $C$  para separar en tres subgrupos una muestra de cúmulos. El llama a los subgrupos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , y se distinguen entre sí de la siguiente forma:  $\gamma$ , con  $[\text{Fe}/\text{H}] \geq -0.8$  y se encuentra fuertemente concentrada hacia el bulbo y disco galáctico;  $\alpha$  y  $\beta$ , con  $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -1.0$ ;  $\beta$  se encuentra concentrado hacia el centro galáctico,  $R_{GC} < R_{\odot}$ , y sus órbitas en general son poco excéntricas; la población  $\alpha$ , se encuentra a distancias  $R_{GC} > 8 \text{ kpc}$ ,

con órbitas retrógradas muy radiales. El subgrupo  $\gamma$  tiene una cinemática parecida a la del disco, por lo que se les conoce como el sistema del disco, mientras que a las poblaciones  $\alpha$  y  $\beta$  como el sistema de halo. Lo interesante de este análisis es que el sistema de halo está dividido en 2 subsistemas, que tiene que ser explicados por las teorías de formación galáctica. Zinn (1993) reporta esta división, considerando también los datos cinemáticos y la metalicidad. La importancia de estos subsistemas se discute en la sección 5.

La información cinemática se tiene actualmente sobre los cúmulos globulares, es insuficiente para lograr distinguir entre ambos subsistemas. La principal dificultad está en la determinación de sus movimientos propios, debido a que su movimiento aparente en el cielo es muy pequeño y está por debajo del límite de detección. Sin embargo, ha sido posible medir los movimientos propios de algunos de ellos; por ejemplo Cudworth y Hanson (1993), reportan las velocidades espaciales de 14 cúmulos globulares.

En este trabajo no haremos distinción alguna entre los subsistemas desde el punto de vista de la metalicidad, pero sí desde un punto de vista cinemático, ya que nos interesa conocer parámetros orbitales que determinan sus órbitas.

### 1.2.8 Forma espacial

Aunque la apariencia de los cúmulos globulares es esférica, desviaciones de esta forma han sido estudiadas por algunos autores, en particular el cociente de  $b/a$ , donde  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor, respectivamente, del cúmulo proyectado en el plano del cielo. White y Shwartz (1987) reportan que  $\langle b/a \rangle$  es de  $0.93 \pm 0.01$ , para una muestra de 95 cúmulos globulares. El 36% de su muestra tiene valores en el intervalo de  $0.8 \leq b/a \leq 0.9$ , y sólo el 6% tiene valores entre 0.8 y 0.7. Estos autores reportan cierta dependencia de la asimetría con la concentración; por lo que definen los siguientes grupos:  $c < 1.05$ ,  $1.05 < c < 2.05$  y  $c > 2.05$ . Cada uno tiene una razón de ejes de  $0.85 \pm 0.02$  (con  $N=10$ ),  $0.93 \pm 0.01$  (con  $N=76$ ), y  $0.97 \pm 0.01$  (con  $N=9$ ), respectivamente. Concluyen que los cúmulos más concentrados son los que muestran una mayor simetría circular. Otro hecho interesante es que no parece haber una relación obvia de  $b/a$  con su posición galactocéntrica, aunque el promedio de  $b/a$  muestra mayor dispersión en las regiones internas de la Galaxia<sup>7</sup>. Los autores dividen su muestra como función de la metalicidad, igual a la propuesta por van den Berg 1993b, buscando relación entre la forma y la metalicidad, sin encontrar relación alguna.

## 1.3 Procesos Dinámicos de Evolución de los Cúmulos Globulares

La dinámica de un cúmulo globular está determinada por la fuerza de gravedad, por lo que su comportamiento se puede estudiar a diferentes escalas, tanto espaciales como temporales (Saslaw 1987, § 1). Para facilitar su estudio y comprensión se hace una distinción entre procesos internos y externos. Los procesos internos están determinados por las estrellas que forman al cúmulo, y transcurren en tiempos comparables al período orbital de las estrellas en las regiones centrales de éste. Los procesos externos están determinados por el campo gravitacional de la distribución de masa galáctica.

Los procesos que determinan la evolución de un cúmulo globular aislado son: la evaporación de estrellas debida a las colisiones entre ellas, que ocasiona un aumento en la energía de ligadura por unidad de masa, causando un aumento en la concentración del cúmulo; la pérdida de masa de las estrellas debida a su evolución estelar, y que tiende a disolver el cúmulo al producir una disminución de la energía de ligadura por unidad de masa.

Los efectos del campo gravitacional externo son: el truncamiento espacial del cúmulo, impuesto por la parte estática del campo de marea galáctico<sup>8</sup>, y la inyección de energía al movimiento de las estrellas del cúmulo, debido al trabajo que sobre ellas ejerce la variación temporal del campo de marea. Existe también la fricción dinámica, producida por las estrellas del entorno galáctico que sustraen energía orbital del cúmulo.

A continuación se describen brevemente estos procesos.

### 1.3.1 Evaporación

Las estrellas de un cúmulo globular interactúan entre sí por medio de colisiones, en las que se da un intercambio de energía y momento angular. A este proceso se le llama interacción de dos cuerpos, y es el responsable de hacer que la distribución inicial de velocidades tienda hacia una del tipo Maxwell-Boltzmann, en un tiempo característico llamado *tiempo de relajación colisional*,  $t_r$ . Este es el tiempo característico en el que se logra la equipartición de la energía entre las estrellas del cúmulo (Chandrasekhar 1942; §2, Spitzer y Hart 1971 y Saslaw 1987; § 45). Debido a la forma de la distribución de Maxwell-Boltzmann, la velocidad de algunas estrellas puede ser mayor que la velocidad de escape del cúmulo, y por tanto, lograr escapar de éste. Al mismo tiempo, en la región central del cúmulo las estrellas se reagrupan porque la energía de ligadura por unidad de masa aumenta<sup>9</sup>, esto incrementa la densidad central aumentando el número de encuentros,

<sup>7</sup>Existe cierta tendencia a que los cúmulos más concentrados se encuentren hacia regiones centrales de la Galaxia; entonces, si  $b/a$  está correlacionado con  $c$ , es posible que también exista una dependencia de ésta con  $R_{GC}$ . La única evidencia de dicha interacción se manifiesta por un aumento en la dispersión en los valores de la concentración, para los cúmulos entre 1 y 10 kpc (ver Fig. 1.5).

<sup>8</sup>Formalmente hablando se debería llamar fuerza diferencial, porque es el resultado de la diferencia entre la fuerza gravitacional de atracción galáctica y de la del cúmulo sobre las estrellas de este.

<sup>9</sup>La mayoría de las estrellas que escapan lo hacen moviéndose a la velocidad de escape, y por lo tanto con energía nula. Las estrellas que se quedan ligadas al cúmulo deberán compartir la misma energía de ligadura.

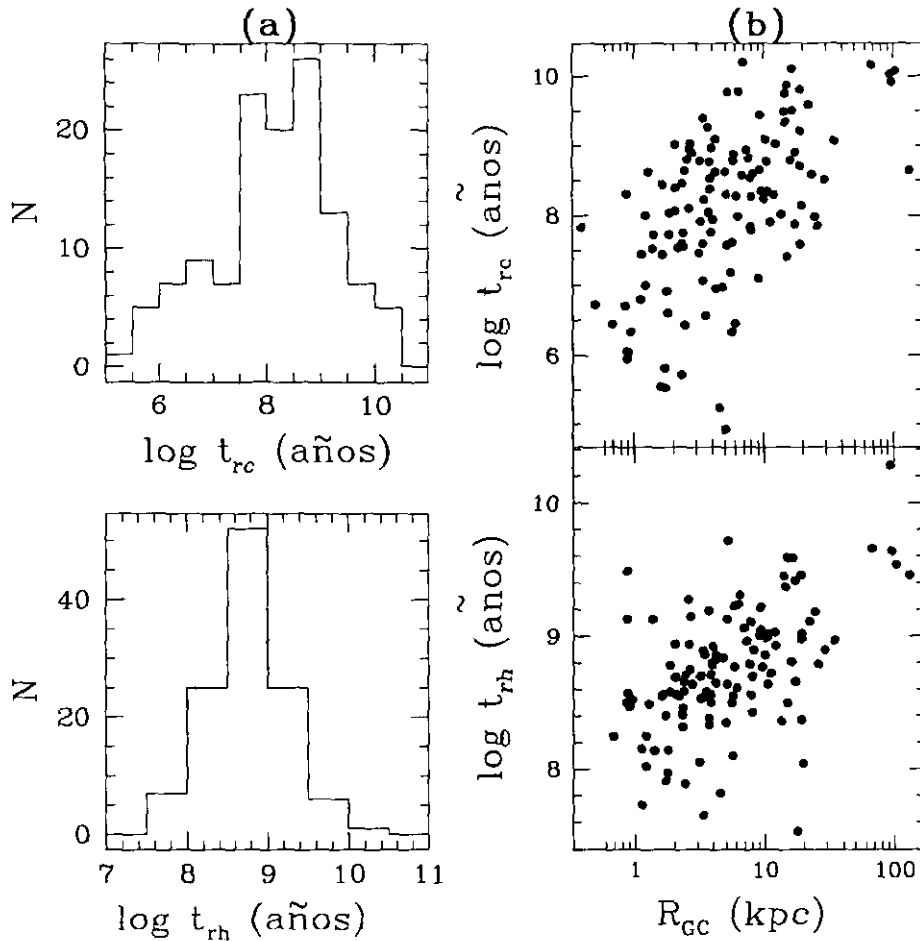


Fig. 1.6.— En (a) se muestra la distribución del logaritmo de los tiempos de relajación tomando como escala característica el radio central y el radio mediano de masa. En (b) se muestran los tiempos mencionados en función de su distancia galactocéntrica. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

haciendo más rápida la relajación de dos cuerpos, y por consiguiente la equipartición de energía se repite; entonces el escape de estrellas seguido de una contracción central. La presencia del campo gravitacional galáctico contribuye a acelerar la pérdida de masa por este proceso.

El tiempo de relajación,  $t_r$ , depende de cantidades locales dentro del cúmulo como son: la densidad de estrellas  $n$ , la energía cinética promedio  $\langle \frac{1}{2} v_m^2 \rangle$  por unidad de masa  $m$ , y el logaritmo de Coulomb<sup>10</sup> ( $\ln \Lambda$ ). El valor de  $t_r$  está dado por (Spitzer y Hart 1971),

$$t_r = \frac{0.065 v_m^3}{n m^2 G^2 \ln \Lambda} = 3.4 \times 10^9 \frac{[v_m(\text{km/s})]^3}{n(\text{pc}^{-3}) [m/M_\odot]^2 \ln \Lambda} \text{ años.} \quad (3-1)$$

<sup>10</sup>El logaritmo de Coulomb es una cantidad que proviene de la teoría de colisiones gravitacionales entre dos cuerpos. Esta dado por  $\ln \Lambda = R/p_0$ , donde  $R$  es el tamaño del sistema considerado y  $p_0$  es la separación mínima entre las estrellas. Usualmente se toma a  $p_0$  como el parámetro de impacto (Binney y Tremaine 1987, §4.1, ec. 4-6b).

Spitzer y Hart (1971) muestran que  $t_r$  depende de la región del cúmulo donde se calcule y de cantidades que varían durante evolución del éste, en particular si este se evalúa en las regiones centrales del cúmulo. Es por esto que proponen utilizar el tiempo de relajación en el radio mediano de masa ( $t_{rh}$ ), que será un tiempo representativo de todo el sistema, el cual está dado por

$$t_{rh} = 0.138 \frac{N^{1/2} r_h^{3/2}}{m^{1/2} G^{1/2} \ln \Lambda} = \frac{1.7 \times 10^5 [r_h(\text{pc})]^{3/2} N^{1/2}}{[m/M_\odot]^{1/2}} \text{ años,} \quad (3-2)$$

que está en términos de cantidades globales del cúmulo, como  $r_h$ , el número total de estrellas,  $N$ , y la masa promedio de estas,  $m$ .

Debido al reacondo de la masa y de la energía, causado por la evaporación, el cúmulo experimenta un *colapso central* (Spitzer 1983). En la Fig. 1.2b, se muestra el perfil de brillo superficial para un cúmulo durante su etapa de colapso central. Dicho perfil se caracteriza por ser una ley



de potencias en la región central del cúmulo. Este colapso ocurre en tiempos del orden de 8–15  $t_{rh}$  (Spitzer 1987).

En la Fig. 1.6a se muestra la distribución de los tiempos de relajación central ( $t_{rc}$ ), y en el radio mediano de masa ( $t_{rh}$ ), para el sistema de cúmulos globulares galáctico. Los valores de  $t_{rc}$  están en el intervalo de  $\sim 10^8$  años a  $10^{11}$  años, con una mediana de  $2 \times 10^8$  años. Este tiempo es comparable al período orbital de algunos cúmulos galácticos. Los valores de  $t_{rh}$  son mayores, por algunos órdenes de magnitud al período orbital de los cúmulos, pero menores en su mayoría a la edad de la Galaxia.

Por lo anterior esperamos que las regiones centrales de los cúmulos estén relajadas colisionalmente, y los efectos de esta relajación se transfieran paulatinamente hacia regiones externas del cúmulo.

Si se considera más de una componente estelar, la equipartición de energía para cada una de las componentes ocurre distintos tiempos característicos, lo cual dependerá del espectro de masas dentro del cúmulo (Spitzer 1987). El proceso de relajación tiende a una equipartición de la energía cinética, haciendo que las estrellas más masivas, al interactuar con las más ligeras, disminuyan su velocidad, haciendo que sus órbitas sean desplazadas hacia regiones internas del cúmulo. Las estrellas ligeras, que aumentan su velocidad, están preferentemente en las regiones externas del cúmulo. A este proceso se le conoce como *segregación de masa*.

### 1.3.2 Evolución estelar

La evolución interna de las estrellas también contribuye a la pérdida de masa del cúmulo. La velocidad con la que es expulsado el material en una supernova, o con la que una estrella poco masiva pierde sus capas externas, en general, es mayor que la velocidad de escape del cúmulo. La pérdida de material, además de disminuir la masa del cúmulo, no permite un auto enriquecimiento de los elementos pesados sintetizados en las estrellas.

En contraste con el fenómeno de relajamiento colisional, descrito anteriormente, en este caso la energía cinética del material que escapa no proviene de la energía de movimiento de las estrellas dentro del cúmulo, sino de las estrellas mismas, por lo que la energía cinética por unidad de masa permanece constante. Esto hace que el cúmulo se expanda.

Se considera que este proceso es importante durante los primeros  $5 \times 10^9$  años del cúmulo, tiempo durante el cual las estrellas con  $m > 1.1M_{\odot}$ , que son las que más masa pierden, han salido de la secuencia principal hacia la rama de las gigantes rojas (Miller y Scalo 1979). En la Fig. 1.7 hemos graficado la velocidad de escape en algunos sistemas estelares, como función de su masa y de su radio mediano de masa. Hemos indicado las velocidades típicas con las que son expulsadas las capas de gas en las nebulosas planetarias, supernovas y los vientos de las estrellas Wolf Rayet. Estas velocidades son mayores, por algunos órdenes de magnitud, que la velocidad de escape necesaria para escapar de potencial del cúmulo (ver puntos sólidos

en la Fig. 1.7); razón por la cual este material escapa del cúmulo.

La cantidad de masa que puede perder un cúmulo globular, por evolución estelar, depende de su *función inicial de masa* (IMF), que se aproxima como una ley de potencias de la forma  $dN \propto m^{-\alpha} dm$ , con  $N$  el número inicial de estrellas con valores de masa en el intervalo  $(m, m + dm)$ . El tiempo de vida de una estrella en la secuencia principal ( $t_{sp}$ ) está dado por (Iben y Renzini 1983),

$$t_{sp} \approx 6 \times 10^9 \left( \frac{M_{\odot}}{m_i} \right)^3 \text{ a.} \quad (3-3)$$

Esta relación es válida para estrellas entre 0.7 y  $8 M_{\odot}$ .

La cantidad de masa que pierde una estrella está en función de su masa inicial  $m_i$ . Por ejemplo, si  $m_i < 1M_{\odot}$  la masa de la remanente será  $0.58 + 0.22(m_i - 1)M_{\odot}^{11}$  (Iben y Renzini 1983). Si  $m_i/M_{\odot}$  se encuentra en el intervalo [4.7, 8.0], no se tiene remanente porque la estrella es progenitora de una supernova de tipo I (Iben y Renzini 1983); para [8.0, 15.0], se tiene como remanente una estrella de neutrones con una masa final de  $\sim 1.4M_{\odot}$  (Iben y Renzini 1983).

### 1.3.3 Fricción dinámica

En su órbita alrededor del centro galáctico los cúmulos se mueven por el halo y atraviesan el disco. La atracción gravitacional del cúmulo sobre las estrellas de su alrededor hace que las trayectorias de éstas sean desviadas en dirección del cúmulo, dando como resultado un aumento de la densidad estelar por donde este ha pasado; esto da lugar a un aumento de la fuerza de gravedad que desacelera al cúmulo, y provoca un decaimiento espiral hacia el centro de la Galaxia (Binney y Tremaine 1987, §7.1).

Para el caso de un cúmulo con masa  $M_c$ , que se mueve con velocidad  $v_c$ , en un medio homogéneo de partículas con masa  $m_s \ll M_c$ , con una distribución de velocidades Maxwelliana y una dispersión de velocidades  $\sigma$ , la fricción dinámica se puede expresar por (Binney y Tremaine 1987, §7.1),

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 M_c \rho}{v_c^3} \left[ \text{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] v_c \quad (3-4)$$

donde  $X \equiv v_c/\sqrt{2}\sigma$ ,  $\rho$  es la densidad de masa del medio donde se mueve el cúmulo y  $\text{erf}$  es la función de error (Arfken 1985, § 10.5).

De la ecuación (3-4) vemos que la fricción dinámica es función de la densidad del entorno y de la masa del cúmulo. Si la densidad del medio se considera constante, la desaceleración tiene una dependencia directa con la masa ( $dv/dt \propto M_c$ ), razón por la que este es un efecto importante para cúmulos muy masivos. Aunque también

<sup>11</sup>Iben y Renzini dan para una enana blanca  $M=0.53\eta^{-0.082}+0.1\eta^{-0.35}$ , donde  $\eta$  se da como la pérdida de masa. Chernoff y Weinberg 1990, toman el valor de  $\eta=1/3$ .

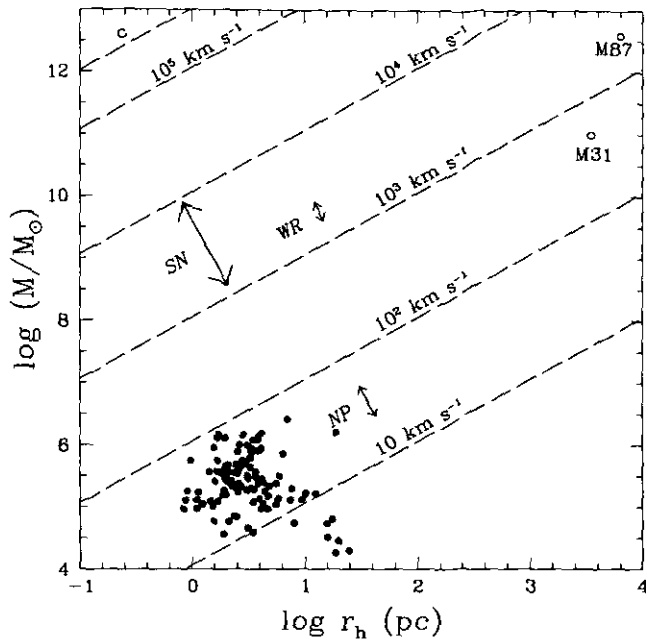


Fig. 1.7.— Velocidad de escape como función de  $r_h$  y de la masa total del sistema. Se tienen los valores para M31, M87 y para los cúmulos globulares galácticos (puntos sólidos). La líneas punteadas indican distintos valores de isovelocidades. La línea indicada con  $c$  en el extremo superior izquierdo corresponde a la velocidad de la luz. Se indica el intervalo promedio de la velocidad con la que es expulsado el material en distintos eventos estelares, como son las nebulosas planetarias (NP), estrellas Wolf Rayet (WR) y explosiones de supernova (SN). Los datos de los cúmulos fueron proporcionados por S. Djorgovski.

hay una dependencia inversa con la velocidad de movimiento del cúmulo, que hace este efecto más importante para valores pequeños de dicha velocidad.

El decaimiento orbital, causado por la fricción dinámica de un cúmulo con un halo isotérmico, ha sido estimado por Capriotti y Hawley (1996). Ellos reportan un decaimiento para los radios orbitales de los cúmulos, durante el tiempo de Hubble, de un 5% para cúmulos en órbitas circulares, con masas entre  $3 \times 10^5 M_\odot$  y  $10^6 M_\odot$ , y de un 8% a un 10%, para cúmulos en órbitas radiales, en el mismo intervalo de masas. Sus resultados indican que los cúmulos más concentrados sobreviven más tiempo cuando el radio de la órbita decae, y que los cúmulos menos concentrados se destruyen más rápido cerca del centro galáctico.

### 1.3.4 Campos gravitacionales externos

El campo gravitacional de la Galaxia es uno de los factores que más afecta la evolución de los cúmulos globulares. Por la naturaleza de los efectos que éste produce, es conveniente hacer una distinción entre los efectos independientes del tiempo (estáticos), de los que muestran una dependencia temporal (dinámica). La parte estática es la responsable de confinar espacialmente al cúmulo, mientras que la parte dinámica hace trabajo sobre las órbitas

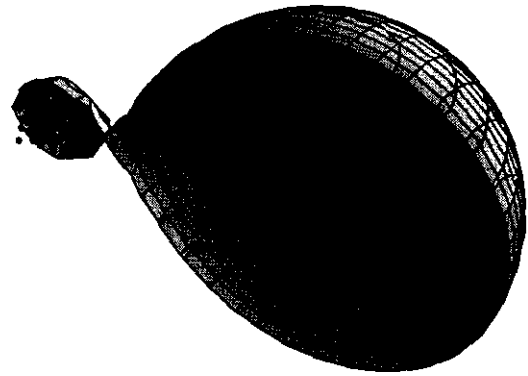


Fig. 1.8.— Representación esquemática de la primera superficie equipotencial que contiene a la Galaxia y al cúmulo, en la cual, tanto la Galaxia como el cúmulo, están contenidos de manera independiente. El cúmulo se encuentra completamente contenido en lo que se denomina el *lóbulo de Roche*.

de las estrellas del cúmulo, afectando la evolución interna de éste. A continuación describimos en detalle cada una de estas partes.

### Parte estática

El tamaño de los cúmulos se caracteriza por el llamado radio de marea,  $r_t$ , que es función de su distancia al centro galáctico y es mínimo cuando el cúmulo se encuentra en el perigaláctico de su órbita ( $R_{peri}$ ).

Si el cúmulo se mueve en órbita circular alrededor de la Galaxia, la ecuación de movimiento para las estrellas en el sistema no inercial (anclado en el centro del cúmulo) estará dada por (Fetter y Walecka 1980, §2.8)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi - 2(\boldsymbol{\Omega}_c \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\Omega}_c \times (\boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}), \quad (3-5)$$

donde  $\mathbf{r}$  es la posición de las estrellas respecto al centro del cúmulo y  $\boldsymbol{\Omega}_c$  la frecuencia angular de rotación del cúmulo alrededor de la Galaxia. Los términos  $-2(\boldsymbol{\Omega}_c \times \dot{\mathbf{r}})$  y  $\boldsymbol{\Omega}_c \times (\boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r})$  son conocidos como la aceleración de Coriolis y la aceleración centrífuga, respectivamente. Este sistema tiene una integral de movimiento conocida como la *Integral de Jacobi* (Binney y Tremaine 1987, § 3.3),

$$E_J = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \Phi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}|^2. \quad (3-6)$$

Se define un potencial efectivo  $\Phi_{eff}$ , como

$$\Phi_{eff} = \Phi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}|^2, \quad (3-7)$$

TABLA I  
PROCESOS DE EVOLUCIÓN DINÁMICA PARA LOS CÚMULOS GLOBULARES

Procesos Internos	Procesos Externos
<p><b>Relajación de 2 cuerpos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Segregación de masa [Cambios espaciales en la función de masa]</li> <li>• Colapso central [Aumento de la concentración]</li> </ul>	<p><b>Variación de la Fuerza de Marea</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cruce del disco [Calentamiento → Expansión de la parte externa del cúmulo]</li> <li>• Variación de la fuerza de marea [Calentamiento → Expansión de la parte externa del cúmulo]</li> </ul> <p><b>Parte estática de la Fuerza de Marea</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Límite espacial del cúmulo</li> </ul>
<p><b>Pérdida de masa por evolución estelar</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Supernovas, Nebulosas planetarias y vientos estelares [Expansión del cúmulo]</li> </ul>	<p><b>Fricción dinámica</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Decaimiento orbital [Aumento de la intensidad del campo de marea]</li> </ul>

podemos reescribir la ecuación de movimiento (3-5) como sigue,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi_{\text{eff}} - 2(\Omega_c \times \dot{\mathbf{r}}), \quad (3-8)$$

y a la integral de Jacobi como,

$$E_J = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \Phi_{\text{eff}}. \quad (3-9)$$

Como  $E_J$  es una constante, una estrella estará confinada a moverse en regiones donde  $\Phi_{\text{eff}} \leq E_J$ ; en consecuencia, la superficie que limita el movimiento de la estrella será donde  $\Phi_{\text{eff}} = E_J$ . Esta superficie se conoce como la *superficie de velocidad cero*; que para el caso de  $r$  pequeña (comparada con la separación Galaxia-cúmulo) sólo contiene al cúmulo. Conforme nos alejamos del centro del cúmulo ( $r \rightarrow R_{GC}$ ), las superficies de velocidad cero se alejan del centro del cúmulo, y para algunos valores de  $E_J$  la superficie de velocidad cero incluye al cúmulo y al centro de la Galaxia ( $M_G$ ). En la Fig. 1.8 se muestra de manera esquemática la primera superficie equipotencial que contiene al cúmulo y a la Galaxia. El cúmulo, en esta representación, se encuentra completamente contenido dentro un lóbulo que es comúnmente llamado el *lóbulo de Roche*, que como hemos dicho, es la primera superficie de velocidad cero que incluye al cúmulo y a la Galaxia.

El máximo local de  $\Phi_{\text{eff}}$ , en la dirección cúmulo-Galaxia, se asocia generalmente con el radio de marea (que en este caso llamaremos  $r_J$  para no confundir con los valores observacionales  $r_t$  que se discuten en § 1.2).

Si suponemos que  $M_c \ll M_G$  y que  $r_J \ll R_{GC}$  (Binney y Tremaine 1987),

$$r_J \simeq \left( \frac{M_c}{3M_G(R_{GC})} \right)^{1/3} R_{GC}; \quad (3-10)$$

El valor de  $r_J$  es una aproximación al valor de  $r_t$ , el cual debe ser tomado con cautela debido a lo siguiente: (i) la superficie de velocidad cero no es esférica, por lo que  $r_J$  no se puede usar para caracterizar esta superficie; (ii) la mayor parte de los cúmulos no se mueven en órbita circular, y por tanto  $\Omega_c$  varía con el tiempo (así como  $R_{GC}$  y  $M_G(R_{GC})$ ), razón por la cual no existe la integral de Jacobi; (iii) cálculos numéricos (que describimos más adelante y en §2.3) muestran órbitas ligadas al cúmulo a distancias del doble de  $r_J$ , lo que hace suponer la posible existencia de integrales de movimiento aún no conocidas (Jefferys 1974, 1976 y Keenan 1981a).

Si en la ec. (3-8),  $\Omega_c$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  son ortogonales entre sí, podemos reescribir la ec.(3-8) como sigue:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi_{\text{eff}} + 2(\Omega_c \dot{\mathbf{r}}). \quad (3-11)$$

La magnitud de la aceleración depende del signo en el segundo miembro del lado derecho de ésta ecuación. Si  $\Omega_c$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  tienen el mismo signo, la aceleración que experimenta una estrella es menor que  $|\nabla\Phi_{\text{eff}}|$ , por lo tanto la estrella estará menos ligada al cúmulo (*órbitas directas*). Por el contrario, si  $\Omega_c$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  tienen signos opuestos, la aceleración que las estrellas experimentan es mayor, y por lo tanto se encuentran más ligadas al cúmulo (*órbitas retrógradas*).

### Parte dinámica

En su órbita alrededor de la Galaxia los cúmulos cruzan el disco galáctico, y experimentan encuentros con el bulbo, con nubes moleculares masivas y quizá con otros cúmulos globulares. Durante estos encuentros las estrellas dentro del cúmulo son perturbadas, debido al cambio temporal del potencial que actúa sobre ellas. A estos encuentros, en que la fuerza de marea cambia de manera abrupta respecto al período orbital de las estrellas del cúmulo, se les denomina *choques de marea* (Spitzer 1987, § 5.4).

La importancia de los choques de marea depende de la razón del período orbital de la estrella alrededor del cúmulo ( $P_s$ ), al intervalo temporal durante el cual actúa la perturbación ( $P_p$ ). Si el intervalo de tiempo durante el cual actúa la perturbación es mayor al período de las estrellas ( $P_s/P_p < 1$ ), se dice que la perturbación es *adiabática*. En este caso, la perturbación actúa como si la masa de la estrella estuviera distribuida en la trayectoria de su órbita, perturbando a ésta como si fuera un cuerpo rígido, y por lo tanto al centro de masa de dicha órbita. Por otro lado, si el intervalo durante el cual transcurre la perturbación es corto, en comparación con el período de la estrella, nos encontramos en el límite *impulsivo* ( $P_s/P_p > 1$ ). En este caso, las estrellas son perturbadas de manera casi instantánea.

En los cúmulos globulares ambos límites son posibles, ya que el adiabático se aplica a las estrellas cercanas al centro del cúmulo, y el impulsivo a las estrellas cerca del radio de marea.

En la Tabla I se resumen los procesos que afectan la evolución de los cúmulos globulares. En esta se separan los procesos internos de los externos. En paréntesis cuadrados se indica cual es el efecto de dichos procesos en la estructura del cúmulo.

## 1.4 Correlaciones con la Posición en la Galaxia

### 1.4.1 Masa

En la Fig. 1.4b se muestra la masa de los cúmulos globulares como función de su distancia al centro galáctico. De esta figura vemos que no parece existir una correlación entre la masas de los cúmulos y su distancia al centro galáctico, aunque los cúmulos menos masivos ( $M < 10^5 M_\odot$ ) están a  $R_{GC} > 10$  kpc.

### 1.4.2 Tamaño y densidad

Para el radio central  $r_c$  (ver Fig. 1.9a), la tendencia es que los cúmulos con valores pequeños de  $r_c$ , estén preferentemente cerca del centro galáctico, y que su tamaño aumente con  $R_{GC}$  ( $r_c \propto R_{GC}^{1.1}$ , Djorgovski y Meylan, 1994).

En la Fig. 1.9b se muestra el radio mediano de masa para los cúmulos globulares como función de su distancia galactocéntrica. Van den Bergh (1991), Djorgovski y Meylan (1994), señalan una correlación entre  $r_h$  y  $R_{GC}$ , de la forma  $r_h \propto R_{GC}^{1/2}$ ; que a su vez tiene relación direc-

ta con la densidad media del cúmulo ( $\rho_h$ ). La densidad de los cúmulos disminuye conforme se alejan del centro galáctico, en particular, la densidad en el radio mediano de masa sigue un escalamiento de la forma  $\rho_h \propto R_{GC}^{-3/2}$  (Djorgovski y Meylan 1994).

### 1.4.3 Concentración

En la Fig. 1.9c se muestra la concentración para los cúmulos globulares como función de su distancia galactocéntrica. Vemos que no es claro que exista una correlación, aunque sí una tendencia a que los cúmulos más concentrados se encuentren cerca del centro galáctico. Los cúmulos que han alcanzado la etapa de colapso central son graficados con  $c=2.5$ , y en general se encuentran a distancias menores a 10 kpc.

### 1.4.4 Tiempos de relajación

En la Fig. 1.6b, se muestran los tiempos de relajamiento, central y en el radio mediano de masa para los cúmulos globulares. Ambos tiempos muestran una correlación con su posición galactocéntrica. Para cúmulos cerca del centro galáctico los tiempos de relajación son menores que para los más alejados, es decir, la evolución dinámica de los cúmulos es función de su distancia al centro galáctico, tanto en su región central ( $\sim r_c$ ) como en zonas intermedias ( $\sim r_h$ ).

### 1.4.5 Discusión

La existencia de una correlación de las propiedades físicas de los cúmulos globulares como función su distancia galactocéntrica nos plantea la interrogante: ¿Son el resultado del proceso de formación del cúmulo, o de su evolución subsecuente en el ambiente galáctico?

La masa de los cúmulos no parece estar relacionada con su distancia al centro galáctico.

En § 1.2.6 se menciona que  $r_h$  parece no ser afectada por la evolución interna del cúmulo; entonces la relación  $r_h - R_{GC}$  puede ser el resultado de su interacción con el ambiente galáctico, o de las condiciones iniciales en el momento de su formación.

El escalamiento de  $\rho_h$  esta de acuerdo con las hipótesis de formación para el sistema de cúmulos globulares de Fall y Rees (1985). Ellos argumentan que los cúmulos se forman a partir de una inestabilidad térmica del gas protogaláctico, dando como resultado que su densidad sea función de la distancia galactocéntrica a la que se formaron, es decir,  $\rho_h \sim R_{GC}^{-1}$ . También argumentan que los cúmulos están limitados por el truncamiento de marea impuesto por el halo, lo que nos da un comportamiento para la densidad de la forma  $\rho_h \sim R_{GC}^{-2}$  (ver Fig. 5 de Fall y Rees 1985). Como ya hemos visto para el sistema de cúmulos globulares galáctico,  $\rho_h \sim R_{GC}^{-3/2}$ , relación que se encuentra dentro de los límites considerados por Fall y Rees (1985).

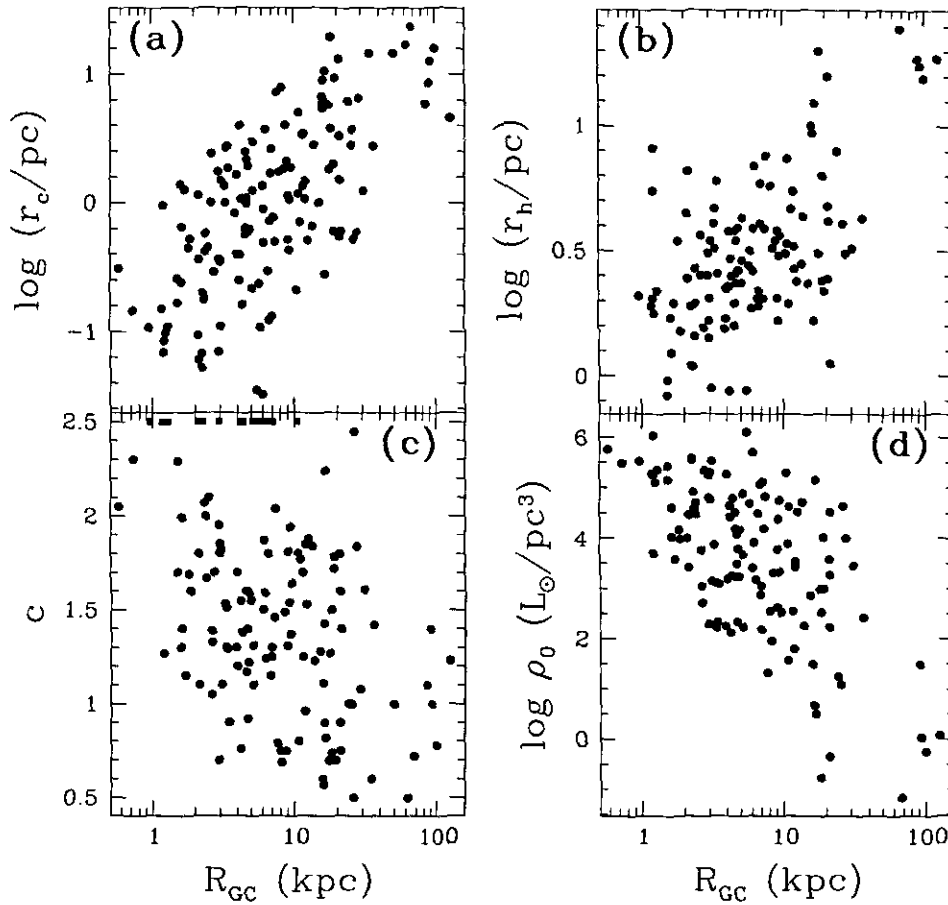


Fig. 1.9.— Distribución de los valores de  $r_c$ ,  $r_h$ ,  $c$  y  $\rho_0$ , como función de sus distancia galactocéntrica para el sistema de cúmulos globulares galáctico. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

### 1.5 Origen de los Cúmulos Globulares

El origen de los cúmulos globulares está íntimamente ligado a la formación y evolución de la Galaxia, razón por la cual las teorías sobre su formación se encuentran dentro de un contexto cosmológico. Los modelos, o escenarios, básicamente parten de dos hipótesis:

- Los cúmulos se formaron durante las etapas tempranas de la Galaxia. En particular, Peebles y Dicke (1968) dicen que se formaron antes del colapso protogaláctico, cambiando la idea original de Eggen *et al.* (1962), quienes proponen que los cúmulos se forman durante las primeras etapas del colapso protogaláctico; que debió ser rápido, suave y homogéneo.
- Los cúmulos se formaron junto con otros sistemas estelares ( $M \sim 10^8 M_\odot$ ), que después se fusionaron de manera jerárquica para formar la Galaxia (Searle y Zinn 1978, Larson 1990). Este proceso ocurre en tiempos varias veces mayor que el escenario anterior.

Fall y Rees (1985), proponen una teoría que explica el origen de los cúmulos globulares a partir de una inestabi-

lidad térmica durante el colapso protogaláctico. Ellos encuentran que la masa inicial de los protocúmulos será del orden de  $10^6 M_\odot$ . En este modelo de formación es posible en los dos escenarios antes mencionados. La densidad del sistema de cúmulos galáctico parece estar determinada por estas condiciones iniciales.

Los resultados de van den Bergh (1994), sobre los índices de metalicidad muestran la existencia de dos subsistemas para los cúmulos considerados de halo (ver §1.2.7). Van den Bergh concluye que la diferencia entre la población  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden explicar dentro de dos escenarios de formación galáctica. El primero para la población  $\alpha$ , que se asocia con la teoría de Searle y Zinn (1978). El segundo para la población  $\beta$ , dentro del escenario propuesto por Eggen *et al.* (1962).

En la misma dirección Zinn (1993), reporta posibles diferencias tanto en edad, metalicidad y cinemática entre ambos subsistemas, diferencias que al parecer apoyan la teoría de que estos subsistemas pueden tener su origen en alguno, o en ambos, de los escenarios antes descritos.

## 1.6 Modelos y Trabajos Anteriores

### 1.6.1 Modelos para la evolución de los cúmulos globulares

El estudio del sistema de cúmulos globulares es complejo debido al gran número de procesos que parecen intervenir en su evolución. Una manera "directa" de abordar este estudio es a través de simulaciones numéricas. Sin embargo, no es posible realizar la integración directa de las  $10^5$ - $10^6$  órbitas estelares de un cúmulo en un tiempo razonable de cómputo, porque el tiempo dinámico de las estrellas dentro del cúmulo es, aproximadamente,  $\sim 3$  órdenes de magnitud menor que el período orbital del cúmulo alrededor de la Galaxia. De ahí la necesidad de abordar el problema utilizando modelos numéricos simplificados, técnicas analíticas aproximadas y simulaciones con las limitaciones computacionales actuales.

Para entender el efecto que los choques gravitacionales tienen sobre los cúmulos globulares, se han desarrollado diferentes métodos aproximados. El formalismo de la llamada *aproximación de impulso* ha sido utilizado como una primera aproximación. En ella se considera a las estrellas en reposo durante el transcurso de la perturbación (Spitzer 1958). En una aproximación más elaborada, el movimiento de las estrellas dentro del cúmulo es modelado como un oscilador armónico sujeto a una perturbación de marea. En éste caso el perturbador es una partícula puntual que se mueve en línea recta con velocidad constante (Spitzer 1958).

Un modelo menos aproximado es el *problema restringido de tres cuerpos*, en que la Galaxia y el cúmulo son puntos masa que se mueven en órbitas keplerianas, y las estrellas se consideran como partículas prueba (masa infinitamente pequeña respecto a la de la Galaxia y a la del cúmulo), que inicialmente se mueven alrededor del cúmulo. Una simplificación adicional es suponer que el cúmulo se mueve en una órbita circular alrededor de la Galaxia, conocido como el *problema circular restringido de tres cuerpos*. Este tiene la ventaja de contar con una integral de movimiento para las estrellas, conocida como la energía de Jacobi,  $E_J$ .

Con el problema restringido de tres cuerpos es posible considerar casos no coplanares (estrellas en órbitas fuera del plano orbital cúmulo Galaxia), los cuales no son contemplados en la aproximación de impulso y la del oscilador armónico. En ésta aproximación se considera un potencial más realista que el armónico. Sin embargo, no se considera la fuerza de gravedad entre las estrellas del cúmulo.

Otra forma de atacar el problema es considerar a las estrellas como parte de un fluido cuyo comportamiento se deriva a partir de la ecuación de Fokker-Planck (Binney y Tremaine 1987, §8.3). Esta ecuación describe el comportamiento de la función de distribución  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , suponiendo un potencial suave y esférico. En ésta aproximación se consideran los términos a primer orden en expansión del término colisional, comúnmente llamados coeficientes de

difusión (Binney y Tremaine 1987, §8.3). Los efectos de relajación de dos cuerpos, perturbaciones de marea tanto del bulbo como del disco, y la fricción dinámica se introducen en los coeficientes de difusión (Cohn 1985).

A continuación mencionaremos algunos de los trabajos donde se estudia el efecto de la fuerza de marea sobre los cúmulos globulares, con distintos grados de aproximación.

### 1.6.2 Trabajos sobre destrucción de cúmulos globulares

Spitzer (1958) es el pionero en el campo. El introdujo la aproximación de impulso y la refinó con la aproximación de oscilador armónico. El encuentra que para el caso del oscilador armónico la transferencia de energía a las estrellas del cúmulo ("calentamiento"), disminuye de forma exponencial como función del cociente entre el tiempo que actúa la perturbación y el período orbital de la estrella ( $P_p/P_s$ ).

Ostriker *et al.* (1972), utilizan la aproximación de impulso, junto con la corrección adiabática de Spitzer, para estimar el calentamiento que experimenta un cúmulo globular al pasar a través del disco galáctico. Ellos encuentran que el cúmulo se comprime en dirección perpendicular al plano galáctico, causando un incremento en la energía cinética de las estrellas del cúmulo, seguido por una expansión. A este fenómeno se le denomina *choque compresivo*. En este trabajo aparece por primera vez el término de *choque gravitacional*. Los autores distinguen entre dos tipos de choques: los choques de marea, que se deben a la interacción del cúmulo con las componentes esféricas de la Galaxia; y los choques compresivos, que se deben a la interacción del cúmulo con el disco galáctico.

Keenan e Innanen (1975) integran numéricamente el problema restringido de tres cuerpos. Ellos reportan dos radios límites para el cúmulo determinados por el sentido de rotación de las estrellas alrededor de éste. Las estrellas que giran en sentido retrógrado son las que se encuentran más ligadas al cúmulo; sucede lo contrario con las que giran en el sentido directo (ver §1.3.4, en particular discusión de las ec. 3-8 y 3-11).

Innanen (1979) da una expresión analítica para estimar los radios límites de las órbitas directas y las retrógradas, como función del cociente entre la masa del cúmulo y de la Galaxia, así como de la excentricidad de la órbita del cúmulo. Encuentra que el radio límite para las estrellas que giran en dirección retrógrada es, aproximadamente, el doble de las que lo hacen en sentido directo.

Keenan (1981a y 1981b) confirma lo encontrado por Innanen (1979), resolviendo numéricamente el movimiento de las estrellas bajo la aproximación del problema de tres cuerpos restringido. Reporta que las órbitas retrógradas son las que mayor tiempo sobreviven en las regiones externas del cúmulo. Encuentra que si la energía de ligadura de las estrellas (respecto al cúmulo) es mayor o igual a cero, éstas escapan definitivamente del cúmulo.

Chernoff, Kochanek y Shapiro (1986, referido como CKS), usan un método semianalítico para resolver la ecuación de Fokker-Planck. Ellos incluyen los efectos de relajación de dos cuerpos, evaporación y truncamiento de marea. También consideran las perturbaciones de marea debidas al disco galáctico y a nubes moleculares masivas en el disco. Ellos utilizan un modelo realista para la Galaxia (Bachall, Schmidt y Soneira 1982, 1983) y para el cúmulo un modelo de King (1966). Los autores estudian la evolución de la masa y la energía de los cúmulos debido a los procesos antes mencionados. CKS reportan que los cúmulos más concentrados, y posiblemente en su etapa de colapso central, se encuentran a menos de 3 kpc del centro galáctico. Estos se pueden destruir debido a la expansión de sus regiones externas, que son removidas por el campo de marea galáctico. Para los cúmulos menos concentrados su destrucción es más rápida, sin pasar por la etapa de colapso central. Otra de sus conclusiones es que las nubes moleculares no contribuyen de manera apreciable a la destrucción de los cúmulos. En éste trabajo sólo se consideran órbitas circulares para los cúmulos.

Aguilar, Hut y Ostriker (1988, en adelante AHO), calculan la tasa de destrucción para una muestra de 83 cúmulos globulares, incluyendo cuatro procesos destructivos: evaporación, relajación de dos cuerpos, fricción dinámica y choques gravitacionales, con el disco y con el bulbo. Para un cúmulo dado ellos estiman de manera analítica la tasa de destrucción debida a cada uno de los procesos antes mencionados. Para integrar las órbitas de los cúmulos utilizan dos modelos para el potencial galáctico, el modelo de Bachall, Schmidt y Soneira (1983), y el de Ostriker y Cadwell (1983); ellos encuentran que el bulbo es muy eficiente en la destrucción de cúmulos cuyo perigaláctico es menor a 2 kpc; seguido en importancia, por la evaporación, a distancias de  $\approx 8$  kpc, y por los choques con el disco galáctico. Consideran que la fricción dinámica es poco significativa y sólo es importante para los cúmulos más masivos. Ellos reportan una tasa de destrucción promedio de 0.5 cúmulos por Giga año ( $Ga$ ).

Uno de los trabajos que combinan dos técnicas numéricas diferentes para estudiar la evolución de un cúmulo, es el de Oh *et al.* (1992) y el de Oh y Lin (1992), quienes argumentan que el proceso dinámico más importante en las zonas internas de un cúmulo es la relajación de dos cuerpos, mientras que en las regiones externas es la fuerza de marea. Ellos proponen analizar el comportamiento de las estrellas internas resolviendo la ecuación de Fokker-Planck, y el de las estrellas externas como un problema de tres cuerpos, donde sólo se considera el potencial del cúmulo y de la Galaxia. Los autores no hacen una estimación de la pérdida de masa del sistema, ni de los cambios en su energía; sólo describen el comportamiento de sus simulaciones.

Vesperini (1997), utiliza el mismo método que CKS explorando distintas condiciones iniciales para entender el efecto de los choques gravitacionales en la evolución del sistema de cúmulos globulares. En particular, él busca las

propiedades que se preservan durante la evolución del sistema, así como su relación con la posición galactocéntrica y respecto al plano galáctico. El concluye que el 60% de la población inicial de los cúmulos ha sido destruida. Los resultados de sus simulaciones, muestran que los cúmulos en etapa de colapso central, y los más concentrados, se encuentran más cerca de las regiones centrales de la Galaxia, hecho que coincide con las observaciones del sistema de cúmulos globulares galáctico (ver Fig. 1.9c).

La evolución estelar y la dinámica, considerando distintos valores para de masa de las estrellas, ha sido considerada por los siguientes autores: Chernoff y Shapiro (1987), utilizan un método similar al de CKS añadiendo distintos valores para la masa de las estrellas y considerando su evolución estelar; ellos encuentran que la pérdida de masa es importante en la evolución temprana del cúmulo, en particular para las estrellas masivas. Chernoff y Weinberg (1990), resuelven la ecuación de Fokker-Planck considerando 20 valores para las masas de las estrellas, entre  $60M_{\odot}$  y  $0.8M_{\odot}$ . Los procesos que se consideran durante la evolución de sus modelos son: la evolución estelar, la relajación de dos cuerpos y el truncamiento por fuerzas de marea. Ellos encuentran que la segregación de masa aumenta la tasa de evaporación acelerando la destrucción del cúmulo. También concluyen que la pérdida de masa por parte de las estrellas, durante los primeros  $10^9$  años, junto con los demás procesos evolutivos, ocasionan que los cúmulos menos concentrados y menos masivos se destruyan durante el tiempo de Hubble.

Spitzer (1958) ha cuantificado el efecto que los choques gravitacionales tienen en las regiones internas del cúmulo, utilizando la aproximación de impulso y una corrección adiabática de Spitzer. El resultado de dicha aproximación, es un decaimiento exponencial en la eficiencia con que la energía es inyectada al cúmulo como función del cociente de las frecuencias de oscilación de la estrella y del perturbador, es decir, como función del período de las estrellas dentro del cúmulo y del cúmulo alrededor de la Galaxia. Sin embargo, Weinberg (1994a, 1994b y 1994c) muestra que es posible que una perturbación pequeña afecte de manera considerable las órbitas de las estrellas dentro del cúmulo. El propone modelar el movimiento de las estrellas como una combinación de osciladores multi-dimensionales no lineales. Esto hace posible que alguna de las frecuencias de oscilación sea conmensurable con la frecuencia de la perturbación, por lo que pueden entrar en resonancia, inyectando una cantidad apreciable de energía al movimiento de las estrellas, inclusive en regiones muy internas del cúmulo.

Gnedin y Ostriker (1997) calculan la tasa de destrucción para 119 cúmulos galácticos resolviendo la ecuación de Fokker-Planck numéricamente, incluyendo los siguientes procesos: relajación de dos cuerpos, truncación por fuerza de marea, choques gravitacionales con el disco y con el bulbo. Incluyen además de la relajación por choques, que se introduce al considerar los términos a se-

gundo orden en la variación de la energía<sup>12</sup>. El término cuadrático generalmente se desprecia, pero resulta ser más importante que el término lineal, debido a los cambios aleatorios que se producen en las estrellas durante los choques, en particular con el disco (Kundić y Ostriker 1995). Gnedin y Ostriker (1997) también consideran la corrección adiabática introducida por Weinberg para los choques con el disco y con el bulbo. Ellos proponen una expresión analítica para la corrección propuesta por Weinberg (1994a), que decae hacia regiones internas del cúmulo como una ley de potencias, y no de manera exponencial como la corrección de Spitzer. Gnedin y Ostriker (1997) utilizan los mismos modelos galácticos que AHO para calcular las órbitas de los cúmulos. Gnedin y Ostriker (1997) concluyen que la tasa de destrucción para el sistema de cúmulos globulares galáctico, es de 2 a 5 veces mayor que la reportada por AHO.

Recientemente, Murali y Weinberg (1997a, 1997b) introducen en la aproximación de Fokker-Planck la variación temporal del campo de marea debido a las órbitas excéntricas de los cúmulos, y al cruce de estos por el disco galáctico, que ocurre dos veces por periodo orbital. Los autores llaman a este efecto *calentamiento por resonancias*. Además de este efecto también incluyen en su análisis la relajación de 2 cuerpos, y un espectro de masas para las estrellas del cúmulo. En general las conclusiones de este trabajo es que los cúmulos aceleran su evolución debido al calentamiento por resonancias. Los resultados que éstos autores reportan son un gran avance para comprender la evolución de los cúmulos globulares; estos resultados serán analizados y comparados con nuestros resultados en el capítulo 5.

La desventaja de resolver la evolución de un cúmulo con la ecuación de Fokker-Planck, es que el potencial del cúmulo está restringido a tener simetría esférica. Esto no ocurre en los cúmulos globulares, que se deforman al atravesar del disco galáctico y al pasar cerca de su perigalacticón.

La manera natural de estudiar la evolución dinámica de un cúmulo globular, debido a los choques gravitacionales, es con una simulación de N cuerpos. En este tipo de simulaciones, la interacción gravitacional de las estrellas, con cada una de las componentes galácticas se modela de manera natural, así como la interacción entre ellas mismas. El impedimento actual es el costoso tiempo de CPU que se necesita para su realización. En el capítulo 4 abordamos en detalle esta discusión.

Uno de los trabajos que utiliza un código de N-cuerpos no colisional para estudiar el comportamiento de un cúmulo globular, después de que este experimenta un choque de marea es el de McGlynn (1990). El modela al cúmulo como una realización azarosa de un modelo de King (1966) con 3000 partículas. La Galaxia se representa como un punto masa o como una distribución de King, la evolución

de este sistema se estudia durante dos períodos orbitales del cúmulo. McGlynn reporta que el cúmulo pierde cerca del 30% de su masa inicial, si tiene una órbita circular con un radio de 500 pc.

La integración directa de un cúmulo globular con  $N=32k$  partículas, ha sido posible debido a computadoras diseñadas específicamente para resolver este tipo de problemas, como GRAPE-4 (Taiji *et al.* 1996).

Makino (1996) estudia la evolución de un cúmulo hasta que alcanza su colapso central y durante algunas de sus oscilaciones posteriores. Esto se debe al proceso descrito en § 1.3.1. Makino (1996) reporta que el tiempo característico en el que ocurre el colapso en sus simulaciones coincide con los resultados teóricos, y con resultados que se obtienen al resolver la ecuación de Fokker-Planck (Spitzer 1987)

Portegies Zwart *et al.* (1998) estudian la evolución de un conjunto de cúmulos con 32k estrellas en órbita circular alrededor de la Galaxia. Consideran su evolución dinámica y la estelar. La evolución dinámica se hace por integración directa, y la evolución estelar se calcula a partir de trazas evolutivas dadas por Eggleton *et al.* (1989). Este sistema se resuelve con la computadora GRAPE-4 (Taiji *et al.* ). Portegies Zwart *et al.* (1998), reportan que el tiempo de vida para los cúmulos globulares dentro de sus simulaciones es un orden de magnitud mayor a los que se reporta Chernoff y Weinberg (1990), quienes utilizan la ecuación de Fokker-Planck para su estudio.

Aunque existen modelos teóricos y semianalíticos para modelar la evolución de un cúmulo globular, estos resuelven el sistema de manera aproximada porque consideran cada proceso evolutivo de manera aislada.

Las integraciones de N-cuerpos aún son prohibitivas, sobre todo si se desea explorar un amplio intervalo de condiciones iniciales con un número realista de partículas, y durante varios períodos orbitales del cúmulo. A continuación se define el objetivo y el plan de la tesis con el fin de lograr realizar este tipo de simulaciones.

## 1.7 Objetivos y Plan de la Tesis

Uno de los objetivos de la astronomía moderna es conocer las propiedades iniciales del sistema de cúmulos globulares galáctico. En particular, el número inicial de estos. Para estimar este número es necesario conocer la tasa de destrucción asociada a cada uno de los procesos responsables de la evolución de los cúmulos globulares.

En este trabajo se estudia el efecto de los choques gravitacionales sobre el sistema de los cúmulos globulares. El principal objetivo es avanzar en la comprensión de este fenómeno utilizando un conjunto de simulaciones autoconsistentes para un cúmulo globular, considerando un campo de marea realista y con un número de partículas cercano al que tiene estos sistemas.

En base a éstas simulaciones se determina la destrucción que han experimentado los cúmulos en la edad de la Galaxia debida a este fenómeno, como función de los

<sup>12</sup>El cambio en la energía cinética contiene dos términos, uno lineal y otro cuadrático en el cambio de la velocidad:  $2\Delta E \sim 2\Delta K = (v \cdot \Delta v) + (\Delta v)^2$



parámetros estructurales y orbitales del cúmulo.

Para lograr una amplia comprensión del fenómeno, así como de las dificultades teóricas y numéricas asociadas a su estudio, se hace una revisión de los trabajos que en distintos grados de aproximación han analizado este fenómeno. Comenzamos con los trabajos de Spitzer (1958), quien considera la aproximación de impulso, continuando con el oscilador armónico perturbado. Seguimos nuestro estudio con el sistema de tres cuerpos, considerando al cúmulo en órbitas circular y excéntricas. Finalmente se hacen simulaciones de N-cuerpos en un modelo galáctico esférico, con la meta de entender como es que operan los choques gravitacionales con el bulbo galáctico cuando se incluye la autogravedad del cúmulo. El efecto del disco galáctico no se contempla en éste trabajo.

El plan de la tesis es el siguiente:

- En el capítulo 2 hacemos una revisión de los modelos que se han utilizado en la literatura para estudiar el efecto de los choques gravitacionales. Partimos de la aproximación de impulso, continuamos con el modelo del oscilador armónico y finalmente abordamos el problema con el *problema restringido de tres cuerpos*.
- En el capítulo 3 se revisan tres modelos galácticos, con el fin de seleccionar el más adecuado en nuestras simulaciones. El modelo que hemos seleccionado es el de Bachall Schmidt y Soneira (1983), que se implementa de manera analítica para facilitar el cálculo numérico del potencial y la fuerza en la simulación de N-cuerpos.
- En el capítulo 4 se describen las dificultades numéricas involucradas en la implementación del código con el cual se realizan las simulaciones de N-cuerpos, y se compara con un código alternativo muy popular en la literatura, pero que involucra un mayor tiempo de cómputo (el código de árbol). Se discute el diseño de los experimentos y de los parámetros físicos involucrados. Se detalla el análisis de los resultados de una simulación para familiarizar al lector con los parámetros más importantes en la discusión subsecuente.
- En el capítulo 5 se describen los resultados y el análisis de las simulaciones realizadas. Se discuten los procesos del desbordamiento del lóbulo de Roche y del calentamiento por los choques gravitacionales. Se reporta la tasa de destrucción, orbital y en  $10^{10}$  años, resultado de los experimentos, y se compara con los reportados en la literatura.
- En el capítulo VI se presenta la discusión y las conclusiones más importantes de este trabajo.

## REFERENCIAS

Aguilar L., Hut P., y Ostriker J.P., 1988, ApJ, **335**, 720.  
 Aguilar L., 1993, en *Galaxy Evolution: The Milky Way Perspective*, IAU Symp. **49**, eds. Majewski, R.S. p. 155.  
 Arfken G., 1985, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press).

Armandroff T., Da Costa, G. y Zinn, R., 1992, AJ, **104**, 164.  
 Bachall J.N., Schmidt M., Soneira R.M., 1982, ApJ, **258**, L23.  
 Bachall J.N., Schmidt, M., Soneira, R.M., 1983, ApJ, **265**, 730.  
 Barbuy B., Bica E. y Ortolani S., 1998, MNRAS, **333**, 117.  
 Bell R., 1988, en *Globular Cluster System in Galaxies*, IAU Symp. **126**, eds. Grindlay J. y Philip D. (Kluwer Academic Publishers), p. 79.  
 Binney J y Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univ. Press).  
 Capriotti E. R. y Hawley S. L., 1996, ApJ, **464**, 765.  
 Chandrasekhar S., 1942, *Principles of Stellar Dynamics* (Chicago: Univ. Chicago Press).  
 Chernoff D.F., Kochanek C.S. y Shapiro S.L., 1986, ApJ, **309**, 183.  
 Chernoff D.F. y Shapiro S.L., 1987, ApJ, **322**, 113.  
 Chernoff D.F. y Weinberg M.D., 1990, ApJ, **351**, 121.  
 Cohn H., 1985, en *Dynamics of Stars Clusters*, IAU Symp. **133**, eds. Goodman J. y Hut P., (Dordrecht: Reidel), p. 161.  
 Cudworth K.M. y Hanson R.B., 1993, AJ, **105**, 168.  
 Dickens R., Croke B., Cannon R. y Bell R., 1991, Nature, **351**, 212.  
 Djorgovski S. y King I., 1986, ApJ, **305**, L61.  
 Djorgovski S.G., 1993, en *Structure and Dynamic of Globular Clusters*, eds. por S. Djorgovski y G. Meylan, ASPCS, **50**, 373.  
 Djorgovski S. G. y Meylan G., 1994, AJ, **108**, 4.  
 Djorgovski S. G., 1995, ApJ, **438**, L29.  
 Eggen O.J., Lynden-Bell D. y Sandage A.R., 1962, ApJ, **136**, 748.  
 Elson R.A.W., Hut P. y Inagaki S., 1987, ARA&A, **25**, 565.  
 Fall S.M. y Rees M.J., 1985, ApJ, **289**, 18.  
 Fetter A.L. y Walecka J.D., 1980, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, McGraw-Hill Publishing Company.  
 Gnedin O. Y. y Ostriker J.P., 1997, ApJ, **474**, 223.  
 Harris W., 1976, AJ, **81**, 1095.  
 Harris W., 1991, ARA&A, **29**, 543.  
 Harris W., 1996, AJ, **112**, 1487.  
 Iben I. y Renzini A., 1983, ARA&A, **21**, 271.  
 Innanen K.A., 1979, AJ, **84**, 960.  
 Jefferys W.H., 1974, AJ, **79**, 710.  
 Jefferys W.H., 1976, AJ, **81**, 983.

- Keenan D.W. e Innanen K.A., 1975, *AJ*, **80**, 290.
- Keenan D.W., 1981a, *A&A*, **95**, 334
- Keenan D.W., 1981b, *A&A*, **95**, 340
- King I.R., 1962, *AJ*, **67**, 471.
- King I.R., 1965, *AJ*, **70**, 376.
- King I.R., 1966, *AJ*, **71**, 64.
- King I. R., 1985, en *Dynamics of Stars Clusters*, IAU Symp. **133**, eds. Goodman J. y Hut P., (Dordrecht: Reidel ), p. 13.
- Kundić T. y Ostriker J.P., 1995, *AJ*, **438**, 702.
- Larson R.B., 1990, *PASP*, **102**, 709.
- Lightman A.P. y Shapiro S.L., 1978, *Rev. Mod. Phys.*, **50**, 437.
- Makino, J., 1996, *Dynamical Evolution of Star Clusters*, eds. P. Hut y J. Makino, IAU Symp. 174, 151.
- Mandushev G., Spassova N. y Staneva A., 1991, *A&A*, **252**, 94.
- McGlynn T. A., 1990, *AJ*, **348**, 515.
- Meylan C. y Heggie D.C., 1997, *A&A Rev.*, **8**, 1.
- Meylan G. y Pryor C., 1993, en *Structure and Dynamics of Globular Clusters*, eds. por S. Djorgovski y G. Meylan, *ASPCS*, **50**, 347.
- Michie R.W., 1964, *MNRAS*, **125**, 127.
- Miller G.E. y Scalo J.M., 1979, *ApJS*, **41**, 513.
- Murali C. y Weinberg M.D., 1997a, *MNRAS*, **288**, 749.
- Murali C. y Weinberg M.D., 1997b, *MNRAS*, **291**, 717.
- Murphy B.W., Cohn H.N. y Hut P., 1990, *MNRAS*, **245**, 335.
- Oh K.S., Lin D.N.C. y Aarseth J.S., 1992, *ApJ*, **386**, 506.
- Oh K.S. y Lin D.N.C., 1992, *ApJ*, **386**, 519.
- Ostriker J.P. y Cadwell J.A., 1983, en *Kinematics, Dynamics and Structure of the Milky Way*, ed. W. L. H. Shuter (Dordrecht:Reidel), 249.
- Ostriker J.P., Spitzer L.Jr. y Chevalier R.A., 1972, *ApJ*, **176**, L51.
- Peebles P.J.E. y Dicke R.H., 1968, *ApJ*, **154**, 891.
- Portegies Zwart S., Hut P, Makino J. y McMillan S., 1998, *A&A*, **337**, 363.
- Rowan-Robinson M., 1985, *The Cosmological Distance Ladder*, W.H. Freeman and Company.
- Sarajedini A, Chaboyer B. y Demarque P., 1997, *PASP*, **109**, 1321.
- Saslaw W., 1987, *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Sawyer H.H., 1965, *PASP*, **77**, 336.
- Searle L. y Zinn R., 1978, *ApJ*, **225**, 357.
- Shapley H., 1930, *Star Cluster* (McGraw-Hill: New York).
- Spitzer L., 1958, *ApJ*, **127**, 17.
- Spitzer L y Hart M. H., 1971, *ApJ*, **164**, 399.
- Spitzer L., 1987, *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, (Princeton: Princeton Univ. Press).
- Taiji M. Makino J., Fukushige T., Ebizuzaki T. y Sugimoto D., 1996, *Dynamical Evolution of Star Clusters*, eds. P. Hut y J. Makino, IAU Symp. 174, 151.
- Trager S.C., Djorgovski S.G. y King I.R., 1993, en *Structure and Dynamic of Globular Clusters*, eds. por S. Djorgovski y G. Meylan, *ASPCS*, **50**, 347.
- Trumpler R., 1930, *Lick Obs. Bull.*, 420.
- van den Bergh S., 1991, *ApJ*, **375**, 594.
- van den Bergh S., 1993a, *ApJ*, **411**, 178.
- van den Bergh S., 1993b, en *Structure and Dynamic of Globular Clusters*, editado por S. Djorgovski y G. Meylan, *ASPCS*, **50**, 1.
- van den Bergh S., 1994, *ApJ*, **435**, 203.
- van de Kamp P., 1965, *PASP*, **77**, 325.
- Vesperini E., 1997, *MNRAS*, **287**, 915.
- Webbink R., 1985, en *Dynamics of Stars Clusters*, IAU Symp. **133**, eds. Goodman J. y Hut P., (Dordrecht: Reidel ), 541.
- Webbink R., 1988, en *Globular Cluster System in Galaxies*, IAU Symp. **126**, eds. Grindlay, J. y Philip, D. (Kluwer Academic Publishers ), p. 49.
- Weinberg M.D., 1994a, *AJ*, **108**, 1398.
- Weinberg M.D., 1994b, *AJ*, **108**, 1403.
- Weinberg M.D., 1994b, *AJ*, **108**, 1414.
- White R.E. y Shawl S.J., 1987, *ApJ*, **317**, 246.
- Zinn R., 1985, *ApJ*, **293**, 424.
- Zinn R., 1988, en *Globular Cluster System in Galaxies*, IAU Symp. **126**, eds. Grindlay, J. y Philip, D. (Kluwer Academic Publishers ), p. 37.
- Zinn R., 1991, en *The Formation and Evolution of Star Clusters*, eds. Janes K., *ASPCS*, **13**, p. 532.
- Zinn R., 1993, en *The Globular Cluster-Galaxy Connection*, eds. G.H. Smith y J.P. Brodie (ASP, San Francisco), p. 38.

# Capítulo 2

## TEORÍA

En este capítulo revisamos las aproximaciones con las que se ha investigado el efecto de los choques gravitacionales sobre los cúmulos globulares. La primera es la aproximación de impulso, que es conceptualmente la más sencilla y fácil de implementar. Se continúa con el estudio de las correcciones adiabáticas que se hacen a la aproximación de impulso. Hacemos una breve introducción a la teoría adiabática y a la teoría de perturbaciones, porque son los conceptos fundamentales en que se basan dichas correcciones. Estudiamos las correcciones adiabáticas dadas por Spitzer (1958) y Weinberg (1994a).

Analizamos, utilizando la teoría adiabática y la de perturbaciones, el comportamiento de un oscilador armónico perturbado por una fuerza de marea periódica, esto con el fin de entender la descripción del movimiento que se obtiene de dichas aproximaciones, así como el papel que los distintos parámetros juegan en su comportamiento. Esto es sencillo de analizar debido a que su dependencia se muestra de manera explícita en las soluciones aproximadas.

La siguiente aproximación que se estudia es el llamado *problema de tres cuerpos restringido (circular y elíptico)*. Finalmente, se discute cuales son los límites de validez para estas aproximaciones, y la conveniencia de realizar simulaciones de N-cuerpos para lograr un modelaje auto-consistente de este fenómeno.

### 2.1 Aproximación de Impulso

La aproximación de impulso es la forma más sencilla de estudiar el efecto que el campo de marea galáctico tiene sobre las estrellas de un cúmulo globular. Spitzer (1958) es el primero en utilizar dicha aproximación para estudiar el cambio en la energía de ligadura en las estrellas de un cúmulo galáctico. Knobloch (1976) y Spitzer (1987, ver §5 de esta referencia) extienden su aplicación al estudio de los cúmulos globulares.

En esta aproximación las estrellas del cúmulo son perturbadas instantáneamente por la Galaxia, es decir, no hay cambios en la posición de las estrellas respecto al centro del cúmulo. La energía potencial de las estrellas permanece constante y sólo se considera la variación instantánea de su energía cinética.

La masa perturbadora ( $M_p$ ) se mueve en línea recta

con velocidad constante,  $V_p$ . La distancia mínima entre la estrella y el perturbador se conoce como el parámetro de impacto,  $p$ . El cambio en velocidad que experimenta la estrella es igual al impulso que ejerce la perturbación (ver Fig. 2.1). Este impulso está dado por

$$m_s \Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} F_p(t) dt, \quad (1-1)$$

donde  $F_p(t)$  es la fuerza que actúa sobre la masa de la estrella de masa,  $m_s$ . Esta fuerza se puede expresar como la suma de una componente perpendicular y paralela a la dirección de movimiento de  $M_p$ ,

$$\mathbf{F}_p(t) = \mathbf{F}_p(t)^\perp + \mathbf{F}_p(t)^\parallel. \quad (1-2)$$

El efecto de  $\mathbf{F}_p^\parallel$  en la integral de (1-1) se anula debido a la simetría del problema (recordemos que la estrella se considera estacionaria, ver Fig. 2.1). La magnitud de  $\mathbf{F}_p^\perp$  está dada por

$$F_p^\perp = \frac{GM_p m_s}{r^2} \left( \frac{p}{r} \right). \quad (1-3)$$

Utilizando que  $r^2 = V_p^2 t^2 + p^2$  (ver Fig. 2.1), se puede cambiar la dependencia temporal por una espacial en la ec. (1-1), que se puede reescribir como

$$\Delta v = \frac{2Gp}{V_p} \int_p^{+\infty} \left[ \frac{M_p}{r^2 (r^2 - p^2)^{1/2}} \right] dr. \quad (1-4)$$

Si la masa del perturbador tiene una distribución de masa, distinta a un punto masa, su efecto se puede considerar de la siguiente forma: se define  $\mu(r)$  como la función cumulativa de masa normalizada a la masa total de perturbador  $M_p^t$ , y haciendo el siguiente cambio de variable,  $\xi = r/p$  y  $d\xi = dr/p$ , entonces,  $\Delta v$  estará dado por (Aguilar *et al.* 1988),

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{2GM_p^t}{V_p p^2} \int_1^{+\infty} \frac{\mu_p(p\xi)}{\xi^2 (\xi^2 - 1)^{1/2}} d\xi \\ &= \frac{2GM_p^t}{V_p} \frac{1}{p^2} f(p), \end{aligned} \quad (1-5)$$

donde

$$f(p) \equiv \int_1^{+\infty} \frac{\mu_p(p\xi)}{\xi^2 (\xi^2 - 1)^{1/2}} d\xi. \quad (1-6)$$

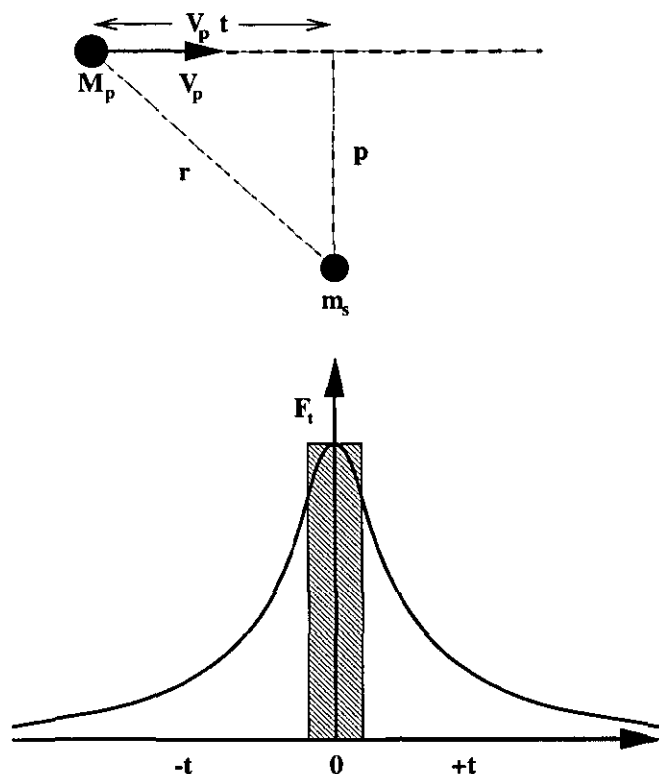


Fig. 2.1.— Representación esquemática de la aproximación de impulso. En la parte superior se muestra la geometría del encuentro. La masa perturbadora,  $M_p$ , se mueve en línea recta con velocidad constante,  $V_p$ , mientras que la masa perturbada se considera estacionaria. En la parte inferior se muestra la variación temporal de la fuerza perturbadora, que según la aproximación de impulso, es igual al área del rectángulo sombreado.

La información sobre la distribución de masa del perturbador se encuentra en la integral adimensional  $f(p)$ .

Para perigalácticos grandes  $f(p) \rightarrow 1$ , se tiene el caso donde el perturbador es un punto masa. Si se sustituye en la ec. (1-5) se obtiene

$$\Delta v = \frac{2GM_p t}{V_p p^2} \quad (1-7)$$

Este resultado es semejante al que se obtiene al aplicar el valor máximo de  $F_p(t)$  durante un intervalo temporal,  $-\Delta t \leq t \leq \Delta t$ , donde  $\Delta t = p/V_p$ . Esta aproximación está representada por el rectángulo sombreado de la Fig. 2.1.

El cambio en la energía de las estrellas está dado por  $\Delta E_s = \frac{1}{2} m_s [(\Delta v)^2 + v \Delta v]$ . Si suponemos que todas las estrellas tienen la misma masa, el cambio en la energía del cúmulo es la suma de los cambios individuales de todas las estrellas (Aguilar 1993),

$$\Delta E_c = \frac{1}{3} M_c \left( \frac{2GM_p}{p^2 v_p} \right)^2 \langle r_m^2 \rangle, \quad (1-8)$$

donde  $\langle r_m^2 \rangle$  y  $M_c$ , representan el radio medio cuadrado y la masa total del cúmulo, respectivamente. En la

ecuación anterior, el término  $v \Delta v$  no contribuye, porque la suma de este sobre todas las estrellas del cúmulo es cero (Spitzer 1958).

El incremento de la energía cinética de las estrellas, implica un aumento de la energía cinética total del cúmulo, que bajo la suposición de equilibrio virial se traduce en un decremento de su energía potencial, y por tanto en una expansión (Spitzer 1958).

Esta aproximación, aunque muy sencilla, nos ayuda a entender el comportamiento de un cúmulo globular cuando interacciona con alguna de las componentes galácticas. Sin embargo, ésta aproximación no considera el movimiento de las estrellas del cúmulo. A continuación se describe la teoría adiabática que nos permite corregir, a primer orden, esta deficiencia.

## 2.2 Aproximación con la Corrección Adiabática

En la sección anterior se considera que las estrellas no se mueven de manera apreciable durante el transcurso de la perturbación. Esto quizá sea cierto para estrellas cerca del radio de marea del cúmulo, pero no lo es para las estrellas de las regiones internas de este, que posiblemente recorren una fracción importante de su órbita durante el transcurso de la perturbación. El cambio en la energía orbital de las estrellas, depende del tiempo que dure la interacción, en términos de su período orbital dentro del cúmulo.

Si el intervalo de tiempo durante el cual transcurre la perturbación ( $P_p$ ), es mucho menor (pero no despreciable), que el período orbital de una estrella perturbada alrededor del cúmulo ( $P_s$ ), se dice que estamos en el límite impulsivo ( $P_p/P_s < 1$ ).

Por otro lado, si las estrellas recorren una parte importante de su órbita, o completan varios períodos de ésta, durante el transcurso de la perturbación, estamos en el límite adiabático ( $P_p/P_s > 1$ ).

La aproximación de impulso es el límite opuesto de la aproximación adiabática, razón por la cual es necesario hacer un replanteamiento del problema donde se considere el movimiento de las estrellas, que depende de su posición dentro del cúmulo. Esta dependencia hace que el efecto de la perturbación sea menos importante para las estrellas más ligadas, que se encuentran en el límite adiabático, con respecto a las menos ligadas, que están en el límite impulsivo.

En la siguiente sección hacemos una breve introducción a la teoría adiabática, y presentamos un ejemplo sencillo para ilustrar sus conceptos más importantes. Continuamos con la presentación y discusión de las correcciones adiabáticas propuestas en la literatura, que serán comparadas con los resultados de la aproximación de impulso, y posteriormente con la aproximación del problema de 3-cuerpos (ver § 2.4.6).

### 2.2.1 Teoría adiabática e invariantes adiabáticos

Un sistema es adiabático si el tiempo característico durante el cual actúa una fuerza externa es mayor que el

tiempo dinámico del sistema (por ejemplo, el período orbital de las estrellas del cúmulo).

Consideremos un oscilador lineal cuya frecuencia de oscilación varía lentamente con el tiempo (ver §7.3, 8 y 9 de Percival y Richards 1989; y § 2.3 de Lichtenberg y Lieberman 1992),

$$\omega(\lambda) \equiv (1 + \lambda)\omega_0 = (1 + \epsilon t)\omega_0, \quad (2-1)$$

donde  $\omega_0$  y  $\epsilon$ , son la frecuencia natural de oscilación del sistema y la amplitud de la perturbación, respectivamente, con  $\lambda = \epsilon t$ . La frecuencia de oscilación tendrá un cambio significativo cuando  $\lambda \approx 1$ , es decir, la aproximación será válida para tiempos del orden de  $\epsilon^{-1}$ . El Hamiltoniano para el oscilador armónico está dado por (Goldstein 1980)

$$H = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega(\lambda)^2 q^2, \quad (2-2)$$

donde  $m$  es la masa del oscilador,  $q$  y  $p$ , es la coordenada y momento generalizado del sistema, respectivamente. Utilizamos el formalismo de las variables de ángulo ( $\theta$ ) y de acción ( $I$ ), porque es una forma elegante de resolver el Hamiltoniano, que sólo será función de  $I$ , ya que  $\theta$  es una variable periódica (Percival y Richards 1989), aunque también se debe a que la acción está relacionada con los invariantes adiabáticos que discutiremos más adelante (ver §3.5a y §3.6 de Binney y Tremaine 1987). La solución de la ec. (2-2) en términos de las variables de ángulo y de acción ( $\theta, I$ ) es,

$$\begin{aligned} q &= \left[ \frac{2I}{m\omega(\lambda)} \right]^{1/2} \sin \theta, \\ p &= [2mI\omega(\lambda)]^{1/2} \cos \theta, \end{aligned} \quad (2-3)$$

con la función generadora

$$S_1(\theta, q; \lambda) = \frac{1}{2}m\omega(\lambda)q^2 \cot \theta. \quad (2-4)$$

Sí  $\lambda$  varía lentamente con el tiempo, también lo hará  $\omega$  (ver ec 2-1). Entonces, los cambios en el sistema serán pequeños durante un período del sistema no perturbado.

Utilizando la función generadora se puede escribir el Hamiltoniano en términos de las variables de ángulo acción,

$$K(\theta, I, \lambda) = I\omega(\lambda) + \frac{\epsilon I \omega'(\lambda)}{2\omega(\lambda)} \sin 2\theta. \quad (2-5)$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial K}{\partial I} = \omega(\lambda) + \frac{\epsilon \omega'(\lambda)}{2\omega(\lambda)} \sin 2\theta, \\ \dot{I} &= -\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{\epsilon \omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)} \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2-6)$$

donde  $\omega'$  es la derivada temporal de  $\omega$ . La solución se obtiene al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (2-6).

Una solución analítica, aproximada, se obtiene por medio de la teoría de perturbaciones<sup>1</sup>. Expresamos las variables  $\theta(t)$  e  $I(t)$  en series de potencias de  $\epsilon$  (amplitud de la perturbación),

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta^{(0)}(t) + \epsilon \theta^{(1)}(t) + O(\epsilon^2) \\ I(t) &= I^{(0)}(t) + \epsilon I^{(1)}(t) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2-7)$$

Sustituyendo en la ec. (2-6) e igualando los términos del mismo orden en  $\epsilon$ , se puede obtener una solución aproximada al orden deseado. En particular, para la solución a primer orden se tiene

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega^2} \sin 2\theta^{(0)} - \frac{\omega'_0}{\omega_0^2} \sin 2\theta_0 \right) \right] + O(\epsilon^2), \\ \theta(t) &= \theta^{(0)} - \frac{\epsilon}{4} \left( \frac{\omega'}{\omega^2} \cos 2\theta^{(0)} - \frac{\omega'_0}{\omega_0^2} \cos 2\theta_0 \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2-8)$$

En este caso  $\omega(\epsilon t) = (1 + \epsilon t)\omega_0$  y  $\omega' = \epsilon$ . Por ejemplo, si consideramos las siguientes condiciones iniciales:  $I^{(0)} = I_0=1, \omega_0=1$  y  $\theta_0=0$ . El valor de  $\theta^{(0)}$  se obtiene de integrar para  $\theta$  la ec. (2-6) a primer orden en  $\epsilon$ , de donde se obtiene,

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \int_0^t dt \omega(\lambda) + \theta_0, \\ &= t + \frac{\epsilon t^2}{2}, \end{aligned} \quad (2-9)$$

Sustituyendo estas condiciones iniciales en (2-8) y considerando los solamente los términos a primer orden se tiene,

$$I(t) = 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon t)^2} \sin(2t + \epsilon t^2) \right], \quad (2-10)$$

$$\theta(t) = t + \frac{\epsilon t^2}{2} - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1 + \epsilon t)^2} \cos(2t + \epsilon t^2) - 1 \right]. \quad (2-11)$$

La evolución temporal de  $\theta$  e  $I$  se muestra en la Fig. 2.2. La línea sólida y la de trazos representan la solución numérica y la solución a primer orden, respectivamente. La solución numérica se obtiene al integrar numéricamente la ec. (2-1). En la figura se muestran los resultados para los valores de  $\epsilon=1, 0.5$  y  $0.1$ . El comportamiento de ambas soluciones (numérica y a primer orden), para las variables  $\theta$  e  $I$  es muy parecido. La solución a primer orden converge al resultado numérico conforme disminuye el valor de  $\epsilon$ . Esto se puede observar en la diferencia *rms* ( $\delta_{rms}$ , para cada valor de  $\epsilon$  en  $\theta$  e  $I$ ) entre la solución a primer orden y la numérica. La diferencia *rms* entre  $\epsilon=1$  y  $\epsilon=0.1$  es de dos ordenes de magnitud.

<sup>1</sup>En § 2.3 se discute en detalle la teoría de perturbaciones. Aquí sólo se pretende dar una visión cualitativa del método.

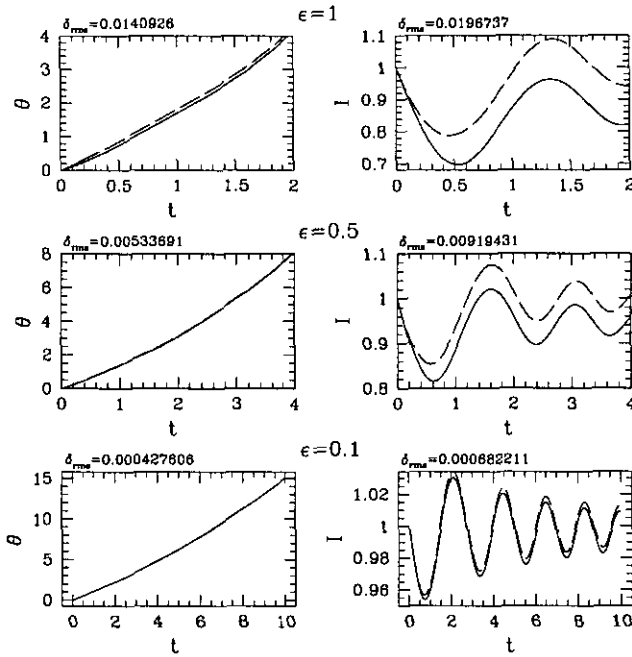


Fig. 2.2.— Evolución temporal de las variables de ángulo y acción,  $\theta(t)$  e  $I(t)$ , para los valores de  $\epsilon = 1, 0.5$  y  $0.1$ . En ambos casos, la línea punteada representa la aproximación a primer orden, y la línea sólida la solución numérica.

La ventaja de la solución a primer orden (ec. 2-10 y 2-11), es que en ella se puede estudiar la solución conociendo la dependencia de las variables involucradas, como son: la frecuencia, la amplitud de la perturbación y el tiempo. Por ejemplo, el amortiguamiento en la oscilación de la variable  $I$ , se puede apreciar en la ec. (2-10) por su dependencia con el tiempo ( $\sim t^{-2}$ ). Para la variable  $\theta$  el comportamiento secular está determinado por los términos de la ec. (2-11), que muestran una dependencia con  $t$  y  $t^2$ .

El comportamiento a primer orden para  $p$  y  $q$  se obtiene a partir de las ecuaciones (2-3), (2-10) y (2-11),

$$q(t) = \left( \frac{2}{1 + \epsilon t} \right)^{1/2} \sin(t + \epsilon t^2/2), \quad (2-12)$$

$$p(t) = (1 + \epsilon t)^{1/2} \cos(t + \epsilon t^2/2). \quad (2-13)$$

En las Fig. 2.3a, 2.3b y 2.3c se muestra el comportamiento de la solución dada por el sistema (2-12) y (2-13), con la solución numérica, para los valores de  $\epsilon = 1, 0.5$  y  $0.1$ , respectivamente. La línea sólida es la aproximación numérica, y la línea de puntos la aproximación a primer orden.

Para la amplitud  $\epsilon = 1$  (Fig. 2.3a), la aproximación analítica muestra un mayor amplitud en su movimiento (línea de trazo) que la solución numérica. La amplitud de esta oscilación disminuye para las amplitudes  $\epsilon = 0.5$  y  $0.1$ . En particular, para  $\epsilon = 0.1$  la separación entre ambas soluciones es tan pequeña que se ven como una sola (ver Fig. 2.3c).

En la Fig. 2.3d, hemos graficado distintos intervalos

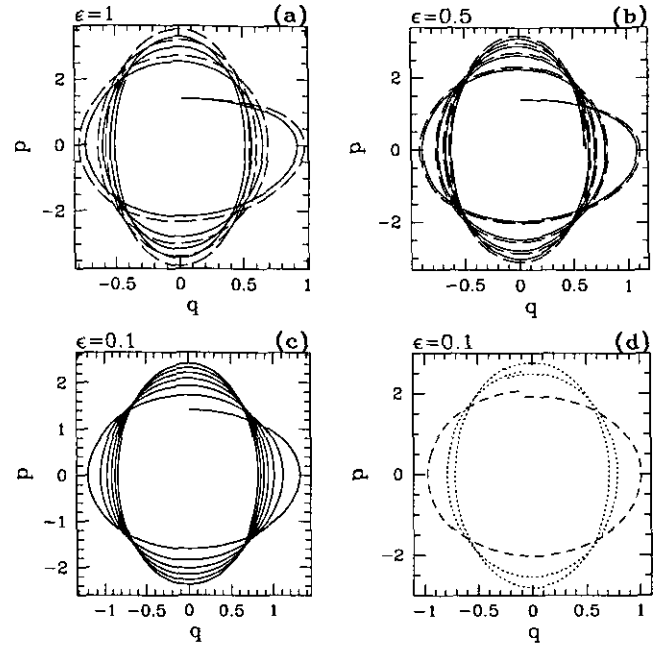


Fig. 2.3.— En (a), (b) y (c) se muestra la evolución de las coordenadas  $p$  y  $q$ , para tres valores de la perturbación  $\epsilon = 1, 0.5$  y  $0.1$ , respectivamente. La línea sólida representa la solución numérica y la punteada la aproximación analítica a orden cero. En (d) se muestran 3 intervalos temporales de la evolución del sistema dado por la ec.(2-3) para  $\epsilon = 0.1$ . Vemos que las curvas casi se cierran formando una elipse, por lo que se puede decir que el movimiento es "casi" adiabático.

temporales para la solución numérica para  $\epsilon = 0.1$ . En los intervalos que hemos seleccionado las curvas casi se cierran, formando, aproximadamente, una elipse. El área dentro de la elipse, dada por  $2\pi I(t)$  (ver Fig. 2.2 para  $\epsilon = 0.1$ ), es aproximadamente, constante en el intervalo temporal que hemos graficado. Esto es una consecuencia del comportamiento adiabático.

En este caso  $I$  varía alrededor de su valor inicial. Si esta variación se encuentra acotada, se dice que  $I$  es un invariante adiabático (Weinberg 1994a).

Este ejemplo corresponde a un oscilador armónico donde la constante  $k$  ( $\omega_0^2 = k/m$ ) del resorte varía lentamente con el tiempo. Esto es semejante a suponer que el potencial que experimenta una estrella dentro del cúmulo está variando lentamente, debido al desplazamiento del cúmulo en su órbita alrededor de la Galaxia.

En este ejemplo se ha utilizado la aproximación adiabática ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) y la teoría de perturbaciones. Ambas herramientas se pueden utilizar para estimar el efecto que los choques de marea tiene en las regiones internas de un cúmulo globular.

## 2.2.2 Corrección adiabática

Spitzer (1958), añade a la aproximación de impulso una corrección que toma en cuenta el movimiento de las estrellas dentro del cúmulo durante su interacción con el

perturbador. Esta corrección se hace entre el intervalo transición de la aproximación de impulso al régimen adiabático.

Si las estrellas son perturbadas por una masa  $M_p$  que se mueve en línea recta con velocidad  $V_p$  (ver Fig. 2.1), la dependencia temporal de la perturbación se obtiene a partir de (3-1) sustituyendo la variable espacial por la temporal con,  $r = (V_p t^2 + p^2)^{1/2}$ , de donde se tiene que,

$$f_p(t) = \left(1 + \frac{V_p^2 t^2}{p^2}\right)^{-3/2} \quad (2-14)$$

Spitzer (1958) encuentra, partiendo de una análisis perturbativo, que el incremento de la energía del cúmulo está dado por

$$\Delta E_c = \frac{1}{3} M_c \left(\frac{2GM_p}{p^2 V_p}\right)^2 r^2 A_s(\beta), \quad (2-15)$$

donde  $A_s(\beta)$  es la corrección que se introduce debido a la duración finita de la perturbación y es conocida como la corrección de Spitzer. Esta corrección está dada por

$$A_s(\beta) = \frac{1}{2} [L_x(\beta) + L_y(\beta) + L_z(\beta)], \quad (2-16)$$

donde  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$  son las correcciones en cada una de las variables espaciales. Dadas por

$$L_x(\beta) = [\beta K_1(\beta) + \beta^2 K_0(\beta)]^2 + [\beta^2 K_1(\beta)]^2 \quad (2-17)$$

$$L_y(\beta) = [\beta^2 K_0(\beta)]^2 + [\beta^2 K_1(\beta)]^2, \quad (2-18)$$

$$L_z(\beta) = [\beta K_1(\beta)]^2, \quad (2-19)$$

donde  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones modificadas de Bessel (Arfken 1985);  $\beta$  es el parámetro adiabático, que es una medida relativa entre el tiempo que dura la interacción y el período de las estrellas. Este parámetro se define como

$$\beta \equiv \frac{2\omega_s p}{V_p} \propto \frac{1}{r_{cs}}, \quad (2-20)$$

donde  $\omega_s$  y  $r_{cs}$  son la frecuencia angular de rotación, y el radio de giro de la estrella alrededor del cúmulo.

La ec. (2-15) es semejante a la ec. (1-8), excepto por el factor  $A_s(\beta)$ . Este factor nos da una medida de los efectos que la perturbación tiene en las regiones internas del cúmulo. A este factor se le conoce como la *corrección adiabática* de Spitzer. Con esta aproximación es posible cuantificar los efectos de la perturbación en las regiones internas del cúmulo. En esta aproximación el movimiento de las estrellas se supone como un oscilador armónico *unidimensional*. Weinberg (1994a) hace notar que esta es una aproximación demasiado idealizada, porque sólo considera un grado de libertad para el movimiento de las estrellas, y que en este caso el cambio de la acción disminuye de manera exponencial como función de la amplitud de la perturbación,  $\Delta I = \mathcal{O}(e^{-cte/\epsilon})$ . Si la variable de acción permanece invariante ante la perturbación, entonces

se dice que es un invariante adiabático (Goldstein 1980, § 11.7). Esto es cierto mientras  $\Delta I$  depende exponencialmente de la amplitud de la perturbación.

Weinberg (1994a) propone modelar el movimiento de las estrellas, dentro del un cúmulo globular, como una combinación de osciladores multidimensionales no-líneales, y si alguna de las frecuencias de estos osciladores puede es conmensurable con la frecuencia de la perturbación, puede haber resonancias en el sistema. El efecto de estas resonancias puede ser importante, aún para valores pequeños de la perturbación. Si esto sucede los invariantes adiabáticos no se conservan, hecho que al promediar sobre todo el cúmulo afecta de manera apreciable su evolución.

Gnedin y Ostriker (1997) dan una forma funcional para la corrección propuesta por Weinberg (1994a), encontrando que la energía decae como una ley de potencias<sup>2</sup>,

$$A_w(\beta) = \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)^{-3/2} \quad (2-21)$$

En la Fig. 2.4 se compara el comportamiento de la corrección de Spitzer (línea de trazos) y la de Weinberg (línea sólida) como función de  $\beta$ . Ambas aproximaciones son muy parecidas hasta valores de  $\beta \sim 2$ , después de dicho valor la corrección de Spitzer decae rápidamente ( $\propto e^\beta$ ), de tal suerte que para  $\beta=10$  esta corrección es menor por  $\sim 4$  ordenes de magnitud que la de Weinberg. Ambas aproximaciones, de Spitzer y de Weinberg, tienen el mismo efecto en las regiones externas del cúmulo, pero es la de Weinberg la que mayor repercusión tiene en las regiones internas de este.

En ninguna de las dos correcciones se considera el efecto de una perturbación periódica. Para los cúmulos globulares la perturbación tiene un comportamiento periódico con el bulbo y el disco galáctico. Con este último, dos veces por período orbital.

A continuación estudiamos el comportamiento de un sistema que es perturbado de manera periódica, buscando entender el efecto que las resonancias tienen en su evolución. Se obtienen sus soluciones analíticas aproximadas, a primer y segundo orden. Se comparan con la solución numérica. Destacamos la utilidad de las aproximaciones analíticas para entender el comportamiento del sistema, dentro de los límites de validez de esta aproximación.

### 2.3 Oscilador Armónico Forzado por una Fuerza de Marea Periódica

En el siguiente paso de nuestra aproximación, suponemos que las estrellas dentro del cumulos, inicialmente se mueven bajo la influencia de un potencial armónico. Las estrellas en este potencial se mueven con una frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ . Las estrellas en este potencial se

<sup>2</sup>Gnedin y Ostriker (1997) sólo dan la forma funcional de esta aproximación refiriendo a un artículo en preparación, por lo que no queda clara su justificación.

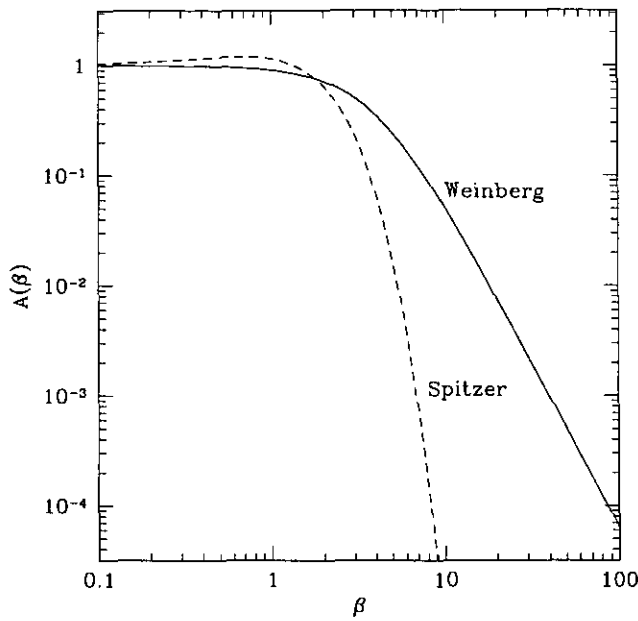


Fig. 2.4.— Corrección adiabática de Spitzer y Weinberg como función del parámetro  $\beta$ . Ver discusión en el texto.

sometena a una perturbación periódica,  $F_t$ . La ecuación de movimiento para este sistema está dada por,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_t, \quad (3-1)$$

donde  $F_t$  tiene la siguiente forma,

$$F_t = \epsilon x f(t), \quad \text{con} \quad f(t) = \text{sen}(\omega_p t). \quad (3-2)$$

La dependencia lineal en  $x$ , es igual a la presentada por Spitzer (1958). La amplitud de la perturbación está dada por  $\epsilon$ . La dependencia temporal de la ecuación (3-2) es la más sencilla que introduce un comportamiento periódico para la fuerza externa. En la Fig. 2.5 se muestra la representación esquemática de este sistema.

Como el sistema (3-1) no tiene solución analítica, su comportamiento se tiene que estudiar por métodos numéricos.

La teoría de perturbaciones se puede aplicar si la amplitud de la perturbación es pequeña ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), y si el sistema no perturbado tiene solución analítica (Lichtenberg y Lieberman 1992, Cap. 2). Esto implica que la amplitud de la perturbación,  $\epsilon$ , debe ser pequeña respecto al cuadrado de la frecuencia angular de la estrella ( $\omega_s^2$ , conocido como término armónico). La amplitud de la fuerza de marea está dada por

$$\epsilon = \frac{GM_p}{p^3}, \quad (3-3)$$

donde  $M_p$  es la masa del perturbador y  $p$  la distancia mínima entre el cúmulo y el perturbador.

La importancia del término perturbativo, relativa al

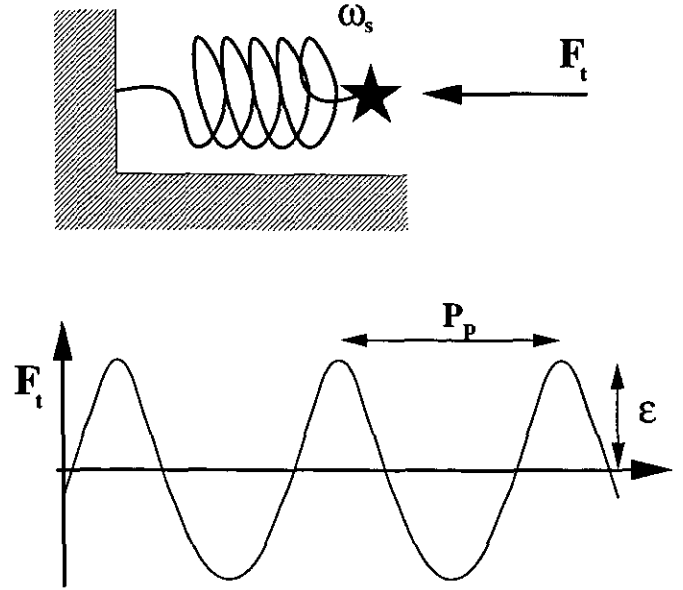


Fig. 2.5.— Representación esquemática del oscilador armónico forzado por una fuerza de marea periódica. El resorte representa el comportamiento armónico del potencial del cúmulo, el cual es perturbado por una fuerza de marea periódica, de amplitud  $\epsilon$  y período  $P_p$ .

término armónico está dada por

$$\frac{\epsilon}{\omega_s^2} \sim \frac{GM_p/p^3}{\omega_s^2}. \quad (3-4)$$

Para estimar si es correcto utilizar la teoría de perturbaciones hemos calculado algunos valores de la expresión (3-4). Para una estrella en  $r_h$ ,  $\epsilon/\omega_s^2$  tiene un valor de  $2.23 \times 10^{-3}$ , y en  $r_t$  de 0.48 (con  $G=1$ ,  $r_h=5$  pc,  $M_p/M_c=1.43 \times 10^5$ ,  $p/r_h=400$  y  $r_t/r_h \sim 6$ ). En ambos casos  $\epsilon/\omega_s^2 < 1$ , de donde se concluye, que los resultados de la teoría de perturbaciones serán una buena aproximación para describir el comportamiento del sistema en el intervalo  $(r_h-r_t)$ .

El límite de validez de ésta aproximación se puede obtener de,

$$\frac{M_p/p^3}{\omega_s^2} < 1, \quad (3-5)$$

despejando  $\omega$  obtenemos su valor límite

$$\omega_{\text{límite}} > \sqrt{\frac{M_p}{p^3}} = 0.047. \quad (3-6)$$

Utilizando la relación entre la frecuencia y el radio de la órbita, y suponiendo que es una órbita circular para la estrella, donde  $\omega_s = r_s^{-3/2}$ , obtenemos el valor límite para el radio,

$$r_{\text{límite}} < \frac{p}{M_p^{1/3}} = 7.6 r_h. \quad (3-7)$$

De lo anterior vemos que es posible resolver la ec. (3-1) utilizando la teoría de perturbaciones.



A continuación resolvemos el sistema (3-1) utilizando la teoría de perturbaciones y comparamos el resultado con la solución numérica del sistema.

2.3.1 Solución por teoría de perturbaciones

El primer paso para encontrar la solución por teoría de perturbaciones es expresar la variable  $x$ , como una expansión en series de potencias de  $\epsilon$  (Spitzer 1958),

$$x^{(n)} = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \epsilon^n x_n, \quad (3-8)$$

donde sustituyendo en ec. (3-1) e igualando términos del mismo orden en  $\epsilon$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-9)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0 \sin(\omega_p t) \quad (3-10)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = x_1 \sin(\omega_p t) \quad (3-11)$$

⋮

De esta forma podemos encontrar la solución al orden deseado en  $\epsilon$ , usando el método de variación de parámetros (Davis 1981). Las aproximaciones sucesivas  $x_n$  estarán dadas por

$$x_n(t) = A_n(t) \cos(\omega_0 t) + B_n(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3-12)$$

con las variables  $A_n$  y  $B_n$  dadas por

$$A_n(t) = - \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \sin(\omega_0 \tau) x_{n-1}(\tau) d\tau, \quad (3-13)$$

$$B_n(t) = \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \cos(\omega_0 \tau) x_{n-1}(\tau) d\tau. \quad (3-14)$$

A orden cero encontramos que  $A_0$  y  $B_0$  son independientes del tiempo y constituyen la solución al sistema homogéneo:

$$x^{(0)}(t) = x_0 = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t). \quad (3-15)$$

Para obtener la solución a primer orden es necesario conocer  $x_1$ , que está dado por

$$x_1(t) = A_1(t) \cos(\omega_0 t) + B_1(t) \sin(\omega_0 t), \quad (3-16)$$

con  $A_1$  y  $B_1$  dados por

$$A_1(t) = - \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \sin(\omega_0 \tau) x_0(\tau) d\tau, \quad (3-17)$$

$$B_1(t) = \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \cos(\omega_0 \tau) x_0(\tau) d\tau. \quad (3-18)$$

La solución a primer orden para  $x$  y  $\dot{x}$ , están dadas por

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= x_0 + \epsilon x_1 \\ x^{(1)}(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t) \\ &+ \epsilon [A_1(t) \cos(\omega_0 t) + B_1(t) \sin(\omega_0 t)], \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)}(t) &= \dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 \\ \dot{x}^{(1)}(t) &= -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ &+ \epsilon \{ [A_1'(t) \cos(\omega_0 t) + B_1'(t) \sin(\omega_0 t)] \\ &+ \omega_0 [-A_1(t) \sin(\omega_0 t) + B_1(t) \cos(\omega_0 t)] \}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

donde  $A_1'$  y  $B_1'$  son las derivadas temporales de los coeficientes  $A_1$  y  $B_1$ .

De igual forma la solución a segundo orden para  $x$  y  $\dot{x}$  está dada por

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t) &= x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 \\ x^{(2)}(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t) \\ &+ \epsilon [A_1(t) \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t)] \\ &+ \epsilon^2 [A_2(t) \cos(\omega_0 t) + B_2(t) \sin(\omega_0 t)], \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(2)}(t) &= \dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + \epsilon^2 \dot{x}_2 \\ \dot{x}^{(2)}(t) &= \dot{x}^{(1)}(t) + \epsilon^2 \{ [A_2'(t) \cos(\omega_0 t) + B_2'(t) \sin(\omega_0 t)] \\ &+ \omega_0 [-A_2(t) \sin(\omega_0 t) + B_2(t) \cos(\omega_0 t)] \}, \end{aligned} \quad (3-22)$$

con  $A_2$  y  $B_2$  dados por

$$A_2(t) = - \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \sin(\omega_0 \tau) x_1(\tau) d\tau, \quad (3-23)$$

$$B_2(t) = \int_0^t \sin(\omega_p \tau) \cos(\omega_0 \tau) x_1(\tau) d\tau, \quad (3-24)$$

respectivamente.  $A_2'$  y  $B_2'$  son sus derivadas temporales correspondientes.

En §2.3.3 comparamos los resultados de  $x^{(1)}$  y  $x^{(2)}$  con la solución numérica, para un amplio intervalo de frecuencias y amplitudes de la perturbación.

2.3.2 Solución numérica

La solución numérica se obtiene integrando la ecuación (3-1). Esta se realizó con el método de Bulirsch-Stoer (Press *et al.* 1992), que utiliza un integrador Runge-Kutta de 4° orden. Esta rutina controla los errores de truncamiento en la solución, ajustando el paso de integración. También tiene una rutina de interpolación para optimizar el tiempo en que se converge a la solución.

El cálculo de la integración numérica se realizó con un código en FORTRAN. Los cálculos se hicieron en doble precisión en una maquina SPARC 20.

Las condiciones iniciales que se utilizaron, en posición y velocidad, son:

- A)  $x = 0$  y  $\dot{x} = 1$  (línea sólida en las Fig. 2.6-2.8. ).
- B)  $x = 1$  y  $\dot{x} = 0$  (línea de puntos y trazos en las Fig. 2.6-2.8.).

En cada caso se consideran los siguientes valores para la amplitud de la perturbación:  $\epsilon = 1, 0.5, 0.1$  y  $0.01$ . Los valores considerados para  $\omega_p$  son de:  $0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.99, 1.5, 2$  y  $10$ . En todos los casos la frecuencia natural del sistema es de  $\omega_0=1$ .

Con estas condiciones iniciales es posible estudiar el comportamiento en el límite adiabático y el impulsivo, así como la transición entre ellos. También es posible estudiar su comportamiento para distintos valores de la perturbación. Hemos utilizado dos condiciones iniciales, en posición y velocidad, para mostrar que los resultados son independientes de ellas.

En las figuras 2.6 y 2.7, se muestra la solución numérica de la ec. (3-1) para  $\epsilon=1$  y  $0.5$ , y para los nueve valores de  $\omega_p$ , respectivamente. En la Fig. 2.6a y 2.7a se muestra la solución el espacio fase y en las figuras 2.6b y 2.7b la evolución temporal de la variable espacial  $x$ . En esta figura se muestra el comportamiento de la perturbación (línea de trazo corto).

En la Fig. 2.8, se muestra la solución en el espacio fase para las amplitudes  $\epsilon=0.1$  y  $0.01$ . Para estos valores de la amplitud no se muestra la evolución temporal de  $x$ , debido a que en la mayor parte de los valores de  $\omega_p$ , no hay variaciones importantes en su comportamiento.

En las Fig. 2.6a, 2.7a y 2.8, el intervalo temporal graficado es de 80 periodos del oscilador no perturbado. Aunque en algunos casos la trayectoria se sale del intervalo espacial graficado, es posible dar una descripción de su comportamiento, que en estos casos corresponden a resonancias.

En las Fig. 2.6b y 2.7b el tiempo graficado se indica en el recuadro derecho junto con la frecuencia correspondiente. El intervalo temporal, para estas gráficas, fué el necesario para resaltar las características más importantes del movimiento en cada uno de los casos.

Como en todos los casos, el comportamiento para las condiciones iniciales, A y B, es muy parecido, por lo que no haremos referencia específica a ninguna de ellas, sólo describiremos el movimiento general que ambas presentan.

A continuación se discute en detalle los resultados como función de la amplitud de la perturbación.

### Amplitud de perturbación fuerte ( $\epsilon=1$ )

Para las frecuencias  $\omega_p=0.01, 0.1$  y  $0.3$ , (Fig. 2.6b), la amplitud de oscilación aumenta como función del tiempo, alcanzando su máximo cuando la amplitud de la perturbación es máxima. Después de esta transición, la amplitud del oscilador se queda con una amplitud mayor a la que tenía antes de que la perturbación alcanzara su máximo. El oscilador continúa con un comportamiento, aproximadamente armónico durante  $\sim 6, 3$  y  $1.5$  periodos, respectivamente. Antes de que la amplitud de la perturbación alcance nuevamente su máximo, aumentando su amplitud de oscilación. Esto significa que la respuesta del oscilador es función de la fase del perturbador, y esta aumenta cada vez que la amplitud de la perturbación es máxima, los

que parece indicar que la perturbación inyecta energía periódicamente en el sistema, haciendo que la amplitud de oscilación aumente como función del tiempo. Específicamente con el período del perturbador.

Para  $\omega_p=0.5$  y  $0.7$ , el oscilador pasa por varias transiciones que no parecen ser periódicas. Sin embargo, su amplitud de oscilación se encuentra acotada en el espacio fase. Este tipo de comportamiento se le conoce como *intermitencia*<sup>3</sup>. Esta es una solución no periódica del sistema, que en este caso es estable, que como veremos en los resultados de la Fig. 2.9, la amplitud de su oscilación no crece como en el caso de  $\omega_p=0.01, 0.1$  y  $0.3$ .

Para las  $\omega_p = 0.99, 1.5$  y  $2$ , los osciladores entran en resonancia con el perturbador desde sus primeros periodos. El oscilador tiende a adoptar la frecuencia de oscilación del perturbador.

Para  $\omega_p = 10$ , el oscilador casi no es afectado por la perturbación, porque esta oscila tan rápido que en promedio su efecto se anula. Aún así, el efecto no se anula del todo, y se manifiesta como una ligera variación en su amplitud de oscilación.

### Amplitud de perturbación mediana ( $\epsilon=0.5$ )

Para  $\omega_p = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5$  y  $0.7$ , su amplitud de oscilación muestra una modulación que es máxima cuando la amplitud de la perturbación alcanza su máximo (ver Fig. 2.7b). Por su comportamiento en el intervalo temporal que se gráfica, esta parece ser una solución periódica y estable del sistema.

Para la  $\omega_p=0.99$ , la amplitud de su oscilación aumenta continuamente hasta entrar en resonancia con la perturbación. El oscilador tiene la misma frecuencia de la perturbación, pero con un desfase de  $\pi/2$ . Para la  $\omega_p = 1.5$  el oscilador no entra en resonancia como en la amplitud anterior ( $\epsilon=1$ ), y al parecer tiene un comportamiento intermitente, porque su comportamiento no parece ser periódico.

Para la  $\omega_p=2$  el oscilador, igual que para  $\epsilon=1$ , entra en resonancia con la perturbación.

Para la  $\omega_p=10$ , como ya se vio en la amplitud anterior, la oscilación del perturbador es tan rápida, que su efecto en promedio se anula. La amplitud de la perturbación es la mitad que la del oscilador, razón por la cual su efecto disminuye considerablemente respecto a la amplitud anterior ( $\epsilon=1$ ).

Para esta amplitud, se tiene un comportamiento adiabático cuando  $\omega_p/\omega_0 < 1$ .

### Amplitud de perturbación débil ( $\epsilon = 0.1$ y $0.01$ )

Para estas frecuencias no se muestra explícitamente el comportamiento temporal de  $x$ , porque los efectos de la perturbación sólo son importantes para algunos valores de  $\omega_p$ .

<sup>3</sup>Este es un comportamiento que ocurre en sistema dinámico no lineales, y que fué descubierto por E. Lorenz (1963).

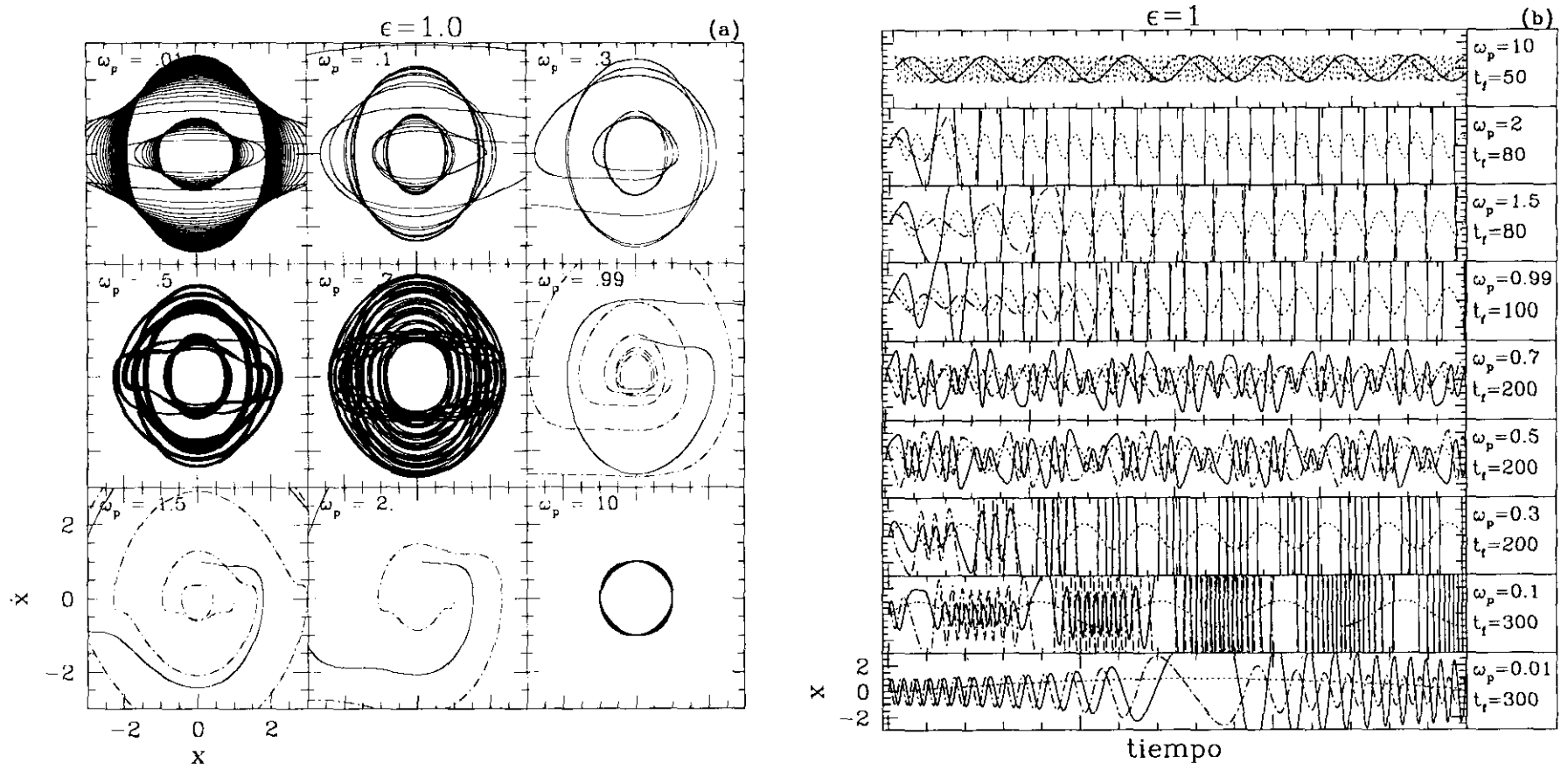


Fig. 2.6.— En (a) se muestra la evolución temporal de la solución numérica en el espacio fase para un oscilador armónico perturbado por una fuerza de marea periódica. La línea sólida, y la de trazo y puntos son las soluciones numéricas. En (b) se muestra la evolución temporal de la variable espacial,  $x$ , para cada una de las frecuencias  $\omega_p$  que hemos considerado. En este caso la línea punteada es la perturbación del sistema. Ver en el texto la discusión de cada caso.

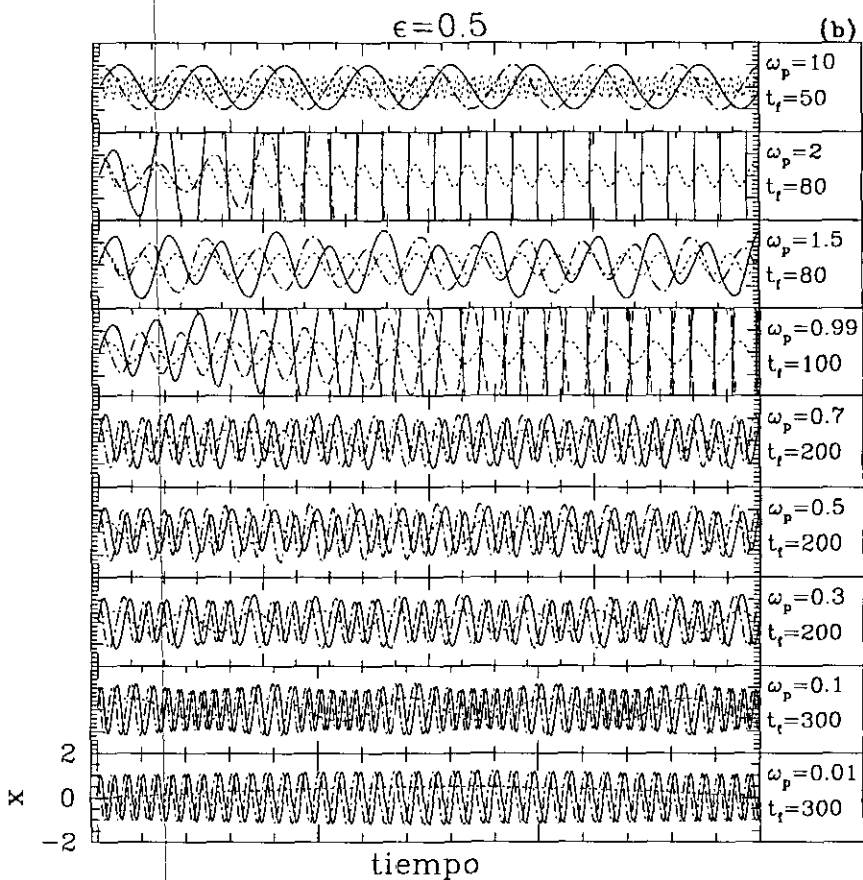
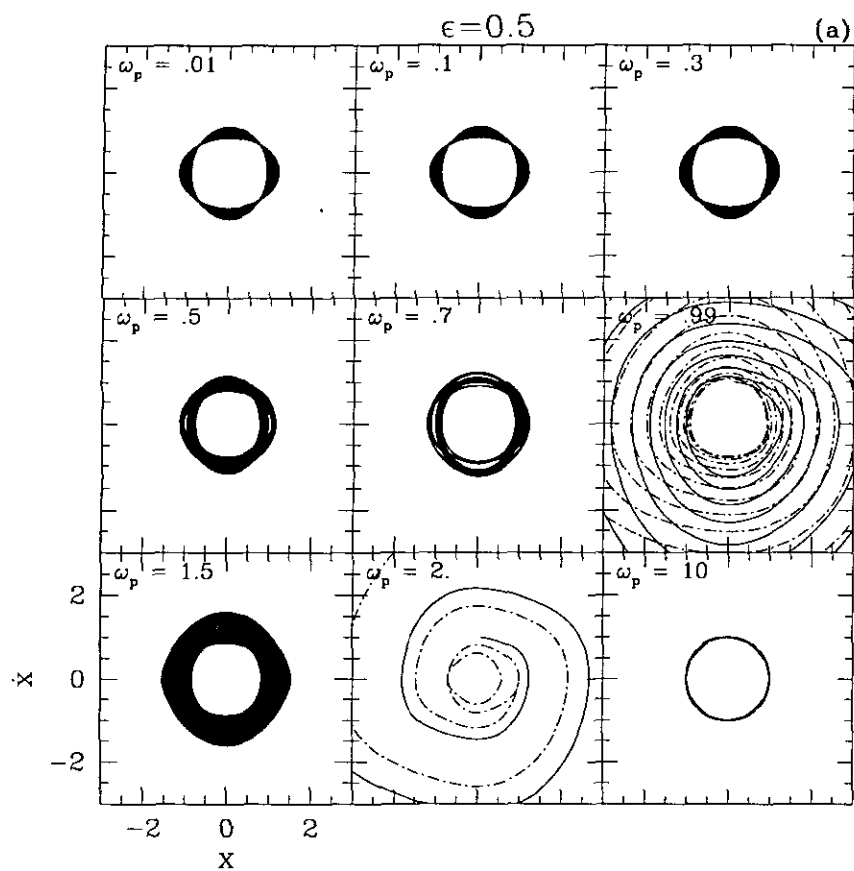


Fig. 2.7.— En (a) se muestra la evolución temporal de la solución numérica en el espacio fase para un oscilador armónico perturbado por una fuerza de marea periódica. La línea sólida, y la de trazo y puntos son las soluciones numéricas. En (b) se muestra la evolución temporal de la variable espacial,  $x$ , para cada una de las frecuencias  $\omega_p$  que hemos considerado. En este caso la línea punteada es la perturbación del sistema. Ver en el texto la discusión de cada caso.

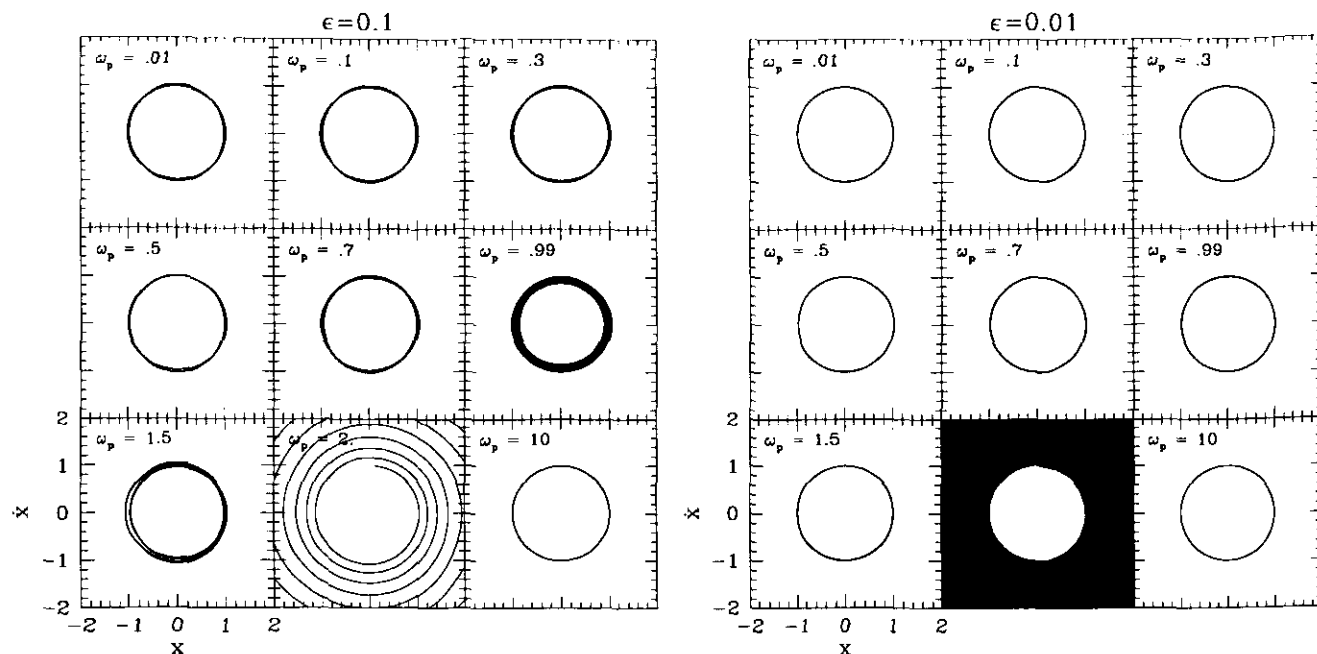


Fig. 2.8.— Evolución de la solución numérica en el espacio fase para  $\epsilon = 0.1$  y  $0.01$ . La línea sólida, y la de trazo y puntos son las soluciones numéricas. Ver en el texto la discusión de cada caso.

Para  $\epsilon=0.1$ , el efecto que la perturbación tiene sobre su amplitud de oscilación es muy pequeño.

Las trayectorias en el espacio fase casi no muestran cambios. Para  $\omega_p=0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  y  $10$  los cambios en las trayectorias son apenas apreciables. Lo mismo podemos decir para  $\epsilon=0.1$ , aumentando el caso de  $\omega_p=0.99$  y  $1.5$ .

Para  $\omega_p=0.99$ , para  $\epsilon=0.1$  y  $0.01$ , el intervalo en frecuencias que abarca la resonancia en  $\omega_p=1$  disminuye, por lo que es posible conocer su comportamiento. El ancho de la resonancia,  $\Delta\omega$ , se define como (Marion y Thornton 1988),

$$\Delta\omega \sim 2\pi\omega \frac{E_{\text{órbita}}}{\Delta E(\text{por período})} \tag{3-25}$$

Para  $\omega_p=2$ , el comportamiento es resonante para ambas amplitudes. El efecto de la perturbación para  $\epsilon=0.01$  sólo se manifiesta por la resonancia en  $\omega_p=2$ .

En resumen, la amplitud de la perturbación juega un papel importante en el comportamiento del sistema porque ésta *amplifica* el efecto de las resonancias. Así mismo, la amplitud del oscilador está en función de la amplitud y frecuencia de la perturbación, que permite distintos tipos de comportamiento para un sistema dado.

En particular, cuando la amplitud de la perturbación es considerable, la amplitud de la oscilación, para algunas frecuencias, aumenta como función del tiempo, de tal forma que la energía del oscilador aumenta de manera continua.

### 2.3.3 Comparación de la solución numérica y las aproximaciones analíticas.

Para estimar el intervalo de frecuencias en que es válido utilizar la aproximación a primer y segundo la hemos comparado con la solución numérica, en particular para la energía.

#### Comparación de la energía

Las aproximaciones analíticas, a primer y segundo orden, se comparan con la solución numérica durante 300 períodos correspondientes al sistema no perturbado. Esto se hizo para que los experimentos en el régimen impulsivo, experimenten más de una fase completa de la perturbación.

Los cocientes iniciales, entre las frecuencias de perturbación y del oscilador, están en el intervalo de  $10^{-3} \leq \omega_p/\omega_0 \leq 10^3$ . La posición y velocidad iniciales, para la solución numérica son:  $x=0$  y  $\dot{x}=1$ .

Las soluciones aproximadas se obtienen sustituyendo los valores de  $\omega_0, \omega_p, \epsilon$  y  $t$  en las ec. (3-19) y (3-20), para la solución a primer orden; y en (3-21) y (3-22) a segundo orden.

En las Fig. 2.10 y 2.11, se presentan los cambios en la energía por período de oscilación, como función del cociente  $\omega_p/\omega_0$ . Los resultados se muestran después de cada 30 períodos del perturbador, hasta llegar a los 300. Este se encuentra indicado en el lado derecho de cada gráfica. En la Fig. 2.10 se presentan los resultados para  $\epsilon=1$  y  $0.1$ , y en la Fig. 2.11 para  $\epsilon=0.01$  y  $0.001$ .

Los diferentes estilos de líneas de las Fig. 2.9 y 2.10, muestran la variación de la energía para la solución

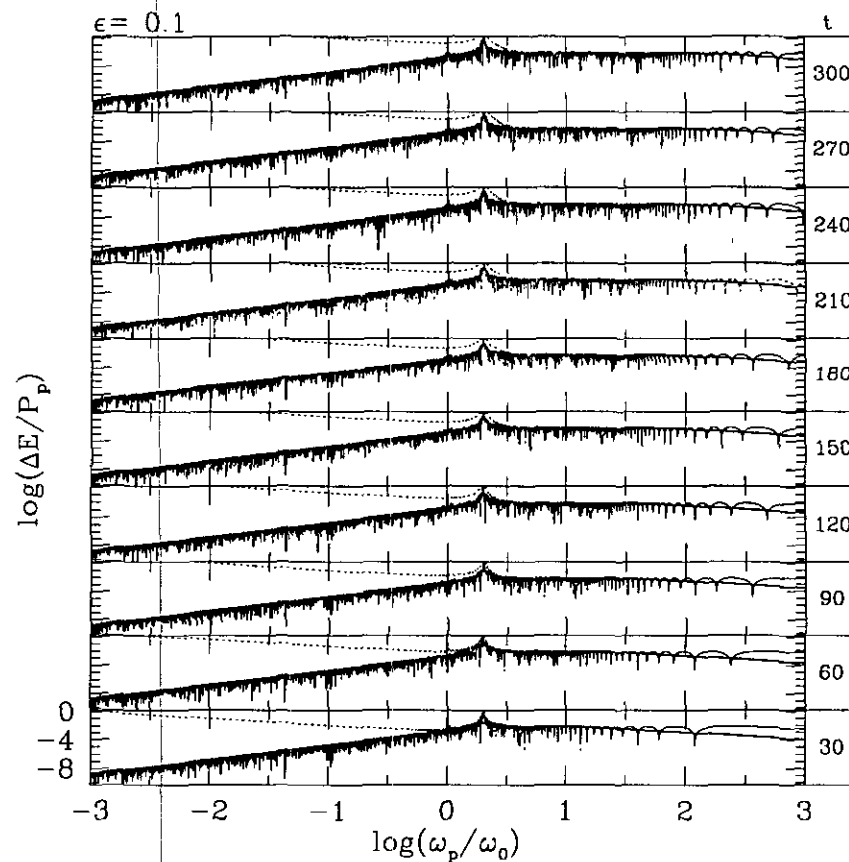
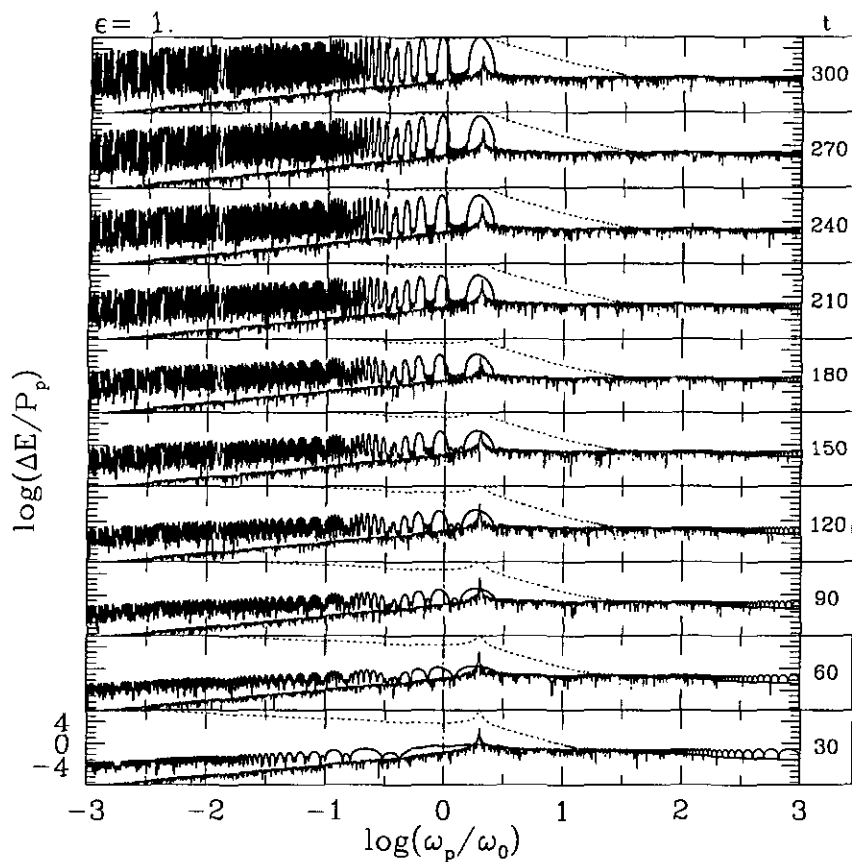


Fig. 2.9.— Incremento de la energía, por unidad de tiempo, para los valores de la amplitud de  $\epsilon=1$  y  $0.1$ , como función del cociente  $\omega_p/\omega_0$ , para el oscilador armónico perturbado periódicamente. Se muestran los resultados para la solución numérica (línea gruesa), y las aproximaciones analíticas, a primer (línea delgada continua) y segundo orden (línea punteada). Cada una de las gráficas corresponde al tiempo que se muestra en el recuadro del lado derecho.

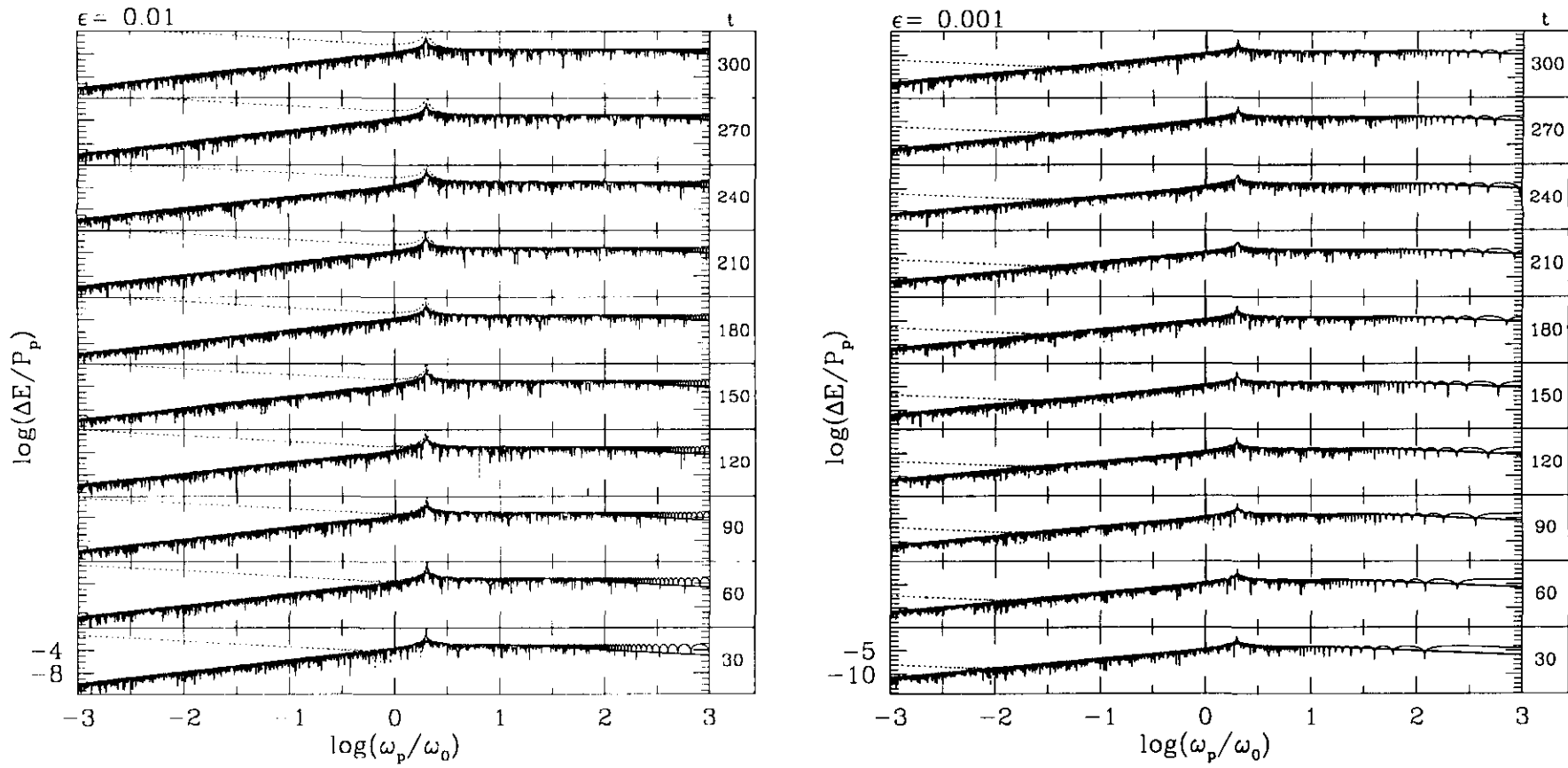


Fig. 2.10.— Incremento de la energía, por unidad de tiempo, para los valores de la amplitud de  $\epsilon=0.01$  y  $0.001$ , como función del cociente  $\omega_p/\omega_0$ , para el oscilador armónico perturbado periódicamente. Se muestran los resultados para la solución numérica (línea gruesa), y las aproximaciones analíticas, a primer (línea delgada continua) y segundo orden (línea punteada). Cada una de las gráficas corresponde al tiempo que se muestra en el recuadro del lado derecho.

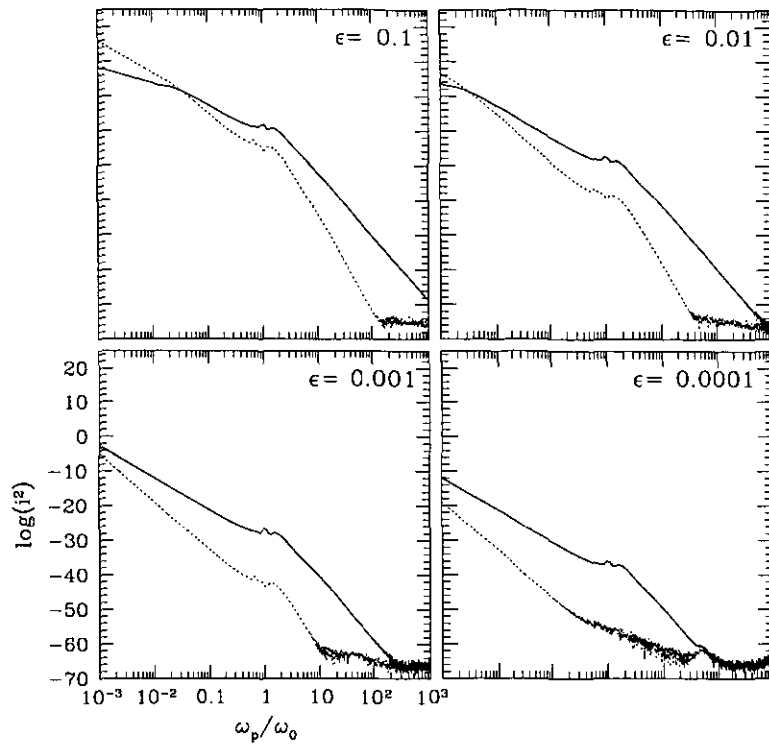


Fig. 2.11.— Comparación de las aproximaciones, a primer (línea sólida) y segundo orden (línea de puntos), con la solución numérica, con el parámetro de incompletitud  $i^2$  (ver texto para detalles). Se muestra la comparación para distintos valores de la amplitud de la perturbación  $\epsilon$ , la cual se indica en la parte superior derecha de cada panel.

numérica (línea continua gruesa) y las soluciones aproximadas, a primer y segundo orden (línea continua delgada y de puntos, respectivamente).

En todos los casos, las tres curvas tienen el mismo comportamiento en el régimen impulsivo ( $\omega_p/\omega_0 \rightarrow \infty$ ). En la región adiabática ( $\omega_p/\omega_0 \rightarrow 0$ ), las tres curvas difieren en su comportamiento para valores grandes de la amplitud de la perturbación.

Para  $\epsilon=1$ , la solución numérica presenta un comportamiento sumamente complejo, en particular si  $\omega_p/\omega_0 \rightarrow 0$ , donde la energía, en algunas frecuencias, aumenta su valor como función del tiempo. La solución a primer orden coincide con la solución numérica, para  $\log(\omega_p/\omega_0) \lesssim 0.5$ , y la solución a segundo orden para  $\log(\omega_p/\omega_0) \gtrsim 1.5$ . En este caso, como ya habíamos visto en la § 2.3.2, el oscilador experimenta transiciones en su amplitud de oscilación, así como de su energía como función del período de la perturbación (intermitencia).

Para  $\epsilon < 1$  la zona de convergencia entre las soluciones a primer y segundo orden, y la solución numérica, se extiende del régimen impulsivo hacia el adiabático, coincidiendo con el comportamiento del oscilador, que se obtiene numéricamente, en sus características más notables. Algunas de ellas son: la resonancia en  $\omega_p/\omega_0=2$ , la pendiente (de la solución numérica) y la magnitud de cambio en su energía.

En particular, la aproximación a primer orden para

$\epsilon \leq 0.1$ , coincide de manera satisfactoria con la solución numérica. En este caso la aproximación a segundo orden diverge del resultado numérico en la región adiabática. Esto se explica al examinar los coeficientes  $A_2(t)$  y  $B_2(t)$ , así como sus derivadas, que muestran términos de la forma  $\omega_p^{-m}$ , que para valores de  $m$  entre 2 y 6, que para  $\omega_p \rightarrow 0$ , tiene un comportamiento divergente. Este problema es conocido como el *problema del denominador pequeño*, que es lo que ocasiona el comportamiento divergente en las aproximaciones analíticas (ver § 2 y § 2.1b de Lichtenberg y Lieberman 1993). Este comportamiento, en las soluciones, a primer y segundo orden, muestra claramente las limitaciones de la teoría de perturbaciones.

Como ya hemos dicho, el incremento en la energía del oscilador es función de  $\epsilon$ . Para  $\epsilon=1$  el incremento de la energía está entre  $10^{-4}$  y  $10^{-1}$ , para  $\epsilon=0.1$  entre  $10^{-3}$  y  $10^{-9}$ , para  $\epsilon=0.01$  entre  $10^{-4}$  y  $10^{-9}$  y para  $\epsilon=0.001$  entre  $10^{-5}$  y  $10^{-12}$ . Para los valores de  $\epsilon < 1$ , el incremento en la energía para cocientes de las frecuencias  $\omega_p/\omega_0 < 2$ , es pequeña. Sin embargo, para  $\omega_p/\omega_0 > 2$ , la energía del oscilador cambia lentamente con el tiempo.

Como función del tiempo (ver Fig. 2.10 y 2.11), la solución a segundo orden diverge de la solución numérica. Por ejemplo, para  $\epsilon=0.01$ , el intervalo en que dicha aproximación converge en el régimen impulsivo hasta  $\log(\omega_p/\omega_0) \sim -0.4$ , para  $t=30$ , y del régimen impulsivo hasta  $\log(\omega_p/\omega_0) \sim 0.6$ , para  $t=300$ . Vemos que el in-



intervalo de convergencia para la solución a segundo orden disminuyó en 0.8 ordenes de magnitud en 270 unidades de tiempo.

El incremento de la energía, en la región adiabática, para todos los casos tiene un comportamiento aproximado de  $\Delta E \sim (\omega_p/\omega_0)^2 P_p$ .

**Comparación entre las soluciones**

Para dar una medida cuantitativa de la similitud entre las solución, aproximada, a primer y segundo orden, con la numérica se utilizó el parámetro de incompletitud,  $i^2$ , que nos permite comparar el comportamiento entre ambas soluciones durante el intervalo de tiempo considerado. Este parámetro se define de la siguiente forma (Binney y Spergel 1982),

$$i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \{\omega_0^2 [\Delta x^n(t_i)]^2 - [\Delta v^n(t_i)]^2\}}{\sum_{i=1}^N \{\omega_0^2 [x_{num}(t_i)]^2 - [v_{num}(t_i)]^2\}}, \quad (3-26)$$

donde N es el número de puntos muestreados donde se comparan las soluciones analíticas (a primer y segundo orden) y la numérica, en un intervalo de tiempo dado;  $\Delta x^n = x^n - x_{num}$  y  $\Delta v^n = v^n - v_{num}$ , con  $n = 1, 2$  el orden de la aproximación de que se trate. La ecuación (3-24) es una medida de la desviación cuadrática media entre la solución numérica y la solución analítica. Este procedimiento tiene mayor validez estadística de la que se obtiene al comparar sólo los puntos finales de cada solución.

El tiempo que se comparan las soluciones es de 2 veces el período de la perturbación ( $2 \times 2\pi/\omega_p$ ). El intervalo temporal entre los puntos de comparación está dado por,

$$\Delta t = \frac{2 \times \text{Período}}{N} = \frac{2 \times 2\pi}{N\omega_p}. \quad (3-27)$$

Los resultados de  $i^2$  para las aproximaciones, a primer y segundo orden (línea sólida y de puntos) se muestran en la Fig. 2.11. En cada uno de los paneles se muestran los resultados para los valores de  $\epsilon = 0.1, 0.01, 0.001$  y  $0.0001$ . El número de puntos para cada valor de  $\omega_p/\omega_0$  es de  $10^4$ . En esta figura se puede comparar, para cada valor de  $\epsilon$ , con los de las Fig. 2.9 y 2.10 para  $t \sim 30$ , porque el intervalo de comparación no abarca las 300 unidades de tiempo que se muestran en dichas figuras.

En la Fig. 2.11 hay más de 80 órdenes de magnitud en la variación de los valores de  $i^2$ . Esto puede parecer sospechoso, si consideramos que la precisión numérica con la que se realizan las operaciones sólo tiene 16 cifras significativas. En este caso, cada valor de  $i^2$  sólo depende de la solución numérica y de la solución analítica (a primer y segundo orden), para cada valor de  $\omega_p/\omega_0$ .

En la Fig. 2.11 vemos que la solución a segundo orden es la que menos se desvía de la solución numérica en el régimen impulsivo, porque es la que muestra los valores más pequeños para  $i^2$ . Los intervalos en que mejor convergen las soluciones analíticas, para cada valor de  $\epsilon$ , son:  $100 < \omega_p/\omega_0 < 1000$  para  $\epsilon = 0.1$ ,  $30 < \omega_p/\omega_0 < 1000$

para  $\epsilon = 0.01$ ,  $10 < \omega_p/\omega_0 < 1000$  para  $\epsilon = 0.001$  y  $0.3 < \omega_p/\omega_0 < 1000$  para  $\epsilon = 0.0001$ . Después de estos intervalos la solución a segundo orden diverge más rápido que la solución a primer orden. Sin embargo, sigue siendo la que mejor coincidencia tiene con la solución numérica.

La rápida divergencia de la solución a segundo orden se debe, como ya se menciona en la sección § 2.2.2, a la dependencia que tienen los coeficientes:  $A_1$  y  $B_1$  a primer orden; y  $A_2$  y  $B_2$ , a segundo orden, con la frecuencia de la perturbación. Los coeficientes a primer orden tienen una dependencia de  $\sim \omega_p^{-1}$  y  $\omega_p^{-2}$ , y a segundo orden  $\sim \omega_p^{-4}$  y de  $\omega_p^{-6}$ , por está razón es mayor la pendiente para la aproximación a segundo orden.

El comportamiento de ambas soluciones tiene cambios en sus pendientes alrededor de  $\omega_p/\omega_0=2$ , punto que habíamos identificado como una resonancia (ver §2.2.2). La pendiente de ambas curvas se vuelve plana en el intervalo de  $0.9 < \omega_p/\omega_0 < 2$ .

El cambio en la pendiente alrededor de  $\omega_p/\omega_0 \sim 1$ , es debido a cambios en el valor del cociente de las frecuencias.

Para determinar el comportamiento de un sistema de manera precisa utilizando la teoría de perturbaciones, es indispensable que la amplitud de la perturbación sea pequeña, y que el orden con el que se realice la aproximación sea suficientemente grande, para que el intervalo de convergencia sea mayor. Sin embargo, hay que ser cuidadosos, ya que se puede tener un comportamiento divergente de las series con las que se realiza la aproximación, como el que muestra la solución a segundo orden, si  $\omega_p/\omega_0 \rightarrow 0$ , o cuando los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  están en términos de  $\omega_p^{-m}$  para valores de  $m \gg 1$ .

Hemos estudiado el comportamiento del oscilador armónico forzado con una fuerza de marea periódica. Los cambios cuantitativos y cualitativos son función de la amplitud de la perturbación. Cuando la amplitud de la perturbación es grande, los cambios de la energía, en el régimen adiabático, crecen de manera no lineal con el tiempo. Cuando la amplitud de la perturbación es pequeña, su efecto sobre el oscilador se manifiesta por medio de resonancias. Dichos efectos están presentes en la evolución de un cúmulo globular, debido a que su interacción con el disco y el bulbo es periódica.

Hasta ahora, los modelos expuestos son demasiado sencillos, aunque de gran utilidad para entender el efecto de los choques de marea sobre las estrellas del cúmulo. Sin embargo, estos están limitados si se pretende involucrar todos los elementos que afectan un cúmulo real, de ahí la necesidad de buscar mejores modelos que nos ayuden a entender este proceso. Proponemos, como siguiente paso en nuestro estudio, analizar el fenómeno de los choques gravitacionales utilizando el problema de los tres cuerpos.

## 2.4 Aproximación con el Problema de Tres Cuerpos

En esta aproximación es posible considerar el potencial gravitacional de la Galaxia y del cúmulo sobre las estrellas de este, así como las variaciones periódicas asociadas a al período orbital del cúmulo alrededor de la Galaxia. En este contexto las estrellas se mueven bajo la influencia del potencial galáctico ( $\Phi_G$ ) y del cúmulo ( $\Phi_c$ ), que son representados como puntos masa. La masa de las estrellas se considera infinitamente pequeña respecto a la de la Galaxia ( $M_G$ ), y a la del cúmulo ( $M_c$ ), por tanto la fuerza de las estrellas sobre  $M_G$  y  $M_c$  es despreciable. El movimiento relativo entre el cúmulo y la Galaxia se resuelve como un problema de dos cuerpos (ver discusión y referencias en Boccaletti y Pucacco, 1996 § 4). Si el cúmulo se mueve en órbita circular alrededor de la Galaxia, las estrellas tienen una integral de movimiento llamada *Integral de Jacobi*<sup>4</sup>, que es de gran utilidad para parametrizar el comportamiento de sus órbitas.

Esta aproximación ha sido ampliamente explorada en el estudio de distintos sistemas astronómicos. Para el caso de los cúmulos globulares, con su implementación se han logrado importantes contribuciones en la comprensión de los efectos causados por el campo de marea. A continuación hacemos una breve revisión de algunos de ellos.

Hénon (1970) realiza un estudio numérico<sup>5</sup> de este problema. El reporta que las órbitas retrógradas (ver Fig. 2.12) son más estables que las directas, es decir, permanecen mayor tiempo ligadas al cúmulo.

Keenan e Innanen (1975) realizan un estudio numérico donde consideran a los cúmulos en órbitas circulares y elípticas, y a las estrellas en una distribución esférica alrededor del centro de masa del cúmulo. Ellos reportan que las órbitas más estables son las que se mueven en sentido retrógrado respecto al movimiento del cúmulo, con excentricidades menores a 0.5, y en órbitas de poca inclinación respecto al plano orbital Galaxia-cúmulo.

Jefferys (1976), partiendo nuevamente de esta aproximación, y utilizando la integral de Jacobi junto con el método de superficies de sección (ver Jefferys 1974), encuentra que el efecto del campo diferencial galáctico deforma a los cúmulos, haciéndolos prolatos u oblatos, según la posición del cúmulo en la Galaxia. Además, reafirma que las órbitas retrógradas son más estables que las directas.

Innanen (1979) calcula la aceleración que experimenta una estrella en un marco de referencia no inercial, considerando que la órbita del cúmulo es circular. El reporta que el sentido de la aceleración de Coriolis impone distintos radios límites para las órbitas directas ( $r_p$ ) y las

retrógradas ( $r_r$ ). Estos límites varían entre  $r_r/r_p \approx 1.9$  y  $r_r/r_p \approx 2.1$ , donde el primer valor le corresponde a una estrella en órbita radial y el segundo a una en órbita circular. El cociente entre los radios límites, como función de la excentricidad del cúmulo está dado por,

$$\frac{r_r}{r_p} = \left[ \frac{5 + e + 2(4 + e)^{1/2}}{3 + e} \right]^{2/3} \quad (4-1)$$

Innanen (1979) menciona que la aceleración de Coriolis es despreciable la mayor parte del tiempo (para las órbitas del cúmulo muy excéntricas), pero que aún así, son las estrellas en órbitas retrógradas las que permanecen más ligadas al cúmulo.

Keenan (1981a y 1981b) retoma el análisis utilizando las superficies de sección y la integral de Jacobi, tanto para el caso circular como para el elíptico (ver Boccaletti y Pucacco, 1996 § 4.7). El confirma que las órbitas retrógradas son las que más tiempo sobreviven en las regiones externas del cúmulo en presencia de la fuerza de marea. Además encuentra que el radio límite de los cúmulos es más pequeño que el estimado por King (1962),  $r_t(\text{Keenan}) \sim 0.7 r_t(\text{King})$ . Como parte de su análisis reporta que cuando la energía de las estrellas (respecto al cúmulo) es mayor que cero, éstas escapan definitivamente del cúmulo. Confirma, nuevamente, que las estrellas en planos orbitales muy inclinados (respecto al plano cúmulo-Galaxia), y en órbitas directas, son las que tienen mayor probabilidad de escapar.

En resumen, el estudio de los choques gravitacionales por medio de esta aproximación ha ayudado a entender este fenómeno. Contando entre sus resultados más importantes los siguientes: los cúmulos se deforman debido al campo de marea galáctico; las estrellas en órbitas retrógradas son más estables que las que se encuentran en órbitas directas; el radio límite para las estrellas en órbitas retrógradas es el doble que para las directas; y que las estrellas con energía de ligadura, respecto al cúmulo, mayor o igual a cero escapan definitivamente del cúmulo.

Como en este trabajo nos interesa entender como ocurre en detalle la inyección de energía en las regiones internas del cúmulo, hemos planteado esta aproximación para estudiar dicha inyección como función de la amplitud de la perturbación y del período de las estrellas dentro del cúmulo. A continuación presentamos la implementación del problema, continuando con la presentación y discusión de los resultados, finalizando con las conclusiones.

### 2.4.1 Implementación numérica del problema

Consideremos un sistema de coordenadas anclado en el centro de la Galaxia. El cúmulo se encuentra en órbita alrededor de ésta, en el plano  $Z=0$ . El movimiento de las estrellas está determinado por el potencial de la Galaxia ( $\Phi_G$ ) y del cúmulo ( $\Phi_c$ ). Las ecuaciones de movimiento para la estrella son:

$$\ddot{X}_s = -\frac{\partial \Phi_c}{\partial x_s} - \frac{\partial \Phi_G}{\partial X_s},$$

<sup>4</sup>El nombre es en honor a Jacobi que en 1823 formuló el problema de los tres cuerpos restringido, aunque parece que Euler ya había mencionado su existencia desde 1772. Ver introducción del libro *Celestial Mechanics* de H. Poincaré, por D.L. Goroff (1991).

<sup>5</sup>Cuando nos referimos a un estudio numérico significa que las ecuaciones de movimiento se resuelven de manera numérica porque no se conoce una solución analítica.

$$\begin{aligned}\dot{Y}_s &= -\frac{\partial\Phi_c}{\partial y_s} - \frac{\partial\Phi_G}{\partial Y_s}, \\ \dot{Z}_s &= -\frac{\partial\Phi_c}{\partial z_s} - \frac{\partial\Phi_G}{\partial Z_s},\end{aligned}\quad (4-2)$$

donde  $(x_s, y_s, z_s)$  y  $(X_s, Y_s, Z_s)$  son las posiciones de la estrella, respecto al cúmulo, y a la Galaxia, respectivamente. El movimiento del cúmulo está determinado por

$$\begin{aligned}\ddot{X}_c &= -\frac{\partial\Phi_G}{\partial X_c}, \\ \ddot{Y}_c &= -\frac{\partial\Phi_G}{\partial Y_c},\end{aligned}\quad (4-3)$$

con  $\Phi_G$  y  $\Phi_c$  dados por

$$\Phi_G = \frac{GM_G}{R_{c,s}} y \quad (4-4)$$

$$\Phi_c = \frac{GM_c}{r_s}, \quad (4-5)$$

respectivamente. La variable  $R_{c,s}$  es la distancia de la Galaxia al cúmulo o a la estrella, según sea el caso. La relación vectorial entre ellas está determinada por  $r_s = |\mathbf{R}_c - \mathbf{R}_s|$ .

#### 2.4.2 Condiciones Iniciales

Las estrellas de prueba se lanzan inicialmente en órbitas circulares alrededor del cúmulo, en planos definidos por las variables  $\theta$  y  $\phi$ . Nos referimos a estos planos como los *Planos Estelares*, PE, que se define por los ángulos:  $\theta$ , que es el ángulo entre el plano orbital cúmulo Galaxia y PE; y  $\phi$ , que es el ángulo entre la intersección de estos planos con la dirección de la Galaxia en  $t=0$ , es decir, con el eje  $y$  (ver Fig. 2.12).

El radio de cada órbita está parametrizado por su frecuencia angular de rotación ( $\omega_s$ ), que para el caso kepleriano está dada por

$$\omega_s = (GM_c)^{1/2} r_{cs}^{-3/2}. \quad (4-6)$$

donde  $r_{cs}$  es el radio inicial de la órbita estelar respecto al centro del del cúmulo. El sistema de unidades es tal que  $G=1$ ,  $M_c=1$ ,  $M_G=1 \times 10^4 M_c^6$  y la unidad de longitud como el radio mediano de masa,  $r_h=1$ . De lo anterior se tiene que  $\omega_s = r_{cs}^{-3/2}$ .

Para cada valor de  $\omega_s$  se lanzan 40 estrellas distribuidas de manera uniforme en fase orbital  $\psi$ . El cambio final en la energía es el promedio de las 40 fases de cada frecuencia orbital. De está forma se garantiza que el resultado sólo sea función de la frecuencia inicial de la orbital de la estrella.

En la Tabla I se muestran los valores adoptados para  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$ .

Nuestros experimentos están divididos en dos series, cada uno corresponde al sentido de giro en que se lanzan

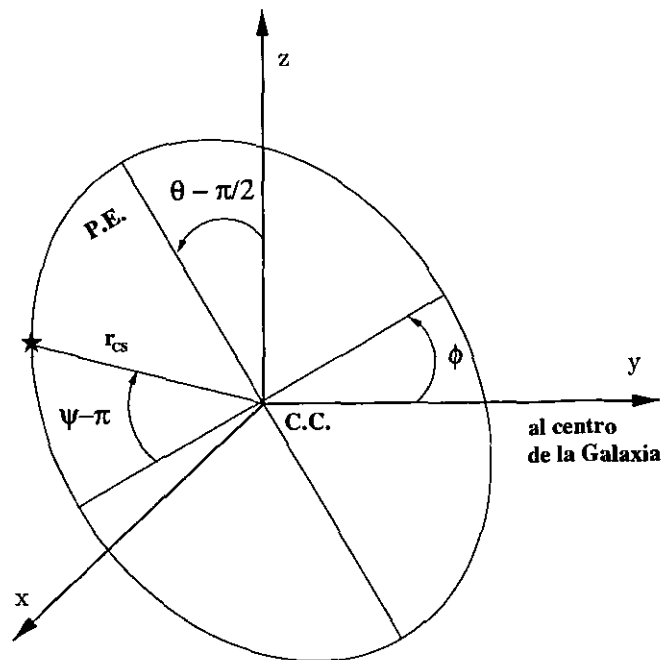


Fig. 2.12.— Plano de las condiciones iniciales para las estrellas prueba, respecto al centro del cúmulo. El Plano Estelar (P.E.), queda definido con los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . La fase de las estrellas en P.E. con  $\psi$ .

las estrellas, respecto a la dirección de movimiento del cúmulo. En un caso, el vector de momento angular en la componente  $z$ , ( $\omega_z^z$ ) es paralelo (directo) al vector del momento angular del cúmulo,  $\Omega^c$ , y en el otro caso es antiparalelo (retrógrado, ver Fig. 2.12).

Hemos considerado cuatro valores de la excentricidad para las órbitas de los cúmulos, para el perigaláctico que hemos considerado, 2 kpc<sup>7</sup>. Los valores de la excentricidad, en nuestros experimentos, se indican en la primera columna de la Tabla II. Con estos valores se tiene un amplio intervalo para la variación temporal de la fuerza de marea, desde un valor constante para  $e=0.0$ , hasta la variación más extrema, con  $e=0.75$ .

En la Fig. 2.14, se muestran las órbitas de los cúmulos para cada excentricidad considerada. En la Fig. 2.15 se muestra el intervalo de variación de la fuerza de marea para estas órbitas.

La posición inicial de los cúmulos, en nuestras simulaciones es el apogaláctico de su órbita. Ahí es el lugar donde se mide y reporta la energía de ligadura de las estrellas, después de completar cada período orbital. El tiempo de integración para cada cúmulo es de 10 períodos orbitales.

En la Tabla II se muestran los valores de  $R_{peri}$ ,  $R_{apo}$ , y el período orbital del cúmulo, para las órbitas circulares y

<sup>6</sup>En este caso sólo se considero la masa del bulbo galáctico, dentro de 2 kpc del centro.

<sup>7</sup>Sólo hemos considerado un valor para la amplitud máxima de la perturbación, porque en este caso sólo queremos entender el efecto de la variación periódica de la fuerza de marea. Si cambiamos el valor del perigaláctico, sólo esperamos una variación en la amplitud del efecto de los choques.

TABLA I  
CONDICIONES INICIALES

Variable	Intervalo de Variación	Incremento	Número de casos
$\theta$	$0 \leq \theta \leq \pi/2$	$\pi/6$	4
$\phi$	$0 \leq \phi \leq 2\pi$	$\pi/3$	6
$\psi$	$0 \leq \psi \leq 2\pi$	$\pi/20$	40

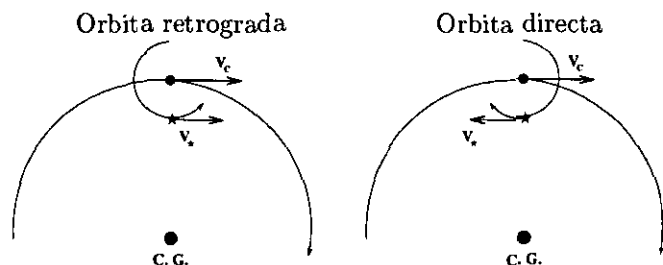


Fig. 2.13.— Dirección inicial de la velocidad de las estrellas respecto a la dirección de movimiento del cúmulo.

elípticas ( $P_{cl}$ ). También se muestra el tiempo de CPU en el que se realizó cada experimento. La solución del sistema se obtiene de forma numérica, integrando con el método de Bulirsch-Stoer, con un programa en FORTRAN en doble precisión. Todos los experimentos se realizaron en una máquina *Origin 2000*, de Silicon Graphics.

### Energía de Jacobi

Para estimar la confiabilidad del integrador se mide la conservación de la energía de Jacobi de las estrellas, que es una constante de movimiento cuando el cúmulo se mueve en órbita circular.

Se integraron 4 órbitas circulares con radios correspondiente a cada apogaláctico de las órbitas elípticas que hemos considerado. En cada una de ellas se evalúa el cambio en la energía de Jacobi de cada una de las estrellas.

La energía de Jacobi está dada por,

$$E_J = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_s^2 + \Phi + \frac{1}{2} |\Omega_c \times \mathbf{R}_s|^2. \quad (4-7)$$

A continuación presentamos los resultados de cada una de las integraciones y de la conservación de la energía de Jacobi.

#### 2.4.3 Resultados

El incremento en la energía de las estrellas<sup>8</sup>, para cada valor de la frecuencia, se calcula en el apogaláctico del

<sup>8</sup> Cuando nos referimos a la energía de las estrellas estamos hablando de la energía respecto al cúmulo

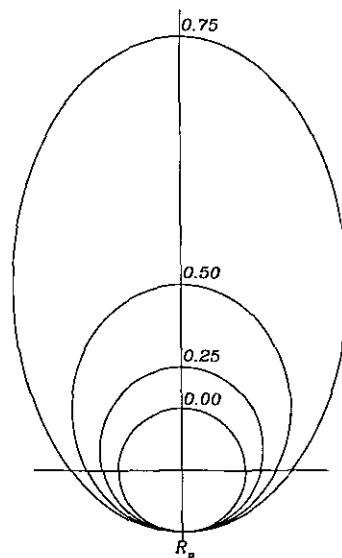


Fig. 2.14.— Órbitas con un sólo  $R_{peri}$  de un cúmulo alrededor de la Galaxia.

cúmulo de la siguiente forma,

$$\Delta E(\omega_s) = \frac{1}{N_{orb}} \sum_{j=1}^{N_{orb}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E^{i,j} - E_0^i) \right], \quad (4-8)$$

donde  $N$  es el número de estrellas en órbita circular alrededor del centro del cúmulo, con frecuencia angular de rotación  $\omega_s$ ,  $N_{orb}$  es el número de fases orbitales consideradas (40 en este caso),  $E_0^i$  es la energía promedio de la  $i$ -ésima estrella, después del primer período de su órbita alrededor del cúmulo<sup>9</sup>.  $E^{i,j}$  es el promedio de la energía de las estrellas en el  $j$ -ésimo apogaláctico del cúmulo. La energía de cada estrella respecto al cúmulo está dada por,

$$E_s = \frac{1}{2} v_{cs}^2 - \frac{M_c}{r_{cs}}, \quad (4-9)$$

donde  $v_{cs}$  y  $r_{cs}$  se refieren a la velocidad y distancia de la estrella respecto al cúmulo.

<sup>9</sup> Esto se hace para que las estrellas relajen sus condiciones iniciales.

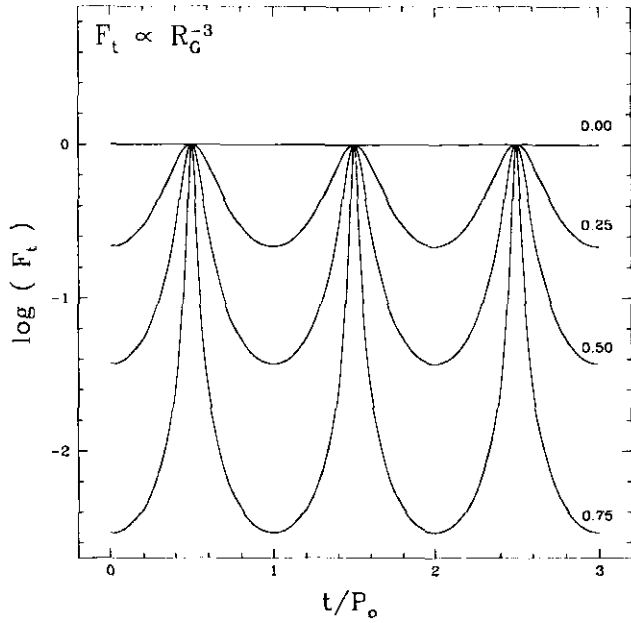


Fig. 2.15.— Variación temporal de la fuerza de marea galáctica como función de la excentricidad de su órbita. El tiempo se normalizó respecto al los período orbital de cada cúmulo.

#### 2.4.4 Órbitas circulares

Las órbitas circulares del cúmulo se utilizan para evaluar la variación de la energía de Jacobi, y de la energía de ligadura, para las estrellas del cúmulo. En este caso es sólo la parte estática del campo de marea la que actúa sobre las estrellas.

Ambas energías, de ligadura y la de Jacobi, se reportan cada vez que el cúmulo completa un período orbital (ver Fig. 2.16 y 2.17).

#### Problema restringido

El problema restringido es el más sencillo de estudiar en el problema de tres cuerpos. En este problema las estrellas se mueven en el mismo plano que define el cúmulo en su órbita alrededor de la Galaxia,  $PE(\theta=0, \phi)$ .

En la Fig. 2.16 se muestra la variación en la energía de Jacobi como función de la distancia de las estrellas al centro del cúmulo. En la parte derecha se indica el período orbital correspondiente. Por sencillez, sólo hemos graficado los resultados de las órbitas más cercanas y de las más alejadas del centro galáctico (ver pie de Figura). En esta figura vemos que la energía de Jacobi se conserva dentro de la precisión numérica<sup>10</sup> con que se realizan las operaciones durante la integración.

En la Fig. 2.16 podemos ver que el comportamiento

del integrador es aceptable, porque la conservación de la energía de Jacobi es del orden de la precisión numérica con la que se está trabajando ( $\sim 10^{-15}$ ), que como veremos a continuación, es varios órdenes de menor que los cambios producidos por los choques de marea.

#### Energía de ligadura

En la Fig. 2.17 se muestra el incremento de la energía de ligadura para las estrellas del cúmulo, después de cada período orbital. Cada línea es el resultado de cada uno de los radios galactocéntricos que hemos considerado (ver pie de figura). En esta figura se ve que el incremento en la energía de las estrellas, es mayor para los cúmulos en órbitas cercanas al centro galáctico. El comportamiento entre las órbitas directas y las retrógradas es muy parecido. Al parecer no se establece un radio límite, al menos en el intervalo radial que se muestra. Es interesante hacer notar que no hay un incremento para la energía del cúmulo como función del tiempo.

#### 2.4.5 Órbitas elípticas

En las gráficas de las Fig. 2.17 a la 2.19, se muestra el incremento de la energía de ligadura de las estrellas respecto al cúmulo, como función del parámetro  $\beta_e^*$ , que se define como,

$$\beta_e^* = 2 \frac{R_p \omega_s}{V_p} \Delta t^f, \quad (4-10)$$

donde  $\Delta t^f$  es una fracción del período orbital, en la que  $F_t$  varía 0.1 dex, de su magnitud (ver Fig. 2.15). Esto nos da una medida de la rapidez con la que cambia la fuerza de marea en cada una de las órbitas.

Los valores de  $\Delta t^f$  para cada excentricidad que hemos considerado ( $e=0.25, 0.5, \text{ y } 0.75$ ) son: 0.32, 0.118 y 0.036, respectivamente.

Cada valor de  $\Delta E$  corresponde al promedio de las 960 estrellas que tienen la misma frecuencia angular de rotación alrededor del cúmulo, y que provienen de los cuatro valores de  $\theta$ , 6 de  $\phi$  y las 40 fases iniciales.

En estas gráficas hemos incluido las correcciones propuestas por Spitzer(1958), y por Gnedin y Ostriker (1997), utilizando la siguiente relación,

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{4}{3} \left( \frac{GM}{V_{\text{peri}} R_{\text{peri}} P^2} \right)^2 r^2 A_{s,w}(\beta_e^*) \xi(R_{\text{peri}}) \lambda(e), \quad (4-11)$$

donde  $\xi(R_{\text{peri}})$  es función de la distribución de masa de la Galaxia, que en el caso de una masa puntual es igual a la unidad (Aguilar, Hut y Ostriker 1988). La corrección,  $\lambda(e)$ , se introduce con la finalidad de reproducir la variación temporal de la fuerza de marea en una órbita elíptica; y básicamente es el cociente de los valores que tiene en el perigaláctico y apogaláctico de su órbita. Este factor está dado por Aguilar, Hut y Ostriker (1988,

<sup>10</sup>Al inicio de esta sección mencionamos que las integraciones se hicieron en doble precisión, lo que nos da la posibilidad de tener 16 cifras significativas en una operación de punto flotante.

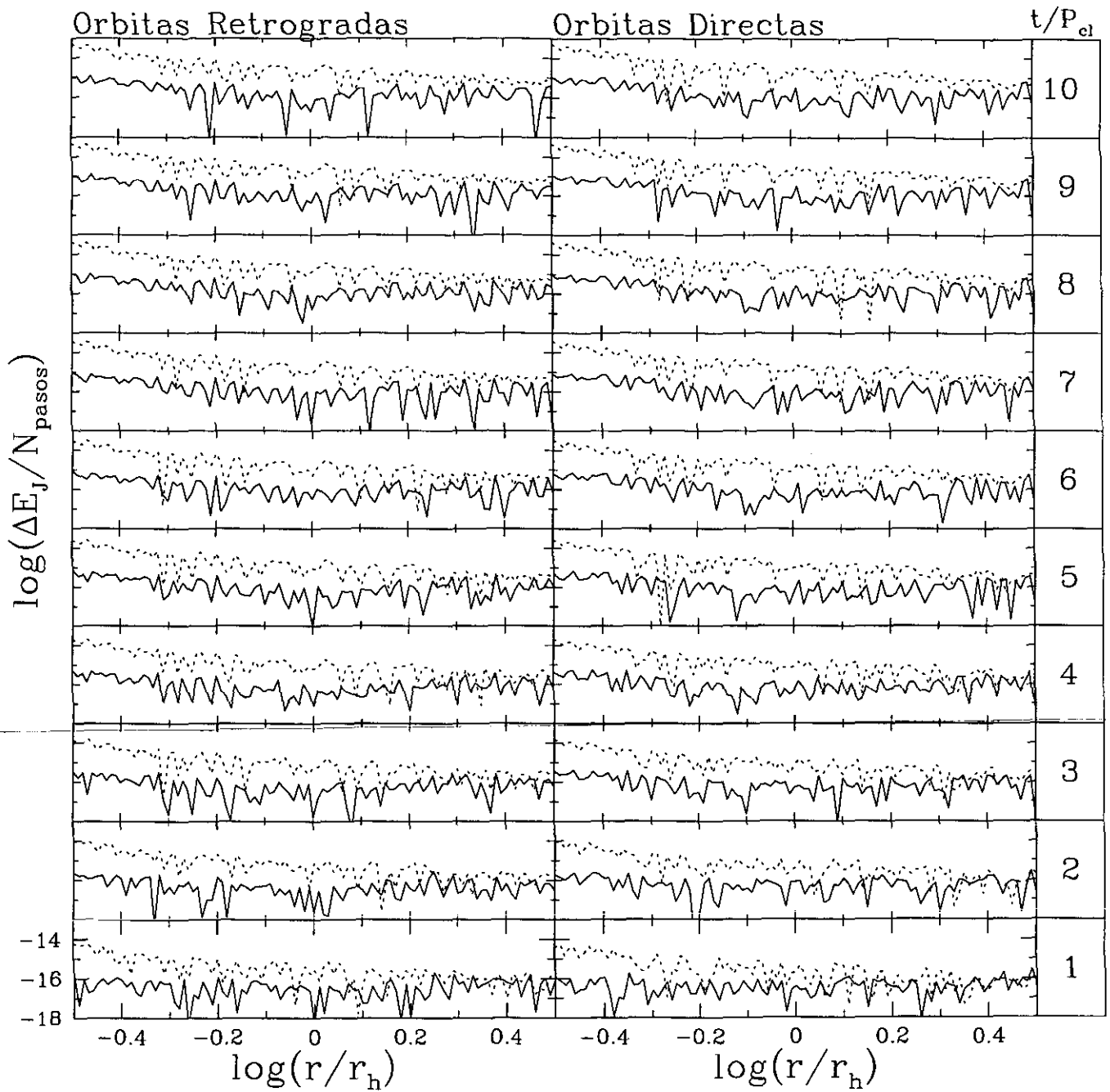


Fig. 2.16.— Incremento de la energía de Jacobi por paso de integración. Por claridad sólo hemos graficado los resultados para las órbitas circulares con radios de 2 kpc (línea sólida) y 14 kpc (línea de puntos). En este caso se ha normalizado el valor de la energía de Jacobi, al número de pasos en cada uno de los casos.

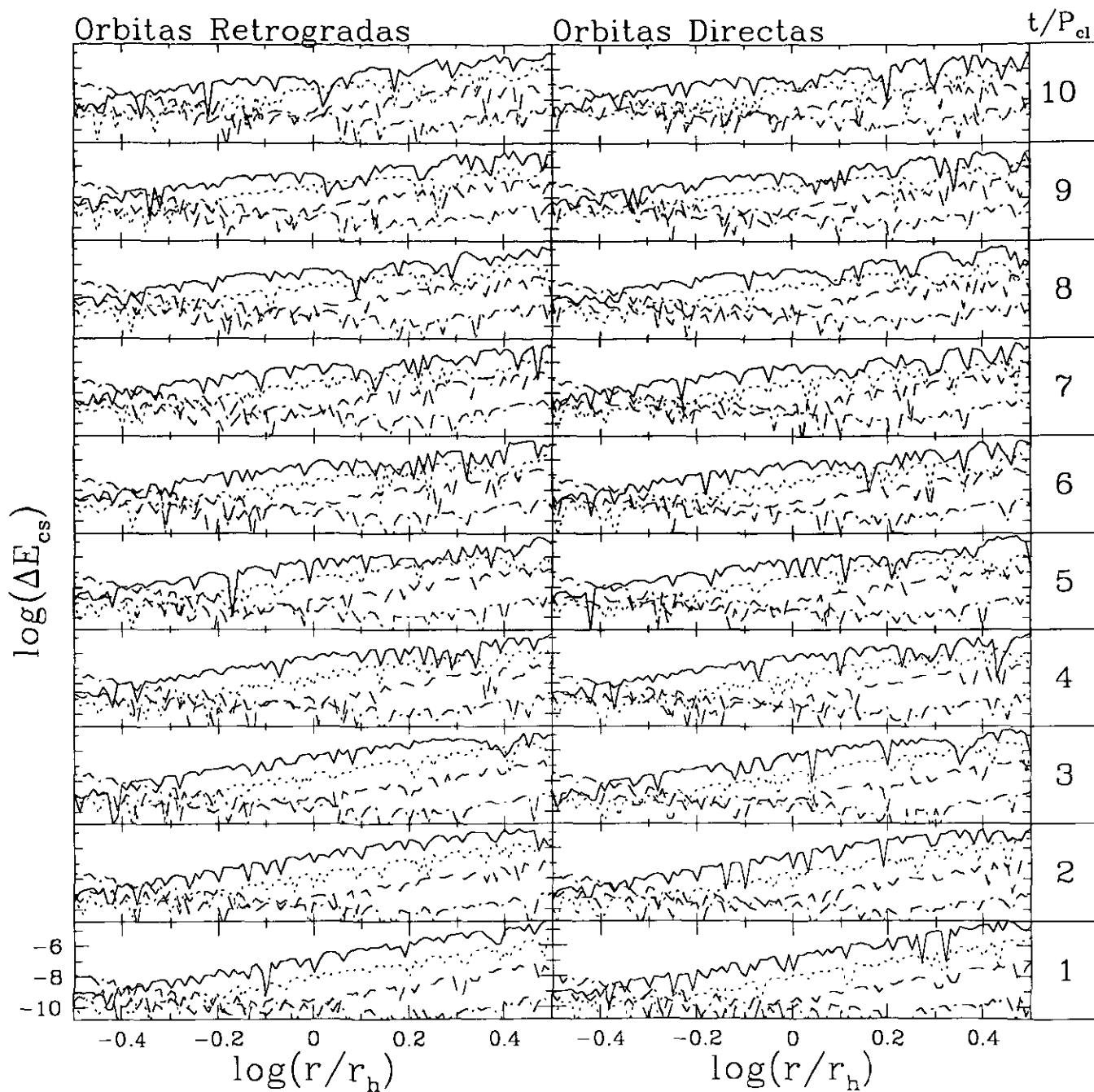


Fig. 2.17.— Incremento en la energía de ligadura para las estrellas del cúmulo en órbita circular. Las línea sólida, la de puntos, la de trazo y la de trazo y punto, corresponden a los radios de las órbitas de 2, 3.3, 6 y 14 kpc. Vemos que el efecto de la Galaxia es mayor para los cúmulos más cercanos al centro, disminuyendo su amplitud conforme aumenta su radio.

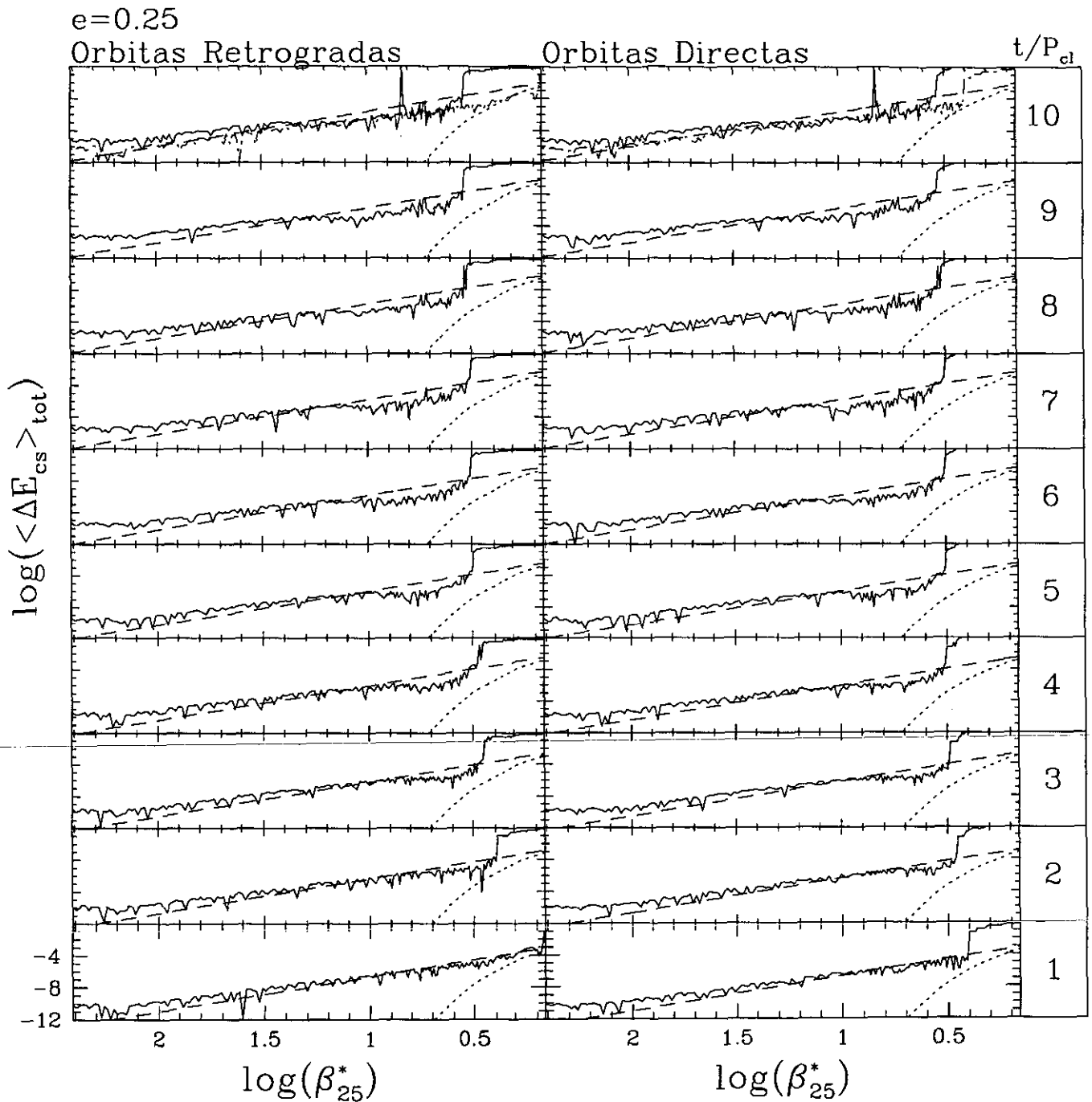


Fig. 2.18.— Incremento en la energía de ligadura para las estrellas del cúmulo en órbita excéntrica,  $e=0.25$  (línea continua). La línea de puntos es la corrección de Spitzer y la de trazo largo la de Weinberg. En el panel superior ( $t/P_{cl}=10$ ) se comparan los resultados para el primer y el último período. Ver texto para discusión.



TABLA II  
PARÁMETROS PARA LAS ÓRBITAS EXCÉNTRICAS Y LAS CIRCULARES DE REFERENCIA.

$e$	$R_{\text{peri}}^a$	$R_{\text{apo}}^a$	$P_{\text{cir}}^a$	$CPU_{\text{cir}}(\text{hrs})$	$P_{\text{cl}}^b$	$CPU_{\text{excent}}(\text{hrs})$
0	400	400	502	320	502	320
0.25	400	666.6	1081.4	360	773.8	328
0.5	400	1200	2617.0	872	1421.6	496
0.75	400	2800	9308.8	1700	4021.0	1460

<sup>a</sup>Estas cantidades están en unidades del  $r_h$ .

<sup>b</sup>La unidad de tiempo es de  $1 \times 10^5$  a.

referidos en adelante como AHO),

$$\lambda(e, R_{\text{peri}}) = \left[ \frac{M(R_{\text{apo}})}{M(R_{\text{peri}})} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 - 1 \right]^2. \quad (4-12)$$

En éste caso  $M_{\text{peri}} = M_{\text{apo}}$ , por lo que sólo se tiene la dependencia en la excentricidad. Entonces (4-12) se puede escribir como

$$\lambda(e) = \left[ \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^3 - 1 \right]^2. \quad (4-13)$$

Sustituyendo las ec. (4-12) y (4-13) en la ec. (4-11), tenemos,

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{4}{3} \left( \frac{GM}{V_{\text{peri}} R_{\text{peri}}^2} \right)^2 r^2 A_{s,w}(\beta_e^*) \lambda(e), \quad (4-14)$$

donde  $A_{s,w}$ , indica si se trata de la corrección de Spitzer o de Weinberg, respectivamente.

A continuación hacemos una discusión de los resultados para cada valor de la excentricidad que hemos considerado. Finalmente damos una visión general del fenómeno.

#### Caso $e=0.25$

En la Fig. 2.18 se muestra el incremento en la energía de ligadura de las estrellas como función del parámetro  $\beta_{25}^*$ . En cada panel se muestra le incremento en cada período orbital. Nuestros resultados están graficados con línea sólida delgada, la aproximación de Spitzer con la línea de trazo corto y la de Weinberg con la línea de trazo largo. Las dos últimas dadas por la ecuación (4-14).

Lo primero que notamos en la Fig. 2.18, es que el radio límite,  $r_{\text{lim}}$  (donde  $\Delta E \rightarrow 0$ ) se establece desde el primer período orbital, para las órbitas directas. Los radios límites para las órbitas directas y retrógradas son semejantes después del quinto período orbital. En general, el comportamiento entre las órbitas directas y retrógradas es muy semejante para tiempos mayores a  $5P_{\text{cl}}$ .

En este caso, la perturbación transcurre de manera suave (adiabática) para casi todas las estrellas del cúmulo. El comportamiento es muy parecido al de la órbita circular (ver Fig. 2.17, línea continua). La pendiente de ambas curvas (directas y retrógradas) es la misma

para casi todo el intervalo considerado. En el intervalo  $0.4 < \log \beta_{25}^* < 0.5$ , para  $t/P_{\text{cl}} > 6$ , la curva parece adquirir una pendiente mayor, efecto que apenas se nota.

En este caso vemos que la aproximación de Spitzer (línea de puntos) no coincide con nuestros resultados. Sin embargo, parece tener la pendiente adecuada en el intervalo  $0.4 < \log \beta_{25}^* < 0.5$ , pero un orden de magnitud menor. La aproximación de Weinberg (línea de trazo corto), en general, parece coincidir con nuestros resultados, aunque las pendientes no coinciden completamente.

En el panel correspondiente a  $t/P_{\text{cl}}=10$ , la línea de punto y trazo corresponde a los resultados del primer período ( $t/P_{\text{cl}}=1$ ). Ahí se puede comparar directamente ambas soluciones, para ver si existe un incremento general en la energía del cúmulo. En este caso vemos que no hay un incremento general en la energía, destacando el cambio en la pendiente en el intervalo antes mencionado  $0.4 < \log \beta_{25}^* < 0.5$ .

Finalmente, notamos que las curvas muestran cierta estructura, en particular, algunos picos que se pueden deber a resonancias entre  $\omega_s$  y alguna frecuencia instantánea de la perturbación. Sin embargo, estos picos no aparecen en todos los períodos del cúmulo.

#### Caso $e=0.5$

En la Fig. 2.19 se muestran los resultados para el cúmulo en órbita elíptica, con excentricidad  $e=0.5$ . El significado de las líneas es el mismo que en la Fig. 2.18. Notamos que el  $r_{\text{lim}}$  es sistemáticamente menor para las órbitas directas, que para las retrógradas, aunque después de  $t/P_{\text{cl}}=7$ , ambas convergen a un mismo valor, alrededor de  $\log \beta_{50}^*=0$ .

Los resultados de la Fig. 2.19 muestran dos tipos de comportamientos, el primero entre  $0 < \log \beta_{50}^* < 0.3$ , y el segundo para  $\log \beta_{50}^* > 0.3$ . La pendiente en el primer intervalo es mayor que en el segundo intervalo, tanto para las órbitas directas como para las retrógradas. En el primer intervalo el comportamiento parece seguir la forma de la aproximación de Spitzer (línea de puntos), en ambos casos, directo y retrógrado. Para el caso directo el intervalo se extiende hasta valores de  $\log \beta_{50}^* \sim 0.4$ . En el segundo intervalo se muestra un comportamiento muy

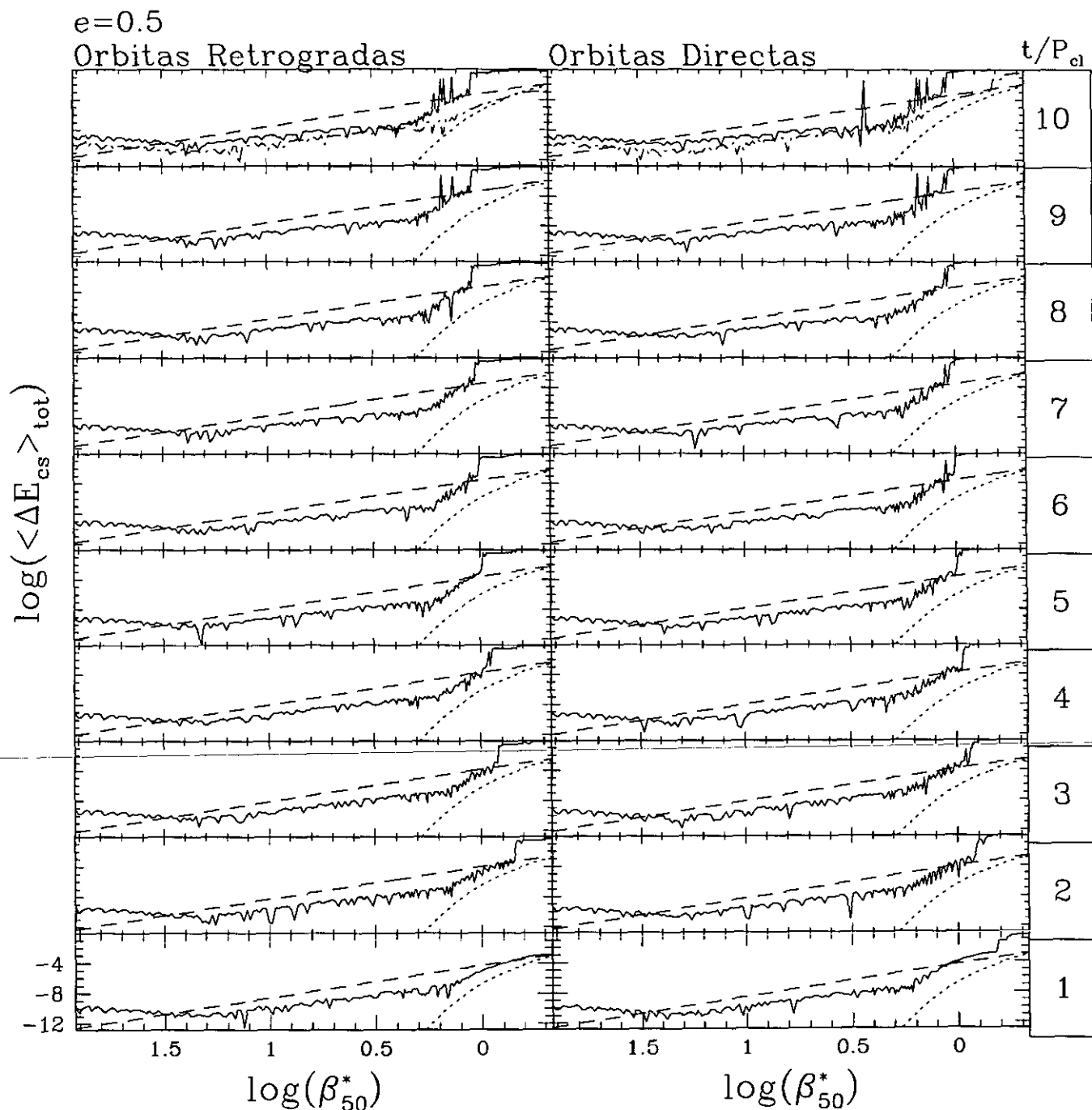


Fig. 2.19.— Incremento en la energía de ligadura para las estrellas del cúmulo en órbita excéntrica,  $e=0.5$  (línea continua). La línea de puntos es la corrección de Spitzer y la de trazo largo la de Weinberg. En el panel superior ( $t/P_{cl}=10$ ) se comparan los resultados para el primer y el último período. Ver texto para discusión.

diferente, más parecido a la aproximación de Weinberg (línea de trazos).

Nuevamente, en el panel final ( $t/P_{cl}=10$ ), se comparan los resultados finales con el primer período. Vemos que el incremento en la energía es mayor que para las órbitas directas. Esto se nota claramente en el intervalo,  $0.4 > \beta_{50}^* > 0$ .

Para los cúmulos en órbitas directas, el incremento de la energía ocurre desde el primer período orbital, mientras que para las retrógradas aumenta en cada período. Si contrastamos la manera como aumenta la energía entre el caso retrógrado y el directo, se puede decir que en las órbitas retrógradas el campo de marea realiza un trabajo secular, como función del tiempo, que después de 10 períodos orbitales del cúmulo, es comparable al incremento que experimentan en un período las órbitas directas.

#### Caso $e=0.75$

En la Fig. 2.20 se muestran los resultados para el cúmulo en órbita elíptica con excentricidad  $e=0.75$ , el significado de las líneas es el mismo que en las Fig. 2.17 y 2.18.

Como en los casos anteriores ( $e = 0.25$  y  $0.5$ ), el  $r_{lim}$  primero se establece en las órbitas directas. El radio límite es semejante, para órbitas directas y retrógradas, después de  $t/P_{cl} = 6$ .

Igual que en el caso anterior ( $e=0.5$ ) se tienen dos tipos de comportamientos, diferenciados por la pendiente de sus curvas. El primer intervalo es,  $-0.5 < \log \beta_{75}^* < -0.1$ , y el segundo  $\log \beta_{75}^* > -0.1$ . La diferencia entre ambos comportamientos está claramente marcada. Para el primer intervalo los resultados son muy parecidos a la aproximación de Spitzer. La aproximación de Weinberg no coincide en ningún intervalo con los resultados. De hecho para el segundo intervalo parece que no hay un cambio apreciable en la energía.

Nuevamente comparamos el resultado final con el del primer período en el panel de  $t/P_{cl}=10$ . Vemos que el comportamiento es muy parecido al de  $e=0.5$ , donde el incremento en la energía de las órbitas retrógradas se da de manera secular, mientras que en el caso directo, se da desde el primer período. Ambos cambios son comparables después de 10 períodos orbitales.

#### 2.4.6 Discusión

El incremento en la energía de nuestros experimentos, está relacionado con dos efectos: el primero se debe a la variación de la fuerza de marea,  $\Delta F_t$ , entre el perigaláctico y apogaláctico de la órbita, que en este caso van de 6.3 (para  $e=0.25$ ) a 250 (para  $e=0.75$ ); el segundo efecto está relacionado con la velocidad relativa con que las estrellas, dentro del cúmulo, ven este cambio (ver Fig. 2.15); efecto que se trató de incluir en la definición de  $\beta_e^*$ , al considerar el tiempo en que amplitud de la perturbación, cambia 0.1 dex, respecto al período orbital del cúmulo.

Para  $e=0.25$ , la variación de la amplitud es suave, por

está razón, el incremento en la energía de las estrellas es muy parecida a la que ocurre en una órbita circular (ver Fig. 2.14), es decir, aproximadamente adiabática.

En el caso extremo,  $e=0.75$ ,  $F_t$  varía rápidamente ( $\sim$  un orden de magnitud durante el 5% de su período orbital, ver Fig. 2.14.), que corresponde a algunas decenas de períodos orbitales para las estrellas en el intervalo  $-0.1 < \log \beta_{75}^* < -0.7$ . Esto produce una modulación de su amplitud, y después un cambio en su energía cuando el cúmulo pasa por  $R_{peri}$ . Llamaremos a este efecto cuasiadiabático. Una manera de visualizar este efecto es con los resultados del oscilador armónico forzado, que se muestran en la Fig. 2.6. Si consideramos una amplitud de la perturbación, en particular, para  $\epsilon=1$ , con  $\omega_p=0.01$  a  $0.7$ , al igual que la amplitud de  $F_t$  disminuye rápidamente, y las estrellas se quedan con una energía mayor hasta el siguiente período del cúmulo, donde ésta vuelve a aumentar.

Se puede hablar de 3 distintos comportamientos :

- Comportamiento *fuertemente adiabático*, como el de los intervalos;  $0.3 < \log \beta_{25}^* < 2.2$  y  $0.3 < \log \beta_{50}^* < 1.25$ . Donde el incremento de la energía transcurre sin producir grandes cambios. Esto se debe a que las estrellas ven a la perturbación variar de manera suave con el tiempo, es decir, el gradiente en variación temporal no es muy grande.
- Comportamiento *cuasiadiabático*, como el que se tiene en los intervalos  $-0.5 < \log \beta_{75}^* < -0.1$ ,  $0 < \log \beta_{50}^* < 0.3$ , y de manera apenas apreciable en  $0.3 < \log \beta_{25}^* < 0.5$ . Que se debe a los cambios en la energía orbital de las estrellas, que son  $\sim$  suaves. Estos cambios sólo ocurren durante la máxima aproximación entre las estrellas y Galaxia, continuando la estrella ligada al cúmulo pero con una energía mayor.
- Para  $e=0.75$ , este incremento ocurre en un intervalo temporal muy corto, en comparación al período de las estrellas. La amplitud de la perturbación varía casi 3 ordenes de magnitud, que desde el marco de referencia del cúmulo, es muy parecido al modelo que se presenta en la § 2.2.2, propuesto por Spitzer (1958).
- Comportamiento *neutro*, como el que ocurre en el intervalo,  $\log \beta_{75}^* > -0.1$ , donde las estrellas no parecen corresponder a ninguna de las dos formas anteriormente mencionadas. Las estrellas no presentan respuesta alguna a la perturbación de la Galaxia, por lo que su energía no experimenta ningún cambio.

La aproximación de Spitzer es la que mejor reproduce los resultados en el intervalo *cuasiadiabático*, excepto por un factor de escala (de 2 a 3 ordenes de magnitud), pero que cualitativamente es muy acertada.

La aproximación de Weinberg coincide mejor en la parte *fuertemente adiabática*, y en regiones internas del cúmulo; sin embargo, la pendiente entre los resultados y

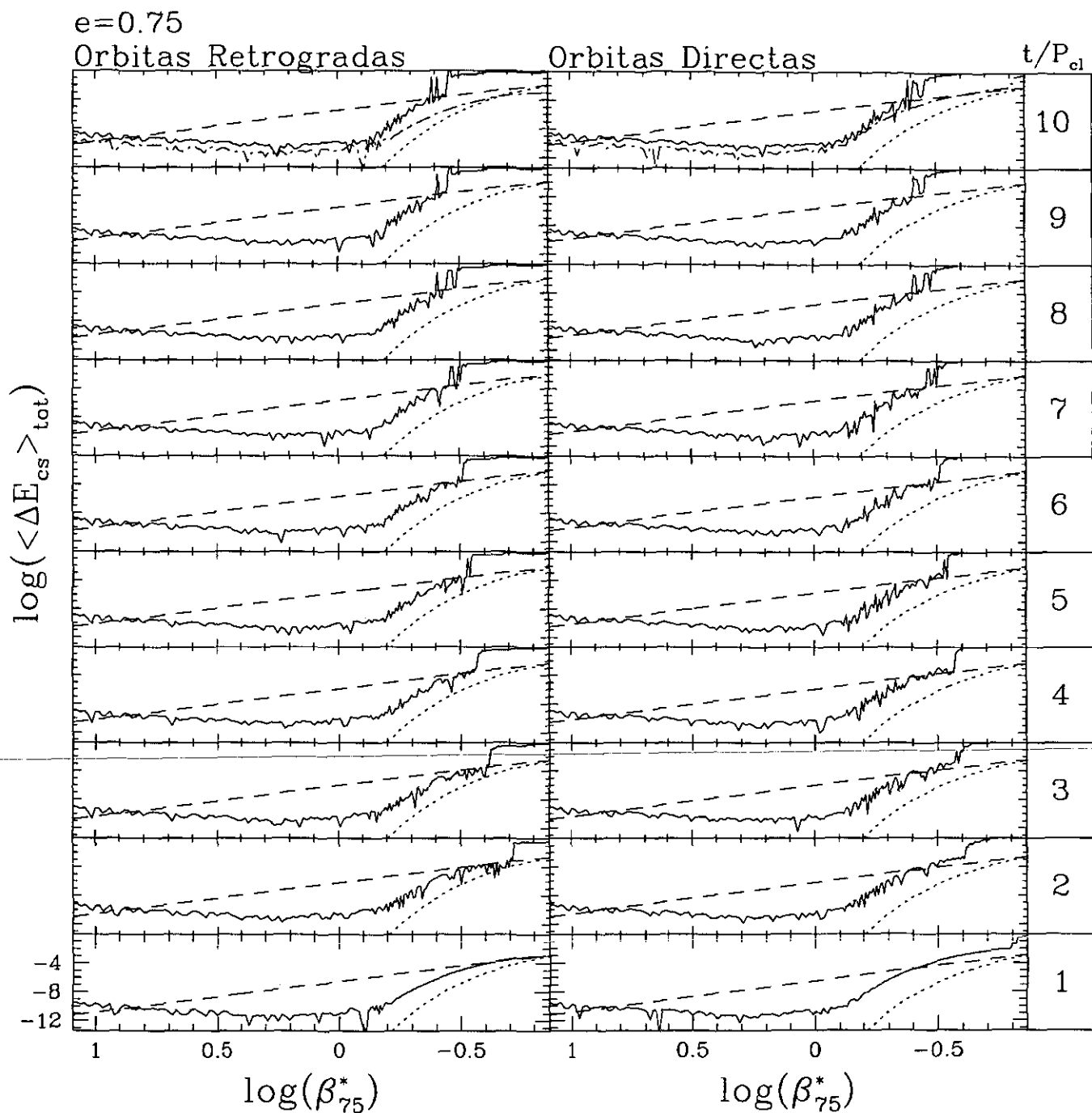


Fig. 2.20.— Incremento en la energía de ligadura para las estrellas del cúmulo en órbita excéntrica,  $e=0.75$  (línea continua). La línea de puntos es la corrección de Spitzer y la de trazo largo la de Weinberg. En el panel superior ( $t/P_{cl}=10$ ) se comparan los resultados para el primer y el último período. Ver texto para discusión.

la aproximación difiere entre sí, sobre todo para  $e=0.50$  y  $0.75$ .

La diferencia entre los resultados de las órbitas directas y las retrógradas no es muy notoria después de los primeros  $\sim 5$  períodos del cúmulo. La diferencia entre ellas es como se da este incremento en la energía.

En esta aproximación hemos encontrado que la amplitud y variación temporal del campo de marea determina en gran medida el comportamiento en diferentes regiones del cúmulo. Encontramos en el problema restringido de 3 cuerpos un modelo cualitativo y cuantitativo para determinar como es que ocurre la inyección de energía dentro del cúmulo.

En este nivel de aproximación ya hemos considerado la variación de la fuerza de marea de una forma más realista, así como el movimiento de las estrellas debido al potencial del cúmulo. También hemos considerado una distribución espacial para las estrellas, lo que nos permite determinar su comportamiento en distintas regiones del cúmulo, porque la perturbación produce efectos distintos, en diferentes regiones del cúmulo.

## 2.5 Conclusiones

En este capítulo hemos hecho una serie de aproximaciones para lograr una mejor comprensión de los choques de marea.

De los resultados que se obtiene en cada una de las secciones se puede concluir lo siguiente:

Con la aproximación de impulso es posible determinar el cambio en la energía de las estrellas más externas en un cúmulo globular. Sin embargo, este modelo no puede ser aplicado si las estrellas que recorren una fracción importante de su órbita, durante el transcurso de la perturbación.

Las correcciones derivadas de la teoría adiabática, permiten entender el efecto de la perturbación considerando el movimiento de las estrellas. Esta aproximación da una expresión analítica que nos ayuda a entender el comportamiento del sistema en función directa de la masa, la velocidad y distancia al perturbador, así como su posición dentro del cúmulo (frecuencia angular de rotación). Esta aproximación sólo es válida cuando la amplitud de la perturbación es pequeña. Estas correcciones modelan el movimiento de las estrellas dentro de un potencial armónico, y limitan la variación temporal de la fuerza de marea a tener sólo una interacción con el perturbador. Aún así, estas aproximaciones nos ayudan a entender el comportamiento de los resultados en el problema de tres cuerpos de manera cualitativa, en particular dentro de la estructura del cúmulo.

El problema de tres cuerpos involucra el cálculo directo de la fuerza de gravedad sobre las estrellas del cúmulo, así como una variación realista de la fuerza de marea, dando como resultado un comportamiento más aproximado que el de las aproximaciones anteriores. El efecto secular en las órbitas retrógradas en la región *cuasiadiabática*, in-

dica que la inyección de energía dentro del cúmulo depende del sentido de giro de las estrellas. Siendo para el caso de las órbitas directas más eficiente que para las retrógradas. Sin embargo, después de 10 períodos del cúmulo, el resultado en ambos casos es el mismo.

La aproximación de Spitzer y Weinberg son de 2-4 órdenes de magnitud menor, que los resultados en la aproximación de tres cuerpos, si éste es el caso, los resultados reportados en la literatura por Aguilar *et al.* 1988, y Gnedin y Ostriker 1997, quizá estén subvaluados. Aunque esto sólo sucede para las órbitas más excéntricas y si la Galaxia es considerado como un punto masa ( $e=0.5$  y  $0.75$ ).

Las aproximaciones antes mencionadas nos ayudan a tener un mejor entendimiento de los choques gravitacionales. Sin embargo, aún es necesario añadir otros elementos básicos para una total comprensión como son: una distribución de masa realista y autoconsistente del cúmulo globular, y una distribución de masa de la Galaxia consistente con las observaciones.

## REFERENCIAS

- Aguilar L., Hut, P., y Ostriker, J.P., 1988, ApJ, **335**, 720.  
 Aguilar, L. 1993, en *Galaxy Evolution: The Milky Way Perspective*, IAU Symp. **49**, eds. Majewski, R.S., p. 155.  
 Arfken G., 1985, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press).  
 Arseth, S. J., 1985, *Multiple Time Scales*, ed. J.U. Brackbill y B.I. Cohen, Academic Press, New York, 377.  
 Binney J. y Spergel D., 1982, ApJ, **252**, 308.  
 Binney J. y Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univ. Press).  
 Boccaletti D. y Pucacco G., 1996, *Theory of Orbits* ((Springer-Verlag, Berlin).  
 Davis H., 1981, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equation* (Dover Publications : New York).  
 Gnedin O. Y. y Ostriker J.P., 1997, ApJ, **474**, 223.  
 Goldstein H., 1980, *Classical Mechanics*, Adisson-Wesley.  
 Hénon M., 1970, A&A, **9**, 24.  
 Innanen K.A., 1979, AJ **84**, 960.  
 Jefferys W.H., 1974, AJ, **79**, 710.  
 Jefferys W.H., 1976, AJ, **81**, 983.  
 Keenan D.W., 1981, A&A, **95**, 334.  
 Keenan D.W., 1981, A&A, **95**, 340.  
 Keenan D.W. e Innanen, K.A., 1975, AJ, **80**, 290.  
 King I.R., 1962, AJ, **67**, 471.  
 Knobloch E., ApJ, **209**, 411.  
 Lichtenberg A. J. y Lieberman M.A., 1992, *Applied Mathematical Sciences* (Springer-Verlag, New York), Vol. **48**.  
 Lorentz E.N., 1963, J. Atmos. Sci., **20**, 130.

- Marion J. y Thornton S., 1988, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (Saunders College Publishing).
- Percival I. y Richards D., (1989), *Introduction to Dynamics*, (Cambridge Univ. Press).
- Press W.H, Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge Univ. Press.
- Spitzer L., 1958, *ApJ*, **127**, 17.
- Spitzer L., 1969, *ApJ*, **158**, L139.
- Spitzer L., 1987, *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, (Princeton: Princeton Univ. Press).
- Weinberg M.D., 1994a, *AJ*, **108**, 1398.
- Weinberg M.D., 1994b, *AJ*, **108**, 1403.
- Weinberg M.D., 1994b, *AJ*, **108**, 1414.

## Capítulo 3

# MODELOS DEL POTENCIAL GALACTICO

En este capítulo se discuten y comparan las propiedades dinámicas de tres modelos galácticos, buscando el más apropiado para nuestras simulaciones de  $N$ -cuerpos. La selección se hace en base a dos criterios: que sea autoconsistente y realista; y que su implementación computacional sea sencilla y precisa, porque en una simulación de  $N$  cuerpos, un factor crítico es el tiempo de cómputo.

Cabe señalar, que en el presente estudio nuestro objetivo es entender el efecto de los choques gravitacionales que sobre los cúmulos globulares produce el bulbo galáctico, dejando para un estudio posterior los efectos que produce el disco. Por ésta razón es necesario modificar los modelos considerados, para eliminar la parte axisimétrica del disco, pero conservando su efecto dinámico. Al final de este capítulo se describe el procedimiento que hemos adoptado, para obtener el potencial que utilizaremos en la simulación.

### 3.1 Introducción

A grandes rasgos, la Galaxia se puede modelar con tres componentes: un bulbo, formado con estrellas de distintas edades y metalicidades (Gilmore, *et al.* 1990); un disco, con estrellas de abundancia química parecida a la solar, y que generalmente se asocia con estrellas jóvenes de Población I, gas y polvo; y un halo, estelar y oscuro. El halo estelar está formado básicamente por los cúmulos globulares y estrellas de Población II. La presencia del halo oscuro se infiere por el comportamiento de la curva de rotación que se mantiene con un valor constante a radios galactocéntricos de 30 kpc a 100 kpc. Esto es observado tanto en la Galaxia, como en galaxias externas (Mihalas y Binney 1992, Capítulo 8). En este estudio nos interesa conocer la distribución de masa del halo oscuro, porque es el que ocasiona los mayores efectos dinámicos.

La distribución de masa, para el bulbo y el disco galáctico, se modela a partir de observaciones de galaxias externas que muestran el mismo tipo morfológico que la nuestra. Esto se debe a que la absorción interestelar en la Galaxia, no permite obtener la información necesaria, para determinar completamente la distribución de dichas componentes.

Diversos autores han propuesto modelos para la distribución de masa en la Galaxia, en particular, revisamos los modelos dados por; Allen & Santillán (1991); Bahcall, Schmidt y Soneira (1982, 1983), y Ostriker y Caldwell (1981).

Estos modelos incorporan las tres componentes mencionadas, pero con diferentes formas y factores de escala. La diferencia entre ellos se debe al método con que se calculan dichos factores.

Básicamente hay dos métodos para encontrar estos factores: el *método fotométrico*, que intenta determinar la distribución de masa a partir de conteos de estrellas y medidas del brillo integrado en diferentes direcciones del cielo, para que una vez conocida su distribución de luz, y suponiendo un cociente masa-luminosidad ( $\Upsilon \equiv M/L$ ), se determina la distribución de la masa; el *método dinámico*, por otro lado, infiere la distribución de masa en base a sus efectos dinámicos; a partir la curva de rotación, la velocidad de escape de las estrellas en la vecindad solar, y de la fuerza perpendicular al plano galáctico.

En las siguientes secciones se describen los modelos con cierto detalle, después y comparamos sus propiedades físicas para determinar el más conveniente en nuestro estudio.

### 3.2 Modelo de Allen y Santillán

El modelo de Allen y Santillán (1991) (referido en adelante como A&S) tiene una expresión analítica para el potencial y la fuerza que ejerce cada una de sus componentes. Las componentes que integran este modelo son tres: un bulbo, un disco y un halo masivo. Los parámetros del modelo se ajustan para reproducir la velocidad de rotación galáctica dada por Haud (1984), Hanson (1987) y Fich *et al.* (1989), y la densidad local de masa, que se supone igual a  $0.15 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ .

La descripción detallada de cada una de sus componentes se da a continuación.

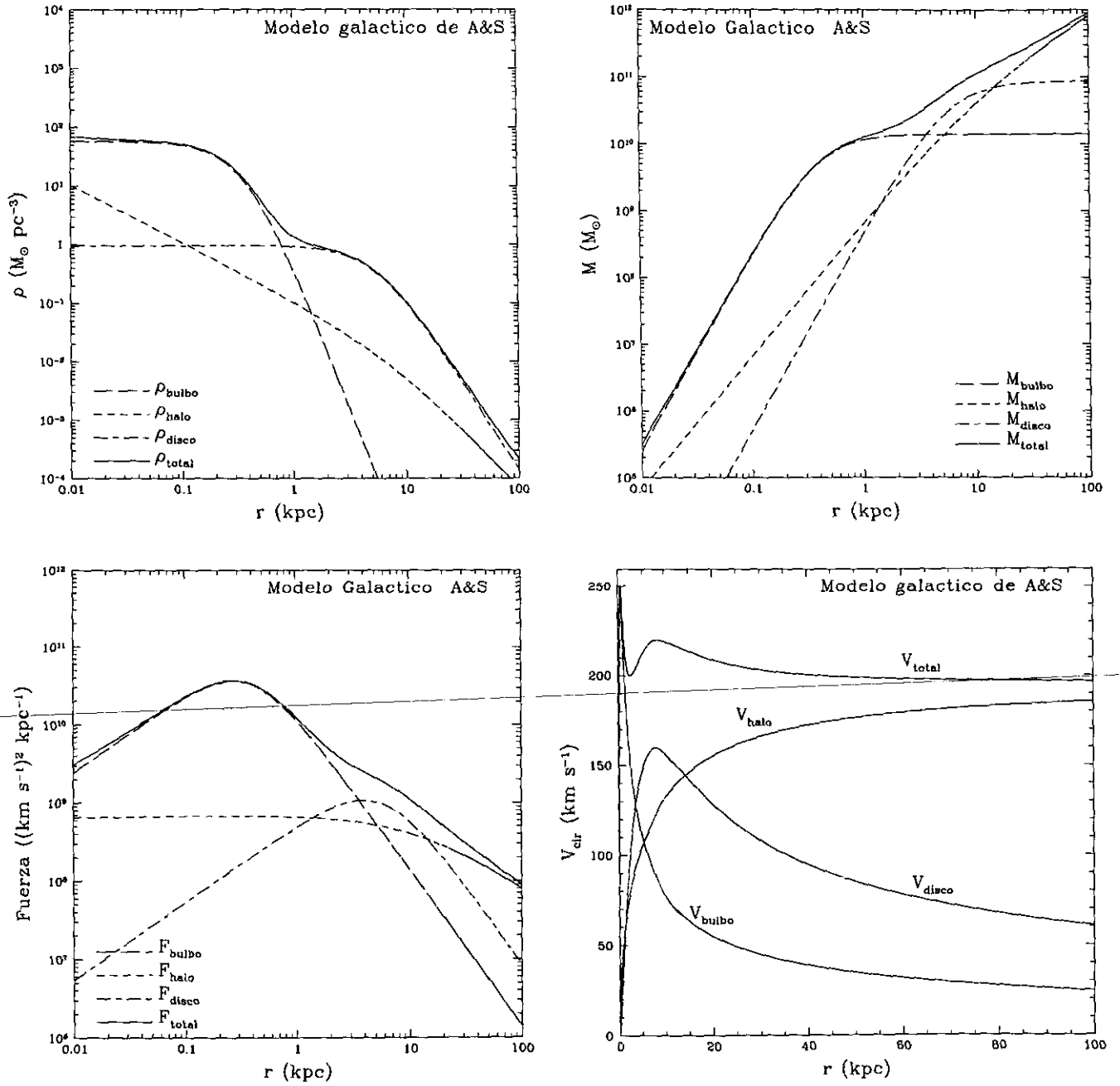


Fig. 3.1.— Densidad, masa acumulada, fuerza y velocidad circular para cada una de las componentes del modelo de A&S.



## 3.2.1 Bulbo

La densidad de masa ( $\rho_b$ ) para esta componente se da como una esfera de Plummer (Binney y Tremaine 1987, §2.2.1). Las expresiones para la densidad, la masa acumulada,  $M_b$ , el potencial,  $\Phi_b$ , y la fuerza,  $F_b$  (por unidad de masa)<sup>1</sup> son:

$$\rho_b(R, z) = \frac{3b_{b0}^2 M_{b0}}{4\pi(R^2 + z^2 + b_{b0}^2)^{5/2}}, \quad (2-1)$$

$$M_b(R, z) = 4\pi \int_0^r \rho_b(r') r'^2 dr' \quad (2-2)$$

$$= \frac{M_{b0}(R^2 + z^2)^{3/2}}{(R^2 + z^2 + b_{b0}^2)^{3/2}}, \quad (2-3)$$

donde  $r^2 = R^2 + z^2$ ,

$$\Phi_b(R, z) = -\frac{GM_{b0}}{(R^2 + z^2 + b_{b0}^2)^{1/2}} \quad (2-4)$$

$$F_b(R, z) = |-\nabla\Phi_b| = \left| \frac{M_{b0}(R^2 + z^2)^{1/2}}{(R^2 + z^2 + b_{b0}^2)^{3/2}} \right|, \quad (2-5)$$

donde  $M_{b0}$  es la masa total del bulbo y  $b_{b0}$  es el factor de escala radial, con valores de  $1.40 \times 10^{10} M_\odot$  y 0.39 kpc, respectivamente.

## 3.2.2 Halo

El halo en este modelo es muy masivo, con el fin de reproducir la curva de rotación en las partes externas de la Galaxia, que según este modelo es de  $200 \text{ km s}^{-1}$  a radios mayores a los 40 kpc. La densidad, la masa acumulada, el potencial y la fuerza están dados por,

$$\rho_h(r) = \frac{M_{h0}}{4\pi a_{h0} R^2} (r/a_h)^{1.02} \times \frac{2.02 + (r/a_h)^{1.02}}{[1 + (r/a_h)^{1.02}]^2}, \quad r < 100 \text{ kpc}, \quad (2-6)$$

$$M_h(r) = \frac{M_{h0}(r/a_h)^{2.02}}{1 + (r/a_h)^{1.02}}, \quad (2-7)$$

$$\Phi_h(r) = -\left(\frac{M_h(r)}{r}\right) - \left(\frac{M_{h0}}{1.02a_h}\right) \times \left[ -\frac{1.02}{1 + (r/a_h)^{1.02}} + \ln(1 + (r/a_h)^{1.02}) \right]_r, \quad (2-8)$$

<sup>1</sup>Las unidades de la masa, densidad de masa, del potencial y de la fuerza (por unidad de masa) en las ecuaciones de este capítulo (a menos que se indique lo contrario) serán de  $M_\odot$ ,  $M_\odot \text{ pc}^{-3}$ ,  $4.3 \times 10^{-6} (\text{km/s})^2$  y  $4.3 \times 10^{-6} (\text{km/s})^2 \text{ kpc}^{-1}$ , respectivamente. Estas unidades de energía y fuerza resultan de tomar a la constante de gravitación igual a la unidad,  $G=1$ .

$$F_h(r) = -\frac{M_h(r)}{r^2}, \quad (2-9)$$

donde  $M_{h0}$  y  $a_h$  tiene los valores de  $1.07 \times 10^{11} M_\odot$  y 12.0 kpc, respectivamente.

Los autores introducen un radio de corte para esta componente a 100 kpc (límite superior de las relaciones 2-7 y 2-8).

## 3.2.3 Disco

La densidad del disco para este modelo está dada por (Miyamoto y Nagai 1975):

$$\rho_d(R, z) = \left(\frac{b_d^2 M_{d0}}{4\pi}\right) \times \frac{a_d R^2 + [a_d + 3(z^2 + b_d^2)^{1/2}][a_d + (z^2 + b_d^2)^{1/2}]^2}{\{R^2 + [a_d + (z^2 + b_d^2)^{1/2}]^2\}^{5/2} (z^2 + b_d^2)^{3/2}} \quad (2-10)$$

donde  $a_d$  y  $b_d$  son factores de escala en  $R$  y  $z$ , respectivamente, con valores de 5.32 kpc y 0.25 kpc.  $M_{d0}$  es la masa total del disco a 100 kpc, que es de  $8.56 \times 10^{10} M_\odot$

La masa acumulada como función de  $R$  y  $z$  es

$$M_d(R, z) = \int_0^R \int_0^z \int_0^{2\pi} R' \rho_d(R', z') dz' dR' d\phi. \quad (2-11)$$

El potencial  $\Phi_d$  esta dado por

$$\Phi_d(R, z) = -\frac{M_{d0}}{\{R^2 + [a_d + (z^2 + b_d^2)^{1/2}]^2\}^{1/2}}. \quad (2-12)$$

La magnitud de la fuerza  $F_d$  esta dada por

$$F_d(R, z) = |-\nabla\Phi_d(R, z)|. \quad (2-13)$$

En particular, la fuerza en el plano del disco es

$$F_d(R, 0) = -\frac{M_{d0}R}{[R^2 + (a_d + b_d^2)^2]^{3/2}}. \quad (2-14)$$

En la Fig. 3.1 se muestran la densidad, la masa acumulada, la fuerza (por unidad de masa) y la velocidad de rotación para cada una de las componentes de este modelo.

## 3.3 Modelo de Bahcall, Schmidt y Soneira

Este modelo se obtiene a partir de conteos de estrellas en diferentes direcciones, movimientos de estrellas de alta velocidad y de la curva de rotación galáctica. Consta de cuatro componentes: un disco exponencial, un bulbo de Vaucouleurs, un halo masivo y una componente central. La densidad de masa de cada una de sus componentes tiene una expresión analítica; sin embargo, la masa, el potencial y la fuerza sólo se pueden calcular numéricamente, para lo cual es necesario utilizar las relaciones 2-22, 2-23a y 2-23b de Binney y Tremaine (1987).

El modelo que adoptamos es el que se da en la Tabla 4 de Bahcall, Schmidt y Soneira (1983, referido en adelante

TABLA I  
VALORES DE NORMALIZACIÓN PARA EL MODELO DE  
BSS 83.

Referencia	$\rho_{0c}$	$\rho_{0b}$	$\rho_{0h}$	$\rho_{0d}$
BSS 82	$7.6 \times 10^5$	$1.87 \times 10^{-4}$	0.12	0.15
Este Trabajo	$3.8 \times 10^5$	$1.2 \times 10^{-4}$	0.12	0.11

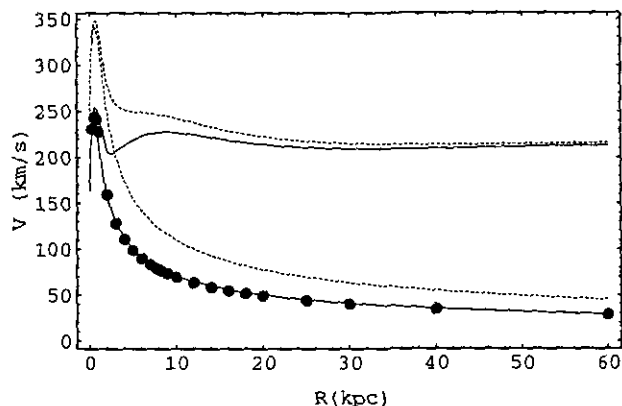


Fig. 3.2.— Velocidad circular de rotación debida a la componente central y a todo el modelo. Los puntos negros son los valores de la velocidad para la componente central en la Tabla 4 de BSS 83. Nuestro ajuste a la velocidad de rotación central y su resultado en la velocidad total es la línea sólida. La velocidad circular debida a la componente central y de todo el modelo, que se obtienen a partir de los parámetros de BSS 82 se muestra con la línea de puntos.

como BSS 83). Se intentó reproducir la curva de rotación de dicha tabla utilizando los parámetros dados por Bahcall, Schmidt y Soneira (1982, referidos como BSS 82), que según los autores (BSS 83) son los necesarios para reproducir esa curva. Como no fue posible reproducir la curva reportada por BSS 83 con los parámetros de BSS 82, se hizo un ajuste de los parámetros para poder reproducir la curva de rotación de BSS 83. En la Tabla I se da el resultado de nuestro ajuste y los valores dados por BSS 82. En esta tabla encontramos diferencias entre los valores del ajuste y los reportados por BSS 83. La densidad, de la componente central, es la que muestra una mayor diferencia, nuestro valor es casi el la mitad del dado por BSS 83. En la siguiente subsección estudiamos el efecto en la curva de rotación debido a esta diferencia.

A continuación se describe en detalle cada una de las componentes de este modelo.

### 3.3.1 Componente central

Los autores incorporan esta componente al modelo para reproducir la curva de rotación observada en  $2.2 \mu\text{m}$  a

$r \approx 1$  kpc determinada por Becklin y Neugebauer (1968). La densidad de masa para esta componente es

$$\rho_c(\alpha) = \rho_{0c} \alpha^{-1.8} \exp(-r^3), \quad (3-1)$$

donde

$$\alpha^2 = (1000 R)^2 + (1000 z)^2 \left(\frac{c}{a}\right), \quad (3-2)$$

con  $\rho_{0c}$  la densidad central y  $a$ ,  $c$  constantes de forma.

Si  $c/a=1$  la forma de esta componente es esférica, que es el caso que adoptamos para facilitar su estudio<sup>2</sup>. Entonces, la expresión para la densidad se puede reescribir como:

$$\rho_c(r) = \rho_{0c} (1000 r)^{-1.8} \exp(-r^3). \quad (3-3)$$

Para reproducir los valores de la curva de rotación de BSS 83 con la ec. (3-3) es necesario introducir un factor de escala en esta componente. El mejor ajuste se obtiene con  $\exp[(-r/0.86)^3]$  y con el valor de  $\rho_{0c}$  dado en la Tabla I. En la Fig. 3.2 se compara la curva de rotación que se obtiene a partir de los datos dados por BSS 82, con el resultado de nuestro ajuste, tanto para la componente central, como en el resultado total. Ver pie de figura para detalles.

### 3.3.2 Bulbo

La densidad de masa del bulbo  $\rho_b$ , está dada por,

$$\rho_b(r) = \rho_{0b} \exp(10.1[1 - (r/R_0)^{1/4}]) \times \begin{cases} 1.25(r/R_0)^{-6/8}, & r < 0.03R_0 \\ (r/R_0)^{-7/8} [1 - \frac{7/8}{10.1(r/R_0)^{1/4}}], & r \geq 0.03R_0 \end{cases} \quad (3-4)$$

donde  $\rho_{0b}$  y  $R_0$  son los valores de normalización con valores de  $1.2 \times 10^{-4} M_\odot / \text{pc}^3$  y 8 kpc, respectivamente.

La masa acumulada, el potencial y la fuerza se calculan numéricamente. En la Fig. 3.3 se muestran las diferencias de la velocidad de rotación, entre nuestro ajuste y los puntos de la Tabla 4 de BSS 83 (línea de trazos cortos). De esta gráfica vemos que el ajuste para esta componente es bastante satisfactorio, y como veremos más adelante, esta diferencia está por debajo de los errores observacionales.

<sup>2</sup>BSS 82 adoptan el valor de  $c/a=0.4$

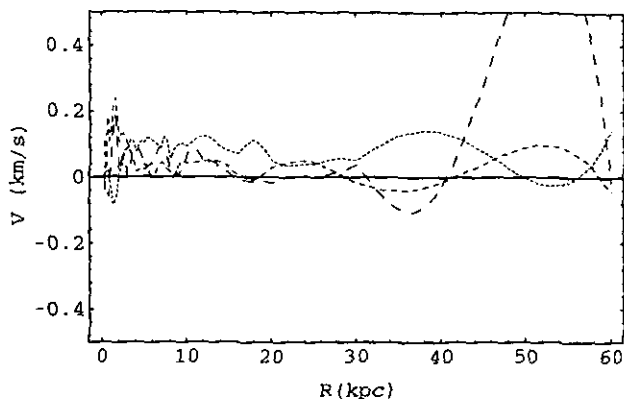


Fig. 3.3.— Diferencia entre el ajuste y la curva de rotación dada por BSS 83 para el halo (línea de puntos), bulbo (línea de trazos cortos) y disco (línea de trazos largo).

### 3.3.3 Halo

La distribución de masa para el halo esta dada por (BSS 83)

$$\rho_h(r) = \frac{\rho_{0h}}{1 + (r/2)^{1.8}}, \quad (3-5)$$

que tiene la forma propuesta originalmente por Bahcall y Soneira (1980), con la única diferencia de que el exponente es 1.8 y no de 2, que corresponde a una esfera isotérmica.

En este caso el halo es masivo, los autores dan un radio de corte a los 150 kpc.

La curva de rotación que se obtiene con los parámetros de BSS 82, coincide de manera razonable con la curva de la Tabla 4 de BSS 83. En la Fig. 3.3 se muestra esta diferencia (línea de puntos).

### 3.3.4 Disco

Para la densidad del disco  $\rho_d$ , se propone una distribución exponencial en la dirección radial y perpendicular al plano, dada de la siguiente forma,

$$\rho_d(R, z) = \rho_{0d} \exp\left(\frac{R_0}{h_d}\right) \exp\left(-\frac{R}{h_d}\right) \exp\left(\frac{-|z|}{H}\right), \quad (3-6)$$

donde  $H$  es la escala de altura del disco en la vecindad solar, determinada por Bahcall y Soneira (1980) en base a conteos de estrellas con  $z < 325$  pc.  $R_0$  es la distancia del Sol al centro galáctico, que se asume de 8 kpc.  $h_d$  es la escala radial del disco exponencial que es de 3.5 kpc, valor se obtiene en base a la observación de galaxias con el mismo tipo morfológico que la nuestra (Freeman 1970), y por el brillo superficial del disco galáctico, observado por de Vaucouleurs y Pence (1978). En la Tabla I se comparan los valores de BSS 82 y nuestro ajuste. En la Fig. 3.3 se gráfica la diferencia en la velocidad de rotación, entre nuestro ajuste y los datos de la Tabla 4 de BSS 83 (línea de trazo corto).

En la Fig. 3.4 se muestran las gráficas para la densidad, la masa acumulada, la fuerza (por unidad de masa) y la velocidad de circular de rotación, para cada una de las componentes de este modelo.

## 3.4 Modelo de Ostriker y Caldwell

Este modelo consta de 3 componentes: un bulbo, un halo y un disco. Los parámetros de este modelo se determinan con el método dinámico.

Los datos que Ostriker y Caldwell (1981, referidos en adelante como O&C) utilizan para encontrar el valor de los parámetros del modelo son: la distancia al centro galáctico, las constantes de Oort (A y B), el brillo superficial observado ( $\Sigma$ ), la escala de longitud del bulbo de Hubble-Reynolds, las componentes de las velocidades tangenciales de las líneas de emisión en las líneas de HI y CO a 5 longitudes galácticas y a diferentes radios galactocéntricos, y la velocidad de escape en la vecindad solar. Ellos ajustan los parámetros de las componentes del modelo para reproducir estos datos observados, utilizando un método de  $\chi^2$ .

A continuación se da la descripción detallada de cada una de las componentes.

### 3.4.1 Bulbo

Esta componente se modela con una ley de Hubble ( $\sim 1/r^3$ ) que es el perfil aproximado que presenta en nuestra Galaxia, y otras del mismo tipo morfológico.

La densidad, la masa acumulada, el potencial y la fuerza (por unidad de masa), para esta componente estan dadas por:

$$\rho_b(r) = \rho_{b0} \begin{cases} 3.75 \left[ 2 \ln \left( \frac{2r_b}{r} \right) - 3 \right], & r \ll r_b, \\ \frac{3.75}{Z^2} \left[ \frac{3-Z}{Z^{1/2}} \ln \left( \frac{1+Z^{1/2}}{(1-Z)^{1/2}} \right) - 3 \right], & r < r_b, \\ 1, & r = r_b, \\ \frac{3.75}{Z^2} \left\{ \frac{3+Z}{Z^{1/2}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{-1}{Z^{1/2}} \right) + \frac{\pi}{2} \right] - 3 \right\}, & r > r_b, \\ 1.87\pi \left( \frac{r_b}{r} \right)^3, & r \gg R_x \gg r_b, \end{cases}$$

donde

$$Z = |(r/r_b)^2 - 1|, \quad (4-1)$$

donde  $\rho_{b0}$  es la densidad central con un valor de  $101.8 M_\odot \text{pc}^{-3}$  y  $r_b$  es factor de escala con un valor de 0.1 kpc.  $R_x$  ( $\sim 1$  kpc) es un radio de transición a partir del cual la densidad comienza a ser proporcional a  $1/r^3$ . La masa y el potencial están dados por,

$$M_b(r) = \begin{cases} 4\pi \int_0^r \rho_b(r') r'^2 dr', & r < R_x, \\ M_b(R_x) + 4\pi \rho_b(r) r_b^3 \ln \left( \frac{r}{R_x} \right), & r > R_x, \end{cases} \quad (4-2)$$

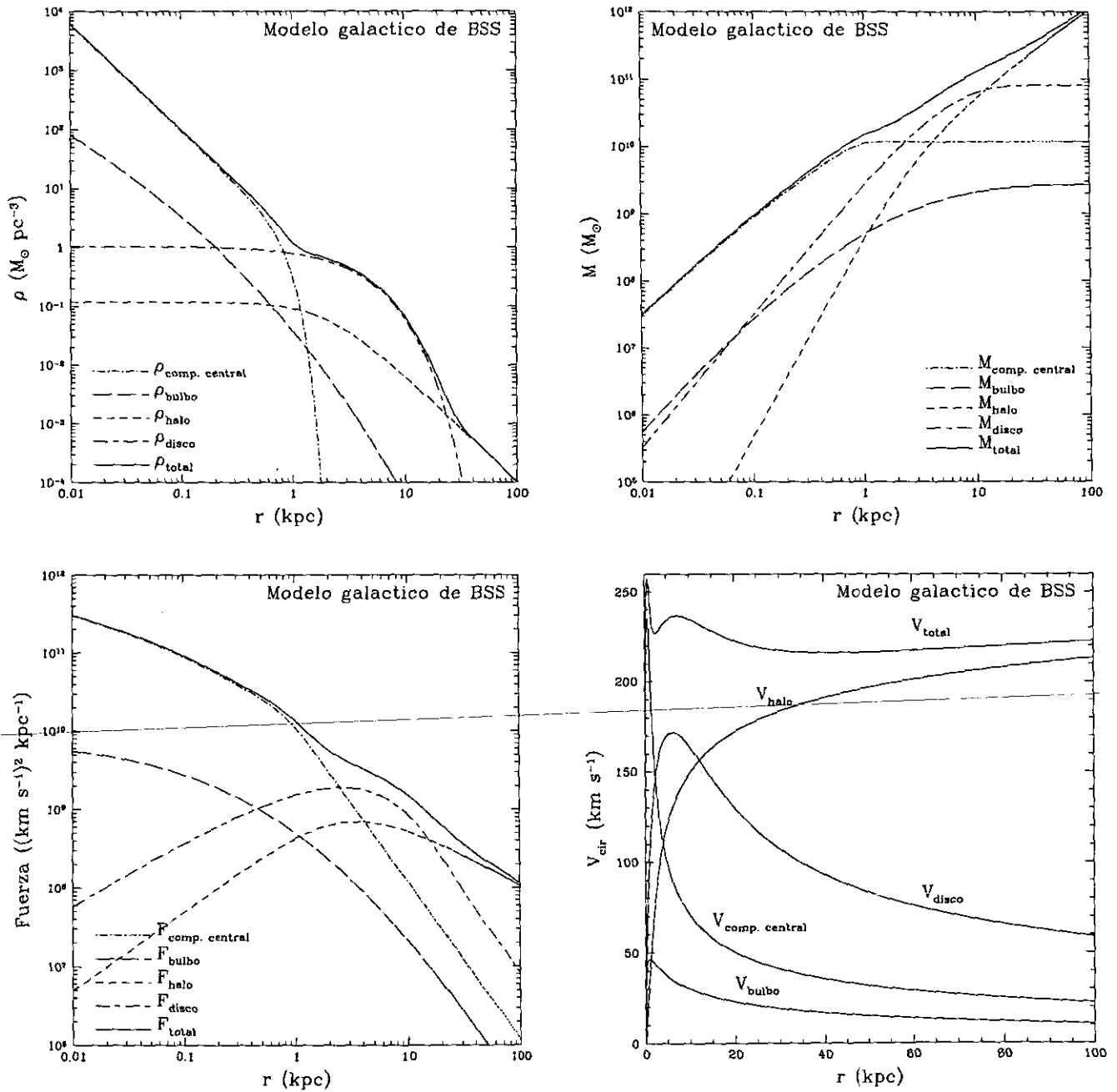


Fig. 3.4.— La densidad, la masa acumulada, la fuerza (por unidad de masa) y la velocidad circular de rotación para cada una de las componentes del modelo de BSS 83.

$$-\Phi_b(r) = \begin{cases} \int_0^{R_x} \frac{GM_b(r)}{r^2} dr + \frac{GM_i}{R_i} \\ + 4\pi G \rho_b r_b^3 \frac{15\pi}{8} \left[ \frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_{tot}} \right], & r \leq R_x, \\ \frac{GM_b(R_x)}{r} + 4\pi G \rho_b r_b^3 \frac{15\pi}{8} \left[ \frac{\ln(r/r_b)+1}{r} - \frac{1}{R_{tot}} \right], & r > R_x \end{cases} \quad (4-3)$$

$$-R_G^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_G + R}{R_G} \right) \exp \left( -\frac{R}{-R_G} \right) \right] \quad (4-10)$$

$$-\Phi_d(R) = \pi \rho_{d0} R (I_0^D K_0^D - I_1^D K_1^D - I_0^G K_1^G + I_1^G K_1^G) \quad (4-11)$$

$$F_d(R) = \pi \rho_d \left[ \frac{R}{R_D} (I_0^D K_0^D - I_1^D K_1^D) - \frac{R}{R_G} (I_0^G K_0^G - I_1^G K_1^G) \right], \quad (4-12)$$

$R_{tot}$  es el radio de corte para el bulbo, con un valor de 150 kpc. La fuerza que ejerce el bulbo por unidad de masa está dada por

$$F_b(r) = -\frac{M_b(r)}{r^2}. \quad (4-4)$$

### 3.4.2 Halo

La densidad de esta componente es

$$\rho_h(r) = \frac{\rho_{h0}}{1 + (r/r_{h0})^2}, \quad (4-5)$$

donde  $\rho_{h0}$  es la densidad central y  $r_{h0}$  el factor de escala para el halo con valores de  $0.2 M_\odot \text{ pc}^{-3}$  y 2.332 kpc, respectivamente.

La masa acumulada está dada por

$$M_h(r) = 4\pi \rho_{h0} r_{h0}^3 \left[ \frac{r}{r_{h0}} - \tan^{-1} \left( \frac{r}{r_{h0}} \right) \right]. \quad (4-6)$$

El potencial de esta componente es

$$-\Phi_h(r) = 4\pi \rho_{h0} r_{h0}^2 \left( 1 + \ln \left\{ \left[ \frac{1 + (R_{tot}/r_{h0})^2}{1 + (r/r_{h0})^2} \right]^{1/2} \right\} - \left[ \frac{\tan^{-1}(r/r_{h0})}{(r/r_{h0})} \right] \right). \quad (4-7)$$

La fuerza está dada por

$$F_h(r) = -4\pi G \rho_{h0} r_{h0} \frac{[r/r_{h0} - \tan^{-1}(r/r_{h0})]}{(r/r_{h0})^2}. \quad (4-8)$$

### 3.4.3 Disco

La densidad de masa se propone como la diferencia de dos funciones exponenciales, que básicamente dan un disco que decrece de manera exponencial hacia regiones externas de la Galaxia, y con un agujero en la parte central. La densidad, masa acumulada, potencial y fuerza están dados por:

$$\rho_d(R) = \rho_{d0} \left[ \exp \left( -\frac{R}{R_D} \right) - \exp \left( -\frac{R}{R_G} \right) \right] M_\odot \text{ pc}^{-2}, \quad (4-9)$$

$$M_d(R) = 2\pi \rho_{d0} \left\{ R_D^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_D + r}{R_D} \right) \exp \left( -\frac{R}{-R_D} \right) \right] \right.$$

donde  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones modificadas de Bessel (Arfken 1984). Los subíndices G y D se refieren a los parámetros de normalización que se usan en cada una de ellas, dados por  $R_D$  y  $R_G$ , con valores de 3.26 kpc y 3.25 kpc, respectivamente. La densidad,  $\rho_{d0}$ , tiene un valor de  $5.98 \times 10^4 M_\odot \text{ pc}^{-2}$ . El disco que estos autores proponen es bidimensional.

Para introducir la dependencia en  $z$ , algunos autores han propuesto una función de la forma  $e^{-z/z_0}$ , o como una secante hiperbólica (BSS 82, Freeman 1970, van der Kruit y Searle 1981,1982). La secante hiperbólica tiene una derivada continua en cero, la función exponencial no. Aunque esto no será de relevancia en este trabajo, es importante señalar que este tipo de función se puede utilizar para incluir la dependencia axisimétrica del disco en el potencial galáctico.

## 3.5 Comparación y Selección del Modelo

En esta sección se comparan las propiedades de cada uno de los modelos que hemos descrito. Los criterios de comparación son los siguientes: validez física de la distribución de masa, sus efectos dinámicos, y facilidad en su implementación numérica.

### 3.5.1 Comparación de las distribuciones.

Analizamos cada una de las componentes de los modelos que hemos descrito para evaluar si tienen sentido físico.

#### Halo

La distribución de masa del halo es muy parecida en todos los modelos (esfera isotérmica). Para radios mayores a 10 kpc, esta distribución es proporcional a  $r$ , aunque en las regiones centrales los modelos son ligeramente diferentes. Sin embargo, en este caso no es importante porque ahí domina el bulbo y/o disco galáctico.

En todos los modelos se introduce un truncamiento para esta componente, porque el halo no se puede extender a infinito, de lo contrario la masa diverge.

En este caso no hay un criterio estricto para dar preferencia a alguno de los modelos, ya que los tres son físicamente congruentes.

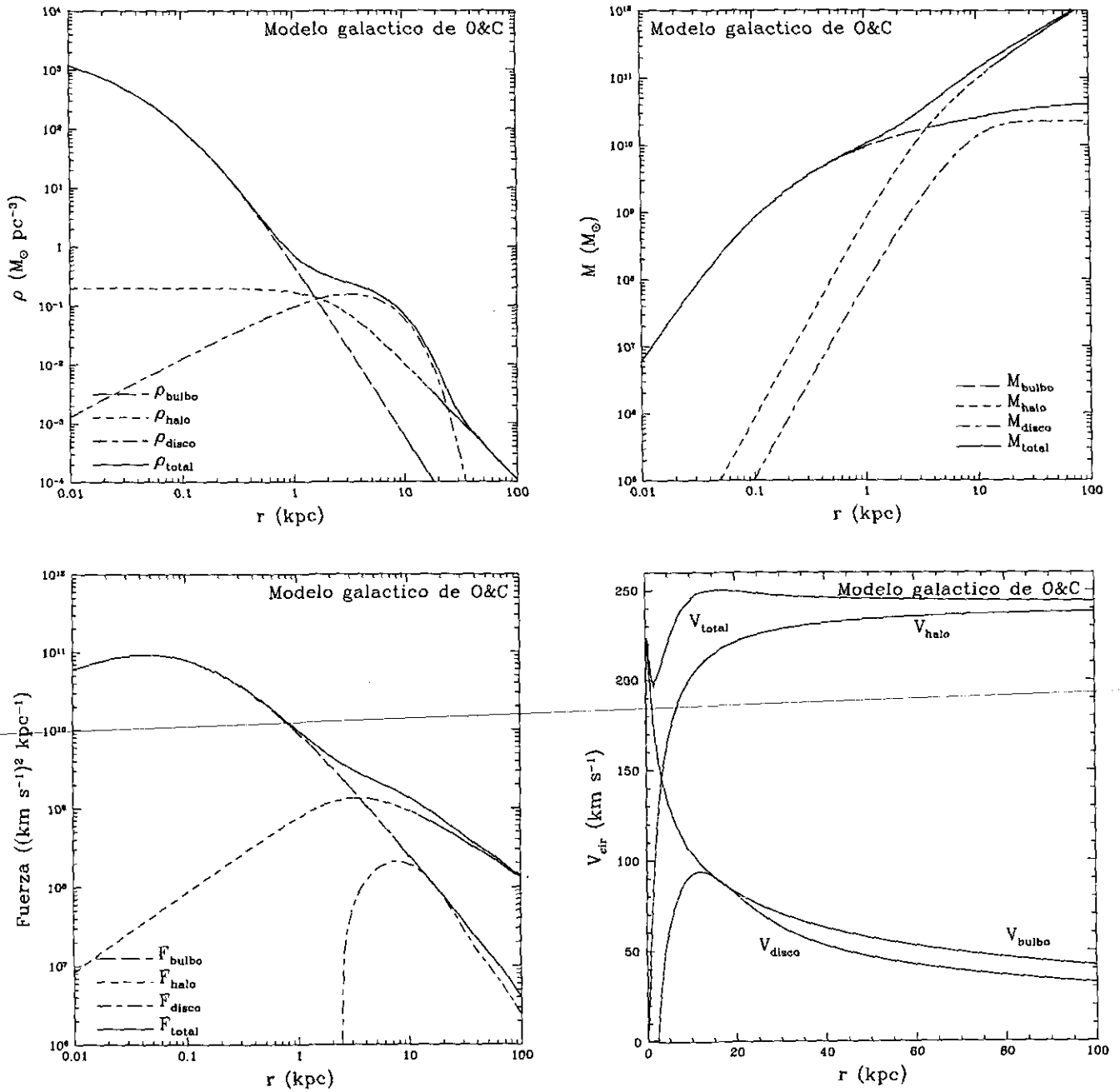


Fig. 3.5.— Densidad, masa acumulada, fuerza (por unidad de masa) y velocidad circular, como función del radio galactocéntrico, para cada una de las componentes del modelo de O&C.

### Disco

En este caso cada modelo presenta una componente diferente.

La densidad de masa del modelo de A&S decrece muy lentamente, y al parecer no coincide del todo con los discos observados en galaxias externas, que muestran un decaimiento exponencial (Mihalas y Binney 1981 §5.2, en particular Fig. 5-22.).

El modelo de O&C presenta un hoyo en la región central del disco, que físicamente no es posible, porque es justo donde uno espera que la masa esté más concentrada, o al menos no decrezca. El comportamiento en las partes exteriores parece congruente con las observaciones de galaxias externas. Sin embargo, los autores no dan una dependencia explícita para la distribución de masa en la dirección  $z$ .

El modelo de BSS presenta una distribución para la masa que decae exponencialmente en  $R$  y  $z$ . Esta distribución es la que más se observa en galaxias externas de disco.

De lo anterior, se decidió tomar el disco del modelo de BSS 83, porque tiene mayor sustento observacional que los otros dos.

### Bulbo y componente central

Los tres modelos proponen un bulbo, que para A&S y O&C decae como  $r^{-3}$  y para BSS como un modelo de de Vaucouleurs.

En el modelo de BSS 83 se introduce una componente central con el fin de reproducir la curva de rotación que se reporta en las regiones centrales de la Galaxia por Becklin y Neugebauer (1968), entre en 1 kpc y 2 kpc. Esta curva se cree que es causada por una barra en la región central de la Galaxia (ver capítulo 3 de Gilmore *et al.* 1990). La velocidad circular de rotación debida a la distribución central y al bulbo, coincide con la del bulbo para otros modelos.

El modelo de O&C tiene una función que se divide en varias regiones, lo que dificulta su interpretación física, aunque básicamente decae como  $r^{-3}$ . La distribución del modelo de A&S es una esfera de Plummer, que tiene expresiones analíticas para masa y fuerza.

Los perfiles de densidad de masa para los modelos de A&S y de BSS, decrecen más rápido que el modelo de O&C, lo que al parecer es correcto, ya que no se espera que la distribución del bulbo que compita con la del halo.

Concluimos que la componente más plausible es la del modelo de A&S. Sin embargo, la suma del bulbo y la componente central de BSS también es aceptable.

En resumen, se puede decir que para modelar la distribución de masa del halo cualquiera de estos modelos es aceptable. Para el disco el modelo físicamente más aceptable es el de BSS 83, con la ventaja de que numéricamente es sencillo de implementar. El bulbo más sencillo y físicamente plausible es el de A&S, aunque, el mode-

lo de BSS 83, con bulbo y componente central, también es aceptable. Sin embargo, este no presenta la sencillez numérica del modelo de A&S.

A continuación hacemos una comparación de los efectos dinámicos que produce cada modelo.

### 3.5.2 Comparación de los efectos dinámicos.

Los efectos dinámicos que produce cada modelo se pueden evaluar comparando la fuerza (por unidad de masa) y la velocidad circular de rotación.

La fuerza de marea sobre un cúmulo globular depende del gradiente radial de la fuerza y del tamaño del cúmulo. El intervalo donde se espera que los cúmulos experimenten el máximo efecto de la fuerza de marea, está entre 1 kpc y 10 kpc (ver Fig. 3.6), porque es ahí donde la pendiente de la fuerza experimenta sus mayores cambios.

En este intervalo el modelo de O&C tiene el mayor cambio de su pendiente, entre 0.8 kpc y 3 kpc. El modelo de BSS tiene un comportamiento parecido al de O&C, pero con una pendiente menos pronunciada, que cambia alrededor de los 2 kpc. El modelo de A&S no muestra cambios mayores en su pendiente.

De la Fig. 3.6b, se muestra la velocidad circular para cada uno de los modelos estudiados. Notamos que el modelo de O&C es el que presenta valores más altos en esta curva. Este modelo también presenta la curva de rotación más plana.

En conclusión, la magnitud de los efectos dinámicos que el modelo de O&C produce es mayor que lo otros dos, seguido en magnitud por el de BSS y A&S, respectivamente.

### 3.5.3 Discusión e implementación numérica

Los choques de marea han sido estudiados por otros autores, y es importante considerar a los modelos que otros autores han utilizado. En particular Aguilar *et al.* (1988), en adelante AHO) y Gnedin y Ostriker (1996, en adelante GO) han utilizado los modelos de BSS 83 y el de O&C. Este es un criterio adicional para dar preferencia a alguno de estos modelos.

El modelo de BSS 83 presenta un disco y un halo físicamente realistas. Si consideramos el bulbo más la componente central, el resultado también es aceptable. La fuerza de marea que produce éste modelo se encuentra en el caso intermedio (ver Fig. 3.6) ya que según AHO y GO, este modelo no es tan destructivo como el de O&C.

En el modelo de O&C, el disco físicamente no es realista, lo cual es compensado con un bulbo muy masivo. Este produce una fuerza de marea muy grande, siendo el más destructivo según AHO y GO.

Como ya se ha dicho, el modelo de A&S no ha sido citado en la literatura en trabajos relacionados a la destrucción de cúmulos globulares. Sin embargo, tiene la ventaja que el potencial y la fuerza que ejercen todas sus componentes se pueden calcular de manera analítica.

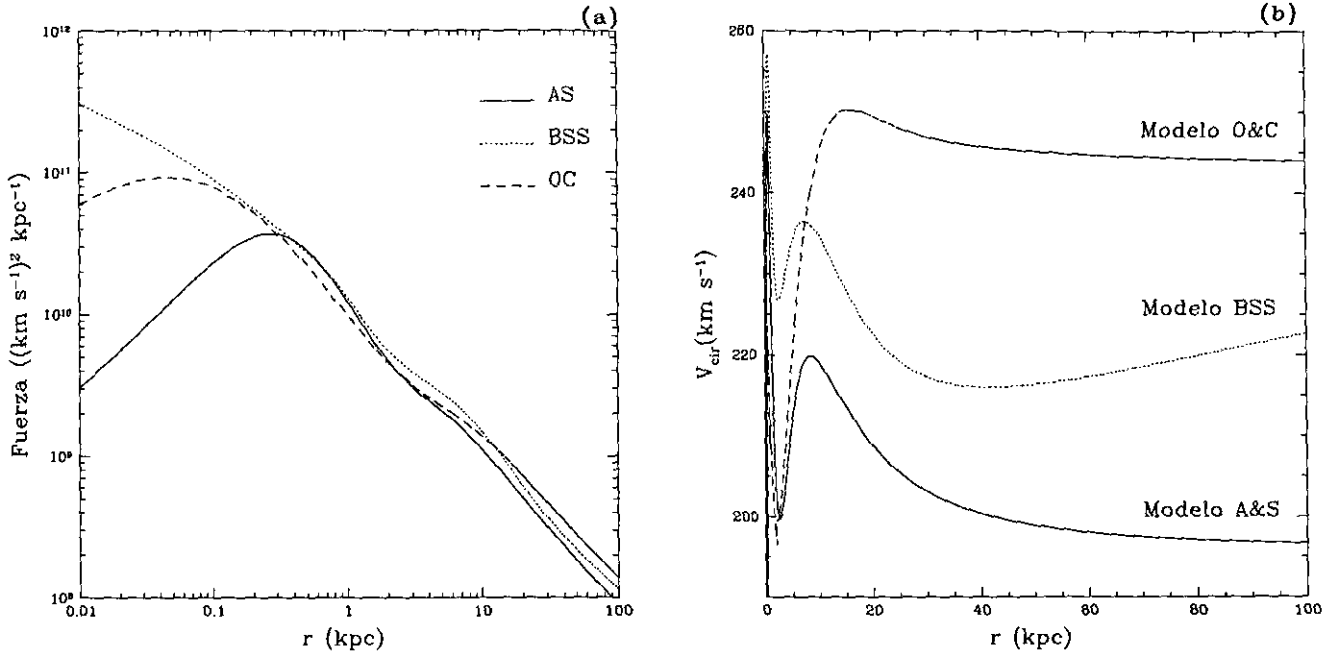


Fig. 3.6.— En (a) se presenta la fuerza y en (b) la velocidad circular de rotación, como función del radio galactocéntrico para los modelos estudiados.

En la discusión anterior el modelo que físicamente es más realista es el de BSS 83, y el que computacionalmente es más fácil de implementar es el de A&S. Sin embargo, descartamos a este último porque no hay trabajos que lo utilicen en el contexto de los choques gravitacionales.

Proponemos utilizar el modelo de BSS 83 modificado, haciendo una implementación analítica utilizando algunas de las funciones que se usan en el modelo de A&S para las componentes esféricas, y una función exponencial para el disco. Esta implementación reproduce el comportamiento dinámico del modelo de BSS 83, con la ventaja de tener una expresión analítica para el potencial y la fuerza de todas sus componentes.

### 3.6 Construcción de Nuestro Modelo.

En esta sección construimos una versión analítica para el modelo de BSS 83. La idea básica es ajustar los parámetros, de forma y escala, dados en § 3.2.1, 3.2.2 y 3.3.4, para reproducir la curva de rotación dada por BSS 83.

Como se dijo en el Capítulo I, se pretende entender el efecto de la fuerza de marea sobre los cúmulos globulares, en particular, el efecto del bulbo. Se propone, como una primera aproximación, considerar el efecto de las componentes esféricas (halo y bulbo), sin considerar los efectos que la distribución axisimétrica del disco tiene sobre los cúmulos, pero conservando el efecto dinámico que ejerce su distribución de masa. Para esto se propone conservar la masa del disco, pero como una distribución esférica.

#### 3.6.1 Distribución esférica para la masa del disco

Aunque no se considere la distribución axisimétrica del disco, se quiere conservar su efecto dinámico. Esto es posible si consideramos que su distribución de masa es función de la variable radial,  $r$ , es decir, como si esta masa esté en una distribución esférica.

La densidad del disco está dada por,

$$\rho_d(r) = \rho_{1d} \exp\left(\frac{R_1}{h_{d1}}\right) \exp\left(-\frac{r}{h_{d1}}\right), \quad (6-1)$$

donde  $\rho_{1d}$ ,  $h_{d1}$  y  $R_1$  son los parámetros a encontrar utilizando los valores de la curva de rotación para esta componente de BSS 83, minimizando el valor de  $\chi^2$ .

La masa estará dada por

$$M_d(r) = 4\pi\rho_{1d} \exp\left(\frac{R_1}{h_{d1}}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{r}{h_{d1}}\right) (2h_{d1}^3 + 2h_{d1}^2 r + h_{d1} r^2) - 2h_{d1}^3 \right]. \quad (6-2)$$

El potencial y la fuerza están dados por

$$-\Phi_d(r) = 4\pi\rho_{1d} \exp\left(\frac{R_1}{h_{d1}}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{r}{h_{d1}}\right) \frac{(2h_{d1}^3 + 2h_{d1}^2 r + h_{d1} r^2) - 2h_{d1}^3}{r} \right] + h_{d1}(h_{d1} + r) \exp\left(-\frac{r}{h_{d1}}\right) \quad (6-3)$$



y

$$F_d(r) = \frac{GM_d(r)}{r^2}, \quad (6-4)$$

respectivamente.

### 3.6.2 Bulbo y halo

El bulbo de nuestro modelo equivale a la suma de la componente central y el bulbo del modelo de BSS 83. Los parámetros de forma y escala, en la ecuación (2-3)<sup>3</sup> se obtienen al ajustar el resultado de la suma de las velocidades de las curvas de rotación de ambas componentes.

Para obtener el halo se ajustan los parámetros de la ec. (2-7), utilizando los valores de la velocidad circular de rotación correspondiente al halo de BSS 83.

El ajuste de todos los parámetros se hizo con la función *NonlinearFit* del paquete *Mathematica*, que minimiza el valor de  $\chi^2$  entre la función y los datos de entrada.

Los parámetros que se obtienen para cada componente son:

- Bulbo

$$M_{b0} = 1.32 \times 10^{10} M_{\odot}$$

$$b_{b0} = 0.32 \text{ kpc}$$

- Halo

$$M_{h0} = 1.12 \times 10^{11} M_{\odot}$$

$$a_h = 10.75 \text{ kpc}$$

- Distribución esférica del disco

$$\rho_{1d} = 0.0816 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$$

$$R_1 = 2.58 \text{ kpc}$$

$$h_{d1} = 2.027 \text{ kpc}$$

En la Fig. 3.7 se muestra la diferencia entre la curva de rotación de nuestro ajuste con la de BSS 83.

### 3.7 Conclusiones

Hemos expresado un modelo galáctico realista de forma analítica, ajustando los parámetros de forma y escala para reproducir el comportamiento dinámico del modelos de BSS 83.

El modelo analítico facilita el cálculo numérico de las órbitas estelares, en nuestro caso de las estrellas de un cúmulo globular. De esta forma se tiene mayor precisión en el cálculo del potencial y de la fuerza sobre cada una de las estrellas.

En la Fig. 3.7, se ve que nuestro ajuste a la curva de rotación de BSS 83, no es del todo satisfactorio. Sin embargo, una diferencia de  $\pm 4 \text{ km s}^{-1}$  no es tan grave si consideramos que la barra de error observacional de este modelo es de  $\pm 10 \text{ km s}^{-1}$ . De lo anterior podemos decir que tenemos un modelo esférico para explorar los efectos de marea, que experimenta un cúmulo globular en un potencial galáctico, debido a las componentes esféricas del

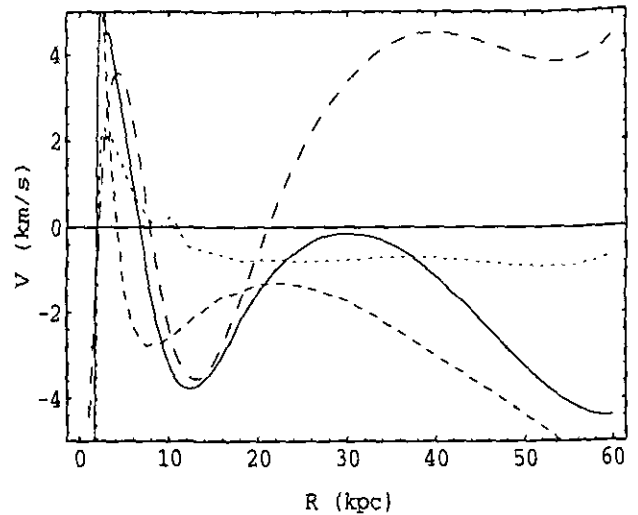


Fig. 3.7.— Diferencias entre nuestro ajuste y la curva de rotación para cada una de las componentes del modelo de BSS 83. La línea de trazos cortos corresponde al bulbo, la siguiente al halo y la de trazos más largos al disco. La línea continua es la diferencia total.

mismo. Una ventaja de dicho modelo es que tenemos su contraparte axisimétrica, que se puede implementar para estudiar los efectos que produce el disco galáctico sobre los cúmulos globulares.

Las funciones analíticas que se utilizan para ajustar el modelo de BSS 83, se pueden aplicar a otros modelos galácticos, en particular, al de O&C. De esta forma se puede tener ambos modelos de manera analítica sin perder sus características dinámicas.

### REFERENCIAS

- Aguilar L., Hut P. y Ostriker J.P., 1988, *ApJ*, **335**, 720.  
 Allen C. y Santillán A., 1991, *Rev.Mex.A.A.*, **22**, 255.  
 Arfken G., 1985, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press).  
 Bahcall J.N., Schmidt M.S. y Soneira R.M., 1982, *ApJ*, **258**, L23.  
 Bahcall J.N., Schmidt M. S. y Soneira R.M., 1983, *ApJ*, **265**, 730.  
 Bahcall J.N. y Soneira R.M., 1980, *ApJS*, **44**, 73.  
 Becklin E.E. y Neugebauer G., 1968, *ApJ*, **151**, 145.  
 Binney J y Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univ. Press).  
 Caldwell J.A.R. y Ostriker J.P., 1981, *ApJ*, **251**, 61.  
 Fich M., Blitz L. y Stark, A.A., 1989, *ApJ*, **342**, 272.

<sup>3</sup>Recordemos que la masa está directamente relacionada con la velocidad circular por la expresión  $v_c^2 = GM(r)/r$

- Freeman K.C., 1970, *ApJ*, **160**, 811.
- Gilmore G., King I. y van der Kruit P.C., 1990, *The Milky Way As Galaxy*, Saas-Fee Advance Course No. 19., Univ. Science Books.
- Gnedin O.Y. y Ostriker J.P., 1997, *ApJ*, **474**, 223.
- Hanson R., 1987, *AJ*, **94**, 409.
- Haud U., 1984, *ApJS*, **104**, 337.
- Mihalas D. y Binney J., 1981, *Galactic Astronomy*, W.H. Freeman and Company, New York.
- Miyamoto M. y Nagai R., 1975, *PASJ*, **27**, 533.
- Oort J.H., 1965, en *Stars y Stellar Systems*, Vol. 5, *Galactic Structure*, eds. A. Blaauw y M. Schmidt (Chicago : Univ. Chicago Press), p. 455.
- van der Kruit, P.C. y Searle, L., 1981, *A&A*, **95**, 105.
- van der Kruit, P.C. y Searle, L., 1982, *A&A*, **110**, 61.

## Capítulo 4

# SIMULACIÓN DE N-CUERPOS

En este capítulo se presentan las características generales del código empleado, y de los experimentos que hemos realizado. Hacemos una discusión de las dificultades que estos experimentos plantean, y de las razones por las cuales se escogieron las herramientas numéricas empleadas. Se presenta en detalle el estudio de un experimento, con el fin de introducir las herramientas de análisis utilizadas en este trabajo.

La elección del código de N-cuerpos, en particular, es una decisión de suma importancia, ya que el intervalo dinámico, tanto espacial como temporal de las simulaciones, restringe enormemente las posibles opciones. Recordemos, por ejemplo, que las escalas temporales van desde los períodos orbitales de las estrellas más ligadas al cúmulo, al período orbital del cúmulo alrededor de la Galaxia. Además, es necesario que el calentamiento numérico del cúmulo, producido por errores de redondeo y truncamiento, sea lo suficientemente pequeño durante el transcurso de una simulación, para que no oculte los efectos del calentamiento por choques, que es lo que deseamos medir. Finalmente, el proceso de escape de partículas del cúmulo, en presencia de un campo de marea externo, ocurre a una tasa que depende sensiblemente de la granularidad del potencial del cúmulo, en las inmediaciones de su radio de marea. Por esta razón es muy importante que los experimentos numéricos se realicen con un número realista de partículas.

Por otro lado, los aspectos físicos de la evolución dinámica de los cúmulos globulares, que nuestros experimentos no contemplan son los siguientes: En primer lugar, nuestras simulaciones no incluyen el fenómeno de colisiones entre partículas, que da lugar a una contracción de la región central y a una expansión en las partes más externas del mismo (ver §1.3.1). Simular este aspecto de su dinámica involucra el uso de códigos de N-cuerpos de integración directa, que utilizan técnicas de regularización (Aarseth, 1985). El tiempo de cálculo que se requiere en estos códigos, hace imposible su utilización en el problema que se quiere estudiar, debido al número de partículas que deseamos utilizar ( $N = 10^5$ ). Por otro lado, la evolución dinámica ocurre en escalas de tiempo del orden de  $t_{rh}$ , que para los cúmulos globulares galácticos van de  $10^8$  a  $10^{10}$  años (ver Fig. 1.6). Nuestros experimentos siguen la evolución de los cúmulos durante 10 períodos orbitales

alrededor de la Galaxia, esto implica escalas de tiempo del orden de  $10^8$  años para las órbitas que hemos considerado. Aún así, hemos puesto especial cuidado en estimar los efectos producidos por la evolución colisional en las escalas de tiempo que abarcan nuestras simulaciones (§4.2.3). Otro aspecto no incluido en nuestros experimentos es la segregación espacial producida por el espectro de masas de las estrellas del cúmulo (Spitzer, 1969). Este fenómeno ocurre en una escala de tiempo comparable al  $t_{rh}$  y su efecto principal es: la evaporación selectiva de las estrellas poco masivas. Otro fenómeno importante es la pérdida de masa producida por la evolución estelar (ver §1.3.2). Su efecto dinámico es importante en los primeros  $5 \times 10^9$  años de la vida del cúmulo, y por tanto, no lo hemos considerado en el presente trabajo. Un último fenómeno que hemos ignorado es la fricción dinámica, que causa que las órbitas de los cúmulos decaigan hacia el centro galáctico; sin embargo, este fenómeno ocurre en escalas de tiempo mayores a las que nos interesan, y sólo es importante para cúmulos masivos (ver §1.3.3).

Debido a las limitaciones descritas, y a los desafíos numéricos que representan las simulaciones del fenómeno que se desea estudiar (con el número de partículas realista, al intervalo dinámico temporal y espacial que estos sistemas implican, y en un campo de marea producido por un modelo relativista para la Galaxia) que experimentos con las características aquí descritas no se han presentado en la literatura. Por lo anterior, los experimentos reportados en esta tesis representan una de las contribuciones más importantes en el estudio de estos sistemas.

Hemos seguido la evolución de un cúmulo globular con dos códigos diferentes; uno basado en una expansión de armónicos esféricos, y el otro basado en una organización jerárquica (código de árbol), con el propósito de verificar que los resultados que se obtiene son independientes del código utilizado.

### 4.1 ¿Por qué Necesitamos un Número Realista de Partículas?

El movimiento de las estrellas en un sistema autogravitante, como lo es un cúmulo globular, está determinado por el potencial promedio generado por sus estrellas. En una simulación numérica, idealmente, se desea que el número de partículas ( $N_p$ ) sea igual al número de estrellas

( $N_s$ ) del sistema que se desea modelar. Sin embargo, debido a las limitaciones computacionales (tiempo de cálculo, memoria y espacio en disco) el número de partículas, generalmente, es menor que  $N_s$ .

Si en una simulación el número de partículas es menor que el número de estrellas del sistema que se desea modelar, para una masa fija total, la masa de cada partícula será mayor que la masa de las estrellas dentro del cúmulo. Esto da como resultado que el potencial de las partículas sea más profundo que el de las estrellas, causando una mayor fluctuación del potencial promedio, lo que acelera el proceso de relajación.

El tiempo de relajación para el sistema estelar, como para el modelo numérico, es función del número de partículas que lo integran (ver ec. 4.1 de la § 4 en Spitzer 1987, Binney y Tremaine 1987).

Para comparar el tiempo de relajación entre la simulación y el sistema real, se define el cociente

$$\frac{t_r^s}{t_r^r} = \frac{N_p \ln N_s}{N_s \ln N_p} \quad (1-1)$$

donde  $t_r^s$  y  $t_r^r$  son los tiempos de relajación de la simulación y del sistema real, respectivamente.

En la Fig. 4.1, hemos graficado distintos valores de la relación anterior como función del cociente  $N_p/N_s$ , para algunos valores de  $N_s$ . El tiempo típico de relajación, en el radio mediano de masa,  $t_{rh}$ , para los cúmulos globulares es del orden de  $5 \times 10^8$  años (ver Fig. 1.7, capítulo 1.). Si consideramos que el período orbital de los cúmulos es, en promedio, de  $10^8$  años ( $\sim 0.2t_{rh}^r$ ), podemos estudiar su comportamiento con  $N_p \sim 0.2N_s$  (ver Fig. 4.1).

Por otro lado, si deseamos realizar una simulación por 10 períodos orbitales,  $t \sim 2t_{rh}^r$ , es necesario que nuestra simulación cuente con  $N_p \sim N_s$ , para que los resultados sean representativos del sistema (ver Fig. 4.1).

Las curvas de la Fig. 4.1, permiten determinar el tiempo que una simulación de  $N$  cuerpos tiene sentido físico, si esta se realiza con  $N_p < N_s$ .

## 4.2 El Código de N-Cuerpos

Un cúmulo globular tiene del orden de  $10^5$  a  $10^6$  estrellas (Djorgovski y Meylan 1993). Para describir su comportamiento es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i}^{N_p} \frac{G m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{[(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2 + \epsilon^2]^{3/2}} \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (2-1)$$

donde  $G$  es la constante de gravedad,  $\epsilon$  es la longitud de suavizamiento<sup>1</sup>,  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{x}_j$ , son las posiciones de la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima partículas, respectivamente.

<sup>1</sup>Este parámetro se introduce en la simulación de  $N$  cuerpos por dos razones: para que el integrador realice una correcta descripción del movimiento si dos partículas se aproximan una distancia muy pequeña y para disminuir los efectos de la relajación espúrea. El valor de  $\epsilon$  es menor que la separación media entre partículas para no alterar demasiado la evolución física del sistema.

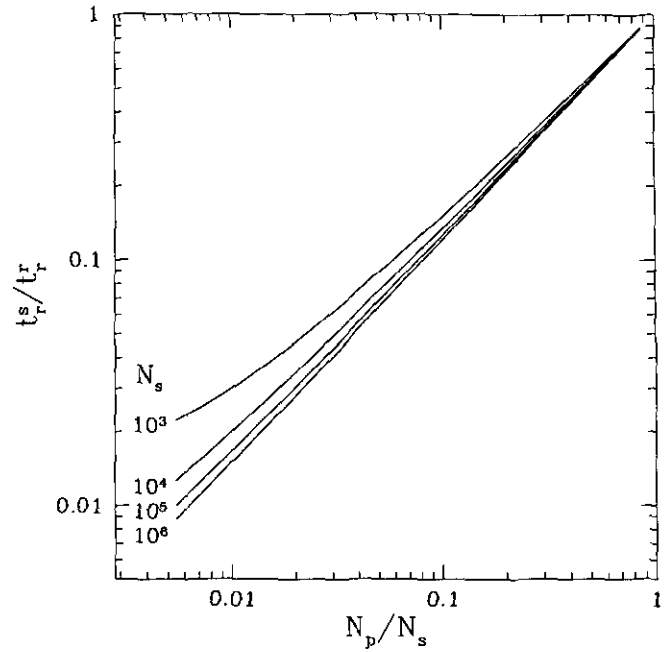


Fig. 4.1.— Relación entre el cociente de los tiempos de relajación de una simulación y el sistema físico correspondiente, y el cociente entre el número de partículas y estrellas. Las curvas en orden ascendente indican el número de estrellas del sistema que se desea modelar.

Resolver (2-1) con un número de partículas semejante al número de estrellas que tienen los cúmulos globulares, actualmente es inaccesible, porque el número de operaciones por paso de tiempo en una integración directa, se escala como  $O(N_p^2)$ . Además, si se considera la presencia inicial y la subsecuente formación de estrellas binarias se introduce en el sistema una escala de tiempo extremadamente pequeña que es necesario considerar.

De manera reciente, algunos autores han realizado simulaciones con 32,768 partículas integrando la ecuación (2-1), para estudiar como ocurre el colapso central en los cúmulos globulares. Esto se ha hecho con una computadora diseñada exclusivamente para resolver este tipo de problemas (GRAPE-4, Ebisuzaki *et al.* 1993, Taiji *et al.* 1996).

Por el costoso tiempo de CPU que se requiere en una integración directa, varios autores han desarrollado métodos aproximados para resolver el lado derecho de la ecuación (2-1). Sellwood (1987) hace una extensa revisión de las aproximaciones y de los códigos que se han aplicado en el estudio de sistemas astronómicos.

A continuación hacemos una breve descripción del código de árbol (CA), que es uno de los más populares en la literatura porque se adapta a la geometría del problema estudiado. Sin embargo, presenta la desventaja de ser costoso en tiempo de CPU. Como el problema que se desea estudiar es aproximadamente esférico es posible integrar la ec. (2-1) con un código basado en una expansión de

armónicos esféricos (CAE), con el que es posible realizar simulaciones con  $N_p = 10^5$  partículas en un tiempo razonable de cómputo.

4.2.1 Método del árbol jerárquico

Este método organiza a las partículas de manera jerárquica en el espacio, esto evitar hacer el cálculo de la fuerza entre todas las partículas del sistema de manera explícita. La fuerza entre partículas cercanas se calcula de manera directa, mientras que para las partículas lejanas estas se agrupan en seudopartículas. La resolución espacial con la que se calcula la fuerza, se determina con un criterio de tolerancia  $\theta$ , y con el número de términos en la expansión del potencial alrededor de las seudopartículas.

Barnes y Hut (1987), introducen la división del espacio de manera octal, que a su vez se subdividen en octantes hasta que cada partícula se encuentra dentro de una subdivisión. La dirección de cada subcelda se conoce por estar dentro de la estructura jerárquica, lo que automáticamente define su posición en relación a las demás partículas del sistema.

El criterio para determinar que partículas se consideran en el cálculo directo de la fuerza, y cuales como seudopartículas, depende de la separación entre la partícula y los nodos de cada subcelda ( $d$ ), en relación al tamaño de cada subcelda ( $l$ ),

$$\frac{l}{d} \leq \theta, \tag{2-2}$$

donde  $\theta$  es el criterio que determina hasta donde se consideran las partículas individuales para hacer el cálculo directo de la fuerza, o la agrupación de estas en seudopartículas (Hernquist y Barnes 1990, Pflanzner y Gibbon 1996).

La ventaja de este método es que no se requiere de ningún tipo de geometría global del sistema, porque se ajusta a las inhomogeneidades del mismo. Sin embargo, la conservación de cantidades como la energía, el momento y el momento angular dependen del valor de  $\theta$  (Hernquist y Barnes 1990).

Este método, aunque es uno de los más populares hoy en día, aún es prohibitivo para realizar integraciones con más de  $10^5$  partículas durante tiempos de más de dos tiempos dinámicos del sistema. El tiempo de cómputo, en este código, se escala como  $O(N \log N)$ . El 60%-80% del tiempo de CPU se emplea en regenerar el árbol que define la estructura jerárquica de las partículas en cada paso de tiempo (Hernquist 1989).

4.2.2 Código de armónicos esféricos

La idea básica de este método es la de sustituir la parte derecha de la ec. (2-1) por un desarrollo finito en series armónicas, adecuadas a la simetría del problema que será modelado (White 1983, McGlynn 1984, Aguilar 1985 y Aguilar 1992). El sistema debe conservar una simetría global para que el potencial y la fuerza converjan a lo

que se obtiene por integración directa. A continuación se muestra el método para realizar la expansión, y como se calcula el potencial y la fuerza que experimenta cada partícula.

Método de Expansión

El potencial gravitacional que ve la  $i$ -ésima partícula, debido a las  $N - 1$  partículas del sistema, está dado por

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = - \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{1/2}}, \tag{2-3}$$

con  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}_j$  los vectores de posición de la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima partícula respecto al centro del potencial, respectivamente.

La sumatoria de la ec. (2-3) se puede dividir en dos regiones: una interior y otra exterior a  $\mathbf{r}_i$ . Reescribiendo (2-3) se tiene (Aguilar 1985, y Hernquist y Barnes 1990)

$$-\Phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{\mathbf{r}_i > \mathbf{r}_j} \frac{m_j}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{1/2}} + \sum_{\mathbf{r}_i < \mathbf{r}_j} \frac{m_j}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{1/2}}. \tag{2-4}$$

Si se define  $s_i$  y  $s_j$  de la siguiente forma,

$$s_i \equiv (\mathbf{r}_i^2 + \epsilon^2)^{1/2}, \tag{2-5}$$

$$s_j \equiv (\mathbf{r}_j^2 + \epsilon^2)^{1/2}$$

Para  $|\mathbf{r}_i| < |\mathbf{r}_j|$ ,

$$(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon)^{-1/2} = s_j^{-1} \left( 1 + \frac{r_i^2}{s_j^2} - \frac{2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_j^2} \right)^{-1/2}, \tag{2-6}$$

y para  $|\mathbf{r}_i| > |\mathbf{r}_j|$ ,

$$(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon)^{-1/2} = s_i^{-1} \left( 1 + \frac{r_j^2}{s_i^2} - \frac{2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_i^2} \right)^{-1/2}. \tag{2-7}$$

Se define a  $x$  de la siguiente forma,

$$x = \begin{cases} \frac{r_i^2}{s_j^2} - \frac{2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_j^2}, & |\mathbf{r}_i| < |\mathbf{r}_j|, \\ \frac{r_j^2}{s_i^2} - \frac{2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_i^2}, & |\mathbf{r}_i| > |\mathbf{r}_j|. \end{cases} \tag{2-8}$$

Las ecuaciones (2-6) y (2-7) se pueden reescribir en términos de  $(1+x)^{-1/2}$ . Espresando  $(1+x)^{-1/2}$  en series de potencias,

$$(1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots, \text{ para } |x| < 1. \tag{2-9}$$

Sustituyendo en la ec. (2-4), se puede reescribir como,

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{\mathbf{r}_j < \mathbf{r}_i} \frac{m_j}{s_i} \sum_n a_n \left( \frac{r_j^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_i^2} \right)^n + \sum_{\mathbf{r}_j > \mathbf{r}_i} \frac{m_j}{s_j} \sum_n a_n \left( \frac{r_j^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{s_j^2} \right)^n, \tag{2-10}$$

donde  $a_n$  tiene la siguiente forma recursiva,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1-2n}{2n} a_{n-1}, & \text{si } n \geq 1; \\ 1, & \text{si } n = 0, \end{cases} \quad (2-11)$$

con  $n$  el orden de la expansión con que se desea aproximar el potencial. La fuerza que experimenta una partícula en  $\mathbf{r}_i$  será

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) = -\nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi(\mathbf{r}_i), \quad (2-12)$$

con  $\Phi(\mathbf{r}_i)$  dado por la ecuación (2-10) al orden deseado en  $n$ . A los primeros órdenes de esta expansión se les conoce como expansión monopolar ( $n=0$ ), dipolar ( $n=1$ ), cuadrupolar ( $n=2$ ) y octupolar ( $n=3$ ).

La fuerza y el potencial que experimenta cada partícula se calcula en dos pasos lineales sobre del arreglo de partículas, una vez que estas se han ordenado de manera ascendente en  $|\mathbf{r}|$  respecto al centro del potencial. En la primer suma se evalúa la fuerza o potencial debido a las partículas internas, en la segunda a las externas. En este método el tiempo de cálculo está dominado por la rutina que ordena las partículas en orden ascendente (respecto al centro del potencial), que se escala como  $O(N)$  (Hernquits y Barnes 1990).

### Centro de expansión

Un aspecto que resulta crítico en el método de expansión en armónicos esféricos, es la determinación del punto espacial alrededor del cual se hará dicha expansión. Cabe hacer notar que esto no ha causado dificultad en trabajos anteriores, porque los autores han modelado el sistema estelar con un perfil de de Vacouleurs, que presenta una singularidad en el centro de su perfil de densidad, lo que hace más fácil la determinación de un centro de expansión. En nuestro caso nos interesa modelar cúmulos con un perfil de King, que presenta una zona central con densidad aproximadamente constante (ver Fig. 1.2a). Esto hace particularmente difícil y crítica la determinación de un centro de expansión apropiado.

Idealmente, el centro de expansión debía ser el centro del potencial, es decir, el mínimo global del potencial del cúmulo suavizado a escalas espaciales menores que la distancia promedio entre partículas. Desafortunadamente, aunque sencilla, la descripción anterior es costosa de implementar en términos de tiempo de cómputo. Dicha implementación contemplaría un proceso en el que se establece una malla espacial cartesiana alrededor de un posible punto inicial. En cada punto de la malla se evalúa el valor del potencial colectivo de las partículas del cúmulo, para posteriormente evaluar el mínimo global de la malla, y centrados en este mínimo se procedería a iterar cada vez con una malla más fina, deteniendo la iteración al alcanzar la precisión requerida.

Una alternativa, relativamente sencilla, es emplear el centro de masa del sistema:

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{\sum_i^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i^N m_i}. \quad (2-13)$$

Lamentablemente, la posición del centro de masa depende sensiblemente de las partículas más alejadas del cúmulo, mientras que la posición del centro del potencial está dominada por las partículas más ligadas a este.

Por lo anterior hemos implementado un proceso iterativo intermedio entre los dos procesos arriba descritos, basado en una idea de D. Carpintero (1997, comunicación privada). La condición inicial es que el centro de expansión es el mínimo del potencial colectivo de las partículas del cúmulo, cuyo gradiente cumple la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(\mathbf{r}_{cexp}) &= \sum_{i=1}^{N_c} \frac{m_i |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cexp}|}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cexp}|^2 + \epsilon_c^2)^{3/2}} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2-14)$$

donde  $\epsilon_c$  es un parámetro de suavizamiento, que es del orden o mayor que la separación media entre partículas,  $\langle l \rangle^2$ , que se introduce para evitar que el mínimo de este potencial sea afectado por los potenciales individuales de las partículas, en particular, de aquellas que se encuentran en la región central.  $N_c$  es el número de partículas, menor o igual al total de estas, con las que se hace el cálculo del potencial, y  $\mathbf{r}_{cexp}$  es la posición del centro de expansión que deseamos encontrar.

Evaluando el gradiente y despejando la posición del mínimo, que aparece en el numerador, obtenemos

$$\mathbf{r}_{cexp}^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} \frac{m_i \mathbf{r}_i^{k-1}}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cexp}^{k-1}|^2 + \epsilon_c^2)^{3/2}}}{\sum_{i=1}^{N_c} \frac{m_i}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cexp}^{k-1}|^2 + \epsilon_c^2)^{3/2}}}, \quad (2-15)$$

donde  $\mathbf{r}_{cexp}^k$  es una  $k$ -ésima aproximación al valor buscado y  $\mathbf{r}_{cexp}^{k-1}$  es el valor de la aproximación anterior.

La idea ahora es usar la expresión anterior de manera iterativa, sustituyendo del lado derecho con una primera aproximación del centro de expansión y obteniendo del lado izquierdo la aproximación subsecuente

Se define la tolerancia ( $\eta$ ) como la condición necesaria para detener el proceso iterativo, que ocurre cuando se cumple que,

$$\eta \geq |\mathbf{r}_{cexp}^{k-1} - \mathbf{r}_{cexp}^k|. \quad (2-16)$$

Los parámetros que juegan un papel importante en la convergencia de este método son: el suavizamiento,  $\epsilon$ ; la tolerancia,  $\eta_c$ ; y el número de partículas con las que se encuentra el centro de expansión ( $N_c$ , que es un porcentaje de las partículas ordenadas de manera radial respecto al centro de masa. Este algoritmo lo llamaremos *Algoritmo De Centrado* (ADC).

Para probar la confiabilidad del ADC se generaron 100 realizaciones azarosas de un modelo de King. La concentración del modelo fue de  $c=1.5$  con  $N = 10^4$  partículas. En cada uno de ellos se calculó el centro del potencial

<sup>2</sup>Como la densidad de los modelos de King es función del radio, nos referimos a la separación media entre partículas dentro del radio central.

$r_{\text{cexp}}$ , variando  $\epsilon_c$ , entre  $0.1 < l >$  y  $100 < l >$ ;  $\eta$ , entre  $10^{-1}$  y  $10^{-5}$ ;  $N_c$ , entre  $0.1N$  y  $N$ . La posición inicial para el ADC se varió entre  $r_c$  (radio central del modelo de King) y  $100 r_c$ .

Los valores encontrados con el ADC se comparan con los que se encuentran utilizando una malla cúbica de muestreo de la función potencial dentro del cúmulo. Inicialmente se utiliza una malla cúbica con baja resolución para encontrar la posición aproximada del mínimo del potencial. Centrada en esa posición se utiliza una malla de mayor resolución, donde se evalúa con mayor precisión la posición del mínimo del potencial. La resolución de la malla es del orden de  $\sim 0.1 < l >$ . Los valores encontrados con este método los llamaremos *valores de la malla cúbica* (VMC).

Encontramos que los resultados de ADC siempre convergen al VMC, al menos dentro de la resolución de la malla, cuando  $\epsilon_c \geq < l >$ . Si  $\epsilon_c \ll < l >$ , el método converge a mínimos locales, es decir, a los pozos del potencial de partículas individuales. El número de iteraciones en las que se converge, en el peor de los casos fué de 10 y 15. Si la posición inicial del centro de expansión está dentro de  $r_c$ , el método converge en 3-6 iteraciones. El parámetro  $\eta$  controla la precisión con la que se converge a la solución. Si se desea una precisión muy grande el número de iteraciones aumentará. En este caso la mejor convergencia se obtiene para un valor de  $10^{-3} < \eta < 5 \times 10^{-3}$ .

Conocidos los intervalos de confiabilidad del ADC, hacemos un par de simulaciones para probar la rutina en condiciones semejantes a las de nuestros experimentos ( $N=10^5$  partículas). Primero en un cúmulo aislado y después en órbita circular. En ambos casos el primer punto para el algoritmo es el centro de masa. El criterio que se utilizó para determinar los mejores valores de estos parámetros, es que la variación total de la energía del cúmulo sea mínima.

Nuestros resultados muestran que la energía total del cúmulo se conserva mejor con los siguientes valores:  $\epsilon_c \sim 10 < l >$ ;  $\eta \sim 5 \times 10^{-3}$ . Para el cúmulo aislado y en órbita circular.

El número de partículas con las que se logra una mejor convergencia, es de un 30% a 100% del total, siempre y cuando estas sean las más cercanas, en orden ascendente, al centro del cúmulo. El número de iteraciones en las que se converge están entre 5 y 10.

Estos parámetros son los que hemos "sintonizado" en el código de armónicos esféricos para realizar nuestras simulaciones.

### Momentos cuadrupolar y octupolar

Para determinar a que orden es conveniente realizar la expansión de los armónicos esféricos, hemos comparado la evolución de un cúmulo con un código basado en la expansión de armónicos esféricos hasta el orden cuadrupolar (CAEC), y en otro hasta orden octupolar (CAEO).

Evolucionamos un modelo de King, de concentración

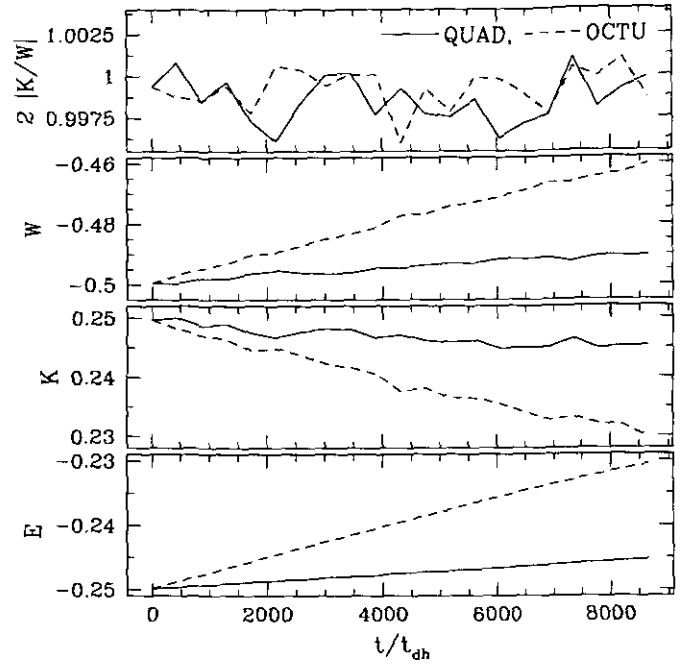


Fig. 4.2.— Comparación de la energía potencial ( $W$ ), cinética ( $K$ ) y la total ( $E$ ), durante la evolución de un cúmulo globular aislado, utilizando la expansión de armónicos esféricos al término cuadrupolar (línea sólida), y al octupolar (línea de trazo), durante  $8825 t_{cr}$ .

$c=1.5$ , con  $10^5$  partículas, durante  $8650 t_{cr}$  ( $t_{cr} \sim r_h/v_m = 5 pc/7 km s^{-1} = 1.3 \times 10^5$  años) que corresponden a  $\sim 11 t_{rh} \sim 10^9$  años, con un  $\Delta t = t_{cr}/40$ .

En la Fig. 4.2 se muestra la evolución temporal de la energía potencial, la cinética y la total del cúmulo, para ambas simulaciones. En la Fig. 4.3 se muestra la evolución de los radios lagrangianos para cada fracción de masa ahí indicada. Los cambios en la energía del cúmulo son mayores para los resultados del CAEO que para el CAEC. La estructura del cúmulo experimenta mayores cambios para los resultados del CAEO.

El cambio porcentual en la energía de cúmulo evolucionado con el CAEC es de 1.88%, mientras que para el CAEO fue de 7.74%, es decir, 4.1 veces mayor que el resultado del CAEC.

La diferencia entre los resultados se puede deber al mayor número de operaciones que se realizan en el CAEO, aproximadamente, 60 más por componente espacial, lo que puede estar introduciendo mayores errores de redondeo, los cuales son acumulativos (Press et al. 1992).

Como nuestro código no es colisional, no esperamos reproducir el colapso central del cúmulo (ver §1.3.1), así como la evaporación de este. Los resultados que se obtienen con el CAEO, muestran una expansión que no corresponden a lo que se espera del código, ya que dicha expansión se presenta en regiones internas como de las externas. Los resultados del CAEC no muestran dicha expansión, así como la variación tan considerable en las regiones centrales

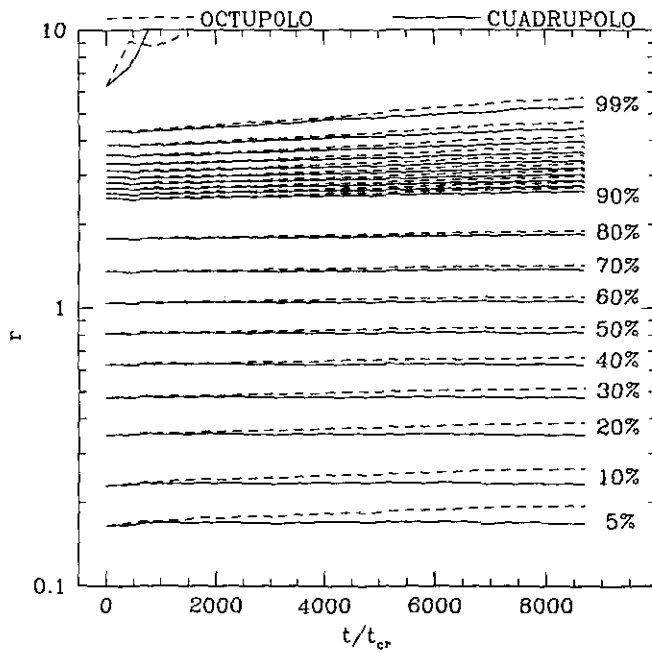


Fig. 4.3.— Comparación de la evolución temporal de los radios lagrangianos para las mismas simulaciones de la Fig. 4.2. La línea de trazo corresponde a los resultados del CAEO y la línea continua al CAEC.

del cúmulo.

Como el objetivo de nuestros experimentos es el de medir el cambio en la energía de las estrellas, debido a los choques de marea, esto será imposible si el mismo código introduce un calentamiento numérico considerable, ocultando el efecto que se desea medir. Por esa razón se decidió utilizar el CAEC para realizar nuestras simulaciones, que es el que menores efectos numéricos introduce en la simulación.

### 4.2.3 Expansión del cúmulo

En la Fig. 4.3 (línea sólida) vemos que el cúmulo mantiene una estructura razonablemente estable durante el tiempo de integración ( $\sim 11t_{rh}$ ). Esto se debe al carácter no-colisional del código que hemos utilizado.<sup>3</sup>

La evaporación es una consecuencia de la relajación de 2 cuerpos (ver § 1.3.1). Este proceso hace que el cúmulo experimente un colapso de su región central en un tiempo del orden de  $11-19 t_{rh}$ , acompañado de una expansión en su regiones externas (ver § 4.2 de Spitzer 1987, y referencias que ahí se dan).

El colapso central fué predicho teóricamente, y también ha sido reproducido en simulaciones de N-cuerpos con códigos colisionales (Makino 1996).

Como el CAE es un código no colisional no es posible

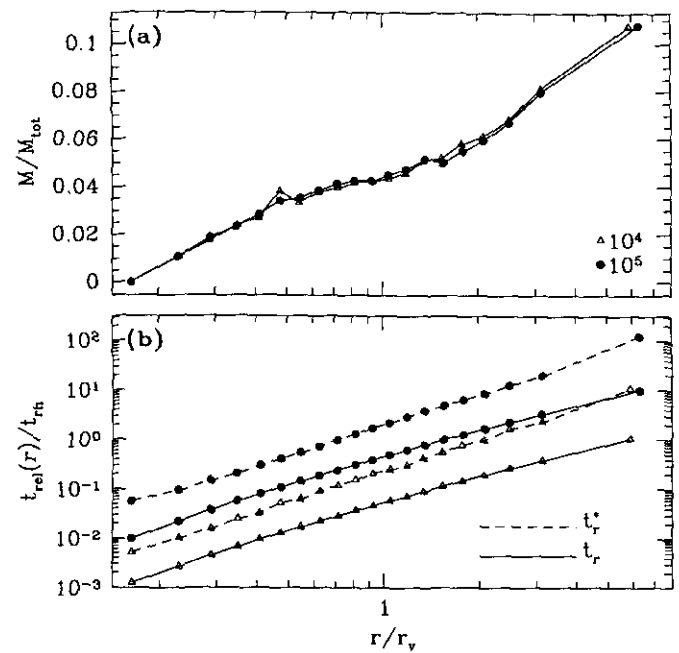


Fig. 4.4.— En (a) se muestra la cantidad de masa porcentual que puede llegar a cada intervalo considerado, que inicialmente contiene el 5% de la masa para dos modelos con  $10^4$  (triángulos abiertos) y  $10^5$  (círculos sólidos) partículas. En (b) se muestran los tiempos teóricos de relajación para el caso  $t_r$  (línea sólida) y  $t_r^*$  (línea de trazos) para  $10^4$  y  $10^5$  partículas. Notamos que  $t_r^*$  es mayor que  $t_r$ , por más de medio orden de magnitud. El valor de  $t_{rh}$  utilizado en la normalización, es el que corresponde a  $t_r^*$  para el modelo con  $10^5$  partículas.

seguir en detalle el colapso central y la evaporación en nuestras simulaciones. Sin embargo, estos procesos ocurren en escalas de tiempo comparables o similares a las escalas que aquí nos interesan, por lo cual es importante estimar cualitativamente el efecto esperado.

Una manera heurística de evaluar este efecto es suponer que la distribución de velocidades, en cada intervalo radial dentro del cúmulo, ( $r, r + \Delta r$ ), alcanza la forma de una distribución Maxwelliana en un tiempo de relajación local ( $t_{r-loc}$ ) (ver § 1.3.1). Por lo que las estrellas en la cola superior de la distribución de velocidades pueden pasar a formar parte de un intervalo radial externo, o escapar definitivamente del cúmulo.

El número de partículas, que de un intervalo radial interno,  $\Delta r_{int}$ , pueden pasar a un intervalo radial externo,  $\Delta r_{ext}$ , es función de la energía de las partículas. Una partícula con energía  $E_i$ , puede pasar al intervalo externo donde su energía cinética es igual a cero,  $E_i = \Phi(r_{ext})$ .

En cada intervalo externo se suman las partículas internas cuya energía total corresponda a la energía potencial de dicho intervalo. La tasa de acreción está dada por el número de partículas que provienen de cada intervalo, entre el tiempo de relajación local correspondiente al intervalo radial del que provienen. Como podemos ver, el momento en que las partículas pueden pasar a un inter-

<sup>3</sup>Recordemos que este no sigue en detalle las colisiones de las partículas, en particular, en la región central, donde estas son más importantes.



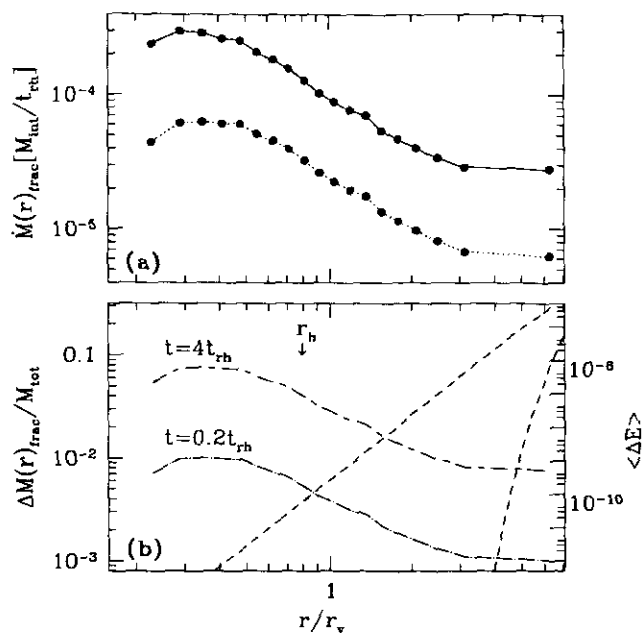


Fig. 4.5.— En (a) se muestra la fracción de masa que contamina cada intervalo radial, que contiene inicialmente el 5% de la masa total, por unidad de tiempo. En (b) tenemos la masa fraccional que contamina a cada uno de los intervalos entre  $t=0.2t_{rh}$ – $4t_{rh}$ , que corresponden al intervalo temporal de nuestras simulaciones. Ahí mismo se han graficado las curvas de calentamiento según los modelos de Spitzer y Weinberg, que se discuten en el capítulo II, con el fin de mostrar las escalas físicas donde el efecto de relajación se puede sobreponer al de los choques de marea.

valo radial externo está determinado por el tiempo local de relajación ( $t_{r-loc}$ ), que corresponde a la posición radial de donde provienen las partículas.

En la Fig. 4.4a se muestra la fracción de masa que puede llegar a cada uno de los intervalos radiales externos. Esta crece como función del radio, porque el número de intervalos que contribuyen a cada intervalo externo, aumenta como función de  $r$ .

El tiempo de relajación correspondiente a cada intervalo se puede obtener con dos tipos de análisis: el primero es función del tiempo dinámico ( $t_d$ ). Esta suposición nos permite utilizar una de las expresiones más citadas en la literatura (Binney y Tremaine 1987, §4.1);

$$t_r = \frac{N_{int}}{8 \ln N_{int}} t_d; \quad t_d \propto \rho(r)^{-1/2} \quad (2-17)$$

donde  $\rho(r)$  es la densidad de masa promedio interna a  $r$ , y  $N_{int}$  es el número de partículas dentro de  $r$ . La segunda forma, de evaluar éste tiempo, es utilizando cantidades locales como la separación media entre partícula, y la dispersión local de velocidades,  $\langle v^2 \rangle$  (Chandrasekhar

1942),

$$t_r^* = \frac{1}{16} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\langle v^2 \rangle^{3/2}}{N_i m_i \ln \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{2m_i N_i^{1/3}} \right)}, \quad (2-18)$$

con  $N_i$  la densidad local de partículas y  $m_i$  la masa de la  $i$ -ésima partícula.

En la Fig. 4.4b se muestran los tiempos de relajación como función de  $r$ , para un modelo de King con  $c=1.5$  con  $10^4$  (línea con triángulos) y  $10^5$  (línea con círculos negros) partículas. En ambos casos  $t_r^*$  es mayor ( $\sim 8$  veces) que  $t_r$ . Estos límites nos dan una idea aproximada de los tiempos de relajación local que se tienen en los cúmulos globulares. Notamos que el tiempo de relajación en la región central es dos órdenes de magnitud mayor que para las zonas externas del cúmulo.

Conociendo el número de estrellas que pueden pasar a cada intervalo externo (ver Fig. 4.4a), y el tiempo de relajación para cada intervalo (Fig. 4.4b), se puede calcular la tasa de acrecimiento de masa en los intervalos externos. Esta será igual a la suma del número de partículas internas al cascarón considerado, con energías en el intervalo ( $E_i = \Phi(r_i), E_{i+1} = \Phi(r_{i+1})$ ], entre el  $t_{r-loc}$  del intervalo interno de donde proviene cada partícula. La tasa de acrecimiento de masa, para cada intervalo externo está dada por,

$$\dot{M}(r_{ext}) = \sum_{r_{int}=0}^{r_{int} < r_{ext}} \frac{\Delta M(r_{int})}{t_{r-loc}(r_{int})}. \quad (2-19)$$

En la Fig. 4.5a, se muestra la tasa de acrecimiento de masa por intervalo radial (que inicialmente se define con el 5% de la masa) para un modelo con  $10^5$  partículas. En está figura vemos que la diferencia entre la relación (2-18), que considera condiciones locales (con  $t_r^*$ , línea punteada) y la ecuación (2-17), que considera condiciones promedio (con  $t_r$ , línea sólida), es aproximadamente, de un orden de magnitud.

El intervalo temporal que abarcan nuestras simulaciones es de  $0.2 t_{rh}$  a  $4 t_{rh}$ . En la Fig. 4.5b, hemos graficado, considerando la tasa de acreción más baja de la Fig. 4.5a, el incremento fraccional de la masa para cada uno de estos intervalos. Vemos que en el peor de los casos ( $t=4 t_{rh}$ ), la masa que “cae” en un intervalo centrado alrededor de  $r_h$  es de un 4% de  $M_{tot}$ , disminuyendo hasta ser de 0.7%  $M_{tot}$  en las zonas externas. Por otro lado, para el caso más favorable ( $0.2 t_{rh}$ ), la masa que “cae” en el intervalo centrado en  $r_h$  es de un 0.4%  $M_{tot}$  disminuyendo hasta ser de un 0.1% en el radio de marea.

En la Fig. 4.5b hemos graficado las funciones de calentamiento de Spitzer y Weinberg (ver § 2.2.2), con el fin de mostrar la escala espacial en la que el calentamiento y la evaporación se pueden sobreponer. Vemos que ambos efectos casi no se sobreponen durante el intervalo temporal considerado. De lo anterior se puede decir que el efecto de los choques es el más importante en las regiones externas del cúmulo.

Los criterios que utilizamos en este análisis son muy aproximados. Hemos supuesto que las partículas sólo “fluyen” hacia regiones externas, y que todas aquellas con una energía  $E_i = \Phi(r_{\text{ext}})$  pasan al intervalo exterior. Esta suposición, en principio, sobreestima la magnitud de este efecto, razón por lo que podemos concluir que no será importante en el intervalo temporal que abarcan nuestras simulaciones. Respecto al intervalo espacial, de la Fig. 4.5b, podemos apreciar que ambos efectos se superponen de manera significativa en un intervalo alrededor de  $0.8 < r/r_v < 2$ . En este intervalo el efecto del choque es dos ordenes de magnitud menor que en  $r_t$ . Un aspecto adicional que se debe considerar, es que está evaporación es continua, mientras que los choques de marea son periódicos, por lo que dicha superposición se debe analizar por periodo orbital y no considerando el tiempo total de la simulación, lo que reduce aún más la posible superposición de estos efectos.

#### 4.2.4 Calentamiento numérico

Llamaremos calentamiento al incremento total de la energía del cúmulo ( $\Delta E_c$ ). Este es causado por la interacción del cúmulo con la Galaxia ( $\Delta E_{GC}$ ) y por errores de redondeo inherentes al código ( $\Delta E_{num}$ ). El calentamiento total dentro de la simulación será,

$$\Delta E_c = \Delta E_{GC} + \Delta E_{num}. \quad (2-20)$$

Si  $\Delta E_{num}$  es mayor que  $\Delta E_{GC}$  los resultados serán dominados por “ruido numérico” y no por el fenómeno que deseamos estudiar.

Para evaluar la magnitud de  $\Delta E_{num}$  hemos realizado tres experimentos. En el primero se estudia la evolución del cúmulo de manera aislada, y en los otros dos en órbita circular. De esta manera podemos saber cual es el error que introduce el código al hacer el cálculo del potencial y la fuerza de manera aproximada, y al incluir el potencial y la fuerza de la Galaxia sobre cada estrella del cúmulo. En la Fig. 4.6 se muestra el calentamiento porcentual para los experimentos antes descritos.

Para evitar que los efectos del campo de marea galáctico dominen la evolución de los cúmulos globulares durante sus órbitas circulares, hemos escalado su tamaño, para que los cúmulos sean menores que el tamaño del lóbulo de Roche que le corresponde.

A continuación se reportan los resultados de estos experimentos donde el cúmulo se tomo como un modelo de King, de concentración  $c=1.5$ , con  $10^5$  partículas (ver Apéndice A).

##### Cúmulo aislado

Retomando los resultados que se obtienen en § 4.2.2 para el CAEC (ver Fig. 4.2 línea continua), tenemos que el cambio fraccional de la energía es de  $1.84 \times 10^{-2}$  en  $10^4$  unidades de tiempo ( $\sim 4 \times 10^5$  pasos del integrador). Esto significa que la variación porcentual de la energía del

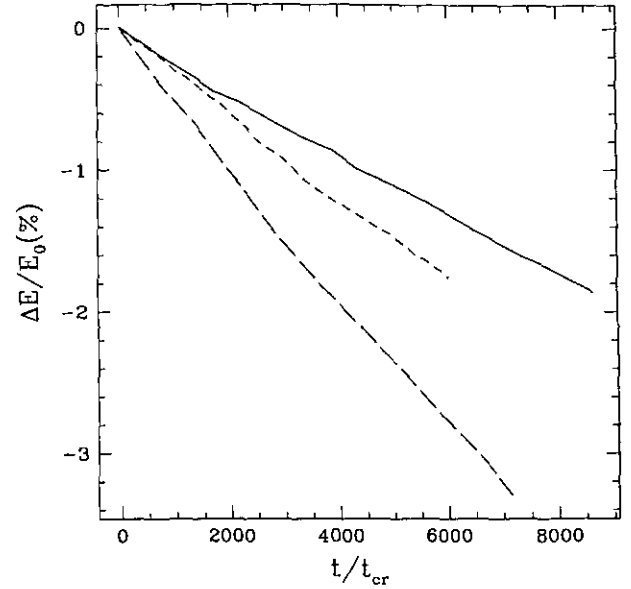


Fig. 4.6.— Calentamiento porcentual como función del tiempo para un cúmulo aislado (línea sólida), órbita circular a 6 kpc (línea de trazo corto) y a 3 kpc (línea de trazo largo).

cúmulo, por unidad de tiempo, es

$$\frac{1}{t} \frac{\Delta E_c^{ais}}{E_c} (\%) = 2.1 \times 10^{-4} t_{cr}^{-1}. \quad (2-21)$$

Donde hemos supuesto que la variación de la energía es lineal con el tiempo (ver línea sólida de la Fig. 4.6).

#### 4.2.5 Cúmulo en órbita circular

Para medir el calentamiento numérico que se introduce al incluir el cálculo del potencial galáctico hemos realizado dos experimentos en órbita circular, a 6 kpc y 10.5 kpc, del centro galáctico.

El lóbulo de Roche es 2.5 y 3 veces mayor que el tamaño inicial del cúmulo para la simulación a 6 kpc y 10 kpc del centro galáctico, respectivamente.

El calentamiento numérico, por unidad de tiempo, para cada uno de los experimentos es de,

$$\frac{1}{t} \frac{\Delta E_c^{6kpc}}{E_c} (\%) = 2.9 \times 10^{-4} t_{cr}^{-1}, \quad (2-22)$$

y

$$\frac{1}{t} \frac{\Delta E_c^{10.5kpc}}{E_c} (\%) = 4.6 \times 10^{-4} t_{cr}^{-1}. \quad (2-23)$$

De las ec. (2-21), (2-22) y (2-23), se decidió tomar el promedio de (2-22) con (2-23), porque son las que involucran el potencial galáctico. Vemos que el valor de (2-21) es 2 veces menor que el de (2-23), y muy parecido al de (2-22).

Definimos la función de calentamiento numérico como,

$$\frac{1}{t} \frac{\Delta E_c}{E_c} (\%) = 3.8 \times 10^{-4} t_{cr}^{-1}. \quad (2-24)$$

El cambio porcentual en la energía del cúmulo, debido al calentamiento numérico, será evaluado a partir de esta relación.

En las Tablas III-VI (ver § 4.4) se da el período orbital de cada uno de los experimentos en unidades del modelo. Considerando 10 períodos orbitales para el experimento que mayor duración tiene, encontramos que el mayor calentamiento numérico que se puede esperar en nuestras simulaciones, es de un 2.5%.

### 4.3 Diseño de los Experimentos

Para estudiar el efecto que los choques de marea tienen sobre un cúmulo globular, es necesario considerar un intervalo de valores para los parámetros que define la estructura del cúmulo y de su órbita alrededor de la Galaxia.

La frecuencia orbital de las estrellas dentro del cúmulo está determinada por su perfil de masa, y por la densidad media del cúmulo. La amplitud y frecuencia con la que actúa la fuerza de marea, es función de la excentricidad y la distancia perigaláctica ( $R_{peri}$ ) de su órbita alrededor de la Galaxia.

Debido a las limitaciones que se tienen en el tiempo de computo, no es posible explorar de manera detallada el espacio de parámetros que determinan la estructura del cúmulo (masas y concentración), así como de su órbita ( $R_{peri}$  y  $e$ ).

Es por esto que necesitamos determinar las condiciones iniciales de manera adecuada para obtener la mayor información posible sobre el fenómeno que se desea estudiar, y además de poder estudiar los casos extremos en el comportamiento de dicho fenómeno. La selección de los parámetros iniciales de las simulaciones se discute a continuación.

#### 4.3.1 Órbitas del cúmulo

La amplitud de la fuerza de marea es máxima cuando el cúmulo se encuentra en su punto perigaláctico ( $R_{peri}$ ). Los valores de  $R_{peri}$  que consideramos son 1.5 kpc, 3 kpc y 6 kpc. La relación entre estos valores de  $R_{peri}$  es geométrica, a intervalos de factores de 2.

La variación temporal de la fuerza de marea se puede relacionar con el momento angular de la órbita. El momento angular relativo se define como  $\kappa = J/J_{max}$ , donde  $J_{max}$  es el momento angular de la órbita circular, que corresponde al apogaláctico de la órbita del cúmulo. Para una órbita circular  $\kappa = 1$ , y para una órbita radial  $\kappa = 0$ . Sin embargo, es más sencillo visualizar la forma de la órbita con la excentricidad, que se define en términos de  $R_{peri}$  y  $R_{apo}$ ,

$$e = \frac{R_{apo} - R_{peri}}{R_{apo} + R_{peri}}. \quad (3-1)$$

Para cada valor de  $R_{peri}$  seleccionamos 4 valores de la excentricidad:  $e=0, 0.25, 0.5$  y  $0.75$ . Para  $e=0$  la fuerza de marea es constante, la máxima variación se tiene cuando  $e=0.75$  (ver Fig. 2.15).

En la Tabla I se dan los valores  $R_{apo}$  como función de los valores de  $R_{peri}$  y  $e$ . También se da el valor de  $\kappa$  que corresponde a cada excentricidad.

#### 4.3.2 Masa y densidad inicial

La masa y concentración inicial de los cúmulos es de  $5 \times 10^5 M_\odot$  y 1.5, respectivamente. Estos valores corresponden a las medianas de las distribuciones respectivas, para el sistema de cúmulos globulares galáctico (ver figuras 1.4 y 1.5). La concentración determina la distribución espacial de la masa dentro del cúmulo. La densidad media del cúmulo está determinada por el valor de  $r_h$ , que depende de la masa y de escala espacial que se le asigne al modelo.

La Galaxia impone un radio límite,  $R_L$ , para el cúmulo, valor que es mínimo cuando este se encuentra en su  $R_{peri}$ , dado por (Binney y Tremaine 1987),

$$R_L^3 = \frac{1}{3} \frac{M_c}{M_G(R_{peri})} R_{peri}^3, \quad (3-2)$$

donde  $M_c$  es la masa total del cúmulo,  $M_G(R_{peri})$  es la masa de la Galaxia dentro de  $R_{peri}$ . El valor de  $R_L$ , a primera aproximación, se puede identificar con el radio del lóbulo de Roche. En  $R_L$  la densidad del cúmulo es aproximadamente igual a la densidad de la Galaxia.

En la Fig. 4.7, se muestra el valor de  $R_L$  como función de la distancia galactocéntrica para tres valores de la masa del cúmulo (indicados en el lado izquierdo de cada curva). Ahí mismo hemos graficado los valores observados de  $r_t$  para los cúmulos globulares galácticos, como función de su distancia galactocéntrica. Los símbolos indican el intervalo de masa en que se encuentra cada cúmulo.

En la Fig. 4.7 vemos que hay cierta correlación entre los valores de  $r_t$  con  $R_G$ . Para los cúmulos masivos (círculos negros) esta correlación es muy clara. Para los cúmulos de masa intermedia (círculos abiertos) no es claro que exista alguna correlación, porque la dispersión en los valores de la masa parece aumentar a radios galactocéntricos mayores a los 10 kpc. Los cúmulos menos masivos (esqueleto de triángulo) no parecen seguir ningún tipo de relación. Cabe hacer notar que la posición galactocéntrica de los cúmulos observados, no es necesariamente al valor de su perigaláctico, que seguramente es menor.

En nuestros experimentos los cúmulos se lanzan inicialmente en el apogaláctico de su órbita, donde la influencia del campo de marea galáctico, en una órbita dada es mínima. El radio del lóbulo de Roche disminuye proporcionalmente a su distancia galactocéntrica (ver Fig. 4.7 líneas sólidas), de tal forma que el cúmulo puede o no estar totalmente contenido dentro del lóbulo de Roche que está en su  $R_{peri}$ .

Si el tamaño del cúmulo,  $r_t$ , es mayor que el tamaño mínimo del lóbulo de Roche ( $R_L$ ), una fracción de la ma-

TABLA I  
VALORES DE  $R_{\text{apo}}$  COMO FUNCIÓN DE  
 $R_{\text{peri}}$  Y  $e$ .

$e$	$\kappa$	$R_{\text{peri}}$ (kpc)		
		1.5	3.0	6.0
0	1	1.5	3	6
0.25	0.77	2.5	4.5	10.5
0.5	0.51	5	9	21
0.75	0.27	10	18	42

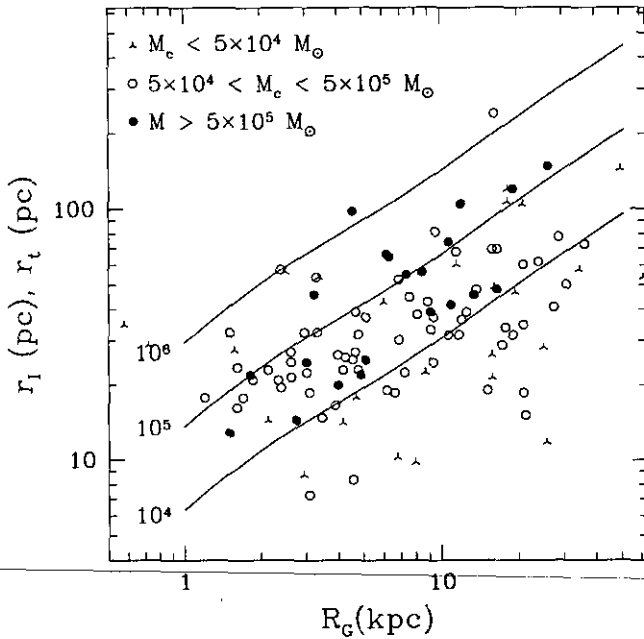


Fig. 4.7.— Radio límite  $r_t$  impuesto por el campo de marea galáctico como función del radio galactocéntrico  $R_{GC}$  para tres valores de la masa del cúmulo según la ec. (3-2). Los símbolos son los valores observados del radio de marea ( $r_t$ ) de los cúmulos globulares galácticos. Cada símbolo indica el intervalo de masas en que se encuentran.

sa del cúmulo será desprendida por el campo de marea galáctico. La fracción inicial de masa que está dentro del lóbulo de Roche cuando este pasa por su punto perigaláctico, se define como  $M(x_f)$  (Murali y Weinberg 1997), donde  $x_f$  está dado por

$$x_f = \frac{r_t}{R_L} \quad (3-3)$$

donde  $r_t$  y  $r_L$  son los radios de marea del cúmulo y del lóbulo de Roche en el  $R_{\text{peri}}$  del cúmulo. El valor de  $M(x_f)$  también depende de la distribución radial de la masa del cúmulo, que en los modelos de King está determinada por la concentración.

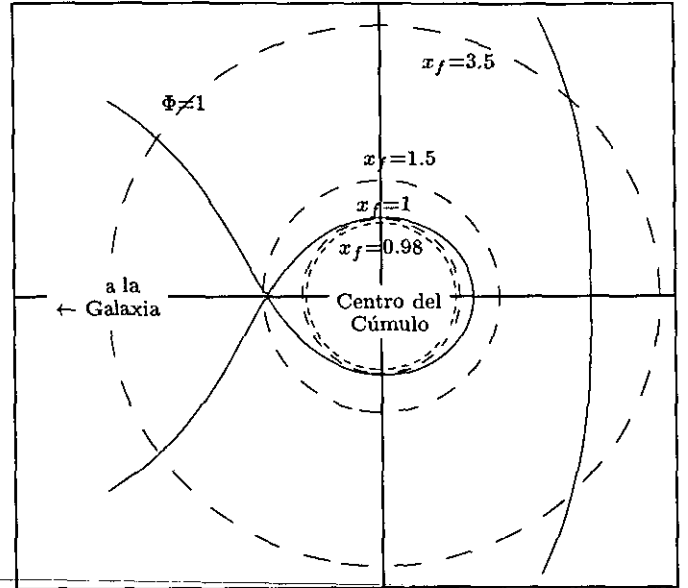


Fig. 4.8.— Esquema ilustrativo para mostrar el tamaño inicial de los cúmulos, en nuestros experimentos, respecto al lóbulo de Roche en  $R_{\text{peri}}$ . La línea sólida muestra el lóbulo de Roche. Las líneas de trazos indican los distintos tamaños de los cúmulos que hemos considerado.

Para estudiar el truncamiento que el campo de marea galáctico impone sobre la distribución de masa del cúmulo, hemos escalado su tamaño inicial para que  $x_f$  y  $M(x_f)$  tengan los siguientes valores:  $M(3.5) = 0.8$ ,  $M(1.5) = 0.98$ ,  $M(1) = 1$  y  $M(0.95) = 1$ . Con estos valores se tiene un amplio intervalo para la densidad inicial del cúmulo. No hemos considerado valores con  $x_f < 0.95$ , porque el efecto del campo de marea en esos casos es mínimo, como ya se ha visto en §4.2.4. En la Fig. 4.8 se muestran los tamaños iniciales de los cúmulos respecto al lóbulo de Roche en su  $R_{\text{peri}}$ .

Nuestros modelos se escalan en función del radio viaral ( $r_v$ ), que por construcción es igual a la unidad (ver Apéndice A). En la Tabla II se dan los factores de esca-

la que utilizamos en cada experimento, como función de los tamaños relativos del cúmulo y el lóbulo de Roche, así como del  $R_{\text{peri}}$  de su órbita. La relación entre el radio mediano de masa y el radio virial, para una concentración de  $c=1.5$ , es de  $r_h \sim 0.8r_v$ .

#### 4.3.3 Escenarios físicos

Las condiciones iniciales que hemos seleccionado nos permiten definir una serie de experimentos para estudiar la evolución del los cúmulos globulares bajo los siguientes escenarios:

- A) Cúmulo limitado por fuerza de marea,  $M(x_f) = 1$ , con  $x_f \leq 1$ , en órbitas excéntricas. Esto nos permite estudiar la inyección de energía en la estructura del cúmulo cada vez que este pasa por su perigaláctico. También es posible estudiar los efectos de una perturbación periódica sobre la estructura del cúmulo, donde no existe una interacción directa del campo de marea sobre la distribución de masa, es decir, no hay truncamiento.
- B) Cúmulo no limitado por fuerza de marea,  $M(x_f) = 0.8$ . Nos permite estudiar el "desbordamiento del lóbulo de Roche" mientras se establece el radio de marea. Además es posible estudiar los transitorios en su estructura y el proceso de pérdida de masa a través de las colas de marea. Se estudian los efectos combinados del "truncamiento de marea" y el calentamiento por choques. También nos permite estudiar el comportamiento del sistema después de los primeros encuentros (que se espera sean los más destructivos).
- C) Cúmulo en el límite del lóbulo de Roche,  $M(x_f) = 1$ , para todas las órbitas. Se espera que el calentamiento por choques sea el que determine la destrucción del cúmulo.
- D) Estudiar los casos anteriores variando la amplitud y la frecuencia con que actúa la fuerza de marea ( $R_{\text{peri}}$  y  $e$ ). De esta manera se puede conocer la importancia de los parámetros orbitales en la evolución del cúmulo.

#### 4.4 Experimentos

Hemos realizado 48 experimentos, que son el resultado de considerar 3 perigalácticos, 4 excentricidades y con los 4 tamaños del cúmulo respecto a su lóbulo de Roche.

##### 4.4.1 Notación

Por sencillez hemos definido una notación que nos da información sobre las condiciones iniciales de cada experimento en el nombre de la "corrida",

$$\underbrace{X}_1 \underbrace{nn}_2 \underbrace{tt}_3 \quad (4.1)$$

En cada espacio se da la siguiente información;

- 1) Con valores de A, B y C, que determinan el valor del  $R_{\text{peri}}$  inicial de la órbita del cúmulo, éstos corresponden a 1.5 kpc, 3 kpc y 6 kpc, respectivamente.
- 2) Este espacio indica la excentricidad de la órbita del cúmulo, con valores de 00, 25, 50 y 75, que corresponde a  $e=0.0, 0.25, 0.50$  y  $0.75$ , respectivamente.
- 3) Esta parte nos indica el valor inicial de  $x_f$ , que tiene valores de 0.95, 1.0, 1.5 y 3.5, que en esta notación corresponden a  $s, m, ml$  y  $l^{\#}$ , respectivamente.

Por ejemplo, el experimento con  $R_{\text{peri}}=1.5$  kpc,  $e=0.50$  y  $x_f = 1$ , con esta nomenclatura se escribe como "A50m". Si el perigaláctico de la órbita es 6 kpc, entonces el nombre del experimento será "C50m".

##### 4.4.2 Condiciones iniciales

Los parámetros iniciales de cada experimento se dan en las Tablas III, IV, V y VI. Cada una de las tablas corresponde a cada uno de los tamaños del cúmulo que hemos considerado ( $l, ml, m$  y  $s$ ). Ahí mismo se dan los factores de escala espacial ( $[l](pc)$ ) que corresponden a cada  $R_{\text{peri}}$ , así como la posición  $R_{\text{apo}}$  y velocidad inicial  $V_{\text{apo}}$  de los cúmulos en  $t=0$ . También se indica el período orbital de los cúmulos alrededor de la Galaxia.

El cúmulo es una realización azarosa de un modelo de King (1966), de concentración 1.5 (ver Apéndice A). El sistema de unidades que hemos considerado en nuestras simulaciones es tal que  $G = r_v = M_c = 1$ ,  $E_c = -1/4$ . El número de partículas de la simulación es de  $10^5$ . El modelo se escala dando el valor físico de  $r_v$  y de la masa (ver Apéndice B). En las Tablas III-VI se dan los valores a los que se escala  $r_v(pc)$  en cada experimento.

El modelo galáctico que utilizamos es el modelo de BSS 83 (ver §3.3), que hemos modificado para que todas sus componentes sean esféricas (ver §3.6).

El cúmulo se evoluciona de manera aislada durante 80 tiempos dinámicos en el radio mediano de masa, esto se hace para relajar sus condiciones iniciales antes de que interactúe con el potencial galáctico.

Todas las simulaciones se siguen durante 10 períodos orbitales. Cada  $P_{\text{orb}}/4$  se guardan las posiciones y velocidades de las  $10^5$  partículas, hasta completar un total de 40 cuadros por experimento. Todos los experimentos se realizaron en una máquina *Origin 2000* de la Silicon Graphics.

A continuación presentamos el análisis de una simulación para familiarizar al lector con la notación y la presentación de los resultados, que se muestran en su conjunto en el capítulo 5 y en el Apéndice C. En este último se muestra en detalle los resultados de cada simulación.

<sup>4</sup>Estas letras son las abreviaciones en inglés de los adjetivos *small, medium, medium-large* y *large*, respectivamente

TABLA II  
VALORES DEL  $r_v$  QUE CORRESPONDEN A  
LA FUNCIÓN  $M(x_f)$  PARA CADA VALOR  
DE  $R_{peri}$  CONSIDERADO.

$R_{peri}$ (kpc)	$M(x_l)$			
	0.8	0.98	$\sim 1$	$< 1$
1.5	18	8	5.2	5
3.0	30	13	8.4	8
6.0	45	19.8	13	12.3

TABLA III  
PARÁMETROS INICIALES PARA LAS SIMULACIONES CON  $x_f = 3.5(l)$ .

$e$	$R_{peri}=1.5$ kpc $r_v=18$ pc			$R_{peri}=3$ kpc $r_v=30$ pc			$R_{peri}=6$ kpc $r_v=45$ pc		
	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{10.68}$	$\frac{P_{orb}}{16.41}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{8.27}$	$\frac{P_{orb}}{35.32}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{6.75}$	$\frac{P_{orb}}{64.88}$
0	83.3	19.99	26.16	100	24.95	25.16	133.3	32.44	25.81
0.25	138.8	14.74	26.56	166.6	19.34	22.23	222.2	24.46	24.46
0.50	250.0	10.23	38.02	300	13.65	33.70	400.0	16.8	39.13
0.75	583.3	5.64	76.225	700	7.4	74.01	933.3	8.9	83.05

NOTA.—Las escalas espaciales resultantes están en kpc, las temporales en fracciones de  $10^5$  años y la velocidad en km/s.

TABLA IV  
PARÁMETROS INICIALES PARA LAS SIMULACIONES CON  $x_f = 1.5(ml)$ .

$e$	$R_{peri}=1.5$ kpc $r_v=8$ pc			$R_{peri}=3$ kpc $r_v=13$ pc			$R_{peri}=6$ kpc $r_v=19.8$ pc		
	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{16.03}$	$\frac{P_{orb}}{4.86}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{12.57}$	$\frac{P_{orb}}{10.07}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{10.3}$	$\frac{P_{orb}}{18.32}$
0	187.5	13.3	88.4	230.8	16.4	88.2	309.7	21.3	91.4
0.25	312.5	9.8	89.7	384.6	12.7	78.0	516.3	12.2	86.6
0.50	562.5	6.8	128.1	692.3	9.0	118.5	929.3	11.0	138.4
0.75	1312.5	3.8	253.1	1615.4	4.8	259.6	2168.3	5.8	294.0

NOTA.—Las escalas espaciales resultantes están en kpc, las temporales en fracciones de  $10^5$  años y la velocidad en km/s.

TABLA V  
PARÁMETROS INICIALES PARA LAS SIMULACIONES CON  $x_f = 1(m)$ .

$e$	$R_{peri}=1.5$ kpc $r_v=5.2$ pc			$R_{peri}=3$ kpc $r_v=8.4$ pc			$R_{peri}=6$ kpc $r_v=13$ pc		
	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{19.88}$	$\frac{P_{orb}}{2.54}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{15.64}$	$\frac{P_{orb}}{5.23}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{12.57}$	$\frac{P_{orb}}{10.07}$
0	288.4	10.7	171.7	357.1	13.2	169.9	461.5	17.4	166.3
0.25	480.7	7.9	174.3	595.2	10.2	150.1	769.2	13.3	157.6
0.50	865.4	5.5	249.6	1071.4	7.2	228.1	1384.6	9.0	252.1
0.75	2019.2	3.0	500.3	2500	3.9	499.8	3230.7	4.8	523.1

NOTA.—Las escalas espaciales resultantes están en kpc, las temporales en fracciones de  $10^5$  años y la velocidad en km/s.

TABLA VI  
PARÁMETROS INICIALES PARA LAS SIMULACIONES CON  $x_f = 0.95(s)$

$e$	$R_{peri}=1.5$ kpc $r_v=5$ pc			$R_{peri}=3$ kpc $r_v=8$ pc			$R_{peri}=6$ kpc $r_v=12.3$ pc		
	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{20.27}$	$\frac{P_{orb}}{2.4}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{16.03}$	$\frac{P_{orb}}{4.86}$	$\frac{R_{apo}}{r_v}$	$\frac{V_{apo}}{12.94}$	$\frac{P_{orb}}{9.22}$
0	300	10.5	178.8	375	12.87	182.7	489.4	16.9	181.5
0.25	500	7.7	181.6	625	9.98	161.5	815.6	12.9	172.0
0.50	900	5.4	260.0	1125	7.04	244.8	1468.2	8.8	275.2
0.75	2100	3.0	521.2	2625	3.82	538.2	3425.7	4.6	583.9

NOTA.—Las escalas espaciales resultantes están en kpc, las temporales en fracciones de  $10^5$  años y la velocidad en km/s.

TABLA VII  
PARÁMETROS INICIALES PARA LAS ÓRBITAS DE LOS CÚMULOS EN UNIDADES FÍSICAS.

$e$	$R_{peri}=1.5$ kpc			$R_{peri}=3$ kpc			$R_{peri}=6$ kpc		
	$R_{apo}$ (kpc)	$V_{apo}$ ( $\text{km s}^{-1}$ )	$P_{orb}$ ( $\times 10^7$ a)	$R_{apo}$ (kpc)	$V_{apo}$ ( $\text{km}^{-1}$ )	$P_{orb}$ ( $\times 10^7$ a)	$R_{apo}$ (kpc)	$V_{apo}$ ( $\text{km s}^{-1}$ )	$P_{orb}$ ( $\times 10^7$ a)
0	1.5	213.6	4.29	3	206.3	8.88	6	218.7	16.7
0.25	2.5	156.1	4.36	4.5	160.0	7.85	10	167.0	15.8
0.50	4.5	109.4	6.24	9	112.8	12.0	18	113.9	25.4
0.75	10.5	60.8	12.5	18	61.2	26.1	42	59.5	53.8

## 4.5 Análisis

El análisis y reducción de los resultados se realizó con diversas rutinas con las que se obtiene las cantidades que se desean estudiar. A continuación se muestran los resultados y el análisis para el experimento *A50ml*. Se discuten las rutinas de reducción, así como la presentación de los resultados (gráficas). La discusión, comparación e implicaciones de los resultados se hará en los siguientes capítulos.

### 4.5.1 Definiciones

Se define al sistema inercial anclado en el centro de la Galaxia como  $(X', Y', Z')$ , y al sistema anclado en el centro de masa del cúmulo por  $(X, Y, Z)$ . En este sistema la posición inicial del cúmulo, respecto al centro galáctico, es  $(0, R_{apo}, 0)$ .

La posición y velocidad del centro de masa del cúmulo, en cada instante, están dados por

$$\mathbf{x}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} m_i \mathbf{x}'_i}{\sum_{i=1}^{N_i} m_i} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} m_i \mathbf{v}'_i}{\sum_{i=1}^{N_i} m_i} \quad (5-1)$$

donde  $m_i$  es la masa de la  $i$ -ésima partícula y  $N_i$  es el número de partículas ligadas al cúmulo (ver siguiente sección). Los vectores  $\mathbf{x}'_i$  y  $\mathbf{v}'_i$ , corresponden a la posición y velocidad de la  $i$ -ésima partícula. La transformación de posición y velocidades entre ambos sistemas está dada por,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_{cm} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_{cm}. \quad (5-2)$$

Para ser consecuente con la notación que se utilizó en el Capítulo 1, se define  $R_{GC} \equiv |\mathbf{x}_{cm}|$  y  $V_{GC} \equiv |\mathbf{v}_{cm}|$ .

El valor escalar de posición y velocidad, respecto al centro de masa del cúmulo, está dado por,

$$r_i = |\mathbf{x}_i| \quad \text{y} \quad v_i = |\mathbf{v}_i|. \quad (5-3)$$

### 4.5.2 Energías

#### Conservación de la energía

La primer cantidad que se mide en cada uno de los experimentos es la conservación total de la energía. Está se reporta como la variación porcentual, que se evalúa de la siguiente forma,

$$\Delta E_{total}(\%) = 100 \times \frac{E_{total}^{10} - E_{total}^0}{E_{total}^0}, \quad (5-4)$$

donde  $E_{total}^0$  y  $E_{total}^{10}$ , es la energía total inicial y después de 10 períodos orbitales, respectivamente.

La energía total se calcula como

$$E_{total} = K_{total} + W_{total}, \quad (5-5)$$

donde  $K_{total}$  y  $W_{total}$ , son las energías cinética y potencial, total de la simulación, respectivamente.

La energía cinética está dada por

$$K_{total} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_p} m_i v_i'^2 \quad (5-6)$$

donde  $m_i$  y  $v'_i$  es la masa y velocidad de la  $i$ -ésima partícula respecto al centro de coordenadas galáctico.

La energía potencial total es la suma de la energía potencial de las partículas.

En este caso hemos considerado un potencial rígido que se encuentra anclado al origen de coordenadas, razón por la cual no se considera el desplazamiento del centro del potencial galáctico. Sin embargo, si este se encontrara libre y se pudiera mover en respuesta al potencial del cúmulo, que supondremos a 1.5 kpc y en órbita circular, este se desplazaría en una órbita circular con un radio de  $3.3R_{\odot}$  a una velocidad de 334.3 metros por año. La energía cinética del centro galáctico, en este caso, es de 17 órdenes de magnitud menor que la energía del cúmulo.

Para el experimento *A50ml*  $\Delta E_{total}(\%) = 6.9 \times 10^{-3}$ , con una dispersión rms dada por  $\sigma_E(\%) = 3.4 \times 10^{-4}$ . El cambio en la energía total de la simulación, para este caso, es dos órdenes de magnitud menor que la variación de la energía del cúmulo. Estos valores son representativos de lo que ocurre en todos nuestros experimentos.

#### Energía de las estrellas y el cúmulo

La energía del cúmulo es la suma de la energía (por unidad de masa) de todas las estrellas ligadas a este. La energía de la  $i$ -ésima estrella está dada por

$$E_i = \frac{1}{2} v_i^2 + \Phi_l(r_i). \quad (5-7)$$

donde  $\Phi_l(r_i)$  es el potencial que experimenta la  $i$ -ésima estrella debido a las demás partículas ligadas al cúmulo. Si  $E_i < 0$ , la estrella se encuentra ligada al cúmulo, si  $E_i \geq 0$ , no lo está.

La energía total del cúmulo se calcula mediante un proceso iterativo con la siguiente relación:

$$E_c = K_c + W_c = \frac{1}{2} \sum_{E_i < 0} m_i v_i^2 + \sum_{E_i < 0} m_i \Phi(r_i). \quad (5-8)$$

Si en el cálculo de la energía se encuentra una estrella con  $E_i \geq 0$ , se vuelve a hacer el cálculo de la energía cinética y la potencial sin considerar a dicha estrella. Este proceso se detiene cuando no se encuentran estrellas no ligadas.

Para determina si el cúmulo se encuentra en equilibrio virial calculamos la cantidad,  $2|K_c/W_c|$ . En la Fig. 4.9 hemos graficado la evolución temporal de  $K_c$ ,  $W_c$  y  $2|K_c/W_c|$  para la simulación *A50ml*. Las líneas verticales indican el paso del cúmulo por su perigaláctico.

El cambio temporal de la energía del cúmulo, se define como

$$\frac{\Delta E_c(t)}{E_0} = \frac{E_c(t) - E_0}{E_0} \quad (5-9)$$



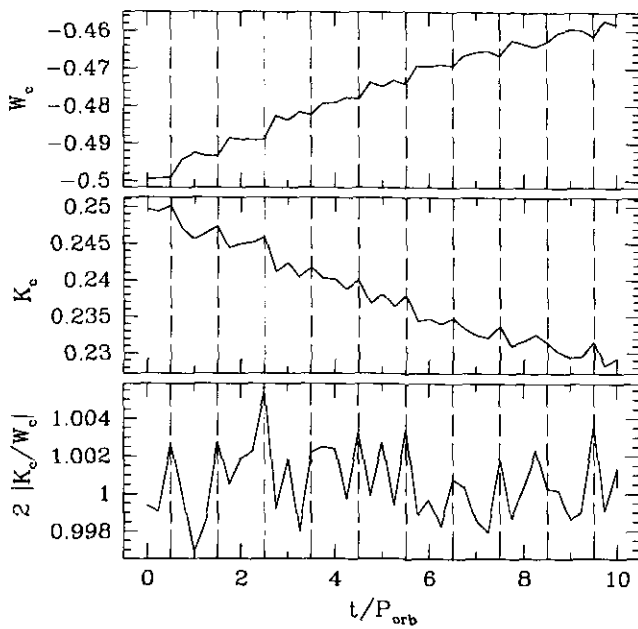


Fig. 4.9.— Evolución temporal de la energía cinética ( $K_c$ ), potencial ( $W_c$ ), y de la condición de equilibrio virial para la simulación *A50ml*. Las líneas verticales indican el paso por el perigaláctico de la órbita.

donde  $E_c(t)$ , es la energía total del cúmulo al tiempo  $t$ , y  $E_0$  es la energía inicial del cúmulo.

En la Fig. 4.10a se muestra la variación de la energía del cúmulo, para el experimento *A50ml*.

El cambio total en la energía del cúmulo, en esta simulación, es de un  $\sim 8\%$ . Notamos que este cambio no es gradual, este muestra escalones relacionados con el período orbital del cúmulo. Este comportamiento se discutirá en detalle en el siguiente capítulo.

#### 4.5.3 Pérdida de masa

La masa del cúmulo a un tiempo  $t$  se define como,

$$M_c(t) = 5 \times N_l(t) M_\odot, \quad (5-10)$$

donde  $N_l(t)$  es el número de estrellas ligadas al cúmulo al tiempo  $t$ .

La masa de las estrellas que escapan es  $M_{\text{libre}} = M_0 - M_c(t)$ , donde  $M_0$  es la masa del cúmulo en  $t = 0$  ( $M_0 = M_c(t = 0)$ ).

El cambio fraccional de la masa del cúmulo está dado por,

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \frac{N_0 - N_l}{N_0}. \quad (5-11)$$

El intervalo de variación de esta función está entre 0 y 1. En la Fig. 4.10b se muestra la variación temporal de la masa del cúmulo para la simulación *A50ml*. El cambio total de la masa del cúmulo es de un  $\sim 8\%$ . Nuevamente se

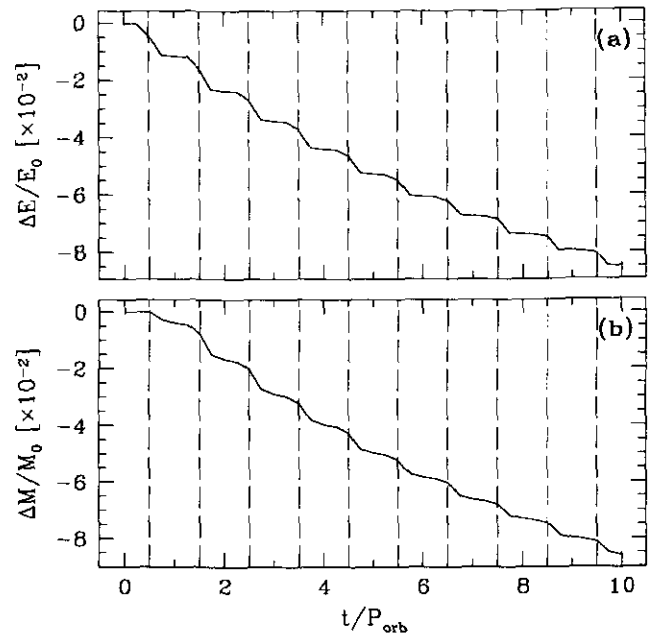


Fig. 4.10.— Evolución temporal de la variación absoluta de la energía (a) y de la masa (b). Las líneas verticales indican lo mismo que en la figura anterior.

presentan los escalones asociados con el paso del cúmulo por el perigaláctico.

En las gráficas de la Fig. 4.10 también es posible analizar la tasa de variación de la energía y de la masa, que para este ejemplo parece desacelerarse como función del tiempo.

#### 4.5.4 Evolución diferencial de la energía y la masa

Para enfatizar el efecto de los choques gravitacionales, se define el incremento diferencial de la energía y de la masa como

$$\begin{aligned} \delta E(t) &= E_c(t) - E_c(t - \Delta t) \quad \text{y} \\ \delta M(t) &= M_c(t) - M_c(t - \Delta t), \end{aligned} \quad (5-12)$$

respectivamente, donde  $\Delta t$  es  $P_{\text{orb}}/4$ .

En la Fig. 4.11 se muestra la evolución temporal de  $\delta E(t)$  y  $\delta M(t)$ . En ambos casos se normalizo con respecto a la masa y energía inicial. Las líneas verticales significan lo mismo que en las gráficas anteriores. En esta representación los cambios de la energía y la masa se muestran como pulsos claramente relacionados con el período orbital del cúmulo. El aumento de la energía alrededor de  $R_{\text{peri}}$  es, en promedio, 5 veces mayor que en  $R_{\text{apo}}$ . Como sólo tenemos 4 fases orbitales no se tiene resolución temporal para determinar si el máximo de los picos ocurre antes o después de su perigaláctico. Con esta representación se resalta la importancia de los choques gravitacionales. En el siguiente capítulo se discute este efecto en detalle.

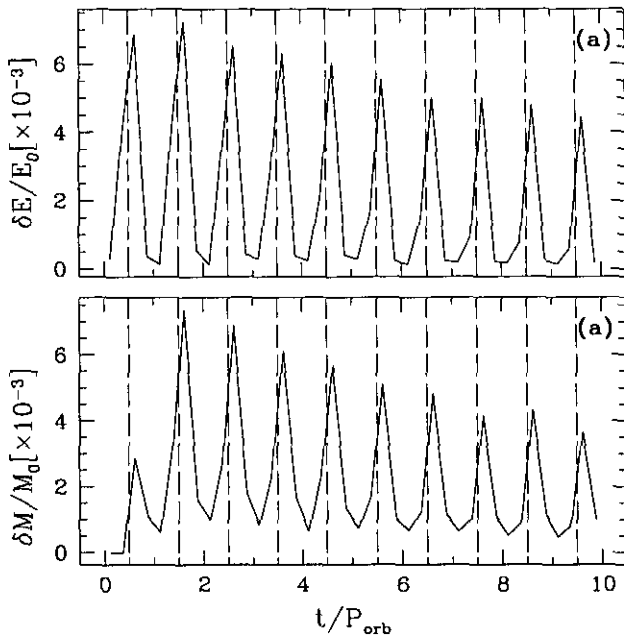


Fig. 4.11.— Variación diferencial de la energía y la masa para la simulación A50ml.

#### 4.5.5 Estructura

Los cambios en la estructura del cúmulo se analizan en detalle siguiendo la variación temporal de los radios lagrangianos de igual masa. De manera más general se analiza con cantidades como: la concentración, la densidad central y la densidad en el radio mediano de masa. Estas cantidades globales tienen una contraparte observacional, que en principio permiten comparar los modelos con las observaciones.

#### Estructura de la masa

En Fig. 4.12 se muestra la evolución temporal de los radios lagrangianos, normalizados al radio virial ( $r_v$ ), para el 5%, 10%, 20%, ... 90%, 91%, 92%, ... 99% y 100% (líneas sólida delgadas y líneas delgadas de trazos cortos para los valores subrayados) de la masa total del sistema. Y los radios lagrangianos para el 10%, 50%, 90% 95% y 99% y 100% (línea gruesa sólida y de trazos cortos para los valores subrayados) de la masa ligada. Las líneas verticales señalan el momento en que el cúmulo pasa por su perigaláctico.

Estos valores se obtienen al ordenar los radios de las estrellas de manera ascendente en cada tiempo  $t$ . Considerando en un caso todas las estrellas y en otro sólo las ligadas al cúmulo.

En la Fig. 4.12 podemos ver como son afectadas distintas capas radiales del cúmulo durante su evolución. Podemos ver que la pérdida de masa está relacionada con el paso del cúmulo por  $R_{peri}$ . La estructura interna del cúmulo muestra una contracción, posiblemente a un rea-

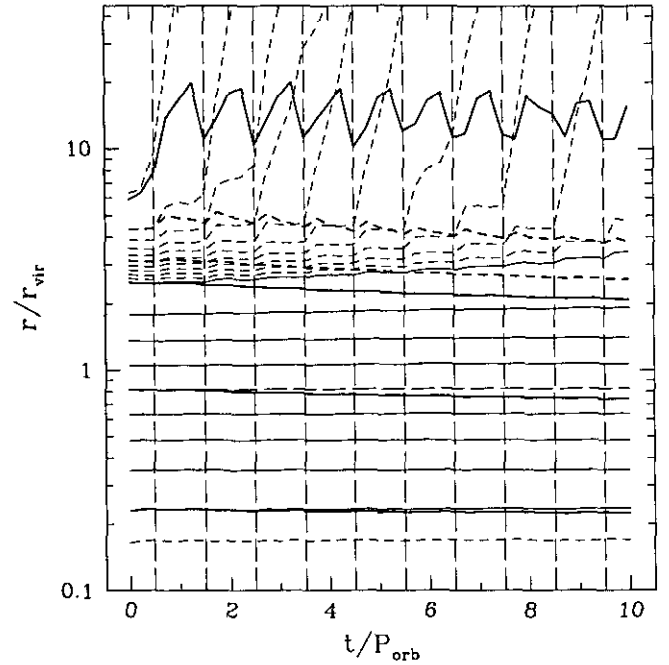


Fig. 4.12.— Evolución de los radios lagrangianos de la masa total (líneas delgadas) y la ligada (líneas gruesas) al cúmulo (ver texto para detalles).

comodo en las estructura del cúmulo. En las partes externas se tiene una oscilación relacionada con el  $P_{orb}$ .

#### Concentración

Para medir la concentración de nuestro modelo se define una concentración teórica  $c^t$ , como

$$c^t = \log \left( \frac{r_{99\%}}{r_{10\%}} \right) \quad (5-13)$$

donde  $r_{10\%}$  y  $r_{99\%}$ , son los radios lagrangianos con el 10% y el 99% de la masa ligada al cúmulo, respectivamente. En la Fig. 4.13a, se muestra la variación absoluta de  $c^t$  como función del período orbital.

#### Densidad central

La densidad central se define como

$$\rho_0 = \frac{0.1 \times N_i m_i}{(4\pi/3)(r_{10\%})^3}, \quad (5-14)$$

donde  $r_c \sim r_{10\%}$  para un modelo de King con  $c=1.5$ .

En la Fig. 4.13b se muestra la variación temporal de  $\rho_0$ . Vemos que la variación de la densidad central no muestra correlación con el período orbital del cúmulo.

#### Densidad media

La densidad media se define como

$$\rho_h = \frac{0.5 \times N_i m_i}{(4\pi/3)(r_{50\%})^3}, \quad (5-15)$$

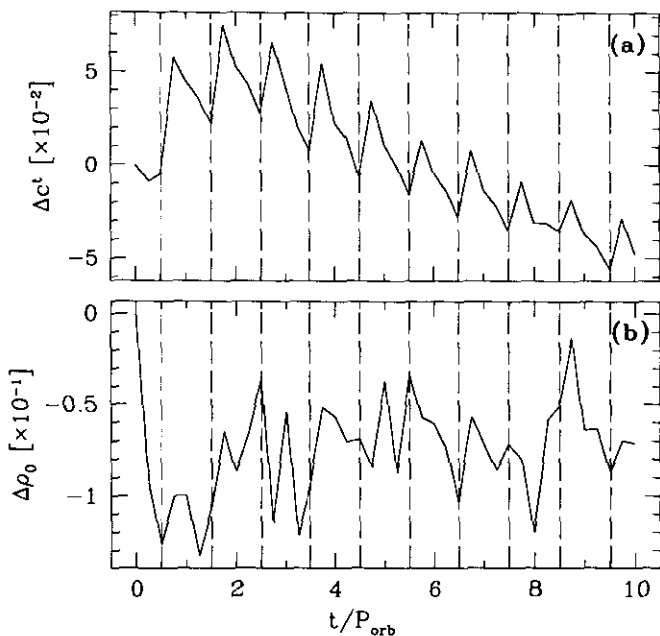


Fig. 4.13.— En (a) se muestra la evolución temporal de la variación de  $c^t$  para la simulación *A50ml*. En (b) se muestra la variación temporal de  $\rho_0$ . para la misma simulación.

donde  $r_{50\%}$  es el radio que contiene al 50% de la masa del cúmulo.

En el siguiente capítulo comparamos el valor de  $\rho_h$  como función de la distancia galactocéntrica promedio de los cúmulos de la simulación.

#### 4.5.6 Cambios en la geometría

Los cúmulos se deforman cuando se aproximan al centro galáctico, lo cual es causado por el campo de marea ocasionando las *colas de marea*, que muestran un alargamiento simétrico del cúmulo debido a que las estrellas escapan por los puntos de Lagrange.

Los isocontornos de densidad indican el grado de deformación que tiene el cúmulo a distintos radios, lo que indica la importancia de los choques de marea en la estructura del cúmulo.

Los isocontornos de densidad superficial, en el plano  $X' - Y'$ , y en plano  $X'' - Z''$ , se muestran en las Fig. 4.14 y 4.15, respectivamente. El sistema  $(X'', Y'', Z'')$  se define como un sistema en corrotación con el cúmulo, anclado en centro de la Galaxia.

En las Fig. 4.14 y 4.15 se muestra la evolución temporal de los isocontornos con las proyecciones descritas anteriormente. En la parte superior se indica si los cuadros de abajo son para el  $R_{peri}$  o del  $R_{apo}$ . En cada cuadro se indica en el lado superior izquierdo el tiempo, que corresponde a cada cuadro, en fracciones del periodo orbital. La flecha en el lado inferior izquierdo, en la Fig. 4.14, indica la dirección donde se encuentra la Galaxia. La proyección

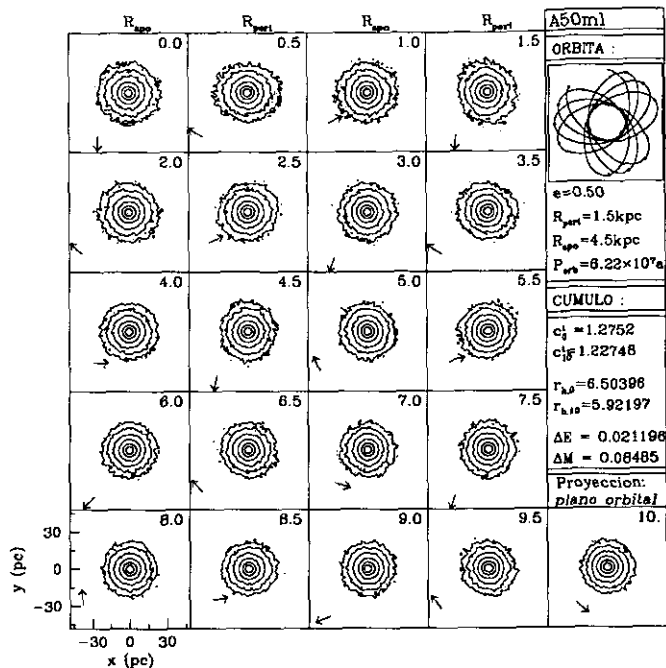


Fig. 4.14.— Evolución temporal de los isocontornos de densidad superficial como función del tiempo y posición en la Galaxia. En cada cuadro se indica la dirección de la Galaxia, el tiempo como función de  $P_{orb}$ . En el panel derecho se muestra la órbita del cúmulo, los puntos en la órbita corresponden a cada uno de los cuadros que se muestran. En la parte inferior del panel derecho de dan los parámetros de la órbita y los cambios en  $c^t$ ,  $r_h$ ,  $E$  y  $M$ . La proyección se hizo el plano X-Y.

que se muestra en la Fig. 4.15 corresponde a observar el cúmulo desde el centro galáctico. Los valores de los ejes X y Y están dados en parsecs. El panel de la derecha, en ambas figuras, se muestra la órbita del cúmulo en el plano galáctico. Los círculos negros sobre la órbita corresponden a cada uno de los cuadros que se muestran en el lado izquierdo. Los parámetros iniciales de la órbita (excentricidad  $e$ ,  $R_{peri}$ ,  $R_{apo}$ , y el periodo orbital en años).

Los isocontornos están espaciados logarítmicamente cada media década del valor anterior. Todos los isocontornos están referidos a los valores del primer cuadro.

En el panel medio de la derecha se da el valor inicial y final de la concentración teórica y del radio mediano de masa. También se da la variación relativa de la energía y la masa del cúmulo. Ahí mismo se especifica la proyección que se muestra.

En la Fig. 4.14 se puede apreciar que el cúmulo tiene mayor deformación cuando se encuentra en su perigaláctico. El alargamiento no coincide del todo con la dirección de la Galaxia, por unos grados. Ejemplos más ilustrativos sobre la formación y evolución de las *colas de marea* se pueden ver en el Apéndice C, en particular para los cúmulos grandes,  $l$ .

La magnitud y orientación de la deformación que expe-

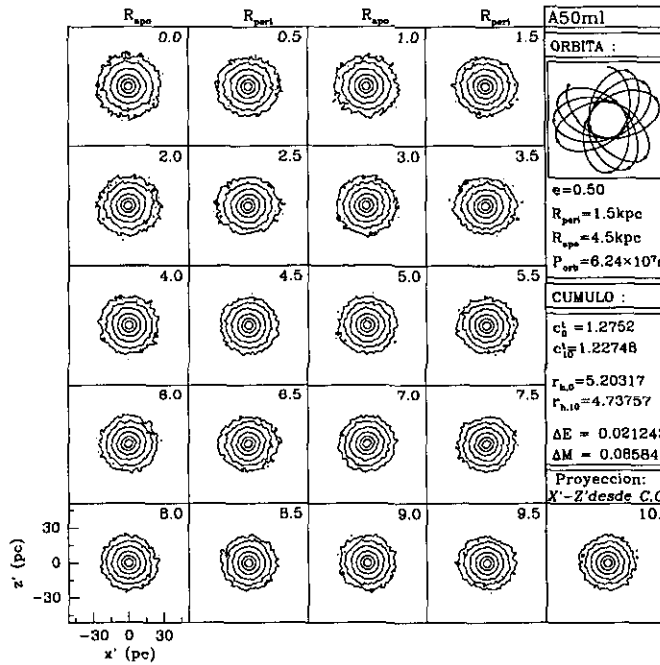


Fig. 4.15.— Evolución temporal de los isocontornos de densidad superficial como función del tiempo y posición en la Galaxia. Los parámetros indican lo mismo que la figura anterior, pero sin la flecha ya que en esta proyección es vista desde el centro de la Galaxia.

rimenta el cúmulo se obtiene al diagonalizar el tensor de inercia, a partir de los eigenvalores y eigenvectores. Los eigenvalores determinan la magnitud relativa de los tres semiejes principales del cúmulo, que de mayor a menor hemos llamado  $X_I$ ,  $Y_I$  y  $Z_I$ . Con los eigenvectores se obtiene el ángulo  $\theta$ , que da la separación angular entre el semieje mayor del cúmulo y radio vector entre la Galaxia y el centro del cúmulo. Recordemos que en este caso el cúmulo ahora tiene una forma elipsoidal, y estos ejes determinan las proporciones relativas de este volumen.

En la Fig. 4.16 se muestra la evolución temporal de los coeficientes  $Y_I/X_I$  (línea sólida) y  $Z_I/X_I$  (línea de trazo corto), y del ángulo  $\theta$  (línea sólida gruesa), considerando el 100% de la masa ligada al cúmulo. El intervalo de variación de  $\theta$  se muestra en la ordenada del lado derecho.

En este caso podemos ver que los valores de  $Y_I/X_I$  y  $Z_I/X_I$  están relacionados con la fase orbital del cúmulo. La razón entre los semiejes mayores parece que tiende a el valor de 0.9, después de haber pasado por una fuerte deformación inicial. También se puede ver que los cúmulos son menos simétricos cuando se encuentran en su apogaláctico.

La dirección de dicha deformación se puede estudiar con los valores de  $\theta$ , los valores positivos indican que el semieje mayor apunta en la dirección de movimiento del cúmulo, es decir, semieje adelantado; los valores negativos apuntan en la dirección opuesta al movimiento, es decir, un retraso. El comportamiento de  $\theta$  parece indicar que el

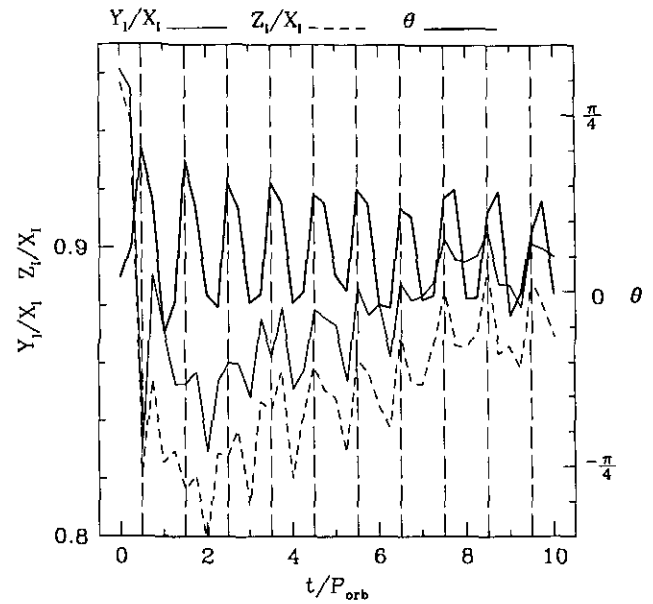


Fig. 4.16.— En (a) evolución temporal de los semiejes mayores  $X_I/Y_I$  (línea sólida delgada) y  $X_I/Z_I$  (línea de trazo delgada), así como la variación del ángulo  $\theta$  (línea sólida gruesa). Las líneas verticales indican el paso del cúmulo por su perigaláctico.

elipsoide de inercia se adelanta cuando se aproxima a su  $R_{peri}$ , quedando adelantado por casi 1/4 de su fase orbital. Cuando el cúmulo está en su apogaláctico, el elipsoide parece estar alineado en la dirección de la Galaxia.

#### 4.6 Comparación Entre el Código de Armónicos Esféricos y el de Árbol

Para mostrar que nuestros resultados son independientes del código que se utilice, hemos realizado dos series de simulaciones utilizando el código de armónicos esféricos y el código de árbol.

En la primera serie utilizamos las condiciones iniciales de *A50ml*, y en la segunda de *A50l*. El tiempo que se integran ambas soluciones es de 5 y 10  $P_{orb}$ , respectivamente.

En ambas series se utilizan las mismas condiciones iniciales para el cúmulo globular. Una concentración  $c=1.5$ , y con  $10^4$  partículas. El número de partículas con las que comparamos los códigos es un orden de magnitud menor que con la que realizamos nuestros experimentos. Esto se debe a que el código de árbol consume un mayor tiempo de CPU (ver Tabla VIII). La tolerancia para el código de árbol es de 0.7.

Los experimentos que repetimos con ambos códigos son: *A50ml* y *A50l*. Para distinguir entre los resultados de ambos códigos los hemos llamado *A50mlt* y *A50lt*, a los resultados con el código de árbol, respectivamente. De igual forma para los experimentos integrados con el código de armónicos, como *A50mlh* y *A50lh*, respectivamente.

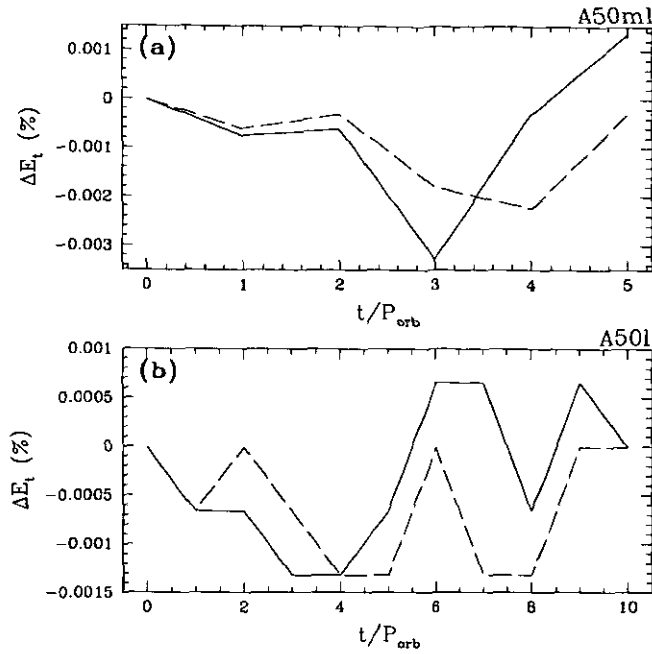


Fig. 4.17.— Conservación de la energía total de las simulaciones A50mlt y A50mlh, panel superior y para A50lt y A50lh, panel inferior. Notese los diferentes valores de la absisa para ambas gráficas.

Lo primero que comparamos en las simulaciones es la conservación total de la energía, ver Fig. 4.17. En la Tabla VIII se dan los cambios porcentuales de la energía total de la simulación, de la energía y de la masa del cúmulo. También se da el tiempo de CPU por paso del integrador en cada simulación.

En las Fig. 4.17a y 4.17b se muestra la variación temporal de la energía total para las simulaciones A50ml y A50l con ambos códigos. Los resultados entre los códigos son muy parecidos para la energía total de la simulación, aunque el promedio es mayor para los resultados del código de árbol.

#### Comparación para la simulación A50ml

En la Fig. 4.18b1, se muestra la evolución temporal de la energía para A50mlt (línea de puntos) y A50mlh (línea sólida). En Fig. 4.18b2 se muestra la diferencia porcentual entre ambas simulaciones, vemos que la máxima diferencia es de  $\sim 0.5\%$ .

Los cambios en la masa  $\Delta M_c$ , ver Fig. 4.18a1, son mayores para A50mlt que para A50mlh. La diferencia entre los resultados es de 1.2%, ver Fig. 4.18a2.

El incremento diferencial de la energía y la masa ( $\delta E/E_0$  y  $\delta M/M_0$ ), respectivamente, son parecidos en ambas simulaciones. Sólo muestran una diferencia en el máximo de sus picos.

En la serie de gráficas de la Fig. 4.18 se incluye el resultado de una simulación hecha con el CAC con  $10^5$  particu-

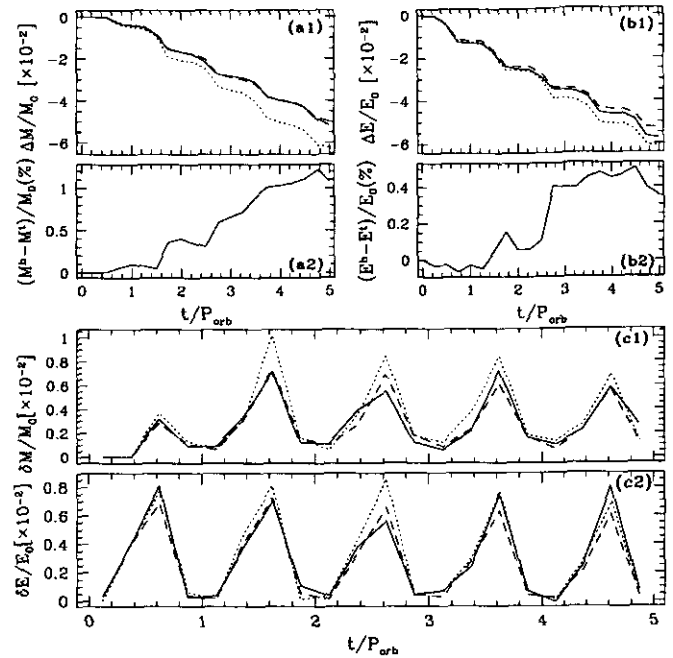


Fig. 4.18.— Comparación de la simulación A50ml realizada con el CAC (línea sólida) y con el CAJ (línea de puntos) con  $10^4$  partículas. Ahí mismo se muestran los resultados de esta simulación con  $10^5$  partículas (línea trazos cortos).

las (línea de trazos cortos). Vemos que estos resultados son consistentes con los que se obtienen con un menor número de partículas.

#### 4.6.1 Comparación para la simulación A50l

En la Fig. 4.19a1 y 4.19b1, se muestran los cambios de la masa y la energía para A50lh y A50lt. Las diferencias porcentuales entre los resultados de los códigos son semejantes a las reportadas para A50ml. Estas son de 0.8% para la energía y del 1.1% para la masa (ver Fig. 4.19b2 y 4.19a2, respectivamente). Notamos que la variación porcentual de la energía del cúmulo es un orden de magnitud mayor que la de A50ml.

El comportamiento diferencial de la energía y la masa son muy parecidos para ambos códigos.

Los cambios en la energía y la pérdida de la masa del cúmulo, para ambos códigos es muy parecida. Los resultados para la simulación A50l con  $10^5$  partículas no muestra gran diferencia con la simulaciones de  $10^4$  partículas.

En las simulaciones A50l la forma del cúmulo cambia drásticamente en sus regiones externas. Al obtener resultados semejantes entre ambos códigos nos da confianza en los resultados del CAC en situaciones donde la geometría en las regiones externas esta cambiando, como en este caso.

Los resultados entre ambos códigos nos dan una diferencia de 1-2% para  $\Delta M$ , y de 0.8% y 0.5% para  $\Delta E$ . De esta comparación se puede afirmar que nuestras simulaciones se pueden reproducir con el código de árbol con

TABLA VIII  
COMPARACIÓN ENTRE EL CÓDIGO DE ÁRBOL Y EL DE ARMÓNICOS ESFÉRICOS.

Simulación	$\langle \Delta E_{tot}(\%) \rangle$	$\Delta E_c(\%)$	$\Delta M_c(\%)$	$T_{cpu}(seg)/N_{pasos}$
A50mlt	$-6.0 \times 10^{-4}$	$-6.1 \times 10^{-2}$	$-6.2 \times 10^{-2}$	7.5
A50mlh	$-3.0 \times 10^{-4}$	$-5.7 \times 10^{-2}$	$-5.2 \times 10^{-2}$	$6.6 \times 10^{-2}$
A50lt	$-8.7 \times 10^{-4}$	$-4.2 \times 10^{-1}$	$-3.7 \times 10^{-1}$	5.8
A50lh	$-6.0 \times 10^{-4}$	$-4.1 \times 10^{-1}$	$-4.1 \times 10^{-1}$	$4.5 \times 10^{-2}$

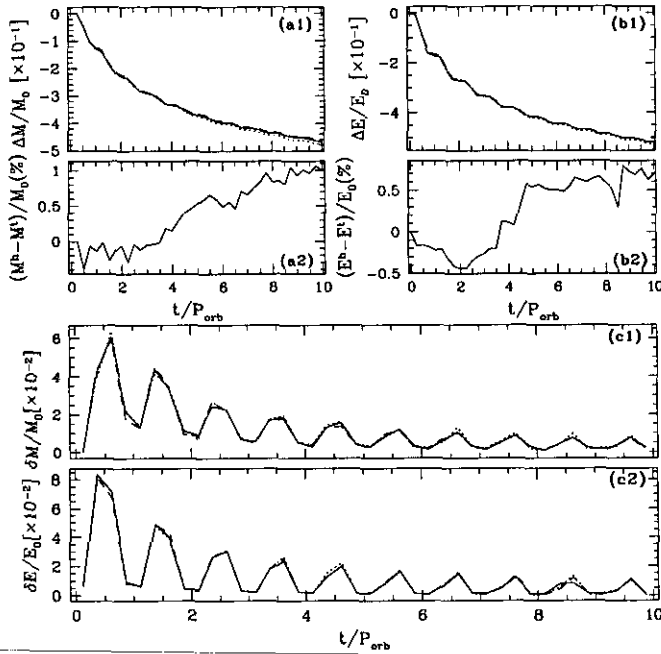


Fig. 4.19.— Comparación de la simulación A50l realizada con el CAC (línea sólida) y con el CAJ (línea de puntos) con  $10^4$  partículas. Ahí mismo se muestra los resultados de esta simulación con  $10^5$  partículas (línea trazos cortos).

$\sim 2\%$  de diferencia entre nuestros resultados. Esto nos da la certeza que los resultados reportados en el siguiente capítulo no cambian significativamente si se repiten con el CAJ.

En la última columna de la Tabla VIII se reporta el tiempo de CPU por paso del integrador en una *Origin 2000*. El CAC es dos ordenes de magnitud más rápido que el CAJ. Gracias a esto es posible realizar un conjunto de simulaciones para explorar el espacio de parámetros en un tiempo razonable de cómputo.

#### 4.7 Conclusiones

En resumen las conclusiones del presente capítulo son:

- Los efectos de la granularidad del potencial en las regiones externas del cúmulo afecta sensiblemente la

tasas de escape de partículas en esas regiones, por lo que es necesario adoptar un número de partículas muy semejante al que se cree tienen los cúmulos globulares ( $\sim 10^5$ ).

- Como el tiempo que se desean seguir las simulaciones es del orden del tiempo de relajación de los cúmulos reales, es necesario considerar un número de partículas del orden al que tienen los cúmulos globulares para evitar los efectos espúreos asociados a este proceso.
- La evaporación (y colapso central) no es importante durante el tiempo en el que realizan nuestras simulaciones. Esto se debe a que las escalas espaciales y temporales en las que ocurren ambos efectos no se sobrepone.
- Se implementa una rutina para encontrar el centro de la expansión de armónicos esféricos, esta es robusta y rápida. Este método encuentra el valor mínimo del potencial de manera iterativa, y es una de las principales aportaciones dentro del código numérico.
- La conservación de la energía es 4 veces mejor para la expansión cuadrupolar que la octupolar, lo que se puede deber al mayor número de operaciones que se realizan en el caso octupolar (alrededor de 60 por componente espacial). Se decidió utilizar la expansión cuadrupolar para realizar nuestras simulaciones. El código con el que se realizan las simulaciones tiene un calentamiento numérico de  $\Delta E/E_0(\%) = 3.8 \times 10^{-4}$  por paso de tiempo.
- Los resultados que se obtienen con código de árbol y el de armónicos esféricos son semejantes entre sí, con una diferencia entre los resultados de un 2% para la masa y de un 0.8% para la energía.

- El código de armónicos esféricos, a segundo orden es varias veces un orden de magnitud más rápido que el código de árbol. Gracias a esto es posible realizar nuestras simulaciones con un número razonable de partículas  $10^5$ , y con diversas condiciones iniciales, que nos permiten explorar el espacio de parámetros orbitales y estructurales del cúmulo respecto al campo de marea galáctico.

## REFERENCIAS

- Aguilar, L. A., 1985, Tesis de Doctorado, Universidad de California, Berkeley.
- Aguilar, L. A., 1992, *Rev. Mex. de Fís.*, **38**, 701.
- Aarseth, S.J., 1985, En *Multiple Time Scales*, eds. por J. U. Brackbill y B. I. Cohen, Academic Press, New York, p. 377.
- Barnes, J. y Hut, P., 1986, *Nature*, **324**, 446.
- Binney, J. y Tremaine, S. 1987, *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univ. Press)
- Djorgovski, S. G., 1993, en *Structure and Dynamic of Globular Clusters*, eds. por S. Djorgovski y G. Meylan, ASPCS, **50**, 373
- Hernquist, L., 1989, *ApJS*, **64**, 715.
- Hernquist, L. y Barnes, J., 1990, *ApJ*, **349**, 562.
- Makino, J., 1996, *Dynamical Evolution of Star Clusters*, eds. P. Hut y J. Makino, IAU Symp. 174, 151.
- McGlynn, T. A., 1984, *ApJ*, **281**, 184.
- Ostriker, J. P. y Cadwell, J. A. 1983, en *Kinematics, Dynamics and Structure of the Milky Way*, ed. W. L. H. Shuter (Dordrecht:Reidel), p. 249.
- Pfalsner, S. y Gibbon, P., 1996, *Many-body tree methods in physics*, Cambridge University Press.
- Taiji M. Makino J., Fukushige T., Ebizuzaki T. y Sugimoto D., 1996, *Dynamical Evolution of Star Clusters*, eds. P. Hut y J. Makino, IAU Symp. 174, 151.
- Sellwood, J. A., 1987, *ARA&A*, **25**, 151.
- Spitzer, L., 1987, *Dynamical evolution of globular clusters*, (Princeton: Princeton Univ. Press)

## Capítulo 5

# RESULTADOS DE LA SIMULACION DE N-CUERPOS

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones que hemos realizado, con el fin de obtener una mejor comprensión de los efectos que los choques de marea ocasionan sobre los cúmulos globulares.

Hemos estudiado los cambios totales de la masa, la energía, la concentración, y en el radio mediano de masa; encontrando que su comportamiento está determinado por dos procesos: el desbordamiento del lóbulo de Roche y por los choques de marea. Analizamos la dependencia de estos procesos con los parámetros estructurales del cúmulo, así como con sus parámetros orbitales. La variación temporal de la energía y de la masa confirma que la evolución de los cúmulos está determinada por estos procesos, claramente diferenciados por la manera como ocasionan dichos cambios.

Estudiamos el incremento de la energía (calentamiento) en las regiones internas del cúmulo, cuando este es afectado por choques de marea. Encontramos que nuestras simulaciones coinciden con los resultados semianalíticos reportados por Murali y Weiberg (1997a). Utilizamos el parámetro  $\beta$  (ver §2.2.2), para medir la importancia del choque gravitacional en términos del período orbital del cúmulo respecto al de las estrellas dentro del cúmulo.

Finalmente, se determina la tasa de destrucción que experimentan los cúmulos en nuestras simulaciones, por período orbital y en el tiempo de Hubble, como función de su distancia media galactocéntrica. Comparamos estos resultados con los trabajos de Aguilar, Hut y Ostriker (1988, en adelante AHO), y el de Gnedin y Ostriker (1997, en adelante GO), quienes hacen una aproximación semianalítica del fenómeno con modelos que involucran la aproximación de impulso, más las correcciones adiabáticas de Spitzer (1958) y Weinberg (1994a), respectivamente. Nuestros resultados coinciden con los reportados por Gnedin y Ostriker para el sistema de cúmulos globulares galáctico.

### 5.1 Cambios Totales

A continuación analizamos los cambios en la energía, la masa, la concentración y el radio mediano de masa que experimentan los cúmulos después de 10 períodos orbita-

les.

#### 5.1.1 Cambios en la energía y la masa de los cúmulos

En la Tabla I se presentan los cambios porcentuales en la energía y la masa de nuestros experimentos, después de 10 períodos orbitales. En la Fig. 5.1 se muestran los resultados en forma de histogramas agrupados según el tamaño inicial del cúmulo, y como función de los parámetros orbitales del cúmulo ( $e$  y  $R_{\text{peri}}$ ).

Para los cúmulos que exceden el tamaño del lóbulo de Roche, en su perigalacticón ( $ml$  y  $l$ ), el cambio total de la masa y la energía es monotónico como función de su excentricidad y de su  $R_{\text{peri}}$ . Los cúmulos en órbitas menos excéntricas, con  $R_{\text{peri}}$  1.5 kpc, son quienes experimentan los mayores cambios (ver Fig. 5.1).

Los cambios en la energía de los cúmulos pequeños son más complicados, porque además de tener un comportamiento parecido al de los cúmulos grandes, las variaciones de la energía presenta un aumento para las órbitas de mayor excentricidad. Esto hace que  $\Delta E/E_0$  presente un valle en los valores intermedios de  $e$  (ver Fig. 5.1 para los cúmulos  $s$  y  $m$ ). El cambio en la masa de los cúmulos tiene el mismo comportamiento, pero con una amplitud apenas apreciable.

Los cambios en la energía están entre el 0.4% y el 2%, para los cúmulos pequeños ( $s$  y  $m$ ). Los cambios en su masa son un poco mayores, entre el 0.6 y el 3%. Como función de su  $R_{\text{peri}}$  la variación máxima en la energía corresponde a la órbita circular, con un radio de 1.5 kpc. Como función de la excentricidad, la máxima variación corresponde a las órbitas más excéntricas. Para los cúmulos más grandes ( $ml$  y  $l$ ), la variación de la energía está entre un 5% y el 65% de su valor inicial. Los cambios en la masa son del mismo orden. Para estos cúmulos, la variación de la energía siempre es mayor para las órbitas circulares, y disminuye conforme aumenta la excentricidad. Como función de  $R_{\text{peri}}$ , la máxima variación ocurre para las órbitas cercanas al centro galáctico. En este caso los cambios en la masa son semejantes a los de la energía.

De lo anterior es claro que existen al menos dos proce-



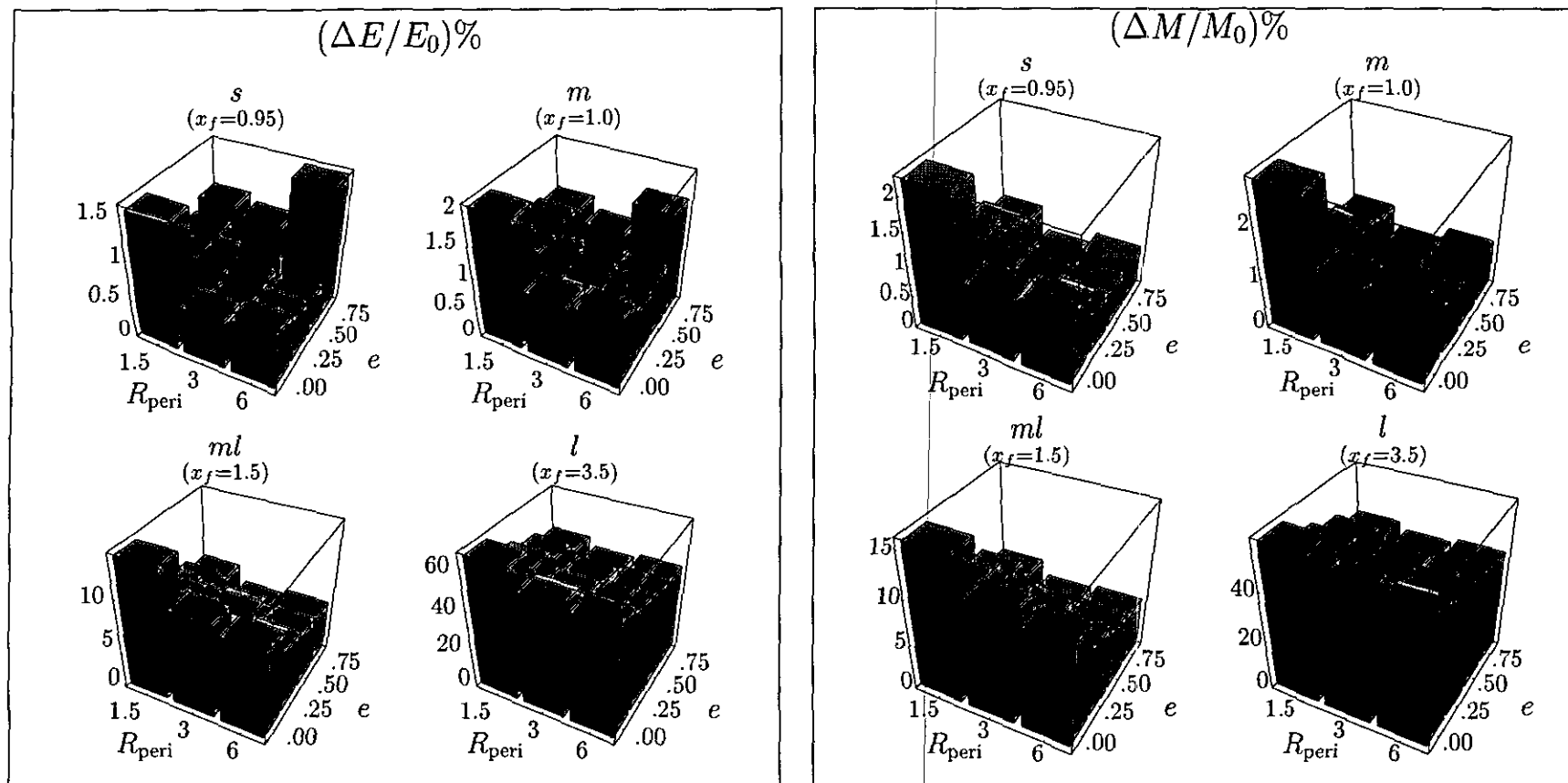


Fig. 5.1.— Variación porcentual total para la energía y la masa de los cúmulos en nuestras simulaciones después de 10 períodos orbitales, como función de la excentricidad y de su  $R_{\text{peri}}$ . Los histogramas están agrupados según el tamaño inicial del cúmulo respecto al tamaño de lóbulo de Roche en su  $R_{\text{peri}}$ .

TABLA I

VARIACIÓN PORCENTUAL DE LA MASA Y LA ENERGÍA PARA LOS CÚMULOS GLOBULARES, DESPUÉS DE 10 PERÍODOS ORBITALES.

Experimento	$x_f = 0.95$		$x_f = 1.0$		$x_f = 1.5$		$x_f = 3.5$	
	$\Delta E(\%)$	$\Delta M(\%)$	$\Delta E(\%)$	$\Delta M(\%)$	$\Delta E(\%)$	$\Delta M(\%)$	$\Delta E(\%)$	$\Delta M(\%)$
A00	1.55	2.2	2.04	2.8	14.37	15.76	65.74	58.45
B00	0.61	1.0	1.03	1.5	10.57	11.91	56.64	50.74
C00	0.69	1.1	1.07	1.7	9.79	11.12	55.83	50.09
A25	0.92	1.24	1.26	1.62	9.79	10.77	56.22	50.50
B25	0.39	0.48	0.63	0.69	6.60	7.22	49.37	44.72
C25	0.55	0.64	0.86	1.03	7.03	7.82	50.70	46.08
A50	0.92	0.99	1.38	1.13	8.11	8.58	51.78	46.18
B50	0.48	0.42	0.71	0.61	6.68	5.94	46.39	41.85
C50	0.48	0.57	0.95	0.89	6.02	6.44	47.86	43.48
A75	1.07	0.77	1.31	0.98	6.92	6.47	46.44	40.81
B75	0.98	0.4	1.13	0.59	5.07	4.89	42.81	38.07
C75	1.58	0.6	1.66	0.87	5.58	5.31	44.66	39.85

Los físicos que ocasiona los cambios de la masa y la energía de los cúmulos en nuestras simulaciones: un proceso que es más efectivo para los cúmulos en órbitas pequeñas y de poca excentricidad, cuya importancia aumenta con el tamaño del cúmulo en relación a su lóbulo de Roche, y un segundo proceso cuya importancia es mayor para las órbitas más excéntricas, cuyo efecto es más importante en los cúmulos más pequeños.

En § 1.3.4 hemos dicho que el campo gravitacional de la Galaxia afecta en dos formas la evolución de los cúmulos globulares. Una de ellas es por medio de la parte estática de dicho campo, que es la responsable de imponer un límite físico a la extensión espacial del cúmulo, por medio del lóbulo de Roche (ver § 1.3), y la otra es la parte dinámica, que se debe a la variación temporal de la fuerza de marea, que depende de los parámetros orbitales del cúmulo y de la densidad media de éste (ver § 4.3.2).

Por construcción, los cúmulos pequeños se encuentran inicialmente contenidos dentro del lóbulo de Roche, mientras que los grandes tienen una fracción de su masa fuera de éste en el momento de pasar por su perigaláctico. Los cambios en masa y energía, que se muestran en la Fig. 5.1 para los cúmulos grandes ( $m_l$  y  $l$ ), parecen indicar que dicha variación está relacionada con la cantidad de masa que inicialmente se encuentra fuera del lóbulo de Roche.

Por otro lado, los choques gravitacionales son importantes cuando la variación temporal de la fuerza de marea es grande, que es el caso de las órbitas más excéntricas. Para los cúmulos pequeños la variación de su energía es máxima para  $e=0.75$ , independientemente de su  $R_{\text{peri}}$ . Aunque este efecto también ocurre en los cúmulos gran-

des, la magnitud del desbordamiento opaca el efecto de los choques.

De lo anterior, concluimos que: el desbordamiento del lóbulo de Roche está directamente relacionado con el tamaño del y de la distribución de masa del cúmulo; mientras que el calentamiento por choques gravitacionales es función de la amplitud y de la frecuencia con que varía la fuerza de marea. A continuación presentamos un modelo heurístico muy simplificado que utilizaremos para entender la dependencia de los procesos en cuestión con su  $R_{\text{peri}}$  y la excentricidad de su órbita.

### 5.1.2 Consideraciones sobre el desbordamiento del lóbulo de Roche

Intuitivamente, podemos decir que el desbordamiento del lóbulo de Roche depende del cociente entre el radio límite del cúmulo ( $r_l$ ) y el valor mínimo de su lóbulo de Roche ( $R_L$ ), que es cuando el cúmulo se encuentra en su  $R_{\text{peri}}$ . Si  $r_l < R_L$ , todo el cúmulo está contenido dentro del  $R_L$ , y no esperamos que haya desbordamiento. Por otro lado, si  $r_l > R_L$ , una fracción de la masa del cúmulo estará fuera de  $R_L$ , y cuando éste pase por su  $R_{\text{peri}}$ , las estrellas que estén más allá de  $R_L$  dejarán de pertenecer al cúmulo, porque la fuerza de marea galáctica las arrancará de éste.

La cantidad de masa que pierde el cúmulo es función del tamaño relativo entre  $r_l$  y  $R_L$ . Los cambios en la masa del cúmulo, debido al desbordamiento,  $(\Delta M_c)_{DLR}$ , están

dados por

$$\begin{aligned}
 (\Delta M_c)_{DLR} &\propto \int_{R_L}^{r_t} \rho(r) dV \\
 &= \int_0^{r_t} \rho(r) dV - \int_0^{R_L} \rho(r) dV \\
 &= M_t - M_c = M_f, \quad (1-1)
 \end{aligned}$$

donde  $\rho(r)$  es la densidad del cúmulo,  $M_f$  y  $M_c$  son la masa dentro del lóbulo de Roche y la total, respectivamente.  $M_f$  es la fracción de masa inicial que se encuentra fuera del lóbulo de Roche, entre  $R_L$  y  $r_t$ .

De manera general podemos escribir la relación (1-1) como,

$$(\Delta M_c)_{DLR} \propto 1 - F(r_t/R_L), \quad (1-2)$$

donde  $F(r_t/R_L)$  es la fracción de masa del cúmulo fuera de  $R_L$ . La dependencia de este proceso con el  $R_{peri}$  del cúmulo está implícita en el cálculo de  $R_L$  ( $\propto R_{peri}$ ).

La dependencia con la excentricidad de la órbita es indirecta, pues no es su forma lo que importa sino el hecho de que  $(r_t/r_L)$  varía según la excentricidad de la órbita. A mayor excentricidad el cúmulo pasa menos tiempo cerca del centro galáctico y por tanto este proceso debe disminuir, de donde podemos decir que la pérdida de masa varía de manera inversa con la excentricidad, digamos  $(\Delta M_c)_{DLR} \propto (1 - e)$ .

Para ilustrar la dependencia de este proceso con  $F(r_t/R_L)$  y la excentricidad, supongamos una esfera isotérmica, donde  $M(r) \propto r$ , por lo que podemos escribir la ec. (1-2) como

$$(\Delta M_c)_{DLR} \propto \left[ 1 - \left( \frac{r_t}{R_L} \right)^{-1} \right] (1 - e), \quad r_t > R_L. \quad (1-3)$$

Esta relación nos da una idea cualitativa de la dependencia que podemos esperar a el desbordamiento del lóbulo de Roche. En la Fig. 5.2a hemos graficado este comportamiento como función de  $r_t/R_L$  y  $e^1$ .

En la Fig. 5.2a vemos que el desbordamiento es importante cuando  $r_t/R_L \rightarrow \infty$ , lo que implica que  $R_L$  y  $R_{peri} \rightarrow 0$ , es decir, órbitas cercanas al centro galáctico. Este proceso será importante hasta que el tamaño del cúmulo sea igual o menor a  $R_L$ , es decir,  $M_f \rightarrow 0$ . Esto sucede después de que el cúmulo ha pasado varias veces por el perigaláctico de su órbita. En el caso de una órbita excéntrica esto ocurre de manera periódica, y para una órbita circular de manera continua.

En conclusión, el desbordamiento es importante para valores de  $R_{peri}$  pequeños, donde el cúmulo es mayor que el tamaño del lóbulo de Roche, y para órbitas con excentricidades pequeñas.

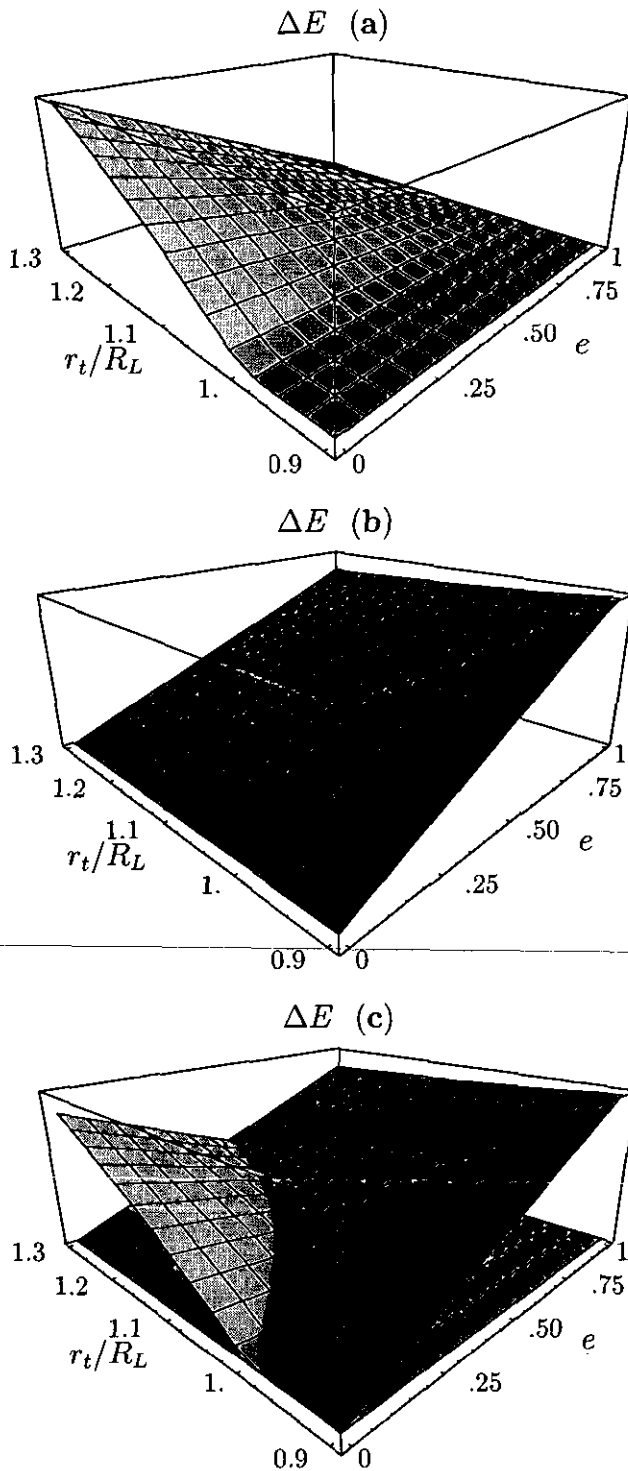


Fig. 5.2.— Tendencias cualitativas del desbordamiento del lóbulo de Roche (a), de los choques de marea (b) y ambos (c) como función de la excentricidad y del tamaño relativo del cúmulo al lóbulo de Roche, el cual se escala directamente con su  $R_{peri}$ .

<sup>1</sup>Para comparar la Fig. 5.2a con la Fig. 5.1 recordemos que  $r_t/R_L \propto r_t/R_{peri}$ .

### 5.1.3 Consideraciones sobre los choques de marea

En § 1.3.4 se menciona que este proceso se debe a la variación temporal del campo de marea que inyecta energía a las órbitas de las estrellas, lo que ocasiona una pérdida de masa debido a que dichas estrellas adquieren una velocidad mayor a la velocidad de escape. Este proceso afecta directamente la distribución de energía del cúmulo y no la distribución de masa. La variación de esta última será un efecto secundario.

Las variación de la fuerza de marea que experimentan las estrellas de un cúmulo, es función de la excentricidad de su órbita, así como de las orbitas estelares dentro de este. Como función de la excentricidad, la fuerza de marea tiene su máximo de variación para órbitas radiales, y es nulo para órbitas circulares. Como función del radio promedio de las órbitas de las estrellas, el efecto de los choques es máximo en el radio de marea y decae fuertemente hacia regiones internas del cúmulo, debido a los invariantes adiabáticos (ver discusión en § 2.2.2). Gnedin y Ostriker (1997) han modelado la eficiencia del choque dentro del cúmulo, a partir de la teoría dada por Weinberg (1994a), como

$$\Delta E \propto \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1-4)$$

donde  $\beta$  es el cociente entre la frecuencia angular de la estrella dentro del cúmulo ( $\omega_s$ ), y la frecuencia angular del cúmulo alrededor de la Galaxia ( $\omega_c$ ). Si suponemos que la frecuencia angular de una órbita se puede escalar de manera inversa al tamaño de la misma, y que  $R_L \propto R_{\text{peri}}$ , podemos escribir la dependencia funcional de este proceso en términos de  $e$  y  $r_t/R_L$  como sigue<sup>2</sup>,

$$(\Delta E_c)_{GS} \propto (\Delta M_c)_{GS} \propto e \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r_t}{R_L}\right)^{-2}\right]. \quad (1-5)$$

En la Fig. 5.2b se muestra el comportamiento de este efecto como función de  $e$  y  $r_t/R_L$ , de acuerdo a este modelo. Vemos que hay una fuerte dependencia con la excentricidad y una muy pequeña con  $R_{\text{peri}}$ , al menos en el intervalo graficado.

En la Fig. 5.2c se muestra el efecto de los choques y del desbordamiento como función de  $e$  y  $r_t/R_L$ . Debemos resaltar que sólo hemos hecho un análisis cualitativo de las dependencias y proporcionalidades de estos procesos, por lo que dicha figura sólo se puede usar para guiarnos en la comprensión de las tendencias de los procesos que hemos considerado. De este análisis no es posible cuantificar la magnitud absoluta de la variación de su energía, o de la magnitud relativa entre ambos procesos. Tampoco es posible afirmar con certeza la forma funcional de las dependencias con los parámetros que hemos considerado. En la figura vemos que estos procesos son independientes

entre sí. Sin embargo, existe una zona en el centro de la gráfica donde ambos se superponen, en particular para los cúmulos grandes.

En resumen, se puede decir que el efecto del desbordamiento domina a los cúmulos en órbitas circulares cercanas al centro galáctico ( $r_t/R_L \propto r_t/R_{\text{peri}}$ ), sobre todo si su tamaño físico es mayor que su lóbulo de Roche. Los choques son importantes para los cúmulos en órbitas excéntricas, independientemente de su  $R_{\text{peri}}$ .

### 5.1.4 Cambios globales en la estructura

En la Tabla II se presentan los cambios totales en la concentración teórica de los cúmulos, así como el cociente de los valores inicial y final de  $r_h$ .

En las figuras 5.5. y 5.6 se muestran los cambios en la distribución de masa del cúmulo cuando su evolución está determinada por el desbordamiento y por los choques de marea, respectivamente. A continuación se discuten en detalle estas distribuciones.

#### Cambios en la concentración

En la Fig. 5.3 se presentan los cambios de la concentración para los cúmulos de nuestras simulaciones después de 10 períodos orbitales. Los valores positivos indican un aumento en la concentración del cúmulo, mientras que los negativos una disminución de esta. Vemos que el efecto de los choques es el de aumentar la concentración del cúmulo (tamaños  $s$  y  $m$ ), mientras que el desbordamiento la tiende a disminuir (tamaños  $ml$  y  $l$ ).

Este comportamiento lo podemos entender observando las distribuciones de las figuras 5.5. y 5.6, y recordando la forma como se define la concentración teórica (ver §4.5.5),

$$c^t = \log \left( \frac{r_{99\%}}{r_{10\%}} \right), \quad (1-6)$$

donde  $r_{99\%}$  y  $r_{10\%}$  son los radios que contiene el 99% y el 10% de la masa ligada al cúmulo.

Cuando la evolución de un cúmulo está determinada por el desbordamiento, el campo de marea impone un límite al radio máximo del cúmulo, haciendo que el valor de  $r_{99\%}$  disminuya. Aunque  $r_{10\%}$  disminuye,  $r_{99\%}$  experimenta la mayor variación respecto a su valor inicial, razón por la cual  $c^t$  disminuye.

Si la evolución está determinada por choques, la variación del campo de marea inyecta energía en las órbitas de las estrellas del cúmulo, razón por la cual estas pueden alcanzar regiones externas, hecho que se manifiesta por una "expansión". Esta expansión ocurre en las regiones externas del cúmulo, sin afectar la estructura en las regiones centrales (ver Fig. 5.6). Esto hace que  $r_{99\%}$  aumente (respecto a su valor inicial) sin que  $r_{10\%}$  lo haga, razón por la cual la concentración del cúmulo tiende a aumentar ( $c^t = r_{99\%}/r_{10\%}$ ).

La concentración sólo aumenta cuando el calentamiento es más eficiente que el desbordamiento (ver Fig. 5.3),

<sup>2</sup>En este caso hemos utilizado que  $\beta \propto \omega_s/\omega_c \propto R_{\text{peri}}/r_t \propto R_L/r_t$ .

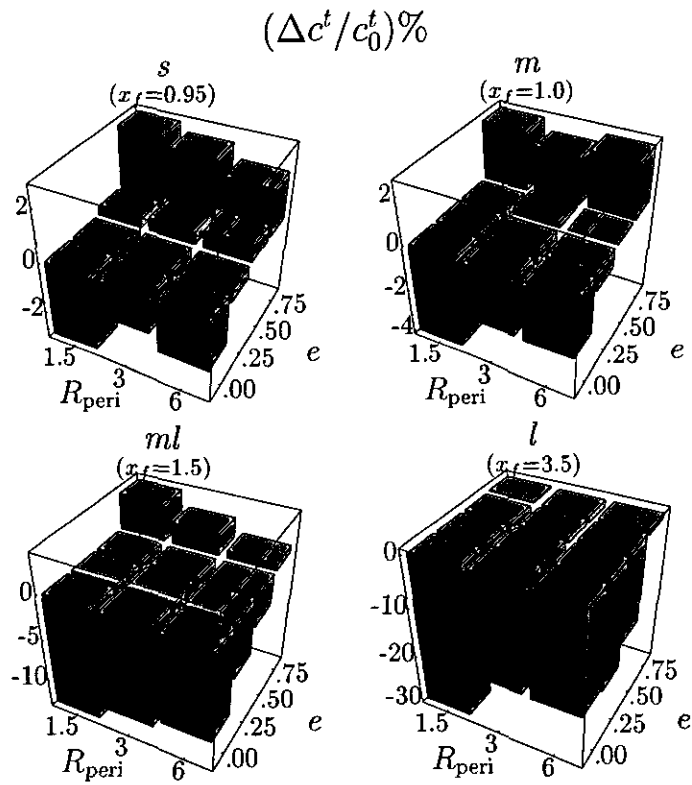


Fig. 5.3.— Resultados en la variación de la concentración porcentual total para todos los cúmulos de nuestras simulaciones después de 10 períodos orbitales.

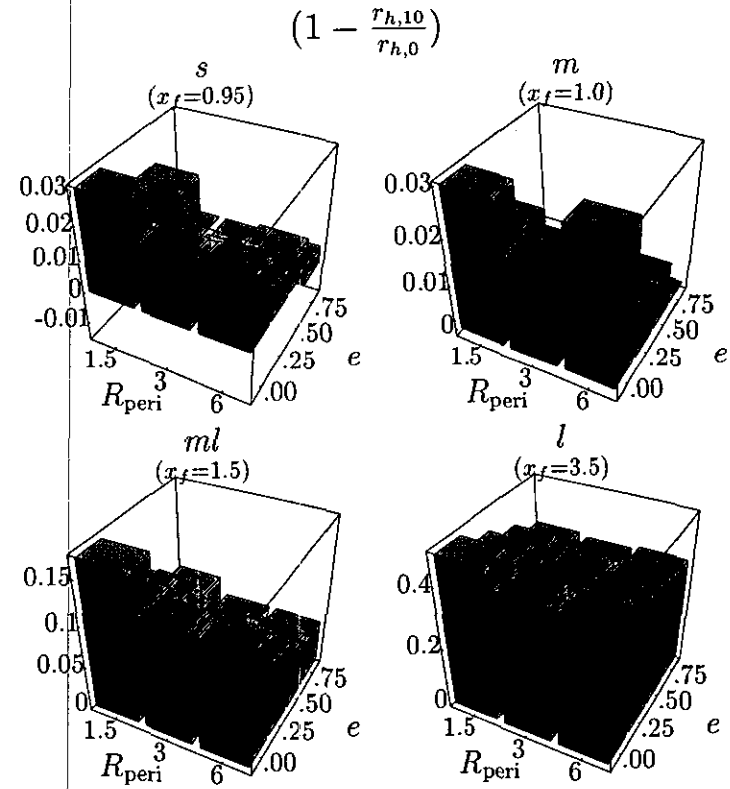


Fig. 5.4.— Resultados en la variación de la concentración porcentual total para todos los cúmulos de nuestras simulaciones después de 10 períodos orbitales.

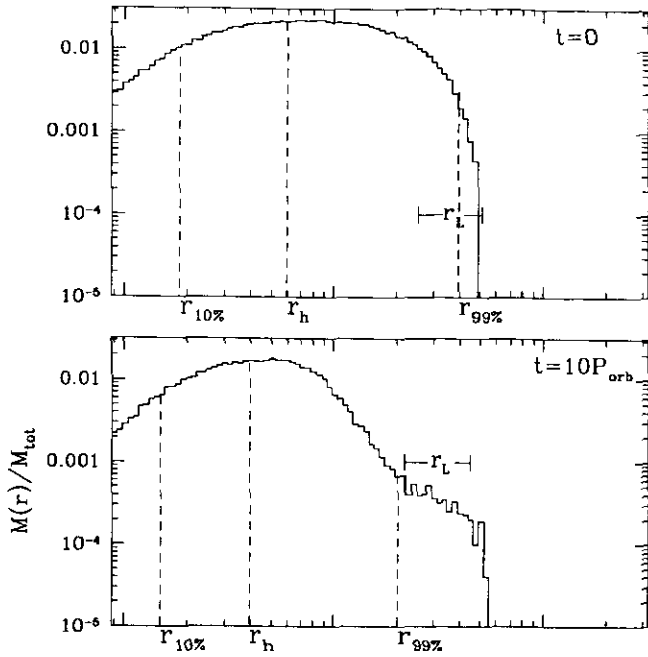


Fig. 5.5.— Cambio en la distribución inicial de masa después de 10 períodos orbitales de un cúmulo globular, cuando su evolución está determinada por el desbordamiento del lóbulo de Roche. El experimento que se muestra es el A50l.

que es el caso de los cúmulos pequeños en órbitas muy excéntricas.

### Cambios en $r_h$

Los cambios del  $r_h$  después de 10 períodos orbitales se dan en la Tabla II. En la Fig. 5.4 se muestra esta variación en forma de histogramas.

En esta figura se ve que los cúmulos más pequeños, y en órbitas excéntricas, muestran un ligero aumento de su  $r_h$ . En todos los demás casos el valor de  $r_h$  disminuye, y en particular, de manera muy drástica para los cúmulos grandes.

Cuando el desbordamiento es importante, el valor de  $r_{99\%}$  disminuye (ver Fig. 5.5), y debido al reacomodo que el cúmulo experimenta al tener una menor masa en sus primeros períodos orbitales, también lo hace el valor de  $r_h$ .

Si los choques dominan la evolución, el valor de  $r_{99\%}$  aumenta, y por tanto también lo hace el valor de  $r_h$ . Sin embargo, vemos que esto no es el caso para la mayor parte de estos cúmulos, para los cuales el valor de  $r_h$  está disminuyendo. Esto se puede deber a un reacomodo de la masa para estar en equilibrio con el campo galáctico, ya que dicha variación es un orden de magnitud menor que en el caso del desbordamiento.

De lo anterior, se puede concluir que los cambios en la estructura del cúmulo son mayores cuando su evolución está dominada por el desbordamiento, al menos para los

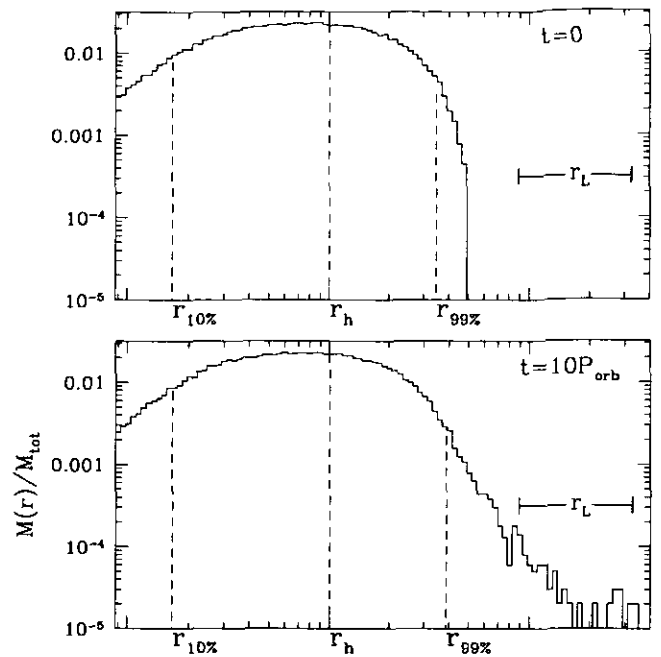


Fig. 5.6.— Cambio en la distribución inicial de masa después de 10 períodos orbitales de un cúmulo globular, cuando su evolución está determinada por choques gravitacionales. El experimento que se muestra es el A75m.

casos que hemos considerado.

### 5.2 Cambios como Función del Tiempo

En la Fig. 5.7 se presenta la evolución temporal de la energía y de la masa de los cúmulos de todos nuestros experimentos, agrupados según su tamaño inicial. Los paneles del lado izquierdo corresponden al incremento de la energía,  $\Delta E$ , y los de la derecha al cambio fraccional de la masa ligada al cúmulo,  $M/M_0$ . Cada panel corresponde a un valor de las excentricidades que hemos considerado. Los símbolos de las curvas corresponden a los distintos perigalácticos que hemos considerado (cuadros para 1.5 kpc, triángulos sólidos para 3 kpc y triángulos abiertos para 6 kpc).

En general se puede hablar de dos tipos de comportamiento. El primero es un cambio exponencial de la energía y de la masa para los cúmulos  $s$  y  $m$ , que se encuentran en órbitas excéntricas, y cuya evolución está determinada por los choques de marea. El segundo comportamiento muestra una rápida variación inicial de la energía y de la masa, para los cúmulos  $ml$  y  $l$ , pasando por una etapa de desaceleración para después tener una tasa de variación mucho menor a la inicial. Los cúmulos  $s$  y  $m$ , en órbitas circulares, también presentan este comportamiento.

La variación en la energía del cúmulos,  $s$  y  $m$ , es más importante en las órbitas más excéntricas. En órbitas poco excéntricas, esta variación es aproximadamente lineal.

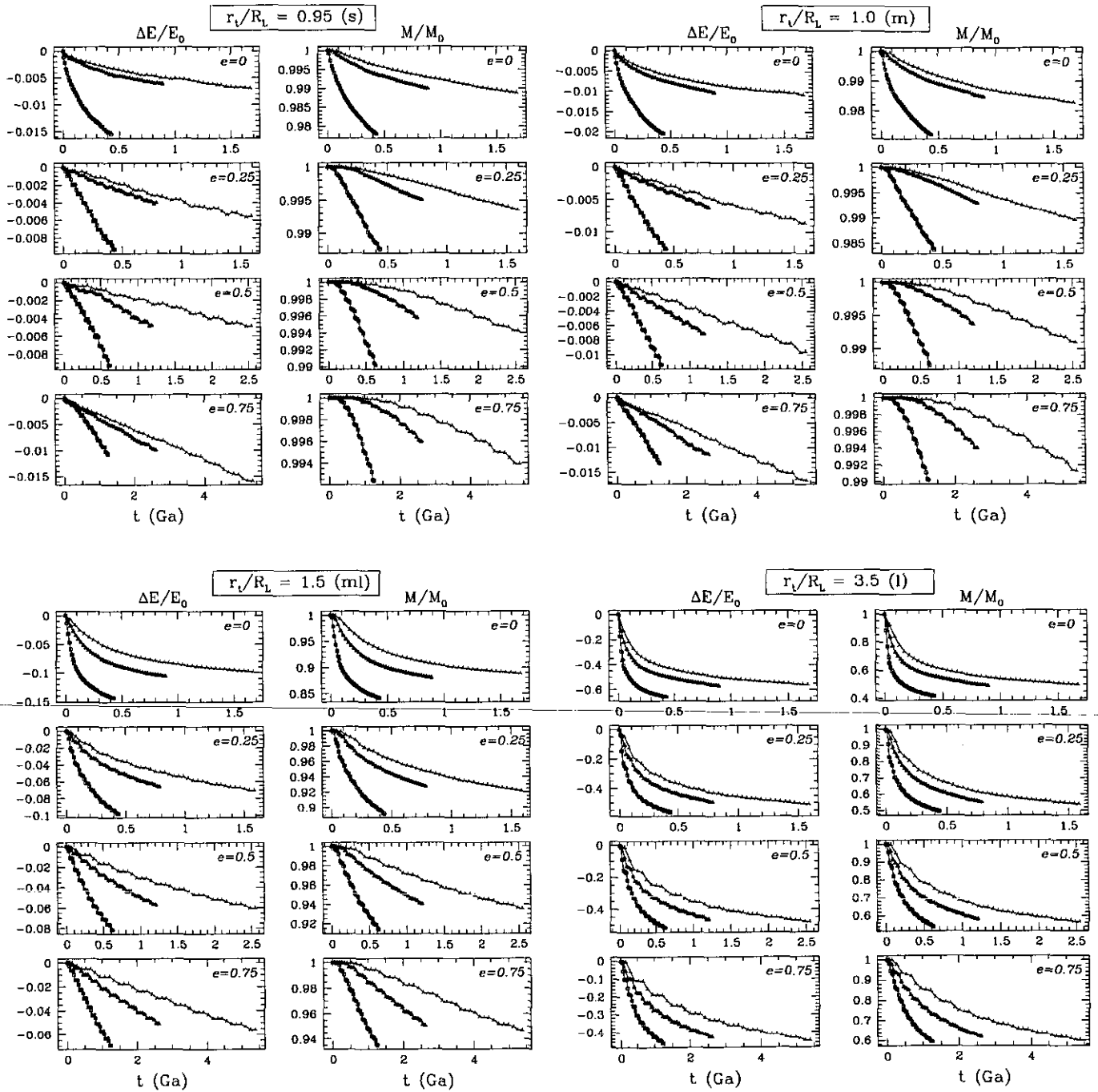


Fig. 5.7.— Variación temporal de la energía y la masa para todas las simulaciones en este trabajo. Los resultados están agrupados según el tamaño inicial del cúmulo y con la excentricidad, que aumenta de arriba hacia abajo.

TABLA II  
VARIACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN TEÓRICA Y DEL  $r_h$

$e$	$x_f = 0.95$		$x_f = 1.0$		$x_f = 1.5$		$x_f = 3.5$	
	$\Delta c^t(\%)$	$\frac{r_{h,10}}{r_{h,0}}$	$\Delta c^t(\%)$	$\frac{r_{h,10}}{r_{h,0}}$	$\Delta c^t(\%)$	$\frac{r_{h,10}}{r_{h,0}}$	$\Delta c^t(\%)$	$\frac{r_{h,10}}{r_{h,0}}$
A00	-3.05	0.97	-4.03	0.97	13.08	0.83	-29.86	0.52
B00	-1.38	0.98	-2.41	0.98	-11.41	0.87	-19.98	0.56
C00	-2.04	0.98	-2.48	0.97	-10.34	0.87	-20.33	0.56
A25	-1.14	0.99	-1.88	0.98	-9.16	0.88	-22.55	0.57
B25	-0.86	0.99	-0.48	0.99	-5.60	0.92	-16.82	0.60
C25	-0.46	0.99	-0.79	0.98	-6.35	0.91	-21.31	0.60
A50	0.31	0.98	-0.45	0.99	-3.74	0.91	-10.96	0.60
B50	0.48	0.99	0.24	0.99	-2.16	0.94	-1.06	0.63
C50	0.65	0.99	0.06	0.99	-3.55	0.93	-16.96	0.62
A75	2.72	1.00	2.48	1.00	3.97	0.94	0.26	0.65
B75	2.38	1.01	1.98	1.00	2.29	0.95	-1.27	0.66
C75	1.83	1.01	2.37	1.00	0.73	0.95	-0.97	0.65

### 5.2.1 Diferencias en la evolución temporal entre los choques y el desbordamiento

En la Fig. 5.7 vemos que la variación temporal de la energía y de la masa no es continua (en particular para los cúmulos  $s$  y  $m$ , en todas sus órbitas excéntricas, y para los cúmulos  $ml$  y  $l$ , para  $e=0.75$ ), mostrando *escalones* espaciados temporalmente, como función del período orbital del cúmulo.

En la Fig. 5.8 se presenta la evolución diferencial<sup>3</sup> de la energía y la masa (ver §4.5.4), como función del período orbital del cúmulo, para las simulaciones  $A00ml$  y  $A75m$  (que en las Fig. 5.1, corresponden a los casos  $m$  y  $ml$ , con  $R_{peri}=1.5$  kpc para las  $e=0.75$  y  $0.0$ , respectivamente). Las líneas verticales indican el paso del cúmulo por su perigaláctico.

Para la simulación  $A00ml$  la pérdida de masa crece rápidamente hasta alcanzar un máximo después de medio período orbital, comenzando a decaer hasta llegar a una situación aproximadamente estacionaria, después de 5 a 6 períodos orbitales. En este caso la variación de la energía y de la masa no muestran una correlación con el período orbital del cúmulo.

La evolución del cúmulo, en el experimento  $A75m$ , es dominada por los choques que se manifiestan por medio de pulsos en la variación de la energía y de la masa. Estos cambios están claramente relacionados con el período orbital del cúmulo, alcanzando su máxima variación cuando este pasa por su perigaláctico. En esta simulación, la

masa comienza a variar después de su segundo paso por  $R_{peri}$ , aumentando gradualmente la amplitud de su variación, hasta llegar a ser comparable con la amplitud de la energía. Llamaremos a este tipo de comportamiento *un retraso en la variación de la masa*.

Los ejemplos que se muestran en la Fig. 5.8 son para ilustrar el efecto de los choques y del desbordamiento cuando cada uno domina la evolución del cúmulo. Sin embargo, es posible que ambos procesos se superpongan, y afecten la evolución del cúmulo de manera conjunta. En la Fig. 5.9 se muestran los resultados de las simulaciones  $A00ml$ ,  $A25ml$ ,  $A50ml$  y  $A75ml$  ( $R_{peri}=1.5$  kpc, y  $r_t/R_L = 1.5$ ). En estos experimentos es posible estudiar la transición entre ambos efectos como función de la excentricidad de su órbita. Para la órbita circular,  $e=0$ , el desbordamiento domina durante los primeros períodos del cúmulo, para después tender a una situación aproximadamente estacionaria para la energía y para la masa. Conforme aumenta la excentricidad, la importancia del desbordamiento disminuye, comenzando a ser más importante el efecto de los choques. La evolución en el experimento  $A25ml$  está determinada por ambos procesos, inicialmente por el desbordamiento, cuya magnitud disminuye continuamente como función del tiempo, mientras que la importancia de los choques está aumentando. Este comportamiento es periódico, con el máximo de su amplitud en el perigaláctico de su órbita. La evolución del cúmulo, en el experimento  $A75ml$ , está completamente determinada por los choques. Cuando los choques comienzan a determinar la evolución del cúmulo el *retraso en la variación de la masa* comienza a ser importante.

En las Fig. 5.8 y 5.9 podemos ver que el desbordamiento

<sup>3</sup>Recordemos que  $\delta E$  y  $\delta M$  se refieren a los cambios de energía y masa respecto al intervalo temporal anterior y no al inicial.



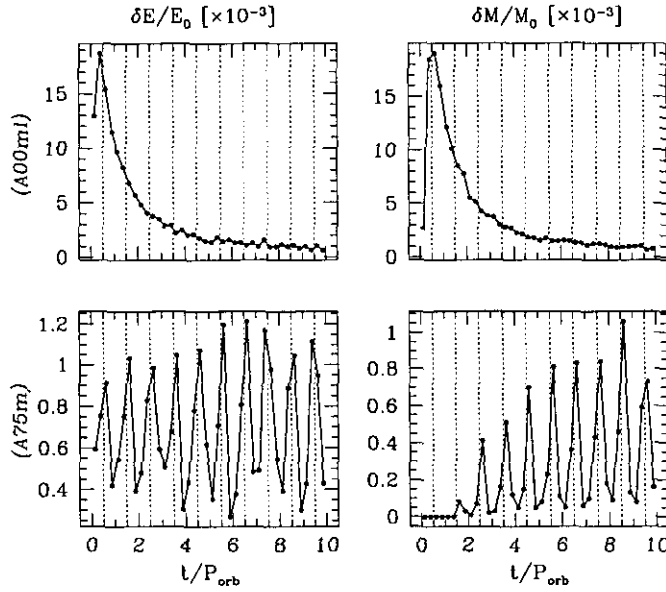


Fig. 5.8.— Incremento diferencial de la energía y la masa para dos cúmulos globulares. En el primero su evolución esta dominada por el desbordamiento del lóbulo de Roche ( $A00ml$ ), y el segundo por los choques gravitacionales ( $A75m$ ). Las líneas verticales indican el paso de los cúmulos por su  $R_{peri}$ . Para las órbitas circulares estas líneas indican cada que transcurre un período orbital.

to es un proceso autolimitante, porque el cúmulo pierde masa de manera continua hasta un cierto valor, después del cual queda en equilibrio con el campo de marea galáctico. Esto ocurre cuando  $r_t \sim R_L$ . En la Fig. 5.10 hemos graficado la evolución temporal del lóbulo de Roche (línea sólida), y del radio límite del cúmulo (puntos circulares), para las simulaciones  $A00ml$  (panel superior) y la  $A25ml$  (panel inferior). El radio límite del cúmulo contiene el 100% de la masa de este ( $r_t = r_{100\%}$ ). El valor del lóbulo de Roche lo hemos determinado con la siguiente relación (Binney y Tremaine 1987),

$$r_L = \left( \frac{M_c(r_t)}{M_G(R_{GC})} \right)^{\frac{1}{3}} R_{GC}, \quad (2-1)$$

donde  $M_c(r_t)$  es la masa del cúmulo que esta dentro de su radio de marea y  $M_G(R_{GC})$  es la masa de la Galaxia que se encuentra dentro del radio  $R_{GC}$ .

En la Fig. 5.10 vemos que los valores de  $r_t$  tienden a los valores de  $r_L$ , después de algunos períodos orbitales, tanto para la órbita circular ( $A00ml$ ) como para la órbita excéntrica ( $A25ml$ ). Vemos que el tamaño del cúmulo tiende al valor impuesto por el campo de marea galáctico.

En la Fig. 5.10 hemos incluido las aproximaciones de King (1962), línea de puntos, y la de Innanen *et al.* (1983), línea de trazos, para el radio límite del cúmulo. Ambas

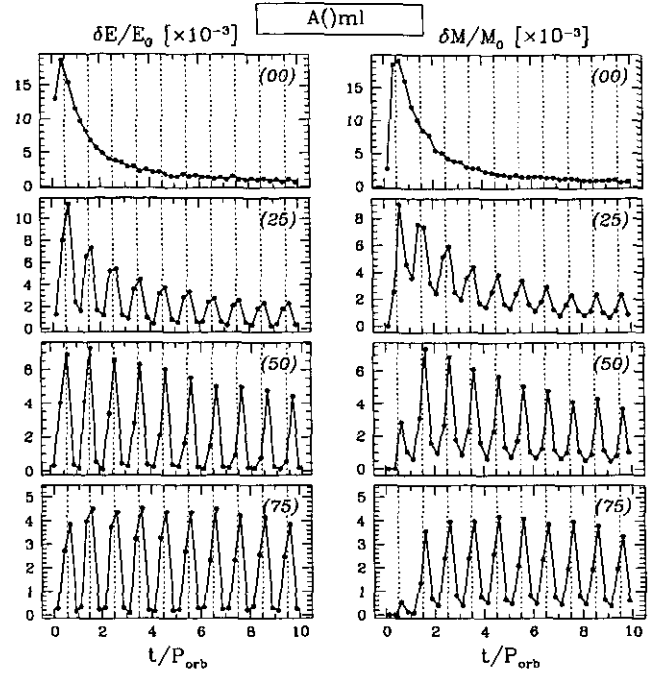


Fig. 5.9.— Incremento diferencial de la energía y de la masa para un cúmulo globular de tamaño  $ml$  en órbitas de distinta excentricidad (con un mismo  $R_{peri}$ ) alrededor del centro galáctico. El panel superior corresponde a una órbita circular y el inferior a una órbita con excentricidad de 0.75.

están dadas por,

$$r_L^{King} = \left( \frac{1}{3+e} \right) \left( \frac{M_c}{M_G(R_{GC})} \right)^{\frac{1}{3}} y \quad (2-2)$$

$$r_L^{Innanen} = \left[ 1 - \ln \left( \frac{2R_{peri}}{R_{apo} + R_{peri}} \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{M_c(r_t)}{M_G(R_{GC})} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2-3)$$

De la Fig. 5.10 vemos que los valores dados por la relación (2-1) es la que mejor aproxima los resultados de nuestros experimentos. Los valores dados por las relaciones (2-2) y (2-3), son 30% menores que nuestros resultados. Es importante destacar la diferencia entre nuestros resultados con los valores que se obtienen de (2-2) y (2-3), porque algunos autores intentan determinar la masa de la Galaxia utilizando estas aproximaciones (Innanen *et al.* 1983), que como podemos ver sobrestiman el valor de la masa.

La variación de  $r_t$  tiene el mismo período que la variación de la energía. Los máximos de la energía corresponden al mínimo de  $r_t$ , que es cuando el cúmulo cambia su energía de ligadura (menos ligados). Este comportamiento se observa en nuestros cúmulos cuya evolución está determinada por choques.

## 5.2.2 Ajuste a la variación de la energía

Para describir y extrapolar el comportamiento temporal de la energía y de la masa, hemos ajustado los parámetros de una función analítica a los resultados que se pre-

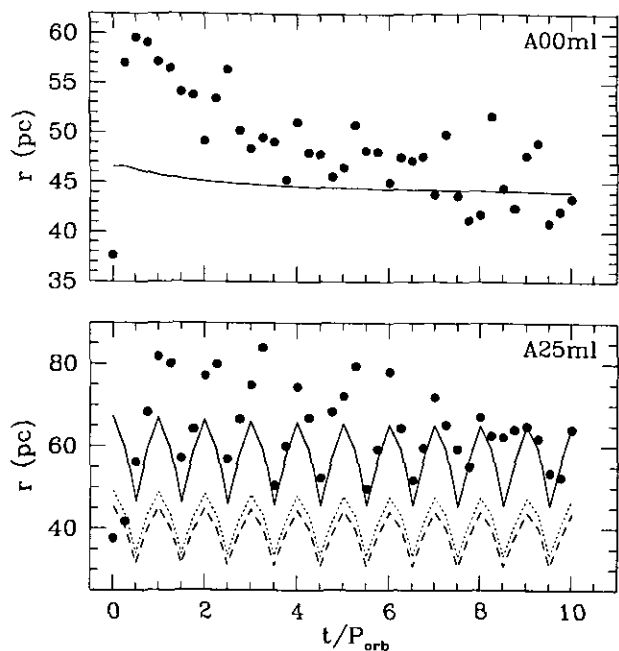


Fig. 5.10.— Evolución teórica y de las simulaciones A00ml y A25ml, para el radio límite del cúmulo. La línea sólida corresponde al valor dado por la ec. (2-1), la línea de puntos es la aproximación de King (1962), y la de trazos la de Innanen *et al.* (1983). Los puntos son el resultado para el radio límite de las simulaciones.

sentan en la Fig. 5.7. Aunque el comportamiento de la energía y de la masa son muy parecidos, el ajuste lo hacemos de manera independiente.

Se propone ajustar los resultados de la energía con una función de la forma:

$$\Delta E = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_E}\right)^{\alpha_E}, \quad (2-4)$$

donde  $\alpha_E$  y  $\tau_E$  son los parámetros a encontrar. El parámetro  $\alpha_E$  es el exponente de la función y  $\tau_E$  es el tiempo característico, en las mismas unidades de  $t$ , en que la energía se reduce por un factor  $e^{-1}$ , que corresponde a una variación del 74% de su valor inicial. Los puntos que hemos considerado en el ajuste dependen del proceso inicial que domina la evolución del cúmulo.

Para los choques (cúmulos  $s$  y  $m$ ) se consideran todos los valores de la energía y de la masa. Para el desbordamiento sólo se consideran los puntos una vez que han pasado por su etapa inicial de pérdida de masa (cúmulos  $ml$  y  $l$ ).

El ajuste de los parámetros ( $\alpha_E$  y  $\tau_E$ ) se realizó con el método de Levenberg-Marquadt, que busca y encuentra el mínimo de  $\chi^2$  de manera iterativa (Press *et al.* 1992). Los valores de  $\alpha_E$  y  $\tau_E$  se muestran en la Tabla III.

Para los cúmulos que son afectados por desbordamiento, el valor de  $\alpha_E$  siempre es menor a 0.8, con un valor promedio de  $\alpha_E^{DLR} = 0.59 \pm 0.2$ . Cuando los choques de-

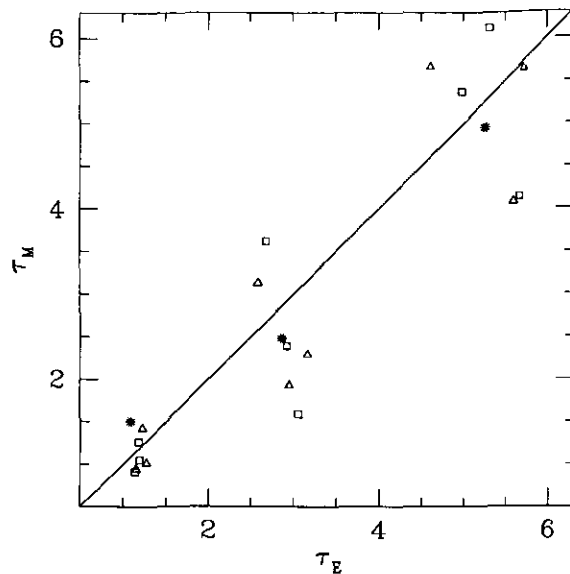


Fig. 5.11.— Comparación entre  $\tau_E$  y  $\tau_M$ , para los cúmulos cuya evolución está determinada por los choques gravitacionales. Los símbolos corresponden a los tamaños de los cúmulos considerados:  $s$  con cuadros,  $m$  con triángulos y  $ml$  con (\*).

terminan el comportamiento del cúmulo  $\alpha_E^{DLR} \sim 0.9-1$ , con un valor promedio de  $\alpha_E^{DLR} = 1.00 \pm 0.04$ .

### 5.2.3 Ajuste a la variación de la masa

La función que se ajusta al comportamiento de la masa es,

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right)^{\alpha_M}, \quad (2-5)$$

donde  $\alpha_M$  y  $\tau_M$  son los parámetros a encontrar. Siendo  $\alpha_M$  el exponente de la función y  $\tau_M$  es el tiempo característico, en las mismas unidades de  $t$ , en que la masa del cúmulo ha variado un  $\sim 74\%$  de su valor inicial.

En la Tabla IV se dan los valores del ajuste para el exponente  $\alpha_M$  y para el tiempo característico  $\tau_M$ .

Cuando la evolución del cúmulo es dominada por choques, los valores del exponente están entre  $1 < \alpha_M^{GS} < 2.5$ , con un valor promedio de  $1.7 \pm 0.4$ . Para el desbordamiento los valores del exponente están entre  $0.2 < \alpha_M^{DLR} < 1$ , con un valor promedio de  $0.55 \pm 0.2$ .

En la Fig. 5.11 se comparan los tiempos característicos que se obtiene en el ajuste de la energía,  $\tau_E$ , y de la masa,  $\tau_M$ , para los cúmulos cuya evolución es dominada por los choques de marea. Vemos que la dispersión en los valores que se obtienen del ajuste de la masa es mayor que los de la energía. La diferencia entre ambos tiempos, en promedio, es menor que un factor de dos.

TABLA III  
VALORES DEL AJUSTE PARA EL EXPONENTE  $\alpha_E$  Y EL TIEMPO CARACTERÍSTICO  $\tau_E$ .

e	$x_f = 0.95$		$x_f = 1.0$		$x_f = 1.5$		$x_f = 3.5$	
	$\alpha_E$	$\tau_E(\times 10^{10}a)$	$\alpha_E$	$\tau_E(\times 10^{10}a)$	$\alpha_E$	$\tau_E(\times 10^{10}a)$	$\alpha_E$	$\tau_E(\times 10^{10}a)$
A00	0.79	0.61	0.73	0.50	0.33	0.05	0.27	$7.3 \times 10^{-3}$
B00	0.90	2.08	0.84	1.68	0.41	0.81	0.31	$2.1 \times 10^{-2}$
C00	0.90	3.87	0.80	2.96	0.40	0.35	0.31	$4.1 \times 10^{-2}$
A25	0.99	1.18	0.97	1.22	0.60	0.14	0.35	$1.2 \times 10^{-2}$
B25	0.98	2.68	0.98	2.58	0.67	0.45	0.42	$2.9 \times 10^{-2}$
C25	0.99	4.98	0.98	4.61	0.65	0.80	0.40	$5.4 \times 10^{-2}$
A50	1.03	1.14	1.03	1.15	0.82	0.38	0.52	$2.7 \times 10^{-2}$
B50	1.04	3.06	1.01	2.95	0.89	1.19	0.52	$6.2 \times 10^{-2}$
C50	1.02	5.66	1.03	5.59	0.84	2.08	0.49	$1.1 \times 10^{-1}$
A75	1.05	1.19	1.03	1.27	0.99	1.08	0.66	$8.6 \times 10^{-2}$
B75	1.02	2.92	1.04	3.16	1.01	2.86	0.62	$1.1 \times 10^{-1}$
C75	1.03	5.31	1.03	5.72	1.01	5.25	0.63	$3.6 \times 10^{-1}$

TABLA IV  
VALORES DEL AJUSTE PARA EL EXPONENTE  $\alpha_M$  Y EL TIEMPO CARACTERÍSTICO DE DESTRUCCIÓN  $\tau_M$ .

e	$x_f = 0.98$		$x_f = 1.0$		$x_f = 1.5$		$x_f = 3.5$	
	$\alpha_M$	$\tau_M(\times 10^{10}a)$	$\alpha_M$	$\tau_M(\times 10^{10}a)$	$\alpha_M$	$\tau_M(\times 10^{10}a)$	$\alpha_M$	$\tau_M(\times 10^{10}a)$
A00	0.6	23.8	0.5	34.5	0.3	27.0	0.2	0.07
B00	0.7	57.5	0.7	32.9	0.4	24.0	0.3	0.31
C00	0.8	47.9	0.4	182.	0.3	71.2	0.3	0.58
A25	1.3	1.26	1.2	1.42	0.6	2.03	0.3	0.13
B25	1.4	3.62	1.5	2.13	0.6	4.11	0.4	0.26
C25	1.4	5.37	1.3	5.66	0.6	7.57	0.4	0.52
A50	1.7	0.92	1.6	0.94	0.9	1.00	0.5	0.16
B50	1.8	1.59	1.8	1.93	1.0	1.62	0.5	0.38
C50	1.8	4.14	1.7	4.08	1.1	3.76	0.4	0.84
A75	2.3	1.05	2.1	1.10	1.2	1.15	0.7	0.32
B75	2.5	2.39	2.3	2.29	1.3	2.48	0.7	0.75
C75	2.1	6.12	2.0	5.64	1.3	4.95	0.6	1.55

### 5.2.4 Tiempo característico y de destrucción

El tiempo característico  $\tau_{E,M}$ , es el tiempo en que la energía y la masa cambian un 74% de su valor inicial. En ambos casos, éste no es el tiempo en que ocurre la desintegración del cúmulo.

No tenemos un criterio estricto para decir en que momento los cúmulos se desintegran en su totalidad, pero considerando la distribución de masas para el sistema de cúmulos globulares galáctico, que se muestra en la Fig. 1.4 de §1.2.5, vemos que hay pocos cúmulos con masas menores a  $10^4 M_\odot$ , por lo que podemos pensar que este será, en promedio, un límite inferior para el valor de la masa. Los cúmulos cercanos al centro galáctico no muestran masas mayores a  $5 \times 10^4 M_\odot$ , valores que representan, aproximadamente, entre el 2% y el 10% de la masa inicial de los cúmulos que hemos considerado ( $M_0 = 5 \times 10^5 M_\odot$ ).

De lo anterior, un valor que se puede asociar con la desintegración del cúmulo es el tiempo de destrucción, que en nuestro caso será cuando el cúmulo sólo tenga el 1% de su masa inicial. Este es un criterio justificable desde el punto de vista observacional, porque no se observan cúmulos con masas menores a  $5 \times 10^3 M_\odot$ .

La relación entre el tiempo característico y el tiempo de destrucción ( $t_{dest}$ ) se obtiene de las relaciones (2-1) y (2-2), dada por

$$t_{dest} = 4.06^{1/\alpha} \tau_{E,M}. \quad (2-6)$$

En la sección 5.4 calculamos la tasa de destrucción para los cúmulos globulares, utilizando los valores de  $t_{dest}$  que hemos encontrado en esta sección.

### 5.3 Eficiencia del Choque Dentro del Cúmulo

La eficiencia de los choques gravitacionales es función de la energía de ligadura de las estrellas dentro del cúmulo, del tiempo en que ocurre la interacción, y de la distribución de masa del cúmulo. Esta eficiencia se puede medir en una escala de tiempo correspondiente a un período orbital, o por unidad de tiempo.

En esta sección se analiza el calentamiento del cúmulo por período orbital, y en la sección 5.3.3 por unidad de tiempo. El calentamiento, por período orbital, es de gran interés desde un punto de vista teórico, porque nos da información sobre el tipo de órbitas, que para un potencial determinado, causan mayores daños en la estructura del cúmulo. El calentamiento, por unidad de tiempo, tiene un interés desde el punto de vista observacional y de las teorías de evolución galáctica, porque a partir de este es posible estimar de erosión que éste proceso ha ocasionado durante el tiempo de Hubble.

#### 5.3.1 Calentamiento por período orbital

El calentamiento que experimentan las estrellas dentro de un cúmulo, debido al choque de marea,  $\Delta E_s$ , se mide cada vez que este alcanza su apogaláctico. En

las figuras 5.12-5.14 se muestra el calentamiento promedio que experimentan las estrellas por período orbital ( $\Delta E_s = \langle E_n - E_{n-1} \rangle$ ), que en el período anterior se encontraban dentro de un intervalo de energía ( $E_{n-1} - \Delta E < E < E_{n-1} + \Delta E$ ). En el recuadro inferior de cada pánel se muestra el valor de la dispersión en  $\Delta E$  asociada a cada intervalo. En cada gráfica se muestran dos series de resultados, diferenciados por el tamaño de los cúmulos,  $s$  y  $m$ , respectivamente. Cada pánel corresponde a un valor de la excentricidad. Las líneas de trazos es el calentamiento en cada período orbital, la línea sólida delgada y la gruesa corresponden a la primera y a la última órbita del cúmulo, respectivamente.

Vemos que el incremento de la energía para los cúmulos en órbitas circulares, disminuye como función del tiempo, tendiendo a cero en algunos períodos orbitales más. Este calentamiento debe ser en su mayoría espureo, porque la dispersión es mayor para las estrellas menos ligadas. Otra razón de este calentamiento, y su disminución con el tiempo es por el reacomodo del cúmulo al potencial galáctico. Para los cúmulos en órbita circulares la varianza aumenta para las estrellas menos ligadas, en cada período orbital, efecto contrario al calentamiento para esas mismas estrellas. Este comportamiento nos indica que los datos cada vez son más ruidosos, lo cual se debe a una disminución de estrellas en estos intervalos de energía o a una mayor dispersión de sus valores, las cuales están siendo arrancadas por el campo de marea galáctico.

Las órbitas con  $e=0.25$  muestran una disminución de la energía durante los primeros períodos orbitales. Sin embargo, este incremento no tiende a cero como función del tiempo. Para las órbitas más excéntricas,  $e=0.50$  y  $e=0.75$ , el incremento de la energía en cada período orbital se mantiene constante en los períodos que hemos graficado. La dispersión en el incremento de la energía disminuye como función de la excentricidad en todos los cúmulos y para todos los valores de  $R_{peri}$ .

En la Fig. 5.15 se compara el calentamiento del último período orbital para los cúmulos con el mismo tamaño. En general, el calentamiento es mínimo para los cúmulos en órbita circular, aumentando su importancia con la excentricidad, siendo los cúmulos en órbitas más radiales los que muestran un mayor incremento de su energía por período orbital. Aunque en los experimentos  $A()s$ ,  $B()s$  y  $B()m$ , el calentamiento parece ser mayor para las órbitas con  $e=0.25$ , la tendencia general de la curva es a estar por debajo de los valores de las otras dos excentricidades.

El calentamiento, como función del tamaño del cúmulo, es mayor para los cúmulos más grandes,  $m$ , aunque la diferencia entre ambos tamaños es muy pequeña. Finalmente, como función del  $R_{peri}$ , los cúmulos que experimentan mayor calentamiento por período orbital son los más cercanos al bulbo.

La importancia del choque como función del parámetro de adiabaticidad,  $\beta$ , que se define como (que es función del cociente entre el tiempo dinámico de las estrellas dentro del cúmulo y el período orbital de éste alrededor de la

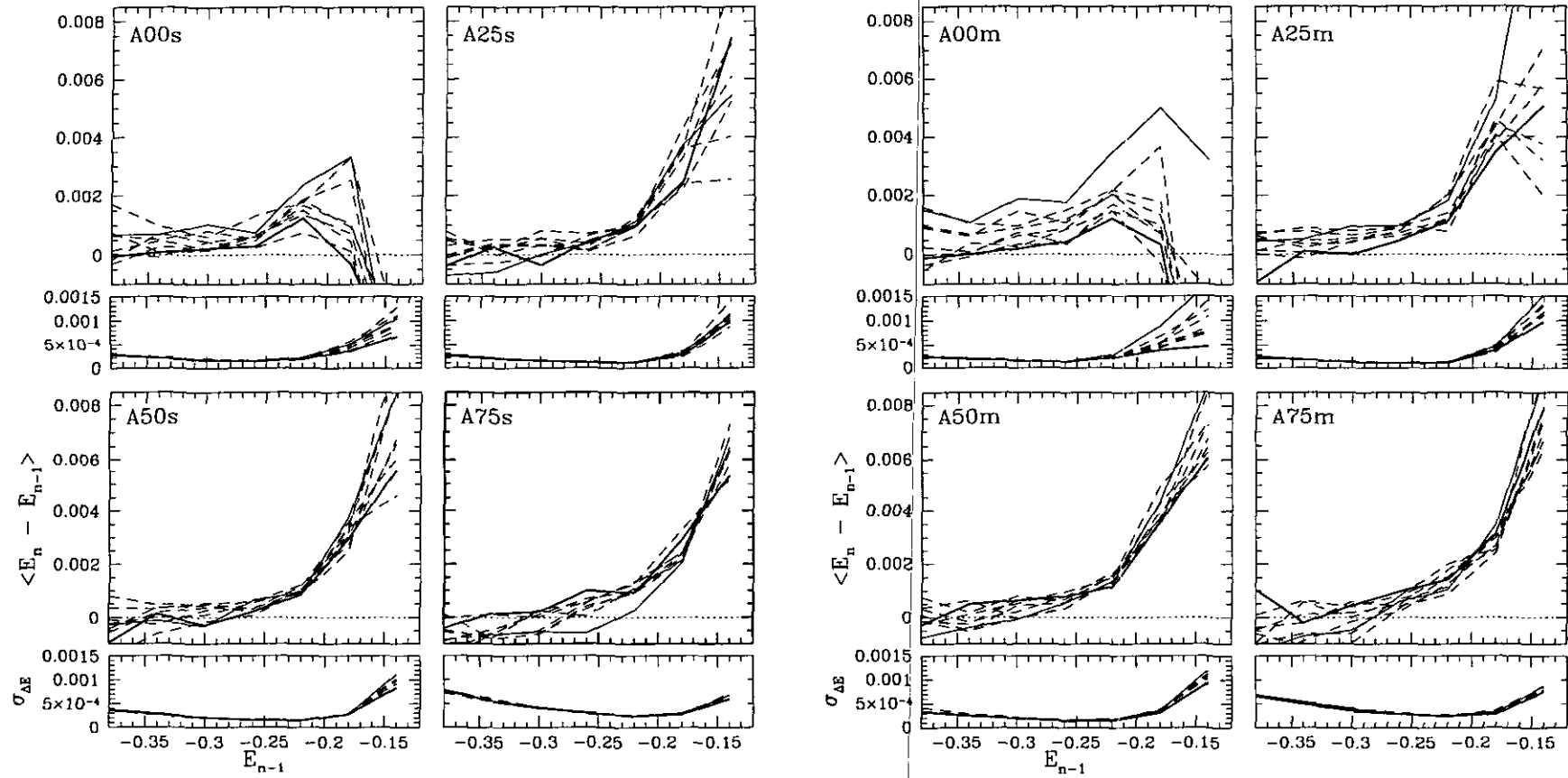


Fig. 5.12.— Calentamiento de los cúmulos en los experimentos  $A(s)$  y  $A(m)$  en cada período orbital, como función de la energía de las estrellas en el apogaláctico anterior. Las líneas de trazos son los resultado para cada una de las órbitas consideradas. La línea sólida delgada y la gruesa son los resultados del primer y último período del cúmulo, respectivamente. En el recuadro inferior de cada gráfica se muestra el valor de la varianza,  $\sigma^2$ , que corresponde a los valores graficados arriba. La líneas significan lo mismo que en la gráfica del panel superior.

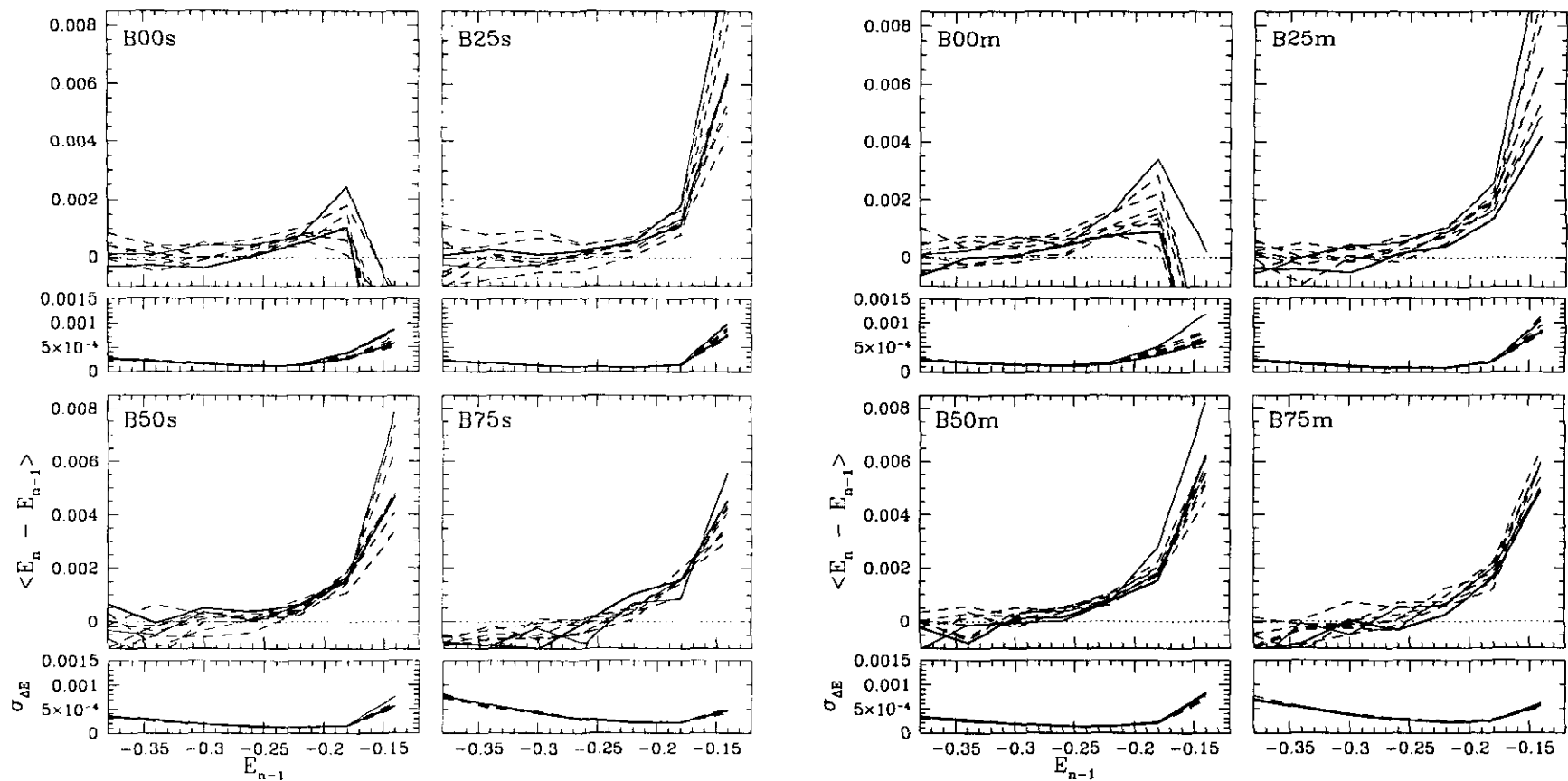


Fig. 5.13.— Calentamiento de los cúmulos en los experimentos  $B()s$  y  $B()m$  en cada período orbital, como función de la energía de las estrellas en el apogaláctico anterior. Las líneas de trazos son los resultado para cada una de las órbitas consideradas. La línea sólida delgada y la gruesa son los resultados del primer y último período del cúmulo, respectivamente. En el recuadro inferior de cada gráfica se muestra el valor de la varianza,  $\sigma^2$ , que corresponde a los valores graficados arriba. Las líneas significan lo mismo que en la gráfica del panel superior.

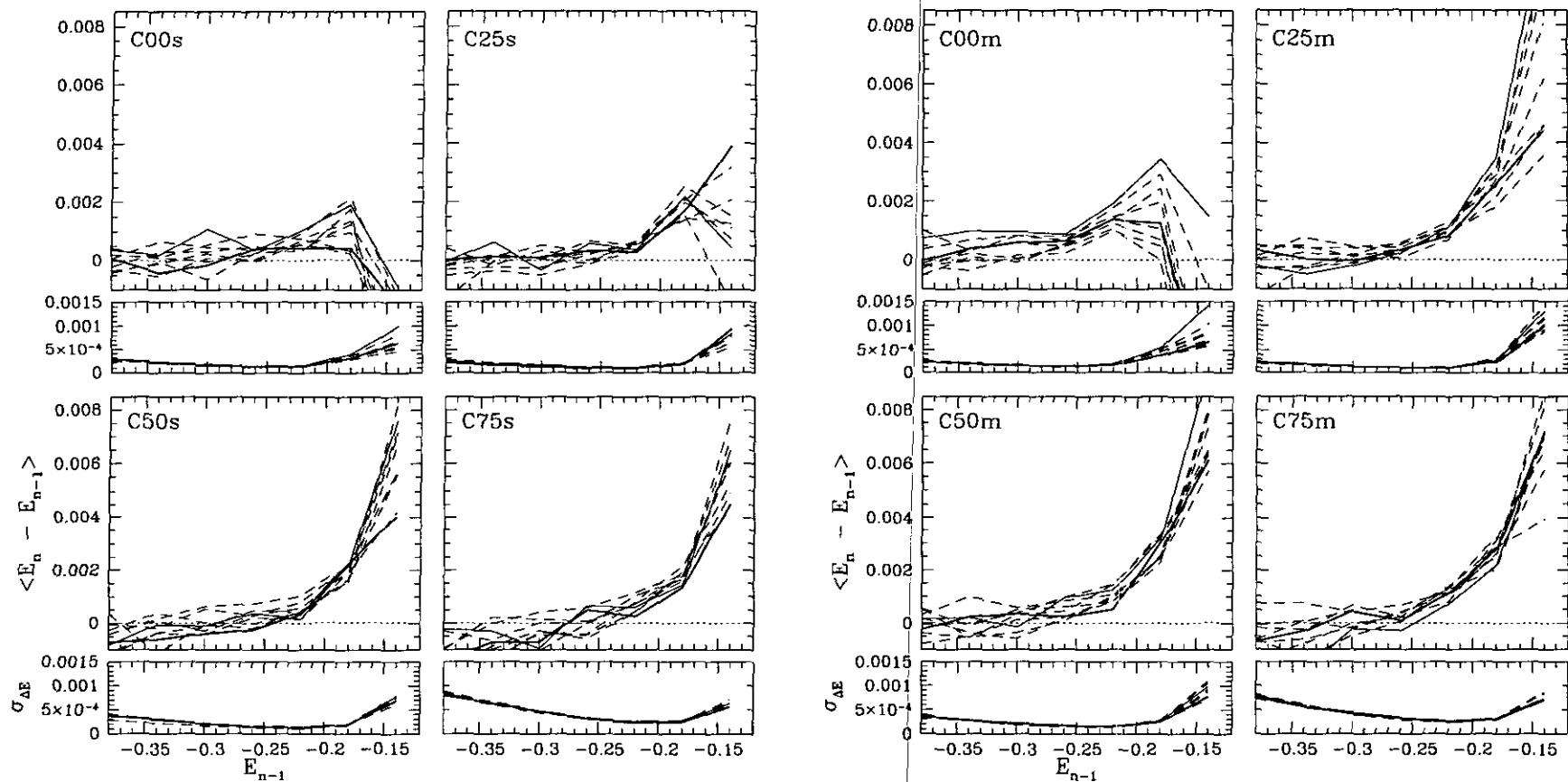


Fig. 5.14.— Calentamiento de los cúmulos en los experimentos  $C(s)$  y  $C(m)$  en cada período orbital como función de la energía de las estrellas en el apogaláctico anterior. Las líneas de trazos son los resultado para cada una de las órbitas consideradas. La línea sólida delgada y la gruesa son los resultados del primer y último período del cúmulo, respectivamente. En el recuadro inferior de cada gráfica se muestra el valor de la varianza,  $\sigma^2$ , que corresponde a los valores graficados arriba. La líneas significan lo mismo que en la gráfica del panel superior.

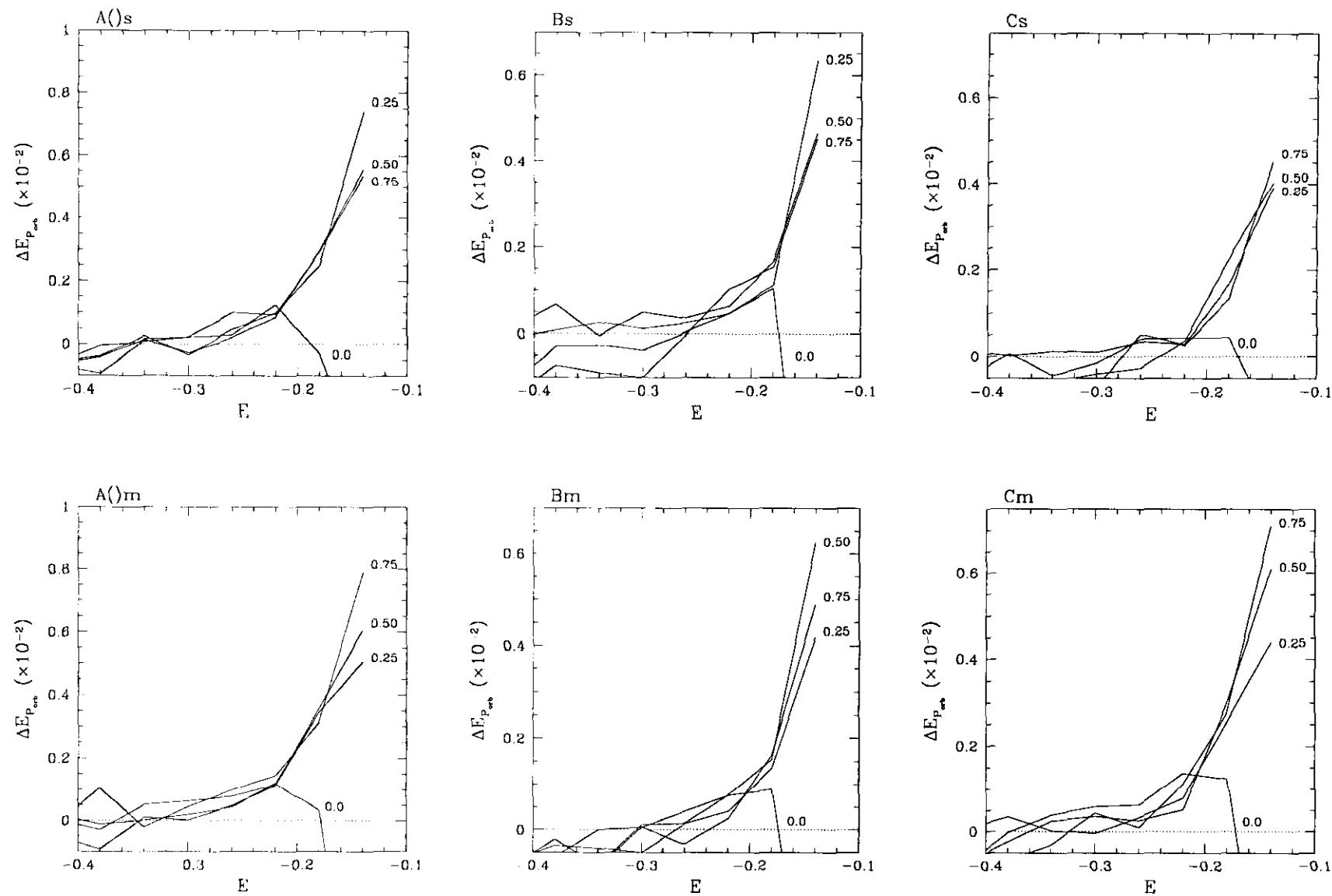


Fig. 5.15.— Calentamiento por período orbital para los cúmulos, *s* y *m*, que principalmente son afectados por los choques de marea.



Galaxia, ver §2.2.2),

$$\beta = \frac{2\omega_s R_{\text{peri}}}{V_{\text{peri}}} = \frac{2\pi R_{\text{peri}}}{P_s V_{\text{peri}}}, \quad (3-1)$$

donde  $P_s$  es el período de la estrella alrededor del cúmulo y  $V_{\text{peri}}$  y  $R_{\text{peri}}$  son la velocidad y distancia en el perigaláctico del cúmulo. En nuestros experimentos no conocemos el período orbital de cada una de las estrellas dentro del cúmulo, por lo que utilizamos la dependencia de este con las variables que conocemos directamente, como es su energía,  $E_s$ , su posición,  $r$ , o su velocidad,  $v$ .

El período orbital de las estrellas dentro del cúmulo, se puede escribir en términos de su energía  $E_s$  (Lightman y Shapiro 1977),

$$P_s(E_s) = \frac{2\pi GM_c}{(2|E_s|)^{3/2}}, \quad (3-2)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $M_c$  es la masa del cúmulo. Esta aproximación supone que las órbitas de las estrellas son keplerianas, lo cual es válido en las regiones externas del cúmulo, que es donde es más importante este proceso.

La energía orbital de las estrellas, para un potencial kepleriano está dada por (Binney y Tremaine 1987),

$$E_s \sim \frac{1}{2} \frac{GM}{a}, \quad (3-3)$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita de la estrella.

Hemos aproximado a la energía de las estrellas, como función del su radio orbital promedio (ver Fig. 5.16),

$$\langle E_s \rangle \sim \frac{3}{2} \frac{GM}{\langle r \rangle}. \quad (3-4)$$

De esta relación podemos decir que  $a \sim \langle r \rangle / 3$ .

Combinando (3-2) y (3-3) podemos escribir el período en términos de  $\langle r \rangle$  como,

$$\langle P_s \rangle = \frac{2\pi}{3^{3/2}} (GM)^{-1/2} \langle r \rangle^{3/2}. \quad (3-5)$$

En la Fig. 5.16, se muestran los valores de  $r$  y  $P_s$  como función de  $\langle E_s \rangle$ . Las líneas sólidas son los resultados de la simulación A75s en los períodos pares de la órbita del cúmulo. La línea de trazos es la relación dada por la ecuación (3-4).

Sustituyendo en la ec. (3-1) el valor de  $\langle P_s \rangle$  dado por la ec. (3-5),

$$\langle \beta \rangle = (2)(3^{3/2})(GM)^{1/2} \langle r \rangle^{-3/2} \frac{R_{\text{peri}}}{V_{\text{peri}}}. \quad (3-6)$$

De esta relación tenemos a  $\langle \beta \rangle$  como función de la distancia radial promedio de las estrellas dentro del cúmulo, y del tiempo característico en el que ocurre el choque de marea ( $\sim 2R_{\text{peri}}/V_{\text{peri}}$ ).

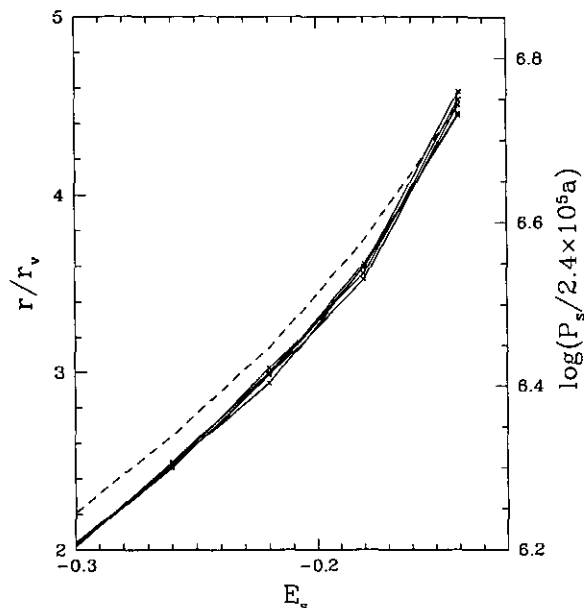


Fig. 5.16.— Radio promedio de las estrellas dentro del cúmulo, como función de su energía promedio. En la ordenada del lado derecho se muestra su período orbital como función de la energía. Estos resultados corresponden al experimento A75s.

En las figuras 5.17, 5.18 y 5.19 se presentan los resultados que se muestran en las Fig. 5.13–5.15, respectivamente, pero como función de  $\langle \beta \rangle$ . Cada figura corresponde a las órbitas con  $R_{\text{peri}}=1.5$  kpc, 3 kpc y 6 kpc, respectivamente. Cada una de las líneas sólidas corresponde a cada uno de los 9 períodos orbitales que hemos considerado. Se ha excluido el primero porque el cúmulo aún no se encuentra en equilibrio con el campo de marea. El calentamiento se reporta en el apogaláctico del cúmulo. Los valores de  $\langle \Delta E \rangle$  son el promedio de los incrementos individuales de las estrellas en un intervalo  $\Delta\beta$ .

Las líneas de puntos y de trazos cortos corresponden a dos ajustes que hemos hecho a la aproximación de Weinberg (1994a), y la de trazos cortos y largos, corresponden a las aproximación de Spitzer (1958). Estas se discutirán en detalle en la siguiente subsección.

En las figuras 5.17, 5.18 y 5.19, vemos que el calentamiento es función de la excentricidad de la órbita del cúmulo. Para las órbitas menos excéntricas,  $e=0.25$ , el incremento de la energía abarca un intervalo de  $10 < \beta < 50$ . Para  $e=0.50$  este incremento abarca el intervalo de  $9 < \beta < 30$ , y para  $e=0.75$ , el intervalo va de  $7 < \beta < 20$ . Conforme aumenta la excentricidad, el intervalo que abarca el calentamiento se reduce a la mitad del intervalo anterior, es decir, el intervalo en  $\beta$ , para  $e=0.75$ , es una cuarta parte del intervalo de  $e=0.25$ . Las tendencias que hemos descrito se aplican a los cúmulos  $s$  y  $m$ .

Para los cúmulos en órbitas de baja excentricidad, la

TABLA V  
VALORES UTILIZADOS PARA EL AJUSTE DE LOS MODELOS DE  
AHO Y GO.

Nombre	$\lambda(e, R_{\text{peri}})$	$\xi^{\text{AHO}}$	$\xi^{\text{GO}}$
A25	0.447	$1.69 \times 10^{-1}$	$5.59 \times 10^{-1}$
A50	0.789	$7.68 \times 10^{-2}$	$2.23 \times 10^{-1}$
A75	0.957	$1.80 \times 10^{-2}$	$4.65 \times 10^{-2}$
B25	0.366	$1.35 \times 10^{-1}$	$1.93 \times 10^{-1}$
B50	0.763	$7.23 \times 10^{-2}$	$7.67 \times 10^{-2}$
B75	0.959	$2.28 \times 10^{-2}$	$2.28 \times 10^{-2}$
C25	0.411	$1.57 \times 10^{-1}$	$3.33 \times 10^{-1}$
C50	0.807	$1.00 \times 10^{-1}$	$1.45 \times 10^{-1}$
C75	0.965	$2.67 \times 10^{-2}$	$3.36 \times 10^{-2}$

variación del cociente, entre el período orbital del cúmulo al de las estrellas, en general, no es tan grande, por lo que el calentamiento es descrito por la aproximación adiabática, afectando estrellas medianamente ligadas al cúmulo, pero cambiando poco su energía orbital. Por el contrario, si el cúmulo tiene una órbita muy excéntrica, el cociente entre los períodos ( $P_{\text{orb}}/P_s$ ) es grande, y el calentamiento puede ser descrito en el límite impulsivo, donde las estrellas menos ligadas son las más afectadas, cambiando drásticamente su energía orbital.

En general, para las órbitas más excéntricas el incremento de la energía decae más rápido hacia valores grandes de  $\beta$ . La diferencia entre las figuras es el valor de  $R_{\text{peri}}$  que les corresponde, notamos que el calentamiento disminuye como función del  $R_{\text{peri}}$  de la órbita.

### Aproximaciones Teóricas

El calentamiento debido a los choques gravitacionales ha sido analizado por varios autores de manera semianalítica (AHO y GO). En estos trabajos se parte de la aproximación de impulso (ver §2.1), donde la velocidad con la que ocurre el encuentro es mucho mayor que la de las estrellas dentro del cúmulo. Sin embargo, como esto no es cierto para cúmulos en órbitas poco excéntricas, o para las estrellas cercanas al centro del cúmulo. AHO y GO proponen añadir a esta corrección para considerar los efectos de la perturbación cuando las estrellas del cúmulo recorren una fracción, o varias de sus órbitas durante el transcurso de la perturbación. Hemos retomado las aproximaciones que se utilizan en estos trabajos, y las hemos comparado con nuestros resultados. Sin embargo, es necesario determinar los valores de normalización necesarios para que dicha comparación sea válida.

En estas aproximaciones, el incremento de la energía

esta dado por la siguiente expresión (AHO y GO):

$$\Delta E = \frac{4}{3} \left( \frac{GM_G}{V_p R_{\text{peri}}^2} \right)^2 r^2 A_{s,w}(\beta) \xi(R_{\text{peri}}) \lambda(e, R_{\text{peri}}). \quad (3-7)$$

A continuación discutimos en detalle cada uno de los términos.

El factor  $A_{s,w}(\beta)$  puede ser la corrección adiabática de Spitzer o de Weinberg. AHO utiliza la corrección de Spitzer (1958). GO utiliza resultados que se obtienen de la teoría adiabática, aplicados por Weinberg (1994a) en sistemas astronómicos (ver §2.2.2). La corrección que mejor ajusta nuestros resultados es la de Weinberg. La aproximación de Spitzer es varios órdenes de magnitud menor que nuestros resultados (ver línea de puntos y trazos en las Fig. 5.17-5.19).

El parámetro  $\xi(R_{\text{peri}})$  es un factor que considera la distribución de masa galáctica (Aguilar y White 1985). AHO aproximan este factor como

$$\xi^{\text{AHO}}(R_{\text{peri}}) = \frac{1}{2} I_0^2, \quad (3-8)$$

y GO como

$$\xi^{\text{GO}}(R_{\text{peri}}) = \frac{1}{2} [(3J_0 - J_1 - I_0)^2, \quad (3-9)$$

$$+ (2I_0 - I_1 - 3J_0 + J_1)^2 + I_0^2], \quad (3-10)$$

donde  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $J_0$  y  $J_1$ , están dados por

$$I_0(R_{\text{peri}}) \equiv \int_1^\infty m(R_{\text{peri}}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2(\zeta^2 - 1)^{1/2}}, \quad (3-11)$$

$$I_1(R_{\text{peri}}) \equiv \int_1^\infty \dot{m}(R_{\text{peri}}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2(\zeta^2 - 1)^{1/2}}, \quad (3-12)$$

$$J_0(R_{\text{peri}}) \equiv \int_1^\infty m(R_{\text{peri}}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^4(\zeta^2 - 1)^{1/2}}, \quad (3-13)$$

$$J_1(R_{\text{peri}}) \equiv \int_1^\infty \dot{m}(R_{\text{peri}}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^4(\zeta^2 - 1)^{1/2}}. \quad (3-14)$$

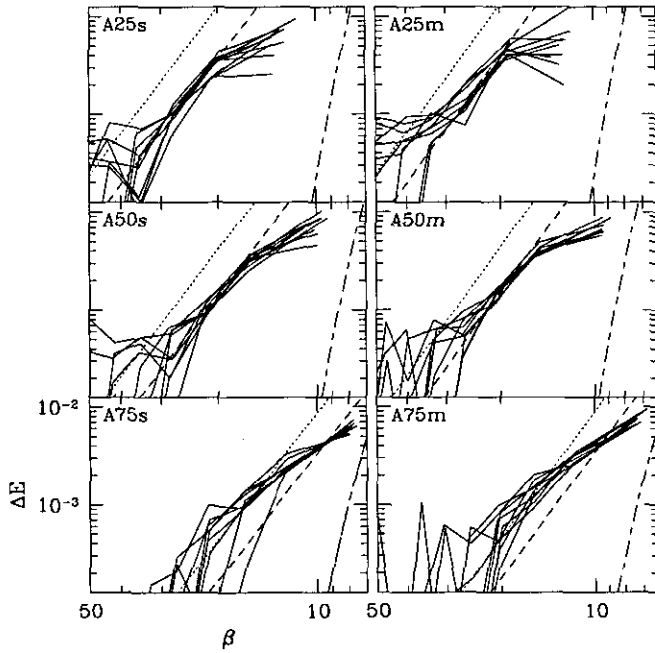


Fig. 5.17.— Calentamiento interno de los cúmulos *s* y *m*, con  $R_{\text{peri}} = 1.5$  kpc, como función de  $\beta$ . Las líneas sólidas son los resultados de cada período orbital. La excentricidad se indica en el parte superior izquierdo. La línea punteada y de trazo son las aproximaciones de AHO y GO para los valores de  $\xi$ , respectivamente. La línea de puntos y de trazo es la aproximación de Spitzer.

$m(R) \equiv M(R)/M_{\text{tot}}$  es la masa normalizada a la masa total de la Galaxia y  $\dot{m}(R) = dm(R)/d \ln R (= R dm(R)/dR)$ .

El nuestro caso hemos considerado el límite superior de la integral como  $R_{\text{apo}}/R_{\text{peri}}$ , y a  $m(R) \equiv M(R)/M_{\text{apo}}$ . En la Tabla V se dan los valores de  $\xi$  que corresponden a cada uno de los experimentos que se muestran en las Fig. 5.17–5.19. En general, la diferencia entre  $\xi^{\text{AHO}}$  y  $\xi^{\text{GO}}$  es del orden de un factor de 3 para órbitas poco excéntricas. En el caso de órbitas excéntricas y alejadas del centro galáctico estos valores son muy semejantes entre sí (ver Tabla V).

El término  $\lambda(e, R_{\text{peri}})$  se introduce para considerar la variación temporal de la fuerza de marea entre el perigaláctico y el apogaláctico de la órbita del cúmulo. Este está dado por,

$$\lambda(e, R_{\text{peri}}) = \left[ \frac{M(R_{\text{apo}})}{M(R_{\text{peri}})} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 - 1 \right]^2, \quad (3-15)$$

donde  $M(R_{\text{apo}})$  y  $M(R_{\text{peri}})$  son la masa galáctica interna a  $R_{\text{apo}}$  y  $R_{\text{peri}}$ , respectivamente. Los valores de  $\lambda(e, R_{\text{peri}})$  se dan en la Tabla V.

En las Fig. 5.17–5.19, hemos graficado las aproximaciones dadas por la ec. (3-7). La línea de trazos y de puntos corresponden a los valores de  $\xi$  dados por las ec. (3-8) y (3-9), respectivamente. El valor de  $M_G$  que consideramos es la masa total de la Galaxia a 100 kpc, que es

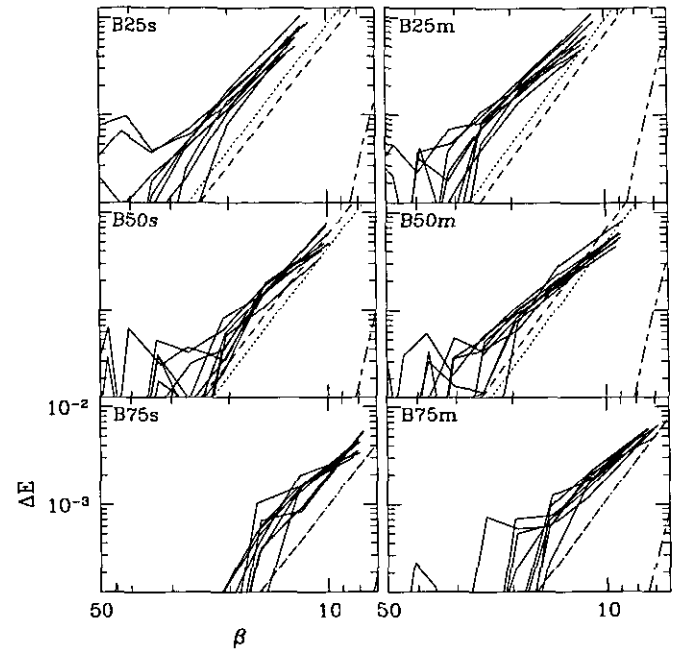


Fig. 5.18.— Calentamiento interno de los cúmulos *s* y *m*, con  $R_{\text{peri}} = 3$  kpc, como función de  $\beta$ . Las líneas sólidas son los resultados de cada período orbital. La excentricidad se indica en el parte superior izquierda. La línea punteada y de trazo son las aproximaciones de AHO y GO para los valores de  $\xi$ , respectivamente. La línea de puntos y de trazo es la aproximación de Spitzer.

$1 \times 10^{12} M_{\odot}$ .

Las aproximaciones teóricas muestran un comportamiento muy parecida a nuestros resultados. Notamos que la magnitud de dicha aproximación varía poco respecto a nuestros resultados, y esta es función del  $R_{\text{peri}}$  de la órbita, siendo mayor para A y menor para C.

### Tiempo de destrucción

El incremento de la energía total del cúmulo es la suma de los cambios individuales de todas las estrellas. Este incremento se puede evaluar al integrar el área bajo las curvas  $\langle \Delta E \rangle$  vs.  $\langle \beta \rangle$ , que se dan en las figuras 5-17–5.19. De donde el tiempo característico de destrucción se estima a partir de (AHO y GO),

$$\tau \propto P_{\text{orb}} \frac{E}{\Delta E}. \quad (3-16)$$

La diferencia entre los valores propuestos por AHO y GO está en los factores de proporcionalidad que ellos utilizan. Estos se discutirán a continuación.

### Propuesta de AHO

Para evaluar el tiempo de destrucción de un cúmulo globular, debido a los choques de marea, AHO proponen

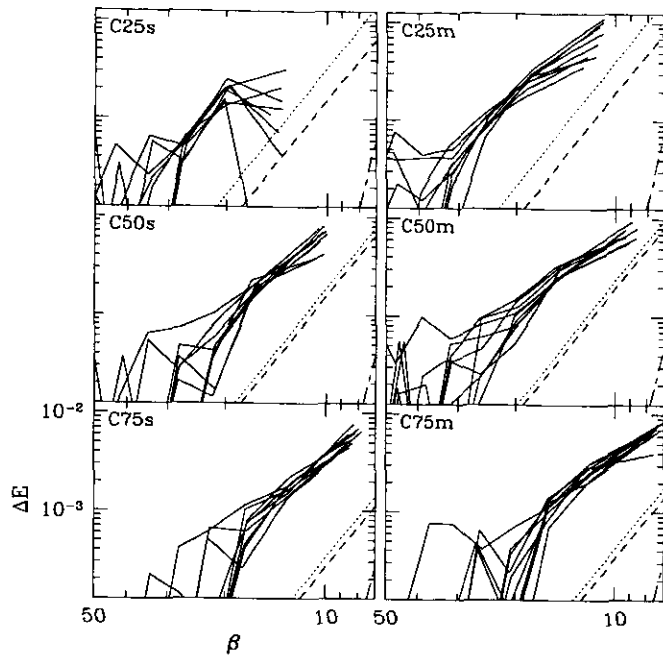


Fig. 5.19.— Calentamiento interno de los cúmulos *s* y *m*, con  $R_{\text{peri}} = 6$  kpc, como función de  $\beta$ . Las líneas sólidas son los resultados de cada período orbital. La excentricidad se indica en la parte superior izquierda. La línea punteada y de trazo son las aproximaciones de AHO y GO para los valores de  $\xi$ , respectivamente. La línea de puntos y de trazo es la aproximación de Spitzer.

una expresión de la forma

$$\tau^{AHO} \equiv \zeta \left[ \frac{E_c}{\Delta E / P_{\text{orb}}} \right], \quad (3-17)$$

donde  $\zeta$  es la razón entre el cambio fraccional de la energía de ligadura y de la masa que se induce durante el choque de marea (Spitzer y Chevalier 1973). Chernoff *et al.* (1986), encuentran que  $\zeta \sim 2/\alpha_c$ , donde  $\alpha_c = -E_c / (GM_c / r_t) = 0.2(r_t / r_h)$ . Sustituyendo en la ecuación (3-4) se tiene que,

$$\tau^{AHO} = 10 \left( \frac{r_h}{r_t} \right) \left( \frac{E_c}{\Delta E_c} \right) P_{\text{orb}}. \quad (3-18)$$

Hemos evaluado  $\tau^{AHO}$  en cada período orbital, considerando los valores de  $E_c$ ,  $r_h$  y  $r_t$  que el cúmulo tiene en ese instante. Los resultados se utilizan en la siguiente sección para calcular el tiempo de destrucción.

### Propuesta de GO

GO calculan el tiempo de destrucción de forma muy parecida a la de AHO, con  $\zeta=1$ . Ellos añaden un término a segundo orden para la variación de la energía (Kundik y Ostriker 1995), que considera los efectos de relajación dentro del cúmulo debido a un aumento en la dispersión en la energía de las estrellas. Los tiempos característicos

de destrucción están dados por,

$$\tau_1^{GO} \equiv P_{\text{orb}} \left( \frac{E_c}{\Delta E} \right) \quad (3-19)$$

y

$$\tau_2^{GO} \equiv P_{\text{orb}} \left( \frac{E_c^2}{\Delta E^2} \right) = \frac{3}{4} \tau_1^{GO} \quad (3-20)$$

donde los subíndices 1 y 2, indican el primer y segundo orden, respectivamente.

Estos tiempos característicos se utilizan en el cálculo de la tasa de destrucción de los cúmulos globulares en la sección 5.4.

### 5.3.2 Promedio de los cambios en la energía

A partir de los resultados que se muestran en la Fig. 5.7, es posible evaluar el incremento en la energía que experimentan los cúmulos por período orbital, y de las relaciones (3-17), (3-18) y (3-19) es posible evaluar el tiempo característico de destrucción, que a su vez es posible relacionar con una *tasa de destrucción* (ver §5.4).

### 5.3.3 Calentamiento por unidad de tiempo

La calentamiento, que por unidad de tiempo experimentan los cúmulos en nuestras simulaciones, se muestra en la Fig. 5.20, las líneas tienen el mismo significado que en la Fig. 5.15. Este calentamiento tiene una tendencia diferente que el calentamiento por período orbital, porque en este caso las órbitas que experimentan mayor variación, son las menos excéntricas,  $e=0.25$ , variación que disminuye conforme aumenta el valor de la excentricidad. Este comportamiento se explica si recordamos que el período orbital para los cúmulos, en órbitas con excentricidades de  $e=0.75$ , son casi tres veces mayores que para una órbita con  $e=0.25$ . De lo anterior, si consideramos un tiempo lo suficientemente grande tendremos por cada choque de una órbita con excentricidad  $e=0.75$ , tres de la órbita con excentricidad  $e=0.25$ . Por esta razón el calentamiento en la órbitas de menor excentricidad es comparable o mayor que el de las órbitas más excéntricas.

Las órbitas circulares no muestran un incremento de su energía, porque la fuerza de marea sólo actúa de manera estática imponiendo una energía límite para las estrellas del cúmulo.

## 5.4 Tasa de Destrucción en los Choques Gravitacionales

La tasa de destrucción, debida a los choques gravitacionales por período orbital, o durante el tiempo de Hubble, es función del tiempo característico,  $\tau$ , o del tiempo de destrucción,  $t_{\text{des}}$ . Estos tiempos están directamente relacionados con la variación de la energía y de la masa de los cúmulos.

La tasa de destrucción que experimenta un cúmulo durante un tiempo determinado estará dada por

$$\nu = \frac{t}{t_{\text{des}}} \quad (4-1)$$

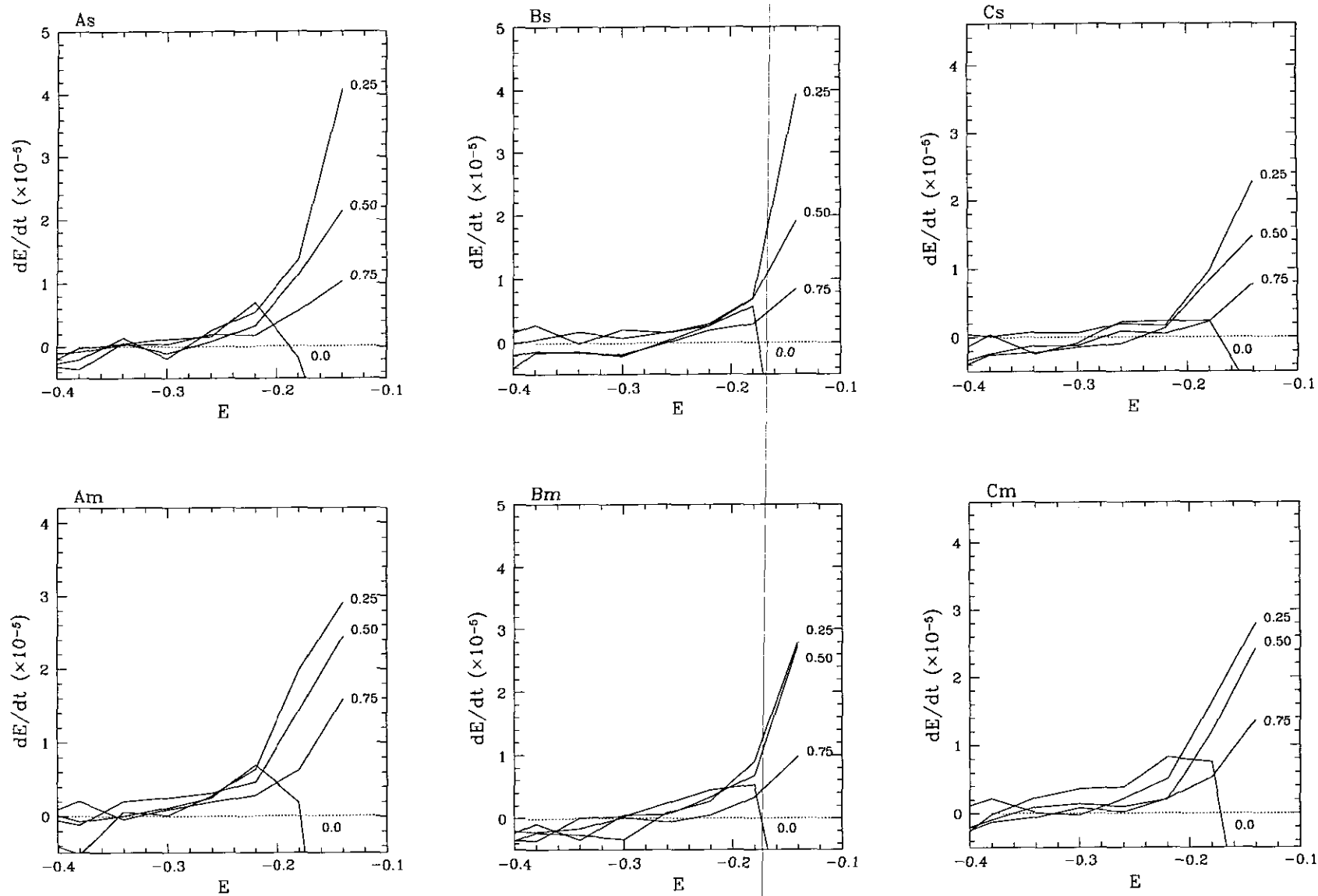


Fig. 5.20.— Tasa de calentamiento para los cúmulos de la simulación que solo son afectados por choques de marea.

donde  $\nu$  es fracción del cúmulo se pierde debido al efecto de los choques de marea.

Proponemos 4 métodos para evaluar la tasa de destrucción en base a los resultados de nuestras simulaciones. En los primeros dos se utilizan los valores de  $t_{dest}^E$  y  $t_{dest}^M$ , dados por los ajustes de la variación temporal de la energía y de la masa, respectivamente (ver §5.2.4). La tercera es considerando los valores que se obtienen de integrar el área bajo las curvas del calentamiento,  $\langle \Delta E_s \rangle$  vs.  $\beta$  (ver §5.3.1), y finalmente la más sencilla, considerando la variación promedio de la energía (ver §5.3.2).

#### 5.4.1 Tasa de destrucción por período orbital

En la Fig. 5.21 se muestra la tasa de destrucción por período orbital ( $\nu_{orb}$ ), como función de la distancia media galactocéntrica del cúmulo ( $R_{med}$ ). Se han graficado los resultados de los 4 métodos que hemos considerado. Los círculos, cuadros y triángulos diferencian los distintos valores de la excentricidad, que son: 0.25, 0.5 y 0.75, respectivamente. Los símbolos abiertos y negros representan los cúmulos  $s$  y  $m$ , respectivamente. Los puntos que corresponden a órbitas con el mismo  $R_{peri}$ , están conectados por una línea sólida. En cada panel se muestran los resultados que se obtienen de los distintos métodos que hemos considerado.

La tasa de destrucción, para órbitas con el mismo  $R_{peri}$ , aumenta como función de la excentricidad, efecto que ya era observado en la Fig. 5.1, donde las órbitas más excéntricas son las que mayores cambios producen en la energía del cúmulo. De lo anterior, podemos afirmar que la tasa de destrucción, por período orbital, es más importante para órbitas más excéntricas. Los resultados que se obtiene a partir de los 4 métodos muestran ésta tendencia, siendo los resultados de la integración los que mayor dispersión tienen.

Estos resultados son una consecuencia directa del calentamiento por período orbital que se describe en la §5.3.2, y que se muestran en la Fig. 5.15, donde los cúmulos que mayor variación presentan son los que se encuentran en las órbitas más excéntricas.

#### 5.4.2 Tasa de destrucción en el tiempo de Hubble

La tasa de destrucción en el tiempo de Hubble ( $\nu_{Hubb}$ ) se obtiene a partir de

$$\nu_{Hubb} = \frac{T_{Hubb}}{t_{dest}}. \quad (4-2)$$

En la Fig. 5.22 se presentan los resultados de  $\nu_{Hubb}$  para cada uno de los métodos que hemos considerado, como función de su distancia media del cúmulo respecto al centro galáctico,  $R_{GC}$ . Los símbolos significan los mismo que en la Fig. 5.21. La línea sólida con asteriscos y la de trazos con las cruces son las tasas de destrucción para el bulbo dados por AHO y GO, respectivamente.

Vemos que los resultados del ajuste de la energía y la masa, para las órbitas menos excéntricas, coinciden con

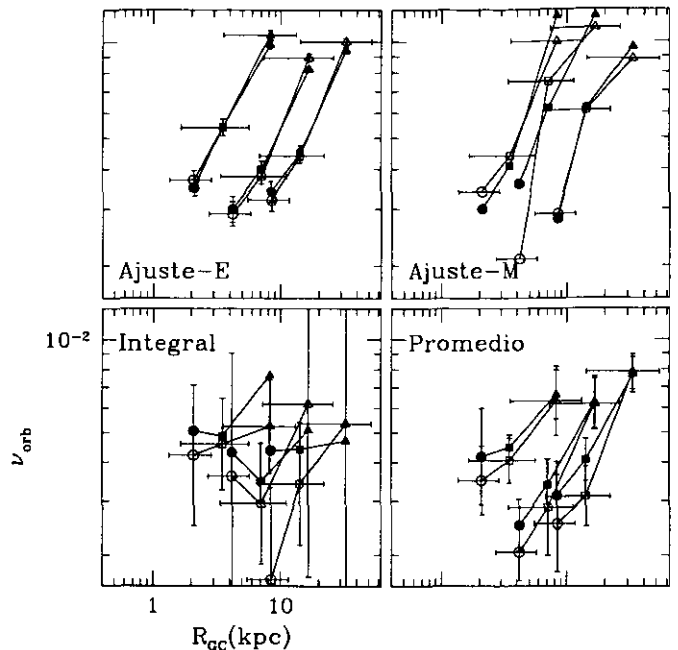


Fig. 5.21.— Tasa de destrucción por período orbital para los cúmulos  $s$  y  $m$ , como función del  $R_{GC}$  de la órbita del cúmulo. La línea punteada une a las órbitas con igual  $R_{peri}$ . Los paneles son los resultados que se obtienen en cada uno de los 4 métodos que hemos utilizado.

los resultados de GO, aunque estos autores no consideran una dependencia en sus resultados con la excentricidad, vemos que para un  $R_{peri}$  dado no hay una fuerte dependencia con la excentricidad de la órbita, dando como resultado una mayor dispersión en  $R_{GC}$  pero no en el valor de la tasa de destrucción.

Considerando el promedio de las energías, panel inferior de la Fig. 5.22, vemos que el comportamiento es parecido al de los peneles superiores, pero con una mayor dispersión en los resultados. En esta figura sólo se muestran los resultados que se obtienen al considerar la ec. (4-3), propuesta por GO.

Aunque los choques son más eficientes para los cúmulos en órbitas más excéntricas (ver § 5.3.3), es decir, por período orbital, el número de veces que un cúmulo en órbita poco excéntrica pasa cerca del bulbo es mayor, haciendo que la eficiencia por unidad de tiempo sea superior en este caso.

#### 5.4.3 Discusión

En general, los cúmulos con tamaños  $s$  y  $m$  sobreviven durante el tiempo de Hubble perdiendo, en el peor de los casos, sólo el 20% de su masa. Esto será cierto si sólo se considera que su evolución se debe a los choques con el bulbo galáctico.

La tasa de destrucción que se obtiene al considerar que el cúmulo pierde el 99% de su masa inicial, coinciden con

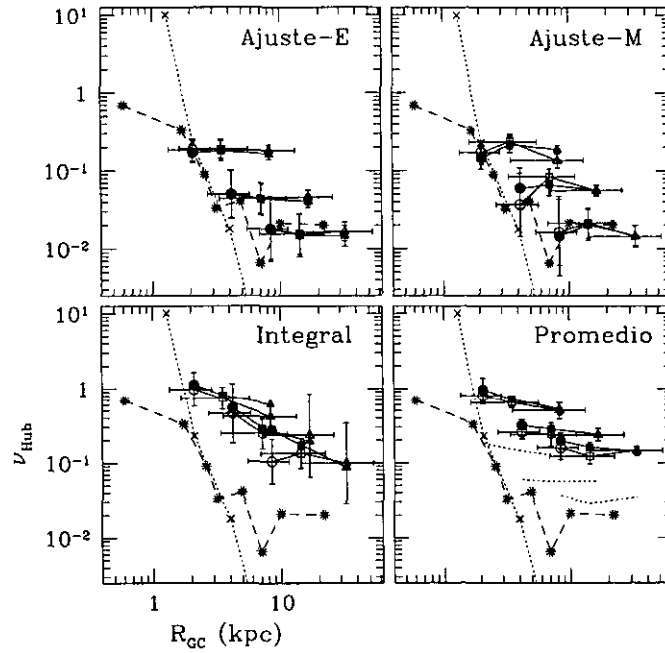


Fig. 5.22.— Tasa de destrucción en el tiempo de Hubble para los cúmulos *s* y *m*. Los círculos, cuadros y triángulos negros, representan lo mismo que en la Fig. 5.21. La línea punteada une a las órbitas con igual  $R_{\text{peri}}$ . Los asteriscos y las cruces son las tasas de destrucción dadas por AHO y GO, respectivamente. Los paneles son los resultados para de cada uno de los 4 métodos que hemos utilizado.

los resultados de GO, quienes evolucionan sus modelos hasta que se destruyen completamente.

Los resultados de la integral y el promedio, son el resultado de considerar la ec (3-16), que está directamente relacionada con la forma funcional que se propone para ajustar la energía, ver ec. (2-4),

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_E}\right)^{\alpha_E} \quad (4-3)$$

donde la derivada temporal se puede escribir como,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau_E} \quad (4-4)$$

sí  $\alpha_E=1$ .

Esta relación se puede aproximar como  $\Delta E/P_{\text{orb}} \propto 1/\tau_E$ . En la §5.2.4 se discute que  $\tau_E$  es el tiempo en que el cúmulo cambia un 74% su energía (o su masa), que es un tiempo más corto que el tiempo necesario para que el cúmulo se desintegre. Al tener un tiempo de destrucción más corto, la tasa de destrucción que se obtiene a partir de este valor es mayor. Esto es lo que se obtiene en los resultados de la integral y del promedio, porque utilizan la ec. (3-16).

Para que dichos resultados estén de acuerdo con los que se obtiene del análisis hecho en §5.2.4, su valor es aproximadamente una cuarta parte del valor que presentan (ver ec. 2-6), que es cuando la masa del cúmulo es del 1% de la inicial.

En el capítulo 6 se discuten de manera detallada las conclusiones que se desprenden de estos resultados.

## 5.5 Resultados Generales

Como el objetivo de esta tesis es el de entender la evolución de los cúmulos debida a los choques de marea producidos por el bulbo galáctico, no hemos analizado en detalle otros aspectos de la evolución y de la dinámica de los cúmulos.

En el Apéndice C se presentan los resultados individuales de cada simulación, con el fin de mostrar la autoconsistencia de los resultados. Las gráficas que ahí se muestran son:

- Isocontornos de densidad superficial en el plano X-Y.
- Isocontornos de densidad superficial en el plano X'-Z' (para los casos más relevantes).
- Variación temporal de la energía y masa del cúmulo.
- Variación temporal de la concentración y densidad del cúmulo.
- Variación diferencial de la energía y masa del cúmulo.
- Variación temporal de los radios lagrangianos a intervalos del 10% de la masa, total y ligada al cúmulo.
- Diagramas de Bottlinger, para las partículas ligadas al cúmulo como función del tiempo.

- Variación temporal del semieje mayor del cúmulo,  $b/a$ .
- Variación temporal de la orientación del semieje mayor de cúmulo, con respecto a la dirección de la Galaxia.

En el Apéndice D, se dan datos sobre las simulaciones como son: el número de pasos en cada simulación, el tiempo de cómputo y análisis y el espacio en disco utilizado, así como los parámetros de la rutina del centrado.

#### REFERENCIAS

- Aguilar, L., Hut, P., y Ostriker, J.P. 1988, ApJ, **335**, 720.  
Aguilar, L. y White, S.D.M., 1985, ApJ, **295**, 374.  
Chernoff D.F., Kochanek C.S. y Shapiro S.L., 1986, ApJ, **309**, 183.  
Gnedin, O. Y. y Ostriker, J. P. 1997, ApJ, **474**, 223.  
Innanen, K.A., Harris W.E. y Webbink, R.F., 1983, AJ, **88**, 338.  
King, I. R., 1962, AJ, **67**, 471.  
Kundic, T. y Ostriker, J.P., 1995, ApJ, **438**, 702.  
Murali, C., Weinberg M. D., 1997a, MNRAS, **288**, 749.  
Spitzer, L y Chevalier, R.A., 1973, ApJ, **183**, 565.  
Weinberg, M. D., 1994a, AJ, **108**, 1398.  
Weinberg, M. D., 1994b, AJ, **108**, 1403.  
Weinberg, M. D., 1994b, AJ, **108**, 1414.



## Capítulo 6

# DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos estudiado con distintos grados de aproximación (con la aproximación de impulso con la corrección adiabática, con el problema restringido de tres cuerpos y con simulaciones de N-cuerpos) los efectos que una distribución de masa esférica ocasiona sobre un cúmulo globular. Se ha estudiado en detalle la manera como se inyecta energía a las regiones internas del cúmulo, y el efecto de dicha inyección por período orbital y durante el tiempo de Hubble. Desde un punto de vista teórico se busca entender la manera como se da la deposición de energía en la estructura del cúmulo, y su dependencia con sus parámetros orbitales y estructurales. Desde el punto de vista observacional y cosmológico, en particular de la formación galáctica y la de los cúmulos mismos, se busca entender como estos procesos ocasionan la evolución de los cúmulos, lo que es fundamental para establecer restricciones sobre los modelos cosmológicos, y así tener una menor incertidumbre en la distribución de parámetros estructurales y orbitales, en la distribución inicial de los cúmulos globulares galácticos.

A continuación hacemos la discusión de los resultados más importantes que se desprenden de esta tesis.

### 6.1 Desbordamiento vs. Calentamiento

Hemos mostrado que la evolución global de los cúmulos, debida al campo de marea galáctico, es dominada por dos procesos que se diferencian entre sí por la manera como ocasionan los cambios en la masa y la energía del cúmulo. El primero es el desbordamiento del lóbulo de Roche, y el segundo es el calentamiento por choques gravitacionales (ver §5.2.1).

El desbordamiento ocurre cuando el tamaño del cúmulo es mayor que el tamaño del lóbulo de Roche que le corresponde en el perigaláctico de su órbita. Esto ocasiona que el campo de marea desprenda a las estrellas menos ligadas, aquellas que su distancia al centro del cúmulo es mayor que el radio del lóbulo de Roche. Este proceso es ocasionado por la parte estática del campo de marea, que actúa directamente sobre la distribución de masa truncando al cúmulo cuando éste se aproxima a su perigaláctico. Este efecto es importante durante los primeros períodos orbitales del cúmulo, ya que inicialmente se tiene una rápida variación de la masa en 3-5 períodos orbitales, para órbitas circulares y excéntricas, respectivamente (ver Fig. 5.9 pa-

ra  $r_t/R_L=3.5$ ). Después de esta rápida variación inicial, los cambios en la energía y la masa tienden a mantenerse constantes.

El calentamiento por choques gravitacionales es ocasionado por la parte dinámica del campo de marea galáctico, y depende de la razón entre el período orbital de las estrellas dentro del cúmulo, respecto al período orbital del cúmulo alrededor de la Galaxia. Este proceso se manifiesta por medio de pulsos en la variación diferencial de la energía y de la masa (ver figuras 5.8 y 5.9), los cuales están claramente relacionados con el perigaláctico del cúmulo.

Cuando los cúmulos que no se encuentran completamente contenidos dentro de su lóbulo de Roche, ambos procesos se pueden sobreponer. Sin embargo, el desbordamiento es un proceso que decrece con el tiempo, debido a la pérdida de masa del cúmulo hasta que este se encuentra contenido dentro de su lóbulo de Roche (ver §5.2.1). El calentamiento, a diferencia del desbordamiento, continúa inyectando energía dentro del cúmulo cada vez que este pasa por su perigaláctico.

La inyección de energía, debida a los choques de marea, acelera la evolución de los cúmulos hacia su desintegración. La energía de ligadura de las estrellas cerca del radio de marea disminuye cada vez que el cúmulo experimenta un choque, haciendo que estas puedan ser arrancadas del cúmulo en su siguiente aproximación a su perigaláctico. El retraso en la variación de la masa que hemos señalado en §5.2.1, es un ejemplo de cómo los choques actúan inyectando energía al cúmulo sin alterar, necesariamente, la masa de este.

### 6.2 Calentamiento en la Estructura del Cúmulo

El incremento en la energía promedio de las estrellas del cúmulo, es función de su energía de ligadura y de la excentricidad del cúmulo, cuando la evolución de estos es dominada por choques gravitacionales.

Nuestros resultados indican (ver Fig. 5.15) que el calentamiento, por período orbital, es importante para las estrellas menos ligadas, cuando el cúmulo se encuentra en órbita muy excéntrica. Sin embargo, cuando la excentricidad de la órbita disminuye el calentamiento es menos considerable para las estrellas menos ligadas, pero comienza

a afectar a estrellas medianamente ligadas, que en el caso anterior no experimentaban ningún cambio. Ambos casos se aproximan a los límites impulsivo y el adiabático, que hemos estudiamos en capítulo 2.

El calentamiento, por unidad de tiempo (ver Fig. 5.16) se invierte como función de la excentricidad (respecto al calentamiento por período orbital), siendo las órbitas menos excéntricas las que mayor calentamiento experimentan. Esto se explica si consideramos que en un tiempo determinado, los cúmulos en órbitas menos excéntricas experimentan un mayor número de pasos cerca del bulbo galáctico, con respecto a los que experimentan cúmulos en órbitas muy excéntricas. Esto hace que la eficiencia del los choques, por unidad de tiempo, sea mayor para los cúmulos en órbitas menos excéntricas.

Murali y Weinberg (1997) han modelado los choques resolviendo la ecuación de Fokker-Planck, considerando el efecto resonante de una perturbación, que en este caso es el que ocasiona la Galaxia sobre las órbitas de las estrellas del cúmulo. Ellos reportan una tendencia semejante a la que hemos encontrado para el calentamiento por unidad de tiempo, lo que parece destacar la importancia de las resonancias en la inyección de energía dentro del cúmulo, en particular, para las órbitas menos excéntricas. En los resultados que ellos presentan, los cúmulos en órbitas circulares son los que mayor calentamiento presentan, que es contrario a nuestros resultados. Esto se debe a que el número de estrellas disminuye conforme aumenta la energía de ligadura, porque estas son arrancadas del cúmulo por la fuerza de marea escapando por los puntos de Lagrange. Este efecto que no es completamente modelado al resolver la evolución del cúmulo con la ecuación de Fokker-Planck (ver §1.6.1), porque el cúmulo siempre se considera esférico.

### 6.3 Calentamiento y Tasa de Destrucción por Período Orbital

En el capítulo 2 estudiamos, con distintas aproximaciones, los efectos que el campo de marea tiene sobre las órbitas de las estrellas, tanto en el límite impulsivo como en el adiabático. Los resultados de dicho capítulo muestran que el calentamiento para los cúmulos en las órbitas más excéntricas ( $e > 0.50$ ) coincide con la predicción de la aproximación de impulso, mientras que para los cúmulos en órbitas de baja excentricidad ( $e \leq 0.50$ ), el calentamiento es acorde con la predicción de la aproximación adiabática.

Los resultados del capítulo 5 (ver figuras 5.17 a 5.19), muestran que el calentamiento de los cúmulos en órbitas poco excéntricas ( $e=0.25$  y  $0.50$ ) es descrito, aproximadamente, por la teoría adiabática. Sin embargo, los resultados para las órbitas más excéntricas,  $e=0.75$ , sólo coinciden con dicha aproximación en un intervalo pequeño para los valores de  $\beta$ . El calentamiento, para estas órbitas, decae más rápido de lo predicho por la teoría adiabática, conforme aumenta el valor de  $\beta$ . Este comportamiento coincide de manera cualitativa con el que se obtiene con

el problema de tres cuerpos restringido (ver §2.4), en donde el intervalo de  $\beta$  en el que ocurre el calentamiento es menor para las órbitas más excéntricas ( $e=0.75$ ). Para estas órbitas es la aproximación de impulso la que mejor predice los resultados, tanto en la aproximación de tres cuerpos como para la simulaciones de N-cuerpos (cualitativamente).

La mayor tasa de destrucción, por período orbital, es para los cúmulos se encuentran en órbitas más excéntricas, porque son las estrellas de estos quienes experimentan las mayores fluctuaciones del campo de marea.

### 6.4 Calentamiento y Tasa de Destrucción en el Tiempo de Hubble

La tasa de destrucción, para los cúmulos de nuestras simulaciones, como función de la distancia media galáctica se muestra en la Fig. 6.1 (línea sólida gruesa). Esta curva es el resultado de promediar las tasas de destrucción de los cúmulos  $s$  y  $m$  (ver Fig. 5.22). Las líneas de trazos y de puntos corresponden a la tasa de destrucción ocasionada por el bulbo galáctico para el sistema de cúmulos globulares galáctico dada por GO y AHO. Los valores dados por AHO disminuyen drásticamente como función de su distancia galactocéntrica, lo que se debe a que estos están basados en la aproximación de impulso, dada por Spitzer (1958), que predice una menor inyección de energía en regiones internas del cúmulo (ver §2.3 y §5.4). Nuestros resultados muestran un buen acuerdo con los valores reportados por GO.

La tasa de destrucción (de nuestros resultados) disminuye como una ley de potencias conforme aumenta la distancia de los cúmulos al centro galáctico, hasta un radio de 6 kpc, después del cual parece adoptar un valor aproximadamente constante hasta un radio galactocéntrico de 40-50 kpc (después de este valor no tenemos información para decir cómo es el comportamiento de la curva). La curva promedio que hemos descrito tiene algunos picos, que corresponden a las órbitas más excéntricas que hemos considerado. El pico más alto se encuentra alrededor de los 8 kpc.

#### 6.4.1 Implicaciones en la evolución del sistema de cúmulos globulares

Heurísticamente podemos pensar que al aplicar la tasa de destrucción debida al bulbo galáctico (como función de  $R_{GC}$ ), a una supuesta distribución inicial del sistema de cúmulos globulares galáctico, es posible reproducir la distribución que actualmente se observa.

Para evaluar los cambios que dicha distribución ha experimentado, durante el tiempo de Hubble, hemos supuesto dos distribuciones iniciales con la misma dependencia radial que proponen Djorgovski y Meylan (1994, ver §1.2.1). Lo importante de estas distribuciones es su dependencia espacial, porque sólo podemos decir que fracción, respecto del total, se encuentra en un intervalo radial. Por lo anterior no es posible hablar, al menos con

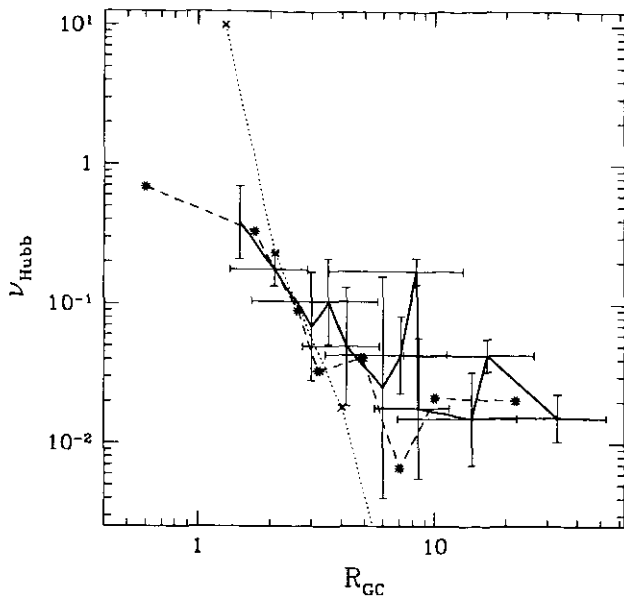


Fig. 6.1.— Tasa de destrucción en  $T_{Hubble}$  como función de su distancia galactocéntrica media (línea sólida gruesa). Las líneas de trazos y de puntos son los resultados de GO y AHO, respectivamente

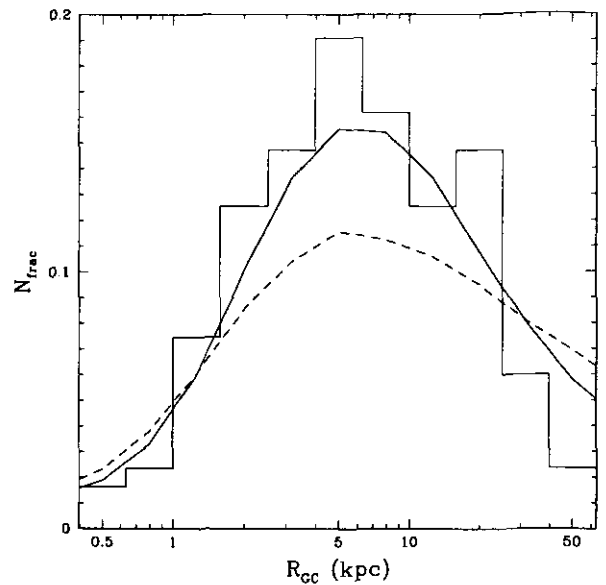


Fig. 6.2.— Distribución del número fraccional de cúmulos globulares galácticos, como función de su distancia galactocéntrica (histograma) y para las distribuciones propuestas de la forma  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$  (línea sólida) y para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-4}$  (línea de trazo).

estos resultados, de un número inicial para el sistema de cúmulos globulares. En la Fig 6.2 se muestran la forma de las distribuciones iniciales que hemos supuesto. La línea sólida y de trazo corresponden a la distribuciones con una dependencia de  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$  y  $\rho_N \propto R_{GC}^{-4}$ , respectivamente.

Al aplicar la tasas de destrucción dada en la Fig. 6.1, se obtiene una aproximación a la distribución actual del sistema de cúmulos globulares. La tasa de destrucción, fuera de los intervalos que no abarcan nuestros resultados, la hemos extrapolado con los siguientes valores: para  $R_{GC} > 50$  kpc de 0.015, y para  $R_{GC} < 1.5$  kpc la tasa de destrucción aumenta como una ley de potencias conforme disminuye  $R_{GC}$ , hasta ser igual a la unidad alrededor de  $0.8 \text{ kpc} < R_{GC} < 1 \text{ kpc}$ .

La apariencia, de cada una de las distribuciones que hemos supuesto, después de  $10^{10}$  años se muestra en la Fig. 6.3 (línea sólida gruesa). En la Fig. 6.3(a) se muestra el resultado para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$  y en la Fig. 6.3(b) para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-4}$ .

En la Fig. 6.3 vemos que en el intervalo de 3 kpc a 10 kpc, los cambios en ambas distribuciones están entre un 3% y un 10%, respectivamente. Sin embargo, para los cúmulos entre 0.3 kpc y  $\sim 2$  kpc las variaciones están alrededor de un 100% a un 60%, respectivamente. De lo anterior se puede decir que el bulbo es responsable de remover los cúmulos radios galactocéntricos menores a los 2 kpc. En este caso vemos que los cúmulos, a distancias mayores a los 10 kpc no son afectados de manera signifi-

cativa.

En la Fig. 6.4 se comparan las distribuciones resultantes de nuestro experimento con la distribución observada de cúmulos globulares (ver Fig. 1.1a). Vemos que hay un acuerdo cualitativo en la forma de las distribuciones. Sin embargo, vemos que el número de cúmulos galácticos que se observa a menos de 2 kpc, es mayor que el de nuestros resultados. Esta diferencia se explica si recordamos que en nuestros modelos sólo hemos considerado un valor para la masa ( $5 \times 10^5 M_{\odot}$ ) y la concentración ( $c=1.5$ ) inicial de los cúmulos.

Al examinar la Fig. 1.9 (del Capítulo 1), vemos que la concentración promedio de los cúmulos cerca del centro galáctico es mayor que  $c=1.5$ , que es la concentración inicial de nuestros modelos. El observar cúmulos muy concentrados cerca del centro galáctico, hace suponer que estos son los que más tiempo sobreviven a los choques gravitacionales con el bulbo galáctico.

De nuestros resultados, vemos que la distribución que más se aproxima a la distribución del sistema de cúmulos globulares galáctico es la que inicialmente tiene una dependencia de la forma  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$ , que coincide con la distribución que muestran las estrellas del halo galáctico (Harris 1976).

Como ya hemos dicho, con estos resultados no es posible dar un número inicial de cúmulos globulares (debido a las limitaciones en los parámetros iniciales de nuestras simulaciones), pero si hemos dado una primera aproxima-

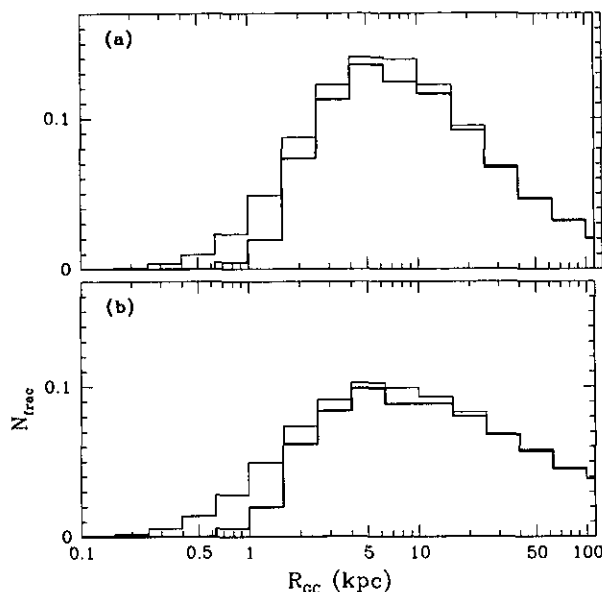


Fig. 6.3.— Evolución de las funciones de distribución propuestas, después de  $10^{10}$  años. Las distribuciones iniciales están indicadas con líneas delgadas de trazos, y las finales con líneas gruesas. En (a) se muestra el resultado para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$  y en (b) para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-4}$ .

ción a una posible distribución inicial de cúmulos globulares. Sin embargo, aún es necesario estudiar los efectos que el disco ocasiona sobre dicha distribución.

Hemos reproducido una de las características más importantes de la distribución observada, para el sistema de cúmulos globulares galácticos, que es la ausencia de cúmulos a radios galactocéntricos menores a los 2 kpc. En particular de cúmulos de baja concentración ( $c \leq 1.5$ ).

Para decir más sobre las características de dicha distribución, y como ha sido su evolución en el tiempo, es necesario considerar un modelo más elaborado, donde se consideren la evaporación, la fricción dinámica, así como ampliar el espacio inicial de parámetros de las simulaciones, en particular los valores de la masa y la concentración inicial de los cúmulos.

## 6.5 Conclusiones y Trabajo Futuro

En resumen, las principales conclusiones de esta tesis son:

- La evolución de los cúmulos globulares, debida al campo de marea galáctico, se manifiesta por medio de dos procesos: el desbordamiento del lóbulo de Roche y el calentamiento por fuerzas de marea.
- El desbordamiento del lóbulo de Roche se debe a la parte estática del campo de marea galáctico, la cual

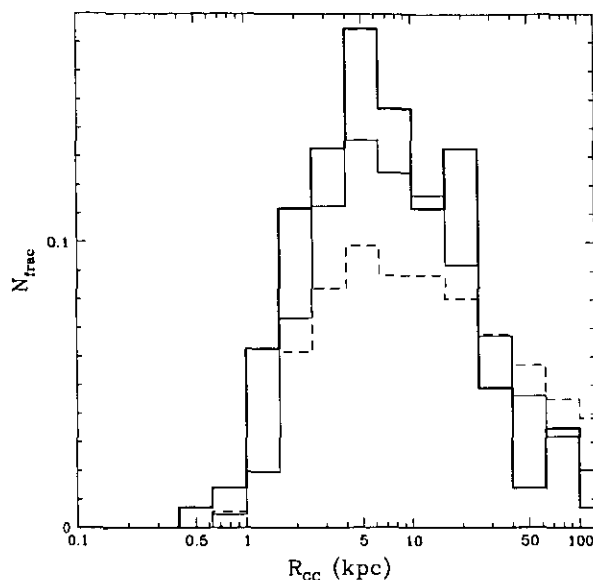


Fig. 6.4.— Comparación de las distribuciones resultantes que hemos supuesto (línea sólida delgada y de trazos para  $\rho_N \propto R_{GC}^{-3.5}$  y  $\rho_N \propto R_{GC}^{-4}$ , respectivamente) con la distribución observada para el sistema de cúmulos globulares galáctico (línea gruesa).

actúa directamente sobre la distribución de masa del cúmulo, imponiendo un límite espacial a dicha distribución.

- El calentamiento, debido a los choques gravitacionales, se debe a la parte dinámica del campo de marea galáctico que inyecta energía en las órbitas de las estrellas debido a la variación temporal del potencial que estas experimentan. Este proceso se manifiesta por medio de pulsos en la inyección de energía del cúmulo.
- El calentamiento de cúmulos en órbitas muy excéntricas es descrito de manera satisfactoria por la aproximación de impulso. Para cúmulos en órbitas menos excéntricas el calentamiento es descrito por el límite adiabático.
- El calentamiento que experimentan los cúmulos, por período orbital, es mayor para órbitas muy excéntricas, disminuyendo para órbitas de menor excentricidad.
- El calentamiento de los cúmulos, por unidad de tiempo, disminuye conforme aumenta el valor de la excentricidad de su órbita. Sin embargo, este es efecto casi nulo en las órbitas circulares, lo que se debe a la ausencia de estrellas (porque son desprendidas del cúmulo por el campo de marea galáctico), en regiones externas del cúmulo.
- La tasa de destrucción, después de  $10^{10}$  años, como función de la distancia media radial de los cúmulos

al centro galáctico, es aproximadamente constante para radios galactocéntricos mayores a los 4 kpc. Sin embargo, está aumentada hasta ser igual a la unidad para radios del orden de 0.8-1 kpc.

- La tasa de destrucción de nuestros resultados, en  $10^{10}$ , coincide con los resultados dados por Gnedin y Ostriker (1997) para el bulbo galáctico.
- Considerado una distribución inicial para el sistema de cúmulos globulares galáctico, encontramos que el bulbo es responsable de la destrucción de los cúmulos a distancias menores a los 1-2 kpc, reproduciendo la falta aparente de cúmulos a distancias menores a las indicadas. Observacionalmente se encuentra que la mayor parte de los cúmulos en las regiones centrales de la Galaxia tiene una concentración mayor a 1.5, lo que explica el exceso de cúmulos (según nuestro modelo) en dichas regiones.

A lo largo de este trabajo hemos desarrollado herramientas de cálculo y análisis para estudiar los efectos que una distribución de masa ejerce sobre un cúmulo globular. Es posible utilizar estas herramientas para estudiar la evolución de los cúmulos durante varios períodos orbitales, para distintos valores de la concentración y de la masa del cúmulo.

El trabajo futuro que se puede realizar con las herramientas que hemos desarrollado en esta tesis, son:

- Ampliar el intervalo de parámetros en nuestras simulaciones considerando un intervalo de valores para la masa del cúmulo, así como de su concentración inicial. De esta manera podemos obtener una malla de datos para comprender mejor el efecto que los distintos parámetros juegan en la destrucción de los cúmulos globulares.
- Incluir la componente axisimétrica del potencial galáctico (disco), para poder considerar el calentamiento de los cúmulos debido a esta componente.
- Considerar diferentes modelos para el potencial galáctico.

Entender del todo la evolución del sistema de cúmulos globulares aún es un tema que requiere mucho trabajo. Aquí sólo hemos una mejor aproximación al fenómeno que nos interesa, aún con muchas simplificaciones, pero como un peldaño más hacia la comprensión de estos fenómenos.

## REFERENCIAS

- Aguilar, L., Hut, P., y Ostriker, J.P. 1988, ApJ, **335**, 720.  
Djorgovski S. G. y Meylan G., 1994, AJ, **108**, 4.  
Gnedin, O. Y. y Ostriker, J. P. 1997, ApJ, **474**, 223.  
Harris W., 1976, AJ, **81**, 1095.  
Murali, C., Weinberg M. D., 1997a, MNRAS, **288**, 749.  
Weinberg, M. D., 1994a, AJ, **108**, 1398.

# APÉNDICES

## A Modelos de King

En este apéndice hacemos un breve revisión de la teoría que hay detrás de los modelos de King. La parte de mayor relevancia para esta tesis es la que se refiere a la construcción de los modelos numéricos. Sin embargo, el material que aquí se presenta es de gran ayuda como material de consulta, desde el punto de vista teórico como numérico.

### A.1 El Modelo analítico

Los cúmulos globulares son sistemas que se encuentran, dinámicamente hablando, en un estado avanzado de evolución, es decir, estos han tenido el tiempo suficiente para que los encuentros estelares realicen la equipartición de la energía, logranado que su distribución de velocidades sea muy parecida a una distribución Maxwelliana, en la cual se cumple que,

$$f(v) \propto e^{-v^2}. \quad (\text{A1})$$

El tiempo en que se realiza dicha equipartición es del orden del tiempo de relajación, ( $t_r$ ). En este tiempo la energía se redistribuye debido a la relajación de 2 cuerpos, la cual es función del número de partículas en el sistema ( $N$ ) y del tiempo dinámico del sistema,  $t_d$ ,

$$t_r \approx \frac{N}{8 \ln N} t_d, \quad (\text{A2})$$

donde  $t_d$  esta dado por

$$t_d = \frac{R}{V_{cr}}, \quad (\text{A3})$$

donde  $R$  es una distancia característica del sistema y  $V_{cr}$  una velocidad de cruce del sistema. Para el caso de un cúmulo globular la se toma como un radio característico al radio mediano de masa ( $r_h$ ).

Aproximando  $V_{cr} \sim \sigma_0 \approx 7 \text{ km s}^{-1}$ , donde  $\sigma_0$  es la dispersión de velocidades en el centro del cúmulo, entonces  $t_d(r_c) \sim 2 \times 10^5 t_{cr}(r_h) \sim 1 \times 10^6$  años.

Si en cúmulo hay del orden de  $10^5$  estrellas  $t_r \sim t_{cr} 10^3$ . La edad de los cúmulos globulares es del orden de  $\sim 10$  Gaños, entonces, los procesos de relajación ( $\sim 10^8 \text{ a } 10^9 \text{ a}$ , ver Fig. 1.7) han tenido tiempo suficiente para llevar al cúmulo a dicha equipartición de energía.

La evolución de un cúmulo globular está determinada por la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{enc} \quad (\text{A4})$$

donde  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  es la función de distribución, o la densidad en el espacio fase. Con  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}$  el número de partículas por unidad de volumen del espacio fase.

En la ec. (A5)  $U(\mathbf{r}, t)$  es función del potencial gravitacional, que en este caso se considera independiente del tiempo. El término  $(\partial f / \partial t)_{enc}$  es una medida de las interacciones no suaves entre las partículas del sistema, y importante si el tiempo durante el cual se desea estudiar el sistema, es mayor al tiempo de relajación.

De lo anterior la ec. A5 se puede escribir,

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (\text{A5})$$

Esta se conoce como la ecuación de Liouville para la dinámica estelar de sistemas no colisionales. La solución general de esta ecuación fue dada por Jeans de la siguiente manera

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(I_1, I_2, \dots), \quad (\text{A6})$$

donde  $F$  es una función arbitraria del argumento. Las  $I_1, I_2, \dots$  son las integrales de movimiento, que se consideran independientes del tiempo, si se considera el movimiento de una partícula de masa unitaria que se mueve bajo la acción del potencial  $U(\mathbf{r})$ . En el caso de simetría esférica sólo se conocen dos integrales de movimiento: la energía ( $E$ ) y el momento angular ( $\mathbf{J}$ ).

La distribución de velocidades, descrita por la ec. A1, no está limitada espacialmente. Sin embargo, los cúmulos globulares si lo estan. Por esta razón King (1965) propone, para corregir la deficiencia que presenta la ec. A1, una distribución espacialmente limitada de la siguiente forma,

$$f(0, v) = k [\exp(-j^2 v^2) - \exp(-j^2 v_e^2)], \quad (\text{A7})$$

donde  $v_e$  es la velocidad de escape en cualquier punto, dada por

$$v_e^2 = -2\Phi(r). \quad (\text{A8})$$

Por otro lado, la energía por unidad de masa de cada una de las estrellas está dada por

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \Phi(r). \quad (\text{A9})$$

Donde si una estrella tiene energía positiva, esta dejará de estar ligada al cúmulo.

La función de distribución,  $FD$ , dentro del cúmulo se puede escribir a partir de A7, A8 y A9 de la siguiente manera

$$f(0, v) = k \exp(2j^2 \Phi_0) [\exp(-2j^2 E) - 1]. \quad (\text{A10})$$

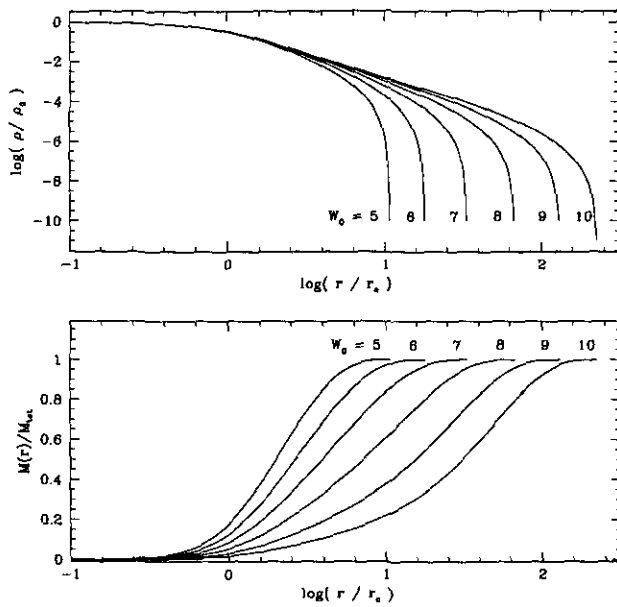


Fig. A1.— En (a) se muestra la densidad de masa como función de  $r/r_c$  para distintos valores del potencial  $W_0$ . En (b) se muestra la función cumulativa de la masa para los diferentes valores de  $W_0$ .

donde  $\Phi_0 = \Phi(0)$  que es el valor del potencial en el centro del cúmulo.

Sabemos del Teorema de Jeans (ec. A7) que la FD se puede escribir como función de las integrales de movimiento, las cuales sólo dependen de las coordenadas del espacio fase. En particular, para un sistema con simetría esférica y en estado estacionario, que es el caso de los cúmulos globulares, la FD se puede escribir en términos de  $E, \mathbf{J}$ , pero además por ser integrales de movimiento estas deben ser las mismas para todos los puntos del cúmulo, entonces, sin pérdida de generalidad, se puede escribir la FD para toda  $r$  y  $\mathbf{v}$  como

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(E, \mathbf{J}). \quad (\text{A11})$$

Por el momento supondremos que no existe componente neta de rotación en los cúmulos globulares, por lo que se puede decir que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . De donde se tiene que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(E)$ , o de manera explícita,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = ke^{-2j^2(\Phi(r)-\Phi_0)} \times (e^{-j^2v^2} - e^{-j^2v_e^2}), \quad (\text{A12})$$

donde  $v_e$  esta dada por la ec. (A9). Esta relación tiene la forma de una Maxwelliana con un corte en la distribución de velocidades, que es función de la posición.

La densidad en cada punto esta dada por

$$\rho = \int_0^{v_e} f(r, v) 4\pi v^2 dv, \quad (\text{A13})$$

y si definimos

$$W = -2j^2\Phi, \quad (\text{A14})$$

$$\eta = j^2v^2, \quad (\text{A15})$$

y sustituimos (A15) y (A16) en (A13), y (A13) en (A14) tenemos

$$\rho = 2\pi k j^{-3} e^{(W-W_0)} \int_0^W (e^{-\eta} - e^{-W}) \eta^{\frac{1}{2}} d\eta, \quad (\text{A16})$$

que al integrar por partes se tiene,

$$\rho = \frac{4}{3} \pi k j^{-3} e^{(W-W_0)} \int_0^W e^{-\eta} \eta^{\frac{3}{2}} d\eta, \quad (\text{A17})$$

donde

$$\int_0^W e^{-\eta} \eta^{\frac{3}{2}} d\eta = -\frac{(3+2W)W^{1/2}}{2e^W} + \frac{3}{4}\pi^{1/2}\text{erf}(W^{1/2}). \quad (\text{A18})$$

de donde se obtiene la densidad de manera implícita:

$$\rho = \frac{4}{3} \pi k j^{-3} e^{(W-W_0)} \left[ -\frac{(3+2W)W^{1/2}}{2e^W} + \frac{3}{4}\pi^{1/2}\text{erf}(W^{1/2}) \right]. \quad (\text{A19})$$

Inmediatamente notamos que  $\rho$  esta en términos de  $W$ ; sin embargo, a nosotros nos interesa conocer a  $\rho$  como función del radio. Para poder encontrar la relación entre el potencial y la densidad recurrimos a la ecuación de Poisson,

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G\rho \quad (\text{A20})$$

donde  $G$  es la constante de gravitación.

Se define un factor de escala  $r_c$ , que como veremos más adelante es el radio donde la densidad central deja de ser constante. Se define un radio adimensional, tal que  $R = r/r_c$  y de la ecuación (15) se tiene,

$$\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dW}{dR} = 8\pi G j^2 r_c^2 \rho, \quad (\text{A21})$$

donde King (1958) encuentra de manera empírica que

$$8\pi G j^2 r_c^2 \rho = 9, \quad (\text{A22})$$

sustituyendo en (A22) tenemos

$$\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dW}{dR} = -9 \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (\text{A23})$$

que es finalmente la ecuación que resolveremos usando como condiciones iniciales en  $R = 0$  que  $W(0) = W_0$  y  $dW/dR = 0$ , las cuales implican que el segundo término del lado izquierdo de la ec. (A24) cumple con lo siguiente;

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{2}{R} \frac{dW}{dR} = -6. \quad (\text{A24})$$

Hemos encontrado el conjunto de relaciones y condiciones que nos permiten obtener la forma de la distribución que tienen los cúmulos globulares, a partir de está es posible construir los modelos numéricos de la siguiente forma:

TABLA A1  
VALORES DEL MODELO DE KING

$W_0$	$r_t$	$c$	$\beta$	$\mu$	$k$
5	10.696	1.029	31.393	11.817	1.678
6	17.991	1.255	50.786	16.906	2.231
7	33.710	1.528	78.966	24.940	2.987
8	68.128	1.833	122.554	39.896	3.658
9	131.371	2.118	195.782	69.887	3.672
10	223.613	2.349	324.280	125.717	3.199

TABLA A2  
II. VALORES NUMÉRICOS

$W_0$	$c$	$r_c$	$r_t$
5	1.029	0.4070	4.354
6	1.255	0.3037	5.463
7	1.528	0.2068	6.978
8	1.833	0.1221	8.316
9	2.118	0.0635	8.344
10	2.349	0.0331	7.398

1. Se da un valor de  $W_0$ .
2. Se resuelve la ecuación de Poisson (A24) para encontrar  $W$  como función de  $r$ . A partir de esto se determina el radio de marea ( $r_t$ ), como el valor donde  $W(r_t)=0$ .
3. Calculamos  $\rho(W(r))/\rho_0$  a partir de la ecuación (A20).

Una vez hecho lo anterior hemos encontrado la solución del modelo de King en forma adimensional. Por último, y para poder construir de manera completa nuestro modelo es necesario conocer los valores de la energía potencial y de la masa, que serán de gran utilidad al definir las constantes de nuestro modelo como son:

$$\mu = \int_0^{R_t} \frac{\rho}{\rho_0} 4\pi R^2 dR, \quad (A25)$$

$$\beta = \int_0^{R_t} W \frac{\rho}{\rho_0} 4\pi R^2 dR, \quad (A26)$$

y

$$k = \frac{2\pi\beta 10^c}{\mu^2} \quad (A27)$$

donde  $c$  es la concentración del modelo que se define como  $c = \log(r_t/r_c)$ .

En la Tabla I se dan los valores de  $r_t$ ,  $c$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ , que corresponden a cada valor de  $W_0$ .

La forma en la que se resolvió el modelo fue usando el paquete *Mathematica*, donde lo primero que se hace es

encontrar la solución de la ecuación (A16), es decir,  $W(r)$ , y entonces así podemos encontrar el valor del cociente  $\rho(W(r))/\rho(W_0)$ . De esta forma es posible obtener una solución adimensional sin conocer de manera explícita los valores de  $r_c$ ,  $\rho_c = \rho(W_0)$ .

### A.2 El modelo numérico

En la sección anterior hemos construido un modelo teórico de un cúmulo globular para diferentes valores de la concentración,  $c$ . Se conoce la función de distribución y el valor de las constante involucradas, de tal forma que sabemos cual debe ser las distribución espacial en velocidades de las estrellas en un cúmulo globular a una concentración dada.

Para generar las condiciones iniciales de un modelo numérico necesitamos dar posición y velocidad inicial para cada una de las  $N$  estrellas que van a formar parte de nuestra simulación. También es necesario que el sistema así generado se encuentre en equilibrio virial, de esta forma garantizamos que el modelo sea intrínsecamente estable (dentro de la precisión numérica posible) cuando se evoluciona en el tiempo, sin considerar fuerzas externas que lo perturben.

Empecemos por definir el sistema de unidades que se ha adoptado para hacer simulaciones de N-cuerpos (Heggie & Mathieu, 1986)

$$G = 1, \quad (A28)$$

$$M_{total} = 1, \quad (A29)$$



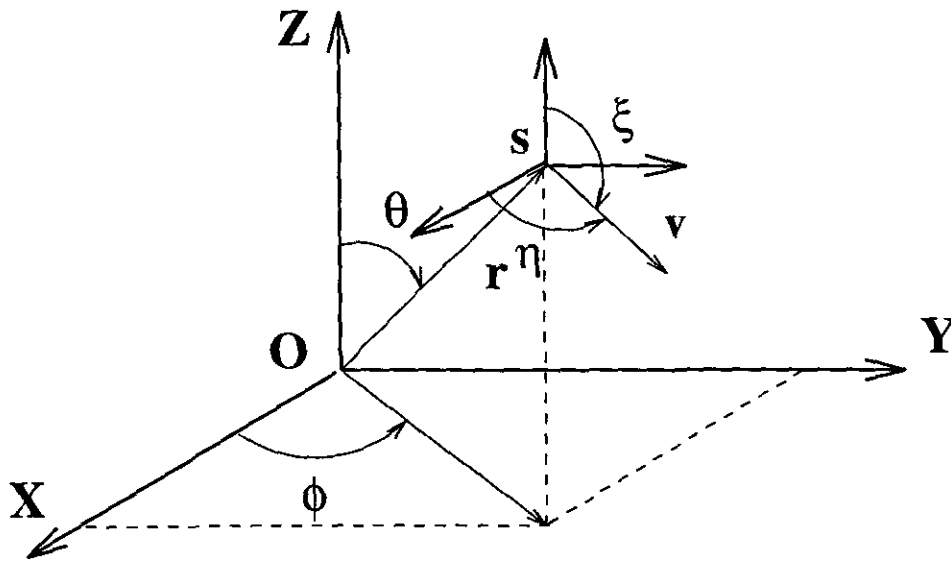


Fig. A2.— Modulos y ángulos necesarios para definir la posición y velocidad de un punto en el espacio.

$$E_{total} = -\frac{1}{4}, \tag{A30}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M$  la masa total del sistema y  $E$  la energía inicial.

Definimos de manera inicial a  $r_c = 1$ , y usando que  $M = \rho_0 r_c^3 \mu$  y junto con (A30), tenemos que

$$\rho_0 = \frac{1}{r_c^3 \mu}, \tag{A31}$$

el valor de  $j$  se obtiene como

$$j^2 = \frac{9}{8\pi r_c^2 \rho_0}. \tag{A32}$$

Luego entonces con los valores de  $r_c, \rho_0$  y  $j^2$  podemos construir nuestro modelo numérico.

**Elección de  $r$  y  $v$ .**

Para encontrar las posiciones que correspondan a la función de distribución del cúmulo se uso la función acumulativa de la masa como función de peso, y para las velocidades la función de distribución de velocidades. El procedimiento con el cual obtenemos los vectores  $r$  y  $v$  es el siguiente:

1. Elegimos al azar un número entre 0 y 1 que representa a algún valor de la masa acumulada en el eje de las ordenadas.
2. Encontramos el valor de  $r$  al cual corresponde la función acumulativa.

3. Para poder dar el vector de posición  $r$  calculamos de manera aleatoria los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , en los siguientes intervalos:

$$0 < \phi \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 < \cos\theta \leq 1. \tag{A33}$$

4. Se usa el modulo de  $r$  para encontrar la velocidad de escape  $v_e$ .
5. Se define la función de distribución de velocidades en cada punto considerado, utilizando la siguiente relación:

$$f(v) = 4\pi v^2 k e^{-2j^2 \Phi(0)} (e^{-j^2 v^2 - 2j^2 \Phi(r)} - 1) \tag{A34}$$

6. Encontramos el valor de la velocidad ( $v_m$ ) para el cual la función de distribución de velocidades es máxima ( $f_{max}$ ). (Ver figura A3b)
7. Escojemos de manera aleatoria una  $v_{prueba}$ , entre 0 y  $v_{esc}$  y una ( $f_{prueba}$ ), entre 0 y  $f_m + cte$ .
8. Si los puntos estan debajo de la curva:  $f(v_{prueba}) < f_{prueba}$  se toma  $v = v_{prueba}$ , de lo contrario la velocidad es rechazada y empezamos desde el punto (1). En la figura A3b vemos dos puntos seleccionados al azar, el punto 1 es el que es aceptado mientras que el punto 2 se rechaza.
9. En caso de ser aceptada la velocidad se calculan de manera aleatoria los ángulos  $\eta$  y  $\xi$  entre los intervalos:

$$0 < \eta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 < \cos\xi \leq 1, \tag{A35}$$

quedando de esta manera definidos los vectores de posición y velocidad.

El procedimiento anterior se aplica de manera iterativa  $N$  veces, en que se aprueba el punto en el paso 8 de la iteración. Este será el número de partículas que tendrá nuestro modelo.

### Equilibrio y escalamineto virial

Una vez que hemos calculado las posiciones y velocidades para el modelo de  $N$ -cuerpos, cada uno con una masa  $m_i = 1/N$ , calculamos la energía total del sistema para lo cual evaluamos la energía cinética total, así como la energía potencial de la siguiente forma,

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{A36})$$

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i^2}{|r_i - r_j|} \quad (\text{A37})$$

Luego entonces, como lo que queremos es virializar el sistema, es decir, que  $K = -1/2 U$ , escalamos las velocidades de la siguiente forma

$$v_i = v_i \frac{1}{2} \frac{|U|}{K} \quad (\text{A38})$$

lo que nos garantiza el equilibrio virial. Por último, para escalar la energía total, para que su valor sea  $-1/4$ , escalamos cada una de las posiciones y velocidades, ya virializadas por los siguientes factores

$$r = 4|E|r \quad (\text{A39})$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{4|E|}} v \quad (\text{A40})$$

Luego entonces hemos generado un modelo numérico de un cúmulo globular en equilibrio virial, cuya unidad de longitud es el radio virial, que es igual a la unidad,  $M_{total} = 1$ , y  $E_{inicial} = -1/4$ . En la Tabla II damos los valores del  $r_c$ ,  $r_t$ , y  $\rho_0$  como función de la concentración  $c$  que en promedio deberían tener una serie de modelos aleatorios generados por nuestro algoritmo.

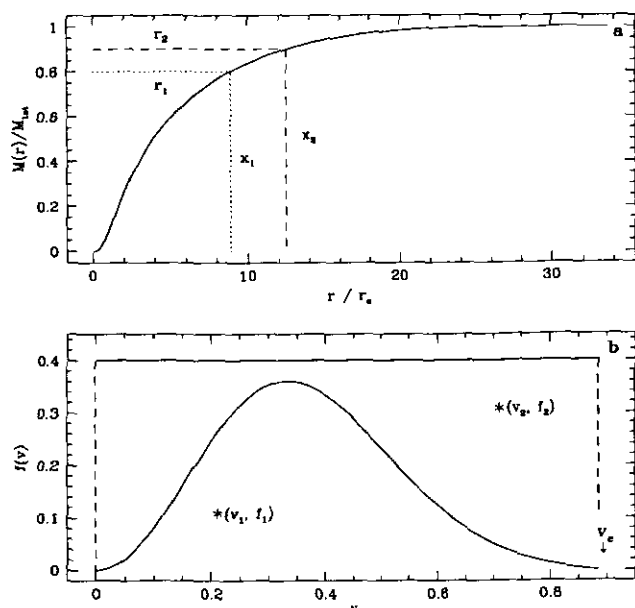


Fig. A3.— En (a) se da un ejemplo de como se obtienen dos puntos de manera aleatoria para las posiciones de las estrellas en el cúmulo globular. La función de peso que se utiliza es la función cumulativa de la masa. En (b) se muestra un ejemplo de el método de rechazo de von Neumann, en este caso tenemos dos puntos generados de manera aleatoria, tanto las velocidades como los valores de la  $f$ , si los valores de  $f_i < f(v_i)$  el punto es aceptado, de lo contrario se rechaza. En este caso el punto 1 es aceptado y 2 se rechaza.

### B Escalamiento en Simulaciones Numéricas y Unidades

Sean  $[l]$ ,  $[m]$  y  $[t]$  las unidades de longitud, masa y tiempo del modelo numérico, y que en general son las que se usan en el código. Utilizando  $G = 1$ , tendremos una relación entre estas cantidades de la forma,

$$G = 1 \frac{[l]^3}{[m][t]^2} = 6.67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{gr \ s^2} \quad (\text{B1})$$

Para definir completamente el sistema de unidades son necesarias otras dos relaciones entre las unidades del código y las unidades cgs. Estas relaciones son los valores de  $[l]$ ,  $[m]$  o  $[t]$  en unidades físicas. Con determinar 2 de ellas, la tercera queda determinada por B1.

Cualquier otra unidad queda determinada por la combinación de estas relaciones físicas.

Por ejemplo, el sistema de unidades que utilizamos en este trabajo la masa se escala en masas solares, la longitud en parsecs, y la unidad de tiempo en años. La relación entre estas cantidades está determinada por

$$[t] = 1.52 \times 10^7 \left( \frac{R}{pc} \right)^{3/2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \text{ años} \quad (\text{B2})$$

y por tanto la velocidad y la aceleración por

$$|v| = 6.41 \times 10^{-2} \left( \frac{r_v}{pc} \right)^{-1/2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \text{ kms}^{-1} \quad (\text{B3})$$

y

$$|a| = 4.14 \times 10^{-8} \left( \frac{r_v}{pc} \right)^{-2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ kms}^{-1}. \quad (\text{B4})$$

De donde queda determinado el sistema de unidades.

### C Tabla de parámetros iniciales

En la Tabla C3 se dan los parámetros iniciales que se utilizaron en las simulaciones con  $R_{\text{peri}}=1.5$  kpc. Solo reportamos estos valores porque son representativos de los valores que se obtiene para los demas perigalácticos que hemos considerado. En general los parametros iniciales, en la rutina de centrado y del integrador son los mismos para toda las simulaciones.

En la primer columna se da el nombre de la simulación.

En la siguientes dos columnas se dan los tiempos de cómputo de la simulación y del análisis, respectivamente. El análisis consiste en retirar las estrellas que no se encuentran ligadas al sistema, razón por la cual este tiempo es más largo para los cúmulos que pierden una cantidad apreciable de estrellas, debido a que requieren un mayor número de iteraciones.

En las columnas 4 y 5, se dan los valores que se utilizaron en la rutina de centrado, para el suavizamiento y la tolerancia.

En la última columna se da el valor del intervalo de tiempo utilizado en la integración.

TABLA C3  
PARÁMETROS INICIALES Y TIEMPOS DE CÓMPUTO.

Nombre del Experimento	$t_{CPU}$ (hrs)	$t_{Análisis}$ (hrs)	$\epsilon_c$ ( $\langle l \rangle$ )	$\eta$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta t$
A00s	12.6	45.1	0.1	5	0.025
A25s	13.2	45.2	"	"	"
A50s	19.6	45.2	"	"	"
A75s	39.9	45.4	"	"	"
A00m	15.0	46.3	"	"	"
A25m	11.3	46.3	"	"	"
A50m	16.4	46.6	"	"	"
A75m	34.1	46.2	"	"	"
A00ml	6.1	50.1	"	"	"
A25ml	6.5	51.1	"	"	"
A50ml	9.3	52.1	"	"	"
A75ml	19.2	52.1	"	"	"
A00l	1.7	55.1	"	"	"
A25l	1.7	55.2	"	"	"
A50l	2.5	56.0	"	"	"
A75l	6.3	55.7	"	"	"

## D Resultados

### D.1 Orbitas del cúmulo

En la Fig. D4, se muestran las órbitas que siguen los cúmulos durante nuestras simulaciones. Cada panel corresponde a cada valor de los  $R_{\text{peri}}$  que hemos considerado.

### D.2 Posiciones y velocidades

En la Fig. D5, se muestran dos ejemplos del tipo de información que se obtiene en cada cuadro de la simulaciones. Se muestra la posición y vector de velocidad del 1% de las estrellas del cúmulo en el experimento A501, después de su primer paso por su perigaláctico en su siguiente perigaláctico.

### D.3 Radios lagrangianos, $E$ , $M$ , $c^t$ y $\rho_0$

En la primer serie de gráficas se muestra la evolución temporal de:

- En el panel superior izquierdo se muestran los radios lagrangianos con el 5%, 10%, ...90%, 91%, ...99% y 100% de la masa ligada al cúmulo (líneas gruesas), y para los mismos porcentajes pero con líneas delgadas, el total de las partículas en la simulación. Del 91% al 99% las líneas son de trazos, para las partículas ligadas y las totales, respectivamente.
- En los dos paneles inferiores de la izquierda, se muestra la variación diferencial de la energía y de la masa como función del tiempo.
- En los dos paneles superiores derechos se muestra la variación absoluta de la energía y de la masa del cúmulo.
- En los paneles inferiores derechos se muestran la variación temporal de la densidad central, y de la concentración teórica del cúmulo.

Las líneas verticales en todas las gráficas indican el paso del cúmulo por su perigaláctico.

### D.4 Semiejes del elipsoide

En la siguiente serie de gráficas se muestra la variación de los semiejes mayores del elipsoide de inercia, que contienen el 100% de la masa ligada. Se muestra también como varía la orientación del semieje mayor respecto a la dirección cúmulo-Galaxia.

### D.5 Diagramas de Botlinger

En esta serie de gráficas se muestran los diagramas de Botlinger para las simulaciones con  $R_{\text{peri}} = 1.5$  kpc. Sólo se muestran los resultados para este valor del perigaláctico, porque los demás son muy parecidos.

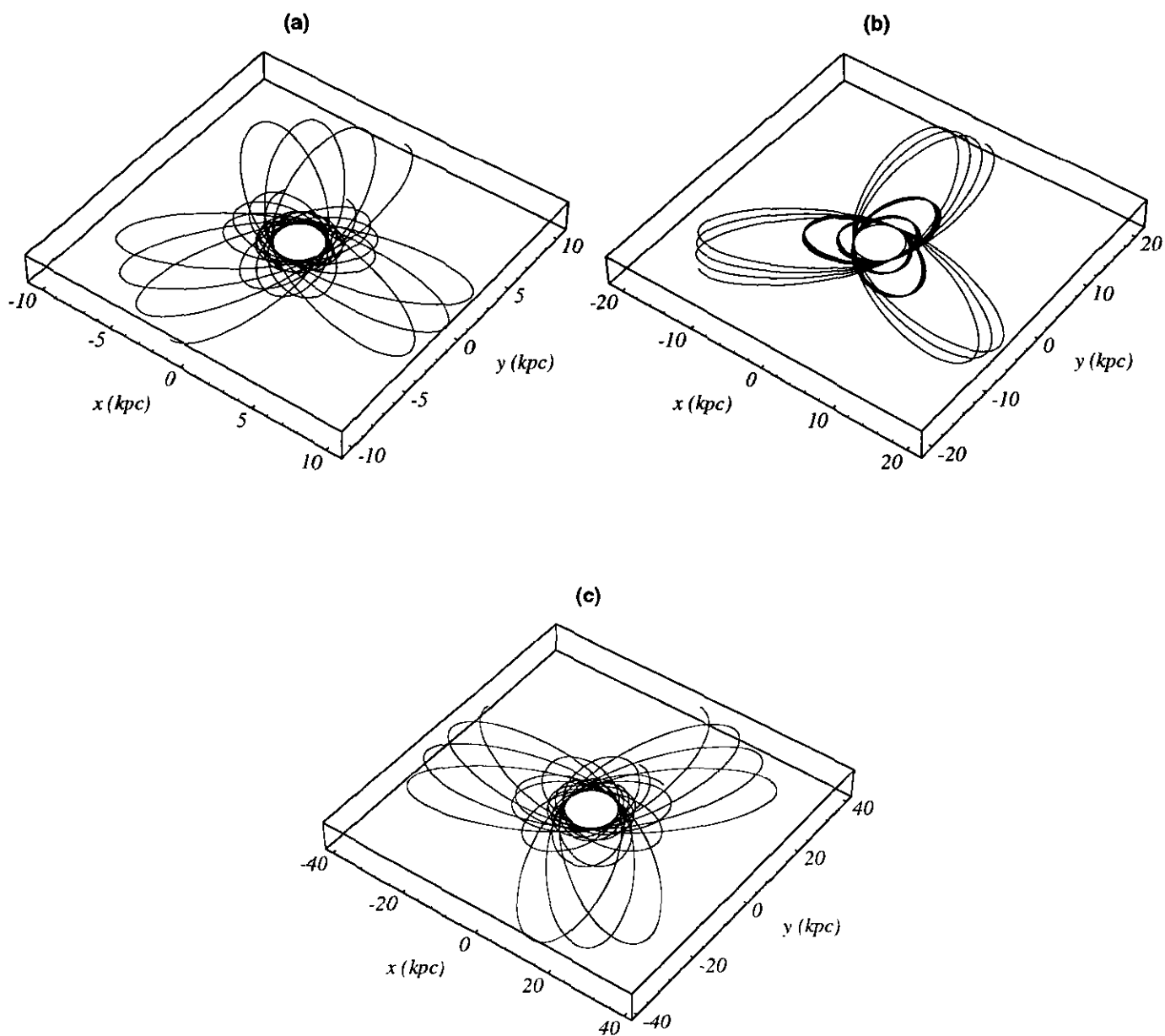


Fig. D4.— Orbitas los cúmulos globulares en las simulaciones que hemos realizado. Cada panel corresponde a uno de los apogalácticos que hemos considerado 1.5 kpc, 3 kpc y 6 kpc, respectivamente.

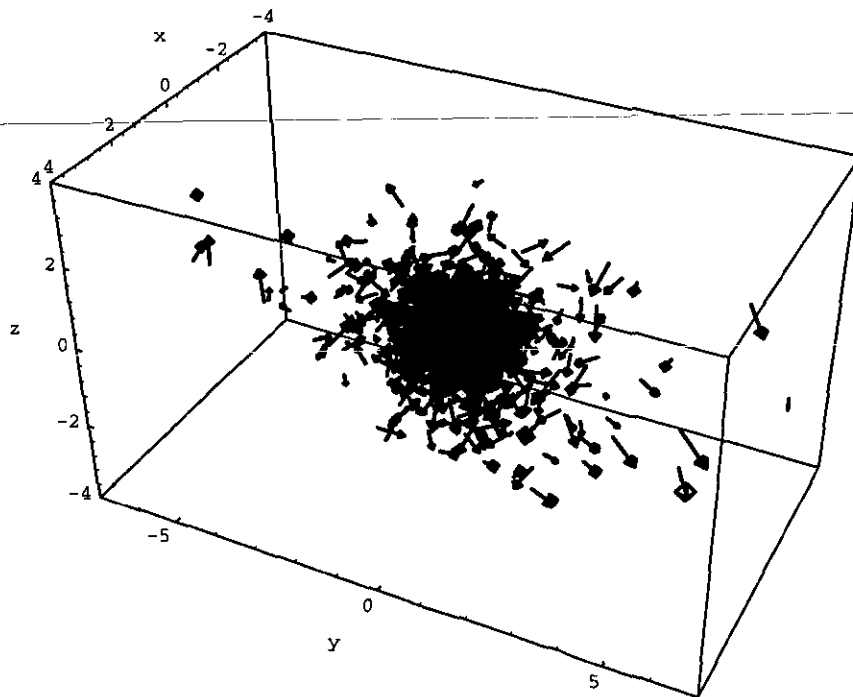
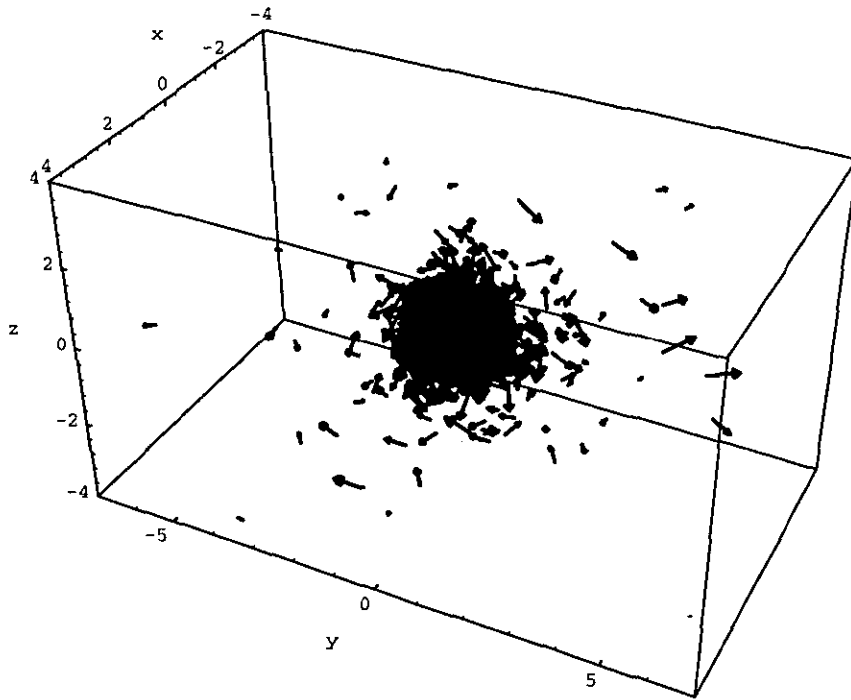
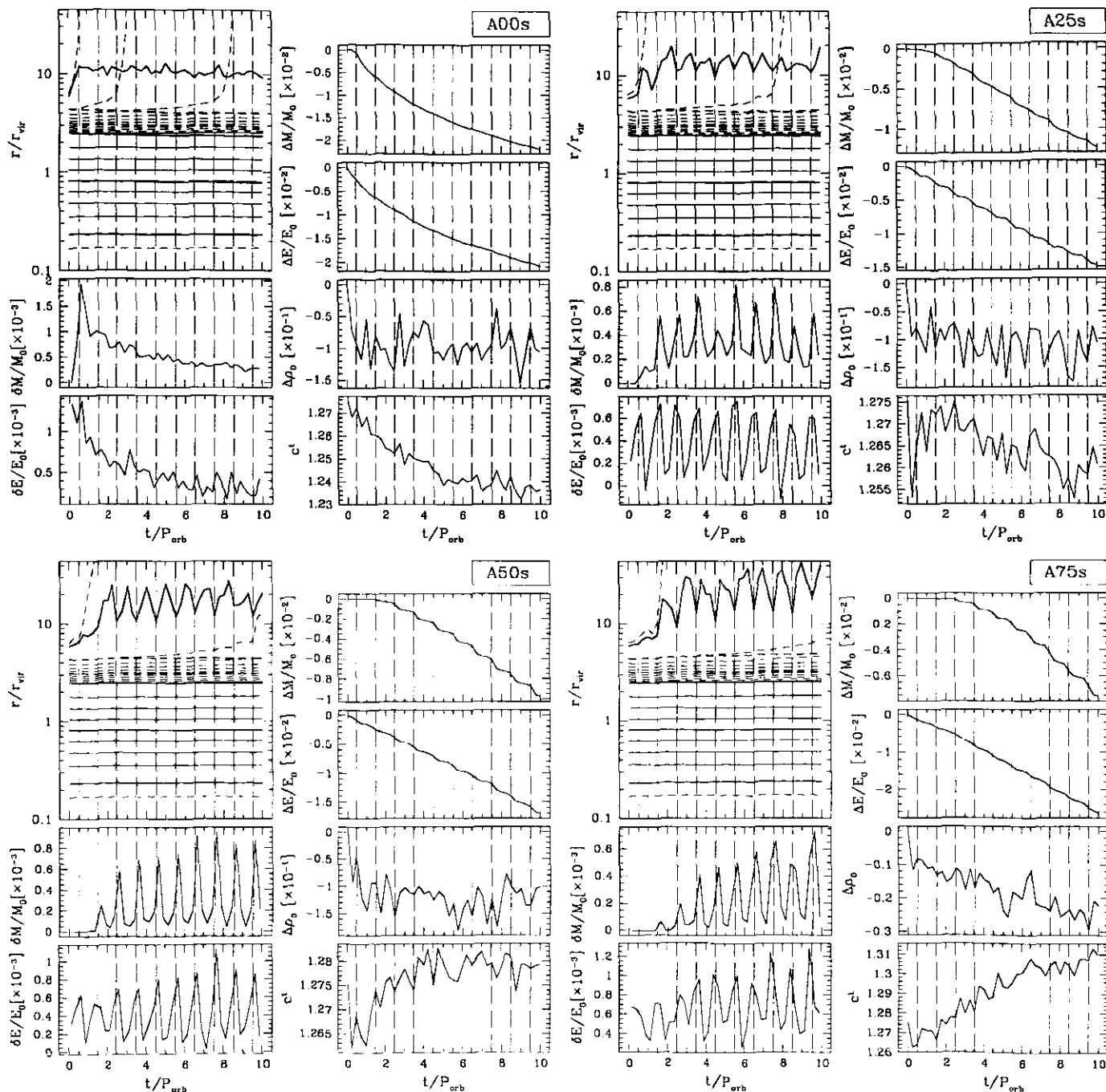
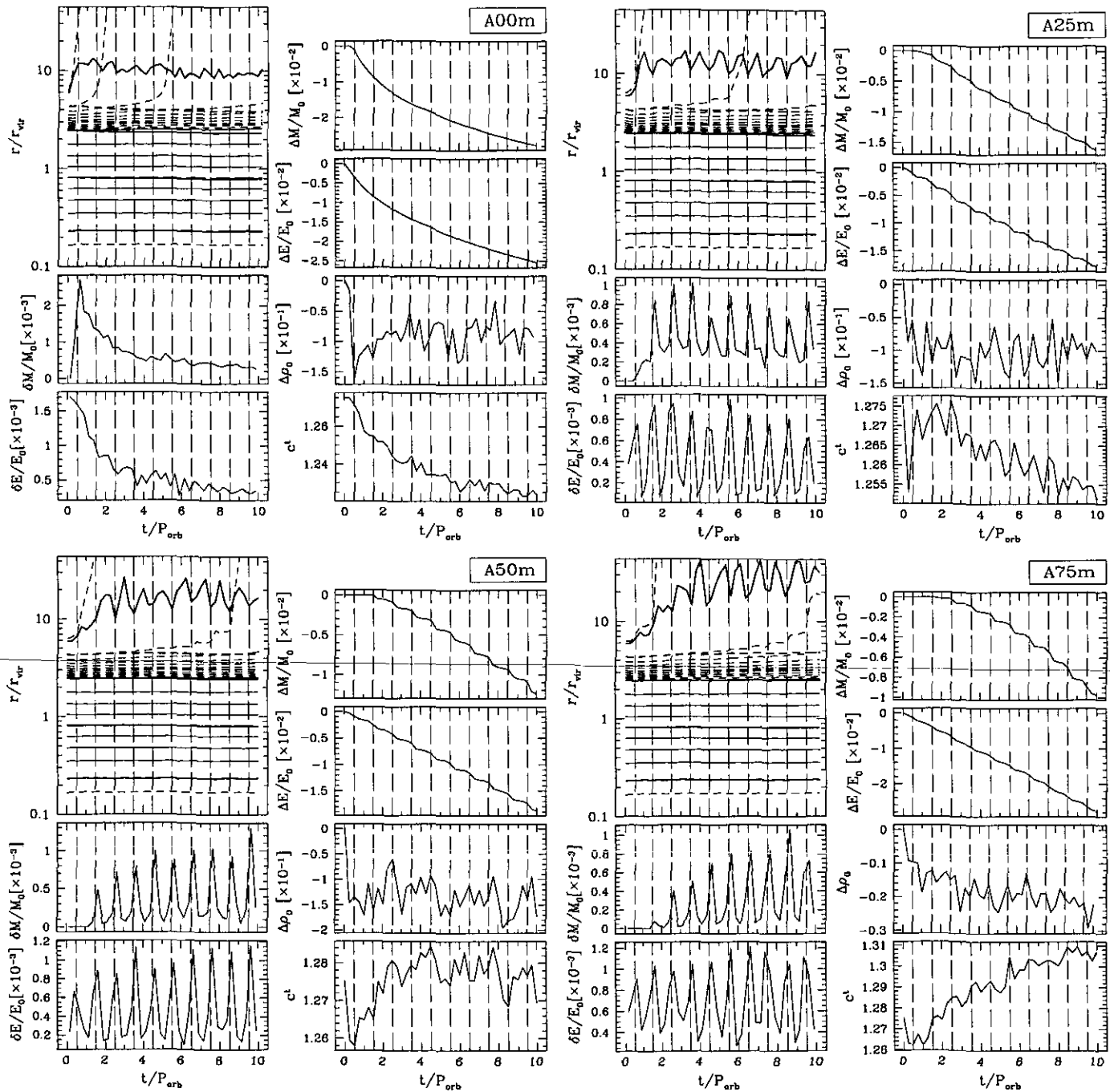
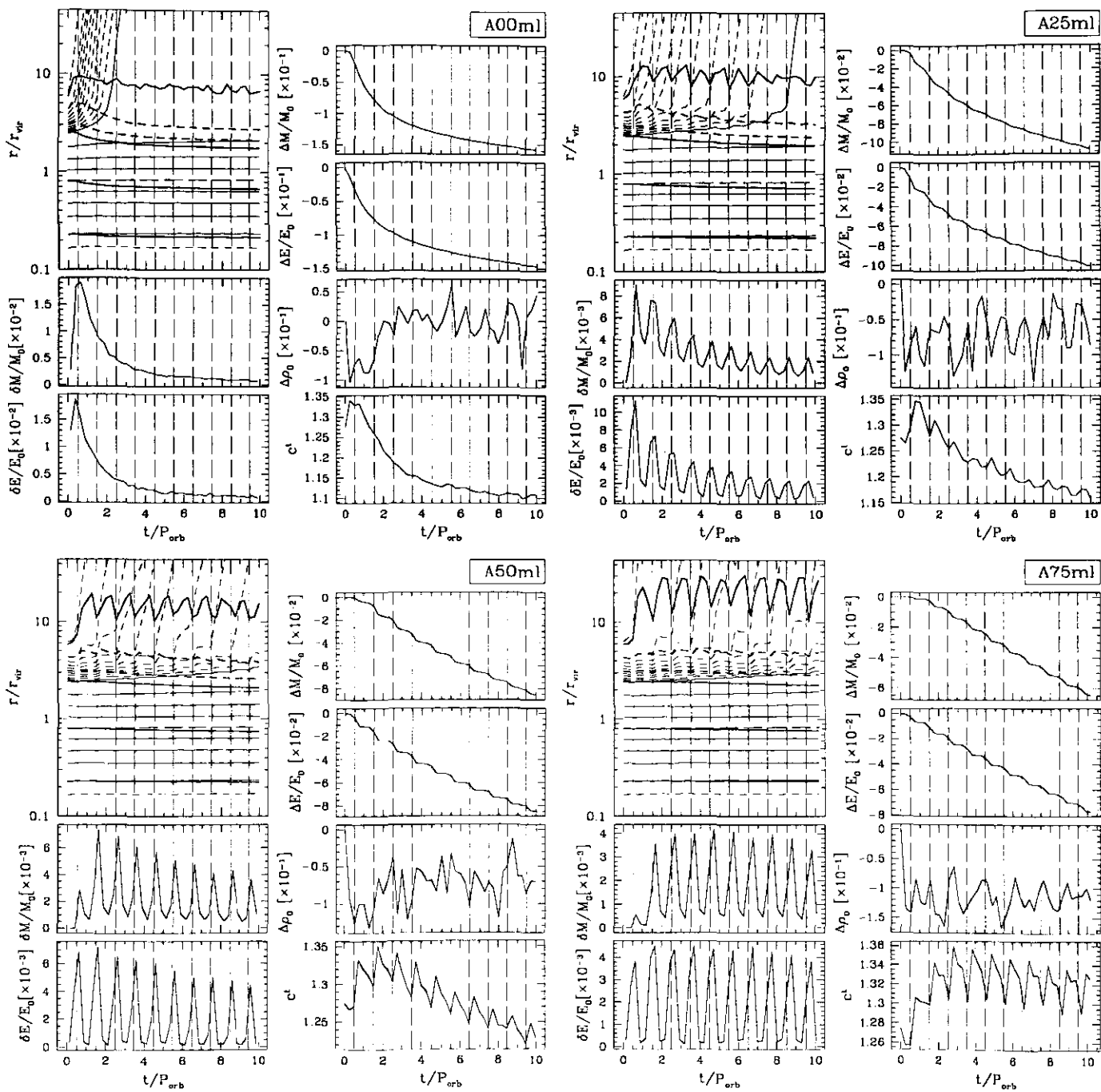


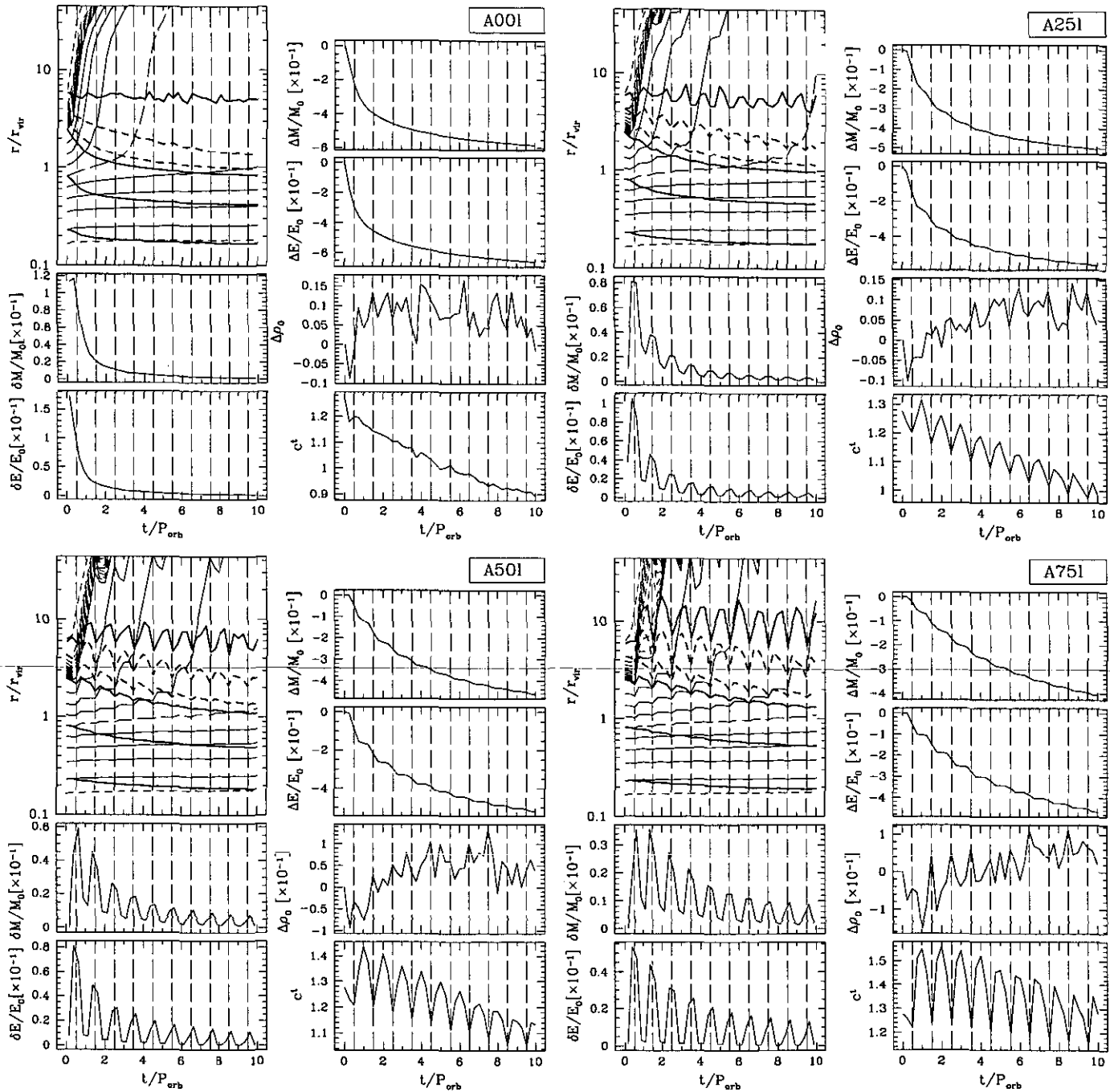
Fig. D5.— Comparación de la forma y campo de velocidades de un cúmulo globular en su apogaláctico (panel superior) y en su pericéntrico (panel inferior). Ambas para la simulación A501. En ambas figuras solo se muestra el 1% del total de las partículas del sistema. El centro galáctico está en la dirección  $-y$ .

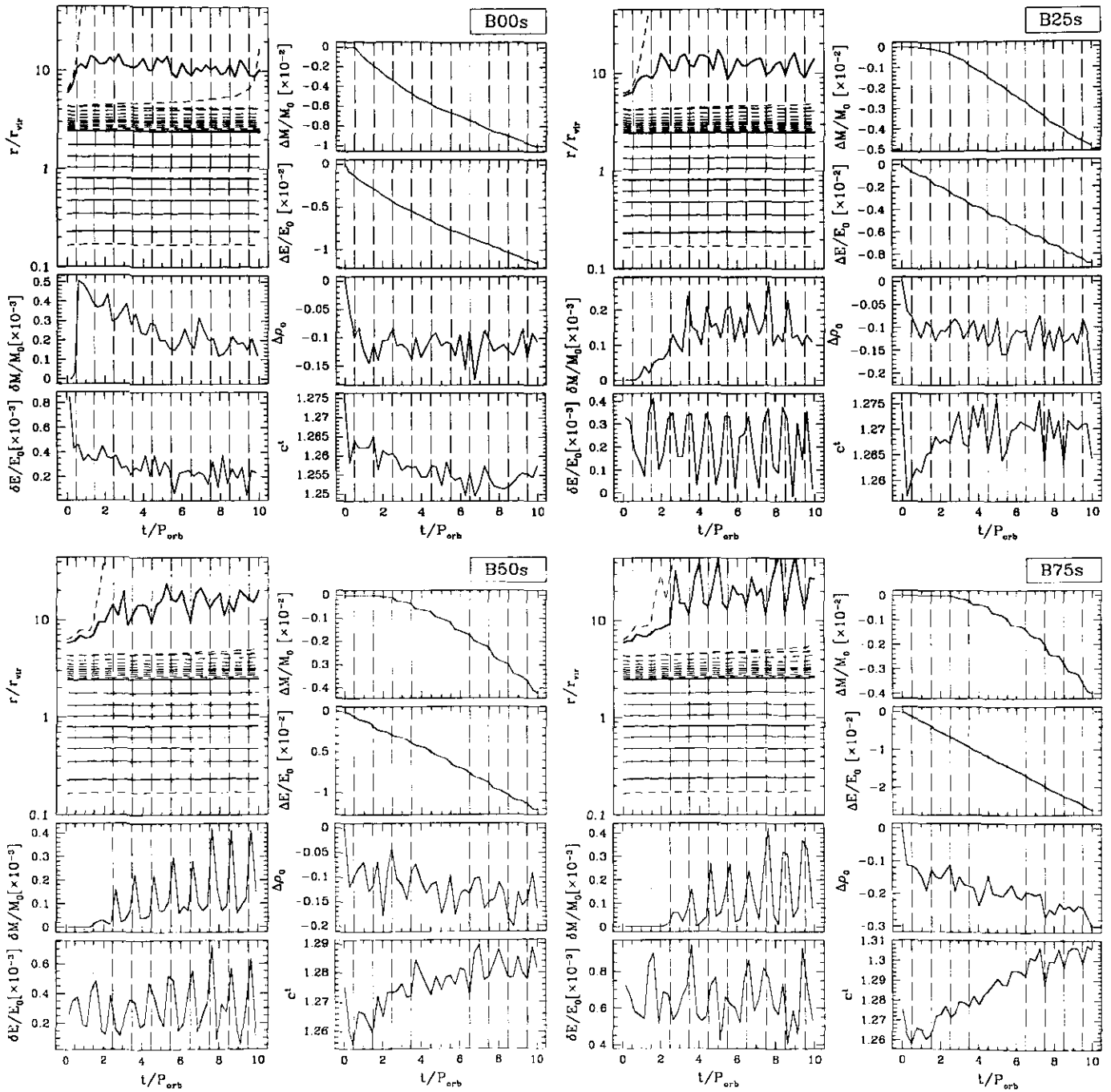


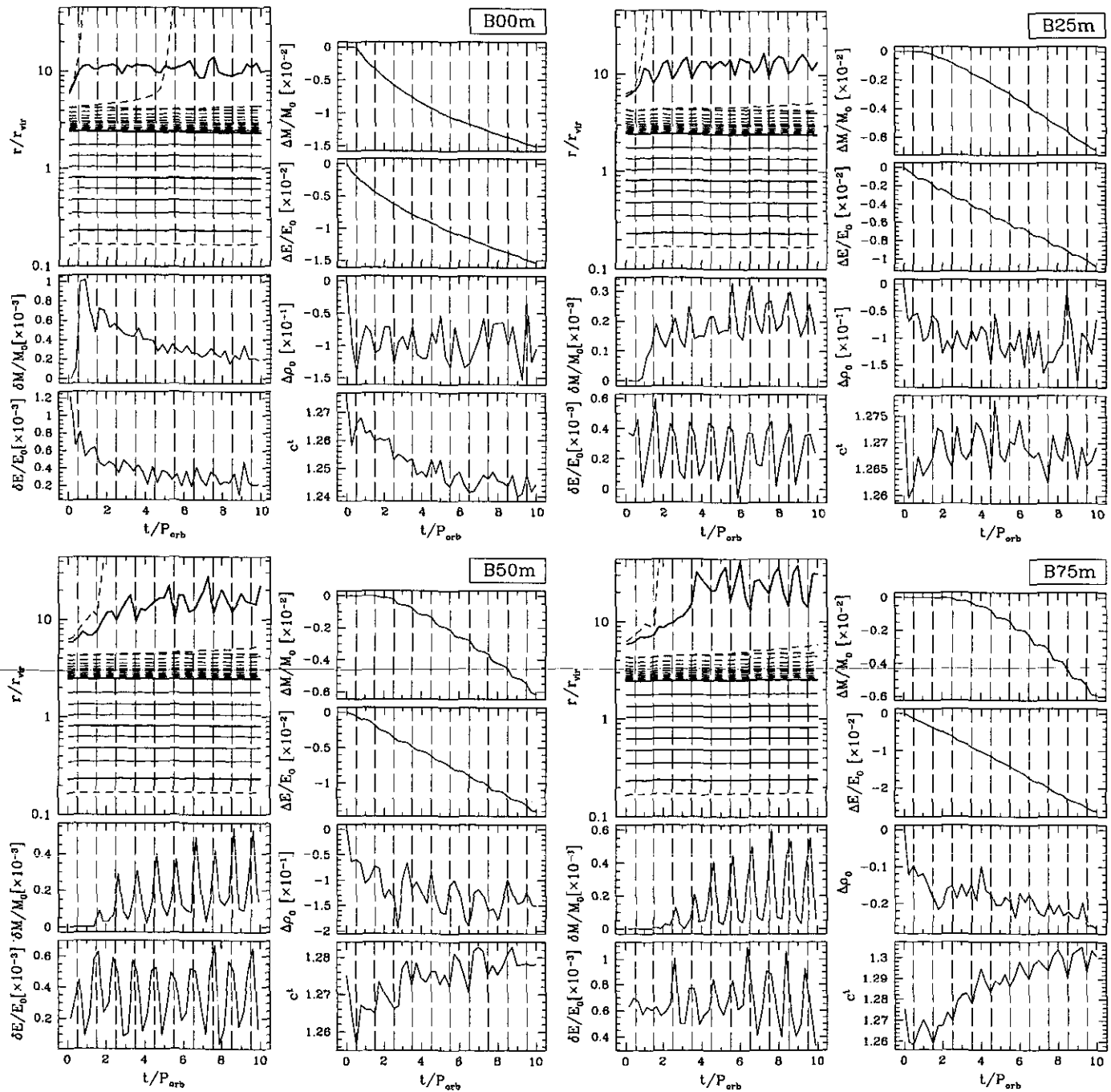


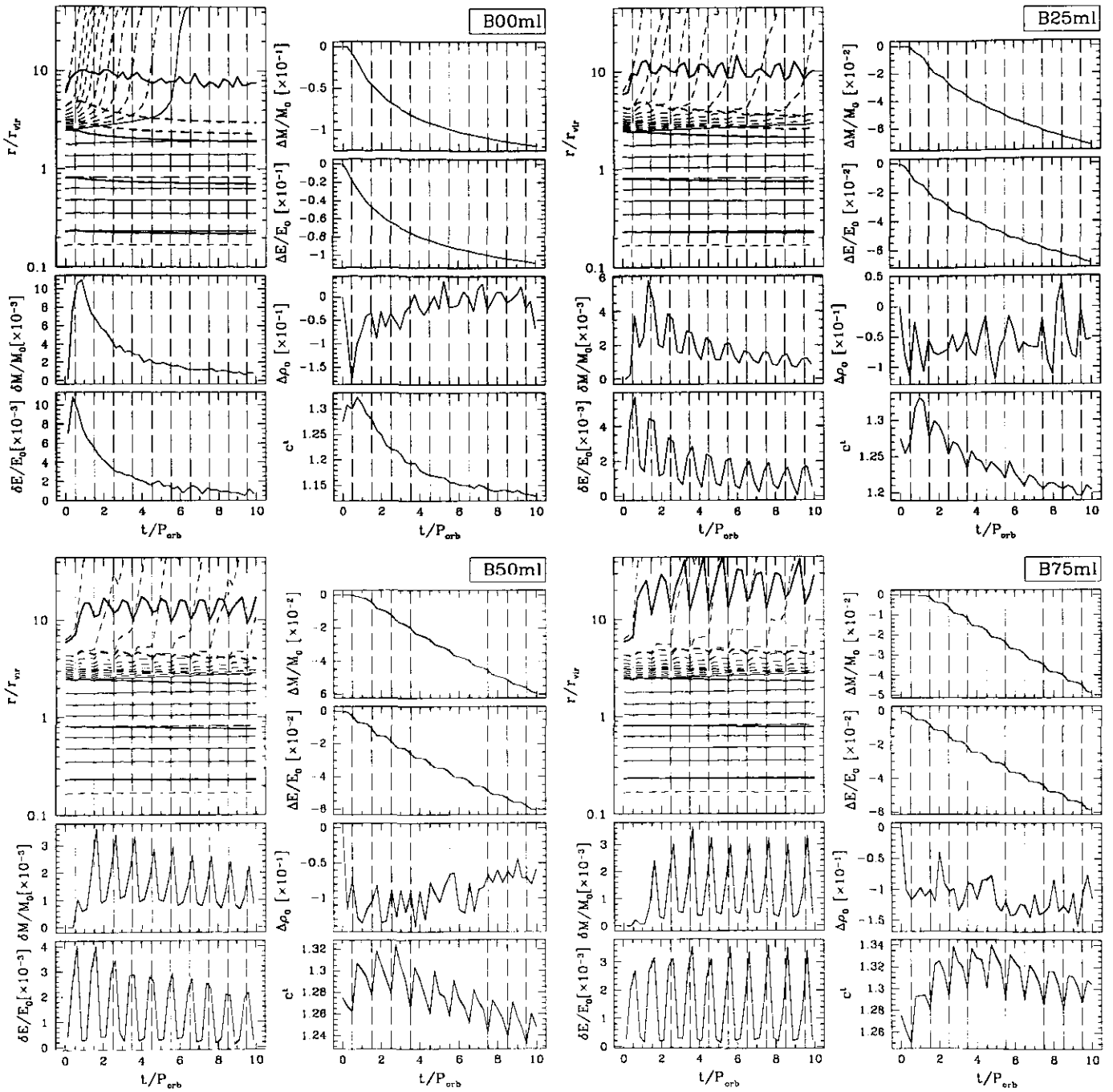


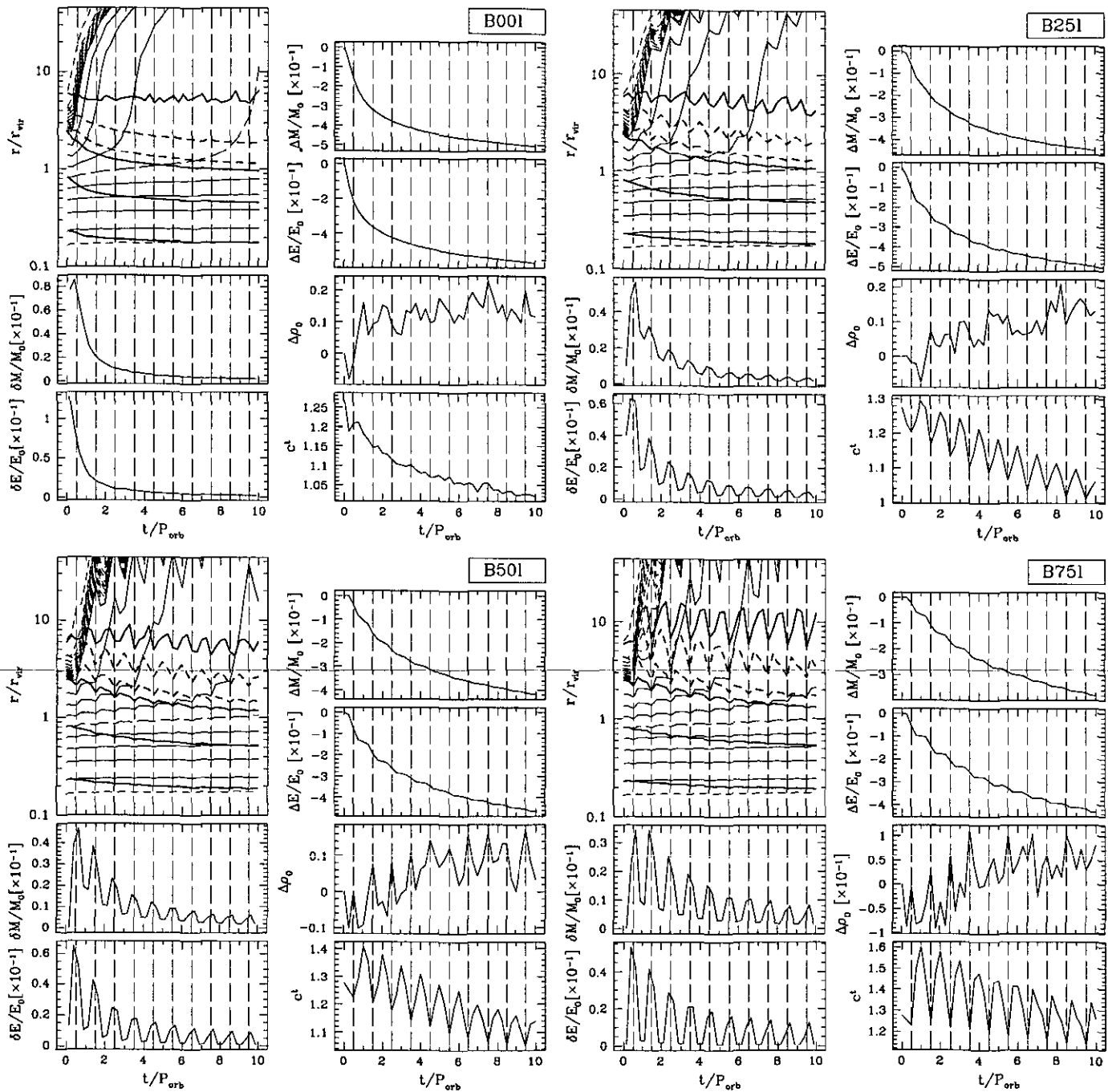


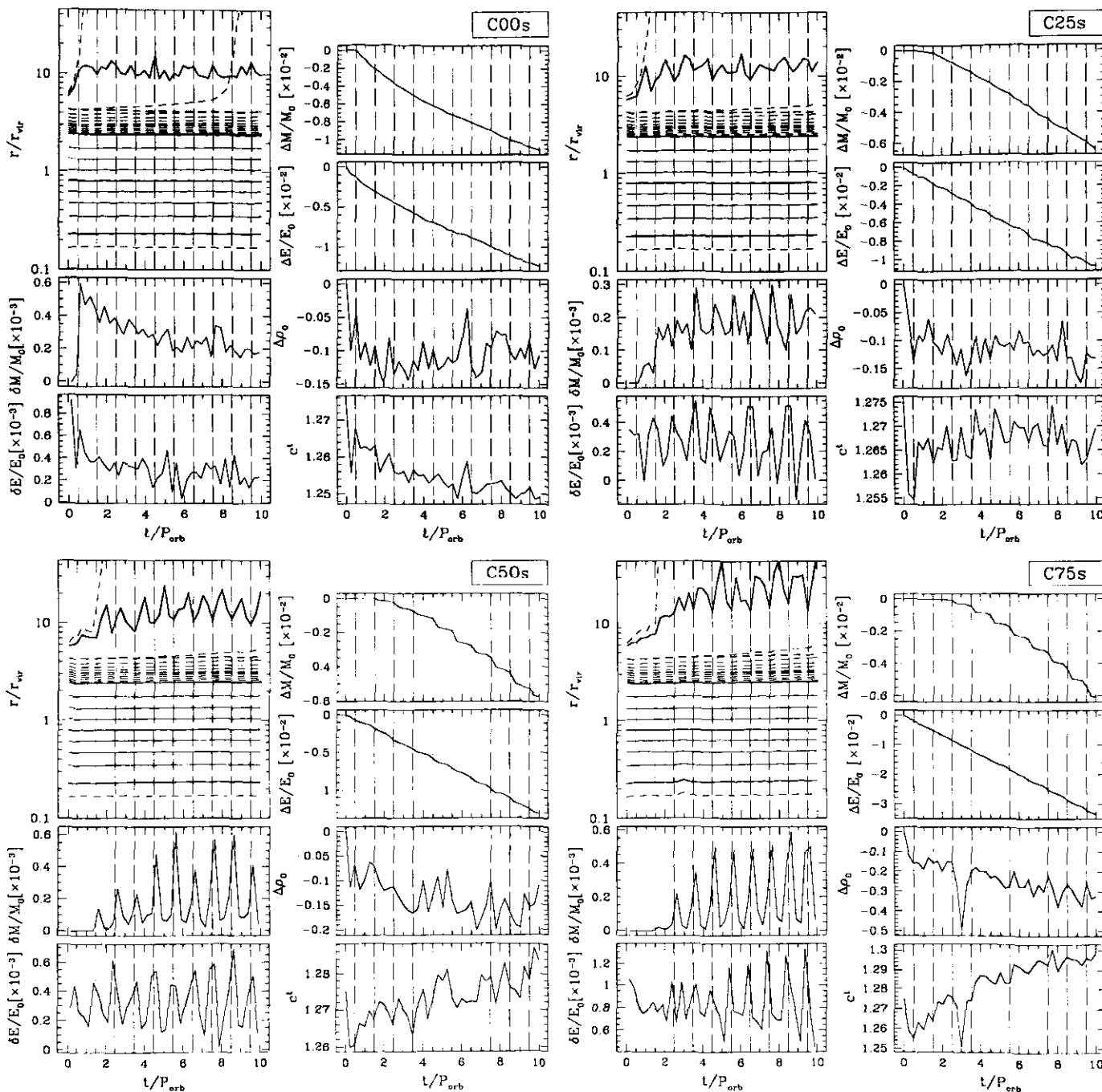




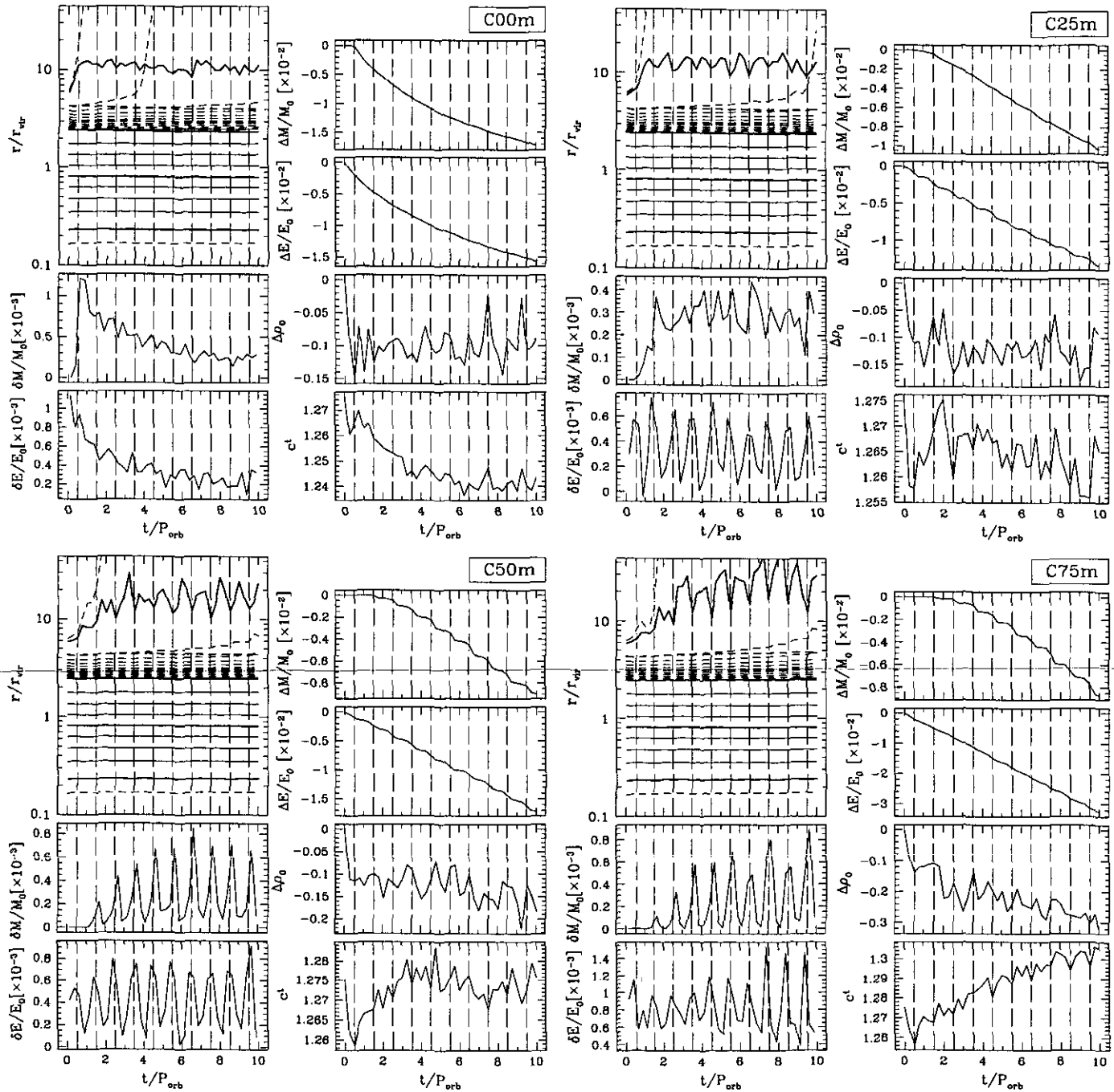


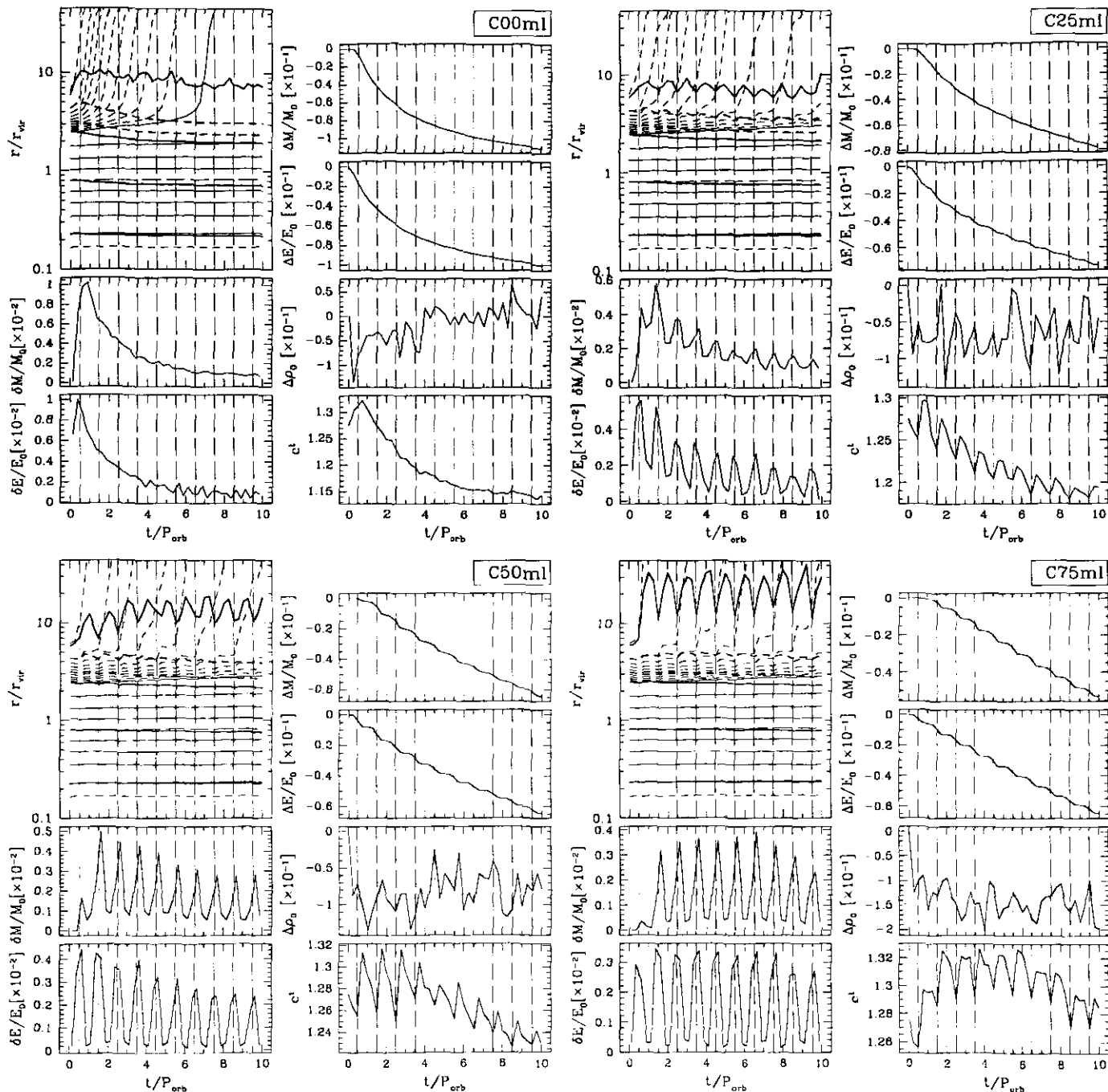


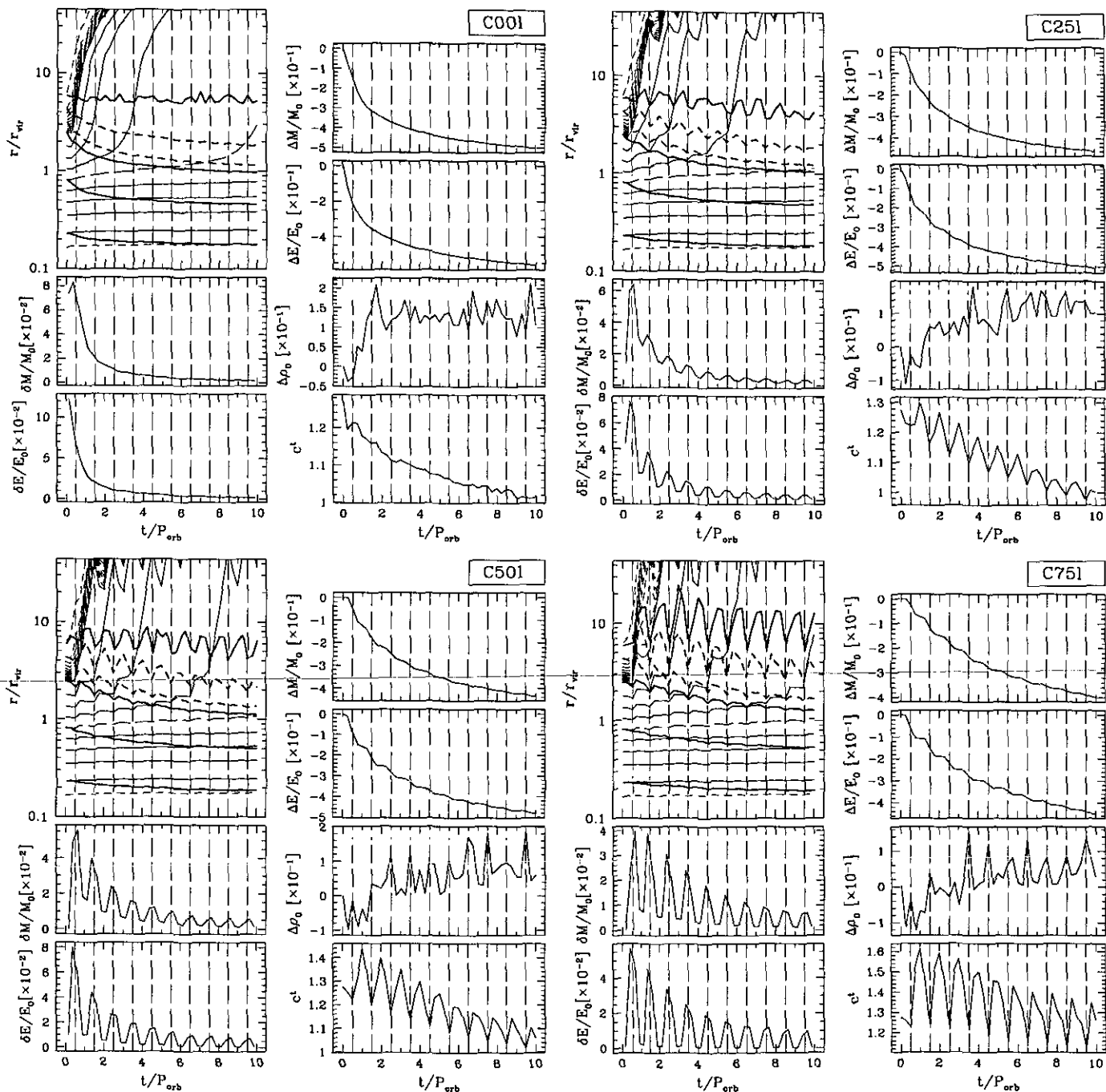


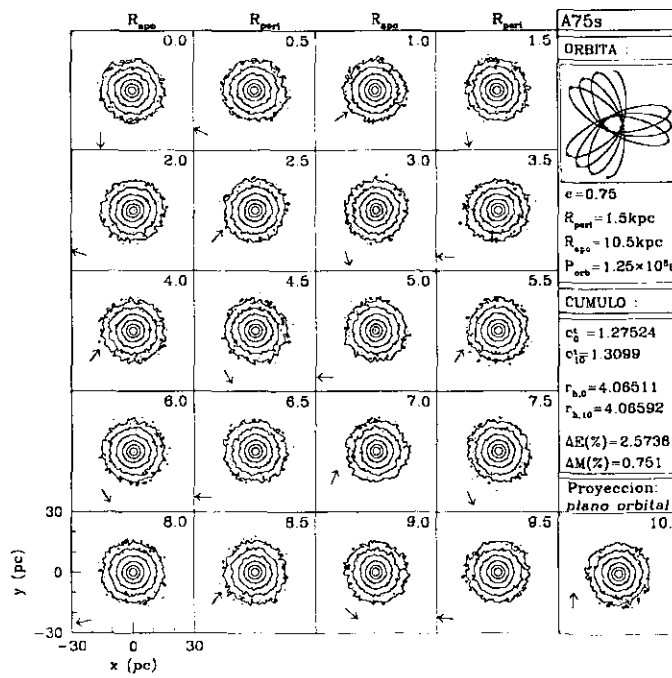
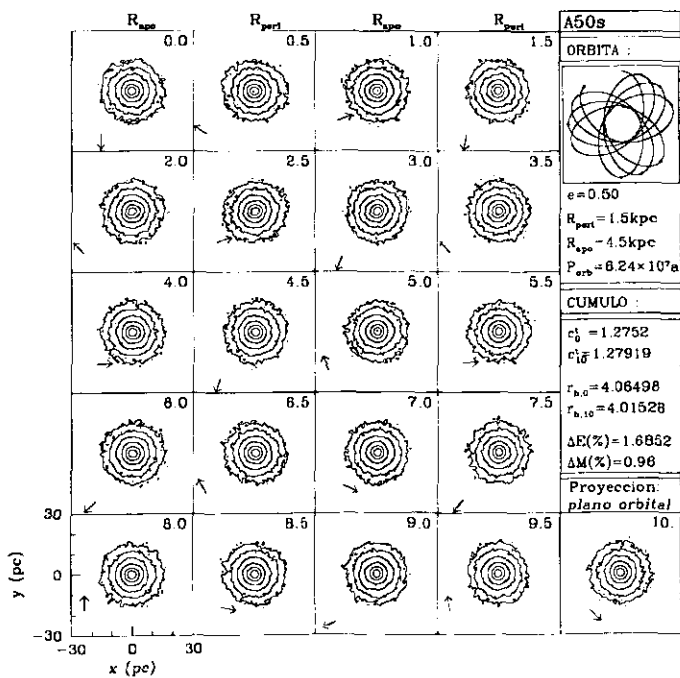
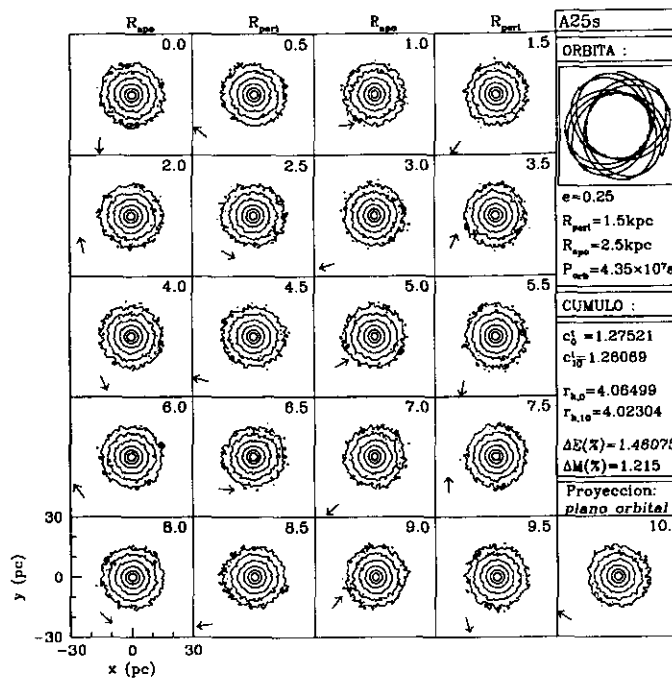
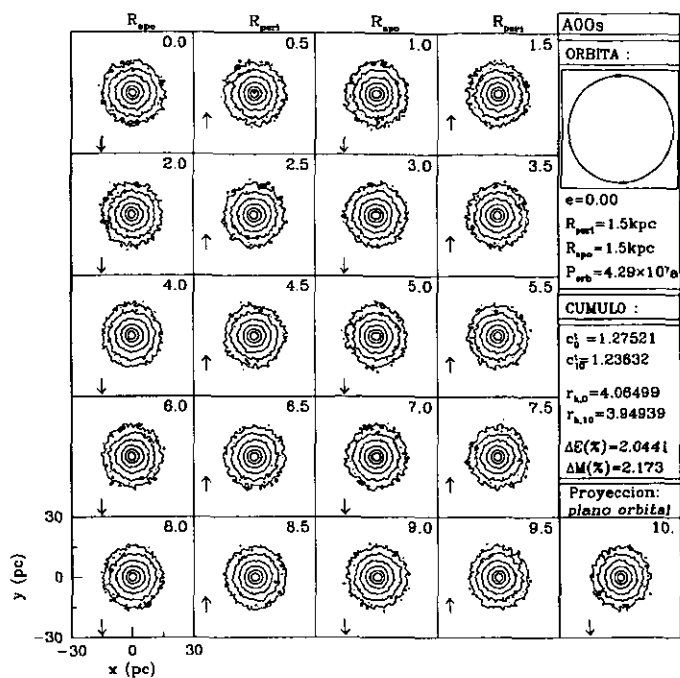


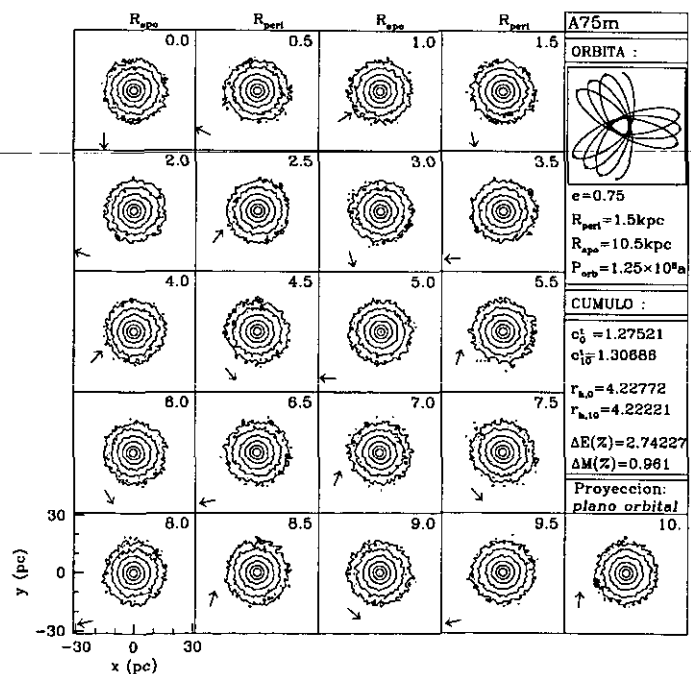
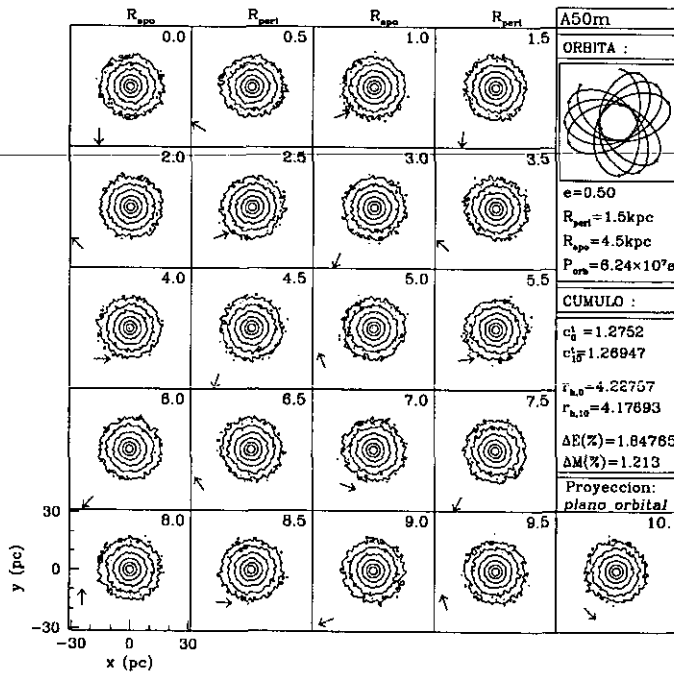
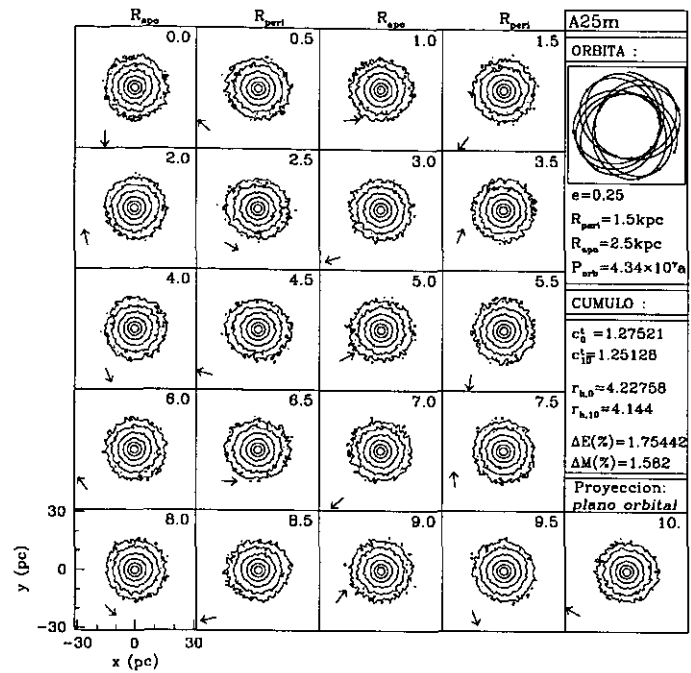
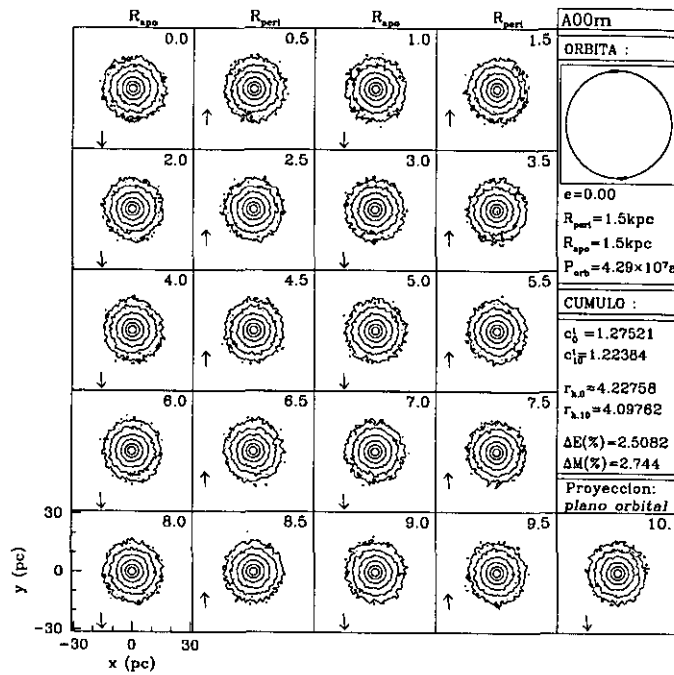


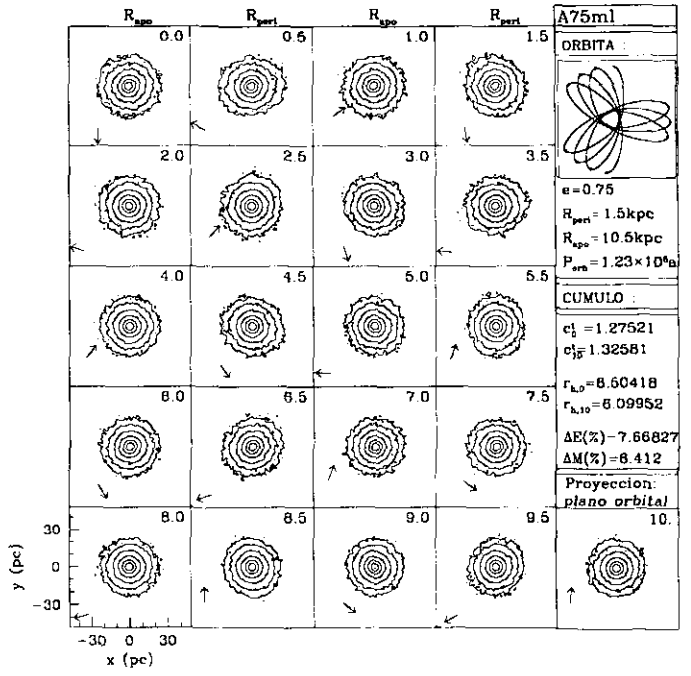
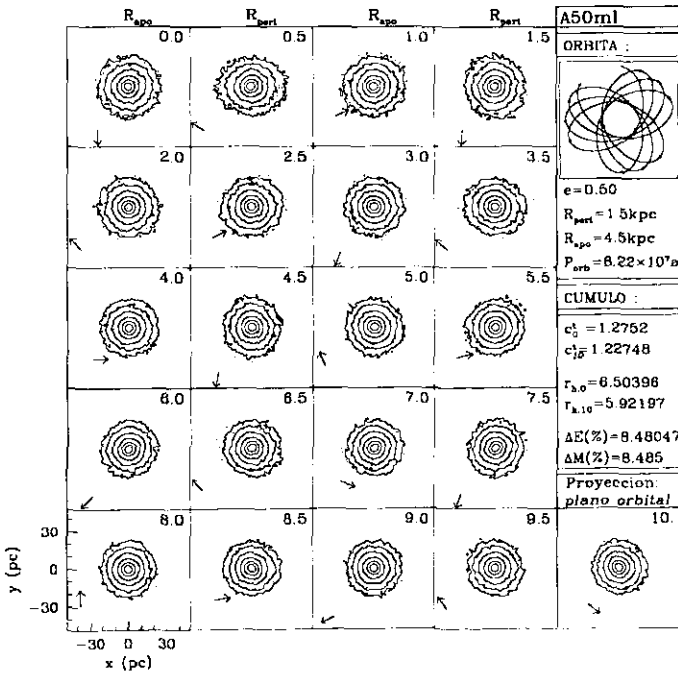
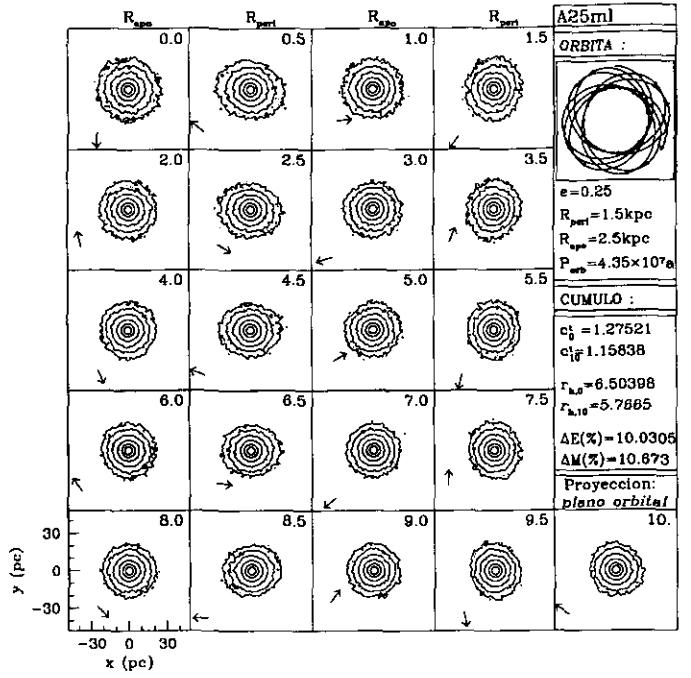
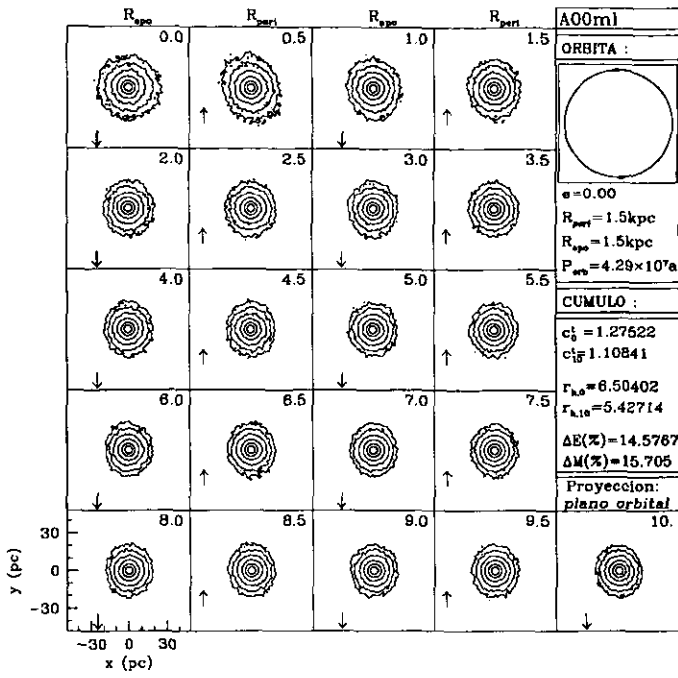


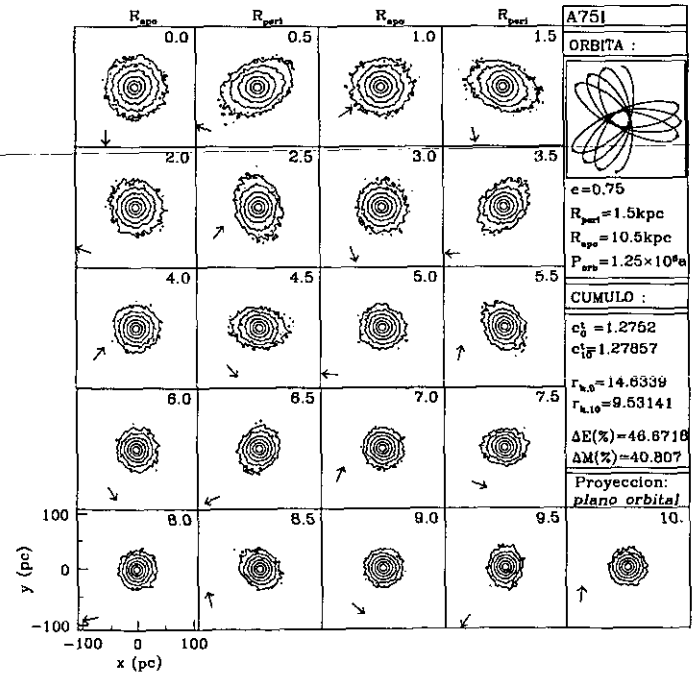
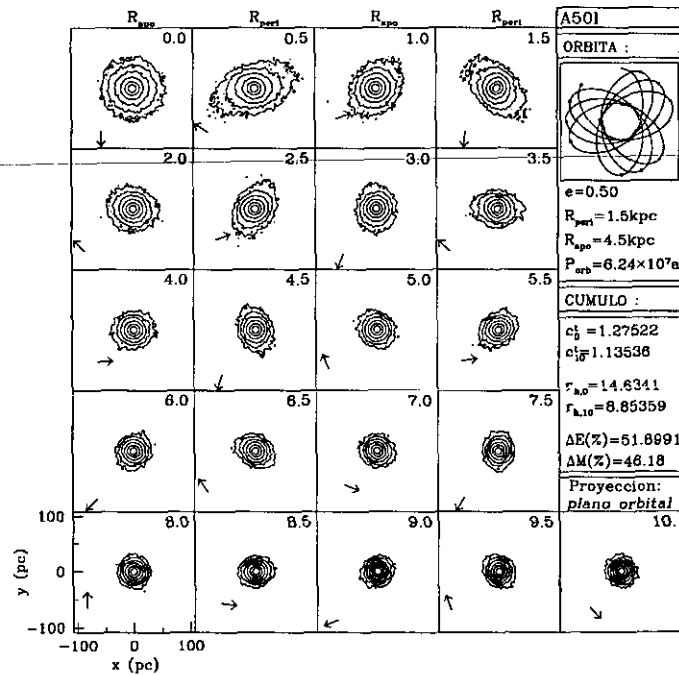
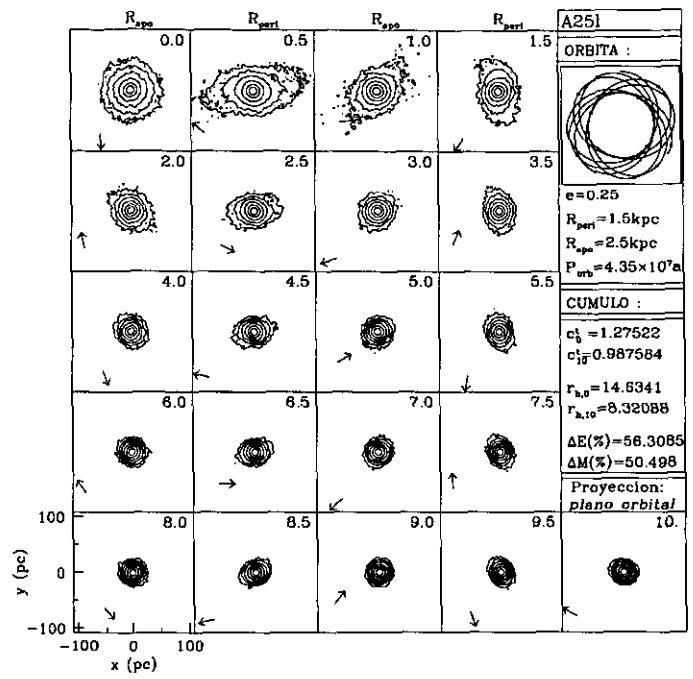
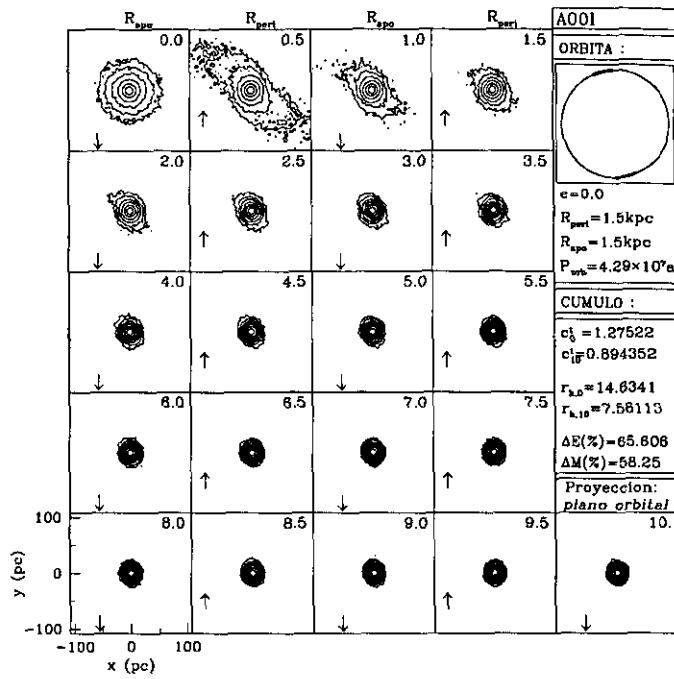


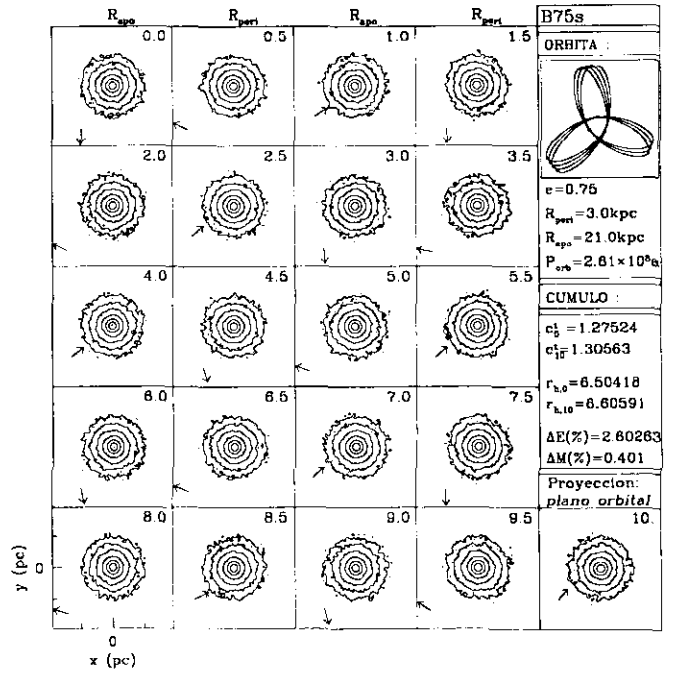
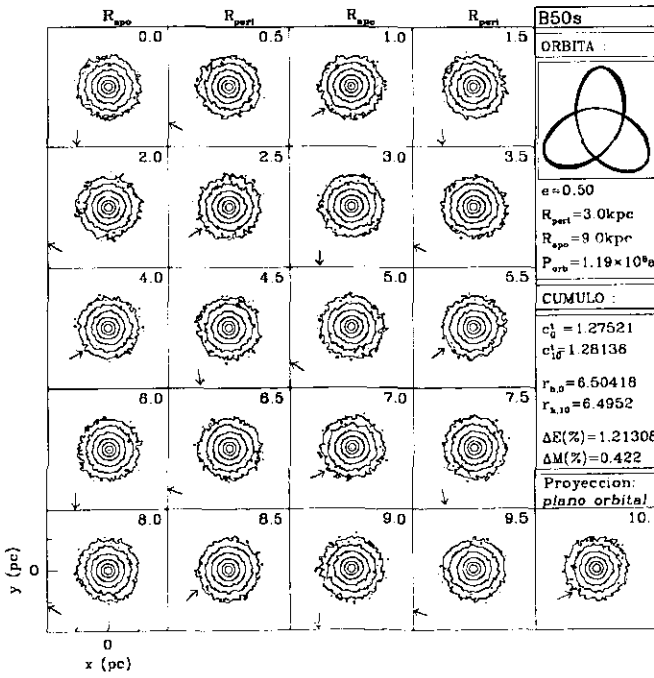
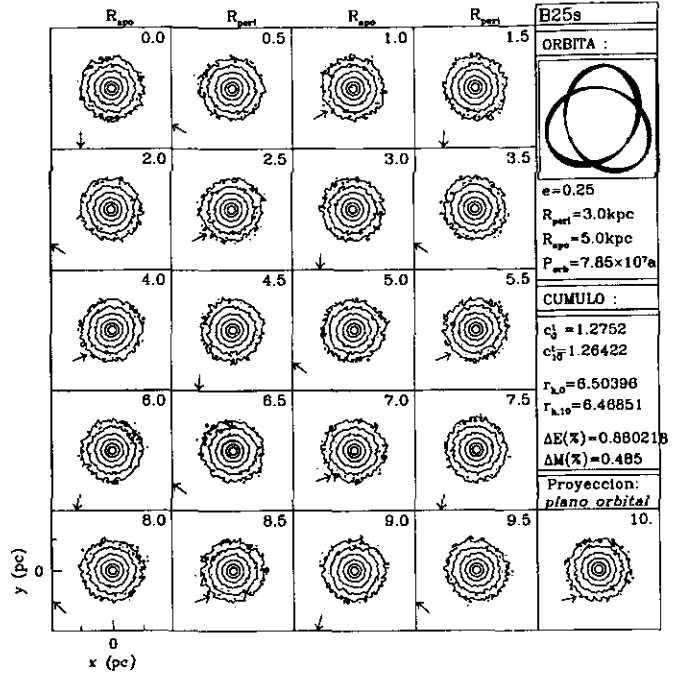
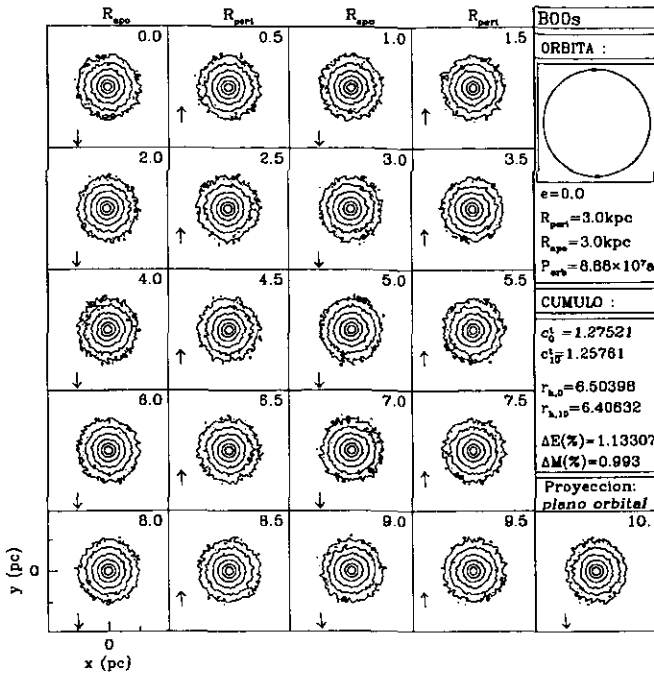




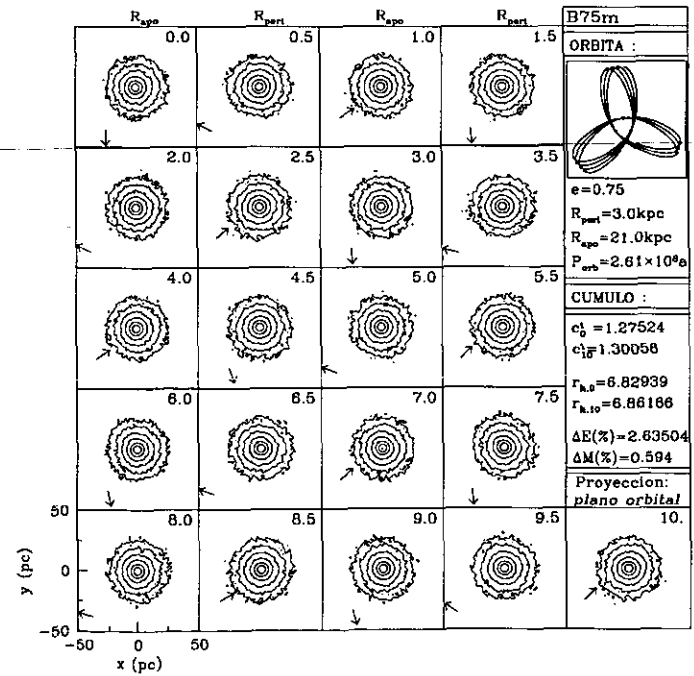
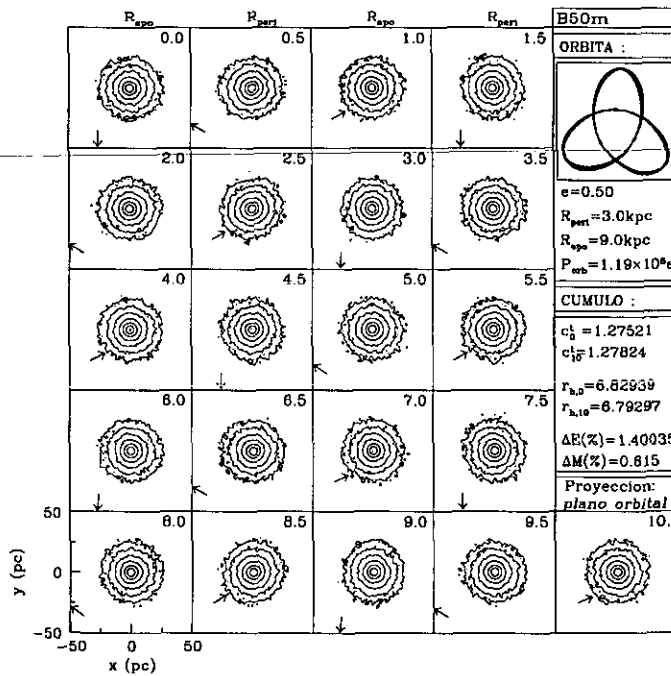
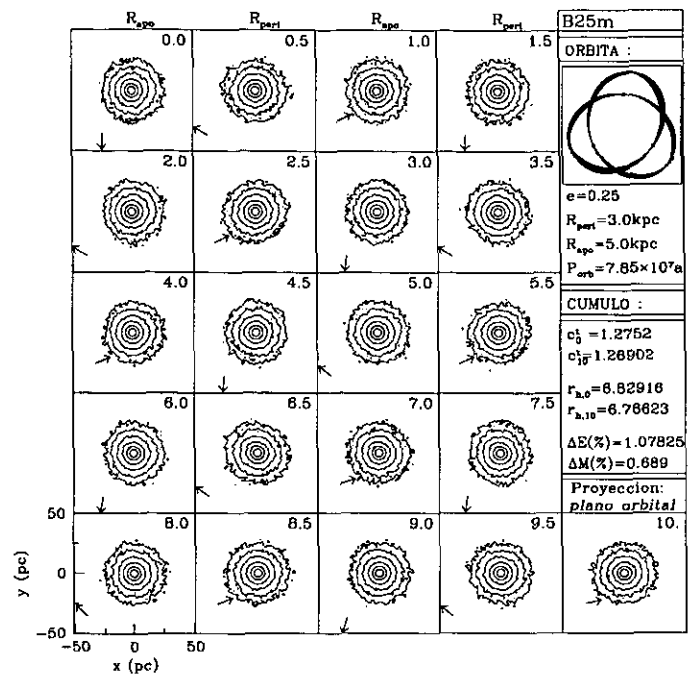
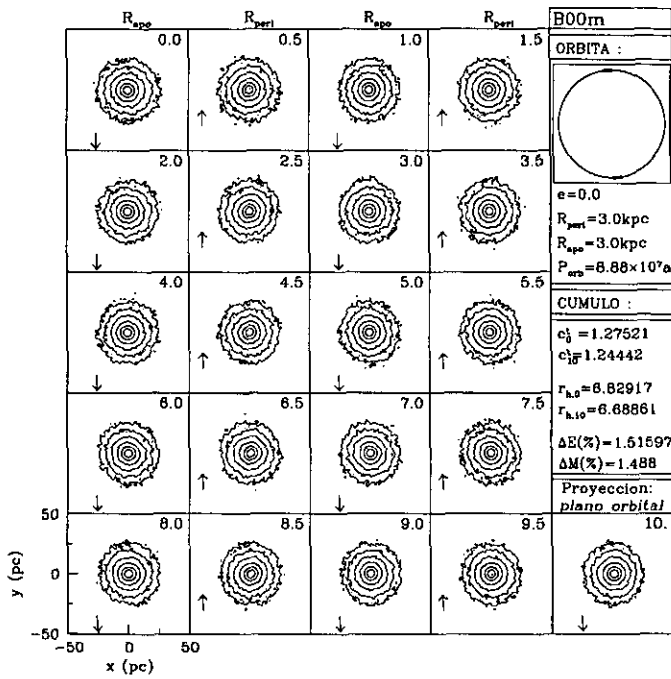


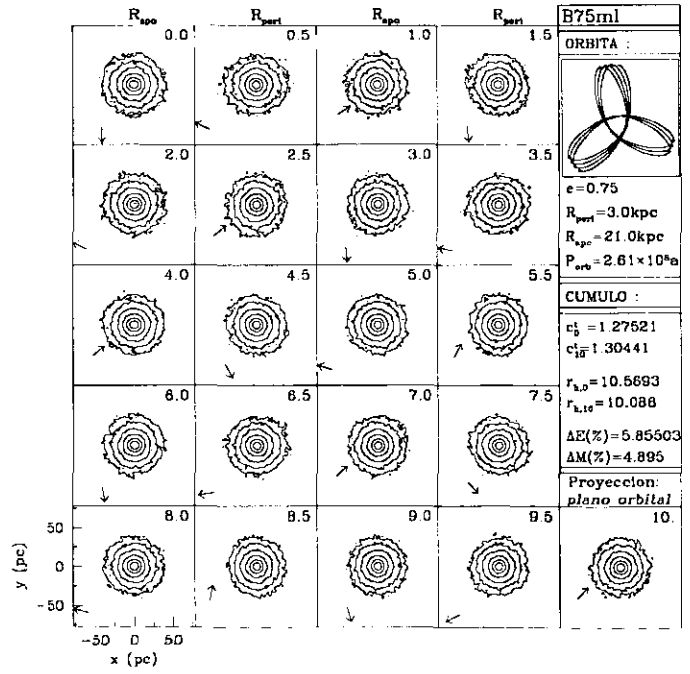
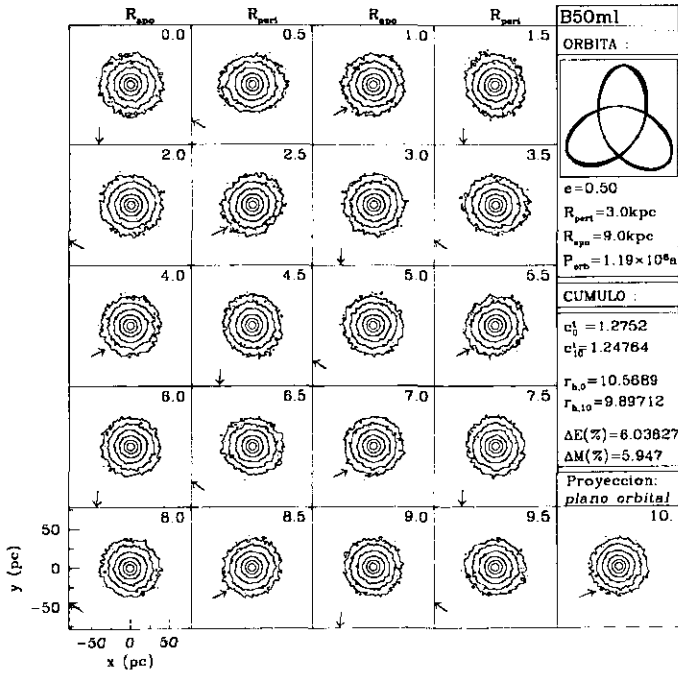
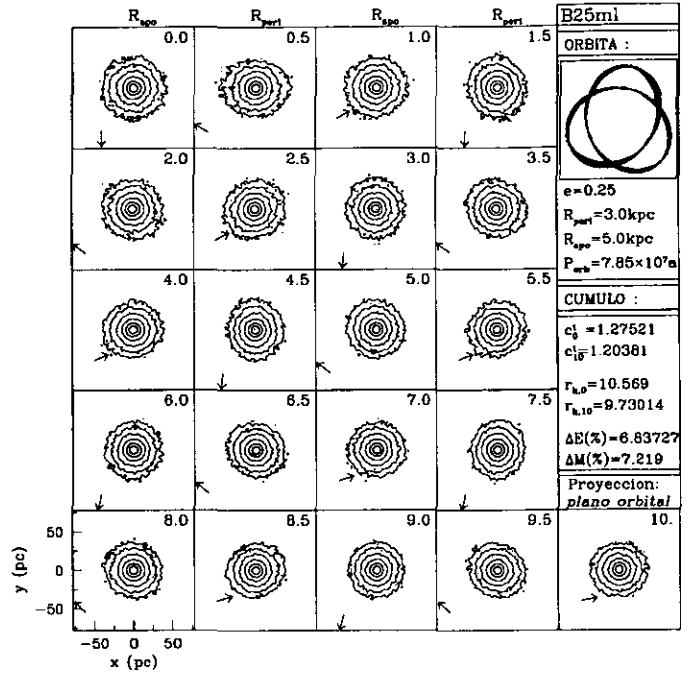
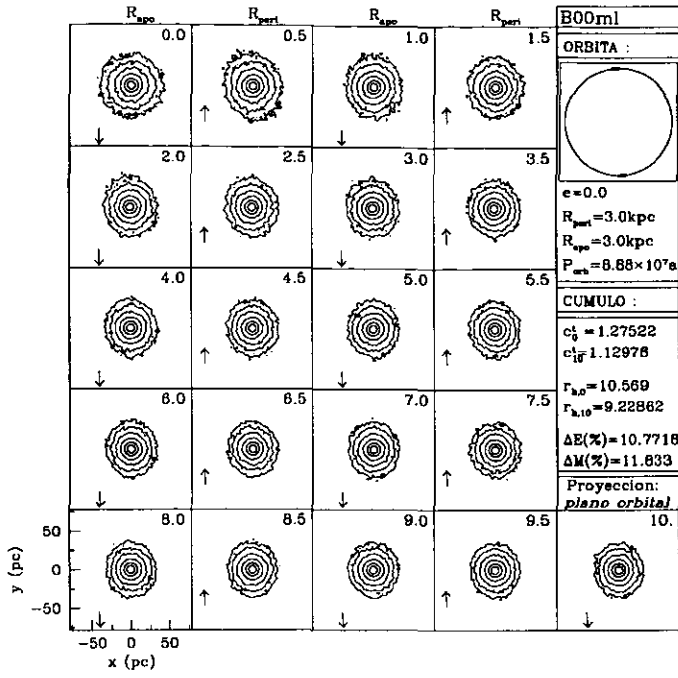


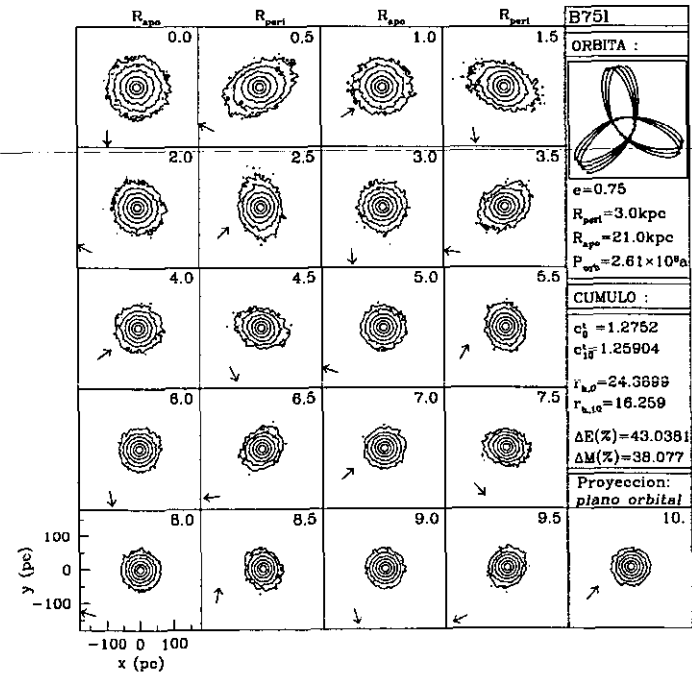
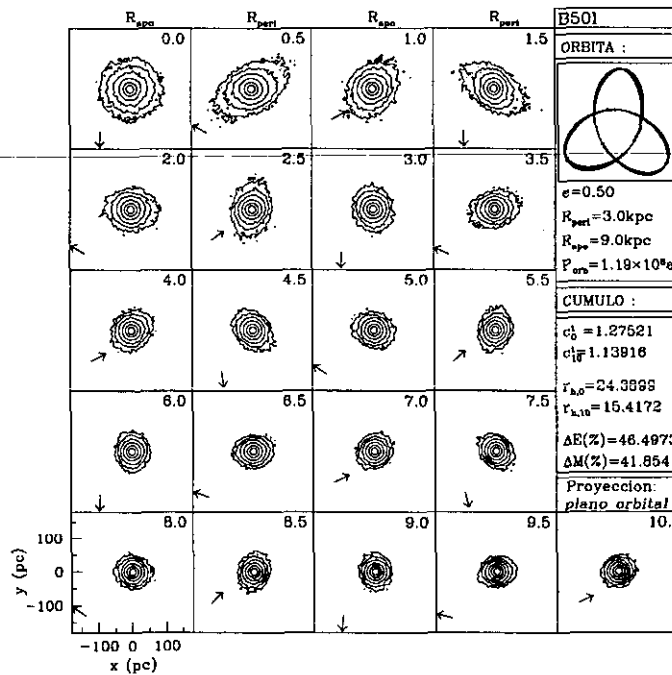
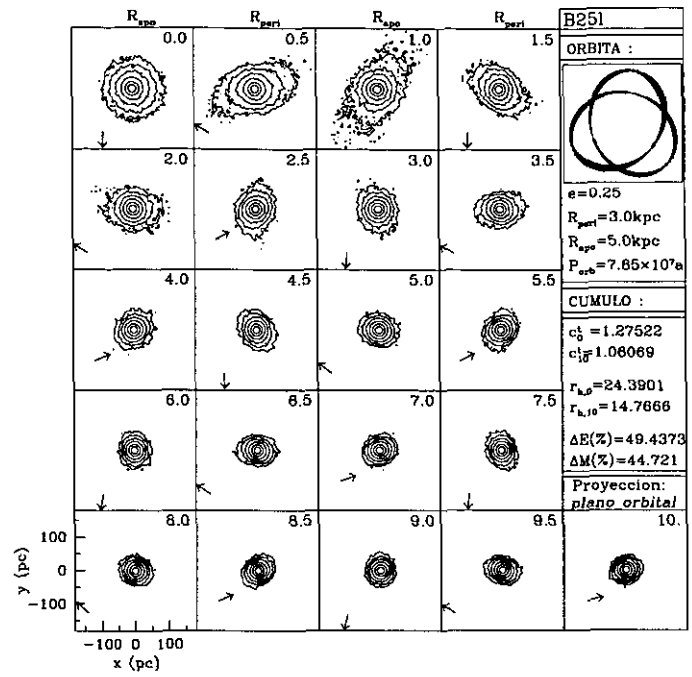
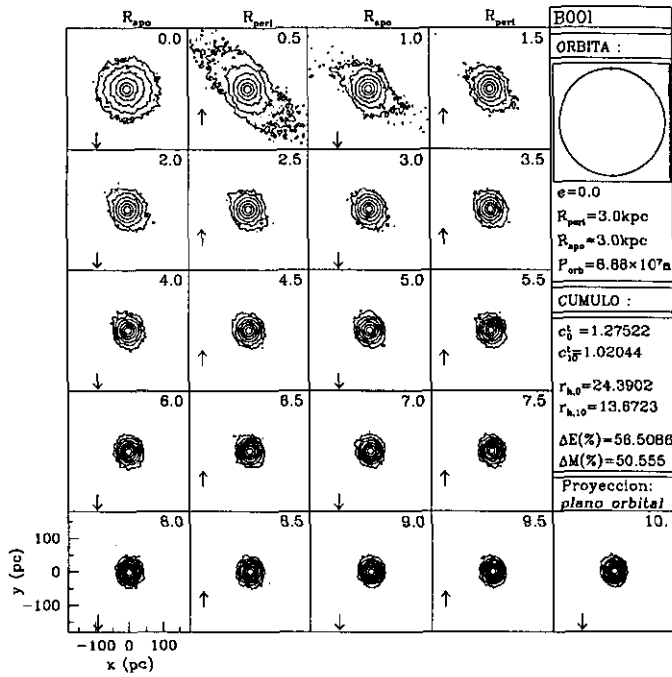


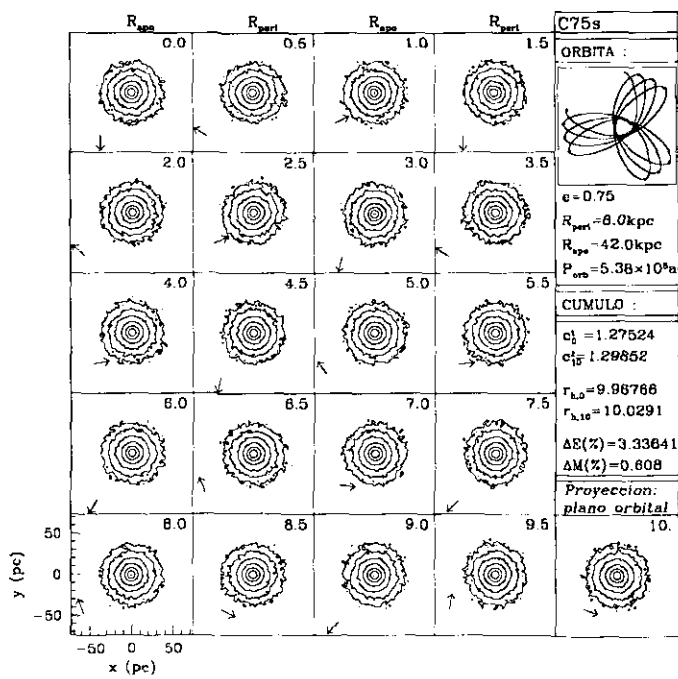
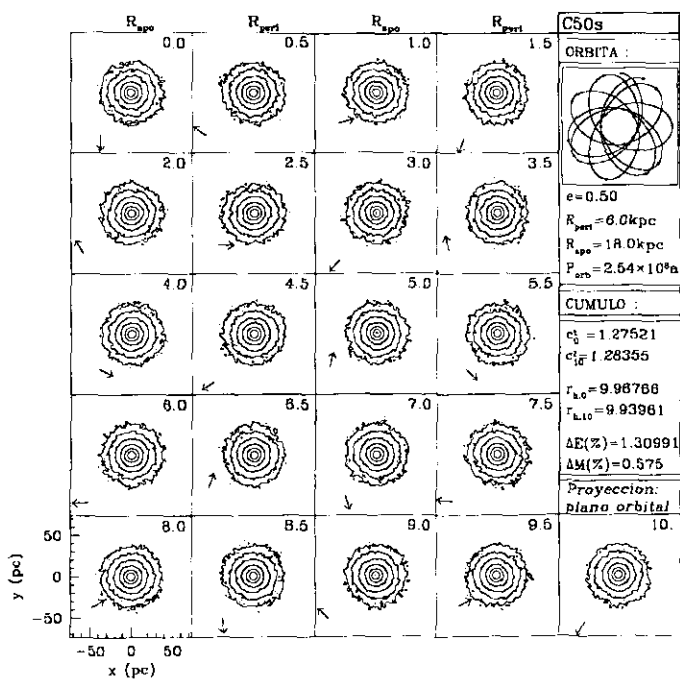
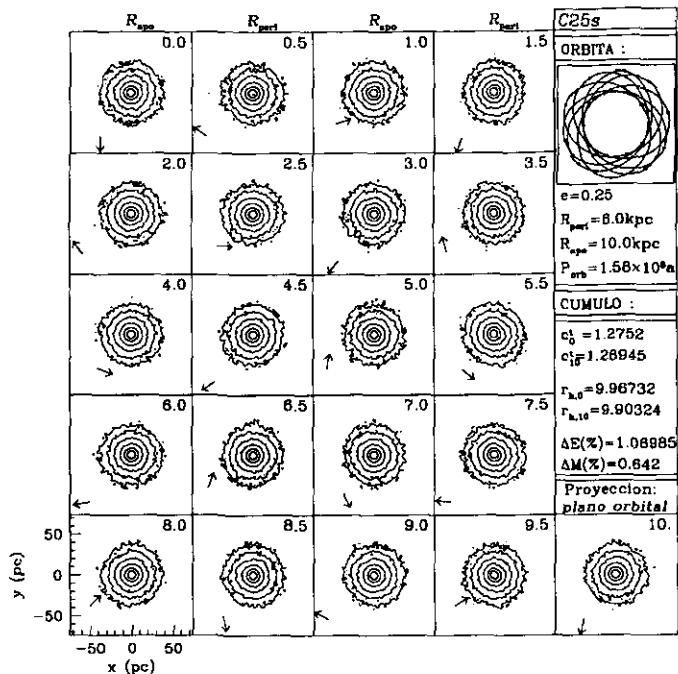
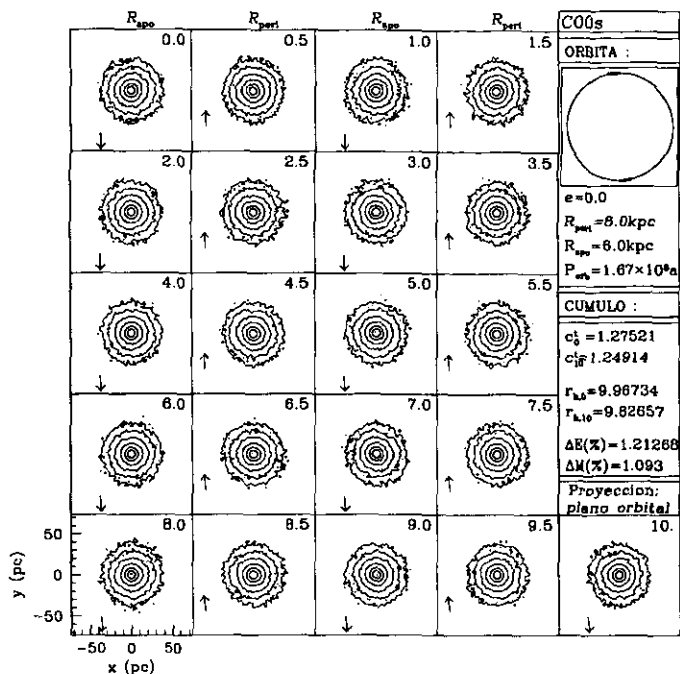


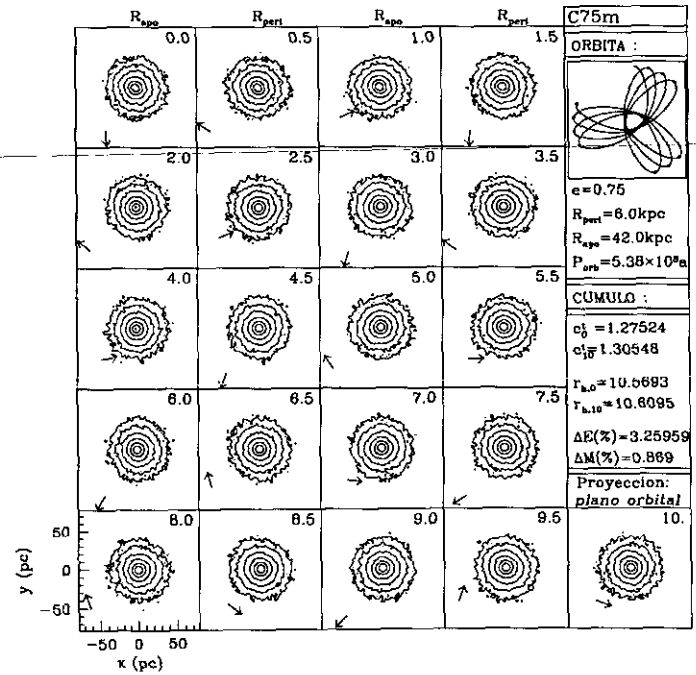
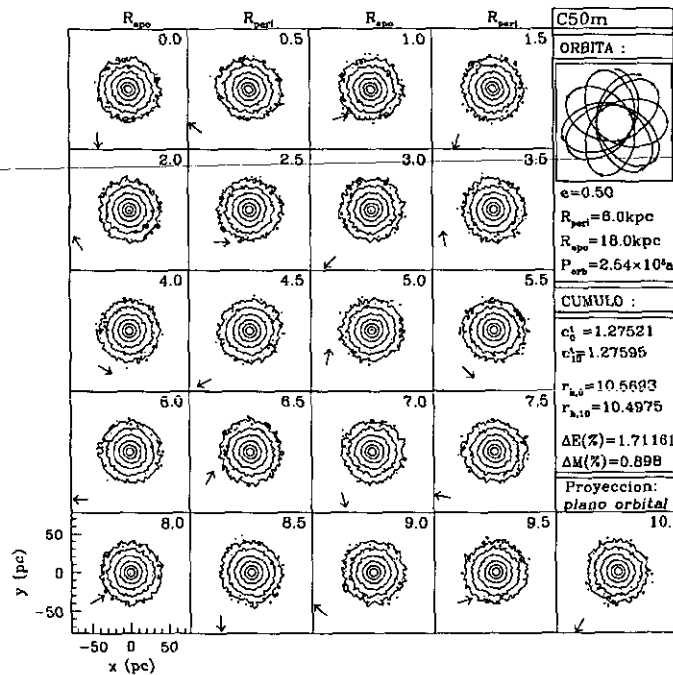
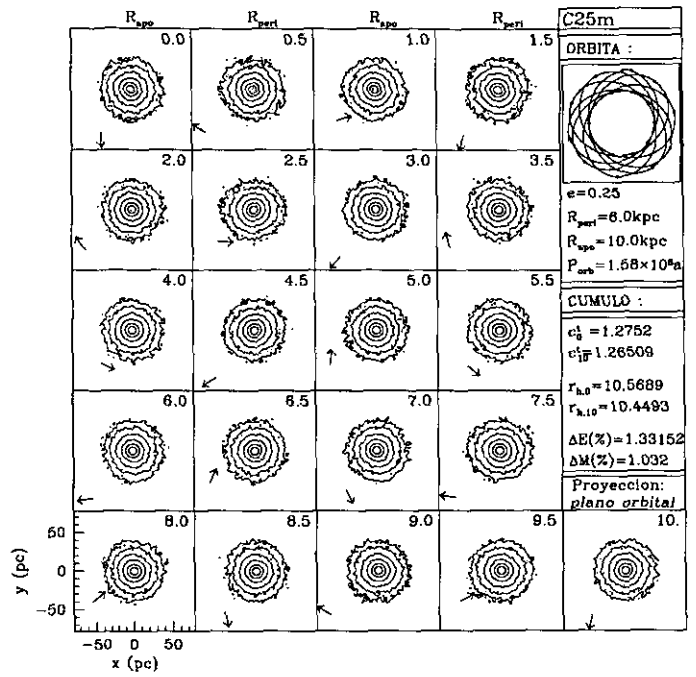
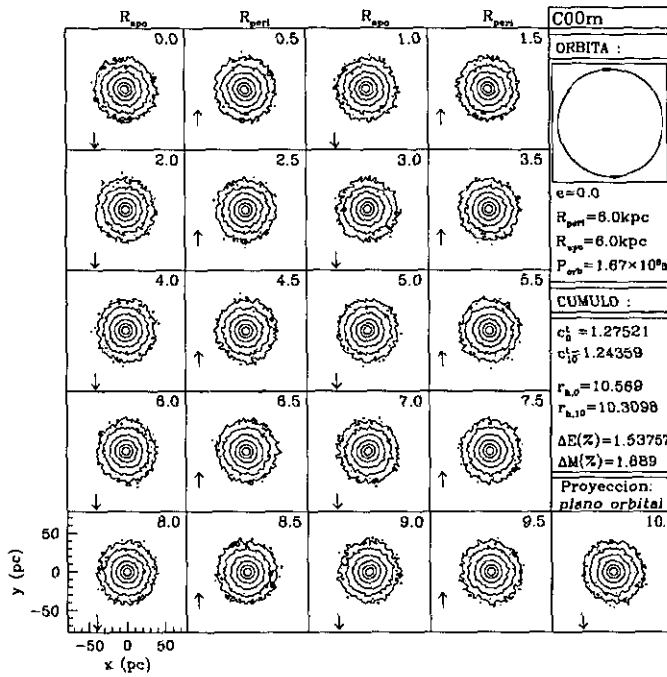


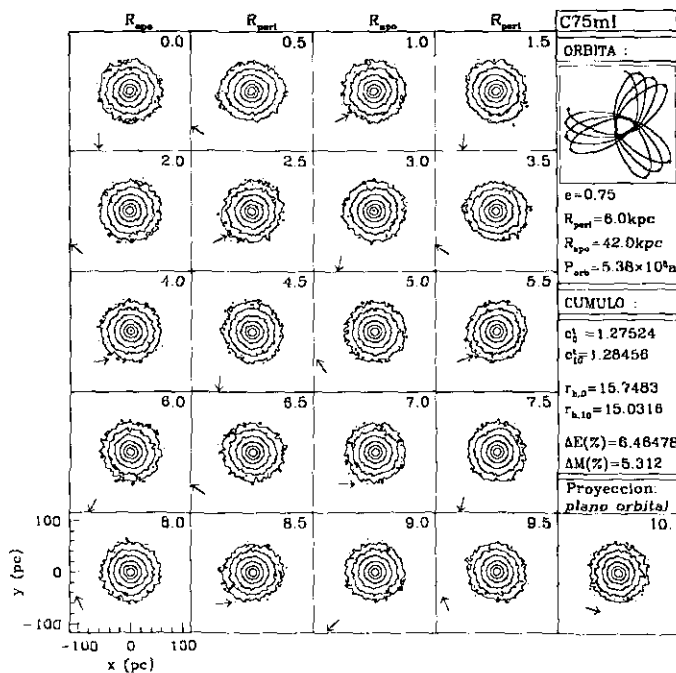
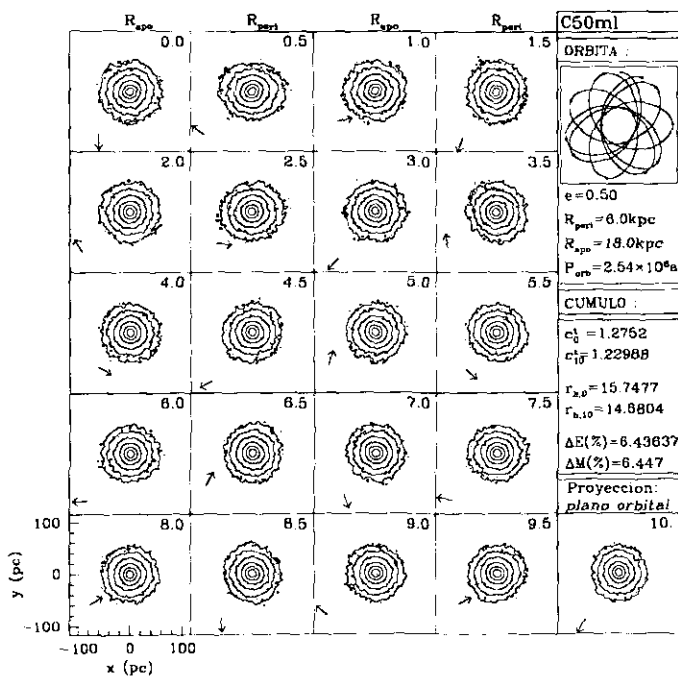
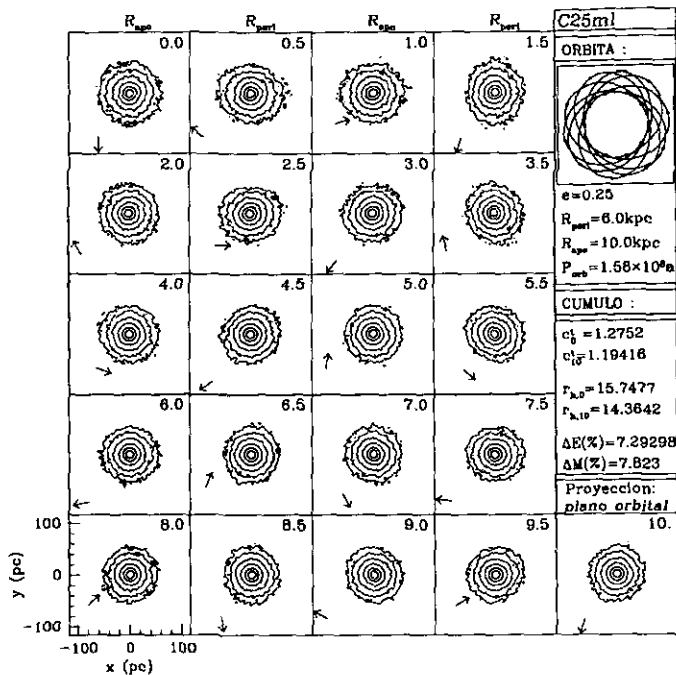
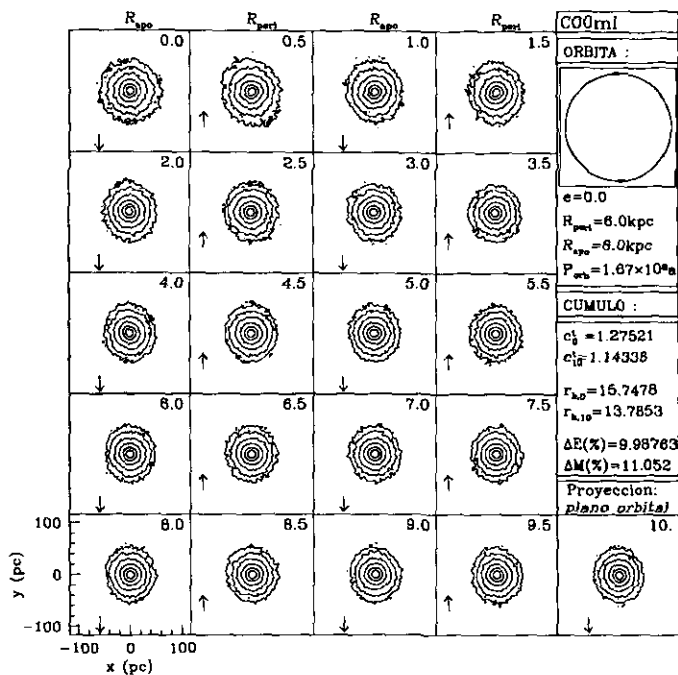


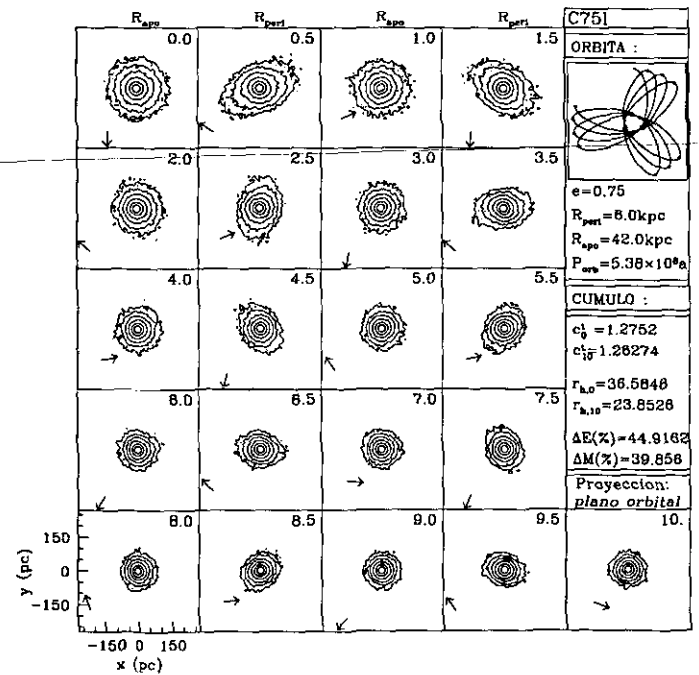
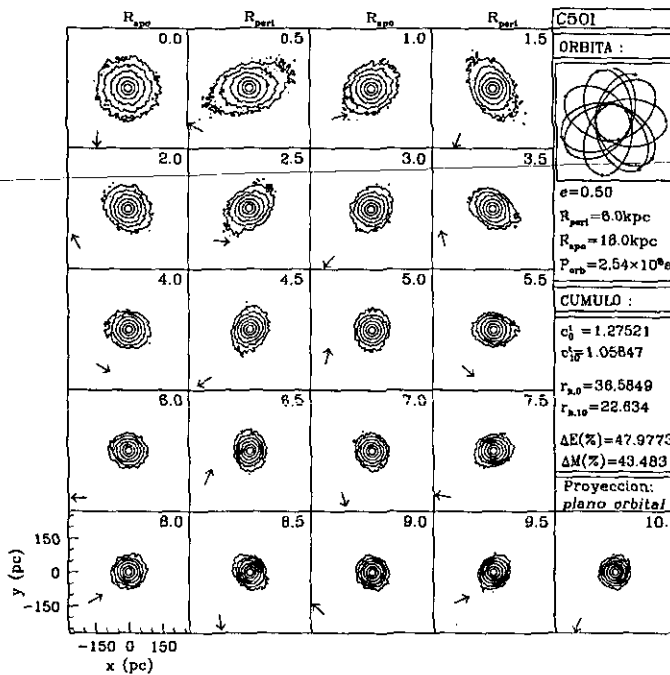
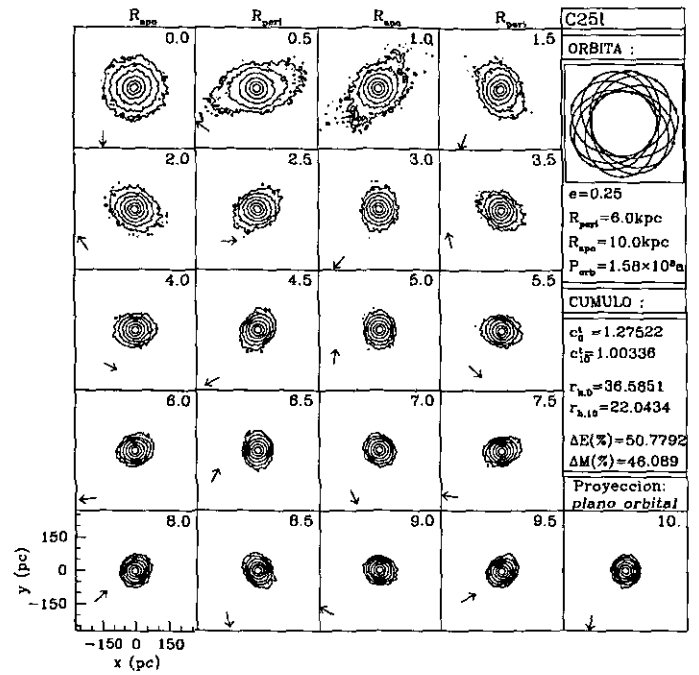
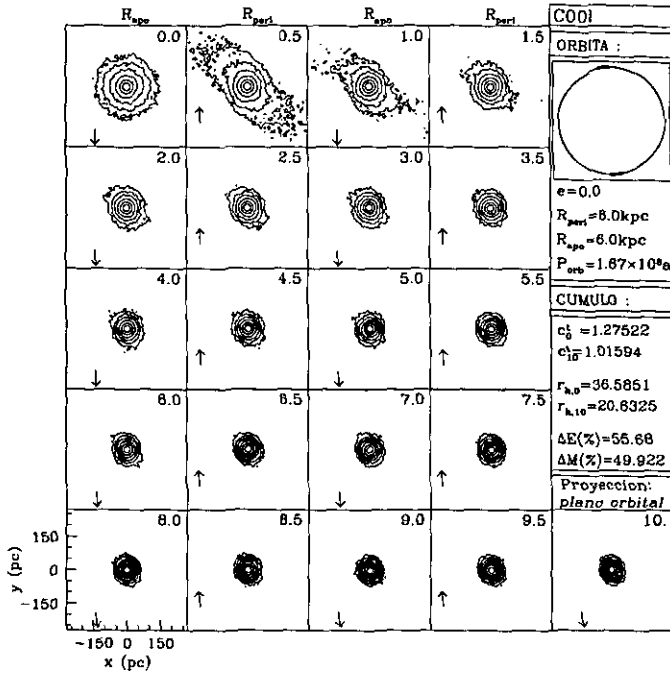


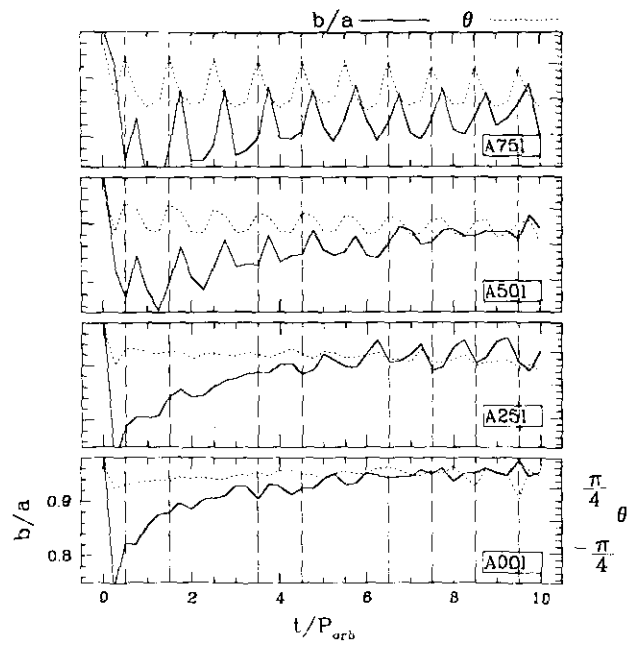
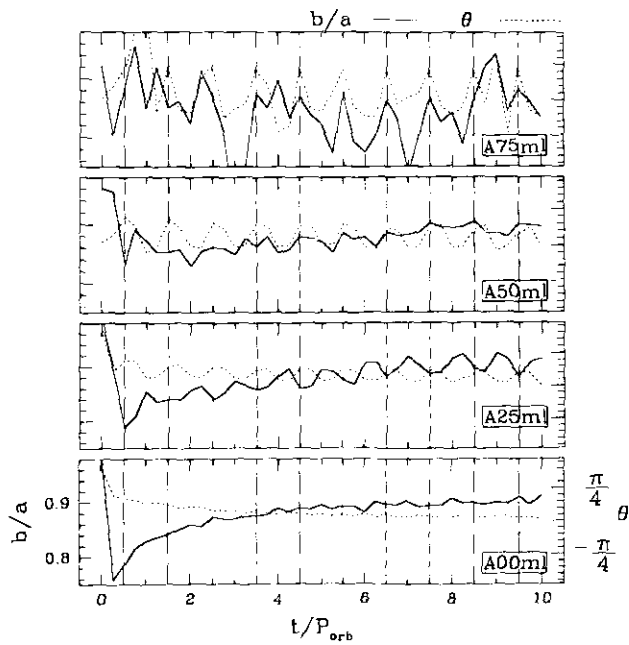
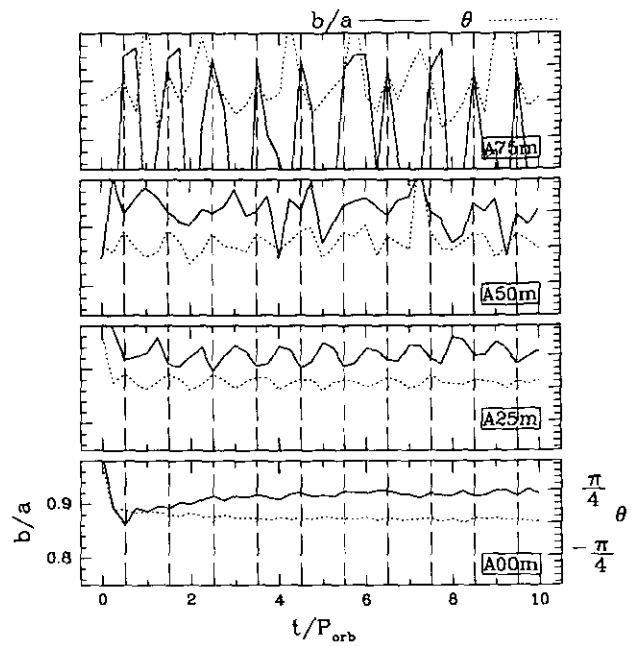
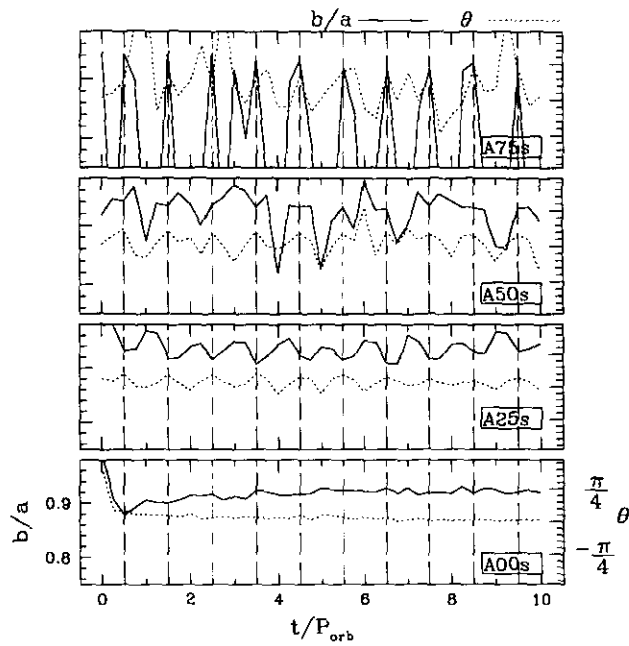




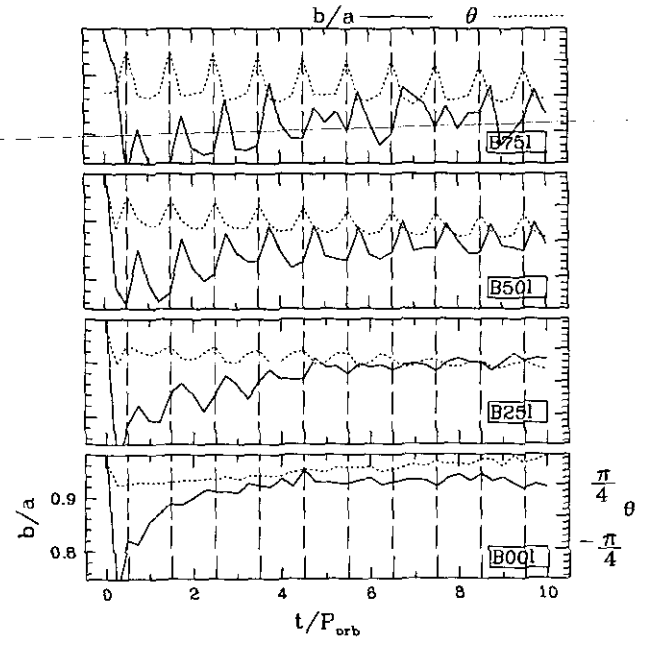
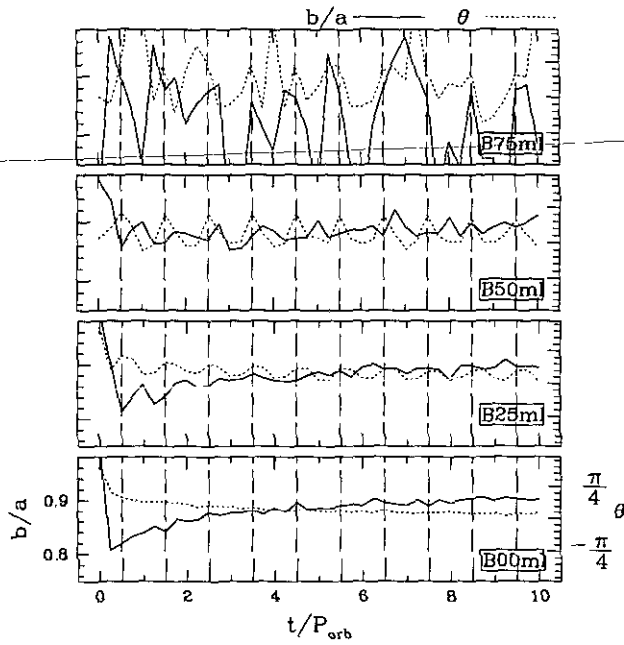
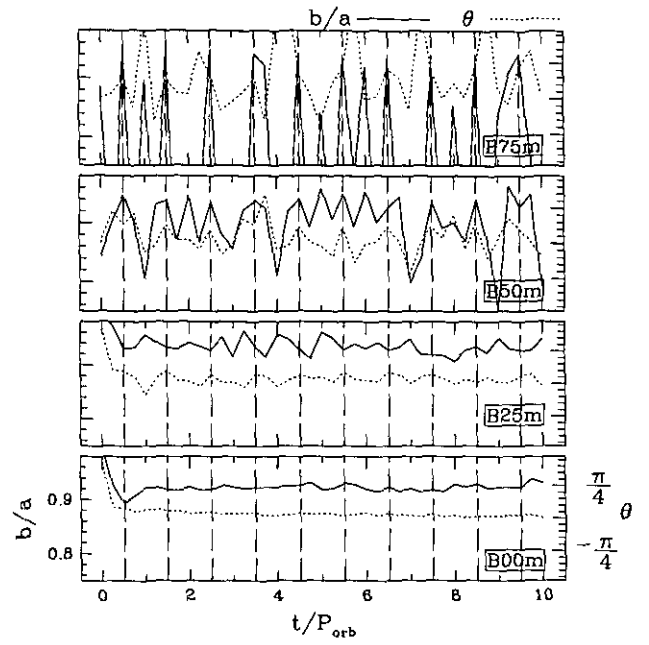
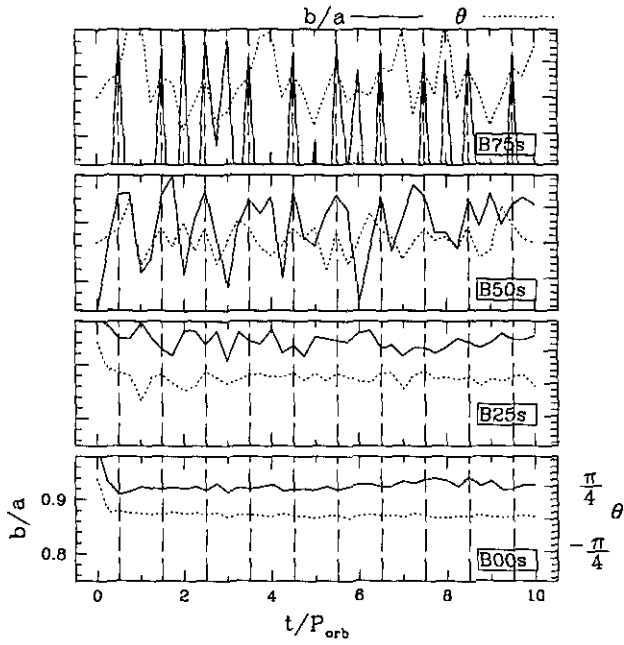


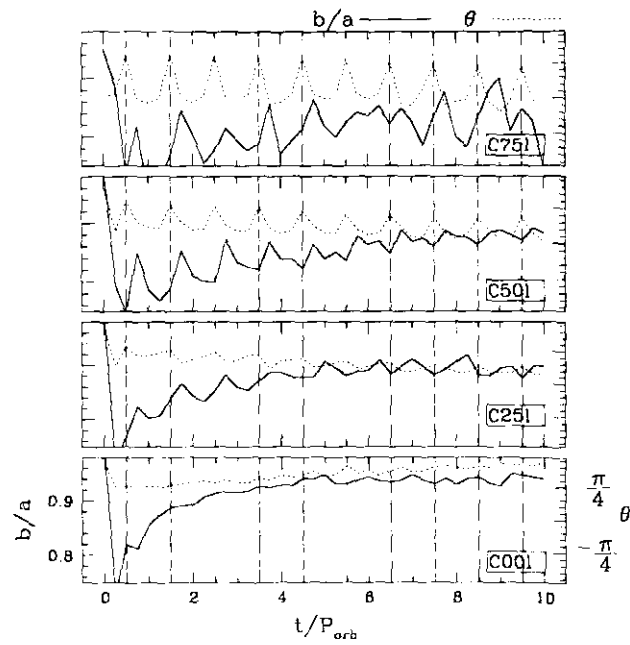
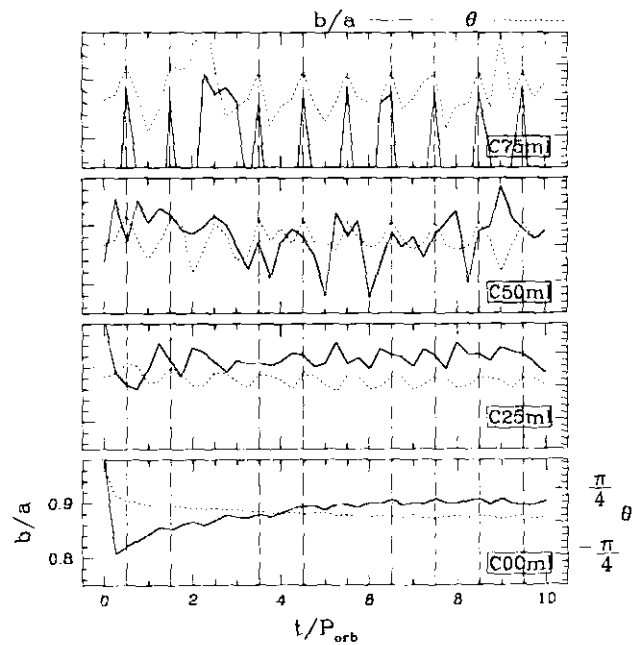
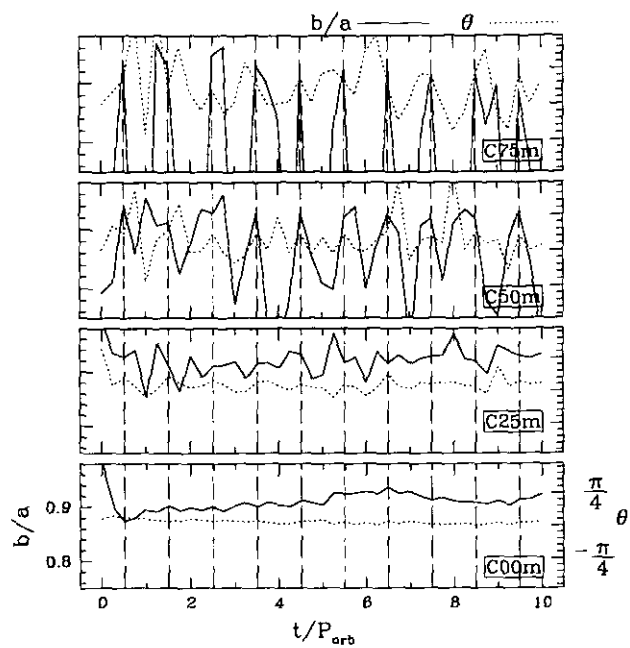
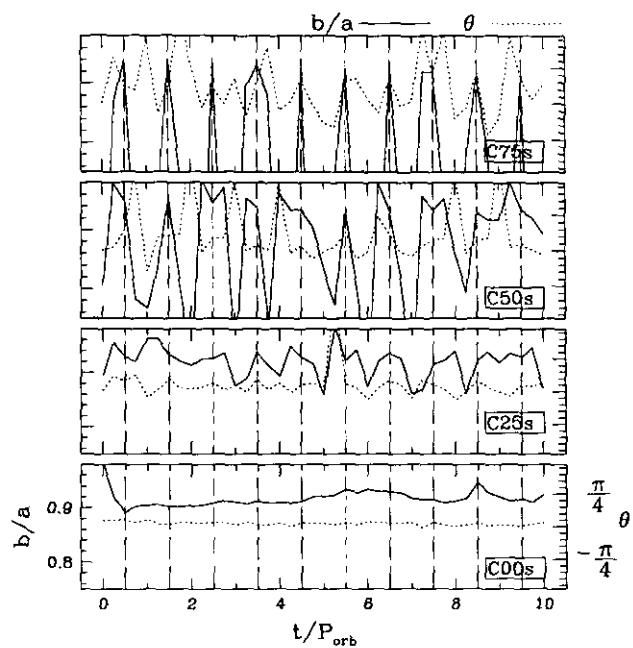


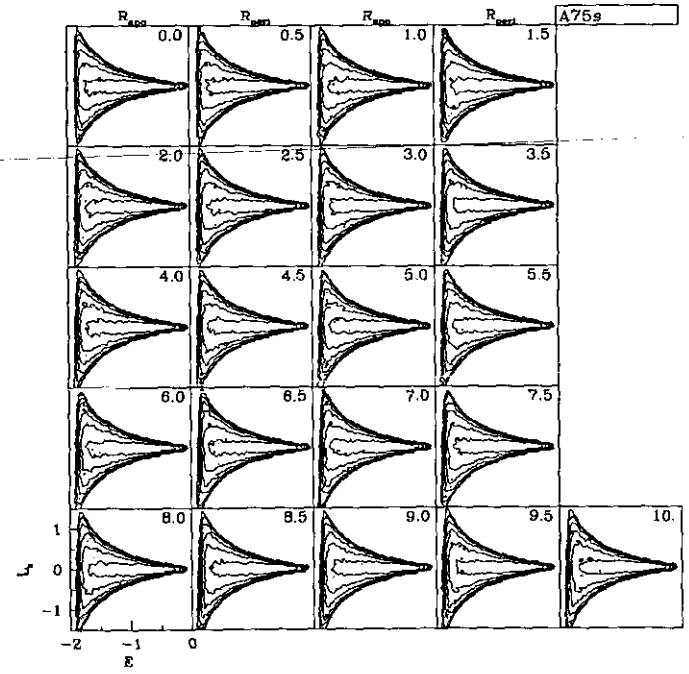
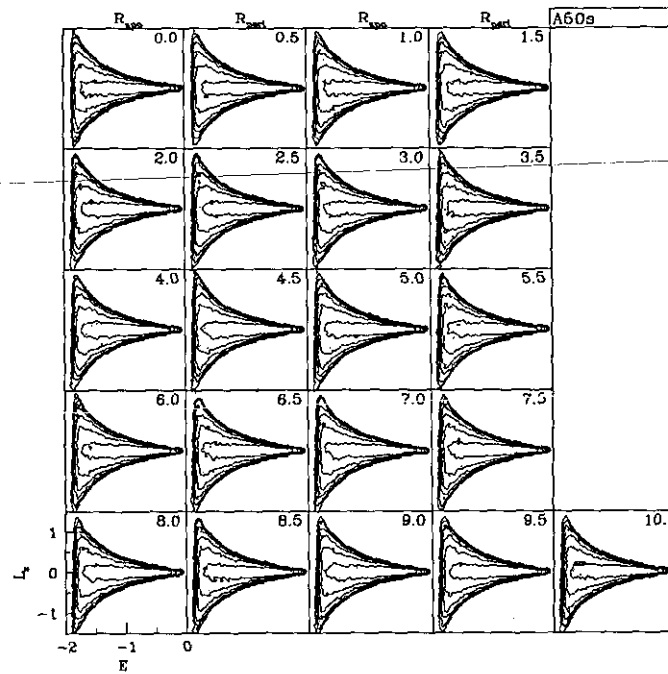
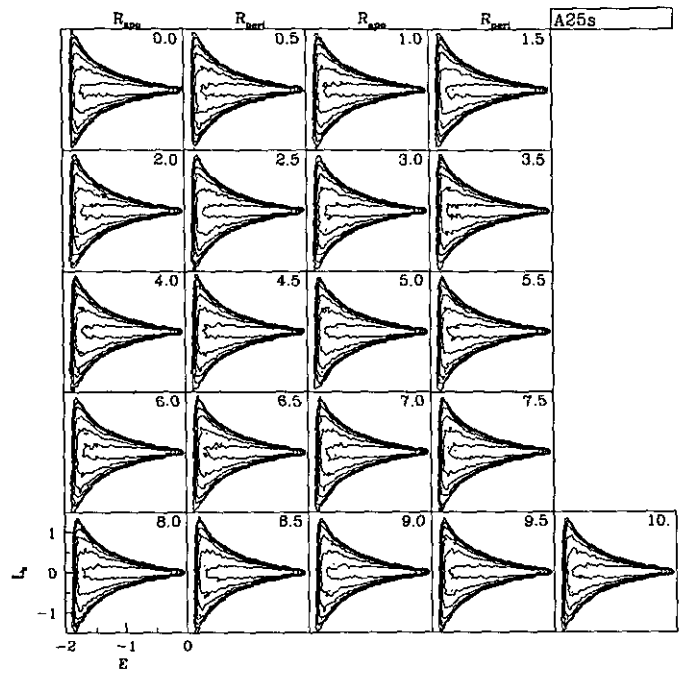
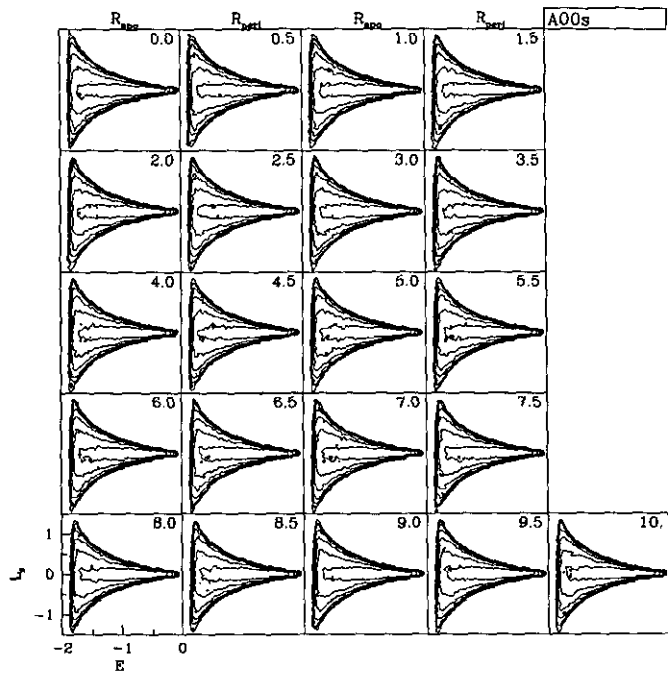


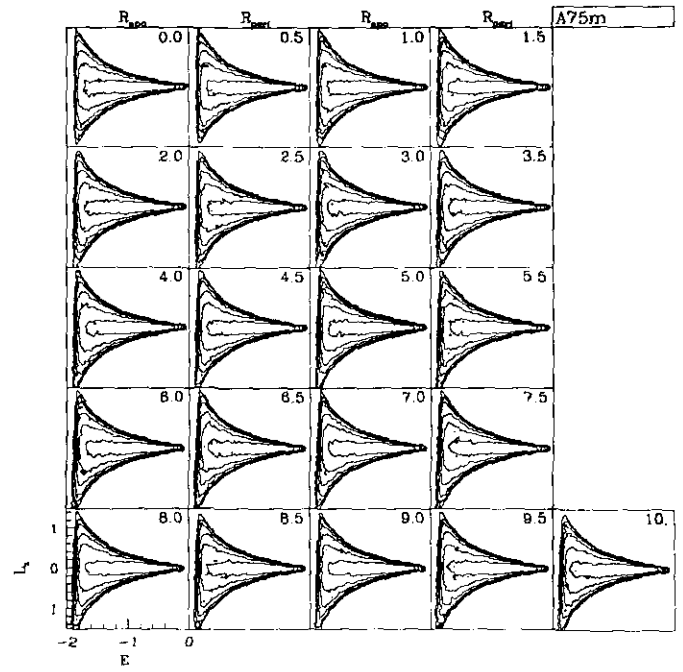
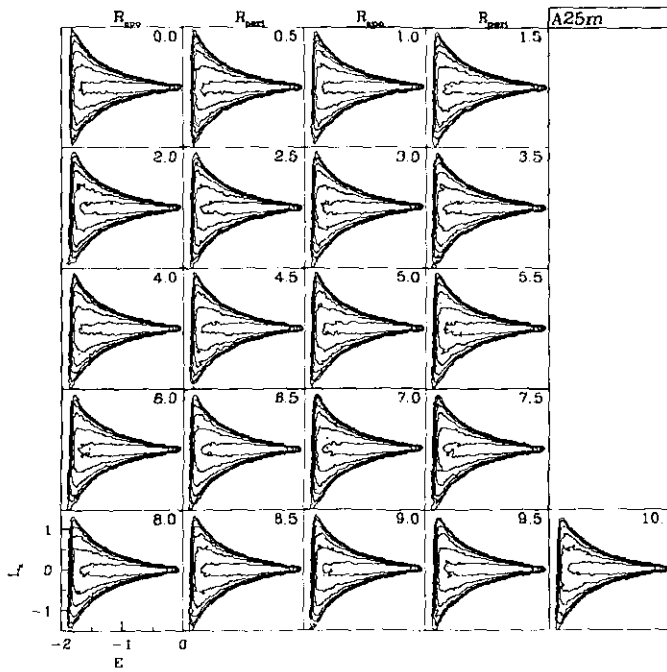
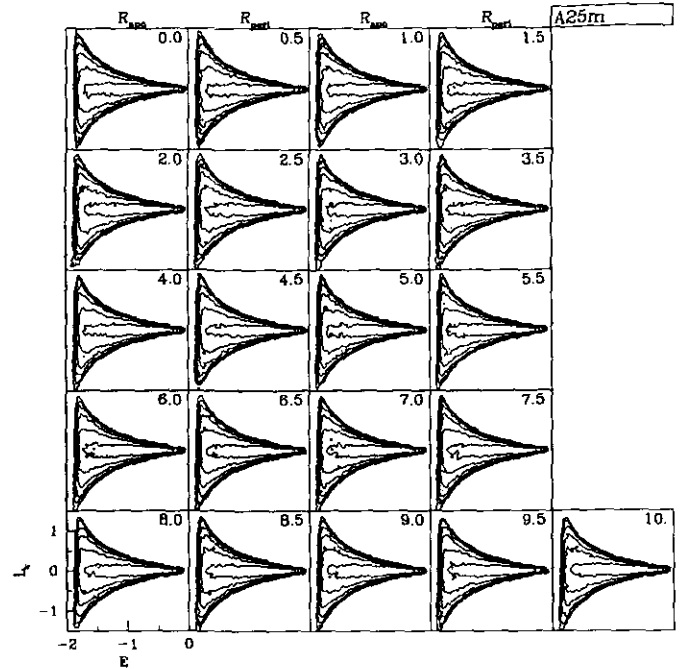
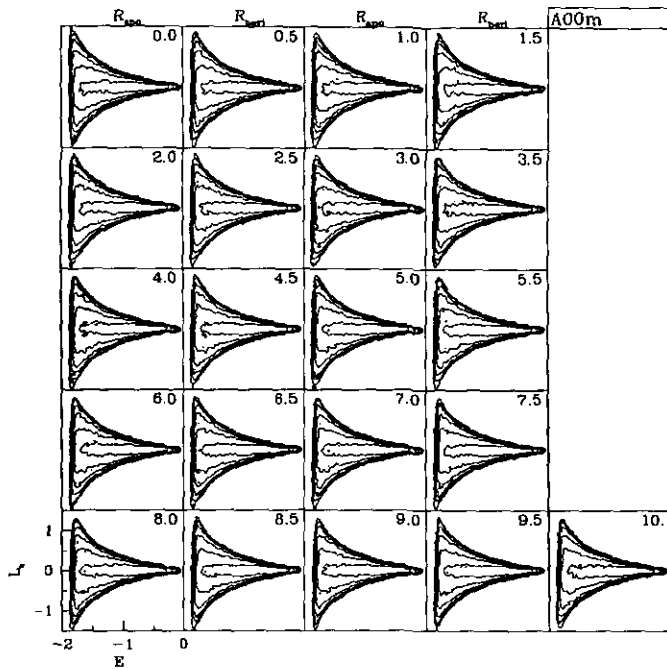


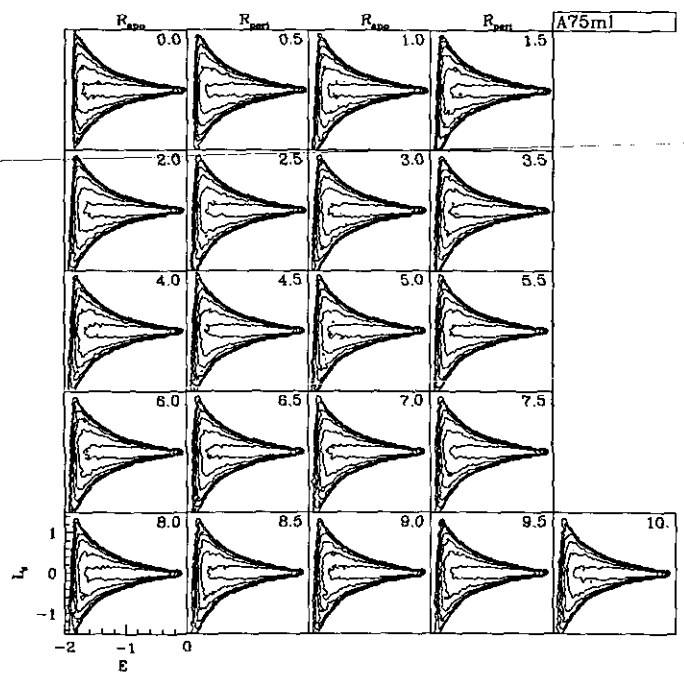
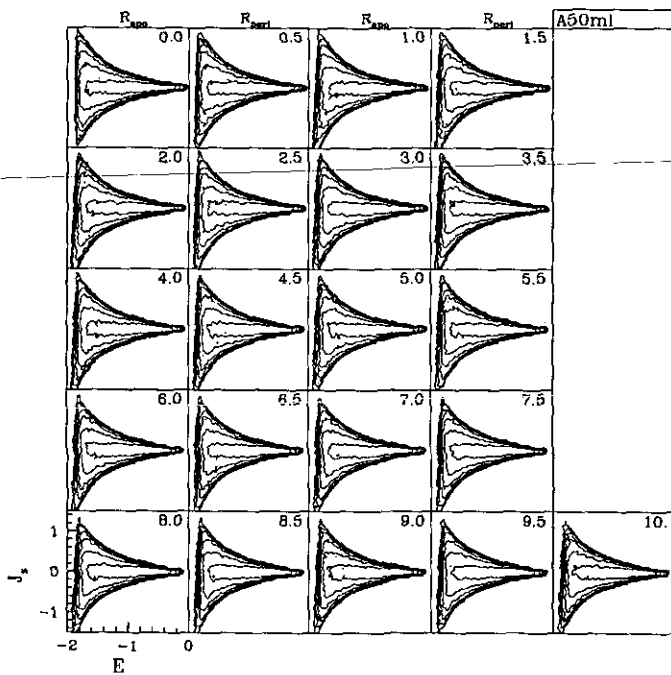
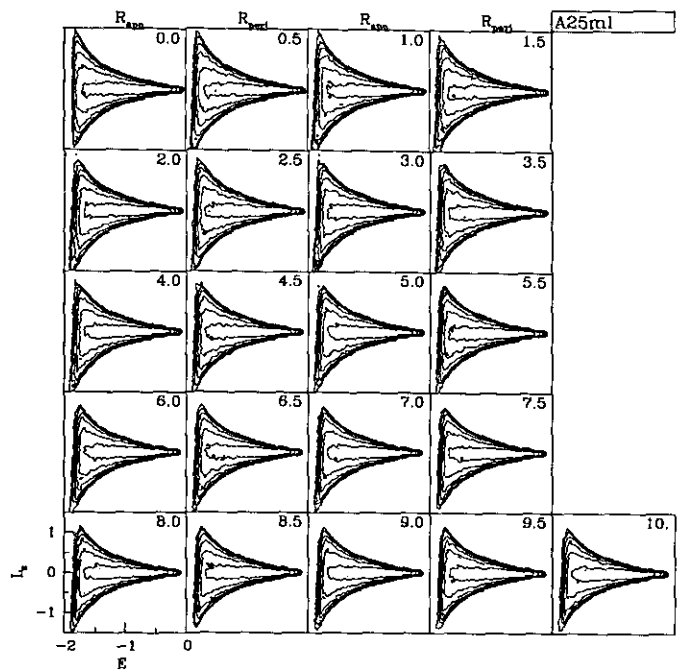
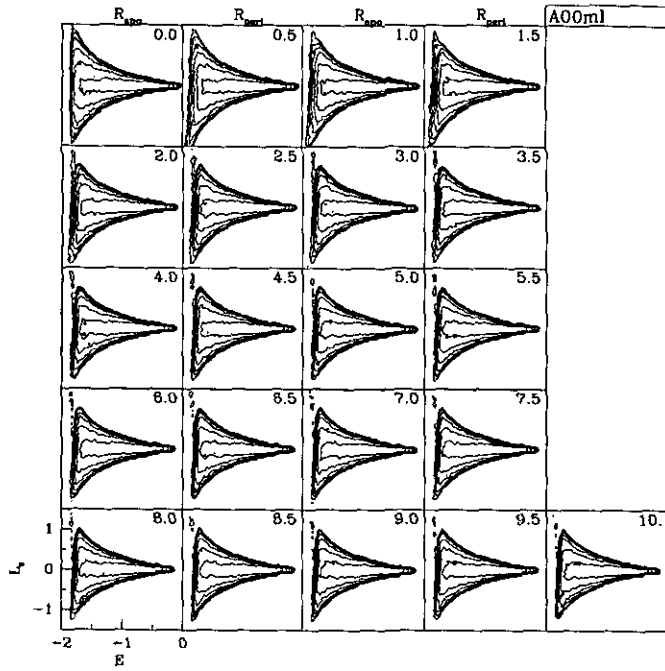


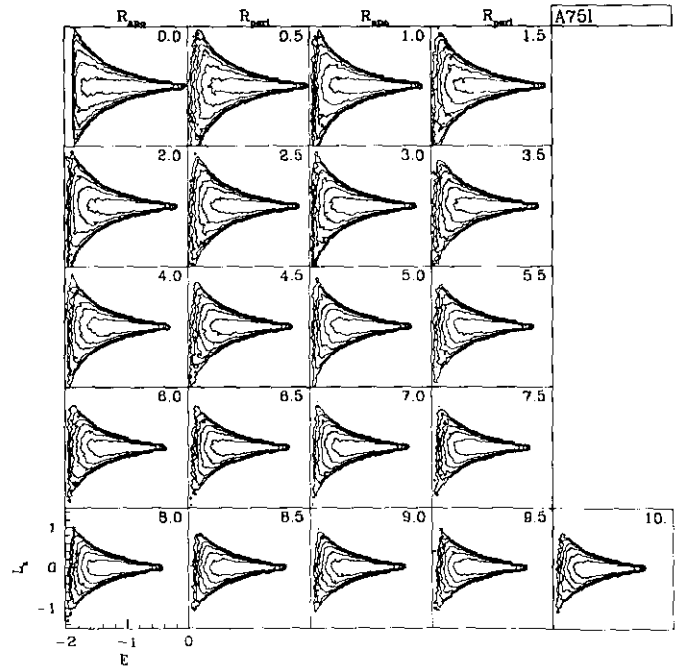
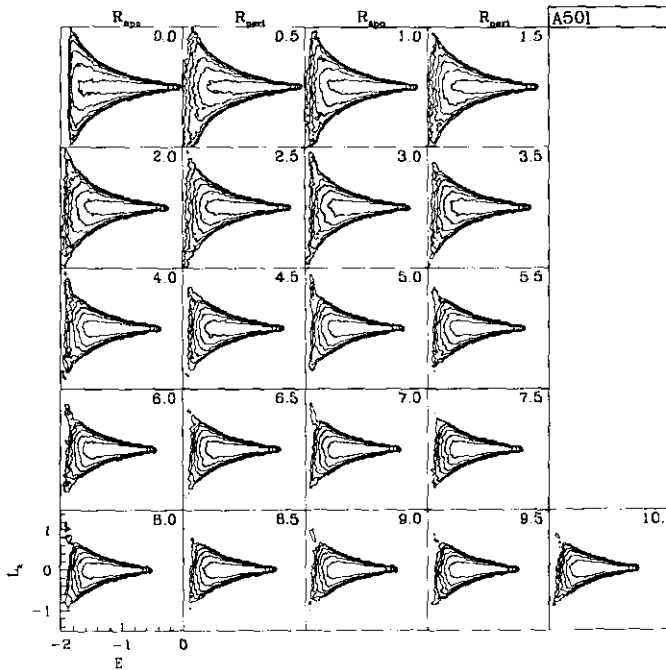
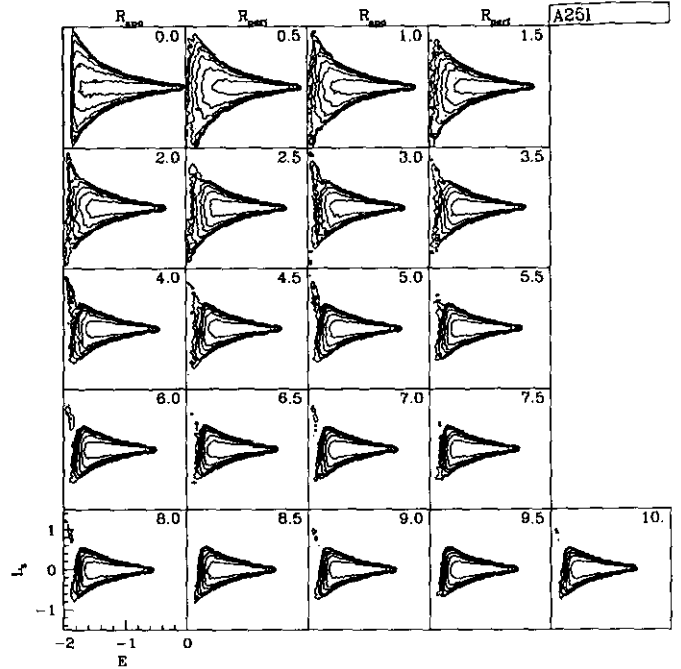
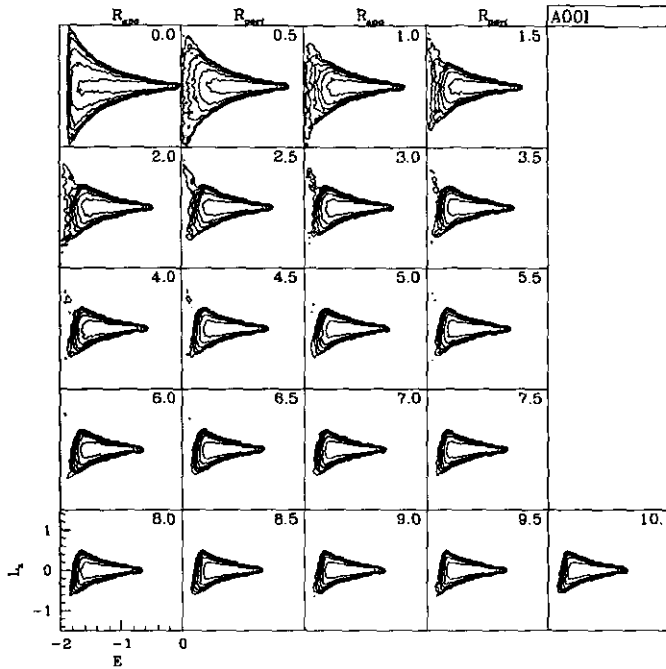












## GLOSARIO DE TÉRMINOS

A continuación se describen los términos más utilizados a lo largo de este trabajo, junto con una breve descripción de estos, así como la página donde aparece por primera vez en el texto. No se incluyen variables temporales ni los términos que sólo se utilizan una sola vez.

$A_s$	Corrección adiabática de Spitzer, 23.
$A_w$	Corrección adiabática de Weinberg, 23.
$b/a$	Cociente entre el semieje mayor, $a$ , el semieje menor, $b$ , de un cúmulo proyectado sobre el plano del cielo, 6.
$c$	Concentración de los cúmulos globulares ( $c \equiv r_t/r_c$ ), 4.
$c^t$	Concentración teórica de los cúmulos globulares ( $c \equiv r_{99\%}/r_{10\%}$ ), 74.
$E_c(t)$	Energía del cúmulo al tiempo $t$ , 20.
$E_J$	Energía de Jacobi, 9.
$E_s$	Energía total de la estrella (cinética más la potencial), 36.
$[Fe/H]$	Abundancia de elementos pesados, respecto a la abundancia solar, 2.
$F_p$	Fuerza que ejerce una masa perturbadora, 19.
$G$	Constante de gravitación.
$i^2$	Parámetro de incompletez, 33.
$J$	Momento angular por unidad de masa, 113.
$K_c$	Energía cinética de cúmulo, 72.
$M_c(t)$	Masa del cúmulo al tiempo $t$ , 73.
$M_G$	Masa de la Galaxia, ver capítulo 3.
$M_p$	Masa del perturbador, 19.
$M_v$	Magnitud visual absoluta, 2.
$M_\odot$	Masa solar, 7.
$N_c$	Número de estrella que se utiliza en la rutina de centrado, 62.
$N_{frac}$	Fracción de cúmulos globulares respecto a su total, 2.
$N_l$	Número de estrellas ligadas al cúmulo, 73.
$N_p$	Número de partículas en la simulación, 60.
$N_s$	Número de estrellas en el sistema real, 60.
$p$	Parámetro de impacto. Distancia mínima entre una partícula y la masa perturbadora, 19.
$P_{orb}, P_{cl}$	Período orbital del cúmulo, 35.
$P_p$	Período con el que actúa una perturbación, 10.
$P_s$	Período orbital de una estrella, 10.
$r_c$	Radio de la región central del cúmulo globular, se define como el radio donde el perfil del brillo superficial decaea a la mitad de su valor máximo, 4.
$r_{cexp}$	Posición del centro de expansión, 62.
$r_h$	Radio con la mitad de la masa del cúmulo. Radio mediano de masa, 4.
$r_l, r_J$	Radio del lóbulo de Roche, 10.
$r_L$	Radio mínimo del lóbulo de Roche, 67.
$r_r, r_d$	Radio límite para las estrellas en órbitas retrógradas y directas, 34.
$r_t$	Radio de marea observado en los cúmulos globulares, 4.
$r_v, r_{vir}$	Radio virial, 114.
$R_{peri}$	Radio perigaláctico del cúmulo globular, 35,67.
$R_{apo}$	Radio apogaláctico del cúmulo globular, 35,67.
$R_{GC}$	Distancia de un cúmulo al centro galáctico, 3.
$t_{cr}$	Tiempo de cruce, .
$t_d$	Tiempo dinámico en que una estrella cruza el sistema. En este trabajo hemos considerado que este tiempo es igual al tiempo de cruce, 113.

$t_{dest}$	Tiempo de desintegración de un cúmulo globular, 101.
$t_r$	Tiempo de relajación en el radio mediano de masa, 7.
$t_r$	Tiempo de relajación local utilizando el $t_d$ , 7.
$t_r^*$	Tiempo de relajación local utilizando propiedades locales, 65.
$t_{rc}$	Tiempo de relajación en el radio central de un cúmulo globular, 7.
$t_{rh}$	Tiempo de relajación en el radio mediano de masa de un cúmulo globular, 7.
$t_{sp}$	Tiempo en que una estrella de una masa determinada sale de la secuencia principal, 7.
$V_p$	Velocidad con la que se mueve la masa perturbadora, 19.
$W_c$	Energía potencial del cúmulo, 72.
$W_0$	Potencial adimensional de un cúmulo globular, 114.
$x_f$	Tamaño relativo entre el radio de marea y el radio del lóbulo de Roche, 37.
$\beta$	Parámetro de adiabaticidad. Cociente entre el tiempo característico en el que transcurre la perturbación al tiempo dinámico de las estrellas, 23.
$\beta_c^*$	Parámetro de adiabaticidad escalado a la fracción del período orbital en que la amplitud de la perturbación cambia 0.1 dex, 23.
$\delta E$	Incremento diferencial de la energía, 73.
$\delta M$	Incremento diferencial de la masa, 73.
$\Delta E$	Incremento de la energía (calentamiento), 72.
$(\Delta E)_{DLR}$	Calentamiento debido al desbordamiento del lóbulo de Roche, 84.
$(\Delta E)_{GS}$	Calentamiento debido a los choques gravitacionales, 85.
$\Delta E_{num}$	Calentamiento numérico, 66.
$\epsilon$	En el §2, es la amplitud de la perturbación. En el §4 es el suavizamiento del potencial.
$\epsilon_c$	Suavizamiento en la rutina de centrado, 63.
$\eta$	Tolerancia en la rutina de centrado, 62.
$\Phi$	Potencial gravitacional, 9.
$\Phi_c, \Phi_G$	Potencial gravitacional debido al cúmulo y a la Galaxia, respectivamente, 34 y 35.
$\Phi_{eff}$	Potencial gravitacional efectivo, 9.
$\mu$	Brillo superficial, 2.
$\mu(0)$	Brillo superficial en la región central de un cúmulo globular, 3.
$\mu_p$	Masa normalizada del perturbador, 19.
$\nu_{Hubble}$	Tasa de destrucción en el tiempo de Hubble, 103.
$\nu_{orb}$	Tasa de destrucción por período orbital, 101.
$\Omega_c, \omega_c$	Frecuencia angular de rotación circular para un cúmulo globular, 9.
$\omega_p$	Frecuencia angular con la que es perturbado un oscilador forzado, 21.
$\omega_s$	Frecuencia angular de rotación para una estrella alrededor de un cúmulo globular, 35.
$\omega_0$	Frecuencia natural de oscilación para un armónico forzado, 21.
$\rho_0$	Densidad de masa central para un cúmulo globular, 12.
$\rho_N$	Densidad numérica de cúmulos globulares, 3.
$\rho_h$	Densidad en el radio de masa mitad, 74.
$\tau_{E,M}$	Tiempo característico de destrucción para los cúmulos globulares, como función de los cambios en su energía o de su masa, respectivamente, 90 y 91.
$\Theta, I$	Variables de ángulo y acción, 21.
$\Upsilon$	Cociente masa luminosidad (M/L), 4.