



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
"ACATLAN"

"ADAPTACION DE METODOS FOTOGRAFICOS A UN SISTEMA  
DE VIDEO-CALIBRACION COMPUTARIZADA PARA EL ANALISIS  
TRIDIMENSIONAL DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO HUMANO"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

PRESENTA:

JOSE ARMANDO DURAN DIAZ

ASESOR: M. EN C. MATILDE ESPINOSA SANCHEZ



MARZO DE 1998



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

269650



Universidad Nacional  
Autónoma de México

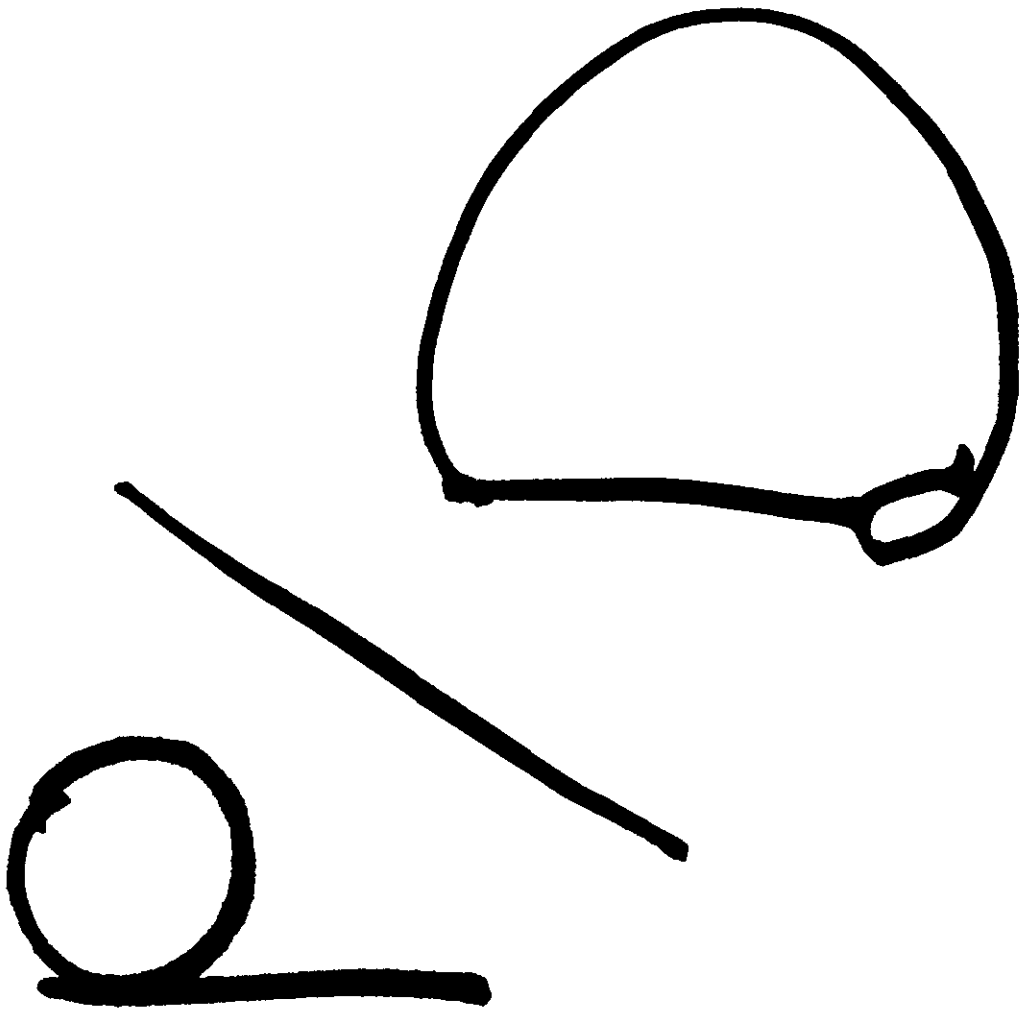


**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Gracias a Dios por haberme dado la mano  
Y sacarme a la luz... nunca me ha dejado  
Solo, infinitamente gracias!, por todo.

Gracias a esos grandes seres:

Juan, Petra y Guillermo Yacamil, Salvador Estrada,  
Alfonso Garza, Javier y Jnime, Arturito, Genoveva  
Pérez, María Sánchez, Enrique de Layala, Pluma Azul,  
Tres Flechas, El Cirujano, al Guerrero Martín Cuautli y  
Especialmente a mi Mamá Bety y Mamá Mary.

Gracias a mi José (Pepo) y Pily (Pilochina)... mis padres  
Los dos grandes tesoros y pilares en mi vida, admiración  
y respeto... sin esperar nada a cambio, lo dieron todo  
por mis hermanos y por mi, gracias!, los amo.

A mi abue Carmelita con amor y respeto.

A mis hermanos con profundo cariño:

Carlos (Beach), Pily (Piwita), Oscar (Guerito),  
José (Zito), Mariana (Bayana) y Lupita (Pita)  
Los quiero mucho.

A mis Tíos y Padrinos:

Mario, Javier, Carito, Thelma y Mary  
Con cariño y respeto.

A los bebes y consentidos de la casa...

Por siempre: Yudy, Tedy, Pelusita, Nube, Cusi,  
Nina, Wisca, Leduma y Tiger.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México  
Por la oportunidad de estudiar y de ser un universitario.

A mis profesores que a lo largo de toda mi vida académica  
Me ayudaron y apoyaron.

A la maestra Matilde Espinosa por su dedicación y entrega  
En el proyecto.

# ÍNDICE

## I INTRODUCCIÓN

1.1 BIOMECÁNICA .....	1
1.2 ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO HUMANO.....	2
1.3 INSTRUMENTOS PARA EL ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO.....	3
1.3.1 ANÁLISIS BIDIMENSIONAL.....	3
1.3.2 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.....	4
1.4 IMÁGENES .....	7
1.4.1 FOTOGRAFÍAS .....	7
1.4.2 VIDEO.....	8

## II FOTOGRAMETRÍA.

2.1 INTRODUCCIÓN.....	10
2.2 PRINCIPIOS GENERALES.....	12
2.3 PRINCIPIOS GEOMÉTRICOS .....	13
2.3.1 FOTOGRAFÍA VERTICAL .....	13
2.3.2 ESCALA DE LA FOTOGRAFÍA .....	15
2.4 CONCEPTOS DE ORIENTACIÓN .....	16
2.4.1 ORIENTACIÓN INTERIOR .....	17
2.4.2 ORIENTACIÓN EXTERIOR .....	18
2.4.3 ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE LA PROYECCIÓN .....	18
2.4.4 FOTOGRAMETRÍA TERRESTRE .....	19
2.4.5 ORIENTACIÓN RELATIVA .....	19
2.4.6 FIJACIÓN DE LOS DATOS INTERNOS .....	19
2.5 ESTEREOSCOPIA .....	20
2.5.1 ESTEREOGRAMA .....	20
2.5.2 SEÑAL BINOCULAR .....	21
2.5.3 VISTA .....	21
2.6 PARALAJE.....	21

## III BASES MATEMÁTICAS

3.1 MÉTODOS PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL OBJETO EN EL ESPACIO .....	22
3.1.1 MÉTODO DE CHURCH. ....	22
3.2 GEOMETRÍA DE SÓLIDOS.....	23
3.3 ALGEBRA DE MATRICES.....	24
3.4 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.....	25
3.4.1 TIPOS DE ERRORES DE MEDICIÓN .....	25
3.4.2 ERROR VERDADERO Y ERROR RESIDUAL.....	26
3.4.3 EVALUACIÓN ESTADÍSTICA DE MEDICIONES DIRECTAS.....	26
3.4.4 FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES DISCRETAS.....	27
3.4.5 LA ESPERANZA MATEMÁTICA.....	28
3.4.6 DISTRIBUCIÓN NORMAL.....	28
3.4.7 POBLACIÓN CONTRA MEDIAS Y VARIANZA DE LA MUESTRA.....	29
3.4.8 DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIADA.....	30
3.5 MÉTODO DE AJUSTE CON MÍNIMOS CUADRADOS.....	31
3.5.1 PRINCIPIOS BÁSICOS.....	31
3.5.2 AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS DE BLOQUES FOTOGRAMÉTRICOS.....	33
3.5.3 ECUACIONES DE COLINEALIDAD.....	34
3.6 MODELO MATEMÁTICO DLT.....	35
3.6.1 INTRODUCCIÓN.....	35
3.6.2 BASES MATEMÁTICAS DEL MÉTODO PROPUESTO.....	35

## **IV ELEMENTOS DE ÓPTICA**

<b>4.1 SISTEMAS ÓPTICOS.....</b>	<b>47</b>
4.1.1 OJO HUMANO.....	47
4.1.2 SISTEMA ÓPTICO HUMANO .....	48
<b>4.2 DISEÑO DE LENTES.....</b>	<b>50</b>
<b>4.3 ABERRACIONES.....</b>	<b>52</b>
<b>4.4 CÁMARAS .....</b>	<b>53</b>
<b>4.5 DISEÑO DE UN COMPARADOR.....</b>	<b>54</b>
<b>4.6 CALIBRACIÓN.....</b>	<b>55</b>

## **V PROYECTO ANABIO**

<b>5.1 ANTECEDENTES.....</b>	<b>57</b>
<b>5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>58</b>
<b>5.3 INSTRUMENTOS.....</b>	<b>59</b>
<b>5.4 DISEÑO DEL COMPARADOR.....</b>	<b>59</b>
5.4.1 DIAGRAMAS DEL COMPARADOR.....	60
5.4.2 MEDICIONES.....	61
<b>5.5 SECCIÓN DE GRABACIÓN.....</b>	<b>64</b>
5.5.1 EJEMPLO DE CORRIDA CON OBTENCIÓN DEL DLT.....	64

## **VI CONCLUSIONES**

## **VII GLOSARIO**

## **VIII BIBLIOGRAFÍA**

## I.- INTRODUCCIÓN.

El trabajo que a continuación se presenta, se desarrolló con el objetivo de justificar un sistema computarizado para el análisis tridimensional del movimiento del cuerpo humano, aplicado a la biomecánica Deportiva como uno de tantos procesos necesarios para la obtención de resultados óptimos en la depuración de las técnicas deportivas y su mejor aplicación.

Cabe mencionar que la Biomecánica es la ciencia que estudia el movimiento del cuerpo humano, en este caso es aplicada al deporte dando origen a una ciencia dedicada al perfeccionamiento y a la depuración de la técnica atlética del ser humano.

Para ello se estudiaron las bases necesarias como son la Fotogrametría en su estudio básico para la realización de las tomas de video en formato V8. De la grabación obtenemos cuidadosamente las mejores imágenes por medio de una editora de alta calidad, en este caso se empleó una editora de formato Betacam y se digitalizan las imágenes seleccionadas buscando de esta manera unir los cuadros esenciales dando forma a la Fotogrametría en la digitalización computarizada de las imágenes.

Los elementos de óptica son muy importantes en la cobertura de disminución de errores causados por la distorsión debida a las lentes fotográficas. La resolución del monitor tiene un papel muy importante dentro de la digitalización computarizada de la imagen y la cobertura del error pues es muy frecuente que la baja calidad de resolución proporcione una visión borrosa o una perspectiva falsa del objeto engañando al ojo humano ocasionando un arrastre de error, lo mismo ocurre con las lentes de las cámaras de video aunque actualmente muchas de las cámaras vienen con calibración de lentes automática.

En el capítulo III se estudian las bases matemáticas a profundidad para la mayor comprensión de los cálculos y resultados.

En la Fotogrametría fue importante saber distancias y aproximaciones entre cámara y objeto para eliminar efectos de visión como el paralaje y las aberraciones ópticas. Se empleó el modelo matemático DLT (Direct Linear Transformation), el cual repara errores de lentes, posición de cámaras, distancia de cámaras y aberraciones de imagen, esto es lo que en Biomecánica se le denomina *Calibración de la imagen*.

Finalmente se presenta una aplicación del sistema ANABIO3D, el cual analiza una secuencia de movimientos deportivos ( en este caso, pero puede ser cualquier otro tipo de movimiento ) previamente grabados proporcionando datos importantes al entrenador sobre la depuración de la técnica de su atleta. Cada uno de los temas de este trabajo toca de una manera concisa y básica los elementos necesarios para poder formar las herramientas aplicables al sistema ANABIO3D. Este trabajo se enfoca principalmente a la parte de calibración de imágenes del sistema tridimensional de análisis biomecánico.

## CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1.- BIOMECÁNICA.

Según D. Donskoi & V. Zatskorski (1988), la biomecánica es la ciencia formada por las leyes del movimiento mecánico de los seres vivos, y este trabajo contribuye al proyecto donde se aplica la biomecánica para el estudio de los movimientos del cuerpo humano con el objeto de evaluar cuantitativamente sus características. La disciplina es considerada como nueva ya que sus inicios se dieron entre 1942 y 1966, sin embargo con el surgimiento de la biomecánica se ejerció una influencia decisiva en el desarrollo de la mecánica, en particular su nueva tendencia formada desde los tiempos de Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727). También Leonardo Da Vinci (1452-1519) afirmaba que "la ciencia de la mecánica es la más útil y generosa de todas las ciencias semejantes porque resulta de todos los cuerpos vivos que tienen movimiento, actúan bajo sus leyes."

En biomecánica se comenzaron a utilizar los datos de ciencias autónomas tales como la hidrodinámica (de agua y dinámica un ejemplo serían las presas en molinos hidrodinámicos.), la teoría de las maquinas y los mecanismos, estructurados sobre la base de la mecánica general.

La biomecánica como una de las ciencias biológicas nuevas, comienza a acercarse, por los métodos de investigación a las ciencias exactas. La biomecánica general, como parte de la biofísica que incluye el estudio de los biosistemas internos del organismo, surgió en el punto de unión de las esferas físico-matemáticas y biológicas del conocimiento. Los éxitos de estas ciencias, el aprovechamiento de las ideas y los enfoques de la cibernética, así como también el progreso científico-técnico, se han reflejado de una forma u otra en el desarrollo de la biomecánica. Por su parte, estas ciencias se enriquecen con los datos de la biomecánica sobre la física del ser vivo.

La biomecánica está relacionada con aquellas ramas del conocimiento que se ocupan del estudio de la actividad motora. Así, la bioingeniería, se empalma con la biónica, con la biopsicología (el hombre y la maquina), y está relacionada con el desarrollo de los robots, los manipuladores y otros dispositivos técnicos que multiplican las posibilidades del hombre en su actividad laboral. La biomecánica médica sirve de base a muchos métodos de desarrollo y construcción de prótesis, traumatología, ortopedia, terapéutica y gimnasia en rehabilitación.

Los métodos y las leyes de la biomecánica se aplican al deporte y se utilizan para el perfeccionamiento de la teoría y la metodología de la educación física, del control médico, de las disciplinas deportivo-pedagógicas y de otras disciplinas que solucionan sus tareas concretas en la esfera de la educación física.

Concluyendo, la biomecánica estudia movimientos del hombre y del animal desde el punto de vista de las leyes mecánicas.

Podemos considerar que los fundadores de la biomecánica son entre otros:

- **Aristóteles.** De Stagira en Macedonia (384-322 A.C.). Alumno de Platón, conocido por sus escritos sobre las partes corporales, movimientos y desplazamientos de los animales, con los que se pueden establecer también leyes para el movimiento.

- **Leonardo Da Vinci.** De Vinci, cerca de Empoli (1452-1519). Alumno de Verrocchio, famoso como científico sobre todo por su escrito sobre el vuelo del pájaro, igual que por sus estudios sobre la anatomía humana, sobre las leyes de las corrientes aéreas y cuánticas, además sobre sus experimentos respecto al vuelo del hombre.

- **Giovanni Alfonso Borelli.** De Nápoles (1608-1679). Alumno de Galileo, escribió entre otras la obra *De Motu Animalium* (Sobre el Movimiento de los Animales), donde deduce los movimientos del sistema esquelético-muscular de las leyes mecánicas. Borelli menciona los efectos de palanca de las extremidades, las influencias de las fuerzas aéreas y acuáticas para los movimientos de los seres, la situación del centro de gravedad en el cuerpo humano y las posturas corporales más o menos favorables desde el punto de vista mecánico.



## 1.2 ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO HUMANO.

El movimiento puede definirse como " El cambio de lugar o de posición de una materia en función del tiempo, respecto a un sistema de referencia.", En el desarrollo de la materia se fueron formando niveles ascendentes de organización cada vez más altos (niveles estructurales de la materia), desde la materia inerte a la viva, de la viva a la pensante. Cada uno de estos niveles se caracteriza por tener propiedades y leyes de existencia y desarrollo cada vez más complejas.

Según Federico Engels las formas más sencillas de movimiento de la materia son mecánica, física y química (que se ponen de manifiesto tanto en la naturaleza inorgánica como en la orgánica) y las formas complejas, superiores: La biológica (todo lo vivo) y la social (relaciones sociales, pensamiento).

La forma del movimiento siempre incluye formas más simples. La forma más simple, la mecánica (parte de la física que estudia el movimiento y las causas que la producen) existe en cualquier lugar, pero mientras más compleja sea la forma del movimiento, en menor grado será evidente la forma mecánica; el movimiento se caracteriza cualitativamente por una forma cada vez más compleja en cada nivel.

Las acciones motoras del hombre, que se estudian en la biomecánica, incluyen en sí el movimiento mecánico. Precisamente el objetivo directo de la acción motora del hombre es desplazarse a sí mismo, un implemento, un compañero, etc. Pero el movimiento mecánico se realiza con la participación decisiva de formas más altas de movimiento en la acción motora. Por eso, la biomecánica es más amplia y mucho más compleja que la mecánica de los cuerpos inertes y se distingue cualitativamente de la mecánica de estos últimos. El movimiento mecánico en los sistemas se pone de manifiesto en:

- a) El desplazamiento de todo biosistema respecto a su entorno (apoyo, cuerpos físicos).
- b) La deformación del biosistema mismo, es decir, el desplazamiento de algunas de sus partes respecto a otras.

Las leyes fundamentales de la mecánica de Newton describen el movimiento de cuerpos abstractos absolutamente rígidos, que no se deforman. En la Naturaleza no existen tales cuerpos. Pero en los denominados cuerpos rígidos las deformaciones son tan pequeñas que generalmente pueden pasar por alto. En los sistemas vivos, por el contrario, varía substancialmente la disposición relativa de sus diferentes partes. Estas variaciones son los movimientos humanos. Las partes de los sistemas vivos (por ejemplo, la columna vertebral y la caja torácica) también se deforman a veces de manera sustancial. Es por eso que, al estudiar el movimiento de un sistema vivo, se tiene en cuenta que el trabajo de las fuerzas se emplea tanto para el desplazamiento del cuerpo en su conjunto, como para la deformación del mismo. En tales casos siempre existen gastos y dispersión de energía (capacidad que tiene un cuerpo para producir un efecto). En la naturaleza el estudio del movimiento puramente mecánico no tiene sentido.

El movimiento mecánico del hombre, que se estudia en la biomecánica, se produce bajo la acción de las fuerzas mecánicas externas (gravedad, fricción, etc.) y de las fuerzas de tracción muscular.

## 1.3 INSTRUMENTACIÓN PARA EL ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO.

Algunos de los precursores de la descripción del análisis del movimiento fueron Aristóteles, Leonardo Da Vinci, los hermanos Weber y el fotógrafo Inglés Eadweard Muybridge (1830).

En la actualidad se usan métodos e instrumentos según las necesidades, algunos de los más usados son:

**Método del goniómetro**, es un instrumento compuesto por dos barras articuladas que se usa para medir la amplitud de los segmentos corporales que conforman una articulación.

**Método del acelerómetro** es un dispositivo que montado a un segmento corporal, emite señales de aceleración que normalmente son analógicas y fácilmente digitalizables. El registrador determina la aceleración de una masa en base a la inercia de dicha masa. Con este método no se conoce la dirección de la aceleración, pero la fuerza que actúa sobre el cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración.

1 Mosquera Salvador. Física Elemental. 1962

*Método del electromiógrafo* detecta mediante electrodos(cutáneos o intramusculares) la actividad muscular concreta, es decir permite indicar con precisión la actividad de determinados músculos. Se puede determinar con relativa exactitud el inicio, la duración y el final de la actividad muscular, sin embargo, el valor de la fuerza ejercida solo puede estimarse.

*Método de las plataformas de fuerza* (o dinamométricas) dividen las fuerzas que actúan sobre de ellas en tres direcciones espaciales. Durante el tiempo de contacto del cuerpo con la plataforma, se registra la curva temporal de las fuerzas de reacción. Los resultados son generalmente exactos y el registro de las fuerzas se efectúa a través de un transformador análogo-digital en conexión con una computadora.

Con la cinematografía de alta velocidad, después de registrar los eventos existe la necesidad de convertir la información de la película en datos cuantitativos por digitalización manual, que además de ser susceptible a error es una tarea altamente consumidora de tiempo. La identificación de los puntos anatómicos sobre las imágenes requiere normalmente de la intervención manual. Sin embargo, es factible la digitalización automática de la posición de las marcas. Para facilitar la identificación de estos puntos, se usan marcas adheridas a la piel del sujeto, éstas pueden ser de material reflejante que se conocen como *marcas pasivas*. Para el análisis correcto se debe conocer la frecuencia de las imágenes filmadas y además, es importante conocer todas las masas de las partes del cuerpo afectadas por las fuerzas. Con este método se pueden determinar las fuerzas aunque es muy inexacto y además no se pueden hallar fuerzas que no causen ningún movimiento.

La calidad de las cámaras de video comercial está limitada en amplitud de banda a 60 Hz (60 cuadros por segundo), que es una velocidad de muestreo muy baja para producir datos de calidad en la mayoría de los casos. Sin embargo, en los movimientos cíclicos (que se repiten) y que no se consideran rápidos como la marcha, la calidad de los datos es suficiente. A la fecha existen cámaras de video especiales de alta velocidad.

### 1.3.1 ANÁLISIS BIDIMENSIONAL.

El análisis bidimensional puede ser realizado por medio de cámara de video, la cual debe estar colocada en forma frontal con respecto al objeto y a 20 metros aproximadamente para evitar problemas de distorsión o paralaje, la cámara debe estar colocada a la mitad del objeto, ya sea en reposo o en plena ejecución de la acción misma.

Para poder realizar el análisis bidimensional es necesario tener datos de entrada, en este caso es por medio de la cámara de video, y así obtener información cualitativa y cuantitativa, los datos obtenidos son: la distancia que desplazó el objeto, el centro de masa en un instante o en el periodo general, la forma como se desplace, etc. El análisis bidimensional tiene la desventaja de no ofrecer visibilidad en algunos de los puntos deseados, en este caso el cuerpo humano como se puede observar en la figura 1.1 siguiente.



FIG 1.1 Evolución del andar humano en el análisis bidimensional

### 1.3.2 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.

El análisis tridimensional es una opción para obtener información del movimiento de un individuo por medio de la proyección en los planos de un sistema cartesiano  $X, Y, Z$  que indique en forma más cercana a "la realidad" las características cuantitativas del movimiento. Para ser posible esto se necesitan al menos dos proyecciones diferentes y simultáneas de la secuencia del movimiento. El uso de un recurso como la cámara de video por ejemplo, puede ser adecuado para este fin.

La colocación de al menos dos cámaras depende de los métodos matemáticos de la calibración del espacio y cálculo de variables del movimiento. La descripción del sistema cartesiano tridimensional es de acuerdo a la regla de la mano derecha donde  $X$ , es el eje correspondiente al dedo índice, el eje  $Y$  corresponde al dedo medio y finalmente el eje  $Z$  corresponde al dedo pulgar. La posición como su nombre lo dice es de la mano derecha y en posición frontal, es decir, el eje  $X$  debe apuntar hacia el frente de nosotros, el eje  $Y$  debe apuntar hacia la izquierda de nosotros y el eje  $Z$  debe apuntar hacia arriba de nosotros.

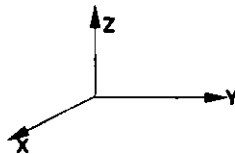


Fig. 1.2 Sistema de ejes Cartesianos

Con este análisis obtenemos información que con una visión bidimensional no podemos obtener, como la profundidad de un objeto, todos los puntos del objeto y la visión de ángulos. Cuando el individuo ejecuta movimientos que involucren giros corporales en el eje longitudinal (ver figura 1.3) se hace necesario un análisis en tres dimensiones como por ejemplo una patada circular en el arte marcial Tae Kwoon Do como se muestra en la figura 1.4.

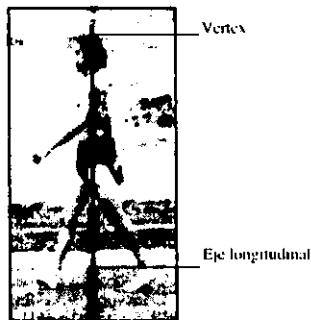


Fig. 1.3 Eje longitudinal  
En el individuo



*Secuencia de análisis del movimiento tomado con dos cámaras de video. En las imágenes se aprecia toda una secuencia cuadro por cuadro de frente (cámara 1) y lateral (cámara 2)*

Fig. 1.4

## 1.4 IMÁGENES.

La imagen es la representación bidimensional de un objeto real producido por una lente, ya sea fotográfica, de vídeo o cinematográfica formado por la refracción de los rayos de luz. Dentro de las imágenes podemos clasificarlas en dos tipos básicos: *Imagen latente*: Es la imagen invisible formada en la emulsión tras la exposición, y que hace visible el revelado. Y *La imagen de línea*: Imagen de alto contraste formada por líneas negras y zonas transparentes producidas sobre una película especial de alto contraste a partir de un sujeto de línea o de tono continuo.

### 1.4.1 IMÁGENES FOTGRÁFICAS.

Se le llama imagen fotográfica a la posibilidad de formar imágenes mediante un orificio pequeño, y que constituye la base de la cámara oscura. Su explicación es sencilla: Como la luz viaja en línea recta, los rayos procedentes de la parte superior de la escena situada ante el orificio solamente pueden llegar a la parte inferior de la pantalla receptora del interior de la cámara, y viceversa, formando así una imagen invertida. Esta imagen es oscura y poco definida, porque el agujero debe ser muy pequeño, lo que provoca una cierta dispersión de los rayos que lo atraviesan.

Para producir una imagen mas luminosa y definida es preciso recoger mas luz y hacer que los rayos converjan, es decir: Enfocar. Esto exige el efecto de una lente, cuando un rayo de luz alcanza un material transparente, como el cristal, con un ángulo oblicuo, su trayectoria se ve alterada o refractada.

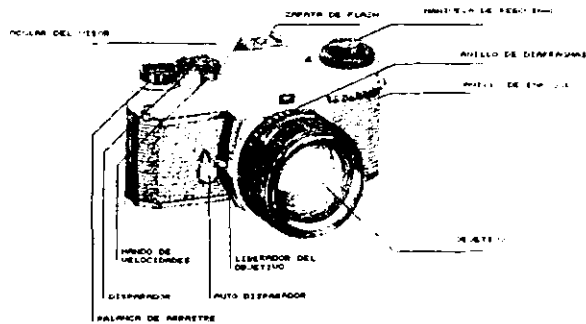


Fig 1.5 Ejemplo de una cámara fotográfica

De forma concreta la imagen se forma de la siguiente manera. Si la luz de una escena muy iluminada entra en una habitación, es decir, a una caja oscura a través de un orificio pequeño, se formará una imagen de aquella en la superficie situada frente al orificio. Esta ocurre porque la luz de la parte superior de la escena sólo puede alcanzar la parte inferior de la parte receptora a través del orificio y viceversa. La nitidez es escasa, porque los rayos luminosos no se enfocan, sino que convergen en un pequeño haz del tamaño del orificio.

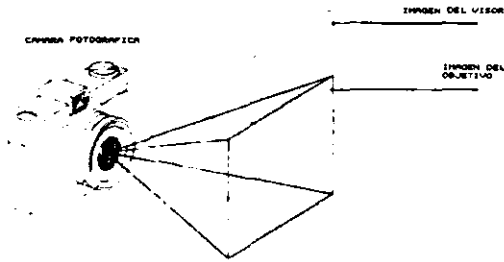


Fig. 1.6 Muestra como se proyecta la imagen fotográfica

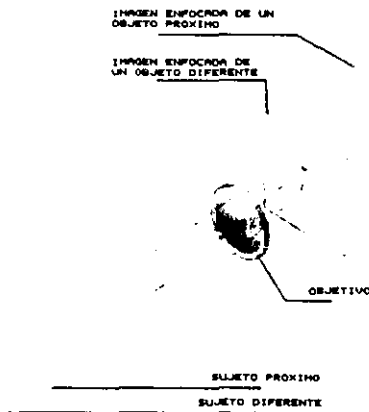


FIG. 1.7 Efecto de como se crea la imagen dentro de la cámara fotográfica.

## 1.4.2 VIDEO.

Una imagen de Video es fundamentalmente una ordenación de muchas áreas pequeñas oscuras y luminosas. En una impresión se puede apreciar los granos finos que proporcionan las diferencias en cuanto a luz y sombra necesarias para reproducir la imagen. Cuando se imprime una imagen en el proceso de fotograbado, hay muchos puntos negros que forman la imagen, como se muestra en la figura siguiente.



Fig. 1.8 Ejemplo de una cámara de video profesional.



a) Figura que muestra una imagen de video  
remarcando un acercamiento



b) Figura que muestra el acercamiento  
para apreciar los puntos negros y  
blancos de la imagen de video

Se puede ver que la imagen impresa (arriba) se compone de pequeñas áreas elementales de blanco y negro. Esta estructura básica de una imagen es evidente en las fotografías de los periódicos. Si se les examina detenidamente, se verán los puntos a causa de que los elementos de imagen son relativamente grandes. Cada área pequeña de luz o sombra es un *elemento de imagen o detalle de imagen llamado pixel* o aún más abreviadamente *pel*. Todos los elementos juntos contienen la información visual de la escena. Si son transmitidos y reproducidos con el mismo grado de luz o sombra que el original y en la posición correcta, se reproducirá la imagen.

La imagen reproducida debe poseer también alto brillo, fuerte contraste y detalle agudo, y las proporciones correctas de altura y anchura. Estos requisitos son aplicables tanto en blanco y negro o monocromía como en color. Además, la imagen en color debe ser intenso, o saturación, con los tintes o matices correctos.

## CAPITULO II.- FOTOGRAMETRÍA.

### 2.1.- INTRODUCCIÓN

La fotogrametría es una disciplina que emplea un amplio espectro de principios y métodos matemáticos que incluye geometría analítica y sólida, cálculo, probabilidad, estadística, álgebra vectorial, álgebra lineal y métodos numéricos. Los métodos de geometría analítica y sólida y del álgebra vectorial son usados para describir las relaciones geométricas fundamentales entre una fotografía y el objeto. Las aplicaciones de los métodos de cálculo van desde problemas simples tales como la transformación de coordenadas, el modelaje polinomial y la linealización de ecuaciones hasta problemas de alta complejidad, como relaciones con movimientos orbitales de satélites artificiales. La teoría de los métodos de análisis tales como: análisis de regresión, análisis de varianza se usan en el ajuste de mediciones redundantes y correlación de imagen. Para el desarrollo de algoritmos eficientes y programas en computadora se necesitan métodos de álgebra lineal y análisis numérico.

La Fotogrametría tuvo su auge en los Estados Unidos aproximadamente en 1934, el término Fotogrametría ha sido usado durante décadas. De origen griego, su significado es: *Photos=luz, gramma=alguna cosa dibujada o escrita, y metron=medición.*

Su definición ha variado a través de los años y en 1944 se llegó a la definición siguiente :

**" La ciencia o arte de obtener una medición segura por medio de las fotografías." 2**

Una de las principales aplicaciones de la Fotogrametría es la recopilación de los mapas topográficos y su completa revisión con el contorno de sus líneas, basados en la información y medición obtenida desde fotografías aéreas y espaciales. La recopilación es usualmente desarrollada por medios ópticos o instrumentos análogos y/o cálculos analíticos. La Fotogrametría es una técnica para hacer un levantamiento, afirman algunos autores, es decir, la determinación de la forma de cualquier objeto, su tamaño y su posición en el espacio. Esta determinación se puede realizar con la ayuda de una o varias fotografías. Resulta interesante saber que de las características de la imagen fotográfica y su uso, se puede tener una representación del objeto completo con gran precisión. Además, la fotografía es un documento muy fácil de manejar y de conservar ilimitadamente. La grabación del objeto con la fotografía es instantánea, lo cual permite el estudio de objetos que tienen velocidad o movimiento rápido. Por otra parte, es posible tomar fotografías a partir de puntos de vista móviles: por ejemplo, desde un avión o un helicóptero. De las características anteriores, años más tarde se propuso la siguiente definición:

**" La Fotogrametría es la ciencia, arte y tecnología por medio de la cual se obtiene información acerca de los objetos físicos en el medio ambiente a través de procesos de grabación, medición e interpretación de imágenes fotográficas y patrones de energía radiante, electromagnética y de otros fenómenos." 2**



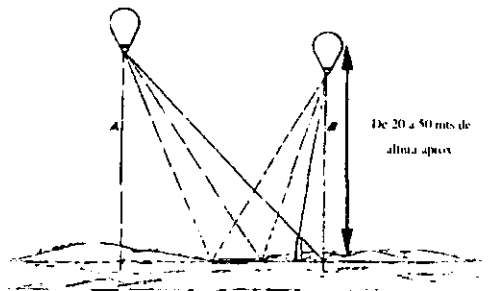


Fig 2 1 Muestra del Modelo de C. Adams de mapeo, fotografiando un objeto desde dos globos de aire caliente.

Por medio de los principios de la topografía se pueden hacer mediciones precisas a grandes distancias, los problemas de medición en el caso de la fotogrametría se hacen dentro de un rango pequeño (de 20 a 50 metros aproximadamente) y suelen ser más precisos. Esto dio origen al estudio de objetos donde se requiere una gran precisión para facilitar las tareas en otras áreas como en el caso de la astronomía, donde el radio-reflector está sujeto a deformaciones provocadas por el medio ambiente o por los modelos de ingeniería. Estas tareas dieron origen y popularidad a la Fotogrametría.<sup>3</sup>

Una de las grandes personalidades que influyó en el nacimiento de ésta ciencia y arte, fue el gran inventor, ingeniero y maestro de una imaginación creativa; Leonardo da Vinci, quien exploró las ciencias de la geometría, óptica, mecánica y geofísica. Sus grandes obras muestran dibujos de una perspectiva natural produciendo los dibujos llamados *estereoscópicos*.

Otra figura esencial fue sin duda Aimé Laussedat (1819-1907) de origen francés, quien debido a sus grandes aportaciones a la Fotogrametría y a su gran entrega, fue nombrado con distinción como el "Padre de la Fotogrametría."

Una de las aplicaciones más relevantes de esta disciplina se llevó durante 1892 en EE.UU. donde se usaron globos de gas para lograr fotografiar un objeto determinado desde una distancia determinada. Este método fue diseñado por C.B. Adams, llamado **Sistema De Mapeo para Fotogrametría**.

La Fotogrametría actualmente se aplica en muchas otras disciplinas, como en la geología, agricultura, ingeniería forestal, construcciones, planeación de ciudades, estudios del medio ambiente, exploración, inteligencia militar, medicina y cirugía, detección criminal, estudio de tráfico, oceanografía, observaciones meteorológicas, etc.

La Fotogrametría es comparativamente una ciencia moderna, probablemente haya muchas otras aplicaciones y usos para muchas otras ciencias en el futuro. Los principios y bases más relevantes para la aplicación de esta disciplina se muestran a continuación.

<sup>3</sup> American Society of Photogrammetry, Manual of Photogrammetry, 1979

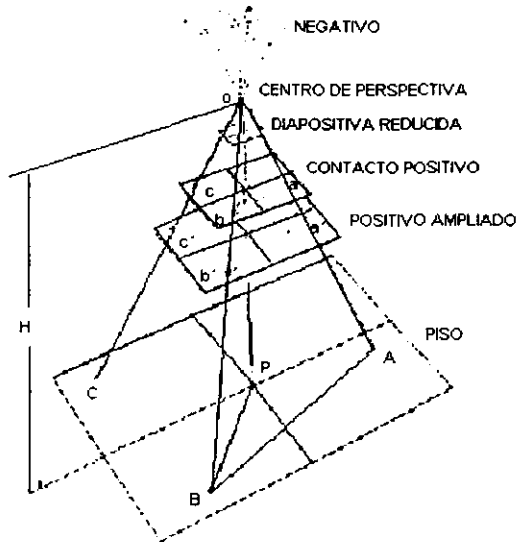


Fig. 2.11. Muestra varias formas en una fotografía aérea

## 2.2- PRINCIPIOS GENERALES.

El proceso para obtener información acerca de los objetos físicos en el medio ambiente a través de imágenes fotográficas es de la siguiente manera: Llamaremos haz perspectivo al conjunto de líneas rectas, tal como se observa en la (fig. 2.2). Considerando un objeto ( $O$ ) con un haz de perspectiva ( $H$ ) el punto  $S$ , sería el punto de visión y los puntos ( $A, B, C, \dots$ ) del objeto ( $O$ ) serían las intersecciones de las líneas del haz perspectivo con el objeto. Cada rayo, como es  $SA$  se llama rayo perspectivo. El conocimiento del haz perspectivo, es decir, de la posición de los rayos en el espacio, nos permite saber como son algunas partes del objeto, no todo. Si tuviéramos además otro objeto ( $O'$ ) con otros puntos en los mismos rayos (fig.2.3), el punto de visión  $S$  no es suficiente para determinar un objeto, y menos aún para determinar dos o más, para esto se necesitan por lo menos dos haces perspectivos ( $H_1$ ) y ( $H_2$ ) al mismo objeto ( fig.2.4). De esta manera para cada punto del objeto ( $A, B, C, \dots$ ) tenemos dos rayos perspectivos llamados *rayos homólogos*.

Una de las ventajas de la fotogrametría es que no se necesitan detalles exactos para la identificación de los rayos homólogos, esto se hace automáticamente con el fenómeno de la visión binocular estereoscópica que se analizará mas adelante.

Existen métodos para reconstruir el ambiente tridimensional de la localización de los puntos de un objeto en el espacio, en fotogrametría se le conoce como *restitución*, a la fijación de todas las coordenadas de los puntos de un objeto. Los métodos que se usan contemplan la utilización de dispositivos para la observación estereoscópica, para la materialización de los rayos homólogos o para la reconstrucción de los haces perspectivos.

Así mismo cuando se conocen el objeto ( $O$ ) y la posición en el espacio de  $S_1$  y  $S_2$  se pueden conocer los dos haces de perspectiva ( $H_1$ ) y ( $H_2$ ), cuando se conocen las coordenadas de los dos puntos de vista y los dos haces perspectivos, se puede conocer el objeto porque cada punto del objeto es la intersección de dos rayos homólogos. Conocer los haces perspectivos quiere decir:

1) Conocer la forma de cada uno de ellos: Por ejemplo, todos los ángulos entre los diferentes rayos perspectivos. A estos se les conoce como los datos internos de la cámara.

2) Conocer la posición relativa en el espacio de los dos haces perspectivas. A estos se los conoce como los datos externos de la cámara.  
 Los datos internos y externos de la cámara se explican brevemente a continuación.

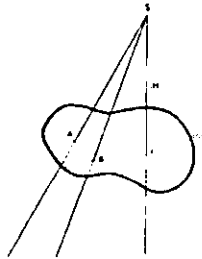


Fig. 2.2

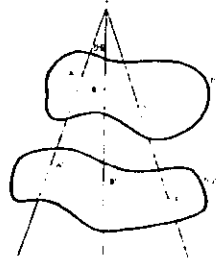


Fig. 2.3

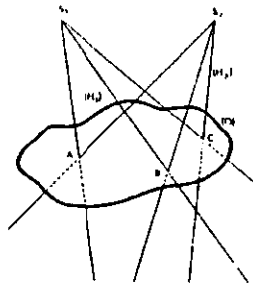


Fig.2.4

### 2.3.- PRINCIPIOS GEOMÉTRICOS.

La característica fundamental de la Fotogrametría es que cada punto de imagen en la fotografía corresponde a un único punto en el espacio del objeto. Existe una relación geométrica definida entre las posiciones espaciales relativas de los puntos de imagen en la fotografía de dos dimensiones y sus posiciones correspondientes en el espacio del objeto en tres dimensiones. Los principios geométricos en esta disciplina nos ayudan a obtener mejores resultados tanto cualitativos como cuantitativos a través de trazos geométricos; pero se debe describir la geometría fundamental a partir de las fotografías vertical e inclinada.

#### 2.3.1 FOTOGRAFÍA VERTICAL.

Es muy difícil obtener una fotografía vertical desde el aire debido a que el movimiento de la nave provoca una inclinación mínima de 0 a 3 grados con respecto al eje de la cámara, por lo tanto la mayoría de la fotografías son inclinadas.

Antes de analizar la fotografía vertical es necesario analizar las diferencias entre fotografía y mapa, pues en la primera se aprecia mejor la verticalidad del objeto, de acuerdo al objetivo de la cámara, mientras que en la segunda no, esto ha traído muchas confusiones en muchas investigaciones por lo que se presenta una breve explicación de ambas.

La diferencia entre una fotografía y un mapa es la siguiente: La fotografía da una imagen completa y detallada del terreno, pero una información a nivel de vegetación y techos de las casas, etc. y no a nivel del suelo. Por lo tanto no se pueden distinguir las carreteras en los bosques, solo de una manera superficial y vistosa, además, tiene una lectura muy completa y algunas veces abstracta y no da importancia relativa de los detalles, cuantitativamente hablando, una carretera con mucho tránsito y otra con poco pueden tener la misma apariencia en la fotografía. Sin embargo con un mapa se pueden hacer varias medidas, por ejemplo, distancias entre varios puntos, medidas de ángulos entre varios puntos, medidas de desniveles con precisión, etc. los mapas dan información a nivel del suelo, de una manera muy detallada y estructurada a grandes distancias por ejemplo, las carreteras en los bosques; otorgan información administrativa, nombres, límites de distrito, etc., y con el uso de la simbología, el mapa cambia la importancia relativa de los detalles, es por eso que tienen una lectura muy fácil. Las fotografías no permiten este tipo de medidas porque tiene muchas deformaciones y aberraciones.

### 2.3.1 FOTOGRAFÍA INCLINADA.

Casi todas las fotografías llamadas verticales obtenidas para propósitos de mapeo son tomadas con una inclinación accidental con el eje de la cámara. Las características de las fotografías inclinadas se muestran en la figura 2.5

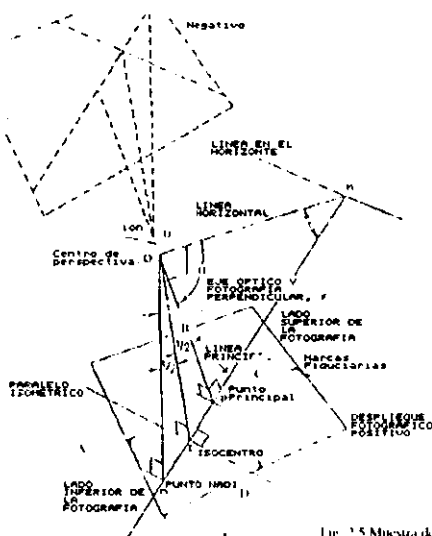


Fig. 2.5 Muestra de la fotografía inclinada más detallada

Donde :

*Negativo*, corresponde a la parte interna de la cámara como contraparte de la figura.

*Línea en el horizonte*, se encuentra fuera de la imagen, pero perpendicular a la línea principal y funciona como parámetro para verificar la verticalidad de la línea principal.

*Línea principal*, es la línea que pasa a través del punto principal y el punto nadir.

*Punto principal*, punto central del objeto o de la imagen.

*Punto nadir*, se encuentra abajo de la impresión de la imagen y siempre abajo del punto principal respectivamente.

*Marcas Fiduciales o Fiduciaras*, son las marcas perfectamente alineadas con sus extremos opuestos respectivamente para localizar el punto principal.

*Centro o punto de perspectiva*, es la visión obtenida del eje óptico o distancia principal.

*Isocentro*, es el punto medio entre el punto principal y el punto nadir, su línea imaginaria es formada por la división del ángulo formado entre la línea de la distancia principal y el punto nadir.

*Paralelo isométrico*, se encuentra en el plano de la imagen y es perpendicular a la línea principal sobre el isocentro.

Concluyendo lo anterior en el mapeo aéreo, se dice que es fotografía vertical, si el eje de la cámara forma un ángulo recto con respecto al piso, siempre y cuando sea exactamente recto ó con un grado de inclinación cero.

**2.3.2 ESCALA DE LA FOTOGRAFÍA .**

La relación entre el tamaño real de un objeto y el tamaño de un objeto en una fotografía, se conoce como **escala de la fotografía**.

La escala de la fotografía aérea está representada por la ecuación:

$$S = \frac{1}{H/f} \quad \text{ó} \quad S = \frac{f}{H} \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

Donde **f**, es la longitud focal de la cámara y **H** es la altura ó elevación del avión. También se puede hacer por medio de ésta otra ecuación:

$$S = \frac{1}{\frac{AB'}{ab}} \quad \text{ó} \quad S = \frac{ab}{AB} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

Donde **ab**, es la distancia medida entre los dos puntos en la imagen, **a** y **b** son puntos en la fotografía. Los puntos **A** y **B** los puntos reales correspondientes. La elevación en la toma fotográfica de éstos debe ser más o menos la misma.

Por ejemplo, si tenemos la distancia entre dos puntos en la fotografía vertical de 178 mm, y una distancia correspondiente entre los dos objetos de 6 Km. ¿ Cual es la escala de la fotografía.?

$$S = \frac{1}{\frac{6,000}{0.178}} = \frac{1}{33,708} \quad \text{ó} \quad 1:33,708.$$

Y si por ejemplo la longitud focal es de 152 mm. y la escala es 1:20,000 se requiere la altura .

$$H = 152 \text{ mm.} \times 20,000 = 3,040,000 \text{ mm.} \quad \text{ó} \quad 3,040 \text{ m.}$$

En el caso de las fotografías aéreas debe considerarse el desplazamiento de la nave en vuelo, para ajustar la escala de la fotografía.

Existen más casos como el efecto del relieve topográfico, en el cual en los mapas causa el efecto de que la tierra se vea muy montañosa ó voluminosa, pero puede ser considerado como un componente de desplazamiento de imagen. Originado por la inclinación accidental de las cámaras debido al vuelo de la nave.

La escala en fotografías aéreas inclinadas cambia de manera regular dentro de la fotografía. Si la escala centro del centro es correcta, entonces la escala es muy pequeña del lado en que la inclinación es elevada y muy grande en el lado en donde la inclinación es baja.

## 2.4 CONCEPTOS DE ORIENTACIÓN

Los principios geométricos de la estereofotogrametría están ilustrados en la (fig. 2.6). El área a ser mapeada es fotografiada desde dos diferentes posiciones de cámara "OI y OD". El área de cobertura común de las dos fotografías es llamada sobreposición estereoscópica. Cada fotografía es considerada como un registro de un grupo de rayos de luz que viajan del espacio del objeto, pasan a través del punto nodal del sistema de lentes de la cámara, y registran en la película fotográfica. El proceso de reconstruir la geometría interna del conjunto de rayos en un proyector se conoce como **orientación interior** esto se hace en el laboratorio insertando para cada grupo de rayos una diapositiva de placa de vidrio o un negativo de película dentro de un proyector.

Dos proyectores pueden cada uno ser trasladados e inclinados hasta que asuman la misma posición relativa y actitud de las cámaras durante la toma de las fotografías. A este proceso se le conoce como **orientación relativa**. En ésta los rayos de luz correspondientes a los dos grupos se interceptan en el espacio y forman un modelo óptico tridimensional. Finalmente en un proceso conocido como de **orientación absoluta**, los puntos conocidos de posiciones de piso ( llamados puntos de control) son usados para escalar el modelo y nivelarlo con respecto al plano de referencia en el instrumento. Una vez completada la orientación absoluta, la posición de cualquier punto en el modelo estéreo puede ser medido en la intersección de los dos rayos correspondientes a los dos proyectores.

En fotogrametría la ruta de cada rayo de luz puede ser descrita por una expresión matemática que es una función de la posición de un punto en el espacio del objeto, posición del punto de imagen en la fotografía, posición del centro de exposición del sistema de referencia de piso, dirección del eje óptico de la cámara y la geometría de la perspectiva de la cámara. Si la geometría de la perspectiva de la cámara ha sido determinada por la calibración y tres o más puntos de control han sido grabados en una fotografía, se puede determinar la posición de la cámara y su actitud con respecto al sistema de referencia de control de piso. Una vez que es conocida la orientación de ambas fotografías de un par estereoscópico se puede calcular la posición de cualquier punto en el objeto que esté localizado en el área de sobreposición como el punto de intersección de dos rayos.

Tanto para la aproximación analítica como para la de los instrumentos de medición fotogramétrica, es necesario determinar la orientación de la cámara en el momento de la exposición. Existen básicamente 4 problemas de orientación: uno es la orientación interior, dos la orientación exterior, tres la orientación relativa y cuatro la orientación absoluta.

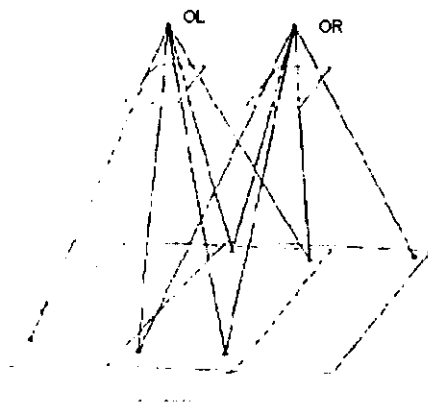


Fig. 2.6 Orientación relativa

### 2.4.1 ORIENTACIÓN INTERIOR

La orientación interior o datos internos de una cámara se refiere a la geometría perspectiva y se define con los siguientes parámetros: La longitud focal calibrada (o distancia principal), la posición del punto principal en el plano de imagen, y las características de distorsión geométrica del sistema de lentes. La orientación interna de una cámara puede ser determinada por un procedimiento de calibración.

Una cámara aérea de mapeo esta equipada ya sea con cuatro u ocho marcas fiduciales las cuales están montadas permanentemente y localizadas en la parte delantera del plano de imagen. La imagen de las marcas fiduciales aparece en cada fotografía. El propósito principal de las marcas fiduciales es determinar la localización del punto principal de la fotografía (sí están perfectamente alineadas, y que las líneas AC y BD sean ortogonales, como se muestra en la figura 2.4). Las marcas fiduciales están posicionadas de tal manera que la intersección de las líneas que se juntan diametralmente opuestas a las marcas coinciden con el punto principal.

El sistema de fotocoordenadas esta definido por los ejes  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  con el origen situado en el centro de exposición  $O'$ . El eje  $\bar{Z}$  coincide con el eje óptico de la cámara y es positivo en dirección del plano de imagen de la cámara. El eje  $\bar{X}$  es paralelo al eje  $x$  del plano de la fotografía y es positivo hacia la dirección del vuelo. El eje  $\bar{Y}$  es paralelo al eje  $y$  del plano de la fotografía. De esta manera, el plano  $\bar{X}\bar{Y}$  es paralelo al plano fotográfico. Asumiendo que el punto principal no coincide exactamente con el punto  $O'$  su posición en el plano de la fotografía es definido por sus coordenadas  $X_p, Y_p$ . La posición de un punto de imagen  $i$  en el mismo plano puede ser definido por sus coordenadas  $X_i, Y_i$ . La posición del mismo punto de imagen con respecto al centro de exposición  $O'$  y sus fotocoordenadas están definidas por  $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$  como se muestra:

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= X_i - X_p \\ \bar{Y}_i &= Y_i - Y_p \\ \bar{Z}_i &= -f\end{aligned}$$

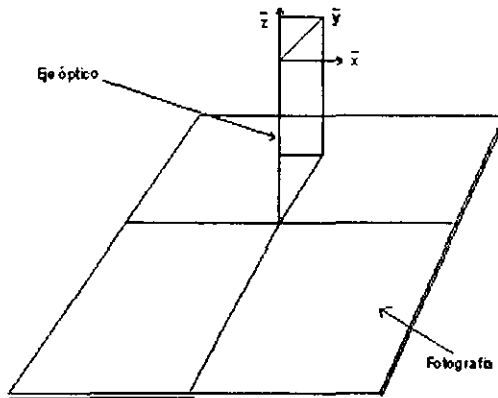


Fig. 2.7 Sistema de Fotocoordenadas.

Se dice que la orientación interior de una cámara fotogramétrica está matemáticamente definida si los siguientes parámetros son conocidos:

- 1.-  $f$  = Longitud focal.
- 2.-  $X_p, Y_p$  = Coordenadas del punto principal.
- 3.- Características de la distorsión geométrica de las lentes.

#### 2.4.2 ORIENTACIÓN EXTERIOR

La orientación exterior de una cámara durante el momento de exposición de una fotografía en particular está definida por la posición geográfica, el centro de exposición y por la dirección del eje óptico. La posición geográfica del centro de exposición se define por sus coordenadas en un sistema tridimensional, y la dirección del eje óptico se define usualmente por los tres ángulos de rotación ( $\omega, \phi, \kappa$ ) donde ( $\omega$ ) es el ángulo que hace que las fotografías no sean verticales y es la rotación sobre el eje  $x$ , ( $\phi$ ) es el ángulo de rotación sobre el eje  $y$ , ( $\kappa$ ) es el ángulo de rotación sobre el eje  $z$ . Con respecto al sistema de ejes tridimensionales de la cámara.

#### 2.4.3 ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE LA PROYECCIÓN

En la fotografía aérea asumiendo que los rayos de luz viajan en línea recta y que todos los rayos que entran a un sistema de lentes de cámara pasan por un solo punto y que el sistema de lentes no tiene distorsión existe entonces una relación de proyección entre las coordenadas fotográficas de los puntos de imagen y las coordenadas de piso de los puntos del objeto correspondientes, esta relación de proyección puede ser representada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_i - X'_i &= \lambda_y [m_{11}(x_u - x_p) + m_{21}(y_u - y_p) + m_{31}(-f)] \\ Y_i - Y'_i &= \lambda_y [m_{12}(x_{ij} - x_p) + m_{22}(y_{ij} - y_p) + m_{32}(-f)] \\ Z_i - Z'_i &= \lambda_y [m_{13}(x_u - x_p) + m_{23}(y_u - y_p) + m_{33}(-f)] \end{aligned}$$

Donde:

$X_j, Y_j, Z_j$  son las coordenadas de cualquier punto  $j$  en el espacio tridimensional.  
 $X^e_i, Y^e_i, Z^e_i$  es la posición del centro de exposición de una fotografía.

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \phi, \cos \kappa, \\ m_{12} &= \cos \omega, \sin \kappa, + \sin \omega, \sin \phi, \cos \kappa, \\ m_{13} &= \sin \omega, \sin \kappa, - \cos \omega, \sin \phi, \cos \kappa, \\ m_{21} &= -\cos \phi, \sin \kappa, \\ m_{22} &= \cos \omega, \cos \kappa, - \sin \omega, \sin \phi, \sin \kappa, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
m_{22} &= \cos\omega_i \cos k_i - \sin\omega_i \sin\phi_i \sin k_i \\
m_{23} &= \sin\omega_i \cos k_i + \cos\omega_i \sin\phi_i \sin k_i \\
m_{31} &= \sin\phi_i \\
m_{32} &= -\sin\omega_i \cos\phi_i \\
m_{33} &= \cos\omega_i \cos\phi_i \\
X'_i, Y'_i &
\end{aligned}$$

$X_{ij}, Y_{ij}$  = son las coordenadas de imagen del punto  $j$  del objeto en la fotografía  $i$

$f$  = es la longitud focal de la cámara.

$\lambda_{ij}$  = es el factor de escala fotográfico en el punto de imagen  $j$ .

Las ecuaciones anteriores se hicieron bajo las suposiciones siguientes. Los sistemas

1) de imagen  $(x,y,z)$  y objeto  $(X,Y,Z)$  ambas son conforme a la regla de la mano derecha, que se explica en el capítulo uno.

2) La secuencia de rotaciones angulares es :  $\omega, \phi, \kappa$

3) Las coordenadas de imagen se refieren a la impresión de contacto de una fotografía.

4) Uno visualiza una fotografía vertical o cerca de la vertical de la misma manera que cuando uno mira hacia abajo en un avión.

No todas las suposiciones son siempre aplicadas, por ejemplo para las fotografías horizontales (terrestres) algunos términos están definidos para el trabajo astronómico, la cámara mira hacia arriba en vez de hacia abajo en forma diferente.

#### 2.4.4 FOTOGRAMETRÍA TERRESTRE

La Fotografía terrestre es cuando la cámara se coloca sobre el piso, la orientación en la fotografía terrestre puede ser más comúnmente descrita por la rotación de los 3 ángulos  $\omega, \phi$  y  $\kappa$  donde  $\omega$  es la rotación por el eje  $\bar{X}$  del sistema de fotocoordenadas y es positiva en dirección contra reloj,  $\phi$  es la rotación por el eje  $\bar{Y}$  del sistema de fotocoordenadas y es medido positivo en dirección con las manecillas del reloj, el ángulo de rotación  $\kappa$  es por el eje  $\bar{Z}$  y se mide positivo en la dirección contra reloj

Los elementos  $m_{ij}$  de las ecuaciones de la transformación de proyección se pueden expresar en términos de omega, alfa y kapa la secuencia de rotaciones usada en las expresiones  $m$  son: primero rotación omega, luego rotación alfa y finalmente rotación kapa.

#### 2.4.5 ORIENTACIÓN RELATIVA.

Es la determinación de la posición relativa y la actitud de dos fotografías con respecto a cada una en un par estereoscópico. El propósito principal de la orientación relativa es el de orientar las dos fotografías de tal manera que cada par correspondiente de rayos desde las dos fotografías se intercepten en el espacio.

#### 2.4.6 FIJACIÓN DE LOS DATOS INTERNOS

Para medir objetos en un espacio, en forma práctica se puede usar un teodolito (instrumento de precisión para medir ángulos en superficies) midiendo los ángulos entre todos los rayos perspectivos. Otra manera de medir estos ángulos es por medio de una perspectiva gráfica (fig.2.7), cortando el haz

perspectivo con un plano (**P**) y buscando las intersecciones de cada rayo perspectivo con este plano. En este caso, el conjunto de los puntos (**a,b,c**) de este plano se llama imagen perspectiva del objeto.

Esta imagen perspectiva tiene sus datos internos: la distancia del punto **S** al plano (**P**) y la posición del punto **v** en el plano (**P**) de la proyección. El eje **SV** es llamado **eje principal** porque es ortogonal al plano **P**. El punto **v** es llamado **punto principal** de la perspectiva y la distancia **Sv = p** se llama **distancia principal**.

De acuerdo a lo anterior en fotografía para obtener el tipo de perspectiva que permite la reconstitución de un objeto es recomendable usar dos fotografías.

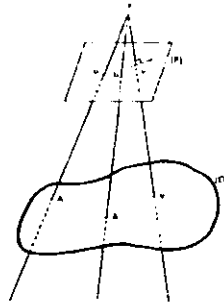


Fig. 27

## 2.5.- ESTEREOSCOPIA.-

Es la ciencia y arte que trata con el uso de la visión binocular, que es la visión simultánea con los dos ojos, para la observación de un par de imágenes que coinciden, para producir un modelo visual tridimensional con caracteres análogos.

En el espacio tridimensional la percepción de las observaciones usa un número de características visuales o señales que determinan el fondo y tamaño de los objetos.

Esto puede estar convenientemente dividido en señales monoculares y binoculares.

Una relación entre el ojo y la visión monocular puede ser haciendo una analogía con una cámara fotográfica, el ojo tiene un objetivo fotográfico: el cristalino; un diafragma: el iris; una superficie sensible: la retina.

La imagen se forma en la retina. En algunas partes de la retina la visión no es tan buena como en el centro.

La acción de enfocar se obtiene mediante la deformación del cristalino con los músculos ciliares; no es una variación de la distancia; sino un cambio del rayo de curvatura del cristalino.

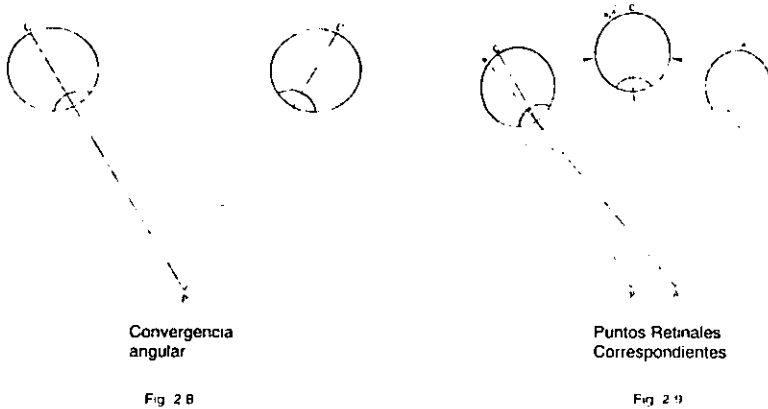
El fenómeno de la visión se debe a que las radiaciones luminosas provocan reacciones fotoquímicas en la retina y estas reacciones provocan la excitación de las células nerviosas que emiten un flujo nervioso que es analizado por el cerebro.

### 2.5.1.- ESTEREOGRAMA

Un par de fotografías ó dibujos correctamente orientados y montados ó proyectados para una vista estereoscópica constituye un estereograma. La visión estereoscópica es una aplicación particular de la visión binocular que habilita al observador a obtener la impresión de profundidad, usualmente por medio de dos diferentes perspectivas de un objeto como en el caso de dos fotografías tomadas de dos diferentes cámaras en posiciones diferentes.

### 2.5.2.- SEÑAL BINOCULAR.

Las señales binoculares son usadas en la percepción del espacio. Son los ángulos convergentes de los ejes ópticos de los ojos fig. 2.8



La teoría de la disparidad retinal, para ser considerada hasta cierto punto debe ser confirmada por la evidencia experimental. Si  $a$  y  $a'$  coinciden con el mismo lugar de la retina de la composición del ojo, entonces los puntos  $A$  y  $P$  serán observados siendo la misma distancia hacia la línea a través de los ejes de los ojos. Por otro lado, si  $a$  y  $a'$ , no coinciden, entonces existe lo llamado disparidad retinal y los puntos  $A$  y  $P$ , son observados y tratados a diferentes distancias del observador. fig. 2.9

### 2.5.3- VISTA.

Una vista es la proyección del haz perspectivo desde un solo punto de visión. En estereoscopia dos proyecciones diferentes (dos vistas) se utilizan para restituir los puntos de los objetos en el espacio tridimensional, es posible obtener un relieve natural como puede ser un valle, subidas o bajadas en fotografía aérea. A estos efectos se les conoce como ilusiones pseudoscópicas, que son los que producen la percepción de profundidad. Por medio de una ó varias fotografías se pueden apreciar distintos efectos como por ejemplo la sombra de los objetos. Con la ilusión estereoscópica, la sombra del efecto pseudoscópico es muy dependiente de la imagen natural.

### 2.6.- PARALAJE.

La paralaje es el efecto visual que se define de la siguiente manera: Desplazamiento aparente de la posición de un cuerpo, respecto a una referencia fija debido al cambio de posición del observador. En estereoscopia se define como el ángulo formado por las visuales dirigidas hacia un mismo objeto desde dos puntos de vista distintos. En general podemos decir también que el efecto visual de la paralaje es tanto menor cuanto más lejano está el cuerpo observado.

En fotogrametría la paralaje estereoscópica es la diferencia de posición de un mismo detalle en las dos imágenes de un par estereoscópico, a la cual se debe la sensación de relieve cuando ambas se observan.

La paralaje en fotografía, en la visión binocular es el efecto causado por los rayos que parten de la fotografía y que han pasado a través de la lente hasta topar con el ojo. La paralaje surge en el ángulo que forma el primer rayo perspectivo a la izquierda del ojo derecho con el primer rayo perspectivo a la derecha del ojo izquierdo, y significa lo que se conoce como disparidad retinal, provocando que la vista de los ojos tengan una perspectiva totalmente diferente con respecto al tamaño original del objeto.

Existe también el concepto de perspectiva que se refiere a el arte de representar en una superficie los objetos a la imagen y semejanza de sus tres dimensiones, tal y como los ve el ojo.

Por ejemplo, el efecto visual de las vías del tren que se alejan desde el observador hasta el horizonte. El efecto sobre el observador es que las vías convergen en el horizonte(paralaje). En la representación gráfica de este fenómeno se dibujan líneas inclinadas y no paralelas, (perspectiva).

## CAPITULO III.- BASES MATEMÁTICAS

### 3.1 MÉTODOS PARA LA RECONSTRUCCIÓN DEL OBJETO EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL.

Existen métodos calculables a partir de las medidas de coordenadas en el plano de cada fotografía los cálculos consisten en obtener las coordenadas de las intersecciones en el espacio de dos rayos homólogos. La corrección de la distorsión se traduce en correcciones de las coordenadas planas  $x,y$  de cada punto. Esta reconstitución por cálculo de los haces perspectivos, no permite la reconstitución de líneas sino de punto por punto.

Con métodos analógicos los rayos perspectivos se materializan en rayos ópticos obtenidos de procesos complejos, que no son objeto de este trabajo.

Los métodos mecánicos consisten en dispositivos ópticos que permiten ajustar distancias de los puntos a restituir.

Las correcciones por distorsión en los métodos anteriores consisten en hacer correcciones en el valor de las coordenadas de los puntos o bien en los métodos mecánicos en colocar lentes o prismas que modifiquen los ángulos de los rayos y que corrijan la distorsión ( buscar distorsión)

#### 3.1.1 MÉTODO DE CHURCH.

La subdivisión espacial en fotogrametría, depende de la colocación de las cámaras de los ángulos de los ejes ópticos para determinar los seis parámetros de orientación exterior(ver inciso 2.4.2). Este método fue desarrollado por el profesor Earl Church en la Universidad de Syracuse (1945-1948).

El método de resección de Espacio de Church(Slama 1980, Ghosh 1979) es particularmente apropiado para cálculos manuales ya que el sistema más grande de ecuaciones simultáneas que son necesarias para la solución de este método, exige sólo tres ecuaciones. El método requiere 3 puntos de control imaginados en la fotografía y sólo se obtiene una única solución, asumiendo que no existe una distorsión geométrica en los tres puntos de imagen. Cuando se tienen 4 ó mas puntos de control se utiliza el método de mínimos cuadrados. La solución matemática para una solución simultánea de grandes bloques fotogramétricos, puede ser usada también para determinar las inclinaciones de todas las fotografías que proveen una cobertura estereoscópica completa de un área.

#### 3.2 GEOMETRÍA DE SÓLIDOS

El sistema rectangular de coordenadas tridimensionales consiste de tres ejes mutuamente perpendiculares que se intersectan en un origen común  $O$ , los ejes se denotan en un orden específico de secuencia  $X,Y,Z$  ó  $X_1,X_2,X_3$  o primero, segundo y tercero. Uno de los extremos de cada eje tiene una dirección positiva y las distancias a lo largo de cada eje se miden en unidades de longitud iguales. El sistema de ejes se considera de **mano derecha**(ver capítulo 1 inciso 1.3.2) en el sentido de que si el extremo positivo del primer eje es rotado dentro del eje positivo del segundo entonces el final positivo del tercer eje está en una dirección tal que un tornillo derecho avanzará con esta rotación. Es significativo que la regla de la mano derecha se aplique también a un conjunto de ejes si la numeración de los ejes se modifica de manera cíclica. Así la dirección positiva de una medición angular en geometría analítica usualmente es en diagramas e ilustraciones, contra de las manecillas de reloj.

La posición de un punto en el espacio puede ser designada por tres números de coordenadas ordenadas:  $P(x,y,z)$  La distancia entre dos puntos ( $P_1P_2$ ) en el espacio esta dada por:

$$P_1P_2 = \left[ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

La orientación de la línea  $\overline{P_1P_2}$ , se especifica por tres ángulos de dirección alfa, beta y gama (cada uno menor que 180 grados. Los cosenos de éstos ángulos se llaman **cosenos de dirección** y están dados por :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= (x_2 - x_1) / P_1P_2 \\ \cos \beta &= (y_2 - y_1) / P_1P_2 \\ \cos \gamma &= (z_2 - z_1) / P_1P_2\end{aligned}$$

Es significativo que :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

El ángulo  $\theta$  entre dos líneas que se intersectan está dado por:

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

Si el coseno de  $\theta$  es igual a 1, las dos líneas son paralelas y si el coseno de  $\theta$  es igual a cero las dos líneas son perpendiculares.

Si el origen de un sistema de coordenadas es trasladado a una nueva localidad (a,b,c) que puede ser los cosenos de dirección de una línea, de tal manera que las coordenadas x,y,z de un punto son transformadas a  $x',y',z'$ , la relación está dada:

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

$$z' = z - c$$

Si los ejes de coordenadas son rotados de tal manera que x,y,z de un punto se transformen a  $x',y',z'$ , la relación de los dos grupos de coordenadas se pueden establecer en términos de nueve productos de senos y cosenos de dirección  $m_{ij}$  de la siguiente manera:

$$x' = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z$$

$$y' = m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z$$

$$z' = m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z$$

e inversamente:

$$x = m_{11}x' + m_{21}y' + m_{31}z'$$

$$y = m_{12}x' + m_{22}y' + m_{32}z'$$

$$z = m_{13}x' + m_{23}y' + m_{33}z'$$

En donde  $m_{11}$ , es el coseno del ángulo entre los ejes  $x$  y  $x'$ ;  $m_{21}$  es el coseno del ángulo entre los ejes  $x$  y  $y'$ , etc. La siguiente relación es verdadera si:

1) El determinante es igual a  $\pm 1$

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \pm 1$$

2) La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los tres términos en cualquier renglón o columna del determinante anterior es igual a 1.

3) La suma de los productos de los términos correspondientes de cualesquiera de los dos renglones( ó columnas) es igual a cero, por ejemplo:

$$m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23} = 0 \quad \text{o también} \\ \text{para renglones}$$

$$\sum_{k=1}^3 m_{ik} m_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

4) Cada  $m_{ij}$  es igual al determinante de la matriz menor  $M_{ij}$  del elemento  $m_{ij}$ , es decir:

$$m_{11} = m_{22}m_{33} - m_{32}m_{23}$$

### 3.3 ÁLGEBRA DE MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de m renglones y n columnas de números llamados elementos. Es lo mismo si se dice que una matriz tiene una dimensión de m x n o que es de orden m x n. Las matrices pueden ser sumadas, restadas ó multiplicadas en un camino análogo al álgebra ordinaria(ó escalar).

Una matriz puede constar de una sola columna y un solo renglón, en éstos casos se denomina *vector columna* o *vector renglón*.

Se llama una matriz conformable con respecto a la adición y multiplicación si los órdenes de las matrices son apropiados para las operaciones. Dos matrices son conformables para la adición si son del mismo orden y son conformables para la multiplicación si el número de columnas en la primera es igual al número de renglones en la segunda.

Ejemplo

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

El álgebra de matrices se usa extensivamente en el cálculo fotogramétrico, en la representación de ecuaciones lineales. Es particularmente útil en el desarrollo de la solución de algoritmos en problemas de ajuste de mínimos cuadrados y en el desarrollo de algoritmos eficientes en el proceso de computadoras.

Como un ejemplo en el uso del álgebra de matrices un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, puede expresarse como:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Donde A es la matriz de los coeficientes,  $\mathbf{x}$  es un vector que consiste de una lista de incógnitas y  $\mathbf{b}$  es el vector que consiste en la lista de los términos independientes de las constantes o  $\mathbf{b}$  es el vector de términos independientes. Para representar la solución del sistema ambos lados se multiplican a la izquierda por la inversa de A:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

y como

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\bar{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Esto establece que la lista de incógnitas puede ser calculada por la multiplicación de la matriz inversa y los términos independientes.

Sí además en la ecuación  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  hay más ecuaciones que incógnitas una solución por medio del método de mínimos cuadrados requiere que  $\mathbf{A}$  sea primero normalizada (en un conjunto de ecuaciones de observación, de ecuaciones de condición o de ecuaciones de correlación, y que expresan una condición para el ajuste de mínimos cuadrados.) Se puede demostrar que la matriz cuadrada de coeficientes de una ecuación normal puede ser calculada por la premultiplicación de  $\mathbf{A}$  por su transpuesta:  $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$

Entonces la solución es:

$$x = \left[ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \right] \mathbf{b}$$

De las ecuaciones de transformación de proyección, vistas en el capítulo dos (sección 2.4.3) se pueden escribir en forma de matriz de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X_j & -X'_j \\ Y_j & -Y'_j \\ Z_j & -Z'_j \end{bmatrix} = \lambda_{ij} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij} & -x'_{ij} \\ y_{ij} & -y'_{ij} \\ -f \end{bmatrix}$$

Por manipulación de matrices :

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & -x'_{ij} \\ y_{ij} & -y'_{ij} \\ -z_j \end{bmatrix} = \lambda_{ij} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j & -X'_j \\ Y_j & -Y'_j \\ Z_j & -Z'_j \end{bmatrix}$$

Sea:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}$$

la que comúnmente se refiere como matriz de rotación. Siempre y cuando se cumpla que:

$$M^{-1} = M^T, \text{ será ortogonal.}$$

Que quiere decir que, una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  se dice que es ortogonal si  $\mathbf{A}^{-1}$  es igual a  $\mathbf{A}^T$ . Una matriz ortogonal se caracteriza por las cuatro propiedades mencionadas en el inciso 3.2 de Geometría de Sólidos.



### 3.4 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Las mediciones fotogramétricas pueden ser subdivididas en dos categorías.

1.- *Mediciones directas*: Las mediciones de los parámetros desconocidos son hechas directamente. Por ejemplo las coordenadas de puntos de imagen en una foto aérea pueden ser medidas directamente usando un comparador con ejes de coordenadas rectangulares. Un comparador es un objeto geométrico del cual se conocen perfectamente sus dimensiones en el espacio, y se utiliza para obtener las dimensiones de otro objeto u objetos en el mismo espacio.

2.- *Mediciones indirectas*: Los parámetros desconocidos se calculan a partir de valores medidos de uno u otros parámetros físicos. Por ejemplo Las coordenadas de piso ( $X_j, Y_j, Z_j$ ) de un punto del objeto se calculan a partir de la medición de fotocoordenadas en una imagen del mismo punto en dos o más fotografías.

Con el objeto de minimizar la influencia de errores inevitables, usualmente se hacen mediciones repetidas dentro de un amplio rango de repeticiones. En el caso de mediciones indirectas, las mediciones redundantes se hacen para proveer más de una solución a los parámetros deseados. Consecuentemente, uno de los mayores problemas en las mediciones fotogramétricas es el de determinar la solución más probable a partir de un conjunto de mediciones repetidas redundantes o no y la estimación de la exactitud de la solución. El método de ajuste por mínimos cuadrados es uno de los métodos más usados en el ajuste en fotogrametría.

#### 3.4.1 TIPOS DE ERRORES DE MEDICIÓN

Los errores en las mediciones cuantitativas se pueden clasificar en los siguientes cuatro tipos:

- 1.- Desatinos .
- 2.- Errores constantes.
- 3.- Errores sistemáticos.
- 4.- Errores aleatorios.

*Los desatinos* son simplemente errores causados por descuido humano. Un desatino puede ser de cualquier signo y magnitud y su ocurrencia es impredecible, los desatinos son a menudo detectados por mediciones repetidas de la misma cantidad.

*Los errores constantes* son errores que siempre tienen el mismo signo y la misma magnitud. La fuente más común de los errores constantes son los instrumentos de medición. Los errores constantes pueden ser detectados y corregidos por medio de una calibración exacta del instrumento de medición. La predisposición personal de los observadores se puede considerar también como errores constantes, sin embargo tales errores son más difíciles de calibrar.

*Los errores sistemáticos* ocurren de acuerdo a algún patrón definido que puede o no ser conocido. Cuando se conoce la regla en las ocurrencias de estos errores sistemáticos pueden ser a veces modelados por una expresión matemática y las mediciones se corrigen de acuerdo a ésta: la distorsión de lentes en las cámaras es un buen ejemplo de error sistemático.

*Los errores aleatorios* son causados por la capacidad inherente de los instrumentos y de los observadores humanos para hacer mediciones exactas y por las variaciones incontrolables de las condiciones de operación durante las mediciones. Los errores aleatorios son generalmente muy pequeños en magnitud pero pueden ser de cualquier signo. Para minimizar el efecto de los errores aleatorios las mediciones deberán estar hechas dentro de un rango de condiciones de operación tan amplio como sea posible y con el mayor de los cuidados, un ejemplo sería, el tamaño del grano en una imagen fotográfica en la localización de un punto de un objeto

#### 3.4.2 ERROR VERDADERO Y ERROR RESIDUAL.

El error verdadero  $\epsilon_i$  de una observación ( $l_i$ ) se define como la desviación del valor verdadero  $L$  del parámetro medido; es decir:

$$\epsilon_i = l_i - L$$

Como el valor verdadero es difícilmente conocido, el término de error verdadero solamente tiene significado teórico.

El error residual  $v_i$  de una observación ( $l_i$ ) se define como la desviación del valor más probable ( $\bar{L}$  conocida como la media de la muestra) es decir:

$$v_i = l_i - \bar{L}$$

### 3.4.3 EVALUACIÓN ESTADÍSTICA DE MEDICIONES DIRECTAS

Sea  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  el número  $n$  de mediciones repetidas de un parámetro que tiene valor verdadero  $L$ , éstos  $n$  valores forman el espacio de muestreo de mediciones. La media de la muestra es la estimación más probable del valor verdadero  $L$  basado en este conjunto de observaciones. Y es calculado por la siguiente ecuación:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}$$

La variación de muestreo ( $s^2$ ) conocido con el nombre de *varianza*, de este conjunto de observaciones es definido como sigue:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - L)^2}{n - 1}$$

La desviación estándar ( $s$ ) o error de raíz cuadrada de la media de las observaciones individuales se define de la siguiente manera:

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - L)^2}{n - 1}}$$

Además, el *error estándar* de la media de la muestra se calcula de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$s_l = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - L)^2}{n(n - 1)}} = \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$$

El error estándar de la media da una medida de la precisión del valor medio. La precisión y la exactitud no tienen el mismo significado en el ajuste. La precisión es el grado de repetibilidad de una medición. Una medición se dice es de alta precisión si su valor puede ser repetido dentro de una tolerancia cercana en mediciones repetidas. Exactitud es una medida de la cercanía de un valor medido con su valor real. Una medición de alta precisión significa que su valor está muy cercano al verdadero. En la ausencia de errores sistemáticos, la precisión y la exactitud tienen el mismo significado.

El error máximo de un conjunto de observaciones es el límite más allá del cual los errores aleatorios rara vez ocurren y es el límite normalmente puesto para las observaciones desechadas. Un error mayor que el error máximo es considerado como un desatino. Un valor comúnmente adoptado para el error máximo es cerca de 3 o 4 veces la desviación estándar; es decir error máximo =  $3s$  ó  $4s$ .

### 3.4.4 FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES DISCRETAS

La probabilidad provee una medida de la posibilidad de que un evento vaya a ocurrir o de que una variable aleatoria vaya a tomar un cierto valor. Esto siempre se refiere a un experimento. Por ejemplo el "volado" con una moneda, representa un experimento. Existen dos posibles eventos que pueden ocurrir: águila (H) o sol (T). La probabilidad de que ocurra un evento H representado por el símbolo  $P(H)$ , entonces indica la probabilidad de que la moneda tenga como resultado águila.

Sean  $n$  casos mutuamente exclusivos, exhaustivos e igualmente probables. Si la  $s$  de estos es favorable a un evento  $A$ , entonces la probabilidad de que ocurra  $A$  es  $s/n$ . Mutuamente exclusivos significa que no pueden ocurrir dos casos al mismo tiempo, exhaustivo significa que todos los casos posibles se consideran en las  $n$  posibilidades.

Entonces en un volado de una moneda  $P(H) = P(T) = 1/2$ . Y para dos volados de una moneda la posibilidad de ocurrencias es  $(H,H), (H,T), (T,T), (T,H)$ , así  $P(\text{el primer H, el segundo T}) = 1/4$  y (un H y un T sin importar el orden)  $= 1/4 + 1/4 = 1/2$ .

La probabilidad de una función siempre tiene un valor que está entre 0 y 1. Una probabilidad de 0 significa que el evento seguramente no ocurrirá y una probabilidad de 1 significa que ocurrirá seguramente. más aún la suma de las probabilidades de todos los posibles eventos en un experimento es = 1. Esto es:

$$1 \geq P(X = x_i) \geq 0$$

y

$$\sum_i^n P(X = x_i) = 1$$

Sean  $X$  y  $Y$  dos variables discretas aleatorias. La probabilidad de que  $X = x_i$  y  $Y = y_j$  al mismo tiempo se le llama probabilidad común de  $X$  y  $Y$ , y se denota como  $P(X=x_i, Y=y_j)$  o  $P_{x,y}(x_i, y_j)$ . La función de probabilidad común de dos variables deben también satisfacer las condiciones de una función de probabilidad; es decir:

$$1 \geq P_{x,y}(x_i, y_j) \geq 0$$

y

$$\sum_i^n \sum_j^n P_{x,y}(x_i, y_j) = 1$$

### 3.4.5 LA ESPERANZA MATEMÁTICA

Sea  $X$  una variable discreta aleatoria de una población que consiste de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ , esto es todos los valores posibles que  $X$  pueda tomar. Sea  $P(x_i)$  que denota la probabilidad que  $X = x_i$ , entonces la esperanza matemática de  $X$  está definida como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = \mu$$

$E(X)$  se le conoce también como la *media población de X*, o simplemente la media de  $X$ . No se debe confundir con la media de la muestra  $\bar{X}$  que es la media de un conjunto de mediciones obtenidos de experimentos actuales.

La varianza de la población de la variable aleatoria  $X$  se denota como  $\sigma^2$  (varianza de la distribución). Esta varianza de población no se debe confundir con la varianza de la muestra ( $s^2$ ). La

primera se refiere a la distribución de la población de una variable aleatoria  $X$  mientras que la última se refiere a la varianza de la muestra de un conjunto de mediciones del parámetro  $X$ .

### 3.4.6 DISTRIBUCIÓN NORMAL

El número de veces que un valor  $x$  ocurre en una muestra se conoce como *frecuencia absoluta* o más brevemente, la frecuencia del valor  $x$  en la muestra. Dividiendo la frecuencia entre el tamaño  $n$  de la muestra se obtiene la frecuencia relativa. La frecuencia relativa es al menos igual a cero y por lo más igual a uno.

Esta función se llama *función de distribución* de la muestra. Indica como se distribuyen los valores de la muestra. Por esta razón se dice que determina la distribución de la frecuencia en la muestra. El valor medio o media de una distribución de una función continua se denota por medio de una  $\mu$  y se

define como:  $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$  y también se conoce como la *esperanza matemática* o brevemente como la esperanza de  $X$  y a veces se denota como  $E(X)$ .

Una distribución se dice que es *simétrica* con respecto a un número  $x=c$  si para cada real  $x$ :  $f(c + x) = f(c - x)$

Si una distribución es simétrica con respecto a  $x=c$  y tiene un valor medio  $\mu$ , entonces  $\mu$  es igual a cero.

La varianza de una distribución continua se denota por:  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$ .

La raíz cuadrada positiva de la varianza de una distribución se conoce como la *desviación estándar* de la distribución y se le denota con  $\sigma$ . Se puede decir que la varianza es una medida de la propagación o dispersión de los valores que la variable correspondiente  $x$  puede adoptar.

*Distribución Normal.* Se le llama distribución normal o Gaussiana a una función de distribución continua, donde  $f(x)$  es una función continua con gráfica en forma de campana. Una variable aleatoria continua  $x$ , se dice tiene una distribución normal con una media  $\mu$  y una varianza  $\sigma^2$  si tiene una función de frecuencia de distribución como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En el caso especial cuando  $x$  es normalmente distribuida con  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , se dice que  $x$  tiene una distribución normal estándar que se denota como  $N(0,1)$ . La función de distribución normal estándar entonces se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Existen tablas de probabilidad disponibles para distribución normal estándar.

Una distribución normal teniendo una  $\sigma$  grande significa que los valores posibles de las variables aleatorias están distribuidos en un rango amplio en ambos lados de la media. Una pequeña  $\sigma$  significa que los posibles valores de la variable aleatoria están concentrados próximos a la media.

La función de distribución normal se derivó del fenómeno de errores aleatorios en mediciones físicas. Aunque los errores aleatorios aparentemente ocurren de forma irregular; cuando un gran número de observaciones se hacen para medir un parámetro, se puede encontrar que los errores aleatorios en las observaciones se conforman según la regla normal del error. Esta regla establece que los errores aleatorios puros deben seguir las siguientes propiedades:

1.-) Los errores positivos y negativos de magnitud similar ocurren con frecuencia similar, es decir:

$$\sum \epsilon_i = 0$$

- 2.-) Los errores pequeños ocurren más frecuentemente que los errores grandes;
- 3.-) Cero errores ocurren más frecuentemente.
- 4.-) Existe un límite práctico más allá del cual los errores aleatorios rara vez ocurren.

Las condiciones anteriores se cumplen adecuadamente con la siguiente función de distribución normal:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{\sigma^2}}$$

### 3.4.7 POBLACIÓN CONTRA MEDIAS Y VARIANZA DE LA MUESTRA

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ,  $n$  observaciones independientes las cuales están hechas con igual cuidado y precisión. La media de la muestra  $\bar{x}$  y la varianza de la muestra ( $s^2$ ) de un conjunto de observaciones se puede calcular usando las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{y} \quad m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Se puede mostrar que tanto la  $\bar{x}$  como  $s^2$  son estimaciones no sesgadas de la media de la población ( $\mu$ ) y de la varianza de la población  $\sigma^2$ ; es decir:

$$E(\bar{x}) = \mu \quad \text{y} \quad E(m^2) = \sigma^2.$$

Si  $n$  es muy grande y se acerca al infinito, entonces la media de la muestra se acerca a la media de la población y la varianza de la muestra se acerca a la varianza de la población.

### 3.4.8 DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIADA

Sean  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ ,  $n$  observaciones mutuamente independientes de un parámetro que tiene un valor verdadero  $\mu$ . supóngase que estas observaciones fueron hechas con igual cuidado y precisión y que todos los errores sistemáticos fueron eliminados. Entonces cada observación  $l_i$ , se dice que pertenece a una distribución normal con una media de población  $\mu$  y una varianza  $\sigma^2$ . Como las observaciones son sobre el mismo parámetro, tenemos que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_n = \mu$  y como todas las observaciones son de las misma precisión, tenemos que  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ . La función de densidad de probabilidad de una observación  $l_i$  se describe por medio de la siguiente expresión:

$$f_i(l_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{l_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}$$

Como las observaciones son todas mutuamente independientes, la función común de probabilidad de las  $n$  observaciones es el producto de las funciones de distribución individuales:

$$f(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n) = f_1(l_1) \cdot f_2(l_2) \cdot f_3(l_3) \cdot \dots \cdot f_n(l_n) = \left( \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{l_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}$$

En los ajustes fotogramétricos, muchas variables diferentes y correlacionadas están comúnmente involucradas en un problema dado. Por ejemplo, las coordenadas de piso  $(X, Y, Z)_j$  de un punto  $j$  son 3 variables fuertemente correlacionadas.

Otro ejemplo son los parámetros de orientación exterior de una fotografía aérea:  $\omega, \phi, \kappa, X^c, Y^c, Z^c$ . En general, sean  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$   $n$  variables aleatorias que no son necesariamente mutuamente independientes y cada una tiene una distribución  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ . Sea la matriz de varianza-covarianza de estas variables definida de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \dots & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \dots & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

donde  $\sigma_{x_i, x_j}$  denota la covarianza entre  $X_i$  y  $X_j$ . Debe hacerse notar  $\sigma_{x_i, x_j}$  no es igual a  $\sigma_{x_j, x_i}$ . La función común de distribución de estas  $n$  variables, se define como sigue:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \sigma_x)^{1/2}} \exp - \frac{1}{2} [(X - \mu)^T \sigma_x^{-1} (X - \mu)]$$

donde:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

### 3.5. MÉTODO DE AJUSTE CON MÍNIMOS CUADRADOS.

#### 3.5.1 PRINCIPIOS BÁSICOS

El método de ajuste por mínimos cuadrados fue desarrollado hace más de 150 años independientemente por Legendre y Gauss, cada uno de ellos intentaban predecir las órbitas de los cuerpos celestes a partir de observaciones limitadas e imperfectas. Se ha usado mucho para inspecciones geodésicas (ciencia que trata la medición de la tierra) e ingeniería fotogramétrica, como un método para el manejo de mediciones redundantes.

El método de mínimos cuadrados está basado en el principio de estimaciones de máxima probabilidad. Tiene dos suposiciones fundamentales en relación a la naturaleza de las observaciones:

- 1.- Las observaciones contienen solamente errores aleatorios que siguen distribuciones normales.
- 2.- Las observaciones son mutuamente independientes entre si.

El principio se ilustra mejor con un problema de medición. Sean  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  las  $n$  observaciones de un parámetro  $\mu$ , sean  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  los errores correspondientes a estas  $n$  observaciones; es decir:

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1 - \mu \\ v_2 &= l_2 - \mu \\ v_3 &= l_3 - \mu \\ &\dots \\ &\dots \\ v_n &= l_n - \mu \end{aligned}$$

El problema es para determinar el valor más probable de  $\mu$  basado en un conjunto de observaciones dadas  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , que es equivalente a encontrar el conjunto de errores más probable ( $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ) en el conjunto de observaciones dadas. Los  $v_i$  son errores aleatorios cada uno teniendo su propia distribución normal descrita por la siguiente función:

$$f(v_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right)^2}$$

más aún, como estas observaciones son mutuamente independientes, la unión de funciones de distribución es el producto de sus funciones de distribución individuales.

El conjunto más probable de errores ( $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ) deberá ser tal que maximice la función de probabilidad. Sin embargo para maximizar la función de probabilidad, debemos maximizar el término :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right)^2$$

Esto es, el valor más probable de  $\mu$  basado en un conjunto de observaciones dadas ( $l_1, l_2, \dots, l_n$ ) es tal valor de  $\mu$  hace que:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad \text{mínimo.}$$

Como tal solución para  $\mu$  minimiza la suma de los cuadrados de los residuales  $v_i$ , la solución es llamada una solución de mínimos cuadrados.

El primer problema en el ajuste de mínimos cuadrados es la formulación de un modelo matemático para el problema. Para este propósito se usan comúnmente ecuaciones de condición y ecuaciones de observación. Una ecuación de condición, es una expresión matemática que expresa la relación física o geométrica que debe ser satisfecha por un conjunto de parámetros medidos. Normalmente, una ecuación de condición involucra dos parámetros medidos adicionales, pero puede o no incluir parámetros desconocidos diferentes a los errores residuales desconocidos en las mediciones. Una ecuación de observación es un tipo especial de ecuación de condición que incluye solamente un parámetro medido. Se usa para expresar la relación matemática entre el parámetro medido y algunos parámetros desconocidos. Los problemas simples se pueden modelar ya sea usando ecuaciones de condición o de observación. Pero para problemas más complicados se usan generalmente una combinación de los dos tipos de ecuación.

En general un problema de un modelo consiste en las  $m$  ecuaciones independientes, que implican a  $n$  incógnitas  $r$  mediciones de parámetros y esto puede ser expresado de la siguiente manera:

$$f_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = 0$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = 0$$

$$f_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = 0$$

.

.

.

$$f_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = 0$$

$$f_m(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = 0$$

Si estas ecuaciones son funciones no lineales, deben ser linealizadas antes de que puedan ser usadas en la solución de ajuste.

### 3.5.2 AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS DE BLOQUES FOTOGRAMÉTRICOS

Un ajuste simultáneo por mínimos cuadrados de todas las mediciones de un problema de mapeo fotogramétrico se puede formular con el uso de ecuaciones de condición y de observación. En el caso de aereotriangulación analítica, las mediciones básicas incluyen: 1.-) Las fotocoordenadas de los puntos relevantes de imagen en las fotografías; 2.-) Las coordenadas de piso de al menos tres puntos de control; y 3.-) Datos auxiliares en la orientación exterior de la fotografía. El propósito del ajuste de mínimos cuadrados es determinar la solución más probable de las coordenadas de piso de todos los puntos desconocidos y los parámetros de orientación exterior de todas las fotografías.

En el caso de la calibración de cámaras las mediciones básicas fotogramétricas incluyen las fotocoordenadas y las coordenadas de piso de un gran número de puntos de control. El propósito del ajuste es determinar ambos parámetros de orientación exterior de la cámara. En vez de un absoluto control posicional, los puntos de control direccional se usan frecuentemente también en la calibración de cámaras.

La formulación del modelo matemático para el ajuste de mínimos cuadrados involucra los siguientes tres pasos básicos:

- 1.-) Desarrollo de ecuaciones de observación para cada tipo de observación;
- 2.-) Generación de todas las observaciones necesarias para construir un modelo matemático del problema fotogramétrico;
- 3.-) Desarrollo de un algoritmo de cómputo eficiente.



El mismo modelo matemático se puede aplicar con poco o ninguna modificación a los problemas de fototriangulación. Los procesos para el control de extensión vertical y/o horizontal por medio de mediciones de ángulos y/o distancias en fotografías sobrepuestas están relacionadas en soluciones espaciales usando los principios de perspectiva de las fotografías. Generalmente este proceso involucra el uso de fotografías aéreas y es llamado *aerotriangulación* o *triangulación aérea*. La fototriangulación analítica es un procedimiento de fototriangulación en el cual la solución espacial se obtiene por medio de rutinas de cómputo. La fotogrametría analítica es la fotogrametría por medio de la cual las soluciones se obtienen por medio de métodos matemáticos de rango corto y fotogrametría terrestre. El modelo puede ser también fácilmente adoptado para la resección espacial y la calibración de cámaras.

### 3.5.3 ECUACIONES DE COLINEALIDAD

Sean  $x_{ij}$  y  $y_{ij}$  las fotocoordenadas del punto de imagen  $j$  y de fotografía  $i$ . En la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} - x_p \\ y_{ij} - y_p \\ -f \end{bmatrix} = \lambda_{ij} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j - X_i^c \\ Y_j - Y_i^c \\ Z_j - Z_i^c \end{bmatrix}$$

$x_p$  y  $y_p$  son las fotocoordenadas del punto principal,  $f$  es la longitud focal de la cámara,  $\lambda_{ij}$  es el factor de escala las  $m_{ij}$  son funciones de los tres parámetros de rotación ( $\omega, \phi, k$ );  $X_j, Y_j$  y  $Z_j$  son las coordenadas de piso del punto  $j$ ;  $X_i^c, Y_i^c$  y  $Z_i^c$  son las coordenadas de piso del centro de exposición de la foto  $i$ .

Dividiendo las primeras ecuaciones por la tercera, y reacomodando los términos el conjunto de ecuaciones se reduce a:

$$x_{ij} - x_p + \frac{f \left[ m_{11} (X_j - X_i^c) + m_{12} (Y_j - Y_i^c) + m_{13} (Z_j - Z_i^c) \right]}{m_{31} (X_j - X_i^c) + m_{32} (Y_j - Y_i^c) + m_{33} (Z_j - Z_i^c)} = 0$$

$$y_{ij} - y_p + \frac{f \left[ m_{21} (X_j - X_i^c) + m_{22} (Y_j - Y_i^c) + m_{23} (Z_j - Z_i^c) \right]}{m_{31} (X_j - X_i^c) + m_{32} (Y_j - Y_i^c) + m_{33} (Z_j - Z_i^c)} = 0$$

Estas dos ecuaciones se llaman **ecuaciones de colinealidad**; son las ecuaciones fundamentales en la fotogrametría. Juntas descubren la orientación absoluta y longitud de los rayos al unirse con el centro de exposición  $i$ , la localización del punto de piso  $j$  y la posición del punto de imagen  $j$  en la fotografía  $i$ . Estas ecuaciones se derivan de la ecuación de transformación proyectiva que se basa en la suposición fundamental de que el centro de exposición, el punto de piso y su correspondiente punto de imagen, todos yacen en la misma línea recta.

Las ecuaciones de colinealidad se usan para resolver una amplia variedad de problemas fotogramétricos. Como cada rayo de luz puede ser descrito por dos ecuaciones de colinealidad, un modelo matemático completo se puede construir del modelo fotogramétrico que forman los rayos.

## 3.6 MODELO MATEMÁTICO DLT.

### 3.6.1 INTRODUCCIÓN

En el año de 1971 Abdel-Aziz y Karara reportaron un método para la reducción de métodos fotogramétricos sin la necesidad de marcas fiduciarias ni tampoco aproximaciones iniciales para los parámetros de orientación interna y externa de las cámaras. Esta aproximación es particularmente útil para la fotografía no métrica.

En la fotogrametría analítica la medición de puntos en imagen se hace normalmente en comparadores. La transformación de las coordenadas del comparador a coordenadas en el espacio del objeto son usualmente desarrolladas en dos pasos:

- a) Transformación de coordenadas del comparador en coordenadas de imagen, y
- b) Transformación de coordenadas de imagen a coordenadas en el espacio del objeto.

Para la transformación de coordenadas de comparador a coordenadas de imagen, es necesario calibrar y medir marcas fiduciarias, la transformación de coordenadas de imagen a coordenadas en el espacio del objeto, generalmente se usa una solución iterativa para la cual se necesitan aproximaciones iniciales de las incógnitas (los elementos de orientación externa y en algunos casos los elementos de la orientación interna de la cámara).

Trabajando con cámaras manuales no métricas no se satisface ninguno de los requerimientos anteriores. Debido al crecimiento de uso de las cámaras no métricas en la fotogrametría de rango corto particularmente en casos de requerir media o baja precisión, se creyó oportuno el desarrollo de un método apropiado para la reducción de datos para cámaras no métricas.

El método propuesto involucra una transformación lineal directa (DLT) de las coordenadas del comparador a coordenadas del espacio del objeto. En un sentido es una solución simultánea para las dos transformaciones anteriormente mencionadas. Como el sistema de coordenadas de la imagen no está involucrado en la aproximación, las marcas fiduciarias no son necesarias. Además el método es una solución directa y no involucra aproximaciones iniciales para los parámetros desconocidos de la orientación interna y externa de la cámara.

Entonces, el método propuesto es particularmente no apto para la fotografía no métrica. Y cuando se aplica a la fotografía no métrica la propuesta lleva al menos a la misma precisión que los métodos convencionales, pero es más fácil de programar (no se necesita linealización) y usa poca memoria y tiempo de ejecución.

### 3.6.2 BASES MATEMÁTICAS DEL MÉTODO PROPUESTO

Como se mencionó anteriormente el método propuesto involucra la solución simultánea de dos transformaciones que usualmente se hacen separadamente dentro de la fotogrametría analítica convencional.

La transformación de las coordenadas del comparador en coordenadas de imagen se hacen generalmente de la siguiente manera:

$$\bar{x} = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$\bar{y} = a_4 + a_5x + a_6y$$

Donde:

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  son coordenadas de imagen.

$x$ ,  $y$  son coordenadas de comparador.

Tales transformaciones toman en cuenta los errores de perpendicularidad entre los ejes de coordenadas  $x,y$  del comparador, y las posibles diferencias de distorsión lineal a lo largo de los ejes de coordenadas  $x,y$  del comparador (debido a la distorsión de lentes, a la deformación de la película y al desajuste del comparador).

La transformación de coordenadas de imagen a coordenadas en el espacio del objeto se hacen usualmente utilizando una ecuación de colinealidad.

El concepto teórico básico usado en fotogrametría es que la fotografía, siendo un plano perfecto, es un centro de proyección del espacio del objeto. Implícito a este concepto es la condición

de colinealidad del punto de imagen, del centro de proyección, y del punto del objeto. Esta condición de colinealidad es expresada en la muy conocida relación de transformación proyectiva siguiente:

$$\begin{bmatrix} x - xp \\ y - yp \\ -c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} \dots m_{12} \dots m_{13} \\ m_{21} \dots m_{22} \dots m_{23} \\ m_{31} \dots m_{32} \dots m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde:

$\bar{x}, \bar{y}$  = son fotocoordenadas depuradas de un punto.

$x_p, y_p$  = son fotocoordenadas del punto principal de la fotografía.

$c$  = distancia principal de la cámara.

$\lambda$  = factor escala.

$m_{ij}$  = matriz de elementos de rotación en los cuales las rotaciones ( $\omega, \phi, \kappa$ ) de la fotografía son implícitos.

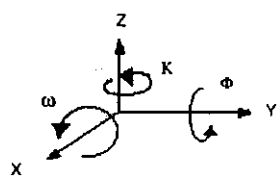


Fig. Ángulos de rotación de un punto en el espacio en relación a un sistema de ejes tridimensionales

Donde el orden de rotación de los ángulos es  $\omega, \phi, \kappa$

y:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \phi_1 \cdot \cos k_1 \\ m_{12} &= \cos \omega_1 \cdot \sin k_1 + \sin \omega_1 \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos k_1 \\ m_{13} &= \sin \omega_1 \cdot \sin k_1 - \cos \omega_1 \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos k_1 \\ m_{21} &= \sin \omega_1 \cdot \sin k_1 \\ m_{22} &= \cos \omega_1 \cdot \cos k_1 - \sin \omega_1 \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin k_1 \\ m_{23} &= \sin \omega_1 \cdot \cos k_1 + \cos \omega_1 \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin k_1 \\ m_{31} &= \sin \phi_1 \\ m_{32} &= -\sin \omega_1 \cdot \cos k_1 \\ m_{33} &= \cos \omega_1 \cdot \cos \phi_1 \end{aligned}$$

$X, Y, Z$  = coordenadas del punto en el espacio del objeto.

$x_0, y_0, z_0$  = coordenadas del centro de perspectiva de la cámara en el espacio del

objeto.

Las fotocoordenadas depuradas  $\bar{x}, \bar{y}$  son el resultado de un proceso de depuración de una imagen por medio del cual corrige las coordenadas observadas del comparador: de la distorsión de lentes, la deformación lineal de la película y los errores del comparador. En el proceso también, las coordenadas del comparador son transformadas a un sistema de fotocoordenadas definidas por las marcas fiduciales de la cámara.

Esta transformación y la corrección de la deformación lineal de la película, la distorsión lineal de las lentes y los errores del comparador se obtiene de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{x} - x_p &= a_1 + a_2 X + a_3 Y \\ \bar{y} - y_p &= a_4 + a_5 X + a_6 Y\end{aligned}\quad (2)$$

De donde:

$\bar{x}, \bar{y}, x_p, y_p$  = definidas previamente.

$x, y$  = coordenadas observadas del comparador.

$a_1$  hasta  $a_6$  = parámetros de transformación y corrección.

Las ecuaciones anteriores se aplican solamente a cámaras métricas con o sin la rejilla o red, y para las cámaras no-métricas que han sido modificadas por las marcas fiduciales construidas dentro de ellas. En este caso las marcas fiduciales, o los puntos de rejilla, se usan para establecer el sistema de fotocoordenadas y para obtener los parámetros para la corrección la deformación lineal de la película, la distorsión de lentes y los errores del comparador. Para las cámaras no-métricas que no han sido modificadas, la ausencia de marcas fiduciales no permitirán el uso de estas ecuaciones. Sin perder la generalidad, sin embargo, el sistema de fotocoordenadas puede ser considerado paralelo al sistema de coordenadas del comparador, y las ecuaciones de transformación y corrección, toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x - x_p &= \lambda_x (x + \Delta x - x_0) \\ y - y_p &= \lambda_y (y + \Delta y - y_0)\end{aligned}\quad (3)$$

Donde:

$\lambda_x, \lambda_y$  = factores de escala, permiten escalas diferentes en los dos ejes.

$x_0, y_0$  = coordenadas del punto principal, referido al sistema de coordenadas del comparador.

$\Delta x, \Delta y$  = errores sistemáticos en coordenadas.

En la ecuación (1), dividiendo la primera y la segunda ecuaciones por la tercera y sustituyendo las ecuaciones (3), en las relaciones resultantes, obtenemos:

$$\begin{aligned}x + \Delta x - x_0 &= -c \frac{m_{11}(x - x_0) + m_{12}(y - y_0) + m_{13}(z - z_0)}{m_{31}(x - x_0) + m_{32}(y - y_0) + m_{33}(z - z_0)} \\ y + \Delta y - y_0 &= -c \frac{m_{21}(x - x_0) + m_{22}(y - y_0) + m_{23}(z - z_0)}{m_{31}(x - x_0) + m_{32}(y - y_0) + m_{33}(z - z_0)}\end{aligned}\quad (4)$$

Simplificando la ecuación (4) tenemos:

$$\begin{aligned}x + \Delta x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ y + \Delta y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}\end{aligned}\quad (5)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
L &= -(m_{31}X_0 + m_{32}Y_0 + m_{33}Z_0) \\
L_1 &= (m_{31} - c, m_{11})/L \\
L_2 &= (x_0 m_{32} - c, m_{12})/L \\
L_3 &= (x_0 m_{33} - c, m_{13})/L \\
L_4 &= x_0 + c, (m_{11}X_0 + m_{12}Y_0 + m_{13}Z_0)/L \\
L_5 &= (y_0 m_{31} - c, m_{21})/L \\
L_6 &= (y_0 m_{32} - c, m_{22})/L \\
L_7 &= (y_0 m_{33} - c, m_{23})/L \\
L_8 &= y_0 + c, (m_{11}X_0 + m_{12}Y_0 + m_{13}Z_0)/L \\
L_9 &= m_{31}/L \\
L_{10} &= m_{32}/L \\
L_{11} &= m_{33}/L
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (5) son las ecuaciones básicas desarrolladas por Abdel-Aziz y Karara en 1971 del método DLT para la solución de la condición de colinealidad. Además de errores sistemáticos, las coordenadas observadas del comparador contendrán los errores aleatorios  $V_x$  y  $V_y$  por lo que las ecuaciones (5) se re-escriben como:

$$\begin{aligned}
(x + v_x + \Delta x)(L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1) - (L_1 x + L_2 y + L_3 z + L_4) &= 0 \\
(y + v_y + \Delta y)(L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1) - (L_5 x + L_6 y + L_7 z + L_8) &= 0
\end{aligned} \quad (6)$$

Ahora, poniendo  $A = L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1$  entonces (6) será escrita como:

$$\begin{aligned}
v_x &= -(L_1 x + L_2 y + L_3 z + L_4)/A + x(L_9 x + L_{10} y + L_{11} z)/A + \Delta x + x/A \\
v_y &= -(L_5 x + L_6 y + L_7 z + L_8)/A + y(L_9 x + L_{10} y + L_{11} z)/A + \Delta y + y/A
\end{aligned} \quad (7)$$

Los errores sistemáticos que se pueden corregir en este punto son para la distorsión simétrica y asimétrica de lentes. Estos errores se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x'(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) + P_1(r^2 + 2x'^2) + 2P_2 x' y' \\
\Delta y &= y'(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) + P_2(r^2 + 2y'^2) + 2P_1 x' y'
\end{aligned} \quad (8)$$

Donde :

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2$$

$K_i$  = Coeficientes de la distorsión de lentes simétricos.

$P_i$  = Coeficientes de la distorsión de lentes asimétricos.

Por lo tanto para cada punto  $i$  en la foto  $j$  podemos escribir (7) como:

$$\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \dots \\ \dots \\ L_{11} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,1} \\ D_{1,2} \end{bmatrix} = 0$$

Donde :

$$D_{1,1} = x_1 / A_1$$

$$B_{1,1} = -x_1 / A_1$$

$$B_{1,2} = -y_1 / A_1$$

$$B_{1,3} = -z_1 / A_1$$

$$B_{1,4} = -1 / A_1$$

$$B_{1,5} = 0$$

$$B_{1,6} = 0$$

$$B_{1,7} = 0$$

$$B_{1,8} = 0$$

$$B_{1,9} = x_1 X_i / A_1$$

$$B_{1,10} = x_1 Y_i / A_1$$

$$B_{1,11} = x_1 Z_i / A_1$$

$$B_{1,12} = x_1' r^2$$

$$B_{1,13} = x_1' r^4$$

$$B_{1,14} = x_1' r^6$$

$$B_{1,15} = r^2_i + 2x_1'^2$$

$$B_{1,16} = 2x_1' y_1'$$

$$x_1' = x_1 - x_0$$

$$r^2_i = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

$$A_1 = L_9 x_1 + L_{10} y_1 + L_{11} z_1 + 1$$

$$\begin{aligned}
D_{v_1} &= y_i / A_i \\
B_{v_1} &= 0 \\
B_{v_2} &= 0 \\
B_{v_3} &= 0 \\
B_{v_4} &= 0 \\
B_{x_1} &= -X_i / A_i \\
B_{x_2} &= -Y_i / A_i \\
B_{x_3} &= -Z_i / A_i \\
B_{x_4} &= -1 / A_i \\
B_{y_1} &= y_i X_i / A_i \\
B_{y_2} &= y_i Y_i / A_i \\
B_{y_3} &= y_i Z_i / A_i \\
B_{r^2} &= y_i' r^2 \\
B_{r^4} &= y_i' r^4 \\
B_{r^6} &= y_i' r^6 \\
B_{y_1' y_1'} &= 2x_i' y_i' \\
B_{y_1''} &= r^2 + 2y_i'^2 \\
y_i' &= y_i - y_0
\end{aligned}$$

El par de ecuaciones de condición puede ser escrita para un punto, y por lo tanto puede ser expresada como:

$$V_i + B_i \Delta_i + D_i = 0$$

donde:

$$V_i = \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix}$$

$B_i$  = la matriz de  $B_{x_i}$ 's y  $B_{y_i}$ 's

$\Delta_i$  = matriz de incógnitas para la foto j.

$$D_i = \begin{bmatrix} D_{v_1} \\ D_{v_2} \end{bmatrix}$$

Para n puntos de control, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \Delta_1 + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

o también :

$$V + B\Delta_1 + D = 0$$

Entonces:

$$V^T WV = \Delta_1^T B^T WB \Delta_1 + \Delta_1^T B^T WD + D^T WB \Delta_1 + D^T WD \quad (11)$$

y por solución de mínimos cuadrados:

$$\frac{\delta V^T WV}{\delta \Delta_1} = B^T WB \Delta_1 + B^T WD = 0 \quad (12)$$

Donde W es la matriz de peso, para las ecuaciones de condición.

Por lo tanto en la solución de mínimos cuadrados obtendremos:

$$\Delta_1 = -B^T W B^{-1} B^T WD = -N^{-1} D^T \quad (13)$$

donde

$$N = B^T W B \quad \text{y} \quad D^T = B^T WD$$

Si remultiplicamos (12) por  $\Delta_1^T$  obtenemos:

$$\Delta_1^T B^T WB \Delta_1 + \Delta_1^T B^T WD = 0 \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en la (11), obtenemos:

$$V^T WV = D^T WB \Delta_1 + D^T WD \quad (15)$$

La ecuación (15) es de forma conveniente para el cálculo de la suma de los cuadrados residuales. El segundo término es la contribución de las ecuaciones de condición, mientras que el primer término es la contribución de las ecuaciones normales.

La forma de la matriz de peso:

De la ecuación (7) tenemos:

$$F_1 = -(L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) / A + \sqrt{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z) / A + v + x / A} = 0$$

$$F_2 = -(L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8) / A + \sqrt{(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z) / A + y + y / A} = 0$$



Por la ley de la propagación de la varianza, suponiendo independencia, se tiene:

$$m_{F_x}^2 = \left( \frac{xL_{10} - L_1}{A} \right)^2 m_x^2 + \left( \frac{xL_{10} - L_2}{A} \right)^2 m_y^2 + \left( \frac{xL_{11} - L_1}{A} \right)^2 m_z^2 + m_x^2 \quad (16)$$

$$m_{F_y}^2 = \left( \frac{yL_{10} - L_5}{A} \right)^2 m_x^2 + \left( \frac{yL_{10} - L_6}{A} \right)^2 m_y^2 + \left( \frac{yL_{11} - L_7}{A} \right)^2 m_z^2 + m_y^2$$

donde:

$m_x^2, m_y^2, m_z^2$  = varianzas de las coordenadas en el espacio del objeto

$m_x^2, m_y^2$  = varianzas de las coordenadas del comparador.

$m_{F_x}^2, m_{F_y}^2$  = varianzas asociadas con las ecuaciones de condición para x y

para y, respectivamente.

Si, como usualmente se hace, tomamos el peso como el recíproco de la varianza entonces tenemos:

$$W_i = \begin{bmatrix} W_i & 0 \\ 0 & W_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_{F_x}^2 & 0 \\ 0 & 1/m_{F_y}^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Por lo que la forma de la matriz de peso será:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & & & & & & \\ & W_2 & & & & & & & 0 \\ & & W_1 & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & W_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

La matriz de varianza-covarianza de las incógnitas.

El número de grados de libertad (DF), en la solución será:

$$DF = 2n - u \quad (19)$$

donde:

n = son el número de puntos de control usados.

u = es el número de incógnitas manejadas en la solución.

La varianza de la unidad de peso será:

$$m_o^2 = \frac{V^T W V}{DF} \quad (20)$$

La matriz de varianza-covarianza de las incógnitas será:

$$m_{\Delta_i} = m_0^2 N^{-1} \quad (21)$$

El número de incógnitas manejadas en la solución dependerá de cuántos errores sistemáticos se corrigen para la solución. En la tabla siguiente, los errores sistemáticos corregidos, se indican conjuntamente con el número correspondiente resultante de incógnitas, en este caso 11 ( los parámetros del DLT).

Error Sistemático corregido	Incógnitas	No.	Ecuación No.
Componentes lineales de la deformación de la película, distorsión de lentes y errores del comparador	$L_1$ hasta $L_{11}$	11	( 5 )

Del cálculo de los elementos de la orientación interior  $x_0, y_0, c$

de la ecuación (5), se pueden obtener, así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 \\ x_0 &= (L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}) L \\ y_0 &= (L_4 L_9 + L_5 L_{10} + L_7 L_{11}) L \\ c_1^2 &= -x_0^2 + (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) L^2 \\ c_2^2 &= -y_0^2 + (L_4^2 + L_5^2 + L_7^2) L^2 \\ c &= (c_1 + c_2) / 2 \end{aligned} \quad (22)$$

Para el cálculo de las coordenadas en el espacio del objeto se procede de

la ecuación (6), tenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (x + \Delta x)(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1) - (L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) &= 0 \\ (y + \Delta y)(L_4 X + L_5 Y + L_7 Z + 1) - (L_6 X + L_8 Y + L_7 Z + L_8) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son calculados en la ecuación (8) y aplicados a las coordenadas observadas  $x, y$ . Si ponemos:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \Delta x \\ \bar{y} &= y + \Delta y \end{aligned}$$

Tenemos:

$$(x L_9 - L_1) X + (x L_{10} - L_2) Y + (x L_{11} - L_3) Z + (x - L_4) = 0$$

$$(\bar{v}L_4 - L_4)X + (\bar{v}L_{10} - L_6)Y + (\bar{v}L_{11} - L_7)Z + (\bar{v} - L_8) = 0$$

De este modo en cada fotografía, podemos escribir para cada punto un conjunto de ecuaciones (23). Si son  $p$  fotografías usadas en la solución, tendremos un número  $2p$  de ecuaciones para calcular las incógnitas  $X, Y, Z$ , de coordenadas de un punto en el espacio del objeto. El número de grados de libertad será:

$$DF = 2p - 3$$

En notación en forma de matriz, el par de ecuaciones de condición que podemos escribir para el punto  $i$  de la foto  $j$ , es:

$$V_i + B_j \Delta_i + C_i = 0 \quad (24)$$

$$V_i = \begin{bmatrix} v_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \Delta_i = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$B_j^T = \begin{bmatrix} (xL_4 - L_4)(yL_4 - L_4) \\ (xL_{10} - L_6)(yL_{10} - L_6) \\ (xL_{11} - L_7)(yL_{11} - L_7) \end{bmatrix}_i$$

$$C_i = \begin{bmatrix} x + A\Delta_i - L_8 \\ y + A\Delta_i - L_8 \end{bmatrix}$$

Para  $p$  fotografías, tenemos:

$$V + B\Delta + C = 0 \quad (25)$$

Nuevamente con la solución de mínimos cuadrados tenemos:

$$\Delta_i = -(B^T W B)^{-1} B^T W C = -N^{-1} C^T \quad \text{Donde:}$$

$$N = B^T W B$$

$$C^T = B^T W C \quad (26)$$

$W$  = es la matriz de peso asociada.

Entonces nuevamente:

$$V^T W V = C^T W B \Delta_i + C^T W C$$

La varianza de la unidad de peso será:

$$m_0^2 = \frac{V^T W V}{DF} \quad (27)$$

La matriz de varianza-covarianza de las coordenadas calculadas será:

$$m_{\Delta_i} = m_0^2 N^{-1}$$

El peso asociado con cada ecuación de condición se obtiene como sigue:

De la ecuación (6), suponiendo que hay 16 incógnitas, es decir, los 11 parámetros del DLT, los primeros tres términos de la distorsión simétrica de los lentes y los primeros dos términos de la distorsión asimétrica de lentes, tenemos:

$$F_i = B_i \Delta_i + D_i \quad (28)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad D_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta_i^T = [L_1, L_2, L_3, \dots, L_{11}, K_1, K_2, K_3, P_1, P_2]_i$$

$$B_i^T = \begin{bmatrix} -X & 0 \\ -Y & 0 \\ -Z & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -X \\ 0 & -Y \\ 0 & -Z \\ 0 & -1 \\ xX & yX \\ xY & yY \\ xZ & yZ \\ Av'r^2 & Av'r^2 \\ Av'r^4 & Av'r^4 \\ Av'r^6 & Av'r^6 \\ A(r^2 + 2v'^2) & 2Av'y' \\ 2Av'y' & A(r^2 + 2v'^2) \end{bmatrix}$$

Y por la ley de la propagación de varianza, obtenemos:

$$m_{F_i} = \begin{bmatrix} m_{F_x}^2 & m_{F_x, F_y}^2 \\ m_{F_x, F_y}^2 & m_{F_y}^2 \end{bmatrix}$$

$$= B_i m_{\Delta_i} B_i^T + A^2 \begin{bmatrix} m_x^2 & 0 \\ 0 & m_y^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Donde:

$m_{F_i}$  = es la matriz de varianza-covarianza asociada con las dos ecuaciones de condición.

$m_{\Delta_i}$  = es la matriz de varianza-covarianza de las incógnitas manejadas en la solución.

$m_x^2, m_y^2$  = varianzas de las coordenadas del comparador.

$$A = L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1$$

Los pesos asociados con la ecuación de condición serán:

$$W_x = \frac{1}{m_x^2} \quad W_y = \frac{1}{m_y^2} \quad (30)$$

Este modelo ha demostrado su efectividad en la reconstrucción a 3D, además de que corrige los errores debido a distorsiones y aberraciones dentro del proceso de calibración.

## CAPITULO IV ELEMENTOS DE OPTICA.

### 4.1.- SISTEMAS ÓPTICOS.

#### 4.1.1 OJO HUMANO.

El globo del ojo, está constituido por varias membranas o envolturas y diversos medios transparentes encerrados en dichas membranas.

La primera envoltura está formada por la *esclerótica* H (fig. Ojo 4.1), que limita el globo del ojo en todos sentidos, excepto en la parte anterior donde se une la *córnea* A, membrana transparente que tiene la forma de un casquete esférico.

La segunda envoltura está constituida por la *coroides*, I y el iris o diafragma muscular de diversos colores, cuya abertura, C, se llama *pupila* ó *niña del ojo*.

La tercera membrana es la *retina* K en la que se reflejan las imágenes. Es sumamente sensible y de tan poca cohesión, que se rasga cuando se toca. La retina se une por su cara externa a la cara interior de la *coroides* y termina por la parte anterior en un anillo que rodea al *crystalino*, E.

Los medios transparentes del ojo son tres: el *cuerpo vítreo*, *el cristalino* y *el humor acuoso*. El *cuerpo vítreo* L, ocupa los tercios posteriores del globo ocular, es de forma esferoidal, completamente transparente y de consistencia comparable a la del hierro fundido. El *cuerpo vítreo* se compone de un líquido llamado *humor vítreo* y de una membrana que lo envuelve, llamada *hialoides*.

El *cristalino* E, tiene la forma de una lente biconvexa y está situado entre el *cuerpo vítreo* y el *humor acuoso*. Sus caras son lisas y de curvatura desigual: la más convexa corresponde al lado del *cuerpo vítreo*; la menos convexa está enfrente de la *pupila*.

El *humor acuoso* B, llena el espacio comprendido entre la *córnea* y el iris, llamado *cámara anterior del ojo*. Es un líquido incoloro, transparente y de densidad casi igual a la del agua.

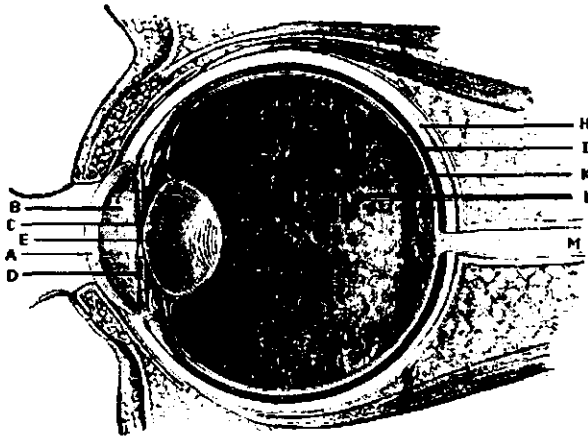


Fig. 4.1 Ojo Humano

El *nervio óptico* M, que termina en la retina y transmite al cerebro las impresiones luminosas, atraviesa la *esclerótica* H, y la *coroides* I, por la parte posterior del globo ocular.

#### 4.1.2 SISTEMA ÓPTICO HUMANO.

El ojo humano es una verdadera cámara oscura, es decir, un espacio cerrado por todas partes, que tiene en una de las paredes un orificio pequeño por el cual penetran los rayos de luz y dentro una pantalla, en la que proyecta la imagen invertida de los objetos exteriores con sus colores propios.

Para comprender bien cómo se forman las imágenes en la cámara oscura, supóngase un objeto AB (fig. 4.2) enfrente de una pared que tenga un orificio O: de todos los rayos emitidos por el punto A, solamente el rayo AA' puede llegar a la pantalla MN proyectando en A' la imagen de A.

Por idéntica razón B se proyecta en B' y cualquier otro punto de AB se proyectará en el espacio comprendido entre A' y B', formando de este modo una imagen real e invertida del objeto.

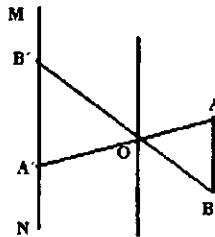


Fig. 4.2

La figura 4.3 representa una cámara oscura, en cuyo frente hay un pequeño orificio, por el cual penetran los rayos luminosos, formando en la pantalla una imagen invertida de los objetos que hay en el exterior. Si en el orificio de la cámara oscura se acomoda una lente convergente, los rayos refractados formarán una imagen más clara y más definida.

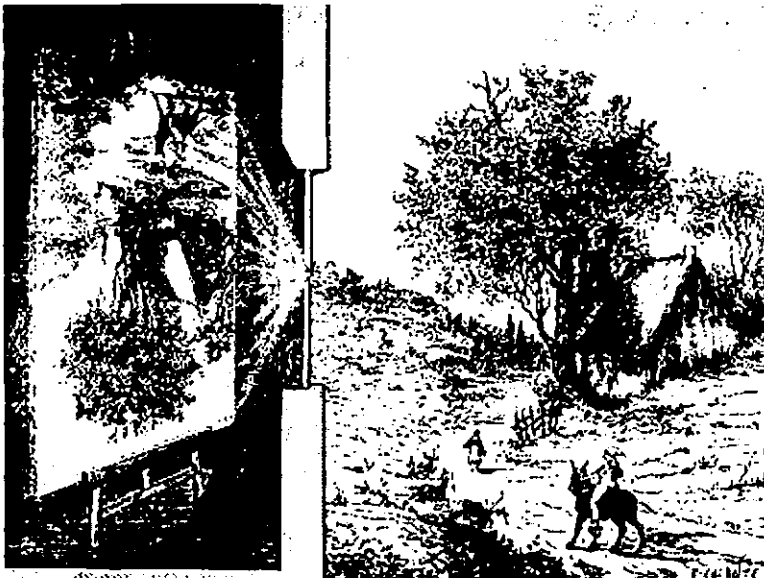


fig. 4.3

El ojo humano tiene una lente, el cristalino, que concentra los rayos luminosos; una pantalla, la retina, donde se proyectan las imágenes; una membrana oscura, la coroides, que cubre interiormente el globo ocular y absorbe todos los rayos que no concurren a la formación de la imagen; y, por último, un diafragma, el iris, que al dilatarse ó contraerse según la cantidad de luz que recibe el ojo, limita los rayos luminosos de modo que la imagen se dibuje clara y perfecta en la retina. La fig. 4.4 indica como se forma una imagen en el ojo.

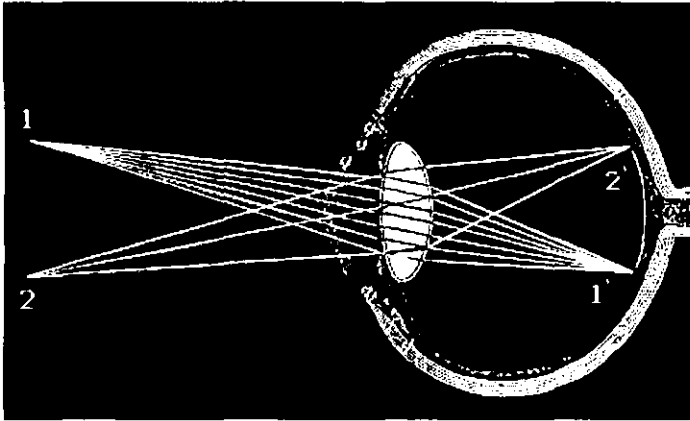


fig 4.4

#### 4.1.3 SISTEMA ÓPTICO EN UNA CÁMARA

Se llama luz a lo que ilumina y hace visibles los objetos. Vemos a los objetos en virtud de la luz que de ellos llega a nuestros ojos. Si esa luz proviene del cuerpo mismo, se le llama cuerpo luminoso. Pero también puede provenir de otro cuerpo, que ilumina al objeto que vemos; a este objeto se le llama entonces cuerpo iluminado.

Todo cuerpo emite energía luminosa cuando sus electrones se mueven en una forma especial.

Una onda puede considerarse como una fuerza o colección de fuerzas cuya magnitud fluctúa. Así, por ejemplo, cuando se tiene una cuerda de vibración, transversal, puede pensarse en una fuerza que fluctúa obrando primero hacia arriba y después hacia abajo. La energía luminosa puede propagarse a partir de una fuente emisora y lo hace también en forma de una colección de fuerzas variables que se forman de ondas avanzadas alejándose a una velocidad considerable. Se dice por consiguiente, que la luz es un fenómeno ondulatorio.

Cuando la energía de las ondas luminosas llega a un objeto, primero o bien es reflejada por el objeto, como ocurre con los cuerpos iluminados, segundo o bien lo atraviesa, como ocurre con los cuerpos transparentes, tercero o bien da lugar a un cambio químico, es esto último lo que sucede en la retina del ojo humano o sea que la energía de las ondas luminosas da lugar a cambios químicos que producen sobre el nervio óptico el fenómeno de la visión.

La anterior explicación respecto a la transmisión de la energía luminosa es lo que en forma simplificada constituye la llamada teoría ondulatoria de la luz.

El funcionamiento óptico de la cámara fotográfica es muy parecido al del ojo humano, el ojo consiste en un conjunto de medios refringentes, el más importante de estos es el cristalino, el cual hace las veces de una lente convergente que forma imágenes reales de los objetos que se ven, sobre una película sensible a la luz que recibe el nombre de la retina R.

El ojo humano funciona como la cámara fotográfica, es decir que el cristalino, que es una lente convergente, arroja sobre la retina una imagen real del objeto que se ve. Una cámara fotográfica efectúa el enfoque acercando o alejando la lente de la película sensible con el objeto de obtener siempre sobre ésta una imagen nítida del objeto que se observa. En el caso del ojo el procedimiento

que ha dispuesto la naturaleza es diferente. En vez de que se acerque o se aleje el cristalino de la retina, lo que hace es variar su convergencia. Variar la convergencia de la lente quiere decir modificar su distancia focal, valiéndose de los músculos llamados ciliares; los músculos ciliares modifican la convergencia del cristalino dando a su cara delantera una convexidad más o menos grande. Al variar la convergencia del cristalino se pueden enfocar sobre la retina lo mismo, objetos que estén muy lejanos, que objetos que estén muy cercanos.

El fenómeno de enfoque que efectúan los músculos ciliares en forma instintiva recibe el nombre de *acomodación* y sólo se hace necesario para ver objetos cercanos, ya que la distancia focal del cristalino está hecha de tal manera que los objetos alejados se ven distintamente sin hacer ningún esfuerzo.

Se le llama *reflexión* de la luz al cambio de dirección que sufre un rayo luminoso al llegar a un espejo.

Este fenómeno es semejante a lo que ocurre con una pelota que se arroja rodando por el suelo contra una pared vertical y rebota.

Se le llama *refracción* de la luz al cambio de dirección que sufre un rayo luminoso al atravesar la superficie que separa dos medios transparentes. Si este paso no es perpendicular a la superficie de la separación de los dos cuerpos, la luz cambia de dirección al pasar.

## 4.2 DISEÑO DE LENTES

La ciencia de la óptica no es nueva, en la actualidad existen descubrimientos que fueron hechos por diversos investigadores como los rayos - X , el estudio de la radiación, los rayos ultravioleta y los rayos catódicos por ejemplo.

El arte y ciencia del diseño de lentes ha sido basado durante mucho tiempo en métodos desarrollados por geometría óptica.

Los diferentes rayos pueden ser tratados como procedimientos independientes.

Cuando los rayos son reflejados a una superficie, los ángulos de incidencia y reflexión son iguales.

Los sistemas ópticos han sido divididos en 3 tipos básicos:

a) Sistema Dióptrico: Este contiene solo elementos refractivos, (prismas, filtros, ventanas, lentes, etc.)

b) Sistema catóptrico: Estos contienen solamente elementos reflectivos, (como los espejos).

c) Sistemas catadóptricos: Estos contienen cualquier refracción necesaria así como elementos reflectivos y componentes.

Un procedimiento básico en el diseño de lentes es el rayo-calca, y significa que determina la ruta de varios rayos pasando a través de elementos del sistema y finalmente en la imagen espacial, examina el patrón dado para el ajuste del rayo en la ó hacia la aproximación del punto de imagen deseado.

Una lente es una porción de cristal limitada por dos caras esféricas o por una esférica y la otra plana. Se llama lente convergente aquella que es mas gruesa en el centro que en sus bordes; se llama lente divergente a la que es mas delgada en el centro que en sus bordes.

En una lente convergente todos los rayos luminosos paralelos que inciden en la lente después de atravesarla convergen en un punto situado al otro lado de ella llamado foco de la lente.

Una lente convergente transforma los rayos paralelos en rayos convergentes. Un rayo que pasa por el foco, en las lentes convergentes se refracta paralelo al eje óptico.

Los rayos paralelos al eje óptico en las lentes divergentes, se refractan de tal forma que la prolongación atrás de la lente del rayo refractado pase por el foco. Un rayo incidente que se dirige al foco, en las lentes divergentes, se refracta paralelo al eje óptico. El rayo que pasa por el centro óptico, de la lente divergente, no se refracta. El eje óptico es conocido también como eje principal.

En forma general, para cada tipo de lentes la distancia del foco a la lente se le llama distancia focal de ésta. Toda lente tiene dos focos los cuales están situados simétricamente respecto a la lente.

Las lentes tienen un eje que es una línea que atraviesa el lente en forma perpendicular al eje óptico. Eje óptico es la línea que atraviesa el lente perpendicularmente al eje de éste y a lo largo del cual se encuentran los dos focos y también se le conoce con el nombre de eje principal.

El punto donde coinciden el eje principal y el eje de la lente se le conoce como centro óptico y en este punto todo rayo que pasa por él no sufre desviación y por lo tanto un rayo paralelo al eje de



las lentes se refracta pasando por el foco. El doble de la distancia focal corresponde al centro de curvatura de la lente.

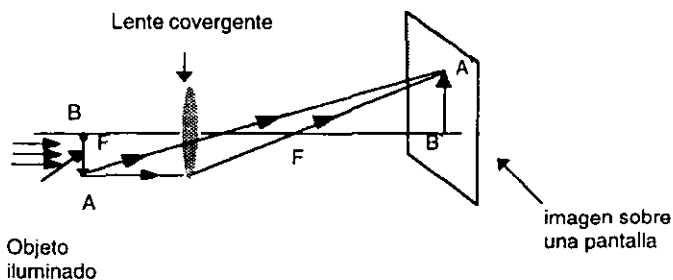


Fig. 4.5

De la figura 4.5 podemos decir que el punto A es un punto de un objeto en el espacio y el punto A' es el mismo punto sobre el plano de la imagen, debido a la refracción del rayo luminoso que a partir del punto A incide sobre la lente y se refracta hacia el plano de la imagen.

### 4.3 ABERRACIONES

Es posible demostrar teórica y experimentalmente que una sola lente no puede producir matemáticamente un punto de imagen perfecto. Las imperfecciones de imagen se llaman aberraciones y se miden en términos cuantitativos por la magnitud de lo borroso de la imagen. Cualitativamente, las aberraciones de imagen en luz monocromática se clasifican en forma general como: Aberraciones esféricas, astigmáticas, curvatura del campo y distorsión. Esta última, se refiere principalmente a localizaciones impropias de imagen y no a formaciones de imagen. Para todas las aberraciones exceptuando en la distorsión se puede expresar ya sea en mediciones longitudinal o lateral. Las aberraciones llamadas longitudinales se miden en dirección paralela al eje óptico. La aberración lateral o transversa se mide perpendicularmente al eje óptico y usualmente en el plano de imagen de mejor foco. La distorsión es el desplazamiento de un punto de la imagen de su posición ideal, radialmente interna o externa del eje óptico; ya que su medición es siempre lateral.

En óptica elemental (aproximación de Gauss), todos los rayos luminosos incidentes, paralelos al eje principal, salen por el punto focal F, pero la luz tiene varias longitudes de onda, y para cada longitud el sistema óptico tiene una refracción diferente; así, cuando entra un rayo de luz, salen en realidad varios rayos con varios puntos. Este efecto se llama aberración cromática. La corrección a esta aberración es utilizar vidrios de varios índices para hacer lentes, de forma que la variación de la distancia focal, en los extremos del espectro visible, sea la más pequeña. Para una longitud correspondiente al color azul, da una distancia focal F1. Para una longitud de onda correspondiente al rojo, una distancia focal F2; esto con vidrio ordinario. Con la lente especial llamada Crown-Flint, la curva característica es diferente, es decir que tenemos casi la misma distancia focal F para todo el espectro de la luz.

La distorsión es la aberración geométrica que tiene mas importancia en fotogrametría; cuando un rayo incidente entra con un ángulo alfa en el espacio del objeto, se proyecta con un ángulo alfa prima en el espacio de la imagen.

La amplitud de la distorsión se puede medir en el plano de la imagen, el problema es que la distancia se cambia por el ángulo alfa, es decir, para otro ángulo, por ejemplo, en un ángulo más pequeño tenemos una diferencia de alfa menos alfa prima, que no será la misma que en el extremo del campo.

En la práctica, la distorsión se traduce así: cuando se toma una fotografía de un objeto con líneas paralelas y verticales, por ejemplo, la fachada de una casa, la imagen obtenida tiene

deformaciones, como se muestra en las figuras siguientes. Cabe mencionar como nota importante que no hay que confundir distorsión y deformación perspectiva; por ejemplo, esta misma casa puede ser como en la fig. 4.8 cuando se toma una fotografía con eje inclinado, pero ésta no es distorsión del objetivo, sino deformación perspectiva. La fig. 4.9 indica la combinación de deformación perspectiva y distorsión del objetivo en una fotografía.

Generalmente la corrección de aberraciones representa la realización de proposiciones contradictorias. Se necesita el estudio de objetivos especiales para cada aplicación: fotos de colores, gran apertura, campo largo, ortoscopia (esto se obtiene con varios tipos de vidrios, varios radios de curvatura), etc. En fotografías se puede hacer correcciones de la aberración de algunos puntos por métodos matemáticos.

La distorsión de las imágenes está relacionada con la resolución en que fueron trabajadas, la resolución es la calidad con la que se presenta un objeto en un monitor, por ejemplo, y depende del tamaño del grano o pixel que se use; entre más pixeles contenga una imagen, mayor y mejor resolución tendrá y por tanto la distorsión será menor.

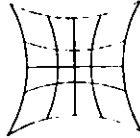


Fig. 4.6

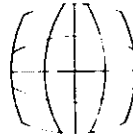


Fig. 4.7

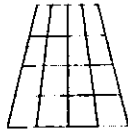


Fig. 4.8

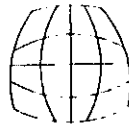


Fig. 4.9

Otra fuente de error son las distorsiones provocadas por factores climatológicos (temperatura y humedad) y el tiempo a las que esta sujetas las emulsiones portadoras de las películas fotográficas.

Existe también una distorsión radial que es irregular y puede ser interpretada como el desplazamiento diferencial de puntos de imagen. Esta distorsión puede ser determinada por medio de curvas de distorsión en direcciones específicas del centro a las esquinas de la imagen.

#### 4.4 CÁMARAS

Usar una cámara para video, cine o para hacer una fotografía, así como usar un lápiz para hacer un dibujo, no es sino un medio de comunicar algo. En definitiva el resultado de éstas actividades es una serie de marcas hechas sobre un papel y que conforman una afirmación visual de tipo informativo, ideológico, emocional, etc. Aunque parecen muy diferentes, estos medios comparten muchas características.

##### CÁMARA FOTOGRÁFICA.

Una cámara fotográfica es un dispositivo que simula detener el tiempo, el realismo de la fotografía es capaz de retrotraernos a épocas pretéritas y hacemos vivir fechas históricas. Hasta 1839 todos los documentos visuales eran dibujos, grabados o pinturas. Gracias a la fotografía hoy existen fotografías de la guerra civil, pero no de la guerra de independencia; sabemos qué aspecto tenía Lincoln, pero no cuál era el de George Washington, sabemos qué aspecto tenía Benito Juárez pero no Miguel Hidalgo y Costilla. La reina Victoria fue la primera coronada que se sometió al nuevo invento.

La guerra de Crimea (1853-1856) fue el primer conflicto bélico fotografiado. Las limitaciones del proceso y el sentir de la época influyeron decisivamente sobre el resultado. El fotógrafo Roger

Fenton usó una cámara de 20x16 pulgadas provista de placas de cristal que habían de ser cubiertas con el colodión sensible y húmedo inmediatamente antes de la exposición, en un laboratorio móvil.

En los comienzos de la fotografía, fue la calidad con la que la cámara recogía cualquier detalle, y fue lo que más llamó la atención. En los últimos años el equipo fotográfico se ha simplificado y refinado, los sistemas son más compactos y los procesos cada vez más sencillos. Todo esto permite concentrarse en cuestiones de encuadre, luz, etc. y despreocuparse de aspectos más técnicos. Desde luego, sigue siendo necesario aprender cómo funciona cada cosa, porque produce los resultados que produce y que es lo que no puede hacer.

#### CÁMARA DE VIDEO.

El video es un sistema que se divide en tres fases fundamentales:

- 1.- Captación.
- 2.- Grabación.
- 3.- Reproducción.

**Captación:** Es la fase en la que la luminosidad y cromaticidad contenidas en la escena, en los trajes, en los decorados, en los maquillajes y en la luz que los ilumina se traducen mediante un sistema de análisis, la cámara, en una señal de video.

**Grabación:** Esta señal de video puede también ser grabada en un magnetoscopio y reproducirse en el momento que se desee.

**Reproducción:** Mediante un sistema de síntesis, en el monitor o en el televisor, la señal de video se transforma en una información luminosa en la pantalla, correspondiente a la escena original.

El conjunto de las tres fases debe tener como fin primordial lograr una reproducción; la más fiel posible de la escena original. Las transformaciones de energía en la fase de captación, la luminosidad de la escena se transforma en una señal eléctrica.

Energía luminosa, esta energía en la TV debe ser transformada en energía eléctrica o en impulsos eléctricos portadores de la señal de video. El elemento que hace posible esta transformación es un mosaico de células fotosensibles llamado fotocátodo (T). La imagen formada en el fotocátodo, por los rayos de luz reflejados, será transmitida en forma de impulsos eléctricos. En la fase de reproducción, se hace necesaria una transformación de energía a la inversa: los impulsos eléctricos deben convertirse en señal luminosa que reproduzca la imagen de la realidad con los mismos niveles de luces y sombras que en el original; es decir, hay que transformar la energía eléctrica en energía luminosa.

Los sistemas adoptados para la televisión en color se basan en la respuesta que los conos de la retina del ojo verifican ante las radiaciones rojas, verdes y azules realizando una integración de estas radiaciones y obteniendo todos los demás colores. De la luz que recibe la retina, los conos, según sea su tipo, seleccionan las componentes que posee de los tres colores primarios; debido a éste hecho, al ojo le es suficiente observar variaciones en luminosidad de las tres radiaciones primarias sin necesidad de recibir información de los demás colores ya que él se encargará de reproducirlos. En concreto, necesitamos realizar un sistema que capte las componentes rojas, verdes y azules de la escena, las transmita hasta donde está el observador y se las presente en forma que su ojo sea capaz de integrarlas para reproducir los colores originales mediante una mezcla aditiva. La señal de video según el tipo de codificación de color se ha adaptado tres sistemas: NTSC, PAL y SECAM.

**NTSC:** Sistema norteamericano compuesto por 525 líneas a 60 cuadros por segundo, utilizado en Norteamérica, algunos países de América del sur y Japón.

**PAL:** Sistema alemán compuesto por 625 líneas a 50 cuadros por segundo, utilizado en Europa Occidental, Argentina y Brasil.

**SECAM:** Sistema francés utilizado en países del este europeo, países árabes y, por supuesto Francia.

Las cámaras disponen de distintos sistemas para descomponer la imagen en otras tres independientes, sensibles al azul, al verde, al rojo y crear tres señales eléctricas correspondientes a cada color primario.

Una cámara de video puede tener tres, uno o ningún tubo. Cámara de tres tubos (tipo profesional). El color se separa mediante un sistema de espejos dicróicos (variación del color) que

reflejan cada uno de ellos un sólo color y dejan pasar por transmisión el resto. Cámara de un tubo: (de tipo doméstico). El sistema de filtros está compuesto por unas bandas verticales que tienen los tres colores y descomponen la luz en cada uno de ellos. Cámara sin tubo: Existen dos tipos de cámaras, las de componentes MOS (metal óxido semiconductor) y las de dispositivo CCD. En las primeras, el tubo es sustituido por un sensor de imagen compuesto por un material semiconductor de muy alta sensibilidad. Por lo que respecta al tipo de cámara con CCD hay que decir que la sustitución del tubo por este dispositivo permite aumentar el número de elementos sensibles a la luz (píxeles) de 190.000 a 250.000, obteniéndose así un 30 por 100 de mejora en la resolución horizontal. En concreto las ventajas sobre el tubo convencional se resumen en: necesidad de una iluminación de 19 lux (unidad de iluminación), eliminación de la persistencia de la imagen que produce en las cámaras de tubo un fácil deterioro de éste, y finalmente, más resistencia a golpes externos, por ejemplo, el CCD permite enfocar al sol sin quemar el tubo ni ningún otro componente de la cámara.

La cámara de video es uno de los adelantos más efectivos dentro de la toma de imágenes y de una forma mucho más sencilla, cada día que pasa el sistema de videograbación mejora, así como el manejo de la cámara.

La posibilidad de formar imágenes mediante un orificio pequeño es conocida, y constituye la base de la cámara oscura. Su explicación es sencilla: Como la luz viaja en línea recta, los rayos procedentes de la parte superior de la escena situada ante el orificio solamente pueden llegar a la parte inferior de la pantalla receptora del interior de la cámara, y viceversa, formando así una imagen invertida. Esta imagen es oscura y poco definida, porque el agujero ha de ser muy pequeño, lo que provoca una cierta dispersión de los rayos que lo atraviesan.

Para producir una imagen más luminosa y definida es preciso recoger más luz y hacer que los rayos converjan, es decir enfocar. Esto exige el uso de una lente. Cuando un rayo de luz alcanza un material transparente, como el cristal, con un ángulo oblicuo, su trayectoria se ve alterada o refractada.

La imagen de un agujero: Si la luz de una escena muy iluminada entra en una habitación o una caja oscura a través de un orificio pequeño, se formará una imagen de aquella en la superficie situada frente al orificio. Esta ocurre porque la luz de la parte superior de la escena solo puede alcanzar la parte inferior de la parte receptora a través del orificio y viceversa. La nitidez es escasa, porque los rayos luminosos no se enfocan, sino que convergen en un pequeño haz del tamaño del orificio.

## CÁMARA DE CINE

La cámara de cine es un aparato que fotografía y reproduce en proyección vistas animadas: el cinematógrafo creado por los hermanos franceses Lumiere en 1895 está fundado en la persistencia de las imágenes en la retina. En 1890, presentó el francés Marey un aparato que podía fotografiar quince veces por segundo; en 1892, el kinetoscopio de Edison permitía hacer desfilar ante el observador una serie de fotografías que producían la ilusión del movimiento.

El cine científico nació mucho antes que el cine como entretenimiento. Se considera a la famosa proyección pública del cinematógrafo Lumiere, el 28 de diciembre de 1895, como el inicio del cine, pero veinte años antes, el astrónomo Jules Janssen, quien fuera más tarde director del observatorio Meudon en París, había registrado las fases del tránsito de Venus a través del disco solar. A fin de observar este fenómeno en 1874, Janssen viajó a Japón llevando consigo un "revolver fotográfico" construido por él. Dicho instrumento funcionaba sobre la base de una placa fotográfica circular en donde se registraban imágenes sucesivas, de aproximadamente un segundo de exposición cada una.

En la década de 1870, el fotógrafo británico, Edward J. Muybridge, que entonces vivía en Estados Unidos, realizó una serie de experimentos fotográficos a fin de terminar una discusión acerca de las posiciones sucesivas de las patas del caballo y su contacto con el césped del hipódromo.

La cámara de cine funciona de la siguiente manera: La película negativa sirve para sacar otra, positiva, que se proyecta sobre una pantalla, el obturador se cierra, a cada cambio de vista, un tiempo imperceptible y la persistencia de la imagen en la retina da la ilusión del movimiento.

## 4.5 DISEÑO DE COMPARADORES

Un comparador es un instrumento óptico usualmente preciso. Se utiliza para las mediciones de coordenadas rectangulares o polares en puntos sobre cualquier superficie plana, tales como las fotografías planas.

Un monocomparador es un instrumento de precisión que consiste de un sistema de medición, un sistema de visión y un sistema de lectura diseñado para la medición de coordenadas de imagen en una sola fotografía.

Un Estereocomparador (fotogrametría) es un instrumento estereoscópico para medir el paralaje; usualmente incluye un medio para medir puntos de coordenada de imagen en fotogrametría.

Un comparador es una estructura regular de la cual se conocen todas sus dimensiones. Las mediciones de imagen de la película son usualmente hechas con dos comparadores de coordenadas. Por ejemplo puede contar con una rejilla especial que tiene aproximaciones iguales en el área de trabajo en donde se está empleando la calibración del comparador, la rejilla puede tener un área determinada para un mejor mapeo de las cámaras empleadas, también un operador puede observar los puntos de la cámara a través del comparador microscópico y valores medidos, para que al final los valores sean comparados con los valores estándares.

Así, cada investigación cuenta con su propia secuencia de lectura de coordenadas para las rejillas, el número de repeticiones de lectura y número de lectura de patrones.

Los datos son normalmente reducidos por cada iteración hecha usando un programa de mínimos cuadrados hasta obtener un óptimo resultado de la rejilla. Las correcciones pueden ser hechas tanto para uno o para otro dependiendo del ajuste del comparador ó corregido de acuerdo al número de mediciones.

## 4.6 CALIBRACIÓN

Las mediciones de imágenes fotográficas no siempre es un proceso bien definido, éste puede ser limpiado ó de otra manera sería preparación de un objeto bien definido.

Cuando las fotografías son tomadas durante el vuelo se revisa la velocidad de la película donde existen pocas probabilidades de que la película se degrade en forma exagerada, por otro lado la apertura y las aberraciones del lente limitan la calidad óptica, así que la selección de los límites de emulsión, la resolución del sensor, la vibración ó el movimiento angular pueden degradar la calidad de la imagen.

Muchos métodos para calibración de cámaras han sido desarrollados, alta exactitud, muy caros, pero existen calibradores en laboratorios americanos con alto desempeño profesional y alta efectividad; algunos de los métodos son:

Calibración de Multicolimador. Éste método calibra por medio de colimadores, el colimador es un aparato óptico que permite obtener un haz de rayos luminosos paralelos.

El calibrador NRC ( Investigación Nacional Canadiense). Éste calibrador es un aparato fotográfico de unos 43 colimadores y donde la calibración de la cámara contiene azimuts (ángulos que con el meridiano forma el círculo vertical que pasa por un punto de la esfera celeste ó del globo terráqueo). El sistema es usado en el laboratorio militar para fines prácticos.

Calibración por Goniómetro. La calibración de éste tipo es desarrollada en algunos laboratorios y es desarrollada basándose en goniómetros, éste instrumento es de tipo topográfico y se emplea para levantar planos y medir ángulos de un terreno.

Calibración con cámaras bajo el agua. Éste tipo de calibración está elaborado usando instrumentos multicolimadores diseñados por Mc Neil en 1972. La distancia bajo el agua de la cámara para poder fotografiar un objeto en el agua es limitada por la turbulencia de la misma. El foco de cada colimador debe ser de fácil ajuste y debe cumplir con una distancia mayor a 6 pies.

La calibración Analítica tiene un punto inicial común que sirve como introducción a los modelos analíticos específicos para la distorsión radial directa a las ecuaciones proyectivas en la fotogrametría. Los parámetros definidos en las funciones de distorsión son recuperados simultáneamente con la proyección de los parámetros ajustados por medio de mínimos.

Fototriangulación está definido como el proceso de la extensión horizontal y/o vertical del control por medio del cual la medición de ángulos y/o distancias en fotografías sobre puestas están relacionadas en una solución espacial usando los principios de perspectiva de la fotografía. Si este

proceso involucra fotografías aéreas se le llamará aereotriangulación. Se llama estereotriangulación a este mismo procedimiento al usar pares de fotografías estereoscópicas.

Los errores causados en la operación de los instrumentos se conocen como errores personales o errores de observación. Tales errores ocurren en el establecimiento de la orientación interna de las fotografías tomadas por las cámaras usadas en la estereotriangulación; al establecer la orientación relativa, el escalamiento y la orientación absoluta de un primer modelo de triangulación; en la co-orientación de las fotografías siguientes y de la transferencia de escala entre los modelos adyacentes y en la medición de las coordenadas  $x,y,z$  de puntos a ser determinados por estereotriangulación.

Existen métodos distintos para hacer triangulación analítica; los tres métodos principales son: Procedimientos de ajuste secuencial, métodos de modelos independientes y de ajustes simultáneos.

Después de la segunda guerra mundial llegó a Estados Unidos procedente de Alemania un doctor de nombre Hellmut Schmid quien se convirtió en el director de los Laboratorios de Mediciones Balísticas en Aberdeen. En una serie de importante publicaciones (de 1956-1959) él desarrolló los principios de modernas multiestaciones para la fotogrametría analítica. A pesar de que sus investigaciones fueron inicialmente dirigidas a la operación de cámaras-balísticas, en las cuales varias cámaras podían observar un evento simultáneamente, la aplicación de estos procedimientos para controlar bloques de fotografías aéreas que inmediatamente se extendían en cintas. Las principales características del trabajo de Schmid son una corrección rigurosa de solución por mínimos cuadrados; la solución simultánea usando cualquier número de fotografías, y un estudio completo de la propagación del error. El es el primer fotogramétrico en planear sus soluciones anticipándose al uso de las computadoras electrónicas de alta velocidad.

G.H.Schut de origen canadiense formuló otra triangulación analítica reduciendo a una notación común y clasificándola de acuerdo a tres criterios: a) procedimientos de triangulación. b) tipos de ecuaciones de condición y c) métodos para resolver las ecuaciones de condición.

Los principios básicos de la triangulación analítica son en general en los siguientes términos: Puede considerarse como una transformación matemática entre un punto de imagen en un sistema de coordenadas rectangulares (espacio de imagen) y un punto de un objeto en otro sistema de coordenadas rectangulares (espacio del objeto). Este concepto de base matemática es valido para todas las aplicaciones de la fotogrametría analítica.

Los dos sistemas de coordenadas fundamentales para el análisis de aereotriangulación son el sistema de coordenadas de la imagen y el sistema de coordenadas del objeto en el espacio.

El sistema de coordenadas fotográfico descrito esta basado en la suposición de que la cámara produce una perfecta proyección centrada del objeto; esto quiere decir que las lentes pueden ser consideradas como un punto y que un solo rayo de luz emitido de cualquier punto en el objeto en el campo de visión va formar una imagen tal que el objeto, lentes e imagen caen en una línea recta. De hecho esta es la base del algoritmo que se aplica para ajustar. Pero sin embargo las coordenadas medidas en la imagen difícilmente satisfacen esta suposición. Este algoritmo es resultado de un preprocesamiento que se aplica normalmente a las mediciones "crudas" (sin ningún procesamiento previo). Las correcciones necesarias dependerán de los requerimientos y equipo particulares.

En una cámara métrica bien ajustada la intersección de los puntos opuestos de las marcas fiduciales van a coincidir exactamente con el punto donde una perpendicular forma el punto nodal trasero de las lentes y se intercepta con el plano focal. Este punto es llamado punto principal.

Para unos lentes perfectos este es el punto donde el rayo de luz que entra por la parte delantera de los lentes en forma perpendicular al plano focal es llevado hacia el foco. En la vida real los lentes perfectos no existen ni tampoco las intersecciones coinciden exactamente con el punto principal; por esta razón cualquier punto medido en un sistema de coordenadas de imagen debe someterse a una traslación que relacione matemáticamente las coordenadas tridimensionales con las coordenadas de imagen y el punto principal y la distancia focal.

Como se dijo en el inciso anterior la transformación matemática de un punto en el espacio dentro de un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema rectangular de coordenadas en el plano es factible.

La calibración de cámaras es muy importante para la obtención de datos geométricos de exactitud especial.

Las mediciones hechas son las asignaciones de números al material de las cosas para representar la relación existente entre éstos con respecto a las propiedades particulares, ya que siempre se miden las propiedades de las cosas y no las cosas mismas.

Para una mejor calibración es preciso contar con ciertos requerimientos que deben estar establecidos como preparativos para la secuencia de operaciones como: Las mediciones para obtener la exactitud del aparato, deben estar hechas en fracción de segundos, ó como la gran desventaja del ojo humano en relación con la exactitud al medir y poder ser más exacto en la percepción de las mediciones.

La calibración de la cámara es un proceso con el que las características geométricas de un mapeo de cámara individual son determinadas. El buen desempeño que se obtiene con la cámara es cuando se aplica para fotografiar mapas y con esto permitir la obtención de medidas para obtener la distancia en elevaciones ó la tierra.

El lente de la cámara es muy importante ya que con éste es posible un mejor acercamiento y una mejor exactitud.

El número de métodos de calibración de cámaras depende del equipo y la técnica que se tenga, así que si se tiene un buen lente y un buen equipo las probabilidades de error son mínimas.

### 5.1 ANTECEDENTES

El sistema computarizado ANABIO (Espinosa 1993 y Espinosa 1995) fue desarrollado con el objeto de proporcionar al entrenador deportivo una herramienta útil en la depuración de la técnica de sus atletas. Los métodos implantados permiten evaluar los movimientos y desplazamientos del cuerpo humano utilizando los principios de la Biomecánica Deportiva.

Se utiliza al video comercial formato NTSC (National Television System Committe) como medio de obtención de las secuencias de cuadros que conforman un archivo de movimiento. Estos cuadros una vez digitalizados serán la información básica de la secuencia a analizar.

El cuerpo humano se representa en 14 segmentos corporales: cabeza, tronco, brazos, antebrazos, manos, muslos, piernas y pies; de acuerdo al método de Chandler (Chandler Et al 1975). Ver figura 5.1

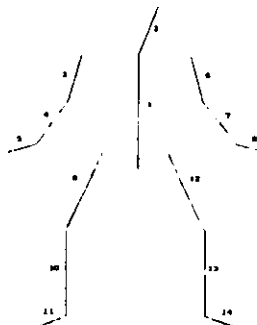


Fig. 5.1 Numeración de los segmentos.  
(Espinosa 1993, ANABIO <sup>3D</sup>)

El sistema consta de 17 menús que ofrecen las siguientes posibilidades:

- 1.- CREACIÓN DE ARCHIVOS. El sistema crea dos archivos: de datos (relativos al atleta, al deporte, fechas, edad, masa, longitudes, etc.) y de movimiento. Estos pueden ser depurados y desplegados.
- 2.- DESPLEGAR IMÁGENES. Da la posibilidad de ver alguna de las imágenes que conforman la secuencia y hacer mediciones de longitudes y ángulos sobre ella.
- 3.- ANALIZAR EL MOVIMIENTO. Es posible reconstruir el movimiento originalmente grabado en video, en la representación de 14 segmentos por medio de una animación. Calcula los valores del desplazamiento lineal del atleta: despliega las distancias en x (horizontal) y en y (vertical) recorridas por el centro de gravedad a partir del primer cuadro, y las velocidades en x y en y desarrolladas por el centro de gravedad.

Permite obtener gráficas de posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad para la secuencia del movimiento analizado.

El sistema permite conocer los valores aproximados del desplazamiento angular de articulaciones o segmentos proyectados en el plano. Mostrando la variación de la amplitud de los ángulos, generando con los valores de los tiempos y los radianes correspondientes archivos de datos.

Calcula los momentos de inercia para cada postura o cuadro de una secuencia, y dibuja para cada cuadro los valores de momento de inercia correspondientes a los 14 segmentos, el valor del radio, el valor del ángulo del radio con respecto a la horizontal y el valor del momento de inercia total.

Permite también, comparar el mismo movimiento ejecutado por dos personas diferentes. El sistema ANABIO se ha utilizado en la evaluación de la técnica de atletas universitarios, detectándose fallas y diferencias en la ejecución de movimientos específicos que el entrenador podría corregir por medio de un adecuado plan de entrenamiento.

La desventaja más importante de este sistema es que el análisis del movimiento que se puede hacer es bidimensional, es decir, la proyección de movimiento en un plano. Este tipo de análisis se



puede aplicar solamente en actividades deportivas, en las que el individuo se desplace de una forma lineal proyectable en el plano sagital de su cuerpo, (como es natación, barra fija en gimnasia, marcha, etc.) donde es posible utilizar una sola cámara colocada en forma perpendicular (el eje focal) al camino que recorre el individuo. En actividades en las que el desplazamiento es aleatorio como Karate-Do, Tae Kwon Do, manos libres en gimnasia, etc., se requiere otro método de análisis. La implantación del sistema computarizado de ANABIO3D se contempla como el recurso adecuado para este propósito. Este sistema debe permitir el cálculo de los parámetros cinemáticos y dinámicos a partir de dos o tres grabaciones simultáneas del movimiento a analizar. Por otro lado, los métodos de cálculo de los parámetros que describen los movimientos a partir de información tridimensional se aproximan mejor a la realidad.

Este trabajo contribuye con una propuesta para el diseño del *comparador* de la justificación del modelo matemático en la obtención de las ecuaciones a utilizar en la reconstrucción a 3D.

## 5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

De lo expuesto anteriormente, el proyecto ANABIO3D plantea la necesidad de resolver los siguientes problemas:

- A) La captura de información (imágenes) con dos o tres cámaras.
- B) El diseño de un instrumento de comparación que proporcionara la relación de las medidas del mundo real con las medidas en la computadora.
- C) La selección del modelo matemático adecuado a los instrumentos disponibles.

Los módulos de captura del sistema incluyen procedimientos de manejo de instrumentos y procedimientos computarizados. Los módulos de manejo de instrumentos son los siguientes:

- a) Establecimiento del espacio de grabación (locación)
- b) Posición del *comparador*.
- c) Ajuste de instrumentos.
- d) Sesión de grabación.

Para resolver los puntos anteriores se hicieron varias pruebas y se diseñaron varios dispositivos que sirvieron de *comparador* hasta llegar a un diseño final. Considerando el equipo disponible ( las características de las cámaras de video) se establecieron las distancias adecuadas.

Uno de los módulos computarizados del sistema, calcula a partir del método DLT, los parámetros que se utilizan en la reconstrucción tridimensional de los puntos en el espacio desconocidos.

El contenido de los primeros capítulos de éste trabajo pretenden responder a preguntas como:

*¿Cual es el modelo fotogramétrico más adecuado?*

*¿Los recursos con los que se cuenta son los adecuados y suficientes para la aplicación del método?*

*¿Es posible convertir un modelo fotogramétrico investigado a método videogramétrico?*

Sabemos que el método fotogramétrico ha sido útil para reconstruir mapas, relieves y contornos de la tierra, y se considera (H. Hatze 1988) que es posible con este método reconstruir los puntos o segmentos anatómicos por medio del modelo matemático DLT (H.M.Karara 1971). Además si es posible visualizar en un ambiente computarizado los movimientos en tres dimensiones para el análisis biomecánico.

La reconstrucción nos permitiría hacer estudios de varios movimientos que realiza el individuo en actividades de la vida cotidiana, en el ambiente laboral y en especialidades deportivas.

## 5.3 INSTRUMENTOS.

Para la realización de un análisis tridimensional contamos con el siguiente equipo:

- \* 3 Cámaras de video no profesional de formato V8 que graban a una frecuencia de 30 cuadros por segundo marca SONY, con un acercamiento de 10x, velocidad de obturador de 1/10,000 seg. CCD.

- \* Tarjeta de circuitos integrados FAST AvMASTER para la digitalización (Overlay) de imágenes a partir de video
- \* Software: Para el uso de la tarjeta Overlay (Media Studio, Animator PRO, paquetería para procesamiento y digitalización de imágenes en plataforma PC, y el software desarrollado para el propósito del proyecto ANABIO y ANABIO3D
- \* 3 Tripodes para sostener y fijar cada una de las cámaras.
- \* Comparador: estructura de aluminio en forma paralelepípedo de 3 mts de largo por 2 mts altura y 1.50 mts. de fondo.
- \* Strobo (luz stroboscópica) donde su encendido se usa para la sincronización de las vistas de las tres cámaras.
- \* Computadoras personales compatibles Pentium 32MB Ram a 200 Mhz.
- \* Monitor para la reproducción de los videos.

## 5.4 DISEÑO DEL COMPARADOR.

El *comparador* es una estructura de dimensiones conocidas que se utiliza para calibrar las imágenes. El diseño de este *comparador* se hizo con la idea de calibrar las imágenes grabadas del espacio de varios tipos de desplazamiento, el espacio que ocupa un individuo normal en un ciclo de marcha. Un ciclo de marcha son los movimientos correspondientes a un paso de pie derecho más un paso de pie izquierdo del andar. Esta secuencia de movimientos es cíclica, es decir se repite n veces mientras que un individuo camina. Entonces el *comparador* es una estructura diseñada por el analista y cumple la importante función de ser el instrumento con el que se calibran las imágenes que graban las cámaras, del espacio dentro del cual se realiza el movimiento.

Se deben conocer las dimensiones de la estructura, (largo, ancho y alto), debe ser una estructura rígida, bien definida y colocada lo más firme posible (sin inclinación), de lo contrario habrá problemas de precisión en la medición de los puntos. Una vez elaborada la estructura se coloca sobre el piso donde se ejecutará el movimiento. Las cámaras deben iniciar la grabación lo más sincronizado posible. Se graba unos segundos, sin mover las cámaras se retira el *comparador* y posteriormente se continúa grabando al sujeto quien deberá realizar una serie de movimientos en el área que abarcó el *comparador*. Después de grabar varias series del individuo en movimiento se finaliza la grabación, a continuación visualizan los cuadros para ser seleccionados y digitalizados, se inicia el proceso computarizado que consiste en aplicar el método matemático DLT a las coordenadas de los puntos conocidos del *comparador*.

### 5.4.1 DIAGRAMAS DEL COMPARADOR.

Las mediciones de imagen de la película son usualmente hechas con dos comparadores de coordenadas. Cuenta con una rejilla especial que tiene aproximaciones iguales en el área de trabajo en donde se está empleando la calibración del comparador, para un mejor mapeo de las cámaras empleadas, un operador debe observar los puntos de la cámara a través del comparador microscópico y seleccionar los valores medidos, para que al final los valores sean comparados con los valores estándares.

Así, cada laboratorio cuenta con su propia secuencia de lectura de coordenadas para las rejillas, el número de repeticiones de lectura y número de lectura de patrones.

Los datos son normalmente reducidos por cada iteración hecha usando un programa de mínimos cuadrados hasta obtener un óptimo resultado de la rejilla. Las correcciones pueden ser hechas tanto para uno o para otro dependiendo del ajuste del comparador ó corregido de acuerdo al número de mediciones.

Otros comparadores diseñados son: Fig 5.2 y Fig. 5.3



Fig. 5.2 Se colocó el mismo modelo de comparador en diferentes lugares para cubrir todo el espacio.



Fig. 5.3 Modelo de comparador que calibra solo una sección del espacio en el que se realiza el movimiento.

Para el proyecto ANABIO-3D, se estructuró un modelo de comparador de forma paralelepípeda irregular para la calibración de los datos capturados. Para ello el comparador fue elaborado con las siguientes características físicas:

- Perfil cuadrado de aluminio de 1 ½ " color blanco.
- 8 ménsulas de 20 cm. x 25 cm.
- 8 ménsulas de 10 cm. x 10 cm.
- 8 ménsulas de 7.5 cm. x 7.5 cm.
- Pintura negra laca.

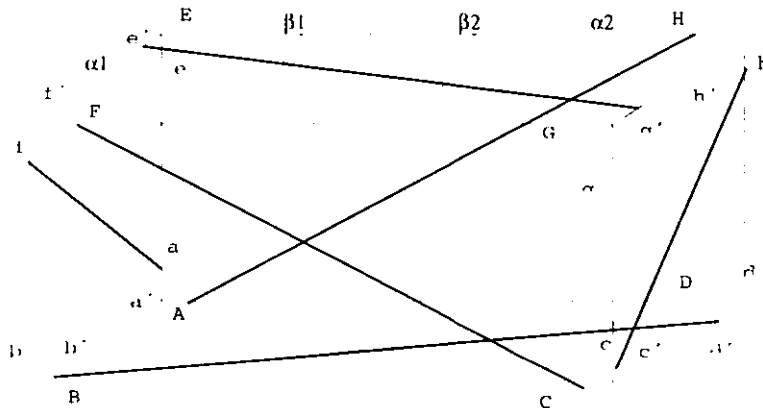
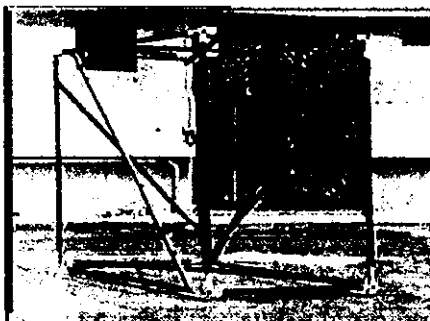


Fig. 5.4 Diseño y estructura del Comparador

Estructura del comparador y Travesaños de refuerzo.

..... Travesaños para colocación de puntos en el espacio del objeto.

La simbología está elaborada de la manera siguiente: las letras a,a' y A corresponden a las uniones en cada esquina de la estructura del comparador, no a los travesaños de refuerzo ni a los travesaños para los puntos en el espacio del objeto, de la misma manera b,b' y B; c,c' y C; d,d' y D; e,e' y E; f,f' y F; g,g' y G; h,h' y H. La unión se realiza por medio de las ménsulas ajustadas con tornillos de ½ ". Cada travesaño de refuerzo lleva la simbología correspondiente al travesaño del comparador que lo une, por ejemplo el travesaño de refuerzo inferior es b' y d'; los travesaños para colocación de puntos en el espacio del objeto llevan la misma técnica. Fig. 5.5



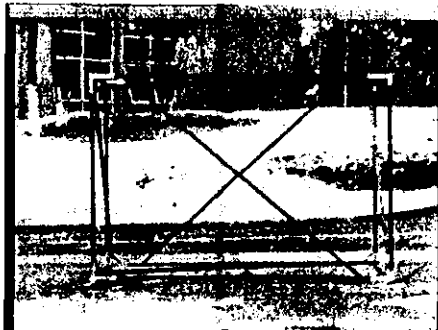
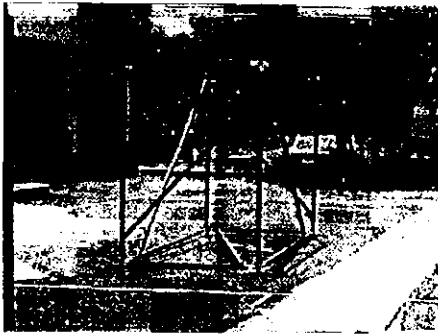


Fig. 5.5 Imágenes digitalizadas de las diferentes vistas del comparador

### 5.4.2 MEDICIONES.

Mediciones de las coordenadas (X,Y,Z) de los puntos conocidos en el espacio. El comparador usado consiste de 18 puntos, 8 esferas (19-26) y 8 esquinas (E1-E8).

Tablas de mediciones en X para tres muestreos:

PUNTOS	X-1a.	X-2a.	X-3a.	PROMEDIO	DESVIACION ESTANDAR
1	0	0	0	0.00	0.00
2	67.40	67.5	67.5	67.47	0.06
3	295.5	296.5	295.6	295.87	0.55
4	271.5	272.2	274.8	272.83	1.74
5	185.5	187.2	185.3	186.00	1.04
6	292.8	295.3	297.5	295.20	2.35
7	296.4	296.5	295.9	296.27	0.32
8	296.0	296	297.6	296.53	0.92
9	296.3	298.2	299.9	298.13	1.80
10	178.6	180.4	180	179.67	0.95
11	228.4	228.2	228.1	228.23	0.15
12	196.1	196.5	197.6	196.73	0.78
13	0	0	1.8	0.60	1.04
14	0	0	0	0.00	0.00
15	3.6	4.1	4.9	4.20	0.66
16	0	0	0.6	0.20	0.35
17	101.2	101.5	101.6	101.43	0.21
18	57.8	59.4	58.4	58.53	0.81
19	12.8	13.5	10.8	12.37	1.40
20	48.9	48.5	50.8	49.40	1.23
21	76	76.1	76.6	76.23	0.32
22	74.5	78.6	76.6	76.57	2.05
23	219.1	219.2	220.1	219.47	0.55
24	217.6	218.2	220.1	218.63	1.31
25	251.5	252.1	250.6	251.40	0.75
26	285.8	286.5	283.6	285.30	1.51
E1	0	0	0	0.00	0.00
E2	295.9	296.1	296.2	296.07	0.15
E3	295.9	297.6	297.7	297.07	1.01
E4	0	0	0.8	0.27	0.46
E5	0	0	0	0.00	0.00
E6	3.7	4.2	3.6	3.83	0.32
E7	297.7	295.9	298.4	297.33	1.29
E8	295.8	295.9	297.2	296.30	0.78

Tablas de mediciones en Y para tres muestreos:

<b>PUNTOS</b>	<b>Y-1a.</b>	<b>Y-2a.</b>	<b>Y-3a.</b>	<b>PROMEDIO</b>	<b>DESVIACION ESTANDAR</b>
1	0	0.0	0	0.00	0.00
2	0	0.0	0	0.00	0.00
3	0	-1.5	0	-0.50	0.87
4	-5	-5	-5	-5.13	0.23
5	2.3	0.8	2.3	1.80	0.87
6	116.4	114.2	114.8	115.13	1.14
7	75.8	75.5	75.4	75.57	0.21
8	143.6	141.9	141.8	142.43	1.01
9	113.8	111.9	112.4	112.70	0.98
10	139.8	139.4	138.9	139.37	0.45
11	146.2	146.2	145.2	145.87	0.58
12	141.5	142.1	141.2	141.60	0.46
13	142.4	142.7	141.8	142.30	0.46
14	112.6	113.5	113.1	113.07	0.45
15	22.1	25.6	22.3	23.33	1.97
16	25.6	25.2	25	25.27	0.31
17	56.9	57.1	56.9	56.97	0.12
18	105.6	105.7	104.2	105.17	0.84
19	93	94.3	93.8	93.70	0.66
20	21.2	21.6	22.1	21.63	0.45
21	62	62.5	62.1	62.20	0.26
22	95.2	96.4	94.6	95.40	0.92
23	56	58.3	57.1	57.13	1.15
24	121.5	120.5	120.1	120.70	0.72
25	101.6	102.4	103.1	102.37	0.75
26	40.2	41.7	39.6	40.50	1.08
E1	0	0.0	0	0.00	0.00
E2	0	0.0	0	0.00	0.00
E3	-4.5	-4.5	-5.2	-4.73	0.40
E4	-4.3	-4.0	-0.8	-3.03	1.94
E5	146.2	146.6	146.3	146.37	0.21
E6	142.6	142.7	145.1	143.47	1.42
E7	141.1	141.9	141.6	141.53	0.40
E8	146.2	146.6	146.2	146.33	0.23

Tablas de mediciones en Z para tres muestreos:

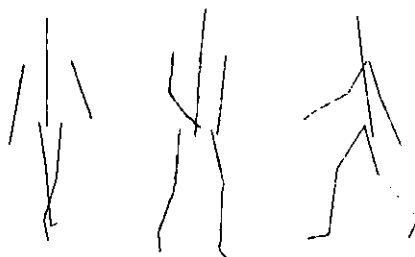
<b>PUNTOS</b>	<b>Z-1a.</b>	<b>Z-2a.</b>	<b>Z-3a.</b>	<b>PROMEDIO</b>	<b>DESVIACION ESTANDAR</b>
1	32.5	32.5	32.7	32.57	0.12
2	0	0	0	0.00	0.00
3	47.4	47.3	47.1	47.27	0.15
4	195.7	195.8	198.9	196.80	1.82
5	63	60.2	60.9	61.37	1.46
6	144.8	144.4	144	144.40	0.40
7	0	0	0	0.00	0.00
8	162.8	162.8	163.3	162.97	0.29
9	195.8	197.0	193.7	195.50	1.67
10	123.5	124.2	123.9	123.87	0.35
11	0	0	0	0.00	0.00
12	195.6	196.2	195	195.60	0.60
13	173.4	173.9	173.9	173.73	0.29
14	0	0	0	0.00	0.00
15	143.2	144.2	144.7	144.03	0.76
16	195.8	196.6	193.1	195.17	1.83
17	3.8	3.8	3.8	3.80	0.00
18	192.6	191.2	192.6	192.13	0.81
19	129.1	127.4	130.1	128.87	1.37
20	49	46.5	49.1	48.20	1.47
21	169.5	168.9	172.3	170.23	1.81
22	30.4	30.3	31	30.57	0.38
23	65.9	66.9	67.3	66.70	0.72
24	109.4	109.6	111.4	110.13	1.10
25	88.1	87.8	89.4	88.43	0.85
26	150.4	148.8	152.6	150.60	1.91
E1	0	0	0	0.00	0.00
E2	0	0	0	0.00	0.00
E3	197.6	196.6	197.8	197.33	0.64
E4	196.2	196.4	196.1	196.23	0.15
E5	0	0	0	0.00	0.00
E6	196.3	196.5	196.7	196.50	0.20
E7	196.9	196.6	196.7	196.73	0.15
E8	0	0	0	0.00	0.00



## 5.5 SESIÓN DE GRABACIÓN

Una sesión de grabación debe ser bien planeada, es importante tomar en cuenta la *locación* de grabación. Se deben conocer las dimensiones del área, para dar inicio al montaje de comparador y cámaras, en primer lugar, el enfoque de cámaras, se recomienda tomar una distancia considerable entre el objeto a grabar y la cámara, la altura es aproximadamente a un metro del piso, se enfoca hacia el centro al objeto lo mejor y más posible a modo que encuadre con el objetivo de la cámara. Posteriormente se coloca el comparador, se fija y se graba unos segundos, se detiene la grabación para retirar el comparador y se reanuda la grabación, ahora el sujeto ejecuta algunos movimientos para su análisis. ANABIO © Espinosa 1993.

### 5.5.1 EJEMPLO DE CORRIDA CON OBTENCIÓN DLT



Fi. 5.6 Ejemplo de tres vistas de un instante en la secuencia de marcha de un individuo

\*\*\*\*\* A N A B I O 3 D \*\*\*\*\*  
 > > CALIBRACION DE CAMARAS < < <  
 > > METODO DE DLT. < < <

Fecha 2/3/1998

L E C T U R A D E L O S D A T O S .

Número de vistas: 3  
 Número de puntos de control: 8  
 Número de observaciones de los puntos reales del comparador: 3  
 Número de observaciones de los puntos de imagen del comparador: 5  
 Errores estándar de las coordenadas del objeto en el espacio (sx, sy, sz):  
 0.400000 0.400000 0.400000

Número y Coordenadas de los puntos del objeto espacio:

Número del punto	Valor de las coordenadas (x,y,z)		
19	12.80,	93.00,	129.10
19	13.50,	94.30,	127.40
19	10.80,	93.80,	130.10
20	48.90,	21.20,	49.00
20	48.50,	21.60,	46.50
20	50.80,	22.10,	49.10
21	76.00,	62.00,	169.50
21	76.10,	62.50,	168.90
21	76.60,	62.10,	172.30
22	74.50,	95.20,	30.40
22	78.60,	96.40,	30.30
22	76.60,	94.60,	31.00
23	219.10,	56.00,	65.90
23	219.20,	58.30,	66.90
23	220.10,	57.10,	67.30
24	217.60,	121.50,	109.40
24	218.20,	120.50,	109.60
24	220.10,	120.10,	111.40
25	251.50,	101.60,	88.10
25	252.10,	102.40,	87.80
25	250.60,	103.10,	89.40
26	285.80,	40.20,	150.40
26	286.50,	41.70,	148.80
26	283.60,	39.60,	152.60

Lee las coordenadas de los puntos del comparador de todas las vistas.

--> Vista No. 1  
 Prom.: x = 245.60, y = 189.60.  
 Prom.: x = 356.40, y = 302.40.  
 Prom.: x = 339.40, y = 128.00.  
 Prom.: x = 299.40, y = 324.80.  
 Prom.: x = 364.00, y = 267.80.

Prom.: x = 297.00, y = 215.60.  
Prom.: x = 326.80, y = 234.00.  
Prom.: x = 404.00, y = 160.80.

->> Vista No. 2

Prom.: x = 539.80, y = 205.40.  
Prom.: x = 477.60, y = 313.40.  
Prom.: x = 442.80, y = 144.00.  
Prom.: x = 404.60, y = 346.60.  
Prom.: x = 248.00, y = 292.20.  
Prom.: x = 244.60, y = 237.40.  
Prom.: x = 199.60, y = 264.60.  
Prom.: x = 154.80, y = 176.20.

->> Vista No. 3

Prom.: x = 226.00, y = 185.00.  
Prom.: x = 147.00, y = 313.80.  
Prom.: x = 194.20, y = 109.20.  
Prom.: x = 244.20, y = 346.20.  
Prom.: x = 329.40, y = 290.00.  
Prom.: x = 426.20, y = 215.20.  
Prom.: x = 426.80, y = 251.60.  
Prom.: x = 361.40, y = 133.00.

C A L C U L O S .

Error estandar de las coordenadas del comparador = 2.655905

Acomoda de acuerdo al número de punto, a las coordenadas espaciales de objeto y a las coordenadas de cada vista del comparador.

Coordenadas de los puntos (x,y,z) del objeto espacio:

1	12.37	93.70	128.87
2	49.40	21.63	48.20
3	76.23	62.20	170.23
4	76.57	95.40	30.57
5	219.47	57.13	66.70
6	218.63	120.70	110.13
7	251.40	102.37	88.43
8	285.30	40.50	150.60

Coordenadas X y Y de los puntos del comparador:

1	245.60	539.80
2	356.40	477.60
3	339.40	442.80
4	299.40	404.60
5	364.00	248.00
6	297.00	244.60
7	326.80	199.60
8	404.00	154.80

Coordenadas Z de los puntos del comparador:

1	189.60	205.40
2	302.40	313.40
3	128.00	144.00
4	324.80	346.60
5	267.80	292.20
6	215.60	237.40

7	234.00	264.60
8	160.80	176.20

Coordenadas del Comparador:

Vista 1:

19	245.60	189.60
20	356.40	302.40
21	339.40	128.00
22	299.40	324.80
23	364.00	267.80
24	297.00	215.60
25	326.80	234.00
26	404.00	160.80

Vista 2:

19	539.80	205.40
20	477.60	313.40
21	442.80	144.00
22	404.60	346.60
23	248.00	292.20
24	244.60	237.40
25	199.60	264.60
26	154.80	176.20

Vista 3:

19	226.00	185.00
20	147.00	313.80
21	194.20	109.20
22	244.20	346.20
23	329.40	290.00
24	426.20	215.20
25	426.80	251.60
26	361.40	133.00

Los valores de DLT[ ]:

1: 0.32	2: -1.69	3: 0.88	4: 35.86	5: 0.05		
6: -0.83	7: -1.40	8: 33.09	9: 0.00	10: -0.00	11: -0.00	

Los valores de DLT[ ]:

1: 0.33	2: -1.81	3: -0.81	4: 35.81	5: 0.07		
6: -0.90	7: -1.34	8: 32.58	9: 0.00	10: -0.00	11: -0.00	

Orientación interna, vista 1:

Punto principal: xp = 450.72, yp = 343.57,

Distancia principal: c = 112.34

Error estandar de la unidad de peso = 1.62

Valores calculados de las incógnitas y errores estandar,

Vista: 1.

Par metros DLT	Errores estandar
0.33	0.17
-1.81	0.25
-0.81	0.19
35.81	1.06
0.07	0.09
0.90	0.25

-1.34	0.15
32.58	1.53
0.00	0.00
-0.00	0.00
-0.00	0.00

Los valores de DLT[]:

1:-1.11	2: 0.03	3:-0.41	4:53.53	5: 0.15	
6: 0.24	7:-1.70	8:38.08	9: 0.00	10: 0.00	11:-0.00

Los valores de DLT[]:

1:-1.11	2: 0.02	3:-0.41	4:53.69	5: 0.16	
6: 0.23	7:-1.69	8:38.03	9: 0.00	10: 0.00	11:-0.00

Orientación interna, vista 2:

Punto principal: xp = -87.89, yp = 976.72,

Distancia principal: c = 586.99

Error estandar de la unidad de peso = 1.41

Valores calculados de las incógnitas y errores estandar,

Vista: 2.

Par metros DLT	Errores estandar
-1.11	0.15
0.02	0.34
-0.41	0.29
53.69	2.01
0.16	0.12
0.23	0.30
-1.69	0.18
38.03	1.55
0.00	0.00
0.00	0.00
-0.00	0.00

Los valores de DLT[]:

1: 0.43	2: 0.88	3:-0.28	4:10.65	5:-0.15	
6:-0.22	7:-1.57	8:36.89	9:-0.00	10:-0.00	11:-0.00

Los valores de DLT[]:

1: 0.44	2: 0.91	3:-0.31	4:10.74	5:-0.15	
6:-0.20	7:-1.58	8:36.92	9:-0.00	10:-0.00	11:-0.00

Orientación interna, vista 3:

Punto principal: xp = -234.65, yp = 920.11,

Distancia principal: c = 576.46

Error estandar de la unidad de peso = 5.28

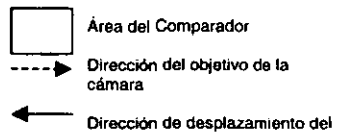
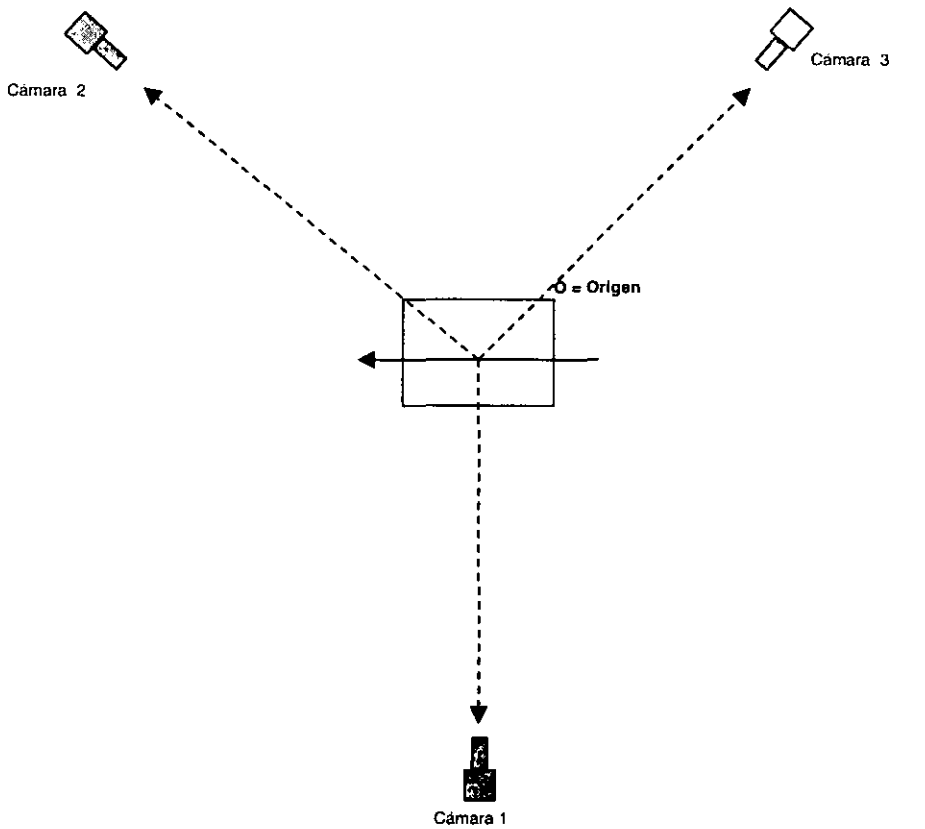
Valores calculados de las incógnitas y errores estandar,

Vista: 3.

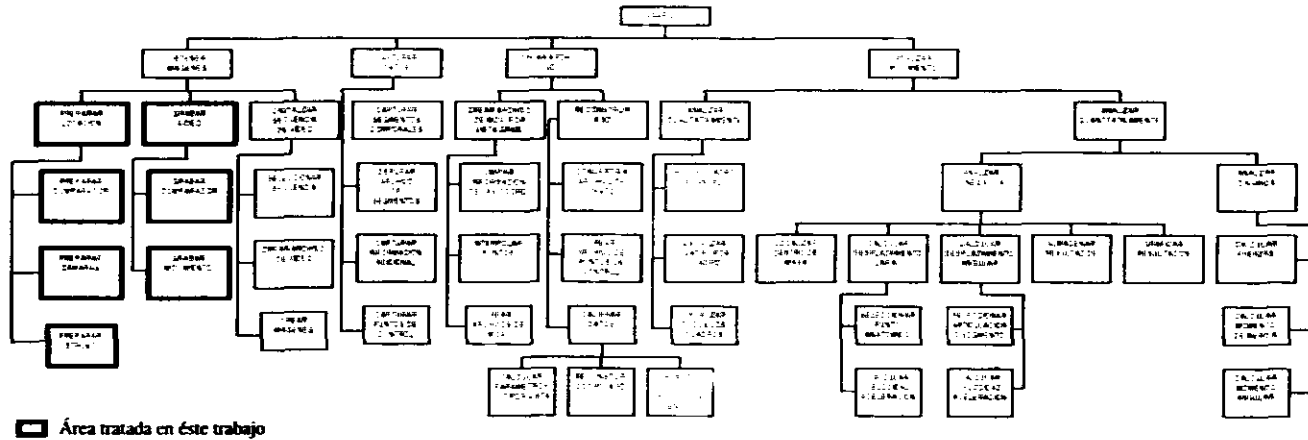
Par metros DLT	Errores estandar
0.44	0.20
0.91	0.43
-0.31	0.24

10.74	2.42
0.15	0.11
-0.20	0.26
-1.58	0.18
36.92	1.83
0.00	0.00
0.00	0.00
-0.00	0.00

## ESQUEMA DE UN EJEMPLO DE LA POSICIÓN DE LAS CÁMARAS PARA UNA LOCACIÓN DE GRABACIÓN.



# ANABIO3D



**5.6 DIAGRAMA DEL SISTEMA ANABIO3D**



#### **IV.- CONCLUSIONES**

Finalmente podemos concluir que la calibración de las imágenes de video para un estudio de análisis del movimiento es fundamental. En la imagen digitalizada de una sujeto se pueden observar diversos parámetros que describen las características de la postura del individuo en ese instante, es necesario corregir algunos factores de la imagen como son la distorsión, el paralelismo y la aberración con el objeto de tener más precisión de la información que de ella se obtiene. Además resulta que la aplicación del modelo matemático DLT aproxima la localización de los puntos en el espacio a los valores reales en forma confiable, y el ajuste por Mínimos Cuadrados empleado en éste método es estadísticamente adecuado para la obtención de los parámetros de calibración.

Los parámetros DLT aplicados a una secuencia de puntos anatómicos en movimiento captado por varias vistas, proporciona los valores tridimensionales de estos puntos que son los datos fuente para el análisis tridimensional del movimiento. Las variables que se estudian en un análisis biomecánico son entre otros la localización del centro de masa del individuo, la velocidad y aceleración de su desplazamiento, el cálculo de los ángulos de los segmentos corporales y sus velocidades y aceleraciones angulares en los instantes que componen la ejecución del movimiento que desarrolle el individuo. El cálculo de los parámetros que describen estas características del movimiento son objeto de un trabajo posterior a éste.

## **GLOSARIO**

**ABERRACIÓN.-** IMPERFECCIÓN DE LA IMAGEN.

**ANABIO3D .-** ANÁLISIS BIOMECÁNICO A 3D.

**BETACAM.-** FORMATO DE EDITORA A 60 CUADROS POR SEGUNDO.

**BIOSISTEMA.-** SISTEMA VIVO O HUMANO.

**CAJA OSCURA .-** PARTE INTERNA DE UNA CÁMARA FOTOGRÁFICA.

**CALIBRACIÓN .-** SINTONIZACIÓN O AJUSTE.

**COMPARADOR .-** INSTRUMENTO GEOMÉTRICO CON MEDICIONES DEFINIDAS Y PRECISAS.

**DISTANCIA PRINCIPAL .-** DISTANCIA DE LA PARTE INTERNA DE LA CÁMARA AL  
OBJETIVO O LENTE DE LA CÁMARA.

**DISTORSIÓN .-** ABERRACIÓN GEOMÉTRICA.

**EJE PRINCIPAL .-** DISTANCIA DE LA PARTE INTERNA DE LA CÁMARA AL OBJETO.

**FOTOGRAFÍA VERTICAL .-** FOTOGRAFÍA AÉREA TOMADA PERPENDICULAR AL PISO  
EXACTO.

**FOTOGRAFÍA INCLINADA .-** FOTOGRAFÍA TOMADA SOBRE VUELO A CUALQUIER GRADO  
DE INCLINACIÓN.

**HOMÓLOGO .-** FIGURA GEOMÉTRICA QUE TIENE LADOS SEMEJANTES

**MAPEO .-** TOMA FOTOGRÁFICA O GRÁFICA.

**ÓPTICA .-** CIENCIA PARTE DE LA FÍSICA QUE ESTUDIA LOS FENÓMENOS DE LA LUZ.

**PIXEL .-** MÍNIMA UNIDAD GRÁFICA.

**PUNTO PRINCIPAL .-** PUNTO CENTRAL DE LALENTE DE LA CÁMARA.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

- **American Society of Photogrammetry.**

- MANUAL OF FOTOGAMETRY.

- Fourth Edition.

-1980.

- **Ball Kevin A & Pierrynowski Michael R.**

- A MODIFIED DIRECT LINEAR TRNASFORMATION( DLT) CALIBRATION PROCEDURE TO IMPROVE THE ACCURACY OF 3D RECONSTRUCTION FOR LARGE VOLUMES.

- **Bernard Grob.**

- TELEVISIÓN PRÁCTICA Y SISTEMAS DE VIDEO.

- Marcombo Boixareu Editores.

-1990.

- **Chanflón Olmos Carlos.**

- FOTOGAMETRÍA.

- Primera Edición.

- 1979.

- **De Haan Theo and Berry Den Brinker.**

- DIRECT LINEAR TRANSFORMATION METHOD FOR 3D MOVEMENT REGISTRATION USING "SUJECT TRACKING" CAMERAS.

- **D. Donskoi & V. Zatskorski.**

- BIOMECÁNICA DE LOS EJERCICIOS FÍSICOS.

- Edit. Raduga Moscu.

- 1988.

- **Escuela de Estudios Árabes. CSIC Granada.**

- MÉTODOS SIMPLIFICADOS EN FOTOGAMETRÍA ARQUITECTÓNICA. (COMUNICACIÓN PRESENTADA EN ELI XIV SYMPOSIUM INTERNACIONALI DEL COMITÉ INTERNACIONAL DE FOTOGAMETRÍA ARQUITECTÓNICA. CIPA).

- 1992.

- **Espinosa Sánchez Matilde.**

- ARTICULO:BIOMECÁNICA: ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO HUMANO.

- Dirección de Cómputo para la Investigación, DGSCA, UNAM.

- **Espinosa Sánchez Matilde.**

- TESIS: IMPLANTACIÓN DE UN MÉTODO COMPUTARIZADO PARA EL ANÁLISIS BIOMECÁNICO DE LOS EJERCICIOS FÍSICOS.

- Dirección de Cómputo para la Investigación, DGSCA, UNAM.

- Enero 1993.

- **Fareboother, R.W.**

- LINEAR LEST SQUARES COMPUTATIONS.

- Primera Edición.

- **Gunther Baumler, Klaus Schneider.**

- BIOMECÁNICA DEPORTIVA, FUNDAMENTOS PARA EL ESTUDIO Y LA PRÁCTICA.

- Edit. Roca.

- 1989.

- **Grosser / Neumaier.**

- TÉCNICAS DE ENTRENAMIENTO.

- Edit. Roca.

- 1986.

- **Hardt, D.E. & Mann, R.W.**

- A FIVE BODY - THREE DIMENSIONAL DYNAMIC ANALYSIS OF WALKING.

- J. Biomechanics Vol.13, pp 455-457. 1980.

- **Hatze H.**

- HIGH-PRECISION THREE-DIMENSIONAL PHOTOGRAMMETRIC CALIBRATION AND OBJECT SPACE RECONSTRUCTION USING A MODIFIED DLT-APPROACH.

- J. Biomechanics Vol 21, No. 7, pp 533-538. 1988.

- **Johnson Robert.**

- ESTADÍSTICA ELEMENTAL.

- Edit. Iberoamericana.

- 1990.

- **Lam T.C, Frank C.B. & Shrive N.G..**

- CALIBRATION CHARACTERISTICS OF A VIDEO DIMENSION ANALYSER (VDA) SYSTEM.

- J. Biomechanics Vol. 25 No. 10 pp 1227-1231, 1992.

- 1992.

- **Mansfield, P.K. R.S. Fijan, & R.W. Mann.**

- INTERNAL CALIBRATION OF OPTO- ELECTRONIC CAMERAS. ( PROCEEDINGS OF IEEE NINTH ANNUAL CONFERENCE OF THE ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY SOCIETY, UNITED KINGDOM)

- 1987.

- **Marzan Genaro T. & Dr. Karara H.M.**

- A COMPUTER PROGRAM FOR DIRECT LINEAR TRANSFORMATION SOLUTION OF THE COLINEARITY CONDITION, AND SOME APLICATIONS OF IT.

- 1971.

- **Mendenhall William, & Reinmuth James E.**

- ESTADÍSTICA PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA.

- Edit. Iberoamerica.

- 1978.

- **Sanjib K. Ghosh.**

- ANALYTICAL PHOTOGRAMMETRY.

- Edit. Pergamon Press Inc.

- 1979.

- **Veldpaus, F.E. H.J. Woltring & L.J.M.G. Dortmans.**

- A LEAST-SQUARES ALGORITHM FOR THE EQUIFORM TRNASFORMATION FROM SPATIAL MARKER COORDINATES.

- J. Biomechanics Vol. 21, No. 1, pp 45-54. 1988.

- **Virgilio Tosi.**

- MANUAL DE CINE CIENTIFICO.

- UNAM- UNESCO. Edit. Difusión Cultural UNAM.

- 1987.

- **Woltring Herman J.**

- PLANAR CONTROL IN MULTI-CAMERA CALIBRATION FOR 3-D GAIT STUDIES.

- J. Biomechanics Vol. 13, pp 39-48, 1980.